
**СОВРЕМЕННЫЕ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЕ
ПРОБЛЕМЫ**

Серия разработана
**МОСКОВСКИМ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИМ
ИНСТИТУТОМ**

Л. А. ЧЕРНОВ

ВОЛНЫ
В СЛУЧАЙНО-
НЕОДНОРОДНЫХ
СРЕДАХ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

МОСКВА

1977

Волны в случайно-неоднородных средах. Чернов Л. А.
Изд-во «Наука», 1977.

Монография посвящена теории распространения волн в средах, характеристики которых претерпевают случайные изменения в пространстве и времени. В ней рассмотрены такие эффекты, как рассеяние волн, флуктуации амплитуды, фазы, направления распространения и других параметров волны.

Книга рассчитана на физиков и геофизиков — научных работников, инженеров и студентов старших курсов акустической, оптической и радиофизической специальностей.

Илл. 19, библи. 80 назв.

ВВЕДЕНИЕ

Характерной особенностью всякой реальной среды является ее неоднородность. Наблюдаются два типа неоднородностей: регулярные и случайные. Регулярные неоднородности обусловлены изменением в пространстве усредненных характеристик среды, случайные неоднородности — отклонениями от средних значений.

Как регулярные, так и случайные неоднородности могут существенно, хотя и по-разному, влиять на распространение волн в среде. Влиянием регулярных неоднородностей обусловлены, например, такие явления, как рефракция и волноводное распространение. Влиянием случайных неоднородностей обусловлено рассеяние волн. Рассеянные волны, накладываясь на первичную волну, вызывают флуктуации амплитуды и фазы результирующего поля. Этим объясняются флуктуации громкости при распространении звука в атмосфере или в море, мерцание звезд, иногда замирания радиосигналов (фединги).

Регулярные изменения в реальной среде совершаются преимущественно в каком-нибудь одном направлении (с глубиной — в море, с высотой — в атмосфере). Поэтому реальная среда в первом приближении может рассматриваться как слоисто-неоднородная.

Теория распространения волн в слоистых средах изложена, например, в недавно вышедшей монографии Л. М. Бреховских [1].

Несмотря на то что вопрос о мерцании звезд имеет тысячелетнюю историю (им интересовался еще Аристотель), развитие теории распространения волн в случайно-неоднородных средах относится в основном к последним двум-трем десятилетиям и обусловлено в значительной мере практическими потребностями гидроакустики и радиофизики. За четверть столетия появилось много работ на эту тему. Их обзор можно найти в статье [2].

В настоящей книге изложены лишь основы статистической теории распространения волн в случайно-неоднородных средах. Рассмотрены простейшие применения теории и только те методы, которыми пользовался автор в своих работах.

В первой части книги излагается лучевая теория, при этом используется уравнение Эйнштейна—Фоккера—Колмогорова в маломугловом приближении.

Вторая часть посвящена дифракционной теории. При рассмотрении задач рассеяния волн на случайных неоднородностях используется метод малых возмущений. В основу корреляционной теории флуктуаций амплитуды и фазы волны легли формулы для флуктуаций амплитуды и фазы волны, полученные методом плавных возмущений, предложенным С. М. Рытовым [3]. Теория сильных флуктуаций поля изложена на основе локального метода [4].

В последней части рассмотрен вопрос о влиянии флуктуаций в падающей волне на дифракционное изображение фокусирующей системы (антенны).

В основу настоящей монографии положены материалы опубликованной в 1958 г. книги автора «Распространение волн в среде со случайными неоднородностями». Однако эти материалы претерпели существенную переработку. Заново написаны части, посвященные лучевой теории и теории фокусирующих систем. Введена новая глава, излагающая теорию сильных флуктуаций на основе предложенного автором локального метода. Исследуется вопрос о применимости метода плавных возмущений и локального метода. Проводится сравнение теоретических данных с экспериментальными, полученными в последнее время.

Автор выражает глубокую признательность В. И. Гельфгату, оказавшему большую помощь в процессе подготовки к печати настоящего издания.

Часть первая

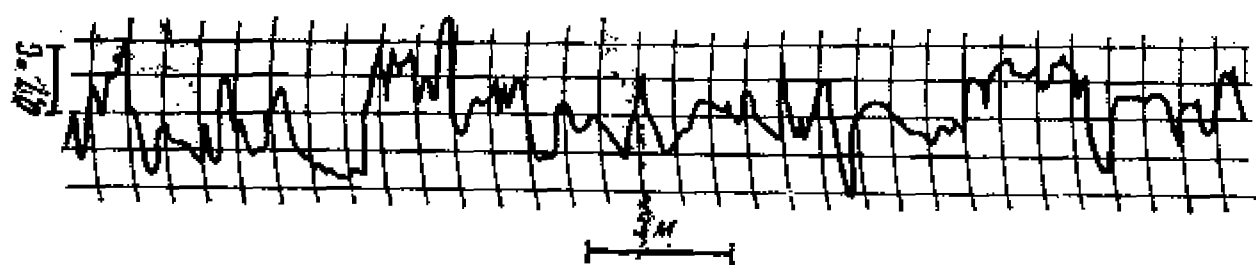
ЛУЧЕВАЯ ТЕОРИЯ

Глава I

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СРЕДЫ

В среде со случайными неоднородностями показатель преломления является случайной функцией координат и времени. Изменения показателя преломления в море и в атмосфере обусловлены обычно флуктуациями температуры. Кроме того, в море могут играть роль флуктуации солености, а в атмосфере — флуктуации влажности. По-видимому, в большинстве случаев эти флуктуации малы.

Либерман [5] экспериментально исследовал температурные неоднородности в океане с помощью высокочувствительного термометра, установленного на подводной лодке. Полученная им запись температурных флуктуаций приведена на фиг. 1.



Фиг. 1. Запись температурных флуктуаций в океане

Выбор подводной лодки вместо надводного корабля вызывался необходимостью избавиться от качки, которая вносит дополнительные ошибки в измерения. Лодка перемещалась на глубинах от 30 до 60 м. Средняя температурная флуктуация составляла $0,04^\circ \text{C}$ при среднем масштабе неоднородностей $a \sim 60 \text{ см}$. Таким малым температурным флуктуациям соответствуют малые относительные изменения показателя преломления: средний квадрат флуктуаций звукового показателя преломления равен $\langle \mu^2 \rangle = 5 \cdot 10^{-9}$ ($\sqrt{\langle \mu^2 \rangle} \approx 7 \cdot 10^{-5}$).

Если бы температурные флуктуации измерялись градусами, то даже в этом случае относительные изменения показателя преломления не превышали бы 0,01. Влияние флуктуаций солёности, по-видимому, еще менее значительно.

§ 1. Корреляционная и структурная функции

Допустим, что флуктуации показателя преломления представляют собой случайный во времени и пространстве процесс, описываемый случайной функцией координат и времени $\mu(r, t)$. Считая этот статистический процесс стационарным во времени, будем характеризовать его корреляционной функцией

$$N_{12} = \langle \mu(r_1, t) \mu(r_2, t) \rangle, \quad (1.1)$$

где угловые скобки означают усреднение по времени t или, на основании эргодической гипотезы, усреднение по совокупности экземпляров, соответствующих различным возможным состояниям реальной среды. Понимая под угловыми скобками усреднение по времени, запишем

$$N_{12} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \mu(r_1, t) \mu(r_2, t) dt.$$

Для пространственно-однородного процесса корреляционная функция $N_{12}(r)$ зависит только от расстояния $r = r_2 - r_1$ между точками среды r_1 и r_2 . Если, кроме того, среда статистически изотропна, то корреляционная функция $N_{12}(r)$ зависит только от модуля r . При $r = 0$ функция N_{12} достигает своего максимума N_{11} , равного среднему квадрату флуктуации показателя преломления $N_{11} = \langle \mu^2 \rangle$.

Коэффициент корреляции N определяется отношением корреляционной функции N_{12} к среднему квадрату флуктуации $\langle \mu^2 \rangle$, т. е. $N = N_{12} / \langle \mu^2 \rangle$, откуда

$$N_{12} = \langle \mu^2 \rangle N. \quad (1.2)$$

С увеличением расстояния между точками коэффициент корреляции убывает от своего максимального значения, равного единице, и на некотором расстоянии, называемом радиусом корреляции, становится малым по сравнению с единицей; статистическая связь между флуктуациями исчезает.

Если статистические свойства среды неоднородны по пространству, то корреляционная функция будет зависеть не только от разностей координат, но и от самих координат.

Помимо пространственной трехмерной корреляционной функции (1.1), введем пространственно-временную четырехмерную корреляционную функцию

$$N_{12} = \langle \mu(r_1, t_1) \mu(r_2, t_2) \rangle.$$

Полагая $t_2 = t_1 + t$ и понимая под угловыми скобками усреднение по времени, запишем

$$N_{12} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \mu(\mathbf{r}_1, t_1) \mu(\mathbf{r}_2, t_1 + t) dt_1.$$

Для стационарного и пространственно-однородного статистического процесса четырехмерная корреляционная функция $N_{12} = N_{12}(\mathbf{r}, t)$ зависит только от разности векторов $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ и разности времен $t = t_2 - t_1$. Соответствующий коэффициент корреляции определяется формулой (1.2). С ростом t коэффициент корреляции убывает и при некотором $t \sim T$, называемом временем корреляции, становится малым по сравнению с единицей. Трехмерная корреляционная функция является частным случаем четырехмерной при $t_1 = t_2$.

Корреляционная функция $N_{12}(\mathbf{r})$ может быть представлена в виде интеграла Фурье

$$N_{12}(\mathbf{r}) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\mathbf{x}) \cos(\mathbf{x}\mathbf{r}) d\mathbf{x},$$

где $\Phi(\mathbf{x})$ — спектральная плотность пульсаций показателя преломления, определяемая через корреляционную функцию $N_{12}(\mathbf{r})$ с помощью обратного преобразования Фурье:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} N_{12}(\mathbf{r}) \cos(\mathbf{x}\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (1.3)$$

Если случайное поле пульсаций показателя преломления изотропно, то в интеграле (1.3) можно ввести сферические координаты и произвести интегрирование по угловым переменным. В результате для спектральной плотности $\Phi(\mathbf{x})$ изотропного поля получим

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi^2 x} \int_0^{\infty} N_{12}(r) \sin(xr) r dr.$$

Взяв в качестве примера гауссову корреляционную функцию $N_{12} = \langle \mu^2 \rangle \exp(-r^2/a^2)$, для спектральной плотности получим выражение

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{\langle \mu^2 \rangle a^3}{8\pi \sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2 a^2}{4}\right),$$

из которого следует, что в корреляционную функцию существенный вклад вносят только те спектральные компоненты, масштаб которых $2/x$ превышает радиус корреляции a . Поэтому очень часто радиус корреляции называют характерным масштабом случайных неоднородностей среды.

Вместо корреляционной функции в качестве статистической характеристики флуктуаций показателя преломления среды можно воспользоваться структурной функцией

$$D_{12} = \langle [\mu(r_1) - \mu(r_2)]^2 \rangle.$$

Для статистически однородной среды между структурной и корреляционной функциями имеет место соотношение

$$D_{12}(r) = 2 [N_{12}(0) - N_{12}(r)], \quad (1.4)$$

которое позволяет найти структурную функцию, если известна корреляционная функция. С ростом r корреляционная функция $N_{12}(r)$ стремится к нулю, а структурная функция $D_{12}(r)$ — к насыщению, достигая в пределе значения $D_{12}(\infty) = 2N_{12}(0)$. Заменив в (1.4) величину $N_{12}(0)$ на $1/2 D_{12}(\infty)$, получим

$$N_{12}(r) = \frac{1}{2} D_{12}(\infty) - \frac{1}{2} D_{12}(r). \quad (1.5)$$

Последнее равенство дает возможность определить корреляционную функцию по заданной структурной функции.

Таким образом, в статистически однородной среде по виду структурной функции можно определить корреляционную функцию.

Однако в реальных средах условие статистической однородности редко соблюдается. Обычно статистические характеристики среды (среднее значение и корреляционная функция) медленно изменяются в пространстве. В этих условиях использование структурной функции представляется более целесообразным. Действительно, медленные изменения в пространстве усредненных характеристик показателя преломления практически невозможно отличить от флуктуаций большого масштаба. С другой стороны, как отмечалось выше, флуктуации большого масштаба могут давать существенный вклад в корреляционную функцию. Вместе с тем флуктуации большого масштаба мало влияют на величину разности $\mu(r_1) - \mu(r_2)$ и, следовательно, мало сказываются на структурной функции. Это значит, что структурной функцией удобно воспользоваться и в том случае, когда условие однородности выполняется лишь локально.

Приступая к экспериментальному изучению случайного поля показателя преломления среды, в статистической однородности которого заранее не уверены, целесообразно найти структурную функцию. Если при этом выяснится, что при разнесении приборов, измеряющих флуктуации показателя преломления в различных точках среды, структурная функция стремится к насыщению, это будет указывать на то, что случайное поле показателя преломления среды удовлетворяет требованию однородности и в случае надобности корреляционная функция может быть найдена с помощью равенства (1.5).

Все сказанное относительно пространственных статистических характеристик среды без всяких изменений переносится на временные статистические характеристики — временные корреляционные и структурные функции $N(\tau)$ и $D(\tau)$. В реальной среде случайные изменения показателя преломления во времени нельзя считать процессом строго стационарным, так как его усредненные характеристики обычно медленно изменяются во времени. Поэтому при экспериментальном изучении среды представляется более целесообразным находить временную структурную функцию $D(\tau)$ флуктуаций показателя преломления, чем корреляционную функцию $N(\tau)$.

§ 2. Определение вида корреляционной или структурной функции

Структурная функция флуктуаций показателя преломления может быть найдена теоретическим путем в случае локально-однородной и локально-изотропной турбулентности. При этом структурная функция подчиняется «закону $2/3$ ». Если, однако, состояние атмосферы удовлетворительно описывается теорией локально-однородной и локально-изотропной турбулентности, то вопрос о применимости этой теории к флуктуациям показателя преломления в морской воде не вполне выяснен.

Коэффициент корреляции для температурных пульсаций в океане был экспериментально определен Либерманом [5], использовавшим коррелятор, производивший перемножение двух температурных кривых $T(x_1)$ и $T(x_1 + x)$ с последующим усреднением по всей записи. На фиг. 2 кружками показаны результаты, полученные Либерманом для различных расстояний x . Зависимость коэффициента корреляции от расстояния удовлетворительно аппроксимируется функцией

$$N(x) = \exp\left(-\frac{|x|}{a}\right),$$

если положить $a = 60$ см.

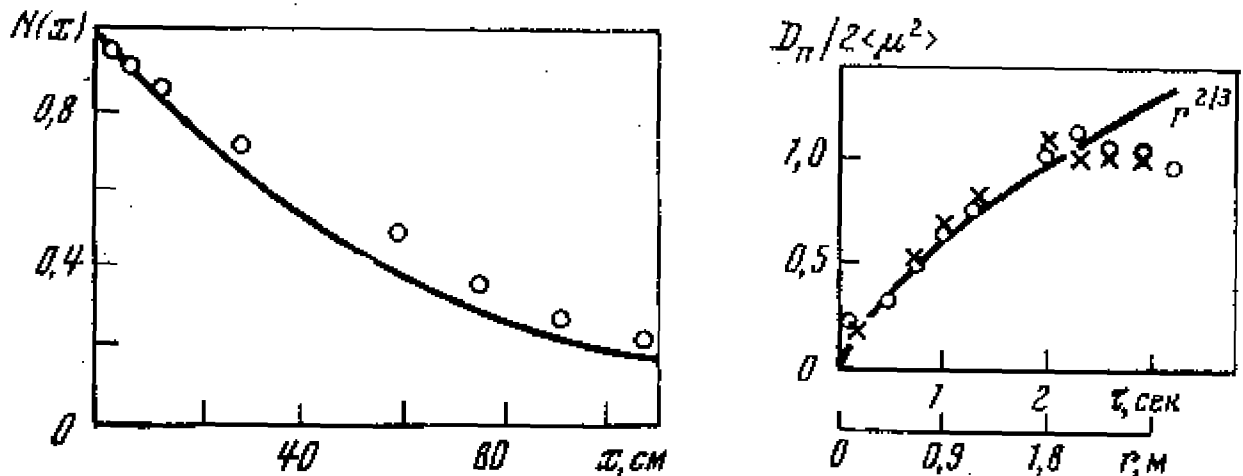
В ряде более поздних работ (см., например, [6]) указывалось на возможность применения теории локально-однородной и локально-изотропной турбулентности при описании поля температурных пульсаций в приповерхностном слое океана.

Большой экспериментальный материал по исследованию случайных неоднородностей морской среды собрал Г. И. Приймак [7]. В результате обработки этого материала были найдены корреляционные и структурные функции температурных пульсаций, вид которых зависит от целого ряда условий, в частности от средних гидрологических условий в море. Всю совокупность корреляционных (и структурных) функций удалось разбить на три класса, из которых один соответствует закону $2/3$, в то время как два других описываются корреляционными функциями, изменяющи-

мися соответственно по степенному и экспоненциальному законам.

Р. Ф. Швачко [8] разработал аппаратуру, которая позволила непосредственно и с большой точностью измерять пульсации показателя преломления морской среды, и построил зависимость структурной функции пульсаций показателя преломления от расстояния. Его результаты приведены на фиг. 3.

В действительности измерялась временная структурная функция с помощью одного прибора, который перемещался вместе с судном относительно среды со скоростью v . Переход к простран-



Фиг. 2. Коэффициент корреляции для температурных флуктуаций в океане

Фиг. 3. Структурная функция пульсаций показателя преломления

венной структурной функции осуществлялся заменой временного интервала τ пространственным r с помощью равенства $r = v\tau$. Весь эксперимент длился около 4 час. Крестиками отмечены значения структурной функции, полученные в начале опыта, кружками — в конце опыта. Как видно из рисунка, гидрологические условия не успели измениться за время эксперимента. Сплошной линией проведена кривая закона $r^{2/3}$.

Известно, что закон Колмогорова — Обухова

$$D_{12}(r) = C_n^2 r^{2/3},$$

где C_n — так называемая структурная постоянная, справедлив в интервале масштабов от l_0 до L_0 . Если внутренний масштаб l_0 определяется минимальными размерами неоднородностей, которые могут существовать из соображений диссипации энергии (в океане $l_0 \sim 1$ см), то внешний масштаб L_0 определяется характерными размерами механизма возбуждения турбулентности.

Структурной функции $C_n^2 r^{2/3}$ соответствует спектральная плотность

$$\Phi(x) = 0,033 C_n^2 x^{-11/3} \quad \left(\frac{1}{L_0} < x < \frac{1}{l_0} \right).$$

Из фиг. 3 видно, что внешний масштаб неоднородностей $L_0 \approx 1,5$ м. Значение структурной постоянной $C_n = 6,6 \cdot 10^{-6} \text{ м}^{-2/3}$.

Отступление от закона $^{2/3}$ наступает на расстоянии $L_0 \simeq 1,5$ м, где структурная функция начинает переходить в область насыщения. Это означает, что случайное поле пульсаций показателя преломления может быть описано корреляционной функцией, причем радиус корреляции нужно положить равным 1,5 м.

В последние годы проводилось изучение «микроструктуры» океана и на больших глубинах. При этом было выяснено, что здесь существуют неоднородности значительно больших масштабов. Так, например, Лорд [9], измеряя медленные флуктуации скорости звука в 1000 милях к северо-востоку от о. Барбадос и в нескольких милях к юго-западу от Бермудских островов на глубине от 200 до 2500 м, обнаружил случайные неоднородности с характерными размерами от нескольких десятков до 100 м.

Измерения флуктуаций показателя преломления в глубинных слоях океана показали [8], что закон $^{2/3}$ прослеживается до масштабов порядка нескольких десятков и сотен метров со значением структурной постоянной $C_n = 10^{-5} \text{ м}^{-1/3}$.

На основании экспериментальных данных можно утверждать, что состояние океана обычно хорошо описывается теорией локально-однородной и локально-изотропной турбулентности, но вместе с тем известны отклонения от закономерностей, даваемых этой теорией, причины которых в настоящее время не вполне ясны. Поэтому в гидроакустических исследованиях желательно опираться на корреляционные или структурные функции произвольного вида, и только в тех случаях, когда исследования в общей форме становятся затруднительными, переходить к корреляционным или структурным функциям специального вида. В дальнейшем в указанных случаях будет использован гауссов коэффициент корреляции

$$N(r) = \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right),$$

особенно удобный в теоретических исследованиях. В отдельных случаях будет использован также коэффициент корреляции следующего вида:

$$N(r) = \exp\left(-\frac{r}{a}\right). \quad (2.1)$$

Необходимо заметить, что пользоваться коэффициентом корреляции (2.1) нужно с известной осторожностью, так как он соответствует бесконечно большим градиентам случайной функции $\mu(r)$. Действительно, считая случайный процесс $\mu(r)$ статистически однородным и изотропным, легко получаем следующее соотношение:

$$\langle [\mu(r_1 + r) - \mu(r_1)]^2 \rangle = 2\langle \mu^2 \rangle [N(0) - N(r)].$$

Разделим обе части равенства на r^2 и перейдем к пределу при $r \rightarrow 0$. Получим

$$\left\langle \left(\frac{d\mu}{dr} \right)^2 \right\rangle = 2\langle \mu^2 \rangle \lim_{r \rightarrow 0} \frac{N(0) - N(r)}{r^2}.$$

Допустим, что коэффициент корреляции имеет вид (2.1). Разложив $\exp(-r/a)$ в ряд по степеням малого r и ограничившись старшими членами, получим: $N(0) - N(r) \simeq r/a$. Таким образом, средний квадрат производной $d\mu/dr$ будет пропорционален $1/r$ и, следовательно, будет обращаться в бесконечность при $r \rightarrow 0$. С аналогичным примером несуществования скорости частицы приходится встречаться в теории броуновского движения [10].

В реальной среде, обладающей конечными коэффициентами теплопроводности и диффузии, не может возникать бесконечных градиентов температуры и концентрации. Это значит, что коэффициент корреляции (2.1) не соответствует в полной мере реальным условиям.

Градиент флуктуации показателя преломления будет конечным, если разложение величины $N(0) - N(r)$ по степеням малого r начинается с члена, пропорционального r^2 , т. е. $N(0) - N(r) \simeq cr^2$, где c — константа, определяемая видом коэффициента корреляции. Примером может служить гауссов коэффициент корреляции. Дифференцируя последнее соотношение, найдем: $dN/dr \simeq -2cr$, т. е. при малых r градиент коэффициента корреляции пропорционален r . Поэтому

$$\left(\frac{dN}{dr}\right)_{r=0} = 0.$$

Таким образом, всякая реальная корреляционная функция обладает тем свойством, что при $r = 0$ ее производная обращается в нуль.

В дальнейшем мы предполагаем, что среда содержит только случайные неоднородности. Между тем имеется довольно широкий круг работ, в которых наряду со случайными учитываются также регулярные (слоистые) неоднородности среды. Ссылки на эти работы можно найти в обзоре [2]. В качестве примера мы упомянем только [11—13].

Глава II

СТАТИСТИКА ЛУЧЕЙ

Переходим к рассмотрению распространения лучей в среде со случайными неоднородностями, предполагая, что масштаб неоднородностей a велик по сравнению с длиной волны λ . В гидроакустике это условие часто выполняется для ультразвуковых частот; в атмосфере условие оказывается выполненным для световых волн, так как внутренний масштаб турбулентных пульсаций в атмосфере порядка 1 см [14].

Следует отметить, что условие малости длины волны по сравнению с масштабом неоднородностей является лишь необходимым условием пригодности геометрического приближения, но не достаточным. Если это условие выполнено, то лучевой теорией можно пользоваться в пределах ограниченных дистанций L , удовлетворяющих условию $\sqrt{\lambda L} \ll a$. Это условие имеет простой физический смысл: размеры зоны Френеля для рассматриваемого расстояния должны быть малы по сравнению с масштабом неоднородностей. На больших дистанциях, не удовлетворяющих этому условию, лучевым приближением пользоваться нельзя; в этом случае необходимо применять дифракционную теорию.

Ограничиваясь в настоящей главе лучевыми представлениями, будем предполагать выполненными оба условия: $\lambda \ll a$, $\sqrt{\lambda L} \ll a$. Необходимость второго условия в дальнейшем будет строго обоснована.

Далее, будем предполагать, что распределение неоднородностей квазистатично, т. е. время распространения луча мало по сравнению с характерным периодом изменения неоднородностей во времени.

§ 3. Уравнение луча

Уравнение луча в наиболее удобной для дальнейших исследований форме можно получить из принципа Ферма:

$$\int_A^B \frac{d\sigma}{c} = \min. \quad (3.1)$$

Вводя показатель преломления $n = c_0/c$, уравнение (3.1) можно переписать следующим образом:

$$\int_A^B n(x, y, z) d\sigma = \min.$$

Допустим, что траектория луча принадлежит к семейству кривых, выражаемых уравнениями $y = y(x)$, $z = z(x)$ и проходящих через заданные точки A и B . Так как $d\sigma = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx$, то принцип Ферма запишется следующим образом:

$$\int_{x_1}^{x_2} n(x, y, z) \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx = \min.$$

Обозначая

$$F(x, y, z, y', z') \equiv n(x, y, z) \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}, \quad (3.2)$$

напишем уравнения Эйлера вариационной задачи:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial z'} \right) - \frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

На основании (3.2) они принимают вид:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{ny'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} \right) - \sqrt{1+y'^2+z'^2} \frac{\partial n}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{nz'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} \right) - \sqrt{1+y'^2+z'^2} \frac{\partial n}{\partial z} = 0. \quad (3.3)$$

Вводя косинусы углов, образованных лучом с осями y и z , по формулам

$$s_y = \frac{dy}{ds} = \frac{dy/dx}{ds/dx} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}, \quad s_z = \frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}, \quad (3.4)$$

перепишем уравнения (3.3) в следующем окончательном виде:

$$\frac{d(ns_y)}{dx} - \frac{1}{\sqrt{1-s_y^2-s_z^2}} \frac{\partial n}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{d(ns_z)}{dx} - \frac{1}{\sqrt{1-s_y^2-s_z^2}} \frac{\partial n}{\partial z} = 0. \quad (3.5)$$

Если показатель преломления задан как функция координат, то уравнения (3.5) совместно с уравнениями

$$y' = \frac{s_y}{\sqrt{1-s_y^2-s_z^2}}, \quad z' = \frac{s_z}{\sqrt{1-s_y^2-s_z^2}}, \quad (3.6)$$

вытекающими из уравнений (3.4), если последние разрешить относительно y' и z' , позволяют найти уравнения траектории луча $y = y(x)$, $z = z(x)$ при заданных начальных условиях.

§ 4. Коэффициент диффузии лучей

Допустим, что показатель преломления мало отличается от среднего значения, равного единице, т. е.

$$n(x, y, z) = 1 + \mu(x, y, z), \quad \langle \mu^2 \rangle \ll 1. \quad (4.1)$$

При распространении в такой среде ($\langle \mu^2 \rangle \ll 1$, $\lambda \ll a$) луч будет медленно отклоняться от своего первоначального направления.

Предполагая, что луч выходит из начала координат в направлении оси x , ограничимся рассмотрением малых углов отклонения луча от этой оси. В этом случае квадратами малых величин s_y и s_z можно пренебречь по сравнению с единицей и заменить радикал

$\sqrt{1 - s_y^2 - s_z^2}$ в формулах (3.5) и (3.6) на единицу. В малоугловом приближении уравнения луча приобретают следующий вид:

$$\frac{d(ns_y)}{dx} - \frac{\partial n}{\partial y} = 0, \quad \frac{d(ns_z)}{dx} - \frac{\partial n}{\partial z} = 0, \quad (4.2)$$

$$y' = s_y, \quad z' = s_z. \quad (4.3)$$

Проще всего рассмотреть вопрос об отклонении луча от координатной плоскости. Пусть это будет координатная плоскость xoy . Тогда $s_z = \sin \chi \simeq \chi$, где χ — угол между лучом и плоскостью xoy (широтный угол), и последнее уравнение в системе (4.2) запишется следующим образом:

$$\frac{d(n\chi)}{dx} - \frac{\partial \mu}{\partial z} = 0. \quad (4.4)$$

Вычислим средний квадрат отклонения $\langle (\chi)^2 \rangle$ луча при прохождении им пути x , большего по сравнению с радиусом корреляции флуктуаций показателя преломления ($x \gg a$). Интегрируя (4.4) вдоль пути x , найдем:

$$\chi = \frac{1}{n} \int_0^x \frac{\partial \mu(x', y, z)}{\partial z} dx'.$$

Пренебрегая членами, квадратичными относительно μ , получим:

$$\chi = \int_0^x \frac{\partial \mu(x', y, z)}{\partial z} dx'.$$

Возводя в квадрат обе части последнего равенства, найдем:

$$\chi^2 = \int_0^x \int_0^x \frac{\partial \mu_1}{\partial z_1} \frac{\partial \mu_2}{\partial z_2} dx'_1 dx'_2 = \int_0^x \int_0^x \frac{\partial^2 (\mu_1 \mu_2)}{\partial z_1 \partial z_2} dx'_1 dx'_2.$$

Статистически усредняя по совокупности различных возможных состояний среды и вводя коэффициент корреляции для флуктуаций показателя преломления среды, получим:

$$\langle \chi^2 \rangle = \langle \mu^2 \rangle \int_0^x \int_0^x \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} N(x'_1 - x'_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2) dx'_1 dx'_2. \quad (4.5)$$

Введем относительные координаты

$$x' = x'_1 - x'_2, \quad y = y_1 - y_2, \quad z = z_1 - z_2$$

и координаты центра тяжести

$$x_0 = \frac{1}{2}(x'_1 + x'_2), \quad y_0 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \quad z_0 = \frac{1}{2}(z_1 + z_2).$$

Преобразуя подынтегральное выражение в формуле (4.5) к новым переменным и учитывая, что коэффициент корреляции $N(x', y, z)$

зависит только от относительных координат и не зависит от координат центра тяжести, найдем:

$$\frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} N(x'_1 - x'_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2) = - \frac{\partial^2}{\partial z^2} N(x', y, z).$$

Далее учтем, что $dx'_1 dx'_2 = dx'_0 dx'$ (якобиан преобразования равен единице). Поскольку $x \gg a$, интегрировать по x' можно в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. Формула (4.5) приобретает вид:

$$\langle \chi^2 \rangle = - \langle \mu^2 \rangle \int_0^x dx'_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 N(x', y, z)}{\partial z^2} dx'. \quad (4.6)$$

Так как коэффициент корреляции N — четная функция, то получим:

$$\langle \chi^2 \rangle = - 2 \langle \mu^2 \rangle x \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 N(x', y, z)}{\partial z^2} dx'.$$

Коэффициент корреляции $N(x', y, z)$ отличен от нуля в области значений x' порядка a ($x' \sim a$). Так как наклон луча мал, то в области существенных значений коэффициента корреляции $y \ll a$ и $z \ll a$. Поэтому в последней формуле можно просто положить $y = z = 0$. Тогда получим:

$$\langle \chi^2 \rangle = - 2 \langle \mu^2 \rangle x \int_0^{\infty} \left[\frac{\partial^2 N}{\partial z^2} \right]_{y=z=0} dx',$$

или

$$\langle \chi^2 \rangle = 2Dx, \quad (4.7)$$

где

$$D = - \langle \mu^2 \rangle \int_0^{\infty} \left[\frac{\partial^2 N}{\partial z^2} \right]_{y=z=0} dx \quad (4.8)$$

есть характерная для среды константа, определяемая через коэффициент корреляции N . Величина D играет роль коэффициента диффузии лучей.

Полагая $N = \exp(-r^2/a^2)$, найдем:

$$\left[\frac{\partial^2 N}{\partial z^2} \right]_{y=z=0} = - \frac{2}{a^2} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

Выполнив интегрирование в формуле (4.8), получим:

$$D = \sqrt{\pi} \frac{\langle \mu^2 \rangle}{a}. \quad (4.9)$$

Полагая $\langle \mu^2 \rangle = 5 \cdot 10^{-9}$, $a = 60$ см, найдем:

$$D \simeq 1,5 \cdot 10^{-10} \text{ см}^{-1} = 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ км}^{-1}.$$

Если воспользоваться другим видом коэффициента корреляции $N = \exp(-r/a)$, то подынтегральное выражение в формуле (4.8) запишется следующим образом:

$$\left[\frac{\partial^2 N}{\partial z^2} \right]_{y=z=0} = - \frac{\exp(-x/a)}{ax}.$$

Из-за наличия множителя $1/x$ интеграл (4.8) будет в нуле логарифмически расходиться. В этом нет ничего неожиданного. Коэффициент корреляции $\exp(-r/a)$ соответствует бесконечно большим значениям градиента показателя преломления μ , при которых исходным дифференциальным уравнением луча (4.2) пользоваться нельзя.

§ 5. Угловое распределение лучей.

Уравнение Эйнштейна — Фоккера — Колмогорова

Поскольку свойства случайно-неоднородной среды заданы статистически, можно предсказать лишь вероятность $W(\chi, x)$ того, что луч, прошедший путь x , будет иметь направление, определяемое углом χ , если он вышел из начала координат в направлении оси x . Иными словами, распространение луча в случайно-неоднородной среде можно рассматривать как стохастический процесс без последствия (непрерывная цепь Маркова), в котором роль времени играет пройденный лучом путь x . В случае малых углов такое представление может быть математически обосновано [15].

Функция углового распределения лучей $W(\chi, x)$ удовлетворяет уравнению Эйнштейна — Фоккера — Колмогорова, которое в рассматриваемом случае имеет самый простой вид:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = D \frac{\partial^2 W}{\partial \chi^2}, \quad (5.1)$$

где D — коэффициент диффузии лучей.

Неотрицательное решение уравнения (5.1), удовлетворяющее условию нормировки вероятности и обращающееся в нуль при $x = 0$ для любого $\chi \neq 0$, имеет вид

$$W(\chi, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dx}} \exp\left(-\frac{\chi^2}{4Dx}\right), \quad (5.2)$$

т. е. распределение лучей по углам будет гауссовым. Легко убедиться в том, что найденная функция (5.2) удовлетворяет условию нормировки вероятности

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W(\chi, x) d\chi = 1$$

и при $x \rightarrow 0$ вырождается в δ -функцию от χ .

Средний квадрат угла отклонения $\langle \chi^2 \rangle$ можно найти по формуле

$$\langle \chi^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi^2 W(\chi, x) d\chi,$$

откуда на основании (5.2) следует

$$\langle \chi^2 \rangle = 2Dx \quad (5.3)$$

в полном соответствии с формулой (4.7).

До сих пор рассматривался вопрос об отклонении луча от координатной плоскости. Теперь рассмотрим вопрос об отклонении луча от координатной оси. Пусть это будет ось x . Обозначим угол между лучом и осью x через ϑ , т. е. $s_x = \cos \vartheta$. Тогда из формулы $1 - s_x^2 = s_y^2 + s_z^2$ следует

$$\sin^2 \vartheta = \sin^2 \chi_1 + \sin^2 \chi_2, \quad (5.4)$$

где χ_1 и χ_2 — углы между лучом и координатными плоскостями xoz и xoy соответственно. Предполагая, как и ранее, что луч выходит из начала координат в направлении оси x , ограничимся рассмотрением малых углов отклонения ϑ , χ_1 и χ_2 . В этом случае формула (5.4) приобретает простой вид

$$\vartheta^2 = \chi_1^2 + \chi_2^2. \quad (5.5)$$

Как и следовало ожидать, в приближении малых углов квадрат угла между лучом и осью x равен сумме квадратов углов между лучом и плоскостями xoy и xoz .

Отклонения χ_1 и χ_2 от взаимно перпендикулярных плоскостей статистически независимы. Поэтому можно воспользоваться теоремой об умножении вероятностей и написать

$$W(\chi_1, \chi_2, x) = W(\chi_1, x)W_2(\chi_2, x). \quad (5.6)$$

На основании формулы (5.2) находим

$$W(\chi_1, \chi_2, x) = \frac{1}{4\pi Dx} \exp\left(-\frac{\chi_1^2 + \chi_2^2}{4Dx}\right),$$

или

$$W(\vartheta, x) = \frac{1}{4\pi Dx} \exp\left(-\frac{\vartheta^2}{4Dx}\right), \quad (5.7)$$

т. е. распределение лучей по углам ϑ также будет гауссовым.

Легко найти дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция распределения $W(\vartheta, x)$. Действительно, функции $W_1(\chi_1, x)$ и $W_2(\chi_2, x)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial W_1}{\partial x} = D \frac{\partial^2 W_1}{\partial \chi_1^2}, \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial W_2}{\partial x} = D \frac{\partial^2 W_2}{\partial \chi_2^2}. \quad (5.9)$$

Умножая уравнение (5.8) на $W_2(\chi_2, x)$, а уравнение (5.9) — на $W_1(\chi_1, x)$ и складывая, найдем

$$\frac{\partial (W_1 W_2)}{\partial x} = D \left[\frac{\partial^2 (W_1 W_2)}{\partial \chi_1^2} + \frac{\partial^2 (W_1 W_2)}{\partial \chi_2^2} \right],$$

откуда на основании формулы (5.6) следует

$$\frac{\partial W(\chi_1, \chi_2, x)}{\partial x} = D \left[\frac{\partial^2 W(\chi_1, \chi_2, x)}{\partial \chi_1^2} + \frac{\partial^2 W(\chi_1, \chi_2, x)}{\partial \chi_2^2} \right]. \quad (5.10)$$

Перейдем от переменных χ_1 и χ_2 к переменным ϑ и φ по формулам $\chi_1 = \vartheta \cos \varphi$ и $\chi_2 = \vartheta \sin \varphi$, что соответствует переходу от декартовых координат к полярным. Оператор Лапласа в полярных координатах имеет вид

$$\Delta W = \frac{1}{\vartheta} \frac{\partial W}{\partial \vartheta} + \frac{\partial^2 W}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{\vartheta^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2}.$$

Как видно из формулы (5.7), функция $W(\chi_1, \chi_2, x)$ в новых переменных зависит только от ϑ . Поэтому уравнение (5.10) окончательно приобретает следующий вид:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = D \left(\frac{1}{\vartheta} \frac{\partial W}{\partial \vartheta} + \frac{\partial^2 W}{\partial \vartheta^2} \right). \quad (5.11)$$

Таким образом, получено уравнение Эйнштейна—Фоккера—Колмогорова для функции распределения лучей по углам ϑ . Прямой подстановкой можно убедиться в том, что функция $W(\vartheta, x)$, определяемая формулой (5.7), удовлетворяет как уравнению (5.11), так и условию нормировки вероятности

$$\int_0^{\infty} W(\vartheta, x) \cdot 2\pi\vartheta d\vartheta = 1,$$

где $2\pi\vartheta d\vartheta$ — элемент поверхности в полярных координатах.

Из формулы (5.7) следует

$$\langle \vartheta^2 \rangle = 4Dx. \quad (5.12)$$

Это вытекает также из формул (5.3) и (5.5), если учесть, что $\langle \chi_1^2 \rangle = \langle \chi_2^2 \rangle$.

Формулой (5.12) определяется флуктуация угла прихода луча. Оценим эту флуктуацию на расстоянии $x = 1$ км, исходя из данных Либермана [5] ($\langle \vartheta^2 \rangle = 5 \cdot 10^{-9}$, $a = 60$ см, $D \approx 1,5 \cdot 10^{-5}$ км²). Получим $\sqrt{\langle \chi^2 \rangle} \approx 26,5'$ (угловых минут).

И. Г. Колчинский [16] проанализировал собранный им материал астрономических наблюдений флуктуаций угла прихода лучей от звезд в зависимости от зенитного расстояния. Его анализ подтвердил выведенную зависимость (5.12).

§ 6. Среднее смещение луча

Определим средний квадрат смещения луча от плоскости xoy . Это смещение определяется координатой z , которая может быть найдена из последнего уравнения в системе (4.3)

$$\frac{dz}{dx} = s_z.$$

Полагая $s_z \cong \chi$, проинтегрируем обе части равенства в пределах от 0 до x . Тогда получим

$$z = \int_0^x \chi dx.$$

Возводя в квадрат обе части последнего равенства, найдем

$$z^2 = \int_0^x \chi_1 dx_1 \int_0^x \chi_2 dx_2 = \int_0^x \int_0^x \chi_1 \chi_2 dx_1 dx_2.$$

Статистически усредняя по совокупности различных реализаций случайно-неоднородной среды, получим

$$\langle z^2 \rangle = \int_0^x \int_0^x \langle \chi_1 \chi_2 \rangle dx_1 dx_2. \quad (6.1)$$

При вычислении последнего интеграла целесообразно всю область интегрирования разбить на две подобласти: в первой подобласти $x_2 > x_1$, во второй $x_2 < x_1$. Тогда интеграл (6.1) разобьется соответственно на два интеграла:

$$\langle z^2 \rangle = \int_0^x dx_1 \int_{x_1}^x \langle \chi_1 \chi_2 \rangle dx_2 + \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} \langle \chi_1 \chi_2 \rangle dx_2. \quad (6.2)$$

Если $x_2 > x_1$, то начальное направление луча определяется углом χ_1 , а конечное направление — углом χ_2 . На пути $x_2 - x_1$ луч претерпевает отклонение $\xi_{12} = \chi_2 - \chi_1$. Начальное отклонение луча χ_1 на пути x_1 и дополнительное его отклонение ξ_{12} на пути $x_2 - x_1$ будут статистически независимы, так как они обусловлены различными неоднородностями среды (за исключением пренебрежимо малой области порядка радиуса корреляции неоднородностей a). Поэтому $\langle \chi_1 \xi_{12} \rangle = 0$ и, следовательно,

$$\langle \chi_1 \chi_2 \rangle = \langle \chi_1 (\chi_1 + \xi_{12}) \rangle = \langle \chi_1^2 \rangle + \langle \chi_1 \xi_{12} \rangle = \langle \chi_1^2 \rangle. \quad (6.3)$$

Если же $x_2 < x_1$, то начальное направление луча определяется углом χ_2 . На пути $x_1 - x_2$ луч претерпевает дополнительное отклонение $\xi_{21} = \chi_1 - \chi_2$. Теперь статистически независимы будут отклонения χ_2 и ξ_{21} . Поэтому

$$\langle \chi_1 \chi_2 \rangle = \langle (\chi_2 + \xi_{21}) \chi_2 \rangle = \langle \chi_2^2 \rangle + \langle \chi_2 \xi_{21} \rangle = \langle \chi_2^2 \rangle. \quad (6.4)$$

В первом интеграле формулы (6.2) заменим $\langle \chi_1 \chi_2 \rangle$ на основании формулы (6.3), во втором интеграле — на основании формулы (6.4). Тогда получим

$$\langle z^2 \rangle = \int_0^x dx_1 \int_{x_1}^x \langle \chi_1^2 \rangle dx_2 + \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} \langle \chi_2^2 \rangle dx_2. \quad (6.5)$$

На основании формулы (5.3), полагая $\langle \chi_1^2 \rangle = 2Dx_1$ и $\langle \chi_2^2 \rangle = 2Dx_2$ и выполняя интегрирование в формуле (6.5), окончательно получим

$$\langle z^2 \rangle = \frac{2}{3} Dx^3. \quad (6.6)$$

В силу предполагаемой изотропности случайных неоднородностей среды такое же выражение можно записать для смещения луча вдоль оси y :

$$\langle y^2 \rangle = \frac{2}{3} Dx^3. \quad (6.7)$$

Теперь можно вычислить средний квадрат смещения ρ луча от его первоначального направления. Так как $\rho^2 = y^2 + z^2$, то на основании формул (6.6) и (6.7) получаем

$$\langle \rho^2 \rangle = \frac{4}{3} Dx^3, \quad (6.8)$$

или

$$\sqrt{\langle \rho^2 \rangle} = \frac{2}{\sqrt{3}} D^{1/2} x^{3/2}.$$

Пользуясь законом $3/2$, можно вычислить среднее квадратичное смещение луча, прошедшего в среде путь x . Полагая $D = 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ км}^{-1}$, для дистанции $x = 1 \text{ км}$ найдем $\sqrt{\langle \rho^2 \rangle} \approx 4,5 \text{ м}$.

Уравнением Эйнштейна — Фоккера — Колмогорова в его простейшей форме — уравнением (5.1) — при рассмотрении задачи о распространении луча в случайно-неоднородной среде пользовался также В. Я. Харанен [17]. Он определял отклонение луча (угловое и линейное) от координатной плоскости.

Основанная на уравнении Эйнштейна — Фоккера — Колмогорова теория распространения лучей получила дальнейшее развитие в работах других исследователей. Так, например, Н. Г. Денисов [18] и затем В. М. Комиссаров [19] наряду со случайными изменениями показателя преломления учитывали также регулярные изменения показателя преломления в слое. Н. Г. Денисов учел влияние регулярной рефракции на угловое распределение лучей при нормальном падении на слой. В. М. Комиссаров нашел совместную функцию распределения угловых и линейных смещений луча при падении лучей на слой под любым углом.

§ 7. Флуктуации времени пробега и интенсивности лучей

С изменением условий в среде изменяется время пробега лучом заданной дистанции, а также деформируется лучевая трубка, что приводит к флуктуациям интенсивности. Рассмотрим вопрос о флуктуациях времени пробега и флуктуациях интенсивности, предполагая, что лучи мало отклоняются от своего первоначального направления, принимаемого за ось x .

Время пробега дистанции L на основании (3.1) определится формулой

$$t = \frac{1}{c_0} \int_0^L n(x, y, z) dx,$$

где значения показателя преломления $n(x, y, z)$ берутся вдоль луча.

Среднее время пробега

$$\langle t \rangle = \frac{1}{c_0} \int_0^L \langle n(x, y, z) \rangle dx = \frac{1}{c_0} \int_0^L dx,$$

так как $\langle n \rangle = 1$.

Отклонение от среднего

$$\Delta t = t - \langle t \rangle = \frac{1}{c_0} \int_0^L n(x, y, z) dx - \frac{1}{c_0} \int_0^L dx = \frac{1}{c_0} \int_0^L \mu(x, y, z) dx.$$

Наконец, средний квадрат флуктуации времени пробега

$$\langle \Delta t^2 \rangle = \frac{\langle \mu^2 \rangle}{c_0^2} \int_0^L dx_1 \int_0^L N(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) dx_2.$$

Если $L \gg a$, то, вводя относительные координаты $x = x_2 - x_1$, $y = y_2 - y_1$, $z = z_2 - z_1$, можно интегрировать по x в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. Так как $N(x, y, z)$ — функция четная, то

$$\langle \Delta t^2 \rangle = \frac{2 \langle \mu^2 \rangle L}{c_0^2} \int_0^\infty N(x, y, z) dx.$$

Коэффициент корреляции $N(x, y, z)$ отличен от нуля в области значений x порядка a ($x \sim a$). Так как наклон луча мал, то в области существенных значений коэффициента корреляции $y \ll a$ и $z \ll a$. Поэтому в последней формуле можно просто положить $y = z = 0$. Тогда получим

$$\langle \Delta t^2 \rangle = \frac{2 \langle \mu^2 \rangle L}{c_0^2} \int_0^\infty N(x, 0, 0) dx.$$

Отсюда сразу можно найти флуктуацию фазы $S' = \omega \Delta t$:

$$\langle S'^2 \rangle = 2 \langle \mu^2 \rangle k^2 L \int_0^\infty N(x, 0, 0) dx, \quad (7.1)$$

где k — волновое число.

Разность фаз в двух точках определяется структурной функцией фазы $D_S = \langle (S_1 - S_2)^2 \rangle$. Допустим, что вторая точка смещена относительно первой в поперечном направлении на расстояние $\rho(0, y, z)$. Если ось x провести через первую точку, то флуктуации фазы в первой и второй точках будут определяться по формулам:

$$S'_1 = k \int_0^L \mu(x, 0, 0) dx_1, \quad S'_2 = k \int_0^L \mu(x, \rho) dx_2,$$

откуда следует:

$$\begin{aligned} D_S(\rho) &= \langle S_1'^2 \rangle + \langle S_2'^2 \rangle - 2 \langle S_1' S_2' \rangle = 2 \langle S_1'^2 \rangle - 2 \langle S_1' S_2' \rangle = \\ &= 2k^2 \langle \mu^2 \rangle \int_0^L dx_1 \int_0^L N(x_2 - x_1, 0, 0) dx_2 - 2k^2 \langle \mu^2 \rangle \int_0^L dx_1 \times \\ &\times \int_0^L N(x_1 - x_2, \rho) dx_2. \end{aligned}$$

Переходя к относительной координате $x = x_2 - x_1$ и предполагая, что $L \gg a$, найдем:

$$D_S(\rho) = 4 \langle \mu^2 \rangle k^2 L \int_0^\infty [N(x, 0, 0) - N(x, \rho)] dx. \quad (7.1a)$$

Изменение интенсивности определяется изменением сечения лучевой трубки. Относительное изменение сечения лучевой трубки dS/S на пути dx определяется формулой

$$dS/S = \operatorname{div} s dx. \quad (7.2)$$

Так как отклонение луча от оси x мало, то

$$\operatorname{div} s = \frac{\partial s_y}{\partial y} + \frac{\partial s_z}{\partial z},$$

и уравнения луча (4.2) запишутся следующим образом:

$$\frac{d(ns_y)}{dx} - \frac{\partial \mu}{\partial y} = 0, \quad \frac{d(ns_z)}{dx} - \frac{\partial \mu}{\partial z} = 0.$$

Интегрируя последние уравнения, найдем

$$s_y = \frac{1}{n} \int_0^x \frac{\partial \mu}{\partial y} dx', \quad s_z = \frac{1}{n} \int_0^x \frac{\partial \mu}{\partial z} dx'.$$

Пренебрегая членами, квадратичными относительно μ , получим

$$s_y(x, y, z) = \int_0^x \frac{\partial \mu(x', y, z)}{\partial y} dx', \quad (7.3)$$

$$s_z(x, y, z) = \int_0^x \frac{\partial \mu(x', y, z)}{\partial z} dx'.$$

Заменяя в (7.2) s_y и s_z на основании (7.3), найдем

$$dS/S = dx \int_0^x \nabla^2 \mu dx', \quad (7.4)$$

где через ∇^2 обозначен поперечный оператор Лапласа

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Относительное изменение интенсивности связано с относительным изменением сечения лучевой трубки простым соотношением

$$dI/I = -dS/S.$$

Для относительного изменения интенсивности на пути dx на основании (7.4) найдем

$$dI/I = -dx \int_0^x \nabla^2 \mu dx'.$$

Чтобы определить изменение интенсивности на пути L , необходимо последнее уравнение проинтегрировать по x в пределах от 0 до L . Тогда получим

$$\ln \frac{I}{I_0} = - \int_0^L dx \int_0^x \nabla^2 \mu dx'. \quad (7.5)$$

Вводя обозначения

$$u = \int_0^x \nabla^2 \mu dx', \quad dv = dx,$$

проинтегрируем (7.5) по частям. Это дает

$$\ln \frac{I}{I_0} = - \int_0^L (L-x) \nabla^2 \mu dx.$$

Заменяя отношение интенсивностей отношением квадратов амплитуд, получим

$$\ln \frac{A}{A_0} = - \frac{1}{2} \int_0^L (L-x) \nabla^2 \mu dx. \quad (7.6)$$

Последней формулой можно воспользоваться для определения среднего квадрата флуктуации уровня. Возводя (7.6) в квадрат и усредняя, получим

$$\left\langle \left(\ln \frac{A}{A_0} \right)^2 \right\rangle = \frac{1}{4} \int_0^L \int_0^L (L - x_1)(L - x_2) \times \\ \times \nabla_1^2 \nabla_2^2 N_{12}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) dx_1 dx_2.$$

Переходя к относительным координатам $x = x_2 - x_1$, $y = y_2 - y_1$, $z = z_2 - z_1$ и координатам центра тяжести $x_0 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, $y_0 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$, $z_0 = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$, в случае $L \gg a$ можно записать

$$\left\langle \left(\ln \frac{A}{A_0} \right)^2 \right\rangle = \frac{1}{4} \int_0^L dx_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \left(L^2 - 2Lx_0 + x_0^2 - \frac{x^2}{4} \right) \nabla^2 \nabla^2 N_{12}(x, y, z) dx.$$

Интегрируя по x_0 , получим

$$\left\langle \left(\ln \frac{A}{A_0} \right)^2 \right\rangle = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{L^3}{3} - \frac{Lx^2}{4} \right) \nabla^2 \nabla^2 N_{12}(x, y, z) dx.$$

В области существенных значений корреляционной функции $x \sim a$, поэтому второе слагаемое в скобках $Lx^2/4$ мало по сравнению с первым $L^3/3$. Пренебрегая вторым слагаемым, имеем

$$\left\langle \left(\ln \frac{A}{A_0} \right)^2 \right\rangle = \frac{1}{6} \langle \mu^2 \rangle L^3 \int_0^{\infty} \nabla^2 \nabla^2 N dx.$$

Ввиду малости угла наклона луча подынтегральное выражение в этой формуле можно брать при значении $y = z = 0$. Тогда окончательно получим

$$\left\langle \left(\ln \frac{A}{A_0} \right)^2 \right\rangle = \frac{1}{6} \langle \mu^2 \rangle L^3 \int_0^{\infty} [\nabla^2 \nabla^2 N]_{y=z=0} dx. \quad (7.7)$$

Формулы (7.1) и (7.7) для среднего квадрата флуктуации фазы и среднего квадрата флуктуации уровня были получены В. А. Красильниковым [20], применившим метод малых возмущений к уравнению эйконала и уравнению, выражающему постоянство потока энергии в лучевой трубке. Тем же методом малых возмущений Бергман [21] рассмотрел вопрос о флуктуациях уровня и фазы в сферической волне (точечный источник). Полученная им формула отличается от (7.7) числовым множителем ($1/15$ вместо $1/6$) и тем, что в ней под интегралом содержится полный оператор Лапласа вместо поперечного.

Полагая

$$N = \exp\left(-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^2}\right),$$

получим

$$[\nabla^2 \nabla^2 N]_{y=z=0} = \frac{32}{a^4} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

и

$$\int_0^{\infty} [\nabla^2 \nabla^2 N]_{y=z=0} dx = \frac{16 \sqrt{\pi}}{a^3}.$$

Формула (7.7) приобретает вид:

$$\left\langle \left(\ln \frac{A}{A_0} \right)^2 \right\rangle = \frac{8 \sqrt{\pi}}{3} \langle \mu^2 \rangle \frac{L^2}{a^3}. \quad (7.8)$$

Если положить

$$N = \exp\left(-\frac{r}{a}\right),$$

то

$$[\nabla^2 \nabla^2 N]_{y=z=0} = \left(8 \frac{1}{a^2 x^2} + \frac{1}{ax^3}\right) \exp\left(-\frac{x}{a}\right)$$

и интеграл

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{a^2 x^2} + \frac{1}{ax^3} \right) \exp\left(-\frac{x}{a}\right) dx$$

в точке $x = 0$ расходится. Как уже отмечалось выше, коэффициенту корреляции $\exp(-r/a)$ соответствуют бесконечные градиенты флуктуации показателя преломления, при которых дифференциальным уравнением луча пользоваться нельзя.

При выводе формул (7.1) и (7.7) интегрирование вдоль луча заменялось интегрированием вдоль оси x . Такая замена возможна в том случае, если отклонение луча $\sqrt{\langle \rho^2 \rangle}$ в поперечном направлении мало по сравнению с радиусом корреляции a :

$$\langle \rho^2 \rangle \ll a^2. \quad (7.9)$$

На основании формулы (6.8) среднее квадратичное смещение луча $\langle \rho^2 \rangle = 4/3 DL^2$. В случае гауссова коэффициента корреляции на основании (4.9) коэффициент диффузии лучей

$$D = \sqrt{\pi} \frac{\langle \mu^2 \rangle}{a}.$$

Заменив в первой формуле коэффициент диффузии лучей его выражением, получим

$$\langle \rho^2 \rangle = \frac{4 \sqrt{\pi}}{3} \langle \mu^2 \rangle \frac{L^2}{a}.$$

Неравенство (7.9) теперь запишем следующим образом:

$$\frac{4\sqrt{\pi}}{3} \langle \mu^2 \rangle \frac{L^2}{a^2} \ll 1.$$

Левая часть последнего неравенства совпадает (с точностью до множителя 2) со средним квадратом флуктуации уровня, как это видно из формулы (7.8). Следовательно, неравенство можно переписать так:

$$\left\langle \left(\ln \frac{A}{A_0} \right)^2 \right\rangle \ll 1.$$

Таким образом, формулы (7.1) и (7.7) пригодны в случае малых флуктуаций уровня. При этом флуктуации фазы могут быть и не малыми, так как согласно (7.7) они растут с частотой.

Обобщение геометрической теории, применимое в области сильных флуктуаций уровня, содержится в работах В. И. Татарского [22].

Часть вторая

ДИФРАКЦИОННАЯ ТЕОРИЯ

Глава III

ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ

§ 8. Вывод волнового уравнения для неоднородной среды

Волновое уравнение для неоднородной среды отличается от волнового уравнения для среды однородной наличием некоторого добавочного члена [23]. Ввиду этого нам представляется не лишним привести вывод волнового уравнения для неоднородной среды.

Допустим, что жидкая или газообразная неоднородная среда находится в состоянии равновесия. В отсутствие силы тяжести (ее влиянием мы пренебрегаем) такое равновесие возможно при условии, что давление во всех точках среды одинаково. Неоднородность среды будет обусловлена, следовательно, изменением в пространстве температуры и плотности среды, причем эти изменения нельзя считать независимыми: поскольку давление постоянно, изменение плотности полностью определяется изменением температуры.

Строго говоря, неоднородная в температурном отношении среда не может находиться в состоянии равновесия, так как температурные неоднородности выравниваются из-за теплопроводности. Однако в слабопроводящих средах выравнивание происходит медленно и теплопроводностью можно пренебречь при рассмотрении относительно быстрых акустических процессов.

В реальных условиях, в океане или в атмосфере, температурные неоднородности переносятся течением и совершают конвекционное движение под действием силы тяжести. Однако в интересующих нас случаях скорости течения и конвекции малы по сравнению со скоростью звука, и поэтому распределение неоднородностей в пространстве можно считать квазистатическим. (Более обстоятельно вопрос о квазистатичности обсуждается в § 25.)

Обозначим одинаковое во всех точках пространства давление через p_0 , переменную в пространстве плотность — через $\rho_0 = \rho_0(x, y, z)$. Под влиянием звуковой волны эти величины претерпевают изменения и принимают соответственно значения p и ρ , так что

$$p = p_0 + p_1, \quad \rho = \rho_0 + \rho_1, \quad (8.1)$$

где p_1 — акустическое давление, ρ_1 — изменение плотности, обусловленное волной.

Полное давление p , полная плотность ρ и скорость акустических колебаний v удовлетворяют уравнениям гидродинамики:

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\nabla p, \quad (8.2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho v). \quad (8.3)$$

Заменим в этих уравнениях p и ρ на основании (8.1) и, считая (как обычно) акустические возмущения p_1 , ρ_1 и v величинами первого порядка малости, отбросим квадратичные (и более высокого порядка малости) члены. Тогда уравнения (8.2) и (8.3) переписутся следующим образом:

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\nabla p_1, \quad (8.4)$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho_0 v). \quad (8.5)$$

Продифференцировав (8.5) по времени, получим

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} = -\operatorname{div}\left(\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t}\right),$$

так как ρ_0 от времени не зависит. Заменяя в последнем уравнении $\rho_0 \partial v / \partial t$ с учетом (8.4), получим

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} = \nabla^2 p_1. \quad (8.6)$$

Чтобы установить еще одно соотношение между p_1 и ρ_1 , необходимо сделать предположение о термодинамическом характере звукового процесса. Считая распространение звука процессом адиабатическим, можно записать

$$\frac{dp}{dt} = c^2 \frac{d\rho}{dt}, \quad (8.7)$$

где c — адиабатическая скорость звука в рассматриваемой точке среды.

В этом уравнении содержатся полные производные по времени, а не частные, так как соотношение (8.7) должно выполняться для выбранной частицы среды, а не для выбранной точки пространства. Заменяя в (8.7) давление p и плотность ρ на основании (8.1),

получим с точностью до величин первого порядка малости

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial p_1}{\partial t} = \frac{\partial p_1}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla) \rho_0. \quad (8.8)$$

В случае однородной среды конвективный член $(\mathbf{v}\nabla)\rho_0$ в последнем равенстве обращается в нуль, а поэтому соотношение (8.7) можно записывать для p_1 и ρ_1 как в полных, так и в частных производных по времени. В неоднородной среде соотношение (8.7) можно писать только в полных производных. При переходе к частным производным появляется добавочный конвективный член $(\mathbf{v}\nabla)\rho_0$ первого порядка малости. Этим конвективным членом обуславливается появление добавочного члена в волновом уравнении.

Дифференцируя (8.8) еще раз по времени, перепишем его следующим образом:

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} + \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \nabla \right) \rho_0 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}. \quad (8.9)$$

Заменяя в (8.9) первый член на основании (8.6) и $\partial \mathbf{v} / \partial t$ на основании (8.4), получим

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} - \nabla^2 p_1 + \nabla \ln \rho_0 \nabla p_1 = 0. \quad (8.10)$$

Итак, в волновом уравнении появился добавочный член $\nabla \ln \rho_0 \nabla p_1$. В дальнейшем мы оценим порядок величины добавочного члена и выясним условия, при которых им можно пренебречь.

§ 9. Волновое уравнение для среды сложного состава

В предыдущем параграфе мы считали, что среда по своему составу однородна. Между тем на практике может встретиться такой случай, когда состав среды меняется от точки к точке. Например, морская вода с переменной соленостью или воздух с переменной концентрацией паров. В состоянии равновесия, когда давление во всех точках одинаково, изменение плотности в пространстве обусловлено изменением температуры и состава. Иными словами, плотность будет функцией температуры и концентраций отдельных компонент, образующих среду.

Ограничимся простейшим случаем среды, состоящей из двух компонент. Обобщение на случай многокомпонентной среды не представляет затруднений. Пусть ρ — плотность среды, ρ' — плотность растворителя, ρ'' — плотность растворенной компоненты, C — концентрация

$$C = \rho'' / \rho', \quad \rho = \rho' + \rho'' = \rho' (1 + C).$$

Плотность растворителя удовлетворяет уравнению непрерывности [24]

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = - \operatorname{div} (\rho' \mathbf{v}), \quad (9.1)$$

где \mathbf{v} — скорость акустических колебаний.

Изменение плотности растворенной компоненты будет обусловлено не только конвекцией, но и диффузией

$$\frac{\partial \rho''}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho'' \mathbf{v} + I), \quad (9.2)$$

где

$$I = -\rho' D_1 \nabla C - \rho' D_2 \nabla T.$$

Здесь D_1 — коэффициент диффузии, D_2 — коэффициент термодиффузии.

Складывая (9.1) и (9.2), получим для полной плотности среды ρ

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) - \operatorname{div} I. \quad (9.3)$$

В отсутствие звука это уравнение принимает вид

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = -\operatorname{div} I_0,$$

где I_0 — поток, обусловленный диффузией и термодиффузией в невозмущенной среде.

Пренебрегая этими медленными процессами (а также теплопроводностью, течением и конвекцией), будем считать распределение неоднородностей квазистатическим, т. е. ρ_0 не зависящим от времени. Полагая в (9.3) $\rho = \rho_0(x, y, z) + \rho_1$, $I = I_0 + I_1$ и ограничиваясь величинами первого порядка малости относительно ρ_1 , v , I_1 , получим

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho_0 \mathbf{v}) - \operatorname{div} I_1. \quad (9.4)$$

Пренебрегая необратимыми процессами в акустике, обусловленными диффузией и термодиффузией, запишем уравнение (9.4) в следующей окончательной форме:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho_0 \mathbf{v}). \quad (9.5)$$

Далее, пренебрегая соответственно вязкостью и теплопроводностью, запишем еще два уравнения:

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p_1, \quad (9.6)$$

$$\frac{dp}{dt} = c^2 \frac{d\rho}{dt}. \quad (9.7)$$

Таким образом, мы получили уравнения (9.5) — (9.7) для среды сложного состава, совпадающие с уравнениями (8.4), (8.5) и (8.7) для среды, однородной по составу. Различие состоит только в том, что параметры ρ_0 и c^2 , входящие в уравнения (9.5) — (9.7), зависят не только от температуры, но и от концентраций в данной точке. Повторяя выкладки § 8, получим волновое уравнение (8.10) для звукового давления.

РАССЕЯНИЕ НА НЕОДНОРОДНОСТЯХ

Теоретическое исследование распространения волн в неоднородной среде сводится к интегрированию волнового уравнения с переменными коэффициентами, что представляет собой задачу большой математической трудности, успешно разрешенную лишь для некоторых частных случаев. Здесь необходимо отметить обширные исследования Л. М. Бреховских [1] по распространению волн в слоисто-неоднородных средах.

Задача облегчается в случае слабонеоднородной среды, когда параметры, входящие в волновое уравнение, мало отклоняются от средних значений. В этом случае с успехом может быть применен метод малых возмущений или метод плавных возмущений, предложенный С. М. Рытовым [3]. Задачу о рассеянии, например, приходится решать методом малых возмущений, в то время как флуктуации амплитуды и фазы в прямой волне, по-видимому, целесообразнее отыскивать методом плавных возмущений.

Настоящую главу, посвященную рассеянию на неоднородностях, мы начнем с рассмотрения метода малых возмущений.

§ 10. Метод малых возмущений

Отбрасывая индексы, перепишем волновое уравнение (8.10) для звукового давления:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \nabla^2 p + \nabla \ln \rho \nabla p = 0. \quad (10.1)$$

Допустим, что плотность и скорость звука мало отличаются от средних значений ρ_0 и c_0 :

$$\rho = \rho_0 + \Delta\rho, \quad c = c_0 + \Delta c,$$

где $\Delta\rho \ll \rho_0$ и $\Delta c \ll c_0$. Ограничиваясь величинами первого порядка малости относительно $\Delta\rho$ и Δc , перепишем уравнение (10.1) в следующем виде:

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \nabla^2 p = \frac{2\Delta c}{c_0^3} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho_0} \nabla(\Delta\rho) \nabla p.$$

Задавая в нулевом приближении плоскую волну

$$p_0 = A_0 \exp[-i(\omega t - kx)]$$

($k = \omega/c_0$ — волновое число в среде с усредненными характеристиками), получим для первого приближения p_1 уравнение

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} - \nabla^2 p_1 = 2 \frac{\Delta c}{c_0^3} \frac{\partial^2 p_0}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho_0} \nabla(\Delta\rho) \nabla p_0,$$

или

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} - \nabla^2 p_1 = - \left[2k^2 \frac{\Delta c}{c_0} + \frac{ik}{\rho_0} \frac{\partial \Delta \rho}{\partial x} \right] A_0 \exp[-i(\omega t - kx)]. \quad (10.2)$$

Вводя для сокращения записи обозначение

$$4\pi Q = - \left[2k^2 \frac{\Delta c}{c_0} + \frac{ik}{\rho_0} \frac{\partial (\Delta \rho)}{\partial x} \right] A_0 \exp[-i(\omega t - kx)], \quad (10.3)$$

перепишем уравнение (10.2) в окончательной форме:

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} - \nabla^2 p_1 = 4\pi Q. \quad (10.4)$$

Под влиянием первичной волны p_0 каждый элемент неоднородной среды становится источником вторичных рассеянных волн p_1 . Q — плотность элементарных источников. Суммарное действие волн, рассеянных объемом V , определяется решением неоднородного уравнения (10.4)

$$p_1 = \int_V \frac{Q(t - r/c_0)}{r} dv, \quad (10.5)$$

где r — расстояние от рассеивающего элемента (ξ, η, ζ) до точки наблюдения (x, y, z)

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}.$$

Заменив в (10.5) Q его выражением на основании (10.3), получим

$$p_1 = - \frac{A_0}{4\pi} \int_V \left[2k^2 \frac{\Delta c}{c_0} + \frac{ik}{\rho_0} \frac{\partial (\Delta \rho)}{\partial \xi} \right] \frac{1}{r} e^{ik(r+\xi)} dv \quad (10.6)$$

(множитель $\exp(-i\omega t)$ отброшен). Первым членом в квадратных скобках определяется рассеяние на флуктуациях скорости звука, вторым — рассеяние на флуктуациях плотности.

§ 11. Формула рассеяния

Содержащиеся в уравнении (10.6) флуктуации скорости Δc и плотности $\Delta \rho$ являются случайными функциями координат. Переход к регулярным функциям осуществляется путем возведения в квадрат выражения (10.6) и его статистического усреднения.

Полагая, что флуктуации скорости и плотности обусловлены флуктуациями температуры (при неизменном давлении p_0), перепишем (10.6) следующим образом:

$$p_1 = - \frac{A_0}{4\pi} \int_V \left[2k^2 \frac{1}{c_0} \left(\frac{\partial c}{\partial T} \right)_{p_0} \Delta T + \frac{ik}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{p_0} \frac{\partial (\Delta T)}{\partial \xi} \right] \frac{1}{r} e^{ik(r+\xi)} dv.$$

Будем вычислять давление, обусловленное волнами, рассеянными объемом куба с ребром L , существенно большим радиу-

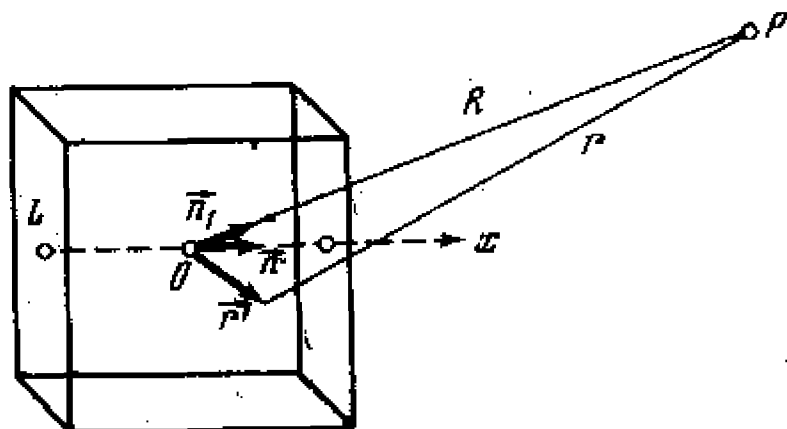
са корреляции a ($L \gg a$), на расстоянии r , существенно большем размеров куба ($r \gg L$). На фиг. 4 n_1 — направление рассеяния; n — направление падающей волны, совпадающее с осью x ; r' — радиус-вектор рассеивающей точки; r — расстояние от рассеивающей точки до точки наблюдения; R — расстояние от начала координат до точки наблюдения. Тогда

$$r \approx R - n_1 r'. \quad (11.1)$$

Заменяя r в фазе на основании (11.1), а в амплитуде просто через R , получим

$$P_1 = - \frac{A_0}{4\pi R} \int_V \left[2k^2 \frac{1}{c_0} \left(\frac{\partial c}{\partial T} \right)_{p_0} \Delta T + \frac{ik}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{p_0} \frac{\partial (\Delta T)}{\partial \xi} \right] e^{ikR + ik(\xi - n_1 r')} dv. \quad (11.2)$$

Заметим прежде всего, что формулами (11.1) и (11.2) можно пользоваться лишь в зоне Фраунгофера. Действительно, формула (11.1) получается в результате разложения в ряд по степеням r'/R точного выражения для r и отбрасывания всех членов ряда, начиная с квадратичного. Это значит, что добавка к фазе, обусловленная первым отброшенным (квадратичным) членом, должна быть



Фиг. 4. Схема к выводу формулы рассеяния

мала по сравнению с π . Разлагая в ряд выражение

$$r = (R^2 + r'^2 - 2Rr')^{1/2}$$

с точностью до квадратов отношения r'/R , получим

$$r \approx R \left\{ 1 - \frac{n_1 r'}{R} + \frac{1}{2R^2} [r'^2 + (n_1 r')^2] \right\}.$$

Так как максимальное значение $r' \sim L$, то условие пренебрежимости квадратичным членом запишется следующим образом:

$$kL^2/R \ll \pi.$$

Это условие выполняется для зоны Фраунгофера. Минимальные размеры рассеивающего объема имеют порядок радиуса корреляции ($L \sim a$). Следовательно, наименее жесткие условия для R получим, полагая в предыдущем неравенстве $L = a$. Это дает

$$ka^2/R \ll 1.$$

Умножая (11.2) на комплексно-сопряженное выражение, получим

$$|p_1|^2 = \frac{A_0^2}{16\pi^2 R^2} \int_V \int_V \left\{ \frac{4k^4}{c_0^2} \left(\frac{\partial c}{\partial T} \right)_{p_0}^2 \Delta T_1 \Delta T_2 + \frac{2ik^3}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{p_0} \frac{1}{c_0} \left(\frac{\partial c}{\partial T} \right)_{p_0} \times \right. \\ \times \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1} (\Delta T_1 \Delta T_2) - \frac{\partial}{\partial \xi_2} (\Delta T_1 \Delta T_2) \right] + \frac{k^2}{\rho_0^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{p_0}^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} (\Delta T_1 \Delta T_2) \left. \right\} \times \\ \times \exp \{ ik [(\xi_1 - \xi_2) - n_1 (r_1' - r_2')] \} dv_1 dv_2. \quad (11.3)$$

Так как $\xi_1 - \xi_2 = n (r_1' - r_2')$, то показатель преобразуется следующим образом:

$$k [(\xi_1 - \xi_2) - n_1 (r_1' - r_2')] = k [n (r_1' - r_2') - n_1 (r_1' - r_2')] = \\ = k (n - n_1) (r_1' - r_2') = K r,$$

где введены обозначения $K = k (n - n_1)$, $r = r_1' - r_2'$. Легко видеть, что $K = 2k \sin \theta/2$, где θ — угол рассеяния, r — расстояние между точками внутри рассеивающего объема.

Усредняя (11.3) статистически и вводя коэффициент корреляции для флуктуаций температуры

$$N(r) = \frac{\langle \Delta T_1 \Delta T_2 \rangle}{\langle (\Delta T)^2 \rangle},$$

получим

$$\langle |p_1|^2 \rangle = \frac{A_0^2 \langle (\Delta T)^2 \rangle}{16\pi^2 R^2} \int_V \int_V \left\{ \frac{4k^4}{c_0^2} \left(\frac{\partial c}{\partial T} \right)_{p_0}^2 N + \frac{2ik^3}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{p_0} \frac{1}{c_0} \left(\frac{\partial c}{\partial T} \right)_{p_0} \times \right. \\ \times \left. \left(\frac{\partial N}{\partial \xi_1} - \frac{\partial N}{\partial \xi_2} \right) + \frac{k^2}{\rho_0^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{p_0}^2 \frac{\partial^2 N}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \right\} e^{iKr} dv_1 dv_2. \quad (11.4)$$

Вводя теперь относительные координаты $\xi = \xi_1 - \xi_2$, $\eta = \eta_1 - \eta_2$, $\zeta = \zeta_1 - \zeta_2$ и координаты центра тяжести

$$x = \frac{1}{2} (\xi_1 + \xi_2), \quad y = \frac{1}{2} (\eta_1 + \eta_2), \quad z = \frac{1}{2} (\zeta_1 + \zeta_2)$$

и учитывая, что коэффициент корреляции $N(r)$ зависит только от относительных координат, вычислим производные от коэффициента корреляции, содержащиеся в (11.4):

$$\frac{\partial N}{\partial \xi_1} = \frac{\partial N}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial N}{\partial \xi_2} = -\frac{\partial N}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial^2 N}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} = -\frac{\partial^2 N}{\partial \xi^2}$$

Тогда формула (11.4) приобретает вид

$$\langle |p_1|^2 \rangle = \frac{A_0^2 \langle (\Delta T)^2 \rangle}{16\pi^2 R^2} \int_V \int_V \left\{ \frac{4k^4}{c_0^2} \left(\frac{\partial c}{\partial T} \right)_{p_0}^2 N + \frac{2ik^3}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{p_0} \times \right. \\ \times \left. \frac{1}{c_0} \left(\frac{\partial c}{\partial T} \right)_{p_0} 2 \frac{\partial N}{\partial \xi} - \frac{k^2}{\rho_0^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{p_0}^2 \frac{\partial^2 N}{\partial \xi^2} \right\} e^{iKr} dv dv_0. \quad (11.5)$$

Подынтегральное выражение не зависит от координат центра тяжести. Выполняя интегрирование по этим переменным, получим

просто множитель V . Интеграл по относительным координатам распадается на три интеграла; при этом интегралы, содержащие производные от коэффициента корреляции $N(\mathbf{r})$, берутся по частям.

В самом деле, замечая, что $K\mathbf{r} = K_\xi\xi + K_\eta\eta + K_\zeta\zeta$, получим

$$\begin{aligned} \iiint_{-L/2}^{+L/2} e^{iK\mathbf{r}} \frac{\partial N}{\partial \xi} d\xi d\eta d\zeta &= \iiint_{-L/2}^{+L/2} [e^{iK\mathbf{r}} N]_{-L/2}^{+L/2} d\eta d\zeta - \\ &- \iiint_{-L/2}^{+L/2} iK_\xi e^{iK\mathbf{r}} N d\xi d\eta d\zeta = -iK_\xi \int_V e^{iK\mathbf{r}} N dv, \\ \iiint_{-L/2}^{+L/2} e^{iK\mathbf{r}} \frac{\partial^2 N}{\partial \xi^2} d\xi d\eta d\zeta &= \iiint_{-L/2}^{+L/2} \left[e^{iK\mathbf{r}} \frac{\partial N}{\partial \xi} \right]_{-L/2}^{+L/2} d\eta d\zeta - \\ &- \iiint_{-L/2}^{+L/2} iK_\xi e^{iK\mathbf{r}} \frac{\partial N}{\partial \xi} d\xi d\eta d\zeta = \\ &= - \iiint_{-L/2}^{+L/2} [iK_\xi e^{iK\mathbf{r}} N]_{-L/2}^{+L/2} d\eta d\zeta - \iiint_{-L/2}^{+L/2} K_\xi^2 e^{iK\mathbf{r}} N d\xi d\eta d\zeta = \\ &= -K_\xi^2 \int_V e^{iK\mathbf{r}} N dv, \end{aligned}$$

так как коэффициент корреляции и его производная обращаются в нуль на гранях куба $\xi = \pm L/2$, размеры которого велики по сравнению с радиусом корреляции.

На основании последних равенств формула (11.5) приобретает вид

$$\langle |p_1|^2 \rangle = V \frac{A_0^2 \langle (\Delta T)^2 \rangle}{16\pi^2 R^2} \left[\frac{2k^2}{c_0} \left(\frac{\partial c}{\partial T} \right)_{p_0} + \frac{K_\xi k}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{p_0} \right]^2 \int_V N(\mathbf{r}) e^{iK\mathbf{r}} dv, \quad (11.6)$$

где

$$K_\xi = K\mathbf{n} = k(\mathbf{n} - \mathbf{n}_1)\mathbf{n} = k(1 - \mathbf{n}_1\mathbf{n}) = k(1 - \cos\vartheta) = 2k \sin^2 \vartheta/2. \quad (11.7)$$

Заменив в (11.6) K_ξ на основании (11.7), получим следующую окончательную формулу:

$$\begin{aligned} \langle |p_1|^2 \rangle &= V \frac{A_0^2 \langle (\Delta T)^2 \rangle k^4}{4\pi^2 R^2} \left[\frac{1}{c_0} \left(\frac{\partial c}{\partial T} \right)_{p_0} + \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{p_0} \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right]^2 \times \\ &\times \int_V N(\mathbf{r}) e^{iK\mathbf{r}} dv. \end{aligned} \quad (11.8)$$

Формула (11.8) позволяет сравнить рассеяние на флуктуациях скорости с рассеянием на флуктуациях плотности, которые характеризуются соответственно первым и вторым членами в квадратных скобках перед интегралом.

В случае газообразной среды, находящейся при постоянном давлении p_0 , флуктуации скорости звука будут определяться флуктуациями плотности. Это видно из формулы для скорости звука

$$c^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho},$$

откуда

$$\frac{2}{c_0} \left(\frac{\partial c}{\partial T} \right)_{p_0} = - \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{p_0}. \quad (11.9)$$

Следовательно, в газе рассеяния на флуктуациях скорости и флуктуациях плотности по порядку величины совпадают.

Для жидкостей равенство (11.9) переходит в неравенство с преобладанием левой части. Так, например, по данным Беранежа [25], для морской воды при 15°C и солёности 36‰

$$\frac{1}{c_0} \left(\frac{\partial c}{\partial T} \right)_{p_0} \approx 2 \cdot 10^{-3}, \quad \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{p_0} \approx 2,6 \cdot 10^{-4},$$

т. е. флуктуации скорости на порядок превышают флуктуации плотности. По этой причине, имея в виду дальнейшие применения формулы рассеяния в гидроакустике, будем пренебрегать флуктуациями плотности по сравнению с флуктуациями скорости звука. В атмосферной акустике этого, вообще говоря, делать нельзя (подробнее этот вопрос обсуждается ниже).

Для воды формула (11.8) упрощается:

$$\langle |p_1|^2 \rangle = V \frac{A_0^2 \langle (\Delta T)^2 \rangle k^4}{4\pi^2 R^2} \frac{1}{c_0^2} \left(\frac{\partial c}{\partial T} \right)_{p_0}^2 \int_V N(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} dv. \quad (11.10)$$

Заметим, что пренебрежение флуктуациями плотности эквивалентно пренебрежению добавочным членом $\nabla \ln \rho \nabla p$ в исходном волновом уравнении (10.1).

Запись формулы (11.10) можно несколько сократить, если ввести показатель преломления n вместо скорости $n = c_0/c$. Обозначая отклонение показателя преломления от среднего значения (равного единице) через μ , найдем из последней формулы:

$$\mu = \Delta n = - \frac{1}{c_0} \left(\frac{\partial c}{\partial T} \right)_{p_0} \Delta T, \quad \langle \mu^2 \rangle = \frac{1}{c_0^2} \left(\frac{\partial c}{\partial T} \right)_{p_0}^2 \langle (\Delta T)^2 \rangle.$$

Формула (11.10) переписывается следующим образом:

$$\langle |p_1|^2 \rangle = V \frac{A_0^2 k^4 \langle \mu^2 \rangle}{4\pi^2 R^2} \int_V N(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} dv. \quad (11.11)$$

В таком виде она встречается у Пекериса [26].

Если статистические свойства среды изотропны, то коэффициент корреляции зависит только от модуля r . В этом случае целесообразно ввести сферическую систему координат, полярная

ось которой совпадает с вектором \mathbf{K} , и выполнить интегрирование по углам:

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} N(r) e^{iKr \cos \alpha} r^2 dr \sin \alpha d\alpha d\varphi = \frac{4\pi}{K} \int_0^{\infty} N(r) \sin(Kr) r dr$$

(верхний предел интегрирования по r можно положить равным бесконечности, так как размеры куба велики по сравнению с радиусом корреляции).

Формула (11.11) приобретает вид:

$$\langle |p_1|^2 \rangle = V \frac{A_0^2 k^4 \langle \mu^2 \rangle}{\pi R^2 K} \int_0^{\infty} N(r) \sin(Kr) r dr. \quad (11.12)$$

Интеграл в этой формуле можно вычислить, задавая вид функции $N(r)$. Например, полагая $N(r) = e^{-r/a}$, получим табличный интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-r/a} \sin(Kr) r dr = \frac{2Ka^3}{(1 + 4k^2 a^2 \sin^2 \theta/2)^2}.$$

Формула рассеяния в этом случае запишется следующим образом:

$$\langle |p_1|^2 \rangle = V \frac{2A_0^2 k^4 a^3 \langle \mu^2 \rangle}{\pi R^2} \frac{1}{(1 + 4k^2 a^2 \sin^2 \theta/2)^2}. \quad (11.13)$$

Эта формула также имеется в упомянутой выше работе Пекериса.

Полагая $N(r) = \exp(-r^2/a^2)$, получим опять табличный интеграл и формулу рассеяния в виде

$$\langle |p_1|^2 \rangle = V \frac{k^4 a^3 \langle \mu^2 \rangle A_0^2}{4 \sqrt{\pi} R^2} \exp(-k^2 a^2 \sin^2 \theta/2). \quad (11.14)$$

Из формул (11.13) и (11.14) можно сделать следующие важные для дальнейшего выводы.

1. «Мелкомасштабные» флуктуации ($ka \ll 1$) являются причиной изотропного рассеяния.

2. В случае «крупномасштабных» флуктуаций ($ka \gg 1$) рассеяние имеет резко направленный характер: главная часть рассеянной мощности сосредоточена в пределах малого телесного угла $\theta \sim 1/ka$.

В атмосферной акустике, наряду с флуктуациями скорости, необходимо, вообще говоря, учитывать флуктуации плотности. Как видно из формулы (11.8), рассеяние на флуктуациях плотности характеризуется членом

$$\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{p_0} \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

имеющим максимум в направлении $\theta = \pi$ (отражение). Однако в случае крупномасштабных неоднородностей этот член

подавляется множителем

$$\int_V N(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{K}\mathbf{r}} dV,$$

имеющим резкий минимум в том же направлении. Иными словами, в атмосферной акустике флуктуациями плотности можно пренебречь по сравнению с флуктуациями скорости в случае крупномасштабных неоднородностей, а в гидроакустике — при любом соотношении между длиной волны и размерами неоднородностей. Эти выводы остаются в силе и в том случае, когда флуктуации скорости и плотности обусловлены флуктуациями концентрации. При этом в формулах вместо производных по температуре будут содержаться производные по концентрации. Для морской воды [24]

$$\frac{1}{c_0} \left(\frac{\partial c}{\partial C} \right)_{T, p_0} \approx 0,8, \quad \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial C} \right)_{T, p_0} \approx 0,15 - 0,20,$$

т. е. флуктуации скорости в 4—5 раз превышают флуктуации плотности.

Для электромагнитных волн можно получить аналогичные формулы рассеяния. Они отличаются от полученных на основе скалярного уравнения множителем $\sin^2 X$, где X — угол между направлением электрического вектора в падающей волне и направлением рассеяния. Этот множитель учитывает характер поляризации в падающей волне.

В своем теоретическом исследовании рассеяния радиоволн в тропосфере Букер и Гордон [27] предположили, что коэффициент корреляции для диэлектрической постоянной имеет вид $\exp(-r/a)$, и получили формулу рассеяния (11.13), справедливую в этом частном случае. Файер [28], пользуясь коэффициентом корреляции вида $\exp(-r^2/a^2)$, вывел формулу (11.14). Старас [29], применив метод малых возмущений к уравнениям Максвелла, без специальных предположений о коэффициенте корреляции получил общую формулу рассеяния (11.11).

§ 12. Коэффициент рассеяния

Ослабление потока энергии волны при прохождении слоя толщины L определяется формулой $\Delta I = \alpha I L$, откуда для коэффициента рассеяния получаем соотношение

$$\alpha = \frac{\Delta I}{I L}. \quad (12.1)$$

Поток энергии I через грань куба пропорционален $A_0^2 L^2$, т. е.

$$I = \beta A_0^2 L^2,$$

где β — коэффициент пропорциональности. Ослабление потока ΔI на пути L равно полной энергии, рассеянной кубом:

$$\Delta I = \beta \oint \langle |p_1|^2 \rangle ds.$$

Здесь интеграл берется по поверхности сферы радиуса R . Ограничиваясь случаем статистически изотропной среды, на основании формул (11.12) и (12.1) получаем

$$\alpha = \frac{k^4 \langle \mu^2 \rangle}{\pi} \int d\Omega \int_0^{\infty} N(r) \frac{\sin(Kr)}{K} r dr, \quad (12.2)$$

где $d\Omega$ — элемент телесного угла. Вспомнив, что $K = 2k \sin \theta/2$, и изменив порядок интегрирования, перепишем формулу (12.2) в следующем виде:

$$\alpha = 2 \langle \mu^2 \rangle k^3 \int_0^{\infty} N(r) r dr \int_0^{\pi} \sin\left(2kr \sin \frac{\theta}{2}\right) \cos \frac{\theta}{2} d\theta. \quad (12.3)$$

Интегрируя по θ , получим окончательную формулу:

$$\alpha = 2 \langle \mu^2 \rangle k^3 \int_0^{\infty} [1 - \cos(2kr)] N(r) dr.$$

Определим коэффициент рассеяния для различных коэффициентов корреляции. Полагая $N = \exp(-r/a)$, находим

$$\alpha = \frac{8 \langle \mu^2 \rangle k^4 a^3}{1 + 4k^2 a^2}. \quad (12.4)$$

Полагая $N = \exp(-r^2/a^2)$, получим

$$\alpha = \sqrt{\pi} \langle \mu^2 \rangle k^2 a [1 - \exp(-k^2 a^2)].$$

В случае мелкомасштабных неоднородностей ($ka \ll 1$) последние формулы приобретают вид

$$\alpha = 8 \langle \mu^2 \rangle k^4 a^3, \quad \alpha = \sqrt{\pi} \langle \mu^2 \rangle k^4 a^3.$$

Таким образом, как и следовало ожидать, для мелкомасштабных флуктуаций получается релеевская зависимость — коэффициент рассеяния пропорционален четвертой степени частоты. Для крупномасштабных флуктуаций ($ka \gg 1$)

$$\alpha = 2 \langle \mu^2 \rangle k^2 a, \quad \alpha = \sqrt{\pi} \langle \mu^2 \rangle k^2 a, \quad (12.5)$$

т. е. коэффициент рассеяния растет пропорционально квадрату частоты, подобно коэффициенту вязкого поглощения.

§ 13. Применимость формулы рассеяния

Условие применимости формулы рассеяния может быть получено из требования малости рассеянной энергии по сравнению с падающей, т. е. из условия $\Delta I \ll I$, что на основании (12.1) дает:

$$\alpha L \ll 1. \quad (13.1)$$

Рассматривая крупномасштабные неоднородности, заменим α в (13.1) на основании (12.5). Тогда получим

$$\langle \mu^2 \rangle k^2 a L \ll 1. \quad (13.2)$$

Если, в частности, рассеивающий объем имеет размеры порядка масштаба неоднородностей ($L \sim a$), то условие (13.2) применимости формулы рассеяния запишется в виде

$$\langle \mu^2 \rangle k^2 a^2 \ll 1 \text{ или } \sqrt{\langle \mu^2 \rangle} k a \ll 1. \quad (13.3)$$

Неравенство (13.3) также вытекает из анализа пригодности приближенного решения задачи о рассеянии сферы радиуса a , свойства которой мало отличаются от свойств окружающей среды [26]. Роль радиуса в нашем случае, очевидно, играет характерный масштаб неоднородностей (радиус корреляции).

Из условия (13.2) следует, что размеры рассеивающего объема и масштаб неоднородностей не должны быть слишком велики, а частоты не должны быть слишком высоки. Это означает, в частности, что переход к геометрической акустике ($k \rightarrow \infty$) в формуле рассеяния невозможен. Формулы предыдущего параграфа дали бы для коэффициента рассеяния в этом случае бесконечные значения.

§ 14. Ослабление звукового пучка, обусловленное рассеянием

Результаты § 12 относятся к плоскопараллельному пучку. Если пучок расходится, как это часто бывает, то при расчете коэффициента рассеяния необходимо учитывать ту часть энергии, которая, рассеиваясь, выходит из пучка. Энергия, рассеянная внутрь пучка, не вызывает его ослабления, но обуславливает другой эффект: флуктуации амплитуды и фазы в прямом пучке (см. гл. V).

Если аксиально-симметричный пучок имеет угол раствора $2\vartheta_0$, то при вычислении рассеянной энергии и коэффициента рассеяния по формуле (12.3) необходимо интегрировать по ϑ в пределах от ϑ_0 до π . Тогда

$$\alpha = 2 \langle \mu^2 \rangle k^2 \int_0^\infty N(r) \left[\cos \left(2kr \sin \frac{\vartheta_0}{2} \right) - \cos (2kr) \right] dr. \quad (14.1)$$

Полагая $N = \exp(-r/a)$ и выполняя интегрирование в (14.1), получим

$$\alpha = 8 \langle \mu^2 \rangle k^2 a^3 \frac{1 - \sin^2 \vartheta_0/2}{(1 + 4k^2 a^2) \left(1 + 4k^2 a^2 \sin^2 \frac{\vartheta_0}{2} \right)}.$$

Если $N = \exp(-r^2/a^2)$, то (14.1) дает

$$\alpha = \sqrt{\pi} \langle \mu^2 \rangle k^2 a \left[\exp(-k^2 a^2 \sin^2 \vartheta_0/2) - \exp(-k^2 a^2) \right].$$

В случае крупномасштабных неоднородностей главная часть рассеянной энергии сосредоточена внутри угла $\vartheta = 1/ka$. Этот угол может быть больше или меньше угла раствора пучка ϑ_0 . Если $\vartheta < \vartheta_0$, то главная часть энергии рассеивается внутрь пучка. В другом предельном случае ($\vartheta \gg \vartheta_0$) главная часть рассеянной энергии уходит за пределы пучка. При этом для определения коэффициента рассеяния можно пользоваться формулами, выведенными для плоской волны.

Либерман [5] дает для коэффициента рассеяния плоскопараллельного пучка неверную формулу

$$\alpha = \frac{2 \langle \mu^2 \rangle k^2 a}{1 + 4k^2 a^2},$$

вследствие чего он получает значение коэффициента рассеяния, заниженное по сравнению с (12.4) в $4k^2 a^2$ раза, т. е. на три порядка (!).

Действительно, опираясь на свои экспериментальные данные ($\langle \mu^2 \rangle = 5 \cdot 10^{-9}$, $a = 60$ см) для частоты $\nu = 10$ кгц, Либерман получает $\alpha \approx 10^{-10}$ см⁻¹. Вычисления по формуле (12.4) дают $\alpha = 10^{-7}$ см⁻¹ = 0,04 дб/км, что составляет примерно 1/20 от наблюдаемого затухания в морской воде на той же частоте. Так как коэффициенты рассеяния и поглощения зависят от частоты одинаково (пропорциональны квадрату частоты), то полученное выше соотношение между коэффициентами рассеяния и затухания сохранится (по порядку величин) и на других частотах.

Глава V

ФЛУКТУАЦИИ

При распространении волны в среде со случайными неоднородностями наблюдаются флуктуации характеристик волнового поля, обусловленные наложением рассеянных волн на первичную волну. Между флуктуациями характеристик волнового поля и флуктуациями показателя преломления должна существовать зависимость. Задача заключается в том, чтобы эту зависимость установить. Пользуясь ею, можно делать заключения о статистических свойствах волнового поля, зная статистические свойства среды. Обратная задача, вообще говоря, неоднозначна и без дополнительных предположений не может быть решена. Однако если сделать, например, разумные предположения относительно вида коэффициента корреляции для показателя преломления, то можно определить среднюю величину флуктуаций показателя преломления,

измерив флуктуации в поле. Таким образом, изучение флуктуаций в волне, интересное и само по себе, открывает новые возможности к изучению свойств среды, через которую волна прошла.

Мы начнем изучение статистических свойств волнового поля с флуктуаций амплитуды и фазы. С этой целью приведем вывод исходных формул для флуктуаций амплитуды и фазы двумя различными методами, что позволит дать сравнительную оценку этим методам.

§ 15. Метод малых возмущений

Будем ради определенности считать, что случайные неоднородности имеются лишь в правом полупространстве ($x > 0$). Левое полупространство ($x < 0$) случайных неоднородностей не содержит. Из однородной среды в неоднородную проходит плоская волна

$$p_0 = A_0 \exp i\varphi_0 = A_0 \exp[-i(\omega t - kx)].$$

В неоднородной среде в точке с координатами x, y, z , находится приемник, на который, помимо волны p_0 , попадают волны, рассеянные неоднородностями. Их суммарное действие будем характеризовать волновой функцией

$$p_1 = A_1 \exp i\varphi_1,$$

которую можно без труда найти как первое приближение, пользуясь методом малых возмущений, если в качестве нулевого приближения взять p_0 . Пренебрегая флуктуациями плотности по сравнению с флуктуациями скорости, на основании (10.6) получим

$$p_1 = \frac{k^2 A_0}{2\pi} \int_V \frac{\exp[ik(r + \xi)]}{r} \mu(\xi, \eta, \zeta) dv, \quad (15.1)$$

где r — расстояние от рассеивающего объема dv с координатами ξ, η, ζ до точки наблюдения (x, y, z). Интегрирование в (15.1) необходимо распространить на ту часть пространства, от которой приходят рассеянные волны в точку наблюдения. Если результат сложения первичной и рассеянных волн обозначить через $p = A \exp i\varphi$, то можно записать следующее уравнение:

$$A \exp i\varphi = A_0 \exp i\varphi_0 + A_1 \exp i\varphi_1.$$

Разделив все члены на $A_0 \exp i\varphi_0$, получим

$$\frac{A}{A_0} \exp i(\varphi - \varphi_0) = 1 + \frac{A_1}{A_0} \exp i(\varphi_1 - \varphi_0), \quad (15.2)$$

где последний член на основании (15.1) определяется формулой

$$\frac{A_1}{A_0} \exp i(\varphi_1 - \varphi_0) = \frac{k^2}{2\pi} \int_V \frac{1}{r} \exp ik[r - (x - \xi)] \mu(\xi, \eta, \zeta) dv.$$

Вводя обозначение

$$\frac{A_1}{A_0} \exp i(\varphi_1 - \varphi_0) = X + iY,$$

найдем

$$X = \frac{k^2}{2\pi} \int \frac{1}{r} \cos k[r - (x - \xi)] \mu(\xi, \eta, \zeta) dv, \quad (15.3)$$

$$Y = \frac{k^2}{2\pi} \int \frac{1}{r} \sin k[r - (x - \xi)] \mu(\xi, \eta, \zeta) dv. \quad (15.4)$$

Так как амплитуда рассеянных волн A_1 мала по сравнению с амплитудой первичной волны A_0 , то амплитуда $A = A_0 + \Delta A$ и фаза $\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi$ результирующей волны мало отличаются от амплитуды A_0 и фазы φ_0 первичной волны, т. е.

$$\frac{\Delta A}{A_0} \ll 1, \quad \Delta\varphi \ll 1.$$

Разлагая левую часть уравнения (15.2) по степеням малых флуктуаций и ограничиваясь старшими членами, получим

$$\frac{\Delta A}{A_0} + i\Delta\varphi = X + iY.$$

Приравнивая действительные и мнимые части в отдельности, получим для флуктуации фазы $\Delta\varphi$ и флуктуации амплитуды ΔA на основании (15.3) и (15.4) следующие формулы:

$$\Delta\varphi = \frac{k^2}{2\pi} \int \frac{1}{r} \sin k[r - (x - \xi)] \mu(\xi, \eta, \zeta) dv, \quad (15.5)$$

$$\frac{\Delta A}{A_0} = \frac{k^2}{2\pi} \int \frac{1}{r} \cos k[r - (x - \xi)] \mu(\xi, \eta, \zeta) dv. \quad (15.6)$$

Аргумент $[r - (x - \xi)]$ в последних формулах определяет разность хода в точке приема (x, y, z) между волной, рассеянной элементом (ξ, η, ζ) , и первичной волной. Заметим, что разность обращается в нуль, если рассеивающий элемент лежит на прямой, проходящей через точку наблюдения параллельно оси x , как и должно быть в этом случае.

Полученные выражения для флуктуаций амплитуды и фазы ограничены требованием малости ($\Delta\varphi \ll 1$, $\Delta A/A_0 \ll 1$) и, следовательно, малыми дистанциями, так как флуктуации с дистанцией растут.

§ 16. Метод плавных возмущений

Звуковое давление удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{(1 + \mu)^2}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \nabla^2 p = 0, \quad (16.1)$$

где μ — отклонение показателя преломления среды от среднего значения, равного единице; $|\mu| \ll 1$.

Плоскую волну в левом полупространстве по-прежнему задаем в виде

$$p_0 = A_0 \exp [-i (\omega t - kx)].$$

Решение волнового уравнения для правого полупространства ищем в форме

$$p = A(\mathbf{r}) \exp \{-i [\omega t - S(\mathbf{r})]\}, \quad (16.2)$$

где $A(\mathbf{r})$ и $S(\mathbf{r})$ — неизвестные функции.

Сущность метода заключается в замене волновой функции p другой функцией Ψ , которая связана с первой соотношением

$$p = A_0 \exp \{-i [\omega t - \Psi(\mathbf{r})]\}. \quad (16.3)$$

Из сравнения (16.3) с (16.2) следует, что

$$\Psi(\mathbf{r}) = S(\mathbf{r}) - i \ln \frac{A(\mathbf{r})}{A_0}. \quad (16.4)$$

Как видно, действительная и мнимая части введенной функции $\Psi(\mathbf{r})$ определяют соответственно фазу и логарифм отношения амплитуд (уровень силы звука), флуктуации которых нас непосредственно интересуют.

Заменив функцию p через Ψ на основании (16.3) в уравнении (16.1), получим уравнение для Ψ

$$(\nabla \Psi)^2 - i \nabla^2 \Psi = k^2 n^2.$$

Нулевое приближение Ψ_0 удовлетворяет уравнению для однородной среды

$$(\nabla \Psi_0)^2 - i \nabla^2 \Psi_0 = k^2.$$

Вычитая нижнее уравнение из верхнего, получим для функции $\Psi' = \Psi - \Psi_0$ уравнение

$$2 (\nabla \Psi_0 \nabla \Psi') - i \nabla^2 \Psi' = 2\mu k^2 + [\mu^2 k^2 - (\nabla \Psi')^2]. \quad (16.5)$$

Пользуясь методом малых возмущений и полагая, что $\nabla \Psi'$ (точнее говоря, безразмерная величина $\frac{1}{k} \nabla \Psi'$) имеет порядок μ , отбросим члены, заключенные в квадратные скобки, как величины второго порядка малости относительно μ . Тогда получим линейное уравнение для Ψ'

$$2 (\nabla \Psi_0 \nabla \Psi') - i \nabla^2 \Psi' = 2\mu k^2 \quad (16.5a)$$

при условии, что $\frac{1}{k} \nabla \Psi' \sim \mu$ или

$$\frac{1}{k} |\nabla \Psi'| \ll 1. \quad (16.6)$$

Последнее условие означает, что изменение флуктуации фазы и относительное изменение амплитуды на длине волны должны быть малы. На полное изменение этих величин соотношение (16.6) ограничений не накладывает.

Полагая в (16.5а) $\Psi_0 = kx$, получим

$$2k \frac{\partial \Psi'}{\partial x} - i \nabla^2 \Psi' = 2\mu k^2.$$

Вводя новую функцию W

$$\Psi' = W \exp(-ikx), \quad (16.7)$$

получим для нее уравнение

$$\nabla^2 W + k^2 W = f(x, y, z), \quad (16.8)$$

где

$$f(x, y, z) = i2\mu k^2 \exp ikx.$$

Решение неоднородного уравнения (16.8), удовлетворяющее условию излучения, имеет вид

$$W = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{r} \exp(ikr) f(\xi, \eta, \zeta) dv,$$

где

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}.$$

Заменяя f на основании (16.8), получим

$$W = -\frac{ik^2}{2\pi} \int \frac{1}{r} \exp[ik(r + \xi)] \mu(\xi, \eta, \zeta) dv.$$

С помощью (16.7) возвратимся теперь к функции Ψ'

$$\Psi' = -\frac{ik^2}{2\pi} \int \frac{1}{r} \exp\{ik[r - (x - \xi)]\} \mu(\xi, \eta, \zeta) dv. \quad (16.9)$$

Отделив действительную и мнимую части, на основании (16.4) получим для флуктуаций уровня и фазы следующие формулы:

$$S' = \frac{k^2}{2\pi} \int \frac{1}{r} \sin k[r - (x - \xi)] \mu dv, \quad (16.10)$$

$$\ln \frac{A(r)}{A_0} = \frac{k^2}{2\pi} \int \frac{1}{r} \cos k[r - (x - \xi)] \mu dv. \quad (16.11)$$

В случае малых флуктуаций они переходят соответственно в формулы (15.5) и (15.6), полученные методом малых возмущений.

Возвратимся к неравенству (16.6). Оно означает малость изменения уровня на длине волны

$$\frac{1}{k} \left| \nabla \ln \frac{A(r)}{A_0} \right| \ll 1 \quad (16.12)$$

и малость изменения на длине волны флуктуации фазы

$$\frac{1}{k} |\nabla S'| \ll 1. \quad (16.13)$$

Неравенство (16.12) будет соблюдаться при условии малости рассеяния на длине волны.

Неравенство (16.13) означает малость угла отклонения луча от первоначального направления. Действительно, так как

$$S = S_0 + S' = kx + S'(x, y, z),$$

то

$$\frac{\partial S}{\partial x} = k + \frac{\partial S'}{\partial x}, \quad \frac{\partial S}{\partial y} = \frac{\partial S'}{\partial y}, \quad \frac{\partial S}{\partial z} = \frac{\partial S'}{\partial z}.$$

В силу (16.13) имеют место соотношения:

$$\left| \frac{\partial S}{\partial x} \right| \approx k, \quad \left| \frac{\partial S}{\partial y} \right| \ll k, \quad \left| \frac{\partial S}{\partial z} \right| \ll k,$$

т. е. поперечные компоненты градиента фазы малы по сравнению с продольной. Следовательно, угол отклонения луча от первоначального направления мал.

Условие малости рассеяния на длине волны всегда выполняется в слабонеоднородной среде ($|\mu| \ll 1$). Так как крупномасштабные неоднородности создают резко направленное рассеяние, то для них также выполняется условие малости угла отклонения луча. Мелкомасштабные неоднородности создают изотропное рассеяние. Для них условие малости угла отклонения луча будет выполняться только в том случае, если амплитуда рассеянных волн мала по сравнению с амплитудой падающей волны.

Таким образом, условие (16.13) накладывает ограничение малости на величину амплитуды рассеянного поля в случае мелкомасштабных неоднородностей и не накладывает этого ограничения в случае крупномасштабных неоднородностей. Поэтому может создаться впечатление, что метод плавных возмущений пригоден для описания не только слабых, но и сильных флуктуаций уровня. На самом деле это не так. В дальнейшем (§ 27) будет показано, что метод плавных возмущений ограничен малостью флуктуаций уровня.

§ 17. Приближение Френеля

В случае крупномасштабных неоднородностей ($ka \gg 1$) можно пренебречь отражением волны и ограничить область интегрирования в формулах (16.10) и (16.11) слоем, лежащим перед приемником и заключенным между плоскостями $\xi = 0$ и $\xi = x$.

Существенный эффект будут давать те неоднородности, которые сосредоточены внутри конуса с вершиной в точке приема и углом раскрытия порядка $1/ka$. Внутри этого конуса формула $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + \rho^2}$, где $\rho^2 = (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2$, может быть заменена приближенной

$$r \approx (x - \xi) + \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{x - \xi}. \quad (17.1)$$

Заменяя в (16.10) и (16.11) $r = (x - \xi)$ на основании (17.1) и величину $1/r$ через $1/(x - \xi)$, получим

$$S' = \frac{k^2}{2\pi} \int_0^x \int_{-\infty}^{+\infty} \int \frac{\sin \frac{k\rho^2}{2(x-\xi)}}{x-\xi} \mu(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta, \quad (17.2)$$

$$\ln \frac{A(r)}{A_0} = \frac{k^2}{2\pi} \int_0^x \int_{-\infty}^{+\infty} \int \frac{\cos \frac{k\rho^2}{2(x-\xi)}}{x-\xi} \mu(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta. \quad (17.3)$$

Формулы (17.2) и (17.3) соответствуют приближению Френеля в теории дифракции. Более строгое обоснование их с помощью интеграла Зоммерфельда дано в Приложении I.

Введем следующие сокращенные обозначения в подынтегральных выражениях (17.2) и (17.3):

$$\begin{aligned} \Phi_1\left(\frac{x-\xi}{k}, \rho\right) &\equiv \frac{k}{2\pi(x-\xi)} \sin \frac{k\rho^2}{2(x-\xi)}, \\ \Phi_2\left(\frac{x-\xi}{k}, \rho\right) &\equiv \frac{k}{2\pi(x-\xi)} \cos \frac{k\rho^2}{2(x-\xi)}. \end{aligned} \quad (17.4)$$

Кроме того, отбросим индекс в обозначении флуктуации фазы S' и обозначим флуктуацию уровня через $B = \ln A/A_0$. Тогда формулы (17.2) и (17.3) переишутся так:

$$S(x, y, z) = k \int_0^x \int_{-\infty}^{+\infty} \int \Phi_1\left(\frac{x-\xi}{k}, \rho\right) \mu(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta, \quad (17.5)$$

$$B(x, y, z) = k \int_0^x \int_{-\infty}^{+\infty} \int \Phi_2\left(\frac{x-\xi}{k}, \rho\right) \mu(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta. \quad (17.6)$$

Формулы (17.5) и (17.6) были получены А. М. Обуховым [30].

Введем безразмерные переменные $x' = kx$, $y' = ky$, $z' = kz$, $\xi' = k\xi$, $\eta' = k\eta$, $\zeta' = k\zeta$, $\rho' = k\rho$. Формулы (17.5) и (17.6) переишутся в следующей окончательной форме:

$$S(x', y', z') = \int_0^{x'+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int \Phi_1(x' - \xi', \rho') \mu(\xi', \eta', \zeta') d\xi' d\eta' d\zeta', \quad (17.7)$$

$$B(x', y', z') = \int_0^{x'+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int \Phi_2(x' - \xi', \rho') \mu(\xi', \eta', \zeta') d\xi' d\eta' d\zeta'. \quad (17.8)$$

§ 18. Флуктуации уровня и фазы

Переходя к статистическому рассмотрению вопроса, займемся вычислением средних квадратов флуктуаций уровня и фазы. Допустим, что приемник находится в точке $(L, 0, 0)$ или $(L', 0, 0)$, где $L' = kL$. Формулы (17.7) и (17.8) переишутся следующим

образом:

$$S(L', 0, 0) = \int_0^{L'+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(L' - \xi', \rho') \mu(\xi', \eta', \zeta') d\xi' d\eta' d\zeta', \quad (18.1)$$

$$B(L', 0, 0) = \int_0^{L'+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_2(L' - \xi', \rho') \mu(\xi', \eta', \zeta) d\xi' d\eta' d\zeta', \quad (18.2)$$

где $\rho' = \sqrt{\eta'^2 + \zeta'^2}$.

Возводя (18.1) и (18.2) в квадрат и усредняя, получим

$$\begin{aligned} \langle S^2 \rangle = \langle \mu^2 \rangle & \int_0^{L'} \int_0^{L'} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(L' - \xi'_1, \rho'_1) \Phi_1(L' - \xi'_2, \rho'_2) \times \\ & \times N(r') d\xi'_{s1} d\xi'_{s2} d\eta'_1 d\eta'_2 d\zeta'_{s1} d\zeta'_{s2}, \end{aligned} \quad (18.3)$$

$$\begin{aligned} \langle B^2 \rangle = \langle \mu^2 \rangle & \int_0^{L'} \int_0^{L'} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_2(L' - \xi'_1, \rho'_1) \Phi_2(L' - \xi'_2, \rho'_2) \times \\ & \times N(r') d\xi'_{s1} d\xi'_{s2} d\eta'_1 d\eta'_2 d\zeta'_{s1} d\zeta'_{s2}, \end{aligned}$$

где $N(r')$ — коэффициент корреляции показателя преломления и

$$r' = \sqrt{(\xi'_1 - \xi'_2)^2 + (\eta'_1 - \eta'_2)^2 + (\zeta'_1 - \zeta'_2)^2}.$$

Ограничимся рассмотрением статистически изотропной среды. В этом случае коэффициент корреляции N будет зависеть от модуля r' . Вводя относительные координаты

$$\eta = \eta'_1 - \eta'_2, \quad \zeta = \zeta'_1 - \zeta'_2 \quad (18.4)$$

и координаты центра тяжести

$$y = \frac{1}{2}(\eta'_1 + \eta'_2), \quad z = \frac{1}{2}(\zeta'_1 + \zeta'_2), \quad (18.5)$$

получим

$$\begin{aligned} \langle S^2 \rangle = \langle \mu^2 \rangle & \int_0^{L'} \int_0^{L'} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1 \left[L' - \xi'_1, \sqrt{\left(\frac{\eta}{2} + y\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{2} + z\right)^2} \right] \times \\ & \times \Phi_1 \left[L' - \xi'_1, \sqrt{\left(\frac{\eta}{2} - y\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{2} - z\right)^2} \right] \times \\ & \times N(r') d\xi'_{s1} d\xi'_{s2} d\eta d\zeta dy dz, \end{aligned} \quad (18.6)$$

$$\begin{aligned} \langle B^2 \rangle = \langle \mu^2 \rangle & \int_0^{L'} \int_0^{L'} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_2 \left[L' - \xi'_1, \sqrt{\left(\frac{\eta}{2} + y\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{2} + z\right)^2} \right] \times \\ & \times \Phi_2 \left[L' - \xi'_{s2}, \sqrt{\left(\frac{\eta}{2} - y\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{2} - z\right)^2} \right] \times \\ & \times N(r') d\xi'_{s1} d\xi'_{s2} d\eta d\zeta dy dz. \end{aligned} \quad (18.7)$$

В этих формулах можно выполнить интегрирование по переменным y и z . Вычисление интегралов подобного вида приведено в Приложении II, из которого следует:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1 \left[L' - \xi'_1, \sqrt{\left(\frac{\eta}{2} + y\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{2} + z\right)^2} \right] \times \\ & \quad \times \Phi_1 \left[L' - \xi'_2, \sqrt{\left(\frac{\eta}{2} - y\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{2} - z\right)^2} \right] dy dz = \\ & = \frac{1}{2} \{ \Phi_1(\xi'_1 - \xi'_2, \rho) + \Phi_1[2L' - (\xi'_1 + \xi'_2), \rho] \}, \end{aligned} \quad (18.8)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_2 \left[L' - \xi'_1, \sqrt{\left(\frac{\eta}{2} + y\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{2} + z\right)^2} \right] \times \\ & \quad \times \Phi_2 \left[L' - \xi'_2, \sqrt{\left(\frac{\eta}{2} - y\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{2} - z\right)^2} \right] dy dz = \\ & = \frac{1}{2} \{ \Phi_1(\xi'_1 - \xi'_2, \rho) - \Phi_1[2L' - (\xi'_1 + \xi'_2), \rho] \}, \end{aligned} \quad (18.9)$$

где $\rho^2 = \sqrt{\eta^2 + \zeta^2}$.

После интегрирования формулы (18.6) и (18.7) приобретают вид:

$$\langle S^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle \mu^2 \rangle (I_1 + I_2), \quad (18.10)$$

$$\langle B^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle \mu^2 \rangle (I_1 - I_2), \quad (18.11)$$

где

$$I_1 = \int_0^{L'} \int_0^{L'} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1(\xi'_1 - \xi'_2, \rho) N(r') d\xi'_1 d\xi'_2 d\eta d\zeta, \quad (18.12)$$

$$I_2 = \int_0^{L'} \int_0^{L'} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1[2L' - (\xi'_1 + \xi'_2), \rho] N(r') d\xi'_1 d\xi'_2 d\eta d\zeta. \quad (18.13)$$

Дальнейшее упрощение интегралов I_1 и I_2 возможно в том случае, когда дистанция велика по сравнению с радиусом корреляции ($L \gg a$). Вводя относительную координату $\xi = \xi'_1 - \xi'_2$ и координату центра тяжести $x = \frac{1}{2}(\xi'_1 + \xi'_2)$, интегрируем по ξ в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. Тогда получим

$$I_1 = \int_0^{L'} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1(\xi, \rho) N(r') d\xi d\eta d\zeta, \quad (18.14)$$

$$I_2 = \int_0^{L'} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1(2L' - 2x, \rho) N(r') d\xi d\eta d\zeta. \quad (18.15)$$

Поскольку подынтегральное выражение в (18.14) не зависит от x , сразу получаем

$$\begin{aligned} I_1 &= L' \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1(\xi, \rho) N(r') d\xi d\eta d\zeta = \\ &= L' \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\xi} \sin \frac{\rho^2}{2\xi} N(r') d\xi d\eta d\zeta. \end{aligned} \quad (18.16)$$

В (18.15) также можно выполнить интегрирование по x . Поскольку от x зависит один множитель $\Phi_1[2L' - 2x, \rho]$ в подынтегральном выражении, задача сводится к вычислению интеграла

$$\int_0^{L'} \Phi_1[2L' - 2x, \rho] dx = \int_0^{L'} \frac{1}{2\pi(2L' - 2x)} \sin \frac{\rho^2}{2(2L' - 2x)} dx.$$

Подстановкой $z = \rho^2/2(2L' - 2x)$ он приводится к виду

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\rho^2/4L'}^{\infty} \frac{\sin z}{z} dz = -\frac{1}{4\pi} \text{si} \left(\frac{\rho^2}{4L'} \right)$$

(см. определение интегрального синуса [31]).

Таким образом,

$$I_2 = - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4\pi} \text{si} \left(\frac{\rho^2}{4L'} \right) N(r') d\xi d\eta d\zeta. \quad (18.17)$$

Переходя в (18.16) и (18.17) к полярным координатам (ρ, φ) на плоскости (η, ζ) и учитывая, что коэффициент корреляции $N(r')$ — четная функция относительно ξ , получим

$$I_1 = 2L' \int_0^{\infty} d\xi \int_0^{\infty} \frac{1}{\xi} \sin \frac{\rho^2}{2\xi} N(r') \rho d\rho, \quad (18.18)$$

$$I_2 = - \int_0^{\infty} d\xi \int_0^{\infty} \text{si} \left(\frac{\rho^2}{4L'} \right) N(r') \rho d\rho. \quad (18.19)$$

Формула (18.18) допускает дальнейшие упрощения. Вместо ρ введем новую переменную $q = \rho^2/2\xi$. Тогда второй интеграл в (18.18) запишется следующим образом:

$$\int_0^{\infty} \sin q N(r') dq. \quad (18.20)$$

Проянтегрируем (18.20) по частям дважды:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \sin q N(r') dq &= -\cos q N(r') \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \cos q \frac{\partial N(r')}{\partial q} dq = \\ &= N(\xi, 0, 0) + \sin q \frac{\partial N}{\partial q} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \sin q \frac{\partial^2 N(r')}{\partial q^2} dq = \\ &= N(\xi, 0, 0) - \int_0^{\infty} \sin q \frac{\partial^2 N(r')}{\partial q^2} dq. \end{aligned} \quad (18.21)$$

Величина коэффициента корреляции при изменении ρ падает от своего максимального значения $N(\xi, 0, 0)$ при $\rho = 0$ до значения, практически равного нулю на расстоянии ρ порядка радиуса корреляции a' ($a' = ka$). Переменная q изменяется при этом на величину порядка $a'^2/2\xi$, а так как область существенных значений ξ тоже не превышает a' , то изменение q будет не меньше $a'/2$, или $q \gtrsim a'$. На основании сказанного

$$\frac{\partial^2 N(r')}{\partial q^2} \sim \frac{1}{q^2} N(\xi, 0, 0) \lesssim \frac{N(\xi, 0, 0)}{a'^2}.$$

Следовательно, интеграл правой части (18.21) имеет порядок $N(\xi, 0, 0)/a'$. В исследуемом случае крупномасштабных неоднородностей ($a' \gg 1$) им можно пренебречь по сравнению с первым членом $N(\xi, 0, 0)$. Тогда получим

$$\int_0^{\infty} \sin q N(r') dq = N(\xi, 0, 0).$$

Интеграл I_1 (18.16) приводится к виду

$$I_1 = 2L' \int_0^{\infty} N(\xi, 0, 0) d\xi.$$

Интеграл I_2 (18.17) путем введения переменной

$$v = \rho^2/4L' \quad (18.22)$$

приводится к виду

$$I_2 = -2L' \int_0^{\infty} d\xi \int_0^{\infty} \sin v N(r') dv.$$

Для средних квадратов флуктуаций уровня и фазы получаем следующие окончательные формулы:

$$\langle S^2 \rangle = \langle \mu^2 \rangle L' \int_0^{\infty} d\xi \left[N(\xi, 0, 0) - \int_0^{\infty} \sin v N(r') dv \right], \quad (18.23)$$

$$\langle B^2 \rangle = \langle \mu^2 \rangle L' \int_0^{\infty} d\xi \left[N(\xi, 0, 0) + \int_0^{\infty} \sin v N(r') dv \right]. \quad (18.24)$$

Формулы (18.23) и (18.24) дают общее решение задачи о флуктуациях уровня и фазы в случае крупномасштабных неоднородностей и при условии, что дистанция велика по сравнению с масштабом неоднородностей. Вид решения существенно зависит от величины безразмерного параметра $D = 4L/ka^2$, определяемого отношением размеров зоны Френеля к масштабу неоднородностей. Этот параметр, следуя Г. С. Горелику [32], мы будем в дальнейшем называть волновым параметром.

Формулы (18.23) и (18.24) можно исследовать, не задавая вида коэффициента корреляции $N(r')$, в следующих двух случаях, соответствующих предельным значениям волнового параметра: $D \gg 1$, $D \ll 1$. Это исследование сводится к оценке интеграла

$$I = \int_0^{\infty} \text{si } \nu N(r') d\nu \quad (18.25)$$

в указанных предельных случаях.

§ 19. Область больших значений волнового параметра (дифракция Фраунгофера)

Подынтегральное выражение в (18.25) отлично от нуля для значений r' , не превышающих по порядку величины радиуса корреляции a' . В этой области существенных значений аргумент интегрального синуса ν не превышает ka^2/L , т. е. $1/D$ ($\nu \sim 1/D$). В случае большого волнового параметра ν будет мало. Поэтому $\text{si } \nu \approx -\pi/2$.

Формула (18.25) примет вид

$$I = -\frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} N(r') d\nu.$$

Подынтегральное выражение $N(r')$ имеет максимальное значение $N(\xi, 0, 0)$ при $\nu = 0$ ($\eta = \zeta = 0$). От этого максимального значения $N(r')$ падает практически до нуля на расстоянии $\nu \sim 1/D$. Следовательно,

$$I \sim \frac{1}{D} N(\xi, 0, 0).$$

Интегралом I можно пренебречь по сравнению с $N(\xi, 0, 0)$. Тогда выражения (18.23) и (18.24) запишутся в виде одной формулы

$$\langle S^2 \rangle = \langle B^2 \rangle = \langle \mu^2 \rangle L' \int_0^{\infty} N(\xi, 0, 0) d\xi, \quad (19.1)$$

или, при переходе к размерным переменным L и $\xi^* = \xi/k$,

$$\langle S^2 \rangle = \langle B^2 \rangle = \langle \mu^2 \rangle k^2 L \int_0^\infty N(\xi^*, 0, 0) d\xi^*. \quad (19.2)$$

Таким образом, в случае большого параметра $D \gg 1$ средние квадраты флуктуаций уровня и фазы одинаковы и растут пропорционально дистанции. Например, задавая коэффициент корреляции в форме $N(\xi) = \exp(-\xi^2/a^2)$, получим

$$\langle S^2 \rangle = \langle B^2 \rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \langle \mu^2 \rangle k^2 a L. \quad (19.3)$$

Исследуя флуктуации давления звуковых импульсов в сферической волне методом малых возмущений (в обычной форме), Минцер [33] получил следующую формулу:

$$\frac{\langle |\Delta p|^2 \rangle}{\langle |p|^2 \rangle} = 2 \langle \mu^2 \rangle k^2 L \int_0^\infty N(\xi, 0, 0) d\xi.$$

Правая часть этой формулы в два раза превышает правую часть формулы (19.2). Причина этого отличия заключается в том, что флуктуация поля (давления) обуславливается не только флуктуацией амплитуды, но и флуктуацией фазы

$$\frac{\langle |\Delta p|^2 \rangle}{\langle |p|^2 \rangle} = \langle B^2 \rangle + \langle S^2 \rangle.$$

Действительно, поле всегда может быть представлено в виде

$$p = e^{B+iS+ikx}. \quad (19.4)$$

Разложим это выражение по степеням малых B и S . Ограничиваясь в разложении линейными членами, найдем

$$p = (1 + B + iS)e^{ikx}.$$

Усредняя поле по совокупности сред, для среднего поля получим

$$\langle p \rangle = e^{ikx}.$$

Далее,

$$\Delta p = p - \langle p \rangle = (B + iS)e^{ikx},$$

откуда следует

$$\frac{\langle |\Delta p|^2 \rangle}{\langle |p|^2 \rangle} = \langle B^2 \rangle + \langle S^2 \rangle.$$

Так как в области больших значений волнового параметра $\langle B^2 \rangle = \langle S^2 \rangle$, то

$$\frac{\langle |\Delta p|^2 \rangle}{\langle |p|^2 \rangle} = 2 \langle B^2 \rangle,$$

т. е. флуктуация поля в два раза больше флуктуации амплитуды (уровня).

В работе [34] Минцер установил критерий применимости первого приближения в методе малых возмущений, исходя из требования малости второго приближения по сравнению с первым. Критерий этот

$$\langle \mu^2 \rangle k^2 a L \ll 1$$

совпадает с критерием применимости формулы рассеяния, указанным в § 13.

§ 20. Область малых значений волнового параметра

Как выяснено в предыдущем параграфе, область существенных значений переменной v имеет порядок $1/D$. В случае малого волнового параметра ($D \ll 1$) область существенных значений переменной v простирается до больших v ($v \gg 1$). Задача сводится к оценке асимптотического значения интеграла I в предельном случае большого v . С этой целью проинтегрируем (18.25) по частям:

$$\begin{aligned} I &= (v \operatorname{si} v + \cos v) N(r') \Big|_0^\infty - \int_0^\infty (v \operatorname{si} v + \cos v) \frac{\partial N(r')}{\partial v} dv = \\ &= -N(\xi, 0, 0) - \int_0^\infty (v \operatorname{si} v + \cos v) \frac{\partial N(r')}{\partial v} dv. \end{aligned} \quad (20.1)$$

Чтобы произвести оценку асимптотического значения выражения $v \operatorname{si} v + \cos v$ и некоторых других, которые встретятся позже, необходимо знать асимптотическое выражение интегрального синуса. Оно может быть получено из асимптотического выражения интегральной показательной функции Ei [31]

$$Ei(-x) = e^{-x} \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k \frac{(k-1)!}{x^k} + R_n, \quad (20.2)$$

где

$$|R_n| < \frac{n!}{|x|^{n+1} \cos \varphi/2}, \quad x = |x| \cdot e^{i\varphi}, \quad \varphi^2 < \pi^2,$$

и формулы

$$Ei(-ix) = \operatorname{ci} x - i \operatorname{si} x.$$

Для оценки $x \operatorname{si} x + \cos x$ достаточно взять два члена ряда (20.2). Тогда получим

$$\operatorname{si} x \approx -\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}, \quad x \operatorname{si} x + \cos x \approx -\frac{\sin x}{x}.$$

Производная $\partial N(r')/\partial v$ имеет порядок $N(\xi, 0, 0)D$, а подынтегральное выражение в (20.1) — порядок $N(\xi, 0, 0)D^2$. Следовательно, интеграл в (20.1) имеет порядок $N(\xi, 0, 0)D$. Поэтому интегралом

в (20.1) можно пренебречь по сравнению с $N(\xi, 0, 0)$. Тогда для среднего квадрата флуктуаций фазы на основании (18.23) получим

$$\langle S^2 \rangle = 2 \langle \mu^2 \rangle L' \int_0^{\infty} N(\xi, 0, 0) d\xi, \quad (20.3)$$

или, переходя к размерным переменным L и ξ^* ,

$$\langle S^2 \rangle = 2 \langle \mu^2 \rangle k^2 L \int_0^{\infty} N(\xi^*, 0, 0) d\xi^*. \quad (20.4)$$

Формула (20.3) отличается от аналогичной формулы (19.1) в случае большого волнового параметра множителем 2. Средний квадрат флуктуации фазы растет пропорционально дистанции как в случае большого, так и в случае малого волнового параметра.

Переходя к рассмотрению флуктуации уровня, замечаем, что при подстановке (20.1) в (18.24) старшие члены $N(\xi, 0, 0)$ и $-N(\xi, 0, 0)$ взаимно уничтожаются. Это обязывает учитывать член более высокого порядка малости относительно параметра D . Тогда из (18.24) получаем

$$\langle B^2 \rangle = - \langle \mu^2 \rangle L' \int_0^{\infty} d\xi \int_0^{\infty} (v \sin v + \cos v) \frac{\partial N(r')}{\partial v} dv. \quad (20.4a)$$

Итак, в случае малого волнового параметра ($D \ll 1$) флуктуации уровня на порядок (относительно параметра D) меньше флуктуаций фазы.

Желая получить более удобное выражение для флуктуаций уровня, выполним в (20.4a) интегрирование по частям:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} (v \sin v + \cos v) \frac{\partial N(r')}{\partial v} dv &= \frac{1}{2} [v(v \sin v + \cos v) + \sin v] \frac{\partial N(r')}{\partial v} \Big|_0^{\infty} - \\ &- \int_0^{\infty} \frac{1}{2} [v(v \sin v + \cos v) + \sin v] \frac{\partial^2 N(r')}{\partial v^2} dv = \\ &= - \left\{ \frac{1}{6} v [v(v \sin v + \cos v) + \sin v] - \frac{1}{3} \cos v \right\} \frac{\partial^2 N}{\partial v^2} \Big|_0^{\infty} + \\ &+ \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{6} v [v(v \sin v + \cos v) + \sin v] - \frac{1}{3} \cos v \right\} \frac{\partial^2 N}{\partial v^2} dv = \\ &= - \frac{1}{3} \left[\frac{\partial^2 N(r')}{\partial v^2} \right]_{(\xi, 0, 0)} + \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{6} v [v(v \sin v + \cos v) + \sin v] - \right. \\ &\left. - \frac{1}{3} \cos v \right\} \frac{\partial^2 N}{\partial v^2} dv. \end{aligned} \quad (20.5)$$

Асимптотическое выражение фигурной скобки можно получить, если в разложении (20.2) учесть четыре члена. Тогда

$$\begin{aligned} \sin v &\approx -\left(\frac{1}{v} - \frac{2}{v^3}\right) \cos v - \left(\frac{1}{v^3} - \frac{6}{v^5}\right) \sin v, \\ \frac{1}{6} v [v \sin v + \cos v] + \sin v &- \frac{1}{3} \cos v \approx \frac{\sin v}{v}. \end{aligned}$$

Интеграл в (20.5) имеет порядок $N(\xi, 0, 0)D^3$, член $\frac{1}{3} [\partial^2 N / \partial v^2]_{\xi, 0, 0}$ — порядок $N(\xi, 0, 0)D^2$. Ограничиваясь старшим членом, получим

$$\int_0^{\infty} (v \sin v + \cos v) \frac{\partial N(r')}{\partial v} dv = -\frac{1}{3} \left[\frac{\partial^2 N(r')}{\partial v^2} \right]_{(\xi, 0, 0)}.$$

Учитывая, что $v = (\eta^2 + \zeta^2)/4L'$, можно выразить производную $[\partial^2 N(r') / \partial v^2]_{(\xi, 0, 0)}$ через производные по переменным η и ζ . Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 N}{\partial \eta^2} &= \frac{1}{2L'} \frac{\partial N}{\partial v} + \frac{\eta^2}{4L'^2} \frac{\partial^2 N}{\partial v^2}, \\ \frac{\partial^2 N}{\partial \zeta^2} &= \frac{1}{2L'} \frac{\partial N}{\partial v} + \frac{\zeta^2}{4L'^2} \frac{\partial^2 N}{\partial v^2}, \\ \nabla^2 N &= \frac{1}{L'} \frac{\partial N}{\partial v} + \frac{v}{L'} \frac{\partial^2 N}{\partial v^2}, \end{aligned}$$

где $\nabla^2 = \partial^2 / \partial \eta^2 + \partial^2 / \partial \zeta^2$ — поперечный оператор Лапласа. Далее,

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 N &= \left(\frac{1}{L'} \frac{\partial}{\partial v} + \frac{v}{L'} \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) \left(\frac{1}{L'} \frac{\partial N}{\partial v} + \frac{v}{L'} \frac{\partial^2 N}{\partial v^2} \right) = \frac{2}{L'^2} \frac{\partial^2 N}{\partial v^2} + \\ &+ \text{члены, содержащие множитель } v. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\frac{1}{3} \left[\frac{\partial^2 N(r')}{\partial v^2} \right]_{(\xi, 0, 0)} = \frac{1}{6} L'^2 [\nabla^2 \nabla^2 N]_{\eta=\zeta=0}.$$

Формула (20.4а) приобретает следующий окончательный вид:

$$\langle B^2 \rangle = \frac{1}{6} \langle \mu^2 \rangle L'^3 \int_0^{\infty} [\nabla^2 \nabla^2 N]_{\eta=\zeta=0} d\xi.$$

При переходе к размерным переменным она сохраняет эту же форму:

$$\langle B^2 \rangle = \frac{1}{6} \langle \mu^2 \rangle L^3 \int_0^{\infty} [\nabla^2 \nabla^2 N]_{\eta=\zeta=0} d\xi^*. \quad (20.6)$$

Формулы (20.4) и (20.6) совпадают с формулами (7.1) и (7.7) соответственно, полученными на основе лучевых представлений. Следовательно, случай малого волнового параметра соответствует геометрическому приближению. Эллисон [35] показал это, исследуя формулу для среднего квадрата флуктуации интенсивности.

В геометрическом приближении средний квадрат флуктуации уровня растет пропорционально кубу дистанции.

Различную зависимость среднего квадрата флуктуаций уровня от расстояния в области малых и больших значений волнового параметра качественно нетрудно уяснить. В первом случае размеры зоны Френеля малы по сравнению с масштабом неоднородностей. Отклонение показателя преломления μ от среднего значения в пределах зоны имеет один и тот же знак. Поэтому все волны, рассеянные различными элементами первой зоны, приходят в точку наблюдения в фазе. Флуктуации быстро растут с расстоянием (пропорционально L^3). Во втором случае размеры зоны Френеля велики по сравнению с масштабом неоднородностей. Отклонения показателя преломления μ от среднего значения в различных точках зоны имеют разные знаки. Поэтому не все элементарные волны приходят в точку наблюдения в одной фазе. Происходит их частичная компенсация, в результате чего флуктуации растут медленнее (пропорционально L).

§ 21. Область средних значений волнового параметра

В промежуточной области решения (18.23) и (18.24) можно исследовать, задавая вид коэффициента корреляции. Положим

$$N = \exp\left(-\frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{a'^2}\right).$$

Введем переменную ν согласно (18.22). Тогда получим:

$$N = \exp\left(-\frac{\xi^2}{a'^2} - \frac{4L'}{a'^2} \nu\right). \quad (21.1)$$

Подставляя (21.1) в (18.23) и (18.24), сведем задачу к вычислению табличных [34] интегралов

$$\int_0^\infty N(\xi, 0, 0) d\xi = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\xi^2}{a'^2}\right) d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2} a',$$

$$\int_0^\infty \text{si } \nu \exp\left(-\frac{4L'}{a'^2} \nu\right) d\nu = -\frac{1}{4L'/a'^2} \text{arctg } \frac{4L'}{a'^2} = -\frac{1}{D} \text{arctg } D,$$

где $D = 4L'/a'^2 = 4L/ka^2$ — волновой параметр.

Формулы (18.23) и (18.24) приобретают вид:

$$\langle S^2 \rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \langle \mu^2 \rangle k^2 a L \left(1 + \frac{1}{D} \text{arctg } D\right), \quad (21.2)$$

$$\langle B^2 \rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \langle \mu^2 \rangle k^2 a L \left(1 - \frac{1}{D} \text{arctg } D\right). \quad (21.3)$$

В таком виде эти формулы были получены А. М. Обуховой [30].

В предельных случаях большого и малого волновых параметров они переходят в соответствующие формулы § 19 и § 20.

Все сказанное о флуктуациях в полной мере относится к электромагнитным волнам. При рассеянии на крупномасштабных неоднородностях существенную роль играет область пространства, находящаяся в непосредственной близости от прямой, соединяющей передатчик с приемником. В этой области угол X между направлением электрического вектора и направлением рассеяния близок к прямому и множитель $\sin^2 X$ близок к единице, вследствие чего исчезает различие между поперечной и продольной волнами.

Вопрос о флуктуациях электромагнитного поля, обусловленных турбулентностью атмосферы, исследован в работах Райса [36], Мого [37], Вожа [38] и др. В обзоре [39] рассмотрены такие вопросы теории распространения электромагнитных волн в случайно-неоднородных средах, которые не сводятся к исследованию скалярного волнового уравнения.

Глава VI

КОРРЕЛЯЦИЯ ФЛУКТУАЦИЙ

Средние квадраты флуктуаций уровня и фазы не дают еще полной характеристики статистических свойств волнового поля. Более полно статистические свойства флуктуаций волнового поля можно охарактеризовать с помощью корреляционных функций. Здесь, естественно, возникают три вопроса.

1. Существует ли корреляция между флуктуациями уровня и фазы в точке приема?

2. Как зависит автокорреляция между флуктуациями уровня (или фазы) от расстояния между приемниками?

3. Какой вид имеет временная автокорреляционная функция для флуктуаций уровня (или фазы) в точке приема?

§ 22. Корреляция флуктуаций уровня и фазы в точке приема

Начнем с изучения взаимной корреляции флуктуаций уровня и фазы в точке приема. С этой целью определим вид корреляционной функции $\langle BS \rangle$, пользуясь формулами (18.1) и (18.2). Перемножив их и усреднив, получим

$$\langle BS \rangle = \langle \mu^2 \rangle \int_0^{L'} \int_0^{L'} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1(L' - \xi_1, \rho_1) \Phi_2(L' - \xi_2, \rho_2) N(r') \times \\ \times d\xi_1' d\xi_2' d\eta_1' d\eta_2' d\zeta_1' d\zeta_2'.$$

Ограничиваясь рассмотрением среды статистически изотропной, будем считать, что коэффициент корреляции N зависит от модуля r' . Переходя с помощью формул (18.4) и (18.5) к относительным координатам и координатам центра тяжести, получим

$$\langle BC \rangle = \langle \mu^2 \rangle \int_0^{L'} \int_0^{L'} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1 \left[L' - \xi'_1, \sqrt{\left(\frac{\eta}{2} + y\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{2} + z\right)^2} \right] \times \\ \times \Phi_2 \left[L' - \xi'_2, \sqrt{\left(\frac{\eta}{2} - y\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{2} - z\right)^2} \right] N(r') d\xi'_1 d\xi'_2 d\eta d\zeta dy dz.$$

В этой формуле можно выполнить интегрирование по переменным y и z (см. Приложение II):

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1 \left[L' - \xi'_1, \sqrt{\left(\frac{\eta}{2} + y\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{2} + z\right)^2} \right] \times \\ \times \Phi_2 \left[L' - \xi'_2, \sqrt{\left(\frac{\eta}{2} - y\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{2} - z\right)^2} \right] dy dz = \\ = \frac{1}{2} (\Phi_2 [2L' - (\xi'_1 + \xi'_2), \rho] - \Phi_2 (\xi'_1 - \xi'_2, \rho)),$$

где $\rho = \sqrt{\eta^2 + \zeta^2}$. Тогда

$$\langle BS \rangle = \frac{1}{2} \langle \mu^2 \rangle \int_0^{L'} \int_0^{L'} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \Phi_2 [2L' - (\xi'_1 + \xi'_2), \rho] N(r') d\xi'_1 d\xi'_2 d\eta d\zeta - \\ - \frac{1}{2} \langle \mu^2 \rangle \int_0^{L'} \int_0^{L'} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \Phi_2 (\xi'_1 - \xi'_2, \rho) N(r') d\xi'_1 d\xi'_2 d\eta d\zeta. \quad (22.1)$$

Дальнейшее упрощение формулы (22.1) возможно при $L \gg a$. Введя координаты $2x = \xi'_1 + \xi'_2$ и $\xi = \xi'_1 - \xi'_2$, в указанном случае можно интегрировать по ξ в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. Формула (22.1) переписется в виде

$$\langle BS \rangle = \frac{1}{2} \langle \mu^2 \rangle \int_0^{L'} dx \iiint_{-\infty}^{+\infty} \Phi_2 [2L' - 2x, \rho] N(r') d\xi d\eta d\zeta - \\ - \frac{1}{2} \langle \mu^2 \rangle \int_0^{L'} dx \iiint_{-\infty}^{+\infty} \Phi_2 (\xi, \rho) N(r') d\xi d\eta d\zeta. \quad (22.2)$$

Так как $N(r')$ — четная, а $\Phi_2(\xi, \rho)$ — нечетная функции ξ , то второй интеграл обращается в нуль. В первом интеграле можно проинтегрировать по x . Задача сводится к вычислению интеграла

$$\int_0^{L'} \Phi_2 [2L' - 2x, \rho] dx = \int_0^{L'} \frac{1}{2\pi (2L' - 2x)} \cos \frac{\rho^2}{2(2L' - 2x)} dx.$$

Подстановкой

$$z = \frac{\rho^2}{2(2L' - 2x)}$$

он приводится к виду

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\rho/4L'}^{\infty} \frac{\cos z}{z} dz = -\frac{1}{4\pi} \text{ci} \left(\frac{\rho^2}{4L'} \right)$$

(см. определение интегрального косинуса [31]). Формула (22.2) приобретает вид

$$\langle BS \rangle = -\frac{1}{8\pi} \langle \mu^2 \rangle \iiint_{-\infty}^{+\infty} \text{ci} \left(\frac{\rho^2}{4L'} \right) N(r') d\xi d\eta d\zeta.$$

Переходя к полярным координатам (ρ, φ) на плоскости (η, ζ) , получим

$$\langle BS \rangle = -\frac{1}{2} \langle \mu^2 \rangle \int_0^{\infty} d\xi \int_0^{\infty} \text{ci} \left(\frac{\rho^2}{4L'} \right) N(r') \rho d\rho.$$

Наконец, введем, как и прежде, переменную $v = \rho^2/4L'$. Тогда

$$\langle BS \rangle = -\langle \mu^2 \rangle L' \int_0^{\infty} d\xi \int_0^{\infty} \text{ci} v N(r') dv. \quad (22.3)$$

Формула (22.3) дает общее решение задачи о корреляции флуктуаций уровня и фазы в точке приема.

Предположим, что коэффициент корреляции имеет вид

$$N(r') = \exp \left(-\frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{a'^2} \right). \quad (22.4)$$

На основании (21.4) задача сводится к вычислению интеграла

$$\int_0^{\infty} \text{ci} v \exp \left(-\frac{4L'}{a'^2} v \right) dv.$$

Из таблиц [31] находим

$$\int_0^{\infty} \text{ci} v \exp \left(-\frac{4L'}{a'^2} v \right) dv = -\frac{a'^2}{4L'} \ln \sqrt{1 + \left(\frac{4L'}{a'^2} \right)^2}.$$

Окончательно получаем

$$\langle BS \rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{16} \langle \mu^2 \rangle k^3 a^3 \ln(1 + D^2). \quad (22.5)$$

В теории вероятностей [40] коэффициент корреляции определяется как отношение корреляционной функции флуктуаций к их средним квадратичным значениям. Применительно к нашему слу-

чаю это означает, что коэффициент корреляции R_{BS} для флуктуаций уровня и фазы имеет вид

$$R_{BS} = \frac{\langle BS \rangle}{\sqrt{\langle B^2 \rangle} \sqrt{\langle S^2 \rangle}}.$$

Используя формулы (22.5) для корреляционной функции и формулы (21.2) и (21.3) для средних квадратов флуктуаций уровня и фазы, получим для коэффициента корреляции R_{BS} следующее окончательное выражение:

$$R_{BS} = \frac{1}{2} \frac{\ln(1 + D^2)}{\sqrt{D^2 - (\arctg D)^2}}. \quad (22.6)$$

На малых дистанциях ($D \ll 1$), когда применимо лучевое рассмотрение, формула (22.6) дает

$$R_{BS} \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} \approx 0,6.$$

На больших дистанциях ($D \gg 1$)

$$R_{BS} = \frac{\ln D}{D},$$

т. е. коэффициент корреляции убывает с расстоянием, стремясь к нулю.

Таким образом, корреляция между флуктуациями амплитуды и фазы, существующая на малых дистанциях, исчезает на больших.

• § 23. Продольная автокорреляция флуктуаций уровня (или фазы)

Переходим к рассмотрению вопроса об автокорреляции флуктуаций уровня (или фазы) в различных точках приема. Допустим, что приемники располагаются вдоль прямой распространения. Координаты приемников ($L'_1, 0, 0$) и ($L'_2, 0, 0$).

Флуктуации уровня и фазы определяются формулами (18.1) и (18.2). Для первого приемника в этих формулах необходимо положить $L' = L'_1$, для второго $L' = L'_2$. Автокорреляционные функции для флуктуаций уровней и фаз определяются поэтому следующими формулами:

$$\begin{aligned} \langle S_1 S_2 \rangle &= \langle \mu^2 \rangle \int_0^{L'_1} \int_0^{L'_2} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1(L'_1 - \xi'_1, \rho'_1) \Phi_1(L'_2 - \xi'_2, \rho'_2) \times \\ &\quad \times N(r') d\xi'_1 d\xi'_2 d\eta'_1 d\eta'_2 d\xi'_1 d\xi'_2, \\ \langle B_1 B_2 \rangle &= \langle \mu^2 \rangle \int_0^{L'_1} \int_0^{L'_2} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \Phi_2(L'_1 - \xi'_1, \rho'_1) \Phi_2(L'_2 - \xi'_2, \rho'_2) \times \\ &\quad \times N(r') d\xi'_1 d\xi'_2 d\eta'_1 d\eta'_2 d\xi'_1 d\xi'_2. \end{aligned}$$

В этих формулах верхний предел интегрирования по ξ'_2 также можно положить равным L'_1 . Действительно, в силу направленного характера рассеяния волны, рассеянные слоем, ограниченном плоскостями $x = L_1$ и $x = L_2$, попадают во второй приемник и не попадают в первый. Поэтому этими волнами можно пренебречь при вычислении автокорреляционных функций.

Полагая верхний предел интегрирования по ξ'_2 равным L'_1 , получим

$$\begin{aligned} \langle S_1 S_2 \rangle &= \langle \mu^2 \rangle \int_0^{L'_1} \int_0^{L'_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1(L_1 - \xi'_1, \rho'_1) \Phi_1(L_2 - \xi'_2, \rho'_2) \times \\ &\quad \times N(r') d\xi'_1 d\xi'_2 d\eta'_1 d\eta'_2 d\xi'_1 d\xi'_2, \\ \langle B_1 B_2 \rangle &= \langle \mu^2 \rangle \int_0^{L'_1} \int_0^{L'_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_2(L_1 - \xi'_1, \rho'_1) \Phi_2(L_2 - \xi'_2, \rho'_2) \times \\ &\quad \times N(r') d\xi'_1 d\xi'_2 d\eta'_1 d\eta'_2 d\xi'_1 d\xi'_2. \end{aligned}$$

Преобразуя координаты по формулам (18.4) и (18.5) и выполняя интегрирование по формулам (18.8) и (18.9), найдем

$$\langle S_1 S_2 \rangle = \frac{1}{2} \langle \mu^2 \rangle (I_1 + I_2), \quad \langle B_1 B_2 \rangle = \frac{1}{2} \langle \mu^2 \rangle (I_1 - I_2),$$

где

$$I_1 = \int_0^{L'_1} \int_0^{L'_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1[L_2 - L_1 - (\xi'_2 - \xi'_1), \rho] N(r') d\xi'_2 d\xi'_1 d\eta d\xi, \quad (23.1)$$

$$I_2 = \int_0^{L'_1} \int_0^{L'_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1[L_2 + L_1 - (\xi'_1 + \xi'_2), \rho] N(r') d\xi'_2 d\xi'_1 d\eta d\xi.$$

Последние равенства представляют собой обобщение формул (18.2) и (18.3) на тот случай, когда $L'_2 \neq L'_1$. Дальнейшие преобразования их аналогичны преобразованиям формул (18.12) и (18.13).

Вводя координаты $\xi = \xi'_2 - \xi'_1$ и $x = \frac{1}{2}(\xi'_2 + \xi'_1)$, в предположении $L \gg a$ получим

$$I_1 = L'_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_0^{\infty} \frac{1}{\Delta L' - \xi} \sin \frac{\rho^2}{2(\Delta L' - \xi)} N(r') \rho d\rho. \quad (23.2)$$

Формула (23.2) аналогична (18.18). Вводим новую переменную

$$z = \frac{\rho^2}{2(L'_2 + L'_1 - 2x)}$$

и интегрируем по x в (23.1) следующим образом:

$$\int_0^{L_1'} \frac{1}{2\pi(L_2' + L_1' - 2x)} \operatorname{si} \frac{\rho^2}{2(L_2' + L_1' - 2x)} dx =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{\frac{\rho^2}{2(L_2' + L_1')}}^{\frac{\rho^2}{2\Delta L'}} \frac{\sin z}{z} dz = -\frac{1}{4\pi} \left\{ \operatorname{si} \frac{\rho^2}{2(L_2' + L_1')} - \operatorname{si} \frac{\rho^2}{2\Delta L'} \right\}.$$

Следовательно,

$$I_2 = - \int_0^\infty d\xi \int_0^\infty \left\{ \operatorname{si} \frac{\rho^2}{2(L_2' + L_1')} - \operatorname{si} \frac{\rho^2}{2\Delta L'} \right\} N(r') \rho d\rho.$$

Эта формула аналогична (18.19).

Предположим, что коэффициент корреляции $N(r')$ имеет вид (22.4). Вводя переменную $q = \rho^2/2(\Delta L' - \xi)$, получим при $\Delta L' > \xi$

$$\int_0^\infty \frac{1}{\Delta L' - \xi} \sin \frac{\rho^2}{2(\Delta L' - \xi)} \exp\left(-\frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{a'^2}\right) \rho d\rho =$$

$$= \exp\left(-\frac{\xi^2}{a'^2}\right) \int_0^\infty \sin q \exp\left[-\frac{2(\Delta L' - \xi)q}{a'^2}\right] dq =$$

$$= \frac{\exp(-\xi^2/a'^2)}{1 + 4(\Delta L' - \xi)^2/a'^4}. \quad (23.3)$$

При $\Delta L' < \xi$ подстановкой $q = -\rho^2/2(\Delta L' - \xi)$ получим тот же результат. На основании (23.2)

$$I_1 = L_1' \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-\xi^2/a'^2) d\xi}{1 + 4(\Delta L'^2 - 2\Delta L'\xi + \xi^2)/a'^4}. \quad (23.4)$$

Вычисление интеграла, подобного I_2 , встречалось в конце предыдущей главы. Повторяя аналогичные вычисления, получим

$$I_2 = \sqrt{\pi} a' \frac{L_1' + L_2'}{2} \left\{ \left[\frac{2(L_1' + L_2')}{a'^2} \right]^{-1} \operatorname{arctg} \frac{2(L_1' + L_2')}{a'^2} - \right.$$

$$\left. - \left[\frac{2(L_1' + L_2')}{a'^2} \right]^{-1} \operatorname{arctg} \frac{2\Delta L'}{a'^2} \right\}. \quad (23.5)$$

Допустим, что среднее расстояние $\frac{1}{2}(L_1' + L_2')$ велико по сравнению с расстоянием между приемниками $\Delta L'$. Тогда $\frac{1}{2}(L_1' + L_2') \approx L_1'$, и формула (23.5) приобретает вид

$$I_2 = \sqrt{\pi} a' L_1' \left\{ \frac{1}{D} \operatorname{arctg} D - \frac{1}{D} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{2} \frac{\Delta L'}{L_1'} D \right) \right\},$$

где

$$D = \frac{4L_1'}{a'^2} = \frac{4L_1}{ka^2}.$$

В области больших значений волнового параметра D интегралом I_2 можно пренебречь по сравнению с интегралом I_1 . Тогда получим

$$\langle B_1 B_2 \rangle = \langle S_1 S_2 \rangle = \frac{1}{2} \langle \mu^2 \rangle L_1' \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-\xi^2/a'^2) d\xi}{1 \mp 4(\Delta L'^2 - 2\Delta L'\xi + \xi^2)/a'^4}. \quad (23.6)$$

Если расстояние между приемниками $\Delta L'$ порядка радиуса корреляции a' , то вторым членом в знаменателе можно пренебречь по сравнению с единицей. Действительно, подынтегральное выражение отлично от нуля в области значений ξ порядка a' . В этой области второй член в знаменателе будет иметь порядок

$$\frac{a'^2}{a'^4} = \frac{1}{a'^2} = \frac{1}{(ka)^2}$$

при $ka \gg 1$. В этом случае ($\Delta L \sim a$) получаем

$$\langle B_1 B_2 \rangle = \langle S_1 S_2 \rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \langle \mu^2 \rangle k^2 a L,$$

что совпадает с формулой (19.3) для среднего квадрата флуктуаций уровня и фазы. Таким образом, на расстоянии ΔL порядка радиуса корреляции показателя преломления a как флуктуации уровня, так и флуктуации фазы практически полностью коррелированы.

Рассмотрим расстояния ΔL , большие по сравнению с радиусом корреляции a : $\Delta L' \gg a'$. В области существенных значений ξ члены $\Delta L'\xi$ и ξ^2 имеют соответственно порядок $\Delta L'a'$ и a'^2 . Поэтому этими членами можно пренебречь по сравнению с членом $(\Delta L')^2$. Тогда формула (23.6) приобретает вид

$$\langle B_1 B_2 \rangle = \langle S_1 S_2 \rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \langle \mu^2 \rangle k^2 a L \frac{1}{1 + (2\Delta L/ka^2)^2}. \quad (23.7)$$

Для коэффициентов корреляции

$$R_B = \frac{\langle B_1 B_2 \rangle}{\langle B^2 \rangle}, \quad R_S = \frac{\langle S_1 S_2 \rangle}{\langle S^2 \rangle}$$

на основании (23.7) и (19.3) получаем

$$R_B = R_S = \frac{1}{1 + (2\Delta L/ka^2)^2}.$$

С ростом ΔL коэффициенты корреляции убывают. Принимая за радиус корреляции расстояние ΔL_k , на котором коэффициент кор-

реляции уменьшается вдвое, получим

$$\frac{2\Delta L_k}{ka^2} = 1. \quad (23.8)$$

Сопоставляя левую часть (23.8) с выражением волнового параметра $D = 4L/ka^2$, приходим к следующему выводу. Продольная автокорреляция уровней (или фаз) простирается на расстояние, в пределах которого пригодно лучевое рассмотрение. Это расстояние во много раз превышает радиус корреляции в среде.

В связи с изложенным отпадает необходимость в рассмотрении другого предельного случая, соответствующего малым значениям волнового параметра: в этой области имеет место полная продольная автокорреляция флуктуаций уровней и фаз и согласно предшествующему параграфу коррелированы между собой флуктуации уровня и фазы.

§ 24. Поперечная автокорреляция флуктуаций уровня (или фазы)

Предположим, что оба приемника лежат в плоскости $x = L$ на расстоянии l друг от друга. Координаты приемников $(L, 0, 0)$ и $(L, 0, l)$. Флуктуации уровня и фазы определяются формулами (18.1) и (18.2) как для первого, так и для второго приемников. Разница только в том, что для первого приемника вместо ρ' надо брать $\rho'_1 = \sqrt{\eta_1^2 + \zeta_1^2}$, а для второго $\rho'_2 = \sqrt{\eta_2^2 + (l - \zeta_2)^2}$. Автокорреляционные функции для флуктуаций уровней и фаз определяются поэтому следующими выражениями:

$$\langle S_1 S_2 \rangle = \langle \mu^2 \rangle \int_0^{L'} \int_0^{L'} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1(L' - \xi'_1, \rho'_1) \Phi_1(L' - \xi'_2, \rho'_2) \times \\ \times N(r') d\xi'_1 d\xi'_2 d\eta'_1 d\eta'_2 d\zeta'_1 d\zeta'_2,$$

$$\langle B_1 B_2 \rangle = \langle \mu^2 \rangle \int_0^{L'} \int_0^{L'} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \Phi_2(L' - \xi'_1, \rho'_1) \Phi_2(L' - \xi'_2, \rho'_2) \times \\ \times N(r') d\xi'_1 d\xi'_2 d\eta'_1 d\eta'_2 d\zeta'_1 d\zeta'_2.$$

Переходя с помощью формул (18.4) и (18.5) к относительным координатам и координатам центра тяжести, получим

$$\langle S_1 S_2 \rangle = \langle \mu^2 \rangle \int_0^{L'} \int_0^{L'} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1 \left[L' - \xi'_1, \sqrt{\left(\frac{\eta}{2} + y\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{2} + z\right)^2} \right] \times \\ \times \Phi_1 \left[L' - \xi'_2, \sqrt{\left(\frac{\eta}{2} - y\right)^2 + \left(l + \frac{\zeta}{2} - z\right)^2} \right] \times \\ \times N(r') d\xi'_1 d\xi'_2 d\eta d\zeta dy dz,$$

$$\begin{aligned} \langle B_1 B_2 \rangle &= \langle \mu^2 \rangle \int_0^{L'} \int_0^{L'} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \Phi_2 \left[L' - \xi_1, \sqrt{\left(\frac{\eta}{2} + y\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{2} + z\right)^2} \right] \times \\ &\quad \times \Phi_2 \left[L' - \xi_2, \sqrt{\left(\frac{\eta}{2} - y\right)^2 + \left(l' + \frac{\zeta}{2} - z\right)^2} \right] \times \\ &\quad \times N(r') d\xi_1' d\xi_2' d\eta d\zeta dy dz. \end{aligned}$$

В этих формулах можно выполнить интегрирование по переменным y и z (см. Приложение II):

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1 \left[L' - \xi_1, \sqrt{\left(\frac{\eta}{2} + y\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{2} + z\right)^2} \right] \times \\ &\quad \times \Phi_1 \left[L' - \xi_2, \sqrt{\left(\frac{\eta}{2} - y\right)^2 + \left(l' + \frac{\zeta}{2} - z\right)^2} \right] dy dz = \\ &\quad = \frac{1}{2} \{ \Phi_1(\xi_1' - \xi_2', \rho) + \Phi_1[2L' - (\xi_1' + \xi_2'), \rho] \}, \\ &\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_2 \left[L' - \xi_1, \sqrt{\left(\frac{\eta}{2} + y\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{2} + z\right)^2} \right] \times \\ &\quad \times \Phi_2 \left[L' - \xi_2, \sqrt{\left(\frac{\eta}{2} - y\right)^2 + \left(l' + \frac{\zeta}{2} - z\right)^2} \right] dy dz = \\ &\quad = \frac{1}{2} \{ \Phi_1(\xi_1' - \xi_2', \rho) - \Phi_1[2L' - (\xi_1' + \xi_2'), \rho] \}, \end{aligned}$$

где $\rho^2 = \eta^2 + (\zeta + l')^2$. Тогда получим

$$\langle S_1 S_2 \rangle = \frac{1}{2} \langle \mu^2 \rangle (I_1 + I_2), \quad (24.1)$$

$$\langle B_1 B_2 \rangle = \frac{1}{2} \langle \mu^2 \rangle (I_1 - I_2), \quad (24.2)$$

где

$$I_1 = \int_0^{L'} \int_0^{L'} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1(\xi_1' - \xi_2', \rho) N(r') d\eta d\zeta d\xi_1' d\xi_2', \quad (24.3)$$

$$I_2 = \int_0^{L'} \int_0^{L'} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1[2L' - (\xi_1' + \xi_2'), \rho] N(r') d\eta d\zeta d\xi_1' d\xi_2'. \quad (24.4)$$

Формулы (24.1)–(24.4) дают решение задачи об автокорреляции уровней (и фаз) в различных точках плоскости $x = L$ в общей форме. По своей структуре они тождественны формулам (18.10)–(18.13) предыдущей главы, определяющим средние квадраты флуктуаций уровня и фазы в точке приема. Разница лишь в определении ρ . Ранее ρ определялось формулой $\rho^2 = \eta^2 + \zeta^2$, теперь — формулой $\rho^2 = \eta^2 + (\zeta + l')^2$. Эта, казалось бы, небольшая разница связана с нарушением аксиальной симметрии, что делает не-

целесообразным введение полярных координат на плоскости (η, ζ) и невозможным исследование интегралов (24.3) и (24.4), аналогичное исследованию интегралов (18.12) и (18.13) в предельных случаях большого и малого значения волнового параметра. Приходится исходить из конкретного вида коэффициента корреляции $N(r')$ и все вычисления проделывать в несколько ином порядке, чем раньше. Можно предполагать, что качественные выводы, полученные для коэффициента корреляции специального вида, сохраняют силу при ином выборе коэффициента корреляции.

Если дистанция велика по сравнению с радиусом корреляции ($L \gg a$), то, введя относительную координату $\xi = \xi'_1 - \xi'_2$ и координату центра тяжести $x = 1/2 (\xi'_1 + \xi'_2)$, можно интегрировать по ξ в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. Тогда получим

$$I_1 = \int_0^{L'} dx \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \iint_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1(\xi, \rho) N(r') d\eta d\zeta,$$

$$I_2 = \int_0^{L'} dx \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \iint_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1(2L' - 2x, \rho) N(r') d\eta d\zeta.$$

Пусть коэффициент корреляции имеет вид

$$N(r') = \exp\left(-\frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{a'^2}\right).$$

На основании (17.4) интегралы I_1 и I_2 запишутся следующим образом:

$$I_1 = \int_0^{L'} dx \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\xi} \sin \frac{\eta^2 + (\zeta + l)^2}{2\xi} \exp\left(-\frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{a'^2}\right) d\eta d\zeta, \quad (24.4)$$

$$I_2 = \int_0^{L'} dx \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4\pi(L' - x)} \sin \frac{\eta^2 + (\zeta + l)^2}{4(L' - x)} \exp\left(-\frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{a'^2}\right) d\eta d\zeta.$$

(24.5)

Остановимся на вычислении интеграла I_1 . Прежде всего выполним интегрирование по переменным η и ζ :

$$\begin{aligned} & \iint_{-\infty}^{+\infty} \sin \frac{\eta^2 + (\zeta + l)^2}{2\xi} \exp\left(-\frac{\eta^2 + \zeta^2}{a'^2}\right) d\eta d\zeta = \\ & = \frac{1}{2i} \iint_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{\eta^2 + \zeta^2}{a'^2} + i \frac{\eta^2 + (\zeta + l)^2}{2\xi}\right] d\eta d\zeta - \\ & - \frac{1}{2i} \iint_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{\eta^2 + \zeta^2}{a'^2} - i \frac{\eta^2 + (\zeta + l)^2}{2\xi}\right] d\eta d\zeta = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[- \left(\frac{1}{a'^2} - \frac{i}{2\xi} \right) \eta^2 \right] d\eta \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ - \left[\frac{\xi^2}{a'^2} - i \frac{(\xi + l')^2}{2\xi} \right] \right\} d\xi +$$

+ комплексно-сопряженный интеграл.

Далее,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[- \left(\frac{1}{a'^2} - \frac{i}{2\xi} \right) \eta^2 \right] d\eta = \sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{a'^2} - \frac{i}{2\xi}}}.$$

Чтобы выполнить интегрирование по ξ , воспользуемся табличным интегралом

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-p\xi^2 + q\xi) d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{p}} \exp\left(\frac{q^2}{4p}\right).$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ - \left[\frac{\xi^2}{a'^2} - i \frac{(\xi + l')^2}{2\xi} \right] \right\} d\xi = \exp\left(\frac{il'^2/a'^2}{2\xi/a'^2 - i}\right) \sqrt{\frac{\pi}{1/a'^2 - i/2\xi}}.$$

Интеграл I_1 на основании (24.4) запишется следующим образом:

$$I_1 = \frac{1}{2i} \int_0^{L'} dx \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \exp\left(-\frac{\xi^2}{a'^2}\right) \left[\frac{\exp \gamma_1}{2\xi/a'^2 - i} - \frac{\exp \gamma_1^*}{2\xi/a'^2 + i} \right], \quad (24.6)$$

где

$$\gamma_1 = \frac{il'^2/a'^2}{2\xi/a'^2 - i}$$

(γ_1^* — комплексно-сопряженная γ_1).

Совершенно так же выполняется интегрирование по η и ξ в (24.5). Тогда получаем

$$I_2 = \frac{1}{2i} \int_0^{L'} dx \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \exp\left(-\frac{\xi^2}{a'^2}\right) \left[\frac{\exp \gamma_2}{4(L' - x)/a'^2 - i} - \frac{\exp \gamma_2^*}{4(L' - x)/a'^2 + i} \right],$$

где

$$\gamma_2 = \frac{il'^2/a'^2}{4(L' - x)/a'^2 - i}$$

(γ_2^* — комплексно-сопряженная γ_2).

Продолжим вычисление интеграла I_1 . Полагая $\gamma_1 = \gamma_1' + i\gamma_1''$, найдем

$$\gamma_1' = -\frac{l'^2}{1 + 4\xi^2/a'^4}, \quad \gamma_1'' = \frac{l'^2}{1 + 4\xi^2/a'^4} \frac{2\xi}{a'^2}.$$

Формула (24.6) преобразуется к виду

$$I_1 = L' \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\xi^2}{a'^2}\right) \exp \gamma_1' \frac{\cos \gamma_1' + \frac{2\xi}{a'^2} \sin \gamma_1'}{1 + 4\xi^2/a'^4} d\xi. \quad (24.7)$$

Первый множитель под интегралом существен лишь для значений ξ , по порядку величины не превышающих a' . В этой области членом $2\xi/a'^2$ можно пренебречь по сравнению с единицей, так как $a' \gg 1$. Таким образом, в предположении $a' \gg 1$ интеграл (24.7) приобретает вид

$$I_1 = L' \exp\left(-\frac{l^2}{a'^2}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\left(\frac{l^2}{a'^2} \frac{2\xi}{a'^2}\right) \exp\left(-\frac{\xi^2}{a'^2}\right) d\xi.$$

Окончательно

$$I_1 = \sqrt{\pi} L a k^2 \exp\left(-\frac{l^2}{a^2}\right) \exp\left(-\frac{l^2}{a^2} \frac{1}{ka}\right). \quad (24.8)$$

Интеграл I_2 в результате замены переменной $y = 4(L' - x)/a'^2$ приобретает вид

$$I_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{8i} a'^3 \int_0^D \left[\frac{\exp\left(\frac{il^2/a^2}{y-i}\right)}{y-i} - \frac{\exp\left(\frac{-il^2/a^2}{y+i}\right)}{y+i} \right] dy. \quad (24.9)$$

Если ввести новую переменную

$$z = \frac{il^2/a^2}{y-i},$$

то первый интеграл в (24.9) преобразуется к виду

$$\int_0^D \frac{\exp \frac{il^2/a^2}{y-i}}{y-i} dy = \int_{\frac{il^2/a^2}{D-i}}^{-l^2/a^2} \frac{\exp z}{z} dz.$$

Второй интеграл в (24.9) после замены переменной

$$z = \frac{-il^2/a^2}{y+i}$$

приобретает вид

$$\int_0^D \frac{\exp\left(\frac{-il^2/a^2}{y+i}\right)}{y+i} dy = - \int_{-l^2/a^2}^{-\frac{il^2/a^2}{D+i}} \frac{\exp z}{z} dz.$$

Поэтому интеграл I_2 может быть представлен в следующей форме:

$$I_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{8i} a'^3 [\text{Ei}(e_2) - \text{Ei}(e_1)], \quad (24.10)$$

где

$$\varepsilon_1 = \frac{i l^2 / a^2}{D - i}, \quad \varepsilon_2 = -\frac{i l^2 / a^2}{D + i}, \quad (24.11)$$

Ei — символ интегральной показательной функции.

Покажем прежде всего, что наши формулы дают известные выражения для квадрата флуктуации уровня и фазы при $l = 0$. В этом случае для интеграла I_1 из (24.8) получаем

$$I_1 = \sqrt{\pi} k^3 a L. \quad (24.12)$$

Переходя к интегралу I_2 , воспользуемся следующим представлением интегральной показательной функции Ei в виде ряда [31]:

$$Ei(x) = C + \ln x + \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{x^k}{k \cdot k!}.$$

Тогда получим

$$Ei(\varepsilon_2) - Ei(\varepsilon_1) = \ln \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_2^k}{k \cdot k!} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_1^k}{k \cdot k!}.$$

При $l = 0$ все члены ряда обращаются в нуль, и мы получаем

$$\lim_{l \rightarrow 0} [Ei(\varepsilon_2) - Ei(\varepsilon_1)] = \ln \left[-\frac{D - i}{D + i} \right] = 2i \operatorname{arctg} D, \quad (24.13)$$

$$I_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \langle \mu^2 \rangle k^3 a^3 \operatorname{arctg} D.$$

На основании (24.12) и (24.13) окончательно получим знакомые формулы:

$$\langle S^2 \rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \langle \mu^2 \rangle k^2 a L \left(1 + \frac{1}{D} \operatorname{arctg} D \right),$$

$$\langle B^2 \rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \langle \mu^2 \rangle k^2 a L \left(1 - \frac{1}{D} \operatorname{arctg} D \right).$$

Возвращаясь к вопросу о поперечной автокорреляции флуктуаций уровней (и фаз), исследуем соответствующие коэффициенты автокорреляции R_B для уровней и R_S для фаз, исходя из их определения:

$$R_B = \frac{\langle B_1 B_2 \rangle}{\langle B^2 \rangle}, \quad R_S = \frac{\langle S_1 S_2 \rangle}{\langle S^2 \rangle}.$$

На основании формул (24.1), (24.2), (24.8), (24.10) получаем

$$R_B = \frac{\exp\left(-\frac{l^2}{a^2}\right) \exp\left(-\frac{l^2}{a^2} \frac{1}{ka}\right)^2 - \frac{1}{2iD} [Ei(\varepsilon_2) - Ei(\varepsilon_1)]}{1 - \frac{1}{D} \operatorname{arctg} D}, \quad (24.14)$$

$$R_S = \frac{\exp\left(-\frac{l^2}{a^2}\right) \exp\left(-\frac{l^2}{a^2} \frac{1}{ka}\right)^2 + \frac{1}{2iD} [Ei(\varepsilon_2) - Ei(\varepsilon_1)]}{1 + \frac{1}{D} \operatorname{arctg} D}. \quad (24.15)$$

Как видно из последних формул, коэффициенты автокорреляции зависят лишь от трех безразмерных параметров l/a , D , ka , причем зависимостью от ka можно пренебречь (в рассматриваемом случае $ka \gg 1$), полагая

$$\exp\left(-\frac{l^2}{a^2} \frac{1}{ka}\right)^2 \approx 1.$$

Формулы (24.14) и (24.15) примут вид:

$$R_B = \frac{\exp\left(-\frac{l^2}{a^2}\right) - \frac{1}{2iD} [\text{Ei}(\varepsilon_2) - \text{Ei}(\varepsilon_1)]}{1 - \frac{1}{D} \text{arctg} D}, \quad (24.16)$$

$$R_S = \frac{\exp\left(-\frac{l^2}{a^2}\right) + \frac{1}{2iD} [\text{Ei}(\varepsilon_2) - \text{Ei}(\varepsilon_1)]}{1 + \frac{1}{D} \text{arctg} D}. \quad (24.17)$$

В области малых значений волнового параметра ($D \ll 1$) последние формулы могут быть упрощены. Действительно, из (24.11) следует равенство

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = \frac{-2iDl^2/a^2}{1 + D^2}.$$

Из него видно, что разность $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$ мала, если только $Dl^2/a^2 \ll 1$. Последнее неравенство будет выполняться, например, при условии, что $D \ll 1$ и $l \sim a$. Если оно выполнено, то в разложении $\text{Ei}(\varepsilon_2) - \text{Ei}(\varepsilon_1)$ по степеням малых приращений аргумента $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$ можно ограничиться старшими членами. Процедура разложения упрощается, если ввести в рассмотрение третью точку $\varepsilon_0 = -l^2/a^2$, лежащую посередине между точками ε_1 и ε_2 , и представить разность интегральных показательных функций в виде

$$[\text{Ei}(\varepsilon_2) - \text{Ei}(\varepsilon_0)] - [\text{Ei}(\varepsilon_1) - \text{Ei}(\varepsilon_0)].$$

Величина во второй квадратной скобке — комплексно-сопряженная по отношению к величине в первой. Поэтому достаточно разложить в ряд одну из скобок, чтобы сейчас же указать разложение другой.

Разложим в ряд выражение в первой скобке около точки ε_0 :

$$\text{Ei}(\varepsilon_2) - \text{Ei}(\varepsilon_0) = \text{Ei}'(\varepsilon_0) \Delta\varepsilon + \frac{1}{2} \text{Ei}''(\varepsilon_0) \Delta\varepsilon^2 + \frac{1}{6} \text{Ei}'''(\varepsilon_0) \Delta\varepsilon^3 + \dots$$

Здесь

$$\text{Ei}'(\varepsilon_0) = \frac{\exp \varepsilon_0}{\varepsilon_0}, \quad \text{Ei}''(\varepsilon_0) = \left(\frac{1}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon_0^2}\right) \exp \varepsilon_0,$$

$$\text{Ei}'''(\varepsilon_0) = \left(\frac{1}{\varepsilon_0} - \frac{2}{\varepsilon_0^2} + \frac{2}{\varepsilon_0^3}\right) \exp \varepsilon_0,$$

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon_2 - \varepsilon_0 = \frac{-\frac{l^2}{a^2} - i\frac{l^2}{a^2}D}{1 + D^2} + \frac{l^2}{a^2} \approx \varepsilon_0 (iD - D^2 - iD^3).$$

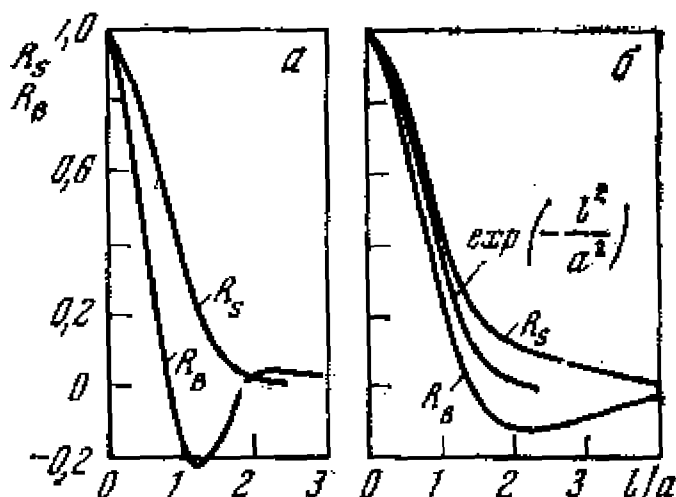
Последнее выражение для $\Delta \varepsilon$ дано с точностью до D^3 . С той же степенью точности получим

$$\begin{aligned} \text{Ei}(\varepsilon_2) - \text{Ei}(\varepsilon_0) = \exp \varepsilon_0 \left[iD - \frac{1}{2}(1 + \varepsilon_0) D^2 - \right. \\ \left. - \frac{1}{3} \left(1 + 2\varepsilon_0 + \frac{1}{2} \varepsilon_0^2 \right) iD^3 \right], \end{aligned}$$

откуда

$$\text{Ei}(\varepsilon_2) - \text{Ei}(\varepsilon_1) = 2iD \exp \varepsilon_0 \left[1 - \frac{D^2}{3} \left(1 + 2\varepsilon_0 + \frac{1}{2} \varepsilon_0^2 \right) \right].$$

Квадратичный относительно D член необходимо учесть при вычислении коэффициента корреляции R_B для уровней по формуле (24.16), поскольку старшие члены взаимно уничтожаются. При



Фиг. 5. Поперечная автокорреляция в случае малых D ($D \leq 1$) (а) и в случае больших D ($D = 10$) (б)

вычислении коэффициента корреляции R_S для фаз по формуле (24.17) квадратичным относительно D членом можно пренебречь. Полагая

$$1 - \frac{1}{D} \operatorname{arctg} D \approx \frac{D^2}{3} \quad \text{и} \quad 1 + \frac{1}{D} \operatorname{arctg} D \approx 2,$$

получим

$$R_B = \exp\left(-\frac{l^2}{a^2}\right) \left[1 - 2\frac{l^2}{a^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{l^2}{a^2}\right)^2 \right], \quad R_S = \exp\left(-\frac{l^2}{a^2}\right).$$

Коэффициент автокорреляции R_S для флуктуаций фазы имеет гауссов вид и совпадает с коэффициентом корреляции для флуктуаций показателя преломления.

Коэффициент автокорреляции R_B для уровней отличается от гауссова. Однако и в этом случае, как видно из фиг. 5, а, корреляция между флуктуациями уровня простирается на расстояние того же порядка, что и корреляция между флуктуациями показателя преломления.

В области больших значений волнового параметра ($D \gg 1$)

$$\varepsilon_1 \approx \frac{i}{D} \frac{l^2}{a^2}, \quad \varepsilon_2 \approx -\frac{i}{D} \frac{l^2}{a^2}.$$

Пользуясь формулой

$$\text{Ei}(-ix) - \text{Ei}(ix) = 2i \frac{\pi}{2} - 2i \text{Si } x,$$

преобразуем коэффициенты автокорреляции (24.16) и (24.17) к виду

$$R_B = \frac{\exp\left(-\frac{l^2}{a^2}\right) - \frac{1}{D} \left[\frac{\pi}{2} - \text{Si} \left(\frac{1}{D} \frac{l^2}{a^2} \right) \right]}{1 - \frac{1}{D} \text{arctg } D},$$

$$R_S = \frac{\exp\left(-\frac{l^2}{a^2}\right) + \frac{1}{D} \left[\frac{\pi}{2} - \text{Si} \left(\frac{1}{D} \frac{l^2}{a^2} \right) \right]}{1 + \frac{1}{D} \text{arctg } D}.$$

Зависимость коэффициентов автокорреляции от расстояния l между приемниками изображена графически на фиг. 5, 6 для случая $D = 10$. Средняя кривая изображает коэффициент корреляции $\exp(-l^2/a^2)$ для показателя преломления. Из графика видно, что поперечная автокорреляция между флуктуациями уровня и фазы простирается на расстояние порядка радиуса корреляции неоднородностей в среде. К тому же выводу мы пришли, рассматривая область малых значений волнового параметра. Можно поэтому предполагать, что вывод остается в силе и в области средних значений волнового параметра ($D \sim 1$).

Исследовать зависимость коэффициентов автокорреляции R_B и R_S от параметра l/a в промежуточной области, конечно, труднее. Однако можно получить асимптотическое значение коэффициентов автокорреляции при достаточно большом отношении l/a , если воспользоваться асимптотическим выражением функции Ei , встречавшемся в предыдущей главе.

Действительно, в этом случае

$$|e_2| = |e_1| = \frac{l^2/a^2}{\sqrt{1+D^2}} \gg 1.$$

Ограничиваясь первым членом в разложении (20.2), получим

$$\text{Ei}(e_2) = -\frac{1}{\frac{l^2}{a^2} \frac{1+iD}{1+D^2}} \exp\left(-\frac{l^2}{a^2} \frac{1+iD}{1+D^2}\right).$$

При этом пренебрегли остаточным членом R_1

$$|R_1| < \left[\left(\frac{l^2}{a^2} \frac{1}{\sqrt{1+D^2}} \right)^2 \frac{\sqrt{2}}{2} \right]^{-1}$$

по сравнению с учтенным членом, который по модулю равен

$$\left(\frac{l^2}{a^2} \frac{1}{\sqrt{1+D^2}} \right)^{-1}.$$

После несложных преобразований для коэффициентов автокорреляции получим

$$R_B \approx \frac{\exp\left(-\frac{l^2}{a^2}\right) - \left[\frac{\sin\left(\frac{l^2 D}{a^2(1+D^2)}\right)}{Dl^2/a^2} + \frac{\cos\left(\frac{l^2 D}{a^2(1+D^2)}\right)}{l^2/a^2} \right] \exp\left(-\frac{l^2}{a^2} \frac{1}{1+D^2}\right)}{1 - \frac{1}{D} \operatorname{arctg} D}, \quad (24.18)$$

$$R_S \approx \frac{\exp\left(-\frac{l^2}{a^2}\right) + \left[\frac{\sin\left(\frac{l^2 D}{a^2(1+D^2)}\right)}{Dl^2/a^2} + \frac{\cos\left(\frac{l^2 D}{a^2(1+D^2)}\right)}{l^2/a^2} \right] \exp\left(-\frac{l^2}{a^2} \frac{1}{1+D^2}\right)}{1 + \frac{1}{D} \operatorname{arctg} D}. \quad (24.19)$$

Формулы (24.18) и (24.19) содержат только квадраты отношения l/a , что делает их пригодными уже при $l/a = 3$. При таком значении отношения l/a и $D \sim 1$ коэффициенты автокорреляции малы по сравнению с единицей. Следовательно, в промежуточной области автокорреляция между флуктуациями уровня (и фазы) также простирается на расстояние порядка радиуса корреляции неоднородностей в среде.

§ 25. Условие квазистатичности

До сих пор мы считали распределение неоднородностей статическим, пренебрегая их изменением вследствие теплопроводности, диффузии, конвекции и течения. Такое пренебрежение возможно, если время распространения $t = L/c$ мало по сравнению с характерным периодом изменения неоднородностей во времени. Если же это условие не соблюдается, то при вычислении флуктуации уровня (или фазы) в момент времени t флуктуации показателя преломления необходимо брать в момент времени $t' = t - r/c$, где r — расстояние от рассеивающего элемента до точки наблюдения.

Основные формулы (18.1) и (18.2) запишутся в этом случае следующим образом:

$$S(L', 0, 0, t) = \iiint_{0}^{L'+\infty} \Phi_1(L' - \xi', \rho') \mu(\xi', \eta', \zeta', t') d\xi' d\eta' d\zeta', \quad (25.1)$$

$$B(L', 0, 0, t) = \iiint_{0}^{L'+\infty} \Phi_2(L' - \xi', \rho') \mu(\xi', \eta', \zeta', t') d\xi' d\eta' d\zeta', \quad (25.2)$$

где $t' = t - r/c$. Возводя (25.1) и (25.2) в квадрат и усредняя, получим:

$$\langle S^2 \rangle = \langle \mu^2 \rangle \int_0^{L'} \int_0^{L'+\infty} \iiint \Phi_1(L' - \xi_1', \rho_1') \Phi_1(L' - \xi_2', \rho_2') \times$$

$$\begin{aligned}
& \times N(\xi'_1 - \xi'_2, \eta'_1 - \eta'_2, \zeta'_1 - \zeta'_2, t' - t'') \times \\
& \times d\xi'_1 d\xi'_2 d\eta'_1 d\eta'_2 d\zeta'_1 d\zeta'_2, \\
\langle B^2 \rangle &= \langle \mu^2 \rangle \int_0^{L'} \int_0^{L'} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \Phi_2(L' - \xi'_1, \rho'_1) \Phi_2(L' - \xi'_2, \rho'_2) \times \\
& \times N(\xi'_1 - \xi'_2, \eta'_1 - \eta'_2, \zeta'_1 - \zeta'_2, t' - t'') \times \\
& \times d\xi'_1 d\xi'_2 d\eta'_1 d\eta'_2 d\zeta'_1 d\zeta'_2,
\end{aligned}$$

где

$$N(\xi'_1 - \xi'_2, \eta'_1 - \eta'_2, \zeta'_1 - \zeta'_2, t' - t'') = \frac{1}{\langle \mu^2 \rangle} \langle \mu(\xi'_1, \eta'_1, \zeta'_1, t') \mu(\xi'_2, \eta'_2, \zeta'_2, t'') \rangle.$$

При этом мы считаем, что коэффициент корреляции N зависит только от разностей координат и времени, т. е. предполагаем, что процесс стационарен во времени и однороден в пространстве. Здесь

$$t' - t'' = (t - r_1/c) - (t - r_2/c) = (r_2 - r_1)/c.$$

Коэффициент корреляции N отличен от нуля, если $r_1 - r_2$ не превышает по порядку величины радиуса корреляции a . Это значит, что разность времен $t' - t''$ не превышает по порядку величины a/c ($t' - t'' \sim a/c$). Величина a/c определяет время, в течение которого волна проходит расстояние, равное радиусу корреляции (масштабу неоднородностей). Если это время мало по сравнению со временем корреляции T показателя преломления, то разность времен $t' - t''$ можно положить равной нулю. Тогда явная зависимость от времени в наших формулах исчезает.

Следовательно, условие квазистатичности формулируется в виде неравенства

$$a/c \ll T. \quad (25.3)$$

Условие квазистатичности (25.3) для усредненных величин несравненно менее жесткое, чем условие квазистатичности для величин неусредненных. Последнее, очевидно, формулируется так:

$$L/c \ll T.$$

Во всех реальных случаях условие квазистатичности (25.3) для усредненных величин выполняется, по-видимому, с большим запасом. Тем самым оправдывается сделанное нами с самого начала предположение о квазистатичности.

§ 26. Автокорреляция флуктуаций уровня во времени

Изменение неоднородностей с течением времени приводит к изменению частоты рассеянных волн, к увеличению ширины спектральной линии падающего излучения. О характере этого уширения можно судить по виду временных автокорреляционных функ-

ций для флуктуаций уровня и фазы. Так, например, ширина спектральной линии определяется временным интервалом корреляции. Однако вопрос о спектральном составе флуктуаций нас не будет интересовать. Мы ограничимся в дальнейшем рассмотрением автокорреляционных функций.

Заметного ослабления автокорреляции флуктуаций уровня можно ожидать за промежуток времени τ , соизмеримый со временем корреляции T показателя преломления. Если условие квазистатичности выполнено, то промежуток времени τ также велик по сравнению со временем a/c , т. е. $\tau \gg a/c$.

Полагая, что промежуток времени τ разделяет два момента времени t_1 и t_2 , напомним формулу (25.2) для этих моментов времени:

$$B(L', 0, 0, t_1) = \int_0^{L'} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_2(L' - \xi', \rho') \mu(\xi', \eta', \zeta', t') d\xi' d\eta' d\zeta', \quad (26.1)$$

$$B(L', 0, 0, t_2) = \int_0^{L'} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_2(L' - \xi', \rho') \mu(\xi', \eta', \zeta', t'') d\xi' d\eta' d\zeta', \quad (26.2)$$

где

$$t' = t_1 - r/c, \quad t'' = t_2 - r/c. \quad (26.3)$$

Обозначая временную автокорреляционную функцию для уровней через $F(t)$, по определению имеем

$$F(\tau) = \langle B(L', 0, 0, t_1) B(L', 0, 0, t_2) \rangle.$$

Перемножая (26.1) и (26.2) и усредняя, получим

$$\begin{aligned} F(\tau) = \langle \mu^2 \rangle & \int_0^{L'} \int_0^{L'} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_2(L' - \xi'_1, \rho'_1) \Phi_2(L' - \xi'_2, \rho'_2) \times \\ & \times N(\xi'_1 - \xi'_2, \eta'_1 - \eta'_2, \zeta'_1 - \zeta'_2, t' - t'') \times \\ & \times d\xi'_1 d\xi'_2 d\eta'_1 d\eta'_2 d\zeta'_1 d\zeta'_2. \end{aligned} \quad (26.4)$$

На основании (26.3)

$$\begin{aligned} t' - t'' & = (t_1 - r_1/c) - (t_2 - r_2/c) = \\ & = t_1 - t_2 + (r_2 - r_1)/c = \tau + (r_2 - r_1)/c \approx \tau, \end{aligned}$$

так как $(r_2 - r_1)/c \sim a/c$. Поэтому формула (26.4) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} F(\tau) = \langle \mu^2 \rangle & \int_0^{L'} \int_0^{L'} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_2(L' - \xi'_1, \rho'_1) \Phi_2(L' - \xi'_2, \rho'_2) \times \\ & \times N(r', \tau) d\xi'_1 d\xi'_2 d\eta'_1 d\eta'_2 d\zeta'_1 d\zeta'_2. \end{aligned} \quad (26.5)$$

Минцер [41] исходил из предположения, что коэффициент корреляции $N(r', t)$ распадается на два множителя, из которых один

зависит только от координат, а другой — от времени, т. е. может быть представлен в виде $N(r') M(\tau)$. Тогда (26.5) запишется следующим образом:

$$F(\tau) = M(\tau) \langle \mu^2 \rangle \int_0^{L'} \int_0^{L'} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \Phi_2(L' - \xi_1', \rho_1') \Phi_2(L' - \xi_2', \rho_2') \times \\ \times N(r') d\xi_1' d\xi_2' d\eta_1' d\eta_2' d\zeta_1' d\zeta_2'. \quad (26.6)$$

Обозначая коэффициент автокорреляции уровней через $R(\tau)$, по определению имеем:

$$R(\tau) = \frac{F(\tau)}{\langle B^2 \rangle}.$$

Тогда на основании (26.6) и (18.3) получим очень простой результат:

$$R(\tau) = M(\tau).$$

Временной коэффициент автокорреляции уровней $R(\tau)$ совпадает с коэффициентом корреляции $M(\tau)$ показателя преломления.

Возможно, что предположение Минцера о разделении временной и пространственных координат оправдывается в отсутствие движения неоднородностей, обусловленного течением и конвекцией. В этом случае изменение неоднородностей с течением времени может происходить, например, из-за турбулентности, теплопроводности и диффузии. Однако при наличии течения или конвекции такого разделения быть не может. В связи с этим представляется интересным рассмотреть такой случай, когда изменение неоднородностей с течением времени обусловлено исключительно их движением.

Допустим, что все неоднородности движутся с одной и той же скоростью v . Тогда в системе координат, связанной с течением, коэффициент корреляции будет зависеть только от координат:

$$N(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2).$$

Пользуясь формулами преобразования Галилея

$$x_1 - x_2 = \xi_1 - \xi_2 - v_x \tau,$$

$$y_1 - y_2 = \eta_1 - \eta_2,$$

$$z_1 - z_2 = \zeta_1 - \zeta_2 - v_z \tau,$$

в системе координат ξ, η, ζ , связанной с приемником, получим

$$N(\xi_1 - \xi_2 - v_x \tau, \eta_1 - \eta_2, \zeta_1 - \zeta_2 - v_z \tau) \quad (26.7)$$

(координатные системы ориентированы так, чтобы скорость течения v лежала в плоскостях xoz и $\xi o \zeta$). Как видно из (26.7), в рассматриваемом случае разделения переменных не происходит.

Легко видеть, что задача о корреляции во времени в случае однородного течения сводится к решенной уже задаче о корреля-

ции в пространстве. Для этого достаточно, опираясь на принцип относительности, перейти к системе координат x, y, z , связанной с течением. По отношению к этой системе приемник движется со скоростью $-v$. Допустим, что в момент времени t приемник находится в точке A , а в момент времени $t + \tau$ — в точке E , причем смещение приемника $AE = l$ удовлетворяет условию $l = v\tau$. Обозначим флуктуации уровня в точке A в момент времени t через $B(A, t)$, флуктуации уровня в точке E в момент времени $t + \tau$ — через $B(E, t + \tau)$. Так как в системе координат, связанной с течением, распределение неоднородностей можно считать статическим, поскольку речь идет о промежутках времени порядка τ , то уровень в любой точке с течением времени не изменяется, т. е.

$$B(E, t + \tau) = B(E, t).$$

Поэтому

$$\langle B(A, t) B(E, t + \tau) \rangle = \langle B(A, t) B(E, t) \rangle.$$

Левая часть равенства представляет временную корреляционную функцию $F(\tau)$ в системе координат, связанной с наблюдателем, правая — пространственную корреляционную функцию $F_1(l)$. Таким образом,

$$F(\tau) = F_1(l). \quad (26.8)$$

Так как продольное смещение за время τ порядка a/v не может вызвать заметного ослабления автокорреляции, то в формуле (26.8) достаточно учитывать поперечное смещение $l_z = v_z\tau$. Тогда получим

$$F(\tau) = F_1(l_z). \quad (26.9)$$

Заметим, что корреляционные функции для флуктуаций фазы также удовлетворяют соотношению (26.9). Остается только воспользоваться соответствующими результатами § 24, где поперечное смещение обозначалось через l . Так, например, формулы (24.16) и (24.17) дают:

$$R_B(\tau) = \frac{\exp\left(-\frac{v_z^2}{a^2}\tau^2\right) - \frac{1}{2iD} [\text{Ei}(\varepsilon_2) - \text{Ei}(\varepsilon_1)]}{1 - \frac{1}{D} \text{arctg} D},$$

$$R_S(\tau) = \frac{\exp\left(-\frac{v_z^2}{a^2}\tau^2\right) + \frac{1}{2iD} [\text{Ei}(\varepsilon_2) - \text{Ei}(\varepsilon_1)]}{1 + \frac{1}{D} \text{arctg} D},$$

где

$$\varepsilon_2 = -\frac{i\omega_z^2\tau^2/a^2}{D+i}, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2^*.$$

В зоне Фраунгофера ($D \gg 1$) они принимают особенно простой вид:

$$R_B(\tau) = R_S(\tau) \approx \exp\left(-\frac{v_z^2}{a^2} \tau^2\right). \quad (26.10)$$

Вводя обозначение

$$T = \frac{a}{v_z}, \quad (26.11)$$

получим

$$R_B(\tau) = R_S(\tau) = \exp\left(-\frac{\tau^2}{T^2}\right).$$

Из (26.11) видно, что интервал корреляции T зависит от поперечной компоненты скорости течения, или (что то же) от поперечной компоненты скорости приемника.

§ 27. О границах применимости метода плавных возмущений

Остановимся на вопросе о границах применимости метода плавных возмущений. Из сказанного ранее следует, что методом плавных возмущений можно пользоваться только тогда, когда нелинейные члены в уравнении (16.5), заключенные в квадратные скобки, малы по сравнению с линейными. Однако малость квадратичных членов в дифференциальном уравнении еще не означает малости квадратичных членов в решении уравнения. В действительности нужно потребовать, чтобы в решении уравнения квадратичные члены были малы по сравнению с линейными.

Прежде чем сделать это, отметим различие между линейными членами B' и S' и квадратичными членами B'' и S'' . Являясь линейными функционалами от μ , линейные члены распределены по нормальному закону, а их средние значения равны нулю ($\langle B' \rangle = 0$, $\langle S' \rangle = 0$). Квадратичные члены имеют отличные от нуля средние значения ($\langle B'' \rangle \neq 0$ и $\langle S'' \rangle \neq 0$). Поэтому флуктуации уровня и фазы во втором приближении соответственно равны $B'' - \langle B'' \rangle$ и $S'' - \langle S'' \rangle$. Ими можно пренебречь при вычислении флуктуаций уровня и фазы, если выполняются условия:

$$\langle (B'' - \langle B'' \rangle)^2 \rangle \ll \langle B'^2 \rangle, \quad (27.1)$$

$$\langle (S'' - \langle S'' \rangle)^2 \rangle \ll \langle S'^2 \rangle. \quad (27.2)$$

Второе условие можно изменить, если учесть, что практический интерес обычно представляет не набег фазы на всем пути, пройденном волной, а разность фаз $S_1 - S_2$ в двух точках, разнесенных в поперечном направлении на расстояние l . Поэтому естественно заменить неравенство (27.2) условием вида

$$D_S''(l) \ll D_S'(l), \quad (27.3)$$

где $D_S(l) = \langle (S_1 - S_2)^2 \rangle$ — структурная функция фазы.

Средние значения уровня и фазы во втором приближении были вычислены в работе [42] в случае гауссова коэффициента корреляции флуктуаций показателя преломления среды. Окончательные формулы, полученные в этой работе, имеют очень простой вид:

$$\langle B'' \rangle = - \langle B'^2 \rangle, \quad (27.4)$$

$$\langle S'' \rangle = - \langle B' S' \rangle. \quad (27.5)$$

Заметим, что первую формулу можно получить также из закона сохранения среднего потока энергии волны.

В работе [43] величины $\langle B''^2 \rangle$ и $D_S''(l)$ были вычислены для степенного спектра флуктуаций показателя преломления, который в частном случае соответствует закону 2/3 Колмогорова — Обухова. Для такого спектра получены следующие соотношения:

$$\langle B''^2 \rangle = b \langle B'^2 \rangle^2, \quad D_S''(l) = d [D_S'(l)]^2, \quad (27.6)$$

где коэффициенты b и d зависят от показателя степени в формуле для спектра. Из последних формул следует, что нелинейные поправки малы тогда, когда малы флуктуации уровня $\langle B'^2 \rangle$ и структурная функция фазы $D_S'(l)$ волны в первом приближении. Указанные результаты относятся к дистанциям x , заключенным в интервале

$$l_0 < \sqrt{\lambda x} < L_0,$$

где l_0 — внутренний масштаб турбулентности, L_0 — внешний масштаб, λ — длина волны.

В случае однопараметрической модели среды, характеризуемой единственным параметром (радиусом корреляции неоднородностей a), этот интервал отсутствует. Поэтому возникает потребность в дополнительном рассмотрении вопроса о границах применимости метода плавных возмущений для однопараметрической модели среды. Такое рассмотрение было выполнено в работе [44].

Для нелинейной поправки $\langle B''^2 \rangle$ также была получена формула (27.6) с двумя различными значениями коэффициента b в области больших и малых значений волнового параметра. Из этой формулы и формулы (27.4) следует $\langle (B'' - \langle B'' \rangle)^2 \rangle = (b - 1) \langle B'^2 \rangle^2$. Неравенство (27.4) будет удовлетворено, если флуктуации уровня малы ($\langle B'^2 \rangle \ll 1$). В этом случае при вычислении флуктуаций уровня можно ограничиться первым приближением.

Для полипейной поправки к структурной функции фазы в области малых значений волнового параметра получены существенно иные результаты. Не воспроизводя громоздких вычислений, воспользуемся окончательными формулами упомянутой работы [44], чтобы сформулировать вытекающие из них выводы.

Сначала рассмотрим область больших значений волнового параметра ($D \gg 1$). В случае большого разнесения приемников квадратичная поправка определяется формулой

$$D_S'' = \langle S'^2 \rangle^2. \quad (27.7)$$

С другой стороны, всегда справедлива следующая формула:

$$D'_S = 2\langle S'^2 \rangle (1 - R_S), \quad (27.8)$$

где R_S — коэффициент автокорреляции флуктуаций фазы.

Если $l/a \gg 1$, то $R_S \approx 0$ и формула (27.8) приобретает вид

$$D'_S = 2\langle S'^2 \rangle. \quad (27.9)$$

На основании формулы (27.9) можно переписать формулу (27.7) следующим образом:

$$D_S^* = \frac{1}{2} D'_S \langle S'^2 \rangle. \quad (27.10)$$

В случае малого разнесения приемников ($l/a \ll 1$) квадратичная поправка определяется формулой

$$D_S^*(l) \approx \langle S'^2 \rangle^2 \frac{l^2}{a^2}, \quad (27.11)$$

которую можно преобразовать следующим образом. Учитывая, что коэффициент корреляции R_S мало отличается от функции Гаусса (§ 24), разложим эту функцию в ряд по степеням малого параметра l/a и ограничимся старшим членом. Тогда формула (27.8) примет вид:

$$D'_S \approx 2 \langle S'^2 \rangle \frac{l^2}{a^2}. \quad (27.12)$$

На основании (27.12) формула (27.11) также преобразуется к виду (27.10). Из (27.10) следует, что условие (27.3) будет выполняться в том случае, когда флуктуации фазы малы ($\langle S'^2 \rangle \ll 1$). Так как при больших значениях волнового параметра $\langle B'^2 \rangle = \langle S'^2 \rangle$, то флуктуации уровня также должны быть малы ($\langle B'^2 \rangle \ll 1$).

Теперь рассмотрим область малых значений волнового параметра ($D \ll 1$). В случае большого разнесения приемников ($l/a \gg 1$) справедлива формула

$$D_S^* \approx D_S'^2 D^2, \quad (27.13)$$

которая с помощью (27.9) преобразуется к виду

$$D_S^* = 2D'_S \langle S'^2 \rangle D^2. \quad (27.14)$$

В случае малого разнесения приемников ($l/a \ll 1$) имеет место несколько иная формула:

$$D_S^*(l) \approx \langle S'^2 \rangle^2 D^2 \frac{l^2}{a^2}.$$

Однако и она с помощью формулы (27.12) также преобразуется к виду (27.14) с несущественным отличием численного коэффициента. Из (27.14) видно, что квадратичная поправка D_S^* к структурной функции фазы может оставаться малой по сравнению со структурной функцией фазы D'_S в первом приближении, если произве-

дение $\langle S'^2 \rangle D^4$ мало. Последнее условие может выполняться и в случае сильных флуктуаций фазы ($\sqrt{\langle S'^2 \rangle} \gg \pi$), если волновой параметр достаточно мал ($D \ll 1$).

При большом равнесении приемников флуктуации фазы будут статистически независимы. В области, где пригодно геометрическое приближение ($D \ll 1$), это обусловлено тем, что лучи, проходящие к различным приемникам, проходят через различные неоднородности. Поэтому, например, во втором приближении имеет место выражение

$$\begin{aligned} D_S^* &= \langle [(S_1^* - \langle S_1^* \rangle) - (S_2^* - \langle S_2^* \rangle)]^2 \rangle = \langle (S_1^* - \langle S_1^* \rangle)^2 \rangle + \\ &+ \langle (S_2^* - \langle S_2^* \rangle)^2 \rangle - 2 \langle (S_1^* - \langle S_1^* \rangle) (S_2^* - \langle S_2^* \rangle) \rangle = \\ &= 2 \langle (S^* - \langle S^* \rangle)^2 \rangle, \end{aligned} \quad (27.15)$$

совпадающее с (27.9), полученным в первом приближении. Из (27.15), (27.13) и (27.9) следует:

$$\langle (S^* - \langle S^* \rangle)^2 \rangle = 2 \langle S'^2 \rangle (\langle S'^2 \rangle D^2),$$

т. е. квадратичная поправка к флуктуации фазы может оставаться малой, если мала величина $\langle S'^2 \rangle D^2$.

В области малых значений волнового параметра средние квадраты флуктуаций уровня и фазы вычисляются по формулам

$$\langle B'^2 \rangle = \frac{8 \sqrt{\pi}}{3} \langle \mu^2 \rangle \frac{L^3}{a^3}, \quad \langle S'^2 \rangle = \sqrt{\pi} \langle \mu^2 \rangle k^2 a L.$$

Из них следует

$$\langle B'^2 \rangle = \frac{1}{6} \langle S'^2 \rangle D^2.$$

Требование малости величины $\langle S'^2 \rangle D^2$ приводит к требованию малости флуктуации уровня ($\langle B'^2 \rangle \ll 1$).

Итак, более строгое рассмотрение приводит к заключению: метод плавных возмущений ограничен малостью флуктуаций уровня, но не накладывает ограничения малости на флуктуации фазы и структурную функцию фазы в области малых значений волнового параметра. Этот вывод остается в силе и для турбулентной среды. В этом случае геометрическая зона, соответствующая малым значениям волнового параметра, ограничена дистанциями x , удовлетворяющими условию $\sqrt{\lambda x} < l_0$.

§ 28. Среднее поле и корреляционная функция поля

Флуктуации поля волны в случайно неоднородной среде обусловлены флуктуациями уровня и фазы. Поэтому статистические характеристики поля определяются статистическими характеристиками флуктуаций уровня и фазы. В частности, это относится к среднему полю и корреляционной функции поля, которые рассмотрены в настоящем параграфе.

Отбрасывая в формуле (19.4) множитель $\exp(ikx)$, представим поле в виде

$$p = A_0 \exp(B + iS), \quad (28.1)$$

где

$$B = B' + (B'' - \langle B'' \rangle) + \langle B'' \rangle, \quad (28.2)$$

$$S = S' + (S'' - \langle S'' \rangle) + \langle S'' \rangle. \quad (28.3)$$

Предполагая выполненными условия (27.1) и (27.2) применимости метода плавных возмущений, отбросим квадратичные члены $B'' - \langle B'' \rangle$ и $S'' - \langle S'' \rangle$. Кроме того, заменим средние значения $\langle B'' \rangle$ и $\langle S'' \rangle$ по формулам (27.4) и (27.5). Тогда равенства (28.2) и (28.3) приобретут вид

$$B = B' - \langle B'^2 \rangle, \quad S = S' - \langle B'S' \rangle,$$

и выражение (28.1) для поля запишется следующим образом:

$$p = A_0 \exp(-\langle B'^2 \rangle - i\langle B'S' \rangle) \exp(B' + iS'). \quad (28.4)$$

Поскольку B' и S' распределены по нормальному закону, усреднение последнего множителя дает [40]:

$$\langle \exp(B' + iS') \rangle = \exp\left(\frac{1}{2} \langle B'^2 \rangle - \frac{1}{2} \langle S'^2 \rangle + i \langle B'S' \rangle\right),$$

и мы получаем следующую формулу для среднего поля:

$$\langle p \rangle = A_0 \exp\left[-\frac{1}{2} (\langle B'^2 \rangle + \langle S'^2 \rangle)\right]. \quad (28.5)$$

Если предположить, что коэффициент корреляции флуктуаций показателя преломления имеет гауссов вид, и воспользоваться формулами (21.2) и (21.3) для средних квадратов $\langle B'^2 \rangle$ и $\langle S'^2 \rangle$, то последняя формула приобретет вид

$$\langle p \rangle = A_0 \exp(-\alpha' L),$$

где

$$\alpha' = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \langle \mu^2 \rangle k^2 a.$$

Аналогично из (28.4) для поперечной корреляционной функции поля имеем

$$\langle p_1 p_2^* \rangle = A_0^2 \exp[-\langle B_1'^2 \rangle - i\langle B_1' S_1' \rangle - \langle B_2'^2 \rangle + i\langle B_2' S_2' \rangle] \langle \exp[B_1' + B_2' + i(S_1' - S_2')] \rangle. \quad (28.5a)$$

Легко показать, что множители $\exp(B_1' + B_2')$ и $\exp[i(S_1' - S_2')]$ статистически независимы. С этой целью вычислим среднее от произведения $(B_1' + B_2')(S_1' - S_2')$. Получим:

$$\langle (B_1' + B_2')(S_1' - S_2') \rangle = \langle B_1' S_1' \rangle + \langle B_2' S_1' \rangle - \langle B_1' S_2' \rangle - \langle B_2' S_2' \rangle.$$

Так как любые две точки в плоскости, перпендикулярной к на-

правлению распространения волны, равноправны, то

$$\langle B_1' S_1' \rangle = \langle B_2' S_2' \rangle, \quad \langle B_2' S_1' \rangle = \langle B_1' S_2' \rangle$$

и, следовательно,

$$\langle (B_1' + B_2') (S_1' - S_2') \rangle = 0. \quad (28.6)$$

Если флуктуации статистически независимы, то коэффициент корреляции обращается в нуль. Обратное утверждение, вообще говоря, неправильно: из равенства нулю коэффициента корреляции не следует статистическая независимость. Если, однако, флуктуации подчиняются нормальному закону распределения, то и обратное утверждение также правильно.

Следовательно, из (28.6) вытекает статистическая независимость флуктуаций $B_1' + B_2'$ и $S_1' - S_2'$, в то время как все четыре величины B_1' , B_2' , S_1' и S_2' попарно зависимы между собой.

Любые функции от независимых флуктуаций также будут статистически независимы. В частности, это относится к функциям $\exp(B_1' + B_2')$ и $\exp[i(S_1' - S_2')]$. Поэтому

$$\langle \exp[B_1' + B_2' + i(S_1' - S_2')] \rangle = \langle \exp(B_1' + B_2') \rangle \langle \exp[i(S_1' - S_2')] \rangle. \quad (28.7)$$

Так как $\langle B_1'^2 \rangle = \langle B_2'^2 \rangle$ и $\langle S_1'^2 \rangle = \langle S_2'^2 \rangle$, то усреднение первого и второго множителей соответственно дает:

$$\exp\langle B_1' + B_2' \rangle = \exp[\langle B'^2 \rangle (1 + R_B)], \quad (28.8)$$

$$\exp\langle i(S_1' - S_2') \rangle = \exp[-\langle S'^2 \rangle (1 - R_S)]. \quad (28.9)$$

На основании выражений (28.7)–(28.9) формула (28.5а) запишется так:

$$\langle p_1 p_2 \rangle = A_0^2 \exp[-\langle B'^2 \rangle (1 + R_B) - \langle S'^2 \rangle (1 - R_S)]. \quad (28.10)$$

Если предположить, что коэффициент корреляции флуктуаций показателя преломления имеет гауссов вид и воспользоваться формулами (24.16) и (24.17) для коэффициентов автокорреляции флуктуаций уровня и фазы, то последняя формула преобразуется к виду:

$$\langle p_1 p_2 \rangle = A_0^2 \exp\{-2\alpha' L [1 - \exp(-l^2/a^2)]\}.$$

Как отмечалось выше, метод плавных возмущений не накладывает ограничения малости на флуктуацию фазы $\langle S'^2 \rangle$ в области малых значений волнового параметра. Поэтому формулы (28.5) и (28.10) для среднего поля и корреляционной функции поля остаются справедливыми и в области сильных флуктуаций фазы ($\langle S'^2 \rangle \gg \pi^2$), что соответствует большим (по сравнению с единицей) значениям параметра $\alpha' L$.

§ 29. Сравнение с экспериментом

В настоящей книге при описании статистических свойств случайно-неоднородной среды используется однопараметрическая модель среды, характеризующаяся единственным параметром — радиусом корреляции флуктуаций показателя преломления среды (или характерным масштабом). Если же флуктуации показателя преломления среды обусловлены турбулентностью, то в основу статистического описания среды нужно положить двухпараметрическую модель, характеризующуюся двумя параметрами — внутренним и внешним масштабом турбулентности. Теория рассеяния и флуктуаций волн, построенная для различных моделей среды, приводит, вообще говоря, к различным закономерностям. Сравнивая их с экспериментальными данными, можно отдать предпочтение той или иной модели.

Таким образом, сравнение теории с экспериментом требуется для проверки правильности выбора статистической модели среды.

Известно [22], что метод плавных возмущений в применении к турбулентной среде дает для среднего квадрата флуктуаций уровня следующие формулы:

$$\langle B^2 \rangle = \begin{cases} 2,46 C_n^2 l_0^{-1/2} L^3, & \sqrt{\lambda L} \ll l_0; & (29.1) \\ 0,31 C_n^2 k^{1/2} L^{11/6}, & l_0 \ll \sqrt{\lambda L} \ll L_0; & (29.2) \\ \langle \mu^2 \rangle k^2 L_n L, & \sqrt{\lambda L} \gg L_0, & (29.3) \end{cases}$$

где L_n — интегральный масштаб турбулентности, определяемый формулой

$$L_n = \int_0^{\infty} N(\xi) d\xi$$

и по порядку величины совпадающий с внешним масштабом турбулентности L_0 .

В предельном случае малых дистанций ($\sqrt{\lambda L} \ll l_0$) формула (29.1) по характеру зависимости от дистанции совпадает с (7.7), полученной в геометрическом приближении для однопараметрической модели среды. В предельном случае больших дистанций ($\sqrt{\lambda L} \gg L_0$) формула (29.3) полностью совпадает с (19.3), справедливой в зоне Фраунгофера. В этом легко убедиться, если вычислить интегральный масштаб, полагая $N = \exp(-x^2/a^2)$. Это дает

$$L_n = \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} a.$$

В области средних дистанций ($l_0 \ll \sqrt{\lambda L} \ll L_0$) равенство (29.2) дает результаты, отличные от общей формулы

$$\langle B^2 \rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \langle \mu^2 \rangle k^2 a L \left(1 - \frac{\operatorname{arctg} D}{D} \right),$$

если только внутренний и внешний масштабы турбулентности достаточно сильно различаются.

Что касается поперечного радиуса автокорреляции флуктуаций уровня, то он по порядку величины равен на малых дистанциях внутреннему масштабу турбулентности l_0 , на средних дистанциях — размеру зоны Френеля $\sqrt{\lambda L}$ и на больших дистанциях — внешнему масштабу турбулентности L_0 .

Рассмотрение однопараметрической модели приводит (§ 24) к заключению, что поперечный радиус автокорреляции уровня не зависит от дистанции и по порядку величины равен радиусу корреляции a флуктуаций показателя преломления среды.

Возрастание поперечного радиуса автокорреляций флуктуаций уровня на средних дистанциях от значения l_0 до значения L_0 является, пожалуй, наиболее характерной чертой двухпараметрической модели.

На основании фазовых измерений трудно отдать предпочтение той или иной модели, так как обе модели для средних квадратов флуктуации фазы обнаруживают одинаковую зависимость от расстояния и частоты ($k^2 L$), а также приводят к заключению, что поперечный радиус автокорреляции флуктуаций фазы мало зависит от дистанции.

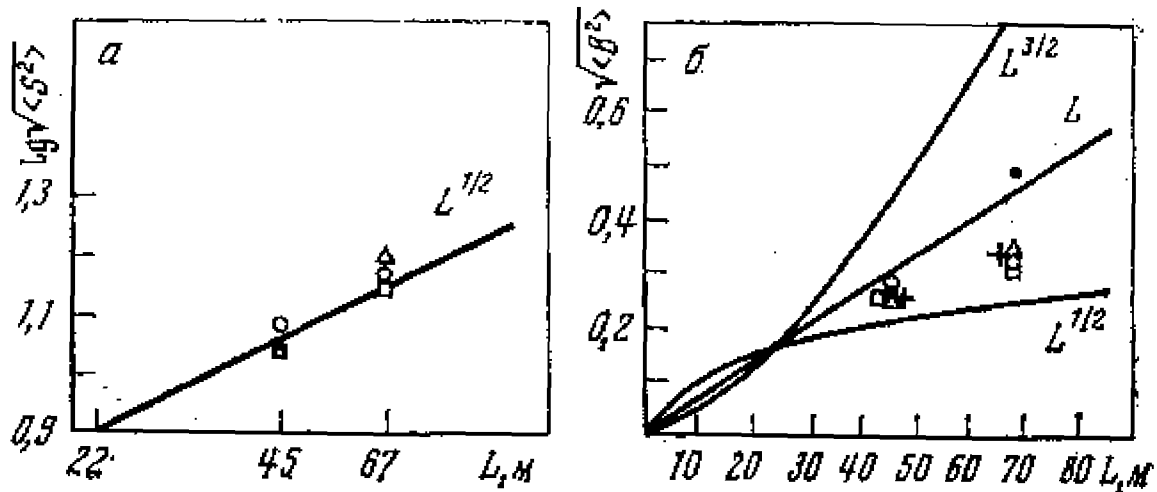
Первые экспериментальные исследования флуктуаций уровня и фазы при распространении звука в атмосфере принадлежат В. А. Красильникову [45]. Позднее, пользуясь более совершенной методикой, В. А. Красильников и К. М. Иванов-Шец [46] также экспериментально исследовали флуктуации уровня и фазы при распространении звуковой волны в атмосфере и сравнили экспериментальные результаты с теоретическими, полученными В. А. Красильниковым [20] на основе лучевых представлений. При этом выяснилось, что теоретический результат для флуктуации фазы находится в удовлетворительном согласии с экспериментом, в то время как теоретическая формула для флуктуации уровня экспериментальными данными не подтверждается.

На фиг. 6, а показана в логарифмическом масштабе зависимость средней квадратичной флуктуации фазы (за равные промежутки времени) от расстояния между излучателем и приемником. Прямая L проведена через экспериментальную точку, соответствующую дистанции $L = 22$ м. Из рисунка видно, что теоретическая зависимость, согласно которой $\sqrt{\langle S^2 \rangle} \sim L^{1/2}$, удовлетворительно согласуется с данными опытами.

Зависимость средней квадратичной флуктуации уровня $\sqrt{\langle B^2 \rangle}$ от расстояния L представлена на фиг. 6, б. Положение экспериментальных точек относительно кривых $L^{1/2}$, L , $L^{3/2}$ дает представление о поведении $\sqrt{\langle B^2 \rangle}$ при изменении расстояния и

может быть удовлетворительно аппроксимировано зависимостью $\sqrt{\langle B^2 \rangle} \sim L^{0,8}$. Значение показателя степени 0,8 лежит между значениями $11/12 \approx 0,92$ и 0,5. Это показывает, что экспериментальные данные В. А. Красильникова и К. М. Иванова-Шиц относятся к области перехода от средних расстояний к большим. В этой области лучевая теория непригодна.

Шици [47] изучал флуктуации сигналов, распространяющихся в глубокой воде. В его опытах при каждом фиксированном расстоянии посылались серия звуковых импульсов и определялась вели-



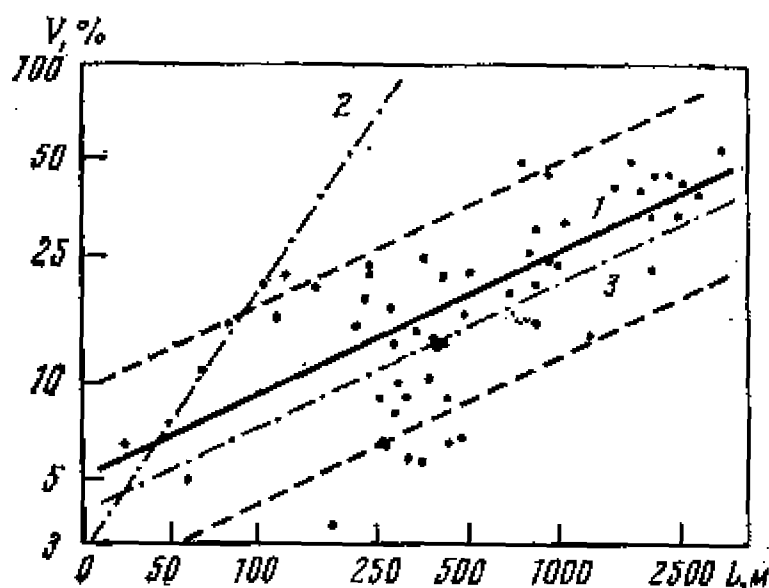
Фиг. 6. Зависимость $\sqrt{\langle S^2 \rangle}$ и $\sqrt{\langle B^2 \rangle}$ от L в логарифмическом масштабе. Разными значками показаны различные серии измерений.

чина относительной флуктуации амплитуды давления, выраженная в процентах от средней амплитуды (фиг. 7). Экспериментальная прямая 1 показывает, что величина флуктуации V возрастает пропорционально корню квадратному из расстояния, хотя разброс экспериментальных точек велик. Исходя из данных Либермана [5] ($\langle \mu^2 \rangle = 5 \cdot 10^{-9}$, $a = 60$ см) и коэффициента корреляции вида $\exp(-r^2/a^2)$, Минцер [32] изображает на том же графике зависимость $V = \sqrt{\pi^{1/2} \langle \mu^2 \rangle k^2 a L}$ между относительной флуктуацией давления V и расстоянием L (прямая 3), а также зависимость $V \sim L^{1/2}$, вытекающую из лучевой теории (прямая 2). Последняя, как видно из графика, находится в резком противоречии с опытом. Объясняется это тем, что данные Шици относятся к зоне Фраунгофера.

Действительно, для дистанций, заключенных в пределах от 50 до 2500 м, при частоте $\nu = 24$ кгц и масштабе неоднородностей $a = 60$ см волновой параметр изменяется соответственно от 6 до 300, т. е. значительно больше единицы. Результаты дифракционной теории (прямая 3) находятся в хорошем согласии с опытными данными. Заметим, что между крайними пунктирными линиями, заключающими 90% данных, величина $\langle \mu^2 \rangle a$ изменяется от $1,5 \cdot 10^{-6}$ до $1,5 \cdot 10^{-7}$ (экспериментальная прямая 1 соответствует значению $5 \cdot 10^{-7}$).

Обсудим некоторые экспериментальные данные относительно корреляции флуктуаций уровней во времени. Такие данные, полученные Шихи, были приведены в статье Минцера [41]. Анализируя их, Минцер пришел к заключению, что временной коэффициент корреляции не зависит от расстояния.

Вместе с тем опыты, проведенные на одной и той же дистанции, но в разное время, дали сильно различающиеся графики для коэффициента корреляции. Так как опыты проводились на движущихся кораблях, то естественно предположить, что различие в графиках обусловлено различием в движении кораблей. Исходя из это-



Фиг. 7. Зависимость относительной флуктуации амплитуды давления прямого сигнала от расстояния L

го можно истолковать результаты опытов, опираясь на теорию, развитую в § 26.

Опыт состоял из 50 серий импульсов. Каждая серия состояла из 50 импульсов при частоте 24 кГц. Длительность импульса в 16 сериях равнялась 10 мсек, в остальных сериях — 30 мсек. Излучатель и приемник располагались на глубине 15 м. Поскольку импульсы отделены интервалом в 1 сек, значения коэффициента корреляции найдены при $\tau = 1, 2, 3, \dots$ сек. На фиг. 8 приведена зависимость времени $\tau^{(0)}$, при котором корреляционная функция впервые обращается в нуль, от расстояния между излучателем и приемником. Кажется, что нет никакой закономерной зависимости $\tau^{(0)}$ от расстояния. С другой стороны, бросается в глаза изменчивость $\tau^{(0)}$ для различных серий на одном и том же расстоянии от излучателя до приемника. Поскольку нет зависимости от расстояния, корреляционная функция найдена усреднением по всем 50 сериям. Полученные в результате усреднения значения коэффициента корреляции отмечены на фиг. 9 кружками.

Изменчивость коэффициента корреляции можно объяснить сильной зависимостью его от скорости движения приемника (см. формулу (26.10)). Зависимость коэффициента корреляции от времени, изображенную на фиг. 9, можно теоретически объяснить, если усреднить коэффициент автокорреляции (26.10) по всем сериям, предполагая, что скорость корабля по отношению к воде изменяется от серии к серии случайным образом и распределение

скоростей корабля подчиняется нормальному закону

$$W(v_z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left(-\frac{v_z^2}{2v^2}\right), \quad (29.4)$$

где v — среднеквадратичное компоненты v_z .

Усредняя (26.10) с помощью (29.4), получим

$$\begin{aligned} R_B(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{v_z^2}{a^2} \tau^2\right) W(v_z) dv_z = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot v}} \exp\left[-\left(\frac{1}{2v^2} + \frac{\tau^2}{a^2}\right) v_z^2\right] dv_z = \frac{1}{\sqrt{1 + 2v^2\tau^2/a^2}}, \end{aligned}$$

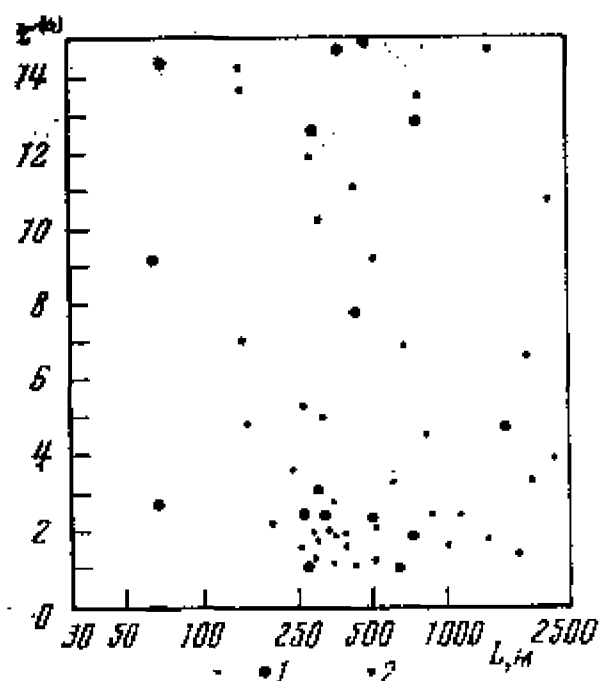
или

$$R_B(\tau) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2/T^2}}, \quad (29.5)$$

где

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{v}.$$

Если положить $T = 0,33$ сек, то зависимость (29.5) изобразится кривой на фиг. 9, которая удовлетворительным образом описывает ход экспериментальных точек. При масштабе неоднородностей $a = 60$ см средняя скорость корабля $v \approx 128$ см/сек, т. е.



Фиг. 8. Зависимость времени $\tau^{(0)}$ от расстояния

1 — импульсы длительностью 10 мсек;
2 — 30 мсек

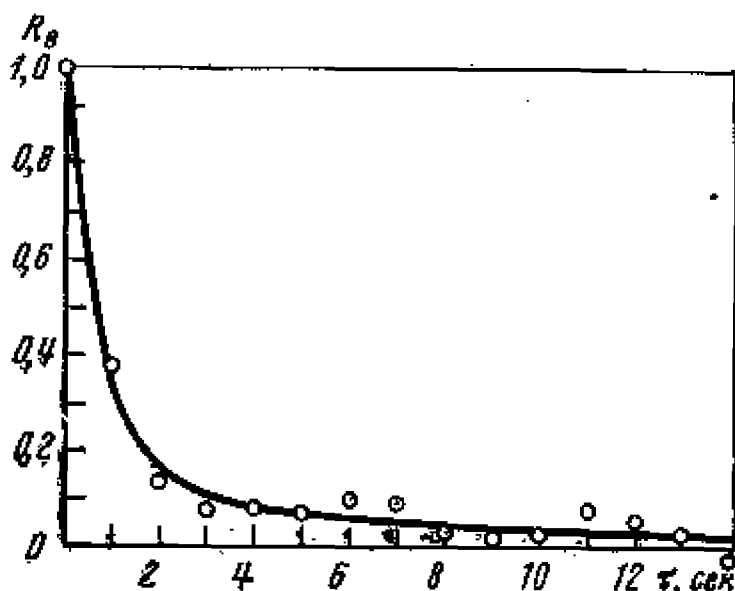
около 4,5 км/час. К сожалению, в работе [41] никаких указаний относительно скорости корабля не содержится.

Р. Ф. Швачко [48] исследовал флуктуации уровня импульсных звуковых сигналов в океане. Длительность импульсов и период их повторения выбирались такими, чтобы было возможно разделение во времени прямого и отраженного от поверхности сигналов. Статистическая обработка записей флуктуаций уровня зву-

кового давления прямых (не испытывавших отражения от поверхности) импульсов состояла в вычислении временных структурных функций $D(\tau)$. Далее использовалась гипотеза «замороженной» турбулентности и совершался переход к поперечной пространственной структурной функции с помощью подстановки $\rho = vt$, где v — поперечная по отношению к направлению распространения звука скорость приемника. По виду структурной функции определялся поперечный радиус автокорреляции флуктуации уровня звуковых импульсов.

Фиг. 9. Зависимость среднего коэффициента корреляции от времени

Экспериментальные точки получены в результате усреднения по 50 сериям звуковых импульсов



Эксперименты Р. Ф. Швачко можно разделить на две группы.

К первой группе относятся эксперименты в приповерхностном слое океана, когда глубина излучателя и приемника изменялась в пределах от 20 до 40 м. Частота заполнения импульсов равнялась 25 кГц. Расстояние изменялось в пределах от 180 до 1100 м. Эта группа экспериментов сопровождалась одновременным непосредственным изучением случайных неоднородностей морской среды по методике, описанной в § 2.

Измерения показали, что $\langle \mu^2 \rangle$ изменяется от $0,7 \cdot 10^{-9}$ до $84 \cdot 10^{-9}$, а радиус корреляции флуктуаций показателя преломления a — от 0,11 до 2,66 м, т. е. никогда не превышает 3 м, а в большинстве случаев — 1 м. Эти данные находятся в хорошем согласии с данными Либермана.

Вторая группа экспериментов была выполнена при большом заглублении излучателя и приемника, которое равнялось 250 м в Саргассовом море и 150 м в Норвежском море, на частотах соответственно в 4 и 3 кГц и дистанциях от 300 до 10 000 м. Однако эта группа экспериментов не сопровождалась непосредственным изучением случайных неоднородностей морской среды.

Из первой группы опытов следует, что среднеквадратичное значение флуктуаций уровня изменяется с расстоянием по закону $\sqrt{\langle B^2 \rangle} \sim L^{0,6}$, а поперечный радиус корреляции флуктуаций уровня не зависит от расстояния и примерно совпадает с радиусом корреляции флуктуаций показателя преломления среды. Разумеется, в этом нет ничего неожиданного, так как размеры зоны

Френеля $\sqrt{\lambda L}$ изменялись в пределах от 3,3 до 8,1 м, т. е. все эксперименты были практически произведены на больших расстояниях, когда выполняется условие $\sqrt{\lambda L} > a$.

Из второй группы опытов следует, что нормированное среднеквадратичное значение $(\langle B^2 \rangle / 0,31 C_n^2 k^{7/6})^{1/2}$ флуктуаций уровня звука растет пропорционально $L^{11/12}$, а поперечный радиус автокорреляции флуктуаций уровня по порядку величины равен $\sqrt{\lambda L}$ и растет с расстоянием вплоть до масштабов, по крайней мере не меньших 50—60 м. Это показывает, что глубоководные неоднородности хорошо описываются двупараметрической моделью среды с внешним масштабом турбулентности L_0 не меньшим 50—60 м, а все эксперименты второй группы относятся к средним дистанциям, когда выполняется условие $\sqrt{\lambda L} < L_0$.

Интересные опыты по исследованию флуктуаций амплитуды и фазы при распространении звука в океане произвел Кеннеди [49]. Им были найдены автокорреляционные функции флуктуации уровня и фазы с помощью вертикально расположенной цепочки гидрофонов, а также коэффициент взаимной корреляции флуктуаций уровня и фазы на расстоянии около 50 км и частоте 800 гц. Поперечный радиус автокорреляции флуктуаций уровня в его экспериментах был равен 50 м. Радиус автокорреляции флуктуаций фазы — 200 м. Кеннеди считает, что его результаты находятся в качественном согласии с теорией, развитой в настоящей книге § 24). Количественное несоответствие он объясняет тем, что океан является средой статистически неоднородной: масштаб неоднородностей растет с глубиной. Теория же относится к статистически однородной среде.

В оптике, ввиду малости длины волны, волновой параметр $D = 4L/ka^2$ может оставаться малым, по сравнению с единицей, даже на больших расстояниях, вследствие чего область применимости лучевой теории значительно расширяется. В явлении мерцания звезд можно найти тому убедительное подтверждение. Батлер [50] экспериментально исследовал флуктуации яркости звезд в зависимости от зенитного расстояния. Результаты его наблюдений изображены кружками на фиг. 10. Путь луча в атмосфере $L = h \sec z$, где z — зенитное расстояние, h — высота слоя, содержащего неоднородности. Поэтому на графике относительная флуктуация яркости дана в зависимости от $\sec z$.

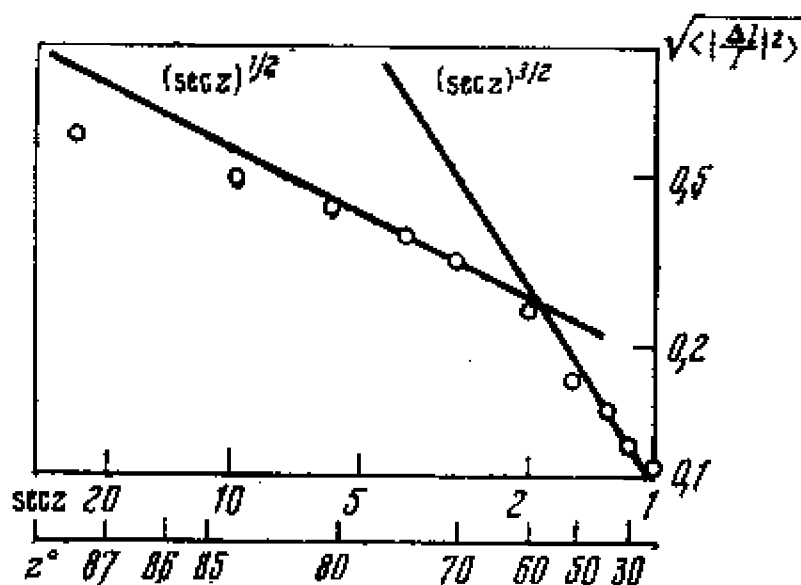
Мего [51] сравнил эти данные с теорией. Как видно из фиг. 10, зависимость $\sqrt{\langle (\Delta I/I)^2 \rangle} \sim (\sec z)^{3/2}$ выполняется для зенитных расстояний, не превышающих 60° . На больших зенитных расстояниях изменение яркости следует закону $\sqrt{\langle (\Delta I/I)^2 \rangle} \sim (\sec z)^{1/2}$. График интересен в том отношении, что охватывает сразу обе закономерности и довольно отчетливо показывает переход одной закономерности в другую.

Развитая в последних главах теория ограничена малыми флуктуациями уровня (интенсивности). Поэтому производилось ее срав-

нение с такими экспериментами, в которых наблюдались малые флуктуации уровня ($\langle B^2 \rangle < 1$). Между тем в опытах с наземными источниками света — когерентными (лазерами) и некогерентными — наблюдались и сильные флуктуации интенсивности ($\langle B^2 \rangle > 1$). С наиболее совершенной постановкой эксперимента мы встречаемся в работе [52], критически рассматривающей и подводящей известный итог предшествующим экспериментальным работам в этой области.

В работе приведены результаты измерений среднеквадратичных значений логарифма интенсивности сильных флуктуаций волны,

Фиг. 10. Зависимость относительной флуктуации яркости звезд от зенитного расстояния

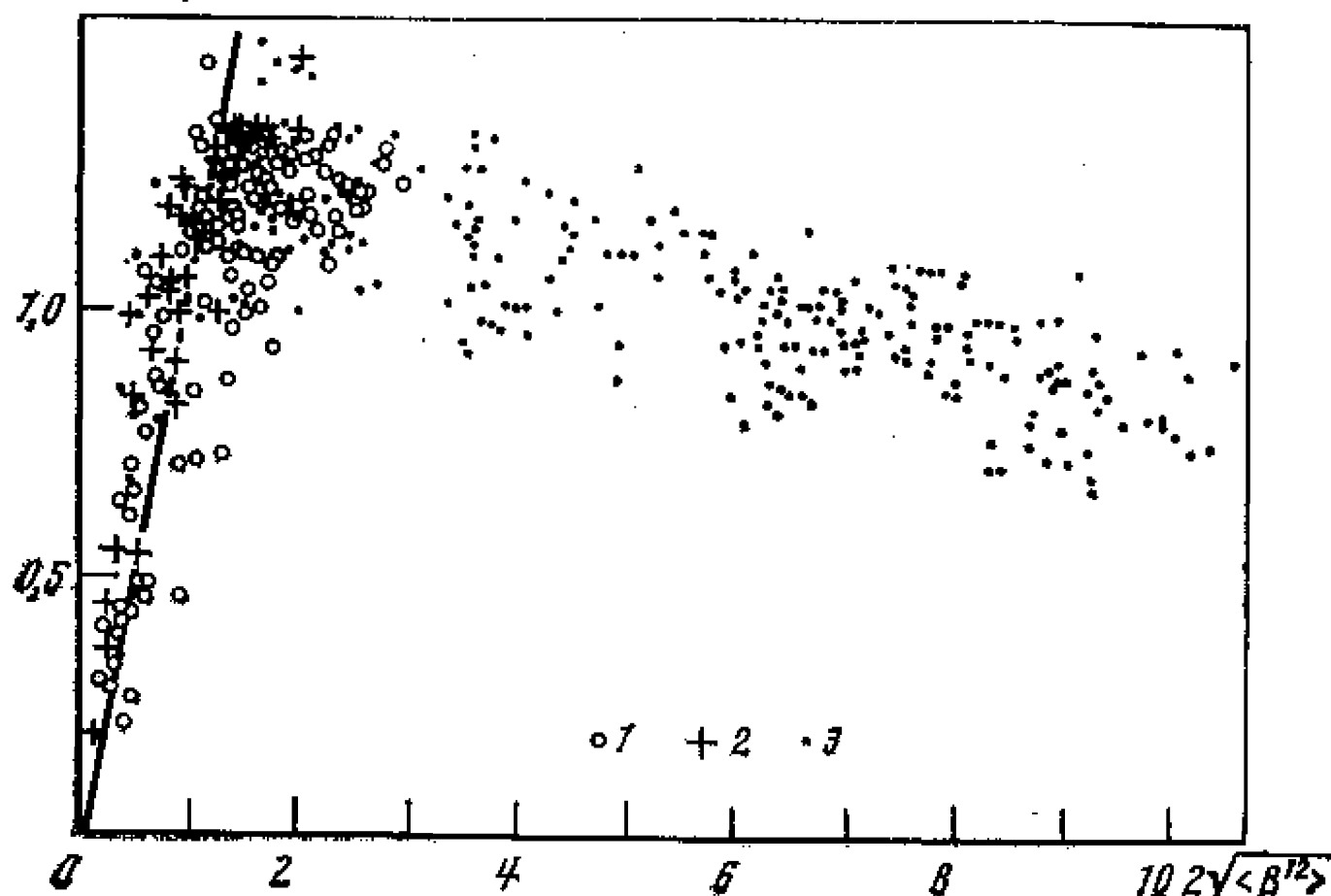


Фиг. 11. Зависимость

$$2\sqrt{\langle B^2 \rangle - \langle B \rangle^2} = f(2\sqrt{\langle B'^2 \rangle})$$

- 1 — $L = 250$ м, июль-август 1967 г.;
- 2 — $L = 250$ м, июль 1968 г.;
- 3 — $L = 1750$ м, август 1968 г.

$$2\sqrt{\langle B^2 \rangle - \langle B \rangle^2}$$



распространяющейся на горизонтальных трассах длиной 250 и 1750 м в условиях больших значений структурной постоянной C_n^2 флуктуаций показателя преломления атмосферы. Источником света служил газовый лазер ($\lambda = 0,63$ мкм). Была исследована зависимость средней квадратичной флуктуации логарифма интенсивности $2\sqrt{\langle B^2 \rangle - \langle B \rangle^2}$ от средней квадратичной флуктуации логарифма интенсивности $2\sqrt{\langle B'^2 \rangle}$, найденной по формуле (29.2), полученной методом плавных возмущений. Обе величины изменялись при увеличении дистанции L или структурной постоянной C_n , которая вычислялась на основании независимых метеорологических измерений. Зависимость представлена на фиг. 11. Прямая линия на графике соответствует точному совпадению $2\sqrt{\langle B^2 \rangle - \langle B \rangle^2}$ и $2\sqrt{\langle B'^2 \rangle}$ в области «малых» флуктуаций.

Впрочем, эти флуктуации совсем не так малы. Метод плавных возмущений дает хорошее совпадение с экспериментом вплоть до значения $\langle B'^2 \rangle \sim 1$. Лишь в области сильных флуктуаций уровня ($\langle B'^2 \rangle > 1$) наблюдается медленный спад флуктуаций интенсивности, в отличие от того, что дает метод плавных возмущений. Создается впечатление, что область применимости первого приближения в методе плавных возмущений шире той, которая следует из условия пренебрежимости вторым приближением в этом методе (§ 27).

Глава VII

ТЕОРИЯ СИЛЬНЫХ ФЛУКТУАЦИЙ ПОЛЯ

Всякая волна, прошедшая достаточно большой путь в случайно-неоднородной среде и претерпевшая многократное рассеяние, будет сильно флуктуировать. Между тем использованное в предыдущих главах первое приближение в методе плавных возмущений ограничено требованием малости флуктуаций уровня ($B \ll 1$) и, следовательно, непригодно для описания сильных флуктуаций уровня. В связи с этим возникает потребность в разработке новых методов, пригодных для описания сильных флуктуаций, основанных на учете многократного рассеяния. В настоящее время существует несколько таких методов. Их обстоятельный обзор читатель сможет найти в статье [2].

Наиболее общим методом в теории многократного рассеяния является метод функции Грина, заимствованный из квантовой теории поля. Этот метод и некоторые его приложения рассмотрены в монографии В. И. Татарского [22]. Однако необходимо заметить, что в процессе применения этого метода обычно делаются

упрощающие предположения, приводящие к решениям, имеющим приближенный характер. Например, при вычислении статистических моментов поля первого и второго порядков суммируются не все члены бесконечных последовательностей, учитывающие многократное расстояние, а лишь члены некоторых подпоследовательностей.

Между тем приближенные решения могут быть получены и другими методами. К ним относится локальный метод, положенный в основу дальнейшего изложения. Он дает возможность получить не только статистические моменты поля первого и второго порядков, но и дифференциальное уравнение для статистического момента поля любого порядка.

Ограничиваясь крупномасштабными неоднородностями, будем в дальнейших исследованиях опираться на параболическое уравнение вместо обычного волнового уравнения. В связи с этим сообщим ниже необходимые сведения о параболическом уравнении и границах его применимости.

Заметим в заключение, что локальный метод можно применить и к обычному волновому уравнению [53]. Получаемое в результате этого уравнение для статистического момента поля любого порядка будет более сложным (интегродифференциальным), но зато справедливым при любом соотношении между длиной волны и масштабом неоднородностей среды.

§ 30. Параболическое уравнение

Многие исследователи [54] использовали параболическое уравнение в теории дифракции и распространения волн. С таким же успехом параболическое уравнение можно применять в теории распространения волн в случайно-неоднородных средах. Будем, как и ранее, считать, что слабые крупномасштабные случайные неоднородности находятся в правом полупространстве ($x > 0$). Из левого однородного полупространства ($x < 0$) падает плоская гармоническая волна

$$p_0 = A_0 \exp(ikx).$$

Поле p в правом полупространстве представим в виде

$$p = A(x, y, z) \exp(inx), \quad (30.1)$$

где $A(x, y, z)$ — комплексная амплитуда поля.

Поле p удовлетворяет волновому уравнению

$$\nabla^2 p + k^2(1 + \mu)^2 p = 0. \quad (30.2)$$

Заменив p на основании (30.1) в уравнении (30.2), получим для комплексной амплитуды $A(x, y, z)$ следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + 2ik \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + k^2(2\mu + \mu^2) A = 0. \quad (30.3)$$

Покажем, что в этом уравнении первым членом можно пренебречь по сравнению с остальными членами. С этой целью разобьем поле A на две части — среднее поле $\langle A \rangle$ и флуктуацию поля ΔA , полагая

$$A = \langle A \rangle + \Delta A. \quad (30.4)$$

В случае малых флуктуаций, пользуясь методом малых возмущений, обычно считают среднее поле $\langle A \rangle$ равным полю A_0 падающей невозмущенной волны, а флуктуационную часть поля ΔA находят в первом приближении метода, пренебрегая приближениями более высокого порядка и, следовательно, многократным рассеянием. В случае сильных флуктуаций нельзя пренебречь многократным рассеянием, поскольку второе и более высокие приближения в методе малых возмущений будут давать существенный вклад в среднее поле $\langle A \rangle$, вследствие чего оно не будет совпадать с полем A_0 падающей невозмущенной волны.

Как будет показано в дальнейшем, среднее поле убывает с расстоянием по экспоненциальному закону

$$\langle A \rangle = A_0 \exp(-\alpha' x), \quad (30.5)$$

где $\alpha' = \alpha/2$, α — коэффициент рассеяния, введенный в § 12 x — расстояние, пройденное волной в неоднородной среде. Этот результат представляется вполне естественным: поскольку интенсивность регулярного поля из-за рассеяния убывает по закону $\exp(-\alpha x)$, то амплитуда регулярного (среднего) поля убывает по закону $\exp(-\alpha x/2)$.

Заменим в уравнении (30.3) амплитуду A на основании формулы (30.4). Отбрасывая квадратичный член μ^2 в скобках в (30.3), получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \langle A \rangle}{\partial x^2} + 2ik \frac{\partial \langle A \rangle}{\partial x} + 2\mu k^2 \langle A \rangle + \frac{\partial^2 \Delta A}{\partial x^2} + 2ik \frac{\partial \Delta A}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Delta A}{\partial y^2} + \\ + \frac{\partial^2 \Delta A}{\partial z^2} + 2\mu k^2 \Delta A = 0. \end{aligned} \quad (30.6)$$

Оценим порядок величины членов, содержащих среднее поле $\langle A \rangle$. На основании (30.5) первый член в (30.6) имеет порядок $\alpha'^2 \langle A \rangle$, а второй — $k\alpha' \langle A \rangle$. Первым членом можно пренебречь по сравнению со вторым, если выполняется неравенство $\alpha'/k \ll 1$, т. е. рассеяние на длине волны мало.

Далее рассмотрим группу членов, содержащих флуктуационную часть поля ΔA . Легко показать, что первым членом $\partial^2 \Delta A / \partial x^2$ в этой группе можно пренебречь по сравнению с остальными членами. Действительно, в предыдущей главе было показано, что поперечная автокорреляция флуктуаций уровня и фазы, а следовательно и флуктуаций поля, простирается на расстояние порядка масштаба неоднородностей среды a , в то время как продольная автокорреляция — на расстояние порядка ka^2 . Поэтому первый член $\partial^2 \Delta A / \partial x^2$ по порядку величины будет равен $\Delta A / (ka^2)^2$. Поряд-

док величины второго члена $k\Delta A/ka^2 = \Delta A/a^2$. Третий и четвертый члены также имеют порядок $\Delta A/a^2$. Отношение первого члена к любому из последующих будет величиной порядка $1/ka$. Следовательно, в случае крупномасштабных неоднородностей ($ka \gg 1$) первый член $\partial^2 \Delta A / \partial x^2$ может быть отброшен.

Таким образом, можно отбросить оба члена в (30.6), содержащих вторую производную по продольной координате. Это эквивалентно отбрасыванию первого члена в уравнении (30.3), которое после этого приобретает вид:

$$2ik \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + 2k^2 \mu A = 0. \quad (30.7)$$

Итак, при описании поля плоской волны в среде с крупномасштабными неоднородностями ($ka \gg 1$) можно воспользоваться параболическим уравнением (30.7), если рассеяние на длине волны мало ($\alpha'/k \ll 1$).

§ 31. Границы применимости параболического уравнения

Условия применимости параболического уравнения ($ka \gg 1$, $\alpha'/k \ll 1$), сформулированные в предыдущем параграфе, являются условиями необходимыми, но не достаточными. Если они выполняются, то первый член $\partial^2 A / \partial x^2$ в уравнении (30.3) мал по сравнению с остальными и им можно пренебречь в дифференциальном уравнении. Однако пренебрежение малым членом в дифференциальном уравнении может привести к большой ошибке в решении дифференциального уравнения. Поэтому необходимо еще потребовать, чтобы решение параболического уравнения (30.7) мало отличалось от решения исходного волнового уравнения (30.2). Это требование, как будет сейчас показано, приводит к дополнительным ограничениям.

Перейдем от дифференциального уравнения (30.2) к интегральному уравнению (пренебрегая членом, пропорциональным μ^2):

$$p(x, y, z) = p_0(x, y, z) + \frac{k^2}{2\pi} \int_V p(\xi, \eta, \zeta) \mu(\xi, \eta, \zeta) \frac{e^{ikr}}{r} dv, \quad (31.1)$$

где

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2},$$

а интегрирование распространено на весь объем V , занятый неоднородностями.

Ради определенности будем считать, что неоднородности сосредоточены в слое толщиной L , неограниченно протяженном в поперечном направлении. В случае падающей плоской волны $p_0 = A_0 \exp(ikx)$. Вводя комплексную амплитуду с помощью равен-

ства (30.1), преобразуем уравнение (31.1) к виду:

$$A(x, y, z) = A_0 + \frac{k^2}{2\pi} \int_0^L d\xi \iint_{-\infty}^{+\infty} A(\xi, \eta, \zeta) \mu(\xi, \eta, \zeta) \times \\ \times \frac{\exp\{ik[r - (x - \xi)]\}}{r} d\eta d\zeta. \quad (31.2)$$

Теперь совершим аналогичный переход от параболического уравнения (30.7) к интегральному уравнению:

$$A(x, y, z) = A_0 + \frac{k^2}{2\pi} \int_0^x d\xi \iint_{-\infty}^{+\infty} A(\xi, \eta, \zeta) \mu(\xi, \eta, \zeta) \times \\ \times \frac{\exp[ik\rho^2/2(x - \xi)]}{x - \xi} d\eta d\zeta, \quad (31.3)$$

где

$$\rho^2 = (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2.$$

Уравнение (31.3) отличается от уравнения (31.2) в двух отношениях. Во-первых, функция $\frac{1}{r} \exp\{ik[r - (x - \xi)]\}$ в ядре уравнения (31.2) заменена в уравнении (31.3) функцией $\frac{1}{x - \xi} \exp\left[\frac{ik\rho^2}{2(x - \xi)}\right]$. Во-вторых, интегрирование в (31.3) распространено только на область $\xi < x$, в то время как в (31.2) на весь слой. Это означает, что параболическое уравнение учитывает рассеяние вперед и не учитывает рассеяния назад. Переход от волнового уравнения (30.2) к параболическому уравнению (30.7) в теории дифракции эквивалентен замене точного решения приближением Френеля (см. § 17).

Прежде всего выясним условия, при которых возможна приближенная замена функции $\frac{1}{r} \exp\{ik[r - (x - \xi)]\}$ функцией $\frac{1}{x - \xi} \exp\left[\frac{ik\rho^2}{2(x - \xi)}\right]$. С этой целью разложим функцию $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + \rho^2}$ в ряд по степеням малой величины $\rho/(x - \xi)$, по порядку величины равной $1/ka$. Тогда получим:

$$r = x - \xi + \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{x - \xi} - \frac{1}{8} \frac{\rho^4}{(x - \xi)^3} + \dots$$

В амплитуде функции $\frac{1}{r} \exp\{ik[r - (x - \xi)]\}$ величину r можно приближенно заменить величиной $x - \xi$. При вычислении фазы необходимо учитывать последующие члены разложения. Это дает:

$$k[r - (x - \xi)] = \frac{k\rho^2}{2(x - \xi)} - \frac{k\rho^4}{8(x - \xi)^3} + \dots$$

В правой части последнего равенства можно ограничиться первым членом, если только второй член мал по сравнению с π , т. е.

$kr^2/8 (x - \xi)^3 \ll \pi$. Учитывая, что

$$\frac{\rho}{x - \xi} \sim \frac{1}{ka},$$

и отбрасывая числовые множители, перепишем последнее неравенство следующим образом:

$$\frac{x - \xi}{k^2 a^2} \ll 1.$$

Поскольку $0 \leq \xi \leq x$, то неравенство будет выполняться при любом ξ , если оно выполняется при $\xi = 0$, т. е.

$$\frac{x}{k^2 a^2} \ll 1. \quad (31.4)$$

При заданных k и a неравенство (31.4) накладывает ограничение на дистанцию x , в пределах которой можно пользоваться параболическим уравнением. Перепишем неравенство (31.4) следующим образом:

$$\frac{x}{ka^2} \frac{1}{(ka)^2} \ll 1,$$

откуда следует, что в рассматриваемом случае крупномасштабных неоднородностей ($ka \gg 1$) неравенство (31.4) может выполняться и в зоне Фраунгофера ($x/ka^2 \gg 1$).

Как было указано выше, переход к параболическому уравнению связан с пренебрежением рассеянием в направлении, обратном направлению падающей волны, другими словами, с пренебрежением отражением от неоднородного слоя. Отражением от слоя можно пренебречь, если поток отраженной энергии мал по сравнению с потоком падающей энергии, т. е. коэффициент отражения R мал по сравнению с единицей ($R \ll 1$). Предполагая, что требуемое условие малости выполняется, воспользуемся для вычисления коэффициента отражения результатами § 12, полученными методом малых возмущений.

Формулой (12.3) определяется полный коэффициент рассеяния α , равный отношению энергии волн, рассеянных по всем направлениям из слоя единичной толщины, к энергии падающей волны. Нас же интересует коэффициент обратного рассеяния α_- , который может быть получен из формулы (12.3) при внесении в нее необходимых изменений. Во-первых, вместо радиального потока энергии волны, рассеянной на угол ϑ , необходимо взять составляющую этого потока в направлении, обратном оси x . Для этого в подынтегральное выражение (12.3) необходимо ввести множитель $-\cos \vartheta$. Во-вторых, интегрирование по ϑ в формуле (12.3) нужно ограничить пределами $\pi/2$ и π . Тогда формула (12.3) преобразуется к виду

$$\alpha_- = 2 \langle \mu^2 \rangle k^3 \int_0^\infty N(r) r dr \int_{\pi/2}^\pi \sin \left(2kr \sin \frac{\vartheta}{2} \right) \cos \frac{\vartheta}{2} (-\cos \vartheta) d\vartheta.$$

Выполнив интегрирование по ϑ , получим

$$\alpha_- = 2 \langle \mu^2 \rangle k^2 \int_0^\infty N(r) dr \left\{ -\cos 2kr + \frac{2}{kr} \left[\sin 2kr - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\sqrt{2}kr) \right] + \frac{1}{(kr)^2} [\cos 2kr - \cos(\sqrt{2}kr)] \right\}. \quad (31.5)$$

Если взять коэффициент корреляции в виде $N(r) = \exp(-r/a)$, то все интегралы в (31.5) легко приводятся к табличным [31] и для коэффициента обратного рассеяния α_- получается следующая окончательная формула:

$$\alpha_- = 2 \langle \mu^2 \rangle k \left(\frac{1}{2ka} \ln \frac{1 + 4k^2 a^2}{1 + 2k^2 a^2} - \frac{ka}{1 + 4k^2 a^2} \right),$$

справедливая при любом ka . Однако, поскольку параболическое уравнение пригодно только при больших ka , следует сразу перейти к асимптотическому выражению для α_- , полагая, что $ka \rightarrow \infty$. Тогда получим

$$\alpha_- = c \frac{\langle \mu^2 \rangle}{a}, \quad (31.6)$$

где $c = \ln 2 - 1/2 \simeq 0,2$.

Коэффициент α_- определяет относительную величину энергии, отраженной слоем единичной толщины. Коэффициент отражения R неоднородного слоя будет в L раз больше:

$$R = \alpha_- \cdot L.$$

На основании (31.6) условие малости отражения ($R \ll 1$) от неоднородного слоя окончательно запишется в виде следующего неравенства:

$$c \frac{\langle \mu^2 \rangle}{a} L \ll 1. \quad (31.7)$$

В реальных средах величина $\langle \mu^2 \rangle/a$ очень мала. Поэтому условие (31.7) выполняется для слоя очень большой толщины $L_{\max} \sim a/\langle \mu^2 \rangle$. Обычно волна затухает, не пройдя всей толщины слоя. Например, для приповерхностного слоя океана ($\langle \mu^2 \rangle \simeq 5 \cdot 10^{-9}$, $a \simeq 60$ см) величина $\langle \mu^2 \rangle/a$ имеет порядок 10^{-5} км⁻¹, т. е. условие (31.7) выполняется вплоть до $L_{\max} = 10^5$ км. Звуковая волна в океане затухает значительно раньше. В этом случае с условием (31.7) можно не считаться и применять параболическое уравнение к расчету поля в случайно-неоднородной среде, заполняющей все полупространство. Максимальная дистанция будет определяться неравенством (31.4), ранее полученным из других соображений.

§ 32. Локальный метод. Среднее поле

В основе локального метода лежит предположение, что в любом месте слабонеоднородной среды всегда можно выбрать отрезок Δx в направлении распространения волны, который удовлетворя-

ет одновременно двум условиям: 1) отрезок велик по сравнению с характерным масштабом неоднородностей a среды ($\Delta x \gg a$); 2) изменение поля на этом отрезке достаточно мало, так что при расчете изменения поля в пределах участка Δx с помощью параболического уравнения можно ограничиться первым приближением в методе малых возмущений.

Развитая в этом предположении теория случайных полей не накладывает ограничения малости на величину полного изменения поля вдоль трассы распространения волны и, следовательно, пригодна для расчета сильных флуктуаций поля.

Сформулированные выше условия придают этой теории некоторые черты сходства с теорией непрерывных марковских процессов. Как видно из дальнейшего, условия используются в сущности для нахождения коэффициентов в уравнениях для статистических моментов поля, в то время как аналогичные условия в теории марковских процессов используются для нахождения коэффициентов в уравнении Эйнштейна — Фоккера — Колмогорова.

Прежде всего применим локальный метод к простейшей задаче — нахождению среднего поля (статистического момента поля первого порядка) в случайно-неоднородной среде. С этой целью воспользуемся параболическим уравнением (30.7), переписав его в безразмерных координатах:

$$2i \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + 2\mu A = 0. \quad (32.1)$$

Штрихи, которыми в предыдущих главах отмечались безразмерные координаты $x' = kx$, $y' = ky$, $z' = kz$, здесь опущены.

Если флуктуации показателя преломления μ статистически однородны по пространству, то поле будет статистически однородно по поперечным координатам y и z и, следовательно, среднее значение поля не будет зависеть от этих координат. Учитывая это, после статистического усреднения уравнения (32.1) получим:

$$\frac{\partial \langle A \rangle}{\partial x} = i \langle \mu A \rangle. \quad (32.2)$$

Если случайные неоднородности сосредоточены в слое конечной толщины, то за пределами слоя $\mu = 0$ и $A = \text{const}$. Внутри слоя $\mu A \neq 0$, и, следовательно, среднее поле $\langle A \rangle$ изменяется с дистанцией. Воспользуемся локальным методом, чтобы выразить $\langle \mu A \rangle$ через среднее поле $\langle A \rangle$. С этой целью слева от плоскости $X = x$ проведем плоскость $X = x_0$ таким образом, чтобы расстояние $\Delta x = x - x_0$ было велико по сравнению с масштабом неоднородностей среды ($\Delta x \gg a$), но изменение поля на отрезке Δx было бы малым. Представим поле внутри элементарного слоя, заключенного между плоскостями, в виде ряда:

$$A = A^0 + A' + A'' + A''' + \dots, \quad (32.3)$$

где A^0 — поле, которое было бы в слое при отсутствии в нем неоднородностей, A' , A'' , A''' и т. д. — добавки к полю A^0 , вычисля-

емые соответственно в первом, втором, третьем и т. д. приближениях метода малых возмущений.

Вследствие параболичности уравнения (32.1) поле $A^0(\xi, \eta, \zeta)$ нулевого приближения в слое однозначно определяется истинным полем $A(x_0, y, z)$ на входе в слой (в плоскости $X = x_0$). Действительно, полагая в этом уравнении $\mu = 0$ и решая его, запишем нулевое приближение $A^0(\xi, \eta, \zeta)$ в виде:

$$A^0(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi i (\xi - x_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} A(x_0, y, z) \exp\left[\frac{i\rho^2}{2(\xi - x_0)}\right] dy dz,$$

где $\rho^2 = (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2$. Полагая в формуле $\xi = x$, получим поле $A(x, \eta, \zeta)$ на выходе из слоя.

С помощью нулевого приближения A^0 может быть вычислен любой член ряда (32.3). Так, например, для первого приближения из (32.1) вытекает следующее неоднородное уравнение:

$$2i \frac{\partial A'}{\partial x} + \frac{\partial^2 A'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A'}{\partial z^2} + 2\mu A^0 = 0. \quad (32.4)$$

Решение уравнения (32.4) имеет вид:

$$A'(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{x - \xi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \frac{i\rho^2}{2(x - \xi)} \mu(\xi, \eta, \zeta) A^0(\xi, \eta, \zeta) d\eta d\zeta. \quad (32.5)$$

В соответствии с основной идеей локального метода, при вычислении величины $\langle \mu A \rangle$ достаточно использовать в (32.3) члены не выше первого порядка малости. Пренебрегая в (32.3) членами более высокого порядка, представим $\langle \mu A \rangle$ в следующем виде:

$$\mu(x, y, z) A(x, y, z) = \mu(x, y, z) A^0(x, y, z) + \mu(x, y, z) A'(x, y, z). \quad (32.6)$$

Прежде чем двигаться дальше, сделаем важное замечание. Флуктуации поля обусловлены только теми неоднородностями среды, через которые волна прошла. Из определения поля нулевого приближения A^0 следует, что его флуктуации обусловлены неоднородностями среды, лежащими слева от плоскости $X = x_0$, или неоднородностями $\mu(\xi, \eta, \zeta)$, лежащими справа от этой плоскости на расстоянии $\xi - x_0 \sim a$. Между этими неоднородностями и полем нулевого приближения имеется статистическая связь. Если же неоднородности $\mu(\xi, \eta, \zeta)$ лежат справа от плоскости $X = x_0$ на расстоянии $\xi - x_0 \gg a$, то статистическая связь между неоднородностями и полем A^0 отсутствует. Этому условию, в частности, удовлетворяют неоднородности, расположенные на выходе из слоя.

На основании сказанного первый член в (32.6) обращается в нуль:

$$\langle \mu(x, y, z) A^0(x, y, z) \rangle = \langle \mu(x, y, z) \rangle \langle A^0(x, y, z) \rangle = 0.$$

Второй член в (32.6) на основании (32.5) приобретает вид:

$$\langle \mu(x, y, z) A'(x, y, z) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{x-\xi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \langle \mu(x, y, z) \mu(\xi, \eta, \zeta) \times \\ \times A^0(\xi, \eta, \zeta) \rangle \exp \frac{ip^2}{2(x-\xi)} d\eta d\zeta. \quad (32.7)$$

Рассмотрим выражение

$$\langle \mu(x, y, z) \mu(\xi, \eta, \zeta) A^0(\xi, \eta, \zeta) \rangle, \quad (32.8)$$

содержащееся под интегралом в формуле (32.7). В этом выражении первый и последний множители статистически независимы. Второй и третий множители также статистически независимы всюду, за исключением области $\xi - x_0 \sim a$. Поэтому вне области $\xi - x_0 \sim a$ выражение (32.8) приобретает вид

$$\langle \mu(x, y, z) \mu(\xi, \eta, \zeta) \rangle \langle A^0(\xi) \rangle. \quad (32.9)$$

С другой стороны, в области $\xi - x_0 \sim a$ статистически независимы первый и второй множители, так как здесь $x - \xi \gg a$. Поэтому выражение (32.8) обращается в нуль. Действительно,

$$\langle \mu(x, y, z) \mu(\xi, \eta, \zeta) A^0(\xi, \eta, \zeta) \rangle = \\ = \langle \mu(x, y, z) \rangle \langle \mu(\xi, \eta, \zeta) A^0(\xi, \eta, \zeta) \rangle = 0.$$

Таким образом, всюду в области интегрирования ($x_0 \leq \xi \leq x$) выражение (32.8) может быть заменено выражением (32.9).

Вводя коэффициент корреляции флуктуаций показателя преломления

$$N(x - \xi, y - \eta, z - \zeta) = \frac{\langle \mu(x, y, z) \mu(\xi, \eta, \zeta) \rangle}{\langle \mu^2 \rangle},$$

перепишем (32.7) в виде

$$\langle \mu(x, y, z) A(x, y, z) \rangle = \frac{\langle \mu^2 \rangle}{2\pi} \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{x-\xi} \iint_{-\infty}^{+\infty} N(x - \xi, y - \eta, z - \zeta) \times \\ \times \langle A^0(\xi) \rangle \exp \left[\frac{ip^2}{2(x-\xi)} \right] d\eta d\zeta.$$

В нулевом приближении среднее поле $A^0(\xi)$ постоянно в области интегрирования. Следовательно, $\langle A^0(\xi) \rangle = \langle A^0(x) \rangle$. Вынося эту постоянную за знак интеграла, получим

$$\langle \mu(x, y, z) A'(x, y, z) \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \mu^2 \rangle \langle A^0(x) \rangle \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{x-\xi} \times \\ \times \iint_{-\infty}^{+\infty} N(x - \xi, y - \eta, z - \zeta) \exp \left[\frac{ip^2}{2(x-\xi)} \right] d\eta d\zeta. \quad (32.10)$$

Поскольку множитель N изменяется медленно по сравнению с экспоненциальным, при вычислении двукратного интеграла по переменным η и ζ методом стационарной фазы можно ограничиться первым приближением. Тогда

$$\langle \mu(x, y, z) A'(x, y, z) \rangle = i \langle \mu^2 \rangle \langle A^0(x) \rangle \int_{ix_0}^x N(x - \xi, 0, 0) d\xi.$$

Вводя новую переменную $\xi' = x - \xi$ и учитывая, что один из пределов интегрирования по этой переменной можно удалить в бесконечность, получим:

$$\langle \mu(x, y, z) A'(x, y, z) \rangle = i \alpha' \langle A^0(x) \rangle, \quad (32.11)$$

где

$$\alpha' = \langle \mu^2 \rangle \int_0^{\infty} N(\xi, 0, 0) d\xi. \quad (32.12)$$

На основании (32.11) уравнение (32.2) приобретает вид:

$$\frac{d \langle A \rangle}{dx} = - \alpha' \langle A^0(x) \rangle. \quad (32.13)$$

Заменяем $\langle A^0(x) \rangle$ через $\langle A(x) \rangle$, что связано с погрешностью, которая будет в дальнейшем оценена. Тогда уравнение (32.13) примет следующий окончательный вид:

$$\frac{d \langle A \rangle}{dx} = - \alpha' \langle A(x) \rangle. \quad (32.14)$$

Таким образом, получено простое дифференциальное уравнение для среднего поля. Его решение имеет вид

$$\langle A \rangle = e^{-\alpha' x}, \quad (32.15)$$

если амплитуду падающей волны положить равной единице. Коэффициент затухания среднего поля определяется формулой (32.12).

Покажем, что относительная ошибка, обусловленная заменой $\langle A^0(x) \rangle$ на $\langle A(x) \rangle$ в уравнении (32.13), будет величиной порядка $\alpha' \Delta x$. Усредняя почленно ряд (32.3), найдем:

$$\langle A \rangle = \langle A^0 \rangle + \langle A' \rangle + \langle A'' \rangle + \langle A''' \rangle + \dots$$

Как видно из (32.5), A' является линейным функционалом от μ . Поэтому $\langle A' \rangle = 0$.

Отличие $\langle A^0 \rangle$ от $\langle A \rangle$ будет определяться членом $\langle A'' \rangle$ второго приближения. Займемся его вычислением. Второе приближение A'' удовлетворяет уравнению

$$2i \frac{\partial A''}{\partial x} + \frac{\partial^2 A''}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A''}{\partial z^2} + 2\mu A' = 0,$$

решение которого имеет вид:

$$A''(x, y, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{x-\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \frac{i\rho^2}{2(x-\xi)} \mu(\xi, \eta, \zeta) A'(\xi, \eta, \zeta) d\eta d\zeta.$$

Заменяя здесь A' на основании (32.5) и усредняя, получим:

$$\begin{aligned} \langle A''(x) \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{x-\xi} \int_{x_0}^{\xi} \frac{d\xi_1}{\xi-\xi_1} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[\frac{i\rho^2}{2(x-\xi)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{i\rho_1^2}{2(\xi-\xi_1)} \right] \langle \mu(\xi, \eta, \zeta) \mu(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) A^0(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) \rangle \times \\ &\quad \times d\eta d\zeta d\eta_1 d\zeta_1, \end{aligned} \quad (32.16)$$

где $\rho_1^2 = (\eta - \eta_1)^2 + (\zeta - \zeta_1)^2$.

Второе приближение — нелинейный функционал от μ . Рассмотрим выражение

$$\langle \mu(\xi, \eta, \zeta) \mu(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) A^0(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) \rangle. \quad (32.17)$$

Второй и третий множители статистически независимы всюду, за исключением области $\xi_1 - x_0 \sim a$. Вне этой области статистически независимы также первый и последний множители.

Таким образом, вне области $\xi_1 - x_0 \sim a$ можно преобразовать (32.17) к виду:

$$\begin{aligned} \langle \mu(\xi, \eta, \zeta) \mu(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) A^0(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) \rangle &= \langle \mu(\xi, \eta, \zeta) \mu(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) \rangle \times \\ &\times \langle A^0(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) \rangle = \langle \mu^2 \rangle N(\xi - \xi_1, \eta - \eta_1, \zeta - \zeta_1) A^0(\xi_1). \end{aligned} \quad (32.18)$$

Область $\xi_1 - x_0 \sim a$, где такое преобразование невозможно, мала по сравнению с толщиной слоя $\Delta x = x - x_0$ ($\Delta x \gg a$). Поэтому можно считать, что преобразование (32.18) возможно всюду внутри слоя, включая и область $\xi_1 - x_0 \sim a$. Совершаемая при этом ошибка будет малой величиной порядка $a/\Delta x$.

На основании (32.18) формула (32.16) приобретает вид:

$$\begin{aligned} \langle A''(x) \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^2} \langle \mu^2 \rangle \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{x-\xi} \int_{x_0}^{\xi} \frac{d\xi_1}{\xi-\xi_1} \iiint \exp \left[\frac{i\rho^2}{2(x-\xi)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{i\rho_1^2}{2(\xi-\xi_1)} \right] N(\xi - \xi_1, \eta - \eta_1, \zeta - \zeta_1) \langle A^0(\xi_1) \rangle d\eta d\zeta d\eta_1 d\zeta_1. \end{aligned}$$

Применяя метод стационарной фазы при вычислении интегралов по переменным $\eta, \zeta, \eta_1, \zeta_1$, получим:

$$\langle A''(x) \rangle = - \langle A^0(x) \rangle \langle \mu^2 \rangle \int_{x_0}^x d\xi \int_{x_0}^{\xi} N(\xi - \xi_1, 0, 0) d\xi_1.$$

Вводя новую переменную $\xi' = \xi - \xi_1$ вместо переменной ξ_1 , преобразуем двойной интеграл к виду:

$$\int_{x_0}^x d\xi \int_0^{\xi-x_0} N(\xi') d\xi'.$$

Полагая в последнем интеграле

$$u(\xi) = \int_0^{\xi-x_0} N(\xi') d\xi', \quad dv = d\xi,$$

проинтегрируем его по частям. Тогда получим

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x d\xi \int_{x_0}^{\xi} N(\xi - \xi_1, 0, 0) d\xi_1 &= (x - x_0) \int_0^{x-x_0} N(\xi', 0, 0) d\xi' - \\ &- \int_0^{x-x_0} \xi' N(\xi', 0, 0) d\xi'. \end{aligned} \quad (32.19)$$

По порядку величины интегралы в правой части равны соответственно a и a^2 . Следовательно, по порядку величины первый член в (32.19) равен $(x - x_0) a$, в то время как второй — a^2 . Пренебрегая вторым членом по сравнению с первым, получим

$$\langle A''(x) \rangle = -\alpha' \Delta x \langle A^0(x) \rangle. \quad (32.20)$$

Теперь легко оценить погрешность, обусловленную заменой $\langle A^0(x) \rangle$ на $\langle A(x) \rangle$ в правой части уравнения (32.13). На основании (32.20) имеем

$$\langle A(x) \rangle = \langle A^0(x) \rangle - \alpha' \Delta x \langle A^0(x) \rangle = (1 - \alpha' \Delta x) \langle A^0(x) \rangle. \quad (32.21)$$

Из последней формулы видно, что замена $\langle A^0(x) \rangle$ на $\langle A(x) \rangle$ возможна, если $\alpha' \Delta x \ll 1$, т. е. мало рассеяние волн элементарным слоем Δx .

Если флуктуации μ показателя преломления среды распределены нормально, то условие применимости уравнения (32.14) для среднего поля будет еще более слабым. Дело в том, что при выводе этого уравнения из уравнения (32.2) при вычислении величины $\langle \mu A \rangle$ был учтен только член $\langle \mu A' \rangle$ второго порядка малости относительно μ , как это видно из формулы (32.6). Если учесть член более высокого порядка малости, то он скомпенсирует член, пропорциональный Δx , в формуле (32.21).

В случае нормального распределения член $\langle \mu A'' \rangle$ третьего порядка относительно μ обращается в нуль. Первым отличным от нуля будет член $\langle \mu A''' \rangle$ четвертого порядка относительно μ , имею-

щий следующий вид:

$$\begin{aligned} \langle \mu(x, y, z) A'''(x, y, z) \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{x_0 x_0 x_0}^{x \xi \xi_1} \frac{d\xi d\xi_1}{(x-\xi)(x-\xi_1)(\xi_1-\xi_2)} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int \exp \left[\frac{i\rho^2}{2(x-\xi)} + \frac{i\rho_1^2}{2(\xi-\xi_1)} + \frac{i\rho_2^2}{2(\xi_1-\xi_2)} \right] \langle \mu(x, y, z) \times \\ &\times \mu(\xi, \eta, \zeta) \mu(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) \mu(\xi_2, \eta_2, \zeta_2) A^0(\xi_2, \eta_2, \zeta_2) \rangle \times \\ &\times d\eta d\zeta d\eta_1 d\zeta_1 d\eta_2 d\zeta_2, \end{aligned}$$

где $\rho_2^2 = (\eta_1 - \eta_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2)^2$.

Переменные интегрирования внутри интервала $x - x_0$ удовлетворяют условиям

$$x_0 \leq \xi_2 \leq \xi_1 \leq \xi \leq x. \quad (32.22)$$

Применяя метод стационарной фазы при вычислении интегралов по переменным $\eta, \zeta, \eta_1, \xi_1, \eta_2, \zeta_2$ и учитывая, что μ и A статистически независимы всюду, кроме пренебрежимо малой области $\xi_2 - x_0 \sim a$, получим

$$\langle \mu(x) A'''(x) \rangle = \frac{1}{i} \langle A^0(x) \rangle \iiint_{x_0 x_0 x_0}^{x \xi \xi_1} \langle \mu(x) \mu(\xi) \mu(\xi_1) \mu(\xi_2) \rangle d\xi d\xi_1 d\xi_2. \quad (32.23)$$

В случае нормального распределения момент четвертого порядка выражается через моменты второго порядка следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle \mu(x) \mu(\xi) \mu(\xi_1) \mu(\xi_2) \rangle &= \langle \mu(x) \mu(\xi) \rangle \langle \mu(\xi_1) \mu(\xi_2) \rangle + \\ &+ \langle \mu(x) \mu(\xi_1) \rangle \langle \mu(\xi) \mu(\xi_2) \rangle + \langle \mu(x) \mu(\xi_2) \rangle \langle \mu(\xi) \mu(\xi_1) \rangle. \end{aligned} \quad (32.24)$$

В соответствии с (32.24) интеграл в (32.23) распадается на три интеграла, и формула (32.23) может быть записана в следующем виде:

$$\langle \mu(x) A'''(x) \rangle = \frac{1}{i} \langle A^0(x) \rangle \langle \mu^2 \rangle^2 (I_1 + I_2 + I_3), \quad (32.25)$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \iiint_{x_0 x_0 x_0}^{x \xi \xi_1} N(x - \xi, 0, 0) N(\xi_1 - \xi_2, 0, 0) d\xi d\xi_1 d\xi_2, \\ I_2 &= \iiint_{x_0 x_0 x_0}^{x \xi \xi_1} N(x - \xi_1, 0, 0) N(\xi - \xi_2, 0, 0) d\xi d\xi_1 d\xi_2, \\ I_3 &= \iiint_{x_0 x_0 x_0}^{x \xi \xi_1} N(x - \xi_2, 0, 0) N(\xi - \xi_1, 0, 0) d\xi d\xi_1 d\xi_2. \end{aligned} \quad (32.26)$$

Легко показать, что только в интеграле I_1 содержится член, пропорциональный Δx . Займемся вычислением этого интеграла. Двукратный интеграл по переменным ξ_1 и ξ_2 в (32.26) совпадает с ранее вычисленным интегралом (32.19). На основании (32.19) имеем

$$\int_{x_0}^{\xi} d\xi_1 \int_{x_0}^{\xi_1} N(\xi_1 - \xi_2, 0, 0) d\xi_2 = (\xi - x_0) \int_0^{\xi - x_0} N(\xi', 0, 0) d\xi' - \int_0^{\xi - x_0} \xi' N(\xi', 0, 0) d\xi',$$

откуда

$$I_1 = \int_{x_0}^x d\xi N(x - \xi, 0, 0) (\xi - x_0) \int_0^{\xi - x_0} N(\xi', 0, 0) d\xi' - \int_{x_0}^x d\xi N(x - \xi, 0, 0) \int_0^{\xi - x_0} \xi' N(\xi', 0, 0) d\xi'. \quad (32.27)$$

Из-за присутствия множителя $N(x - \xi, 0, 0)$ область существенных значений ξ удовлетворяет условию $x - \xi \sim a$, т. е. разность $x - \xi$ мала по сравнению с толщиной $x - x_0$ элементарного слоя, что позволяет заменить всюду разность $\xi - x_0$ разностью $x - x_0$. Совершаемая при этом ошибка будет величиной порядка $a/\Delta x$. После такой замены вторым членом в формуле (32.27) можно пренебречь. Вводя новую переменную $\xi'' = x - \xi$, получим

$$I_1 = (x - x_0) \int_0^{x - x_0} N(\xi', 0, 0) d\xi' \int_0^{x - x_0} N(\xi'', 0, 0) d\xi''.$$

Заменяя верхние пределы интегралов бесконечными пределами, окончательно получим

$$I_1 = (x - x_0) \int_0^{\infty} N(\xi', 0, 0) d\xi' \int_0^{\infty} N(\xi'', 0, 0) d\xi''.$$

Найденный член пропорционален Δx . На основании (32.25) и (32.12) он дает в правой части уравнения (32.2) добавочный член $\alpha'^2 \Delta x \langle A^0(x) \rangle$, компенсирующий член, возникающий в правой части уравнения (32.13) в результате замены $\langle A^0(x) \rangle$ на $\langle A(x) \rangle$ с помощью соотношения (32.21).

Интеграл I_1 по порядку величины равен $\Delta x a^2$. Легко видеть, что интегралы I_2 и I_3 по порядку величины равны a^3 . Оценим порядок величины интеграла I_2 . Из-за наличия множителя $N(x - \xi_1, 0, 0)$ область существенных значений ξ_1 заключена в интервале от $\xi_1 = x - a$ до $\xi_1 = x$. Поэтому интегрирование по переменной ξ_1 дает величину порядка a . В силу условий (32.22) переменная ξ

заключена между ξ_1 и x , т. е. интервал изменения ξ не превышает интервала изменения ξ_1 . Следовательно, интегрирование по ξ еще раз дает величину порядка a . Наличие множителя $N(\xi - \xi_2, 0, 0)$ ограничивает интервал существенных значений переменной ξ_2 при фиксированном ξ пределами $\xi_2 \approx \xi - a$ и $\xi_2 = \xi$. Поэтому интегрирование по переменной ξ_2 при фиксированном ξ дает в третий раз величину порядка a .

Еще проще показать, что интеграл I_3 по порядку величины равен a^3 . Наличие множителя $N(x - \xi_2, 0, 0)$ ограничивает область существенных значений переменной ξ_2 . Интервалы изменения переменных ξ и ξ_1 не превышают интервала изменения переменной ξ_2 . Интегрирование по каждой из трех переменных дает величину порядка a .

Таким образом, добавочные члены вида $\alpha'^2 \Delta x \langle A^0(x) \rangle$, пропорциональные Δx , в уравнении для среднего поля взаимно уничтожаются и остаются лишь члены вида $\alpha'^2 a \langle A^0(x) \rangle$, пропорциональные a . Оставшимися членами можно пренебречь по сравнению с членом $\alpha' \langle A^0(x) \rangle$ в уравнении (32.13), если выполняется условие $\alpha' a \ll 1$, что означает малость рассеяния на масштабе неоднородностей.

В заключение заметим, что в диаграммной технике, широко используемой в теории многократного рассеяния [22], интеграл I_1 соответствует слабо связанной диаграмме, а интегралы I_2 и I_3 — сильно связанным. Приведенные оценки показывают, что в случае крупномасштабных неоднородностей ($ka \gg 1$) интегралы I_2 и I_3 малы по сравнению с интегралом I_1 .

§ 33. Статистические моменты поля второго порядка

Переходя к статистическим моментам второго порядка, составим уравнения для поперечных корреляционных функций:

$$R = \langle A_1 A_2^* \rangle, \quad (33.1)$$

$$U = \langle A_1 A_2 \rangle, \quad (33.2)$$

где звездочкой отмечена комплексно-сопряженная величина, удовлетворяющая сопряженному по отношению к (32.1) уравнению

$$-2i \frac{\partial A^*}{\partial x} + \frac{\partial^2 A^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A^*}{\partial z^2} + 2\mu A^* = 0. \quad (33.3)$$

Поскольку поле статистически однородно по координатам y и z , введенные функции будут зависеть только от относительных координат η и ζ ,

$$\eta = y_1 - y_2, \quad \zeta = z_1 - z_2,$$

и не будут зависеть от координат центра тяжести y_0 и z_0 ,

$$y_0 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \quad z_0 = \frac{1}{2}(z_1 + z_2).$$

Если записать уравнение (32.1) для точки (x, y_1, z_1) и умножить его на A_2^* , а уравнение (33.3) — для точки (x, y_2, z_2) и умножить на A_1 , далее усреднить оба уравнения, а затем из первого уравнения вычесть второе и перейти к координатам относительным и центра тяжести, то получим, учитывая независимость $\langle A_1 A_2^* \rangle$ от координат y_0 и z_0 , следующее уравнение:

$$i \frac{\partial}{\partial x} \langle A_1 A_2^* \rangle + \langle \mu_1 A_1 A_2^* \rangle - \langle \mu_2 A_2^* A_1 \rangle = 0. \quad (33.4)$$

Прежде чем предпринимать дальнейшие преобразования уравнения (33.4), рассмотрим два частных следствия. Допустим, что две точки (x, y_1, z_1) и (x, y_2, z_2) сливаются в одну. Тогда $\mu_1 = \mu_2$, $A_1 = A_2 = A$ и два последних члена в (33.3) взаимно уничтожаются. Из уравнения (33.4) следует:

$$\langle A A^* \rangle = 1, \quad (33.5)$$

т. е. средняя плотность потока энергии волны сохраняется. Этот результат можно было предвидеть, так как использование параболического уравнения связано с пренебрежением отраженной волной.

Разбив полное поле A на среднее поле $\langle A \rangle$ и флуктуационную часть поля ΔA согласно равенству

$$A = \langle A \rangle + \Delta A,$$

из (32.15) и (33.5) получаем

$$\langle \Delta A \Delta A^* \rangle = 1 - e^{-2\alpha'x}. \quad (33.6)$$

Таким образом, с ростом дистанции амплитуда флуктуаций поля стремится к «насыщению», в то время как метод плавных возмущений приводит к монотонному нарастанию флуктуаций с дистанцией. В действительности монотонная зависимость флуктуаций поля от дистанции имеет место только в области малых флуктуаций, когда $2\alpha'x \ll 1$. В этом случае (33.6) дает:

$$\langle \Delta A \Delta A^* \rangle \approx 2\alpha'x.$$

Другое следствие из уравнения (33.4) можно получить, если предположить, что неоднородности сосредоточены в слое конечной толщины L , за пределами которого $\mu = 0$. В этом случае из (33.4) следует:

$$\langle A_1 A_2^* \rangle \equiv \langle A_1 A_2^* \rangle_{x=L},$$

т. е. известный результат, согласно которому корреляционная функция $\langle A_1 A_2^* \rangle$ за слоем не изменяет своего вида.

Чтобы судить об изменении корреляционной функции поля под влиянием рассеяния, выполним дальнейшие преобразования уравнения (33.4), используя локальный метод. Второй член в этом уравнении на основании (32.3) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle \mu_1 A_1 A_2^* \rangle &= \langle \mu_1 A_1^0 A_2^{*0} \rangle + \langle \mu_1 A_1' A_2^{*0} \rangle + \langle \mu_1 A_1^0 A_2^{*'} \rangle + \\ &+ \langle \mu_1 A_1' A_2^{*'} \rangle. \end{aligned} \quad (33.7)$$

Здесь первый член обращается в нуль в силу статистической независимости флуктуаций показателя преломления μ_1 и поля A_1^0 (или A_2^{*0}). Последним членом можно пренебречь как величиной более высокого порядка малости при локальном применении метода малых возмущений. Второй член в (33.7) на основании (32.5) запишется так:

$$\langle \mu_1 A_1' A_2^{*0} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{x-\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \mu(x, y_1, z_1) \mu(\xi, \eta, \zeta) A^0(\xi, \eta, \zeta) \times \\ \times A^{*0}(x, y_2, z_2) \rangle \exp \frac{i\rho_1^2}{2(x-\xi)} d\eta d\zeta, \quad (33.8)$$

где $\rho_1^2 = (y_1 - \eta)^2 + (z_1 - \zeta)^2$.

Рассмотрим теперь выражение

$$\langle \mu(x, y_1, z_1) \mu(\xi, \eta, \zeta) A^0(\xi, \eta, \zeta) A^{*0}(x, y_2, z_2) \rangle, \quad (33.9)$$

содержащееся под интегралом в формуле (33.8). Представим его в виде произведения трех сомножителей: $\mu(x, y_1, z_1)$, $\mu(\xi, \eta, \zeta)$ и $A^0(\xi, \eta, \zeta) A^{*0}(x, y_2, z_2)$. Первый и третий сомножители статистически независимы, второй и третий — статистически независимы всюду, за исключением области $\zeta - x_0 \sim a$. Поэтому вне области $\xi - x_0 \sim a$ выражение (33.9) приобретает вид:

$$\langle \mu(x, y_1, z_1) \mu(\xi, \eta, \zeta) A^0(\xi, \eta, \zeta) A^{*0}(x, y_2, z_2) \rangle = \\ = \langle \mu(x, y_1, z_1) \mu(\xi, \eta, \zeta) \rangle \langle A^0(\xi, \eta, \zeta) A^{*0}(x, y_2, z_2) \rangle. \quad (33.10)$$

С другой стороны, в области $\xi - x_0 \sim a$ статистически независимы первый и второй множители. Поэтому выражение (33.9) обращается в нуль.

Таким образом, всюду в области интегрирования ($x_0 \leq \xi \leq x$) выражение (33.9) может быть заменено выражением (33.10). В соответствии с (33.1) последний множитель в (33.10) представляет собой корреляционную функцию R_0 полей нулевого приближения в точках (ξ, η, ζ) и (x, y_2, z_2) . Ее можно заменить поперечной корреляционной функцией, полагая $\xi = x$, так как смещение в продольном направлении на расстояние $x - \xi \sim a$ мало по сравнению с продольным радиусом корреляции a^2 приблизительно однонаправленного поля.

Учитывая сказанное, запишем (33.8) так:

$$\langle \mu_1 A_1' A_2^{*0} \rangle = \frac{\langle \mu^2 \rangle}{2\pi} \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{x-\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} N(x-\xi, y_1-\eta, z_1-\zeta) \times \\ \times R^0(x, y_2-\eta, z_2-\zeta) \exp \frac{i\rho_1^2}{2(x-\xi)} dy d\zeta.$$

Используя метод стационарной фазы при вычислении интегралов

по переменным η и ζ , получим

$$\langle \mu_1 A'_1 A_2^{*0} \rangle = i\alpha' R^0(x, y_1 - y_2, z_1, -z_2) = i\alpha' R^0(x, \eta, \zeta), \quad (33.11)$$

где α' определяется формулой (32.12). Таким же способом вычисляется в (33.7) третий член;

$$\langle \mu_1 A^0_1 A_2^{*'} \rangle = -i\alpha' \delta(\eta, \zeta) R^0(x, \eta, \zeta).$$

Он отличается от предыдущего наличием множителя δ , определяемого следующей формулой:

$$\delta(\eta, \zeta) = \frac{\int_0^\infty N(\xi, \eta, \zeta) d\xi}{\int_0^\infty N(\xi, 0, 0) d\xi}. \quad (33.12)$$

Функцию $\delta(\eta, \zeta)$ можно считать заданной, если заданы статистические свойства среды. Из (33.12) видно, что $\delta(0, 0) = 1$.

Применяя локальный метод, можно вычислить третий член в (33.4) и показать, что он отличается от второго только знаком. Поэтому уравнение (33.4) запишется так:

$$\frac{\partial R}{\partial x} + 2\alpha'(1 - \delta)R^0 = 0. \quad (33.13)$$

Остается заменить R^0 на R . Тогда последнее уравнение запишется в следующем окончательном виде:

$$\frac{\partial R}{\partial x} + 2\alpha'(1 - \delta)R = 0. \quad (33.14)$$

Таким образом, получено простое дифференциальное уравнение для корреляционной функции $R(x, \eta, \zeta)$, содержащее заданную функцию $\delta(\eta, \zeta)$. Интегрируя это уравнение и используя начальное условие $R = 1$ при $x = 0$, получим:

$$R(x, \eta, \zeta) = \exp(-2\alpha'[1 - \delta(\eta, \zeta)]x). \quad (33.15)$$

Из формулы (33.15) видно, что с дистанцией (при фиксированных η и ζ) коэффициент корреляции и, следовательно, радиус корреляции поля уменьшаются, что связано с уширением углового спектра рассеянных волн.

Легко показать, что развиваемая теория учитывает не только первичное рассеяние регулярного поля, но и вторичное рассеяние случайного поля. Действительно, заменим в (33.14) корреляционную функцию R полного поля корреляционной функцией $r = \langle \Delta A_1 \Delta A_2^* \rangle$ случайного поля на основании равенства $R = r + \langle A \rangle^2$. Учитывая (32.15), получим

$$\frac{\partial r}{\partial x} = 2\alpha'\delta \langle A \rangle^2 - 2\alpha'(1 - \delta)r,$$

откуда следует, что корреляционная функция r случайного поля изменяется вследствие первичного рассеяния регулярного поля

$\langle A \rangle$ и вторичного рассеяния случайного поля ΔA . Первичное рассеяние увеличивает общую энергию рассеянных волн, не изменяя ее углового распределения. Вторичное рассеяние приводит к уширению углового спектра рассеянных волн.

Для другой поперечной корреляционной функции $U(x, \eta, \zeta)$, определяемой (33.2), с помощью локального метода можно получить уравнение

$$\frac{\partial U}{\partial x} - i \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} \right) + 2\alpha'(1 + \delta)U = 0, \quad (33.16)$$

решение которого должно удовлетворять начальному условию $U = 1$ при $x = 0$ и условию $U \rightarrow \exp(-2\alpha'x)$ при $\eta \rightarrow \infty$ (или $\zeta \rightarrow \infty$). Последнее вытекает из равенства

$$U = \langle A_1 A_2 \rangle = \langle A \rangle^2 + \langle \Delta A_1 \Delta A_2 \rangle,$$

если учесть, что корреляция флуктуаций поля стремится к нулю при удалении точек друг от друга, а среднее поле $\langle A \rangle$ определяется (32.15).

Замена R_0 на R в уравнении (33.13) связана с погрешностью, величину которой можно оценить, если воспользоваться соотношением

$$R^0 = R + \alpha'(1 - \delta_{12})\Delta x R^0,$$

в котором учтены члены, пропорциональные Δx , и отброшены члены, пропорциональные a . Как видно из этого соотношения, относительная погрешность равна $\alpha'(1 - \delta_{12})^2 \Delta x$. Относительная погрешность, обусловленная заменой U^0 на U , которую приходится делать при выводе уравнения (33.16), равна $\alpha'(1 + \delta_{12}) \Delta x$. В обоих случаях погрешность будет мала, если мало рассеяние элементарным слоем ($\alpha' \Delta x \ll 1$).

Если флуктуации показателя преломления распределены нормально, то все члены, пропорциональные Δx , взаимно компенсируются и могут остаться только члены, пропорциональные a . В этом случае условие применимости уравнений для вторых моментов R и U сводится к требованию малости рассеяния на масштабе неоднородностей ($\alpha' a \ll 1$).

Все сказанное здесь относительно погрешностей может быть проверено прямыми вычислениями или получено как частный случай из выполненного в дальнейшем более общего рассмотрения, относящегося к моментам любого порядка.

Уравнения (33.14) и (33.16) для корреляционных моментов и формула (33.15) были получены также в работе [55], но несколько иным способом. В работе [56] методом итерации найдена функция взаимной когерентности полей, определяемая формулой (33.15), и сформулированы условия применимости этой формулы, аналогичные условиям настоящей работы ($\Delta x \gg a$, $\alpha \Delta x \ll 1$).

§ 34. Малые флуктуации

В случае малых флуктуаций можно упростить уравнение (33.16) и найти его решение. Введем корреляционную функцию флуктуаций поля $u = \langle \Delta A_1 \Delta A_2 \rangle$, которая связана с корреляционной функцией полного поля $U = \langle A_1, A_2 \rangle$ соотношением

$$U = \langle A \rangle^2 + u. \quad (34.1)$$

Подставив в уравнение (33.16) вместо функции U ее выражение (34.1), с помощью (32.15) найдем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - i \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} \right) + 2\alpha' \delta_{12} \langle A \rangle^2 + 2\alpha' (1 + \delta_{12}) u = 0.$$

Далее введем новую функцию φ , связанную с u соотношением

$$u = \varphi \exp(-2\alpha' x). \quad (34.2)$$

Функция φ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} - i \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} \right) + 2\alpha' \delta_{12} + 2\alpha' \delta_{12} \varphi = 0.$$

В случае малых флуктуаций в этом уравнении можно пренебречь последним членом, квадратичным относительно α' . Тогда уравнение приобретает следующий окончательный вид:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} - i \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} \right) = -2\alpha' \delta_{12}.$$

Таким образом, задача сводится к отысканию решения линейного параболического уравнения с правой частью. Решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, \eta, \zeta) = 0$ и граничным условиям $\varphi(x, \infty, \zeta) = \varphi(x, \eta, \infty) = 0$, имеет вид:

$$\varphi = \frac{i\alpha'}{2\pi} \int_0^x \frac{dx'}{x-x'} \iint_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{i\rho^2}{4(x-x')}\right) \delta(\eta', \zeta') d\eta' d\zeta', \quad (34.3)$$

где $\rho^2 = (\eta - \eta')^2 + (\zeta - \zeta')^2$.

Пользуясь формулой Эйлера

$$\exp\left(\frac{i\rho^2}{4(x-x')}\right) = \cos \frac{\rho^2}{4(x-x')} + i \sin \frac{\rho^2}{4(x-x')},$$

разобьем интеграл (34.3) на два интеграла. Вместо x' введем новую переменную $z = \rho^2/4(x-x')$ и проинтегрируем по этой переменной. Тогда получим

$$\begin{aligned} \varphi = & + \frac{\alpha'}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \delta(\eta', \zeta') \operatorname{si}\left(\frac{\rho^2}{4x}\right) d\eta' d\zeta' - \\ & - i \frac{\alpha'}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \delta(\eta', \zeta') \operatorname{ci}\left(\frac{\rho^2}{4x}\right) d\eta' d\zeta'. \end{aligned} \quad (34.4)$$

В случае малых флуктуаций множитель $\exp(-2\alpha'x)$ в формуле (34.2) можно положить равным единице. Это дает $u = \varphi$. Отделив в (34.4) действительную часть от мнимой, найдем:

$$\operatorname{Re} u = \frac{\alpha'}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\eta', \zeta') \operatorname{si}\left(\frac{\rho^2}{4x}\right) d\eta' d\zeta', \quad (34.5)$$

$$\operatorname{Im} u = -\frac{\alpha'}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\eta', \zeta') \operatorname{ci}\left(\frac{\rho^2}{4x}\right) d\eta' d\zeta'. \quad (34.6)$$

Если заменить функцию $\delta(\eta', \zeta')$ ее выражением на основании (33.12) и учесть (32.12), то формулы (34.5) и (34.6) приобретут следующий вид:

$$\operatorname{Re} u = \frac{\langle \mu^2 \rangle}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} N(\xi', \eta', \zeta') \operatorname{si}\left(\frac{\rho^2}{4x}\right) d\xi' d\eta' d\zeta', \quad (34.7)$$

$$\operatorname{Im} u = -\frac{\langle \mu^2 \rangle}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} N(\xi', \eta', \zeta') \operatorname{ci}\left(\frac{\rho^2}{4x}\right) d\xi' d\eta' d\zeta'. \quad (34.8)$$

Введенную ранее корреляционную функцию флуктуаций поля $r = R - \langle A \rangle^2$ легко найти, если воспользоваться формулами (32.15) и (33.15). Ограничиваясь членами, линейными относительно α' , найдем

$$r = 2\alpha' \delta(\eta, \zeta) x,$$

откуда на основании (32.12) следует

$$r = 2 \langle \mu^2 \rangle x \int_0^{\infty} N(\xi, \eta, \zeta) d\zeta. \quad (34.9)$$

В случае малых флуктуаций уровня и фазы $A = e^{B+iS} \approx 1 + B + iS$, $\langle A \rangle \approx 1$. Поэтому

$$\Delta A \approx B + iS,$$

откуда вытекают следующие формулы:

$$\begin{aligned} r &= \langle B_1 B_2 \rangle + \langle S_1 S_2 \rangle, \\ u &= \langle B_1 B_2 \rangle - \langle S_1 S_2 \rangle + 2i \langle B_1 S_2 \rangle, \end{aligned}$$

позволяющие определить автокорреляционные функции $\langle B_1 B_2 \rangle$ и $\langle S_1 S_2 \rangle$, а также функцию взаимной корреляции $\langle B_1 S_2 \rangle = \langle B_2 S_1 \rangle$ флуктуаций уровня и фазы. На основании формул

(34.7) — (34.9) получаем:

$$\langle B_1 B_2 \rangle = \langle \mu^2 \rangle x \int_0^{\infty} N(\xi, \eta, \zeta) d\xi + \\ + \frac{\langle \mu^2 \rangle}{4\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} N(\xi', \eta', \zeta') \operatorname{si}\left(\frac{\rho^2}{4x}\right) d\xi' d\eta' d\zeta', \quad (34.10)$$

$$\langle S_1 S_2 \rangle = \langle \mu^2 \rangle x \int_0^{\infty} N(\xi, \eta, \zeta) d\xi - \\ - \frac{\langle \mu^2 \rangle}{4\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} N(\xi', \eta', \zeta') \operatorname{si}\left(\frac{\rho^2}{4x}\right) d\xi' d\eta' d\zeta', \quad (34.11)$$

$$\langle B_1 S_2 \rangle = \langle B_2 S_1 \rangle = - \frac{\langle \mu^2 \rangle}{4\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} N(\xi', \eta', \zeta') \operatorname{ci}\left(\frac{\rho^2}{4x}\right) d\xi' d\eta' d\zeta'. \quad (34.12)$$

В частном случае $\eta = \zeta = 0$, когда две точки пространства сливаются в одну, из формул (34.10) — (34.12) вытекают соответственно формулы (18.24), (18.23) и (22.3). В этом легко убедиться, если перейти к полярным координатам $\rho = \sqrt{\eta_2^2 + \zeta_2^2}$ и φ и ввести новую переменную $v = \rho^2/4x$.

§ 35. Уравнение для статистического момента поля любого порядка. [57]

Статистическим моментом n -го порядка $\langle M_{nl} \rangle$ случайного поля A называется среднее значение величины M_{nl} , определяемой следующей формулой:

$$M_{nl} = \prod_{\lambda=1}^{\lambda=l} A_{\lambda} \prod_{\nu=l+1}^{\nu=n} A_{\nu}^*, \quad (35.1)$$

где поля $A_{\lambda} = A(x, y_{\lambda}, z_{\lambda})$ удовлетворяет уравнению

$$2i \frac{\partial A_{\lambda}}{\partial x} + \Delta_{\lambda} A_{\lambda} + 2\mu_{\lambda} A_{\lambda} = 0, \quad \lambda = 1, 2, \dots, l, \quad (35.2)$$

а поле $A_{\nu}^* = A^*(x, y_{\nu}, z_{\nu})$ — сопряженному уравнению

$$- 2i \frac{\partial A_{\nu}^*}{\partial x} + \Delta_{\nu} A_{\nu}^* + 2\mu_{\nu} A_{\nu}^* = 0, \quad \nu = l+1, l+2, \dots, n. \quad (35.3)$$

Предполагая, что все точки $(x, y_{\lambda}, z_{\lambda})$ и (x, y_{ν}, z_{ν}) лежат в одной и той же плоскости $X = x$, ограничимся рассмотрением поперечных статистических моментов.

Если умножить уравнение (35.2) на

$$\prod_{\lambda' \neq \lambda} A_{\lambda'} \prod_{\nu=l+1}^{\nu=n} A_{\nu}^*$$

уравнение (35.3) — на

$$-\prod_{\lambda=1}^{\lambda=l} A_{\lambda} \prod_{\nu \neq \nu} A_{\nu}^*$$

и затем все уравнения сложить, то получится следующее уравнение:

$$2i \frac{\partial}{\partial x} M_{nl} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=l} \Delta_{\lambda} M_{nl} - \sum_{\nu=l+1}^{\nu=n} \Delta_{\nu} M_{nl} + 2 \sum_{\lambda=1}^{\lambda=l} \mu_{\lambda} M_{nl} - 2 \sum_{\nu=l+1}^{\nu=n} \mu_{\nu} M_{nl} = 0. \quad (35.4)$$

Статистически усредняя уравнение (35.4), получим

$$2i \frac{\partial}{\partial x} \langle M_{nl} \rangle + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=l} \Delta_{\lambda} \langle M_{nl} \rangle - \sum_{\nu=l+1}^{\nu=n} \Delta_{\nu} \langle M_{nl} \rangle + 2 \sum_{\lambda=1}^{\lambda=l} \langle \mu_{\lambda} M_{nl} \rangle - 2 \sum_{\nu=l+1}^{\nu=n} \langle \mu_{\nu} M_{nl} \rangle = 0. \quad (35.5)$$

Как видно из формулы (35.5), первый член и первые две суммы содержат интересующий нас статистический момент поля $\langle M_{nl} \rangle$, в то время как две последние суммы содержат члены вида $\langle \mu_{\lambda} M_{nl} \rangle$ и $\langle \mu_{\nu} M_{nl} \rangle$, где μ_{ν} и M_{nl} статистически зависимы. Воспользуемся локальным методом, чтобы преобразовать последние члены к нужному виду. С этой целью слева от плоскости $X = x$ проведем плоскость $X = x_0$ на расстоянии $\Delta x = x - x_0 \gg a$. Далее воспользуемся методом малых возмущений и представим поля A_{λ} и A_{ν}^* на выходе из слоя Δx в виде рядов:

$$A_{\lambda} = A_{\lambda}^0 + A_{\lambda}^{\prime} + A_{\lambda}^{\prime\prime} + A_{\lambda}^{\prime\prime\prime} + \dots, \quad (35.6)$$

$$A_{\nu}^* = A_{\nu}^{*0} + A_{\nu}^{*1} + A_{\nu}^{*2} + A_{\nu}^{*3} + \dots \quad (35.7)$$

Здесь A_{λ}^0 (или A_{ν}^{*0}) — поле, которое было бы на выходе из слоя в отсутствие в нем неоднородностей.

Поле $A^0(\xi, \eta, \zeta)$ нулевого приближения в слое однозначно определяется истинным полем $A(x_0, y, z)$ на входе в слой (в плоскости $X = x_0$). С помощью нулевого приближения A^0 или A^{*0} могут быть найдены члены любого приближения соответственно в рядах (35.6) или (35.7). Например, первое приближение A_{λ}^{\prime} выражается через нулевое приближение A^0 с помощью формулы

(32.5). Формула, связывающая между собой комплексно-сопряженные величины A_{ν}^* и A_{ν}^{*0} , отличается от (32.5) только знаком мнимой единицы.

В соответствии с основной идеей локального метода, сохраняя в формуле (35.1) лишь члены не выше первого порядка малости, приближенно имеем:

$$M_{nl} \cong \prod_{\lambda=1}^{\lambda=l} A_{\lambda}^0 \prod_{\nu=l+1}^{\nu=n} A_{\nu}^{*0} + \sum_{\lambda'=1}^{\lambda'=l} A_{\lambda'}^* \prod_{\lambda \neq \lambda'} A_{\lambda}^0 \prod_{\nu} A_{\nu}^{*0} + \sum_{\nu'=l+1}^{\nu'=n} A_{\nu'}^{**} \prod_{\nu \neq \nu'} A_{\nu}^{*0} \prod_{\lambda} A_{\lambda}^0. \quad (35.8)$$

Умножая (35.8) на μ_{λ} и статистически усредняя, получим:

$$\langle \mu_{\lambda} M_{nl} \rangle = \left\langle \mu_{\lambda} \prod_{\lambda} A_{\lambda}^0 \prod_{\nu} A_{\nu}^{*0} \right\rangle + \sum_{\lambda'=1}^{\lambda'=l} \left\langle \mu_{\lambda} A_{\lambda'}^* \prod_{\lambda \neq \lambda'} A_{\lambda}^0 \prod_{\nu} A_{\nu}^{*0} \right\rangle + \sum_{\nu'=l+1}^{\nu'=n} \left\langle \mu_{\lambda} A_{\nu'}^{**} \prod_{\nu \neq \nu'} A_{\nu}^{*0} \prod_{\lambda} A_{\lambda}^0 \right\rangle. \quad (35.9)$$

Первый член в (35.9) обращается в нуль, так как отсутствует статистическая связь между флуктуациями показателя преломления $\mu(x, y_{\lambda}, z_{\lambda})$ на выходе из слоя и полем A^0 нулевого приближения. Все члены первой и второй суммы имеют одинаковую структуру. Поэтому достаточно рассмотреть один из членов первой суммы. На основании (32.5) имеем

$$\left\langle \mu_{\lambda} A_{\lambda'}^* \prod_{\lambda \neq \lambda'} A_{\lambda}^0 \prod_{\nu} A_{\nu}^{*0} \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{x - \xi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \exp \frac{i\rho_{\lambda'}^2}{2(x - \xi)} \left\langle \mu(x, y_{\lambda}, z_{\lambda}) \times \right. \\ \left. \times \mu(\xi, \eta, \zeta) A^0(\xi, \eta, \zeta) \prod_{\lambda \neq \lambda'} A_{\lambda}^0 \prod_{\nu} A_{\nu}^{*0} \right\rangle d\eta d\zeta, \quad (35.10)$$

где $\rho_{\lambda'}^2 = (y_{\lambda'} - \eta)^2 + (z_{\lambda'} - \zeta)^2$.

Рассмотрим выражение

$$\left\langle \mu(x, y_{\lambda}, z_{\lambda}) \mu(\xi, \eta, \zeta) A^0(\xi, \eta, \zeta) \prod_{\lambda \neq \lambda'} A_{\lambda}^0 \prod_{\nu} A_{\nu}^{*0} \right\rangle, \quad (35.11)$$

содержащееся под интегралом в формуле (35.10). Здесь имеются три множителя: $\mu(x, y_{\lambda}, z_{\lambda})$, $\mu(\xi, \eta, \zeta)$ и $A^0(\xi, \eta, \zeta) \prod_{\lambda \neq \lambda'} A_{\lambda}^0 \prod_{\nu} A_{\nu}^{*0}$.

Первый и последний множители статистически независимы, второй и третий статистически независимы всюду, за исключением области $\xi - x_0 \sim a$. Поэтому вне области $\xi - x_0 \sim a$ выражение (35.11) имеет вид

$$\langle \mu(x, y_{\lambda}, z_{\lambda}) \mu(\xi, \eta, \zeta) \rangle \left\langle A^0(\xi, \eta, \zeta) \prod_{\lambda \neq \lambda'} A_{\lambda}^0 \prod_{\nu} A_{\nu}^{*0} \right\rangle. \quad (35.12)$$

С другой стороны, в области $\xi - x_0 \sim a$ статистически независимы первый и второй множители. Поэтому выражение (35.11) обращается в нуль. Таким образом, всюду в области интегрирования ($x_0 \leq \xi \leq x$) выражение (35.11) может быть заменено выражением (35.12).

Выражение (35.12) существенно отлично от нуля лишь в области $x - \xi \sim a$, которая мала по сравнению с продольным радиусом корреляции a^2 поля. Поэтому поле $A^0(\xi, \eta, \zeta)$ в точке (ξ, η, ζ) можно заменить полем $A^0(x, \eta, \zeta)$ в точке (x, η, ξ) . Допускаемая при этом ошибка будет величиной порядка $1/a \ll 1$. Действительно, разлагая в ряд и ограничиваясь старшими членами, можно записать:

$$A^0(x, \eta, \zeta) \approx A^0(\xi, \eta, \zeta) + \frac{\partial A^0(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} (x - \xi) \approx A^0(\xi, \eta, \zeta) + \frac{A^0(\xi, \eta, \zeta)}{a^2} a = A^0(\xi, \eta, \zeta) \left(1 + \frac{1}{a}\right) \approx A^0(\xi, \eta, \zeta). \quad (35.13)$$

Введя коэффициент корреляции N флуктуаций показателя преломления, на основании (35.12) и (35.13) преобразуем формулу (35.10) к виду

$$\left\langle \mu_\lambda A'_\lambda \prod_{\lambda \neq \lambda'} A_\lambda^0 \prod A_v^{*0} \right\rangle = \frac{\langle \mu^2 \rangle}{2\pi} \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{x - \xi} \int_{-\infty}^{+\infty} N(x - \xi, y_\lambda - \eta, z_\lambda - \zeta) \times \\ \times \left\langle A^0(x, \eta, \zeta) \prod_{\lambda \neq \lambda'} A_\lambda^0 \prod A_v^{*0} \right\rangle \exp \frac{ip_{\lambda'}^2}{2(x - \xi)} d\eta d\zeta.$$

Пользуясь методом стационарной фазы при вычислении интегралов по переменным η и ζ , получим

$$\left\langle \mu_\lambda A'_\lambda \prod_{\lambda \neq \lambda'} A_\lambda^0 \prod A_v^{*0} \right\rangle = i \langle M_{nl}^0 \rangle \langle \mu^2 \rangle \int_{x_0}^x N(x - \xi, y_\lambda - y_{\lambda'}, z_\lambda - z_{\lambda'}) d\xi, \quad (35.14)$$

где

$$\langle M_{nl}^0 \rangle = \left\langle \prod_{\lambda=1}^{\lambda=l} A_\lambda^0 \prod_{v=l+1}^{v=n} A_v^{*0} \right\rangle.$$

Если учесть, что $x - x_0 \gg a$, то интеграл в формуле (35.14) преобразуется к виду

$$\int_0^\infty N(\xi, y_\lambda - y_{\lambda'}, z_\lambda - z_{\lambda'}) d\xi,$$

и (35.14) приобретает вид

$$\left\langle \mu_{\lambda} A_{\lambda'} \prod_{\lambda \neq \lambda'} A_{\lambda}^0 \prod A_{\nu}^{*0} \right\rangle = i\alpha' \delta(y_{\lambda} - y_{\lambda'}, z_{\lambda} - z_{\lambda'}) \langle M_{nl}^0 \rangle, \quad (35.15)$$

где введено следующее обозначение:

$$\delta(y_{\lambda} - y_{\lambda'}, z_{\lambda} - z_{\lambda'}) = \frac{\int_0^{\infty} N(\xi, y_{\lambda} - y_{\lambda'}, z_{\lambda} - z_{\lambda'}) d\xi}{\int_0^{\infty} N(\xi, 0, 0) d\xi}. \quad (35.16)$$

Как видно из формулы (36.16), функция $\delta(y_{\lambda} - y_{\lambda'}, z_{\lambda} - z_{\lambda'})$ может изменяться в пределах от 0 до 1.

Совершенно так же можно получить для каждого члена второй суммы в (35.9) следующее выражение:

$$\left\langle \mu_{\lambda} A_{\nu}^{**} \prod_{\nu \neq \nu'} A_{\nu}^{*0} \prod A_{\lambda}^0 \right\rangle = -i\alpha' \delta_{\lambda\nu'} \langle M_{nl}^0 \rangle, \quad (35.17)$$

отличающееся от (35.15) знаком мнимой единицы.

На основании формул (35.9), (35.15) и (35.17) уравнение (35.5) приобретает вид

$$2i \frac{\partial}{\partial x} \langle M_{nl} \rangle + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=l} \Delta_{\lambda} \langle M_{nl} \rangle - \sum_{\nu=l+1}^{\nu=n} \Delta_{\nu} \langle M_{nl} \rangle + 2i\alpha' f \langle M_{nl}^0 \rangle = 0, \quad (35.18)$$

где f — функция следующего вида:

$$f = \sum_{\lambda} \sum_{\lambda'} \delta_{\lambda\lambda'} + \sum_{\nu} \sum_{\nu'} \delta_{\nu\nu'} - 2 \sum_{\lambda} \sum_{\nu} \delta_{\lambda\nu}. \quad (35.19)$$

Остается сделать еще один шаг — заменить в последнем члене формулы (35.18) момент $\langle M_{nl}^0 \rangle$ моментом $\langle M_{nl} \rangle$. Тогда для статистического момента M_{nl} получается следующее окончательное уравнение:

$$2i \frac{\partial}{\partial x} \langle M_{nl} \rangle + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=l} \Delta_{\lambda} \langle M_{nl} \rangle - \sum_{\nu=l+1}^{\nu=n} \Delta_{\nu} \langle M_{nl} \rangle + 2i\alpha' f \langle M_{nl} \rangle = 0. \quad (35.20)$$

Оценим погрешность, обусловленную заменой $\langle M_{nl}^0 \rangle$ на $\langle M_{nl} \rangle$ в формуле (35.18). Отличие M_{nl}^0 от M_{nl} будет определяться членами второго приближения вида A_{λ}^* , A_{ν}^{**} , $A_{\lambda}^* A_{\lambda'}^*$, $A_{\lambda}^* A_{\nu}^{**}$, $A_{\nu}^{**} A_{\nu'}^{**}$, т. е. имеем:

$$\begin{aligned} \langle M_{nl} \rangle - \langle M_{nl}^0 \rangle &= \sum_{\lambda_1=1}^{\lambda_1=l} \left\langle A_{\lambda_1}^* \prod_{\lambda} A_{\lambda}^0 \prod A_{\nu}^{*0} \right\rangle + \\ &+ \sum_{\nu_1=l+1}^{\nu_1=n} \left\langle A_{\nu_1}^{**} \prod_{\nu \neq \nu_1} A_{\nu}^{*0} \prod A_{\lambda}^0 \right\rangle + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\lambda_1 < \lambda_2} \sum \left\langle A'_{\lambda_1} A'_{\lambda_2} \prod_{\lambda \neq \lambda_1 \neq \lambda_2} A_\lambda^0 \prod A_\nu^{*0} \right\rangle + \\
& + \sum_{\nu_1 < \nu_2} \sum \left\langle A'_{\nu_1} A'_{\nu_2} \prod_{\nu \neq \nu_1 \neq \nu_2} A_\nu^{*0} \prod A_\lambda^0 \right\rangle + \\
& + \sum_{\lambda_1} \sum_{\nu_1} \left\langle A'_{\lambda_1} A'_{\nu_1} \prod_{\lambda \neq \lambda_1} A_\lambda^0 \prod_{\nu = \nu_1} A_\nu^{*0} \right\rangle.
\end{aligned}$$

Каждый член в первой и второй суммах вычисляется совершенно так же, как вычислялось среднее значение второго приближения $\langle A'' \rangle$ в развитой ранее теории среднего поля. По аналогии с формулой (32.20) получаем

$$\left\langle A'_{\lambda_1} \prod_{\lambda \neq \lambda_1} A_\lambda^0 \prod A_\nu^{*0} \right\rangle = \left\langle A''_{\nu_1} \prod_{\nu \neq \nu_1} A_\nu^{*0} \prod A_\lambda^0 \right\rangle = -\alpha' \Delta x \langle M_{nl}^0 \rangle. \quad (35.21)$$

Все члены в трех последних суммах вычисляются одним и тем же способом. Для примера вычислим один из членов третьей суммы. Заменяя A_λ и A'_λ на основании (32.5), получим

$$\begin{aligned}
& \left\langle A'_{\lambda_1} A'_{\lambda_2} \prod_{\lambda \neq \lambda_1 \neq \lambda_2} A_\lambda^0 \prod A_\nu^{*0} \right\rangle = \\
& = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{x_0}^x \frac{d\xi_1}{x - \xi_1} \int_{x_0}^x \frac{d\xi_2}{x - \xi_2} \exp \left[\frac{i\rho_{\lambda_1}^2}{2(x - \xi_1)} + \frac{i\rho_{\lambda_2}^2}{2(x - \xi_2)} \right] \times \\
& \times \langle \mu(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) \mu(\xi_2, \eta_2, \zeta_2) \rangle \langle M_{nl}^0 \rangle d\eta_1 d\zeta_1 d\eta_2 d\zeta_2, \quad (35.22)
\end{aligned}$$

где

$$\rho_{\lambda_1}^2 = (y_{\lambda_1} - \eta_1)^2 + (z_{\lambda_1} - \zeta_1)^2,$$

$$\rho_{\lambda_2}^2 = (y_{\lambda_2} - \eta_2)^2 + (z_{\lambda_2} - \zeta_2)^2.$$

Применяя метод стационарной фазы при вычислении интегралов по поперечным координатам, найдем

$$\begin{aligned}
& \left\langle A'_{\lambda_1} A'_{\lambda_2} \prod_{\lambda \neq \lambda_1 \neq \lambda_2} A_\lambda^0 \prod A_\nu^{*0} \right\rangle = \\
& = - \int_{x_0}^x d\xi_1 \int_{x_0}^x d\xi_2 \langle \mu(\xi_1, y_{\lambda_1}, z_{\lambda_1}) \mu(\xi_2, y_{\lambda_2}, z_{\lambda_2}) \rangle \langle M_{nl}^0 \rangle.
\end{aligned}$$

Используя обозначение (35.16), после интегрирования по продольным координатам окончательно получим

$$\left\langle A'_{\lambda_1} A'_{\lambda_2} \prod_{\lambda \neq \lambda_1 \neq \lambda_2} A_\lambda^0 \prod A_\nu^{*0} \right\rangle = -2\alpha' \delta_{\lambda_1 \lambda_2} \Delta x \langle M_{nl}^0 \rangle. \quad (35.23)$$

Заметим, что в формуле (35.22) под интегралом выражение $\langle \mu_1 \mu_2 M_{nl}^0 \rangle$ было заменено выражением $\langle \mu_1 \mu_2 \rangle \langle M_{nl}^0 \rangle$, что

связано с погрешностью, по порядку величины равной $a/\Delta x$. Другими словами, такая замена связана с пренебрежением в формуле (35.23) членом, пропорциональным a , по сравнению с членом, пропорциональным Δx . Отдельные члены в четвертой и пятой суммах соответственно равны $-2\alpha'\delta_{v_1v_2}\Delta x \langle M_{nl}^0 \rangle$ и $2\alpha'\delta_{\lambda_1\lambda_2}\Delta x \langle M_{nl}^0 \rangle$.

Суммируя все члены на основании (35.21) и (35.23), найдем

$$\begin{aligned} \langle M_{nl} \rangle - \langle M_{nl}^0 \rangle &= \\ &= - \left(n + 2 \sum_{\lambda_1 < \lambda_2} \delta_{\lambda_1\lambda_2} + 2 \sum_{v_1 < v_2} \delta_{v_1v_2} - 2 \sum_{\lambda_1 v_1} \delta_{\lambda_1 v_1} \right) \alpha' \Delta x \langle M_{nl}^0 \rangle. \end{aligned} \quad (35.24)$$

Выражение, содержащееся в скобках, можно упростить. Ввиду симметрии функции $\delta_{\alpha\beta}$ относительно индексов α и β , суммирование по области $\alpha < \beta$ можно распространить на область $\alpha \neq \beta$ и взять от новой суммы ее половину, т. е.

$$\sum_{\alpha < \beta} \delta_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq \beta} \delta_{\alpha\beta}. \quad (35.25)$$

На основании (35.25) выражение в скобках в формуле (35.24) преобразуется к виду

$$n + \sum_{\lambda_1 \neq \lambda_2} \delta_{\lambda_1\lambda_2} + \sum_{v_1 \neq v_2} \delta_{v_1v_2} - 2 \sum_{\lambda_1 v_1} \delta_{\lambda_1 v_1}. \quad (35.26)$$

Напомним, что при совпадении индексов δ -функция обращается в единицу. Поэтому

$$\sum_{\lambda_1 = \lambda_2} \delta_{\lambda_1\lambda_2} = l, \quad \sum_{v_1 = v_2} \delta_{v_1v_2} = n - l \quad \text{и} \quad \sum_{\lambda_2 = \lambda_1} \delta_{\lambda_1\lambda_2} + \sum_{v_2 = v_1} \delta_{v_1v_2} = n,$$

т. е. n можно рассматривать как результат двойного суммирования по совпадающим индексам. На основании сказанного выражение (35.26) можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} n + \sum_{\lambda_1 \neq \lambda_2} \delta_{\lambda_1\lambda_2} + \sum_{v_1 \neq v_2} \delta_{v_1v_2} - 2 \sum_{\lambda_1 v_1} \delta_{\lambda_1 v_1} &\equiv \\ &\equiv \sum_{\lambda_1 = \lambda_2} \delta_{\lambda_1\lambda_2} + \sum_{v_1 = v_2} \delta_{v_1v_2} + \sum_{\lambda_1 \neq \lambda_2} \delta_{\lambda_1\lambda_2} + \sum_{v_1 \neq v_2} \delta_{v_1v_2} - 2 \sum_{\lambda_1 v_1} \delta_{\lambda_1 v_1} \equiv \\ &\equiv \sum_{\lambda_1 \lambda_2} \delta_{\lambda_1\lambda_2} + \sum_{v_1 v_2} \delta_{v_1v_2} - 2 \sum_{\lambda_1 v_1} \delta_{\lambda_1 v_1}. \end{aligned}$$

Как видно из формулы (35.19), полученное выражение совпадает с ранее введенной функцией f .

Таким образом, формула (35.24) приобретает следующий окончательный вид:

$$\langle M_{nl}^0 \rangle = \langle M_{nl} \rangle + \alpha' f \Delta x \langle M_{nl}^0 \rangle. \quad (35.27)$$

Относительная ошибка, обусловленная заменой $\langle M_{nl}^0 \rangle$ на $\langle M_{nl} \rangle$ в формуле (35.18), равна $\alpha' f \Delta x$. Ошибкой можно пренебречь, если выполняется условие

$$\alpha' f \Delta x \ll 1. \quad (35.28)$$

Как видно из формулы (35.19), функция f содержит n^2 слагаемых типа $\pm \delta_{\alpha\beta}$, каждое из которых по модулю не превышает единицы. Поэтому верхним пределом для f будет число n^2 . Условие (35.28) будет выполняться, если выполняется более сильное условие:

$$n^2 \alpha' \Delta x \ll 1. \quad (35.29)$$

В соответствии с предположением, лежащим в основе локального метода, доля энергии, рассеянной на интервале Δx , мала ($\alpha' \Delta x \ll 1$). Поэтому неравенство (35.29) может выполняться и при достаточно больших n .

Замена $\langle M_{nl}^0 \rangle$ на $\langle M_{nl} \rangle$ с помощью (35.27) приводит к тому, что в (35.20) появляется добавочный член $2i\alpha'^2 f^2 \Delta x \langle M_{nl}^0 \rangle$ четвертого порядка относительно μ . Если флуктуации показателя преломления μ распределены нормально, то этот член точно компенсируется другими членами четвертого порядка, пропорциональными интервалу Δx , которые не были учтены при выводе уравнения (35.18) с помощью локального метода (доказательство этого утверждения приведено в Приложении III). В результате могут остаться только члены четвертого порядка малости, пропорциональные a . Иными словами, все члены четвертого порядка, соответствующие слабо связанным диаграммам, полностью компенсируются. Могут остаться нескомпенсированными только члены, соответствующие сильно связанным диаграммам. Обусловленную ими погрешность можно оценить, исходя из следующих соображений. В процессе вывода формулы (35.27) были отброшены члены, пропорциональные a , число которых по порядку величины равно числу учтенных членов, пропорциональных Δx . Погрешность, обусловленная последними, равна $n^2 \alpha' \Delta x$. Следовательно, погрешность, обусловленная отброшенными членами, по порядку величины равна $n^2 \alpha' a$.

Погрешностью можно пренебречь, если выполняется условие

$$n^2 \alpha' a \ll 1. \quad (35.30)$$

Приведенная оценка является оценкой сверху. Если члены, пропорциональные a , частично компенсируются, то погрешность будет меньше и критерий (35.30) будет ослаблен.

Во всех реальных средах (атмосфере, океане, ионосфере) рассеяние на масштабе неоднородностей мало ($\alpha' a \ll 1$) и условие (35.30) будет выполняться при достаточно больших n . В качестве примера рассмотрим океан. Допустим, что случайные неоднородности океана описываются коэффициентом корреляции гауссова вида. Тогда $\alpha' a = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \langle \mu^2 \rangle (ka)^2$. Полагая $\langle \mu^2 \rangle = 5 \cdot 10^{-9}$,

$a = 100$ см, $\nu = 10$ кгц, получим $ka = 40$, $\alpha'a \cong 1,4 \cdot 10^{-5}$. Таким образом, вплоть до значений $n \cong 100$ будет выполняться неравенство (35.30).

Из общих формул настоящего параграфа можно, в частности, получить все формулы, относящиеся к статистическим моментам поля первого и второго порядков. Полагая $n = l = 1$, из формулы (35.19) найдем $f = 1$. Учитывая, что среднее поле $\langle A \rangle$ не зависит от поперечных координат, из уравнения (35.20) получим уравнение (32.14) для среднего поля.

Полагая $n = 2$, $l = 1$, рассмотрим корреляционный момент $\langle M_{21} \rangle = R$. Из формулы (35.19) следует $f = 2(1 - \delta_{12})$. Переходя в уравнении (35.20) к относительным координатам и к координатам центра тяжести и учитывая независимость R от последних, получим уравнение (33.14) для корреляционного момента R .

Полагая $n = l = 2$, рассмотрим другой корреляционный момент $\langle M_{22} \rangle = U$. В этом случае $f = 2(1 + \delta_{12})$. Учитывая независимость U от координат центра тяжести, получим из (35.20) уравнение (33.16) для корреляционного момента U .

Приведенные в конце § 31 без доказательства оценки погрешностей, допущенных при выводе уравнений (33.14) и (33.16) для корреляционных моментов R и U , сразу следуют из общей формулы (35.27) настоящего параграфа.

Другой метод получения уравнений для статистических моментов поля был предложен В. И. Татарским [58]. Его идея заключается в следующем. Продольный радиус корреляции флуктуаций поля в среде с крупномасштабными неоднородностями во много раз превышает размеры неоднородностей (в случае однопараметрической модели в ka раз). Поэтому размерами неоднородностей в направлении распространения волны можно пренебречь, считая флуктуации показателя преломления среды δ -коррелированными в продольном направлении. Используя это предположение, из параболического уравнения можно также получить рассматриваемые в настоящей главе уравнения для статистических моментов поля.

§ 36. Уравнение для смешанного момента поля четвертого порядка.

Флуктуация интенсивности

Рассмотрим смешанный статистический момент поля четвертого порядка следующего вида:

$$\langle M_{42} \rangle = \langle A_1 A_2 A_3^* A_4^* \rangle.$$

Как видно из формулы (35.20), этот момент удовлетворяет уравнению

$$2i \frac{\partial}{\partial x} \langle M_{42} \rangle + \Delta_1 \langle M_{42} \rangle + \Delta_2 \langle M_{42} \rangle - \Delta_3 \langle M_{42} \rangle - \Delta_4 \langle M_{42} \rangle + 2i\alpha' f \langle M_{42} \rangle = 0, \quad (36.1)$$

где

$$f = 4 + 2(\delta_{12} + \delta_{34} - \delta_{13} - \delta_{14} - \delta_{23} - \delta_{24}). \quad (36.2)$$

Поле статистически однородно по поперечным координатам. Поэтому момент $\langle M_{42} \rangle$ зависит только от относительного расположения точек в плоскости $X = x$ и, следовательно, не зависит от выбора начала координат в этой плоскости.

Введем новые координаты:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= y_1 - y_3, & \eta_2 &= y_2 - y_3, & \eta_3 &= y_3, & \eta_4 &= y_4 - y_3; \\ \zeta_1 &= z_1 - z_3, & \zeta_2 &= z_2 - z_3, & \zeta_3 &= z_3, & \zeta_4 &= z_4 - z_3. \end{aligned} \quad (36.3)$$

Введенные координаты являются относительными, за исключением координат $\eta_3 = y_3$ и $\zeta_3 = z_3$. Последние зависят от выбора начала координат, и, следовательно, момент $\langle M_{42} \rangle$ не должен от них зависеть. Преобразуя уравнение (36.1) к новым переменным по формулам (36.3) и учитывая независимость момента $\langle M_{42} \rangle$ от координат (η_3, ζ_3) , приходим к уравнению следующего вида:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial x} \langle M_{42} \rangle - \frac{\partial^2 \langle M_{42} \rangle}{\partial \eta_1 \partial \eta_2} - \frac{\partial^2 \langle M_{42} \rangle}{\partial \eta_2 \partial \eta_4} - \frac{\partial^2 \langle M_{42} \rangle}{\partial \zeta_1 \partial \zeta_2} - \\ - \frac{\partial^2 \langle M_{42} \rangle}{\partial \zeta_2 \partial \zeta_4} + i\alpha' f \langle M_{42} \rangle = 0. \end{aligned} \quad (36.4)$$

Последнее уравнение можно упростить, если точки расположить в вершинах параллелограмма. Так как противоположные стороны параллелограмма равны и параллельны, то должны иметь место следующие соотношения:

$$y_1 - y_3 = y_4 - y_2, \quad z_1 - z_3 = z_4 - z_2. \quad (36.5)$$

Из формул (36.3) и (36.5) следует, что $\eta_1 = \eta_4$ и $\zeta_1 = \zeta_4$. Поэтому уравнение (36.4) приобретает вид

$$\frac{\partial \langle M_{42} \rangle}{\partial x} + 2i \left(\frac{\partial^2 \langle M_{42} \rangle}{\partial \eta_1 \partial \eta_2} + \frac{\partial^2 \langle M_{42} \rangle}{\partial \zeta_1 \partial \zeta_2} \right) + \alpha' f \langle M_{42} \rangle = 0. \quad (36.6)$$

Если коэффициент корреляции флуктуаций показателя преломления среды имеет гауссов вид

$$N = \exp \left(- \frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{a^2} \right),$$

то каждое из слагаемых δ_{ik} в формуле (36.2) также имеет вид

$$\delta_{ik} = \exp \left[- \frac{(y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2}{a^2} \right],$$

как это следует из формулы (35.16). На основании формул (36.3) и (36.5) находим:

$$\delta_{13} = \delta_{24} = \exp \left(- \frac{\eta_1^2 + \zeta_1^2}{a^2} \right), \quad \delta_{23} = \delta_{14} = \exp \left(- \frac{\eta_2^2 + \zeta_2^2}{a^2} \right),$$

$$\begin{aligned}\delta_{12} &= \exp \left[- \frac{(\eta_1 - \eta_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2)^2}{a^2} \right], \\ \delta_{34} &= \exp \left[- \frac{(\eta_1 + \eta_2)^2 + (\zeta_1 + \zeta_2)^2}{a^2} \right].\end{aligned}\quad (36.7)$$

Заменив в формуле (36.2) все δ_{ik} их выражениями по формулам (36.7), получим

$$\begin{aligned}f &= 4 - 4 \exp \left(- \frac{\eta_1^2 + \zeta_1^2}{a^2} \right) - 4 \exp \left(- \frac{\eta_2^2 + \zeta_2^2}{a^2} \right) + \\ &+ 2 \exp \left[- \frac{(\eta_1 + \eta_2)^2 + (\zeta_1 + \zeta_2)^2}{a^2} \right] + 2 \exp \left[- \frac{(\eta_1 - \eta_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2)^2}{a^2} \right].\end{aligned}$$

На основании последней формулы уравнение (36.6) приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \langle M_{42} \rangle}{\partial x} + 2i \left(\frac{\partial^2 \langle M_{42} \rangle}{\partial \eta_1 \partial \eta_2} + \frac{\partial^2 \langle M_{42} \rangle}{\partial \zeta_1 \partial \zeta_2} \right) + 2\alpha' \left\{ 2 - 2 \exp \left(- \frac{\eta_1^2 + \zeta_1^2}{a^2} \right) - \right. \\ \left. - 2 \exp \left(- \frac{\eta_2^2 + \zeta_2^2}{a^2} \right) + \exp \left[- \frac{(\eta_1 + \eta_2)^2 + (\zeta_1 + \zeta_2)^2}{a^2} \right] + \right. \\ \left. + \exp \left[- \frac{(\eta_1 - \eta_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2)^2}{a^2} \right] \right\} \langle M_{42} \rangle = 0.\end{aligned}\quad (36.8)$$

Уравнение (36.8) содержит два параметра α' и a , которые можно свести к одному, если ввести координаты

$$u = \frac{2x}{a^2}, \quad v_k = \frac{\eta_k}{a}, \quad w_k = \frac{\zeta_k}{a} \quad (k = 1, 2).$$

В этих координатах уравнение (36.8) приобретает следующий окончательный вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \langle M_{42} \rangle}{\partial u} + i \left(\frac{\partial^2 \langle M_{42} \rangle}{\partial v_1 \partial v_2} + \frac{\partial^2 \langle M_{42} \rangle}{\partial w_1 \partial w_2} \right) + \gamma \left\{ 2 - 2 \exp(-v_1^2 - w_1^2) - \right. \\ \left. - 2 \exp(-v_2^2 - w_2^2) + \exp[-(v_1 + v_2)^2 - (w_1 + w_2)^2] + \right. \\ \left. + \exp[-(v_1 - v_2)^2 - (w_1 - w_2)^2] \right\} \langle M_{42} \rangle = 0,\end{aligned}\quad (36.9)$$

где единственный параметр $\gamma = \alpha' a^2$.

Уравнение (36.9) было получено в работе [59] в результате применения метода фазового экрана к тонкому слою, содержащему случайные неоднородности. В другой работе того же автора [60] это уравнение было найдено с помощью диаграммной техники методом функции Грина. Уравнение (36.1) было получено в работе [61] методом, по существу совпадающим с локальным методом.

С помощью уравнения (36.9) можно исследовать различные статистические характеристики интенсивности поля: автокорреляционную функцию интенсивностей в двух точках и флуктуации интенсивности. Интенсивность I пропорциональна квадрату ам-

плитуды $|A^2| = AA^*$, т. е.

$$I = \beta AA^*, \quad (36.10)$$

где β — коэффициент пропорциональности.

Из последней формулы следует

$$\langle I \rangle = \beta \langle AA^* \rangle. \quad (36.11)$$

Автокорреляционную функцию интенсивности $\langle I_1 I_2 \rangle$ можно получить из статистического момента $\langle M_{42} \rangle$ при $v_1 = w_1 = 0$. Действительно, из формулы (36.10) следует

$$\langle I_1 I_2 \rangle = \beta^2 \langle A_1 A_1^* A_2 A_2^* \rangle = \beta^2 \langle A_1 A_2^* A_2 A_1^* \rangle_{v_1=w_1=0} = \beta^2 \langle M_{42} \rangle_{v_1=w_1=0}.$$

К сожалению, в уравнении (36.9) нельзя сразу перейти к предельному случаю $v_1 = w_1 = 0$, так как неизвестно значение в нуле производных $\partial^2 \langle M_{42} \rangle / \partial v_1 \partial v_2$ и $\partial^2 \langle M_{42} \rangle / \partial w_1 \partial w_2$. Вначале необходимо найти решение уравнения (36.9) для статистического момента $\langle M_{42} \rangle$ и только затем положить в нем $v_1 = w_1 = 0$. Полагая также $v_2 = w_2 = 0$ в моменте $\langle M_{42} \rangle$, получим средний квадрат интенсивности, т. е.

$$\langle I^2 \rangle = \beta^2 \langle M_{42} \rangle_{\substack{v_1=w_1=0 \\ v_2=w_2=0}} \quad (36.12)$$

Флуктуации интенсивности ΔI волны характеризуются величиной

$$\langle (\Delta I)^2 \rangle = \langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2,$$

откуда для относительной флуктуации интенсивности следует:

$$\frac{\langle (\Delta I)^2 \rangle}{\langle I \rangle^2} = \frac{\langle I^2 \rangle}{\langle I \rangle^2} - 1.$$

Заменяя $\langle I \rangle$ и $\langle I^2 \rangle$ на основании формул (36.11) и (36.12), получим

$$\frac{\langle (\Delta I)^2 \rangle}{\langle I \rangle^2} = \langle M_{42} \rangle_{\substack{v_1=w_1=0 \\ v_2=w_2=0}} / \langle AA^* \rangle - 1.$$

Если амплитуда падающей волны равна единице, то $\langle AA^* \rangle$ тоже равна единице, как это было показано в § 31. Поэтому последняя формула приобретает следующий окончательный и простой вид:

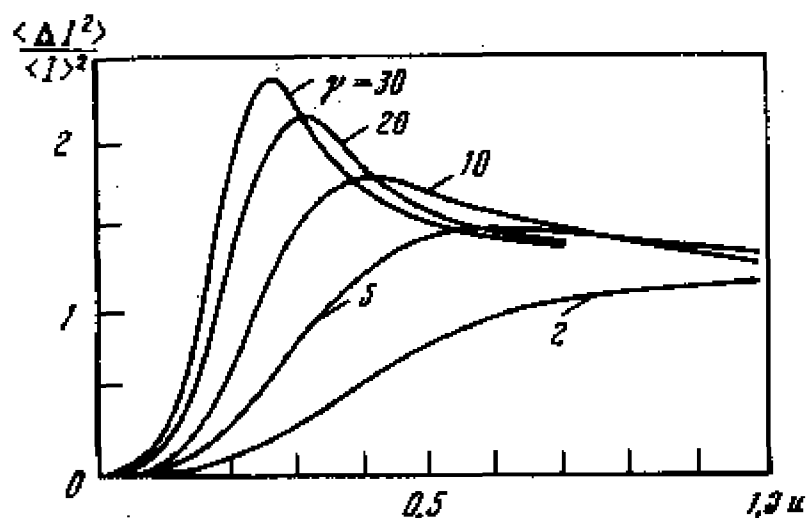
$$\frac{\langle (\Delta I)^2 \rangle}{\langle I \rangle^2} = \langle M_{42} \rangle_{\substack{v_1=w_1=0 \\ v_2=w_2=0}} - 1.$$

Таким образом, исследование относительных флуктуаций интенсивности сводится к отысканию решения параболического уравнения (36.9). Поскольку амплитуда падающей волны считается равной единице, решение должно удовлетворять начальному условию $\langle M_{42} \rangle_{x=0} = 1$. К уравнению (36.9) были применены как численные [62], так и приближенные аналитические [63] методы решения.

В результате численного решения [62] была найдена зависимость флуктуаций интенсивности от дистанции u при различных

значениях параметра γ . Эта зависимость изображена на фиг. 12. Как видно из графиков, характер зависимости определяется величиной параметра γ . При малых значениях параметра γ ($\gamma \leq 2$) относительные флуктуации интенсивности нарастают при увеличении расстояния. При больших значениях γ ($\gamma \geq 5$) относительные флуктуации интенсивности нарастают с расстоянием, достигают максимума, а затем убывают. С ростом параметра γ максимумы возрастают, а их положение смещается в сторону меньших дистанций.

Многие исследователи применяли уравнение для момента четвертого порядка к турбулентной среде [64—69]. Если возвратиться



Фиг. 12. Зависимость флуктуаций интенсивности от расстояния

к размерным координатам, то уравнение (36.6) переписется следующим образом:

$$\frac{\partial \langle M_{42} \rangle}{\partial x} + \frac{2i}{k} \left(\frac{\partial^2 \langle M_{42} \rangle}{\partial \eta_1 \partial \eta_2} + \frac{\partial^2 \langle M_{42} \rangle}{\partial \zeta_1 \partial \zeta_2} \right) + k^2 \alpha' f \langle M_{42} \rangle = 0. \quad (36.13)$$

Параметр α' и входящие в f функции δ_{ik} определяются прежними формулами (32.12) и (35.16), записанными в размерных координатах. Если в уравнении (36.13) заменить α' и все δ_{ik} на основании указанных формул и воспользоваться формулой (7.1а) для структурной функции фазы $D_S(\rho)$ в геометрическом приближении, то уравнение (36.13) приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \langle M_{42} \rangle}{\partial x} + \frac{2i}{k} \left(\frac{\partial^2 \langle M_{42} \rangle}{\partial \eta_1 \partial \eta_2} + \frac{\partial^2 \langle M_{42} \rangle}{\partial \zeta_1 \partial \zeta_2} \right) + \\ & + \left[D'_S(\rho_1) + D'_S(\rho_2) - \frac{1}{2} D'_S(\rho_1 + \rho_2) - \frac{1}{2} D'_S(\rho_1 - \rho_2) \right] \times \\ & \times \langle M_{42} \rangle = 0. \end{aligned} \quad (36.14)$$

Здесь штрихом обозначена производная от структурной функции D_S по продольной координате x .

Если поперечное разнесение приемников $\rho_{1,2}$ заключено в интервале между внутренним и внешним масштабами турбулентности ($l_0 < \rho_{1,2} < L_0$), то при вычислении D'_S можно воспользоваться законом Колмогорова — Обухова. Тогда для каждого члена

$D'_S(\rho)$ в формуле (36.14) имеем [22]:

$$D'_S(\rho) = 2,91 C_n^2 k^2 \rho^{5/3},$$

и уравнение (36.14) приобретает вид:

$$\frac{\partial \langle M_{42} \rangle}{\partial x} + \frac{2i}{k} \left(\frac{\partial^2 \langle M_{42} \rangle}{\partial \eta_1 \partial \eta_2} + \frac{\partial^2 \langle M_{42} \rangle}{\partial \zeta_1 \partial \zeta_2} \right) +$$

$$+ 2,91 C_n^2 k^2 \left[\rho_1^{5/3} + \rho_2^{5/3} - \frac{1}{2} |\rho_1 - \rho_2|^{5/3} - \frac{1}{2} |\rho_1 + \rho_2|^{5/3} \right] \langle M_{42} \rangle = 0. \quad (36.15)$$

Если ввести продольный l_{\parallel} и поперечный l_{\perp} масштабы

$$l_{\parallel} = (C_n^2 k^{7/3})^{-3/11}, \quad l_{\perp} = (C_n^2 k^3)^{-2/11}, \quad (36.16)$$

связанные между собой, как легко видеть, соотношением $l_{\parallel} = k l_{\perp}^2$, и ввести новые безразмерные координаты

$$x' = \frac{x}{l_{\parallel}}, \quad \eta' = \frac{\eta}{l_{\perp}}, \quad \zeta' = \frac{\zeta}{l_{\perp}} \left(\rho' = \frac{\rho}{l_{\perp}} \right),$$

то уравнение (36.15) в этих переменных приобретет универсальный вид

$$\frac{\partial \langle M_{42} \rangle}{\partial x'} + 2i \left(\frac{\partial^2 \langle M_{42} \rangle}{\partial \eta'_1 \partial \eta'_2} + \frac{\partial^2 \langle M_{42} \rangle}{\partial \zeta'_1 \partial \zeta'_2} \right) +$$

$$+ 2,91 \left[\rho_1'^{5/3} + \rho_2'^{5/3} - \frac{1}{2} |\rho_1' + \rho_2'|^{5/3} - \frac{1}{2} |\rho_1' - \rho_2'|^{5/3} \right] \langle M_{42} \rangle = 0. \quad (36.17)$$

Следует заметить, что масштабы l_{\parallel} и l_{\perp} имеют простой физический смысл. Подставляя $L = l_{\parallel}$ в формулу (29.2), найдем $\langle B^2 \rangle = 0,31$, т. е. l_{\parallel} примерно соответствует расстоянию, в пределах которого еще можно пользоваться методом плавных возмущений. Поперечный масштаб l_{\perp} соответствует размеру зоны Френеля для расстояния l_{\parallel} .

Для частного случая двумерной турбулентности путем численного решения уравнения (36.17) в работе [66] была найдена зависимость относительной флуктуации интенсивности $\langle (\Delta I)^2 \rangle / \langle I \rangle^2$ от расстояния, находящаяся в качественном согласии с экспериментальными данными для турбулентной среды.

В работе [67] был сформулирован принцип подобия: если параметры C_n , k , x , η , ζ изменяются так, что безразмерные координаты x' , η' , ζ' остаются неизменными, то момент $\langle M_{12} \rangle$ также не изменяется. В работах [67, 68] принцип подобия получил весьма обстоятельное экспериментальное подтверждение при измерении различных характеристик лазерного излучения: относительной флуктуации интенсивности, автокорреляционной функции флуктуаций интенсивности и ее спектра.

Заметим, что в новых переменных смешанный момент второго порядка также приобретает универсальный вид. Действительно, из формулы (33.15) следует $\langle M_{21} \rangle = \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot 2,91 \rho'^{5/3} x'\right)$.

Уравнения для моментов поля теряют универсальный характер по мере того, как расстояние между приемниками приближается к внешнему масштабу турбулентности. Если структурная функция флуктуаций показателя преломления описывается степенным законом, отличным от закона Колмогорова — Обухова, то уравнения тоже можно привести к универсальному виду с помощью преобразований координат, вид которых определяется показателем степени [65].

В работе [69] строится асимптотическая теория насыщенных флуктуаций интенсивности монохроматической волны, распространяющейся на большие дистанции в турбулентной среде со спектром флуктуаций показателя преломления степенного вида. Для случая, когда исходный тип излучения — плоская волна, получено аналитическое выражение для корреляционной функции флуктуаций интенсивности. В частном случае, когда структурная функция показателя преломления описывается законом Колмогорова — Обухова, теория приводит к результатам, находящимся в хорошем согласии с экспериментальными данными.

В недавно опубликованной статье¹ дан обзор теоретических и экспериментальных работ по распространению лазерного излучения в случайно-неоднородных средах. Основное содержание обзора составляют вопросы корреляционной теории флуктуаций интенсивности лазерного излучения, которая сводится к отысканию решения уравнения (36.14) при различных дополнительных условиях. Рассмотрен также вопрос о размытии лазерных пучков. Теория этого эффекта опирается на уравнение

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2k} (\Delta_1 - \Delta_2) + \frac{1}{2} D'(\rho) \right] \langle M_{21} \rangle = 0$$

для функции взаимной когерентности полей $\langle M_{21} \rangle$, которое следует из общей формулы (35.20), если в последней положить $n = 2$, $l = 1$, $f = 2 [1 - \delta(\rho)]$, возвратиться к размерным координатам и воспользоваться формулой (7.1а) для структурной функции фазы $D_s(\rho)$ в геометрическом приближении. Это уравнение эквивалентно уравнению переноса излучения в малоугловом приближении [55].

¹ А. М. Прохоров, Ф. В. Бужкин, К. С. Гочелашвили, В. И. Шишов, Распространение лазерного излучения в случайно-неоднородных средах. — УФН, 1974, 114, вып. 3, 415.

Часть третья

ВЛИЯНИЕ ФЛУКТУАЦИИ НА ДИФРАКЦИОННОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ ФОКУСИРУЮЩЕЙ СИСТЕМЫ

В устройстве фокусирующей системы обычно имеется часть, превращающая плоскую волну в сферическую. Это может быть линза или зеркало. Поскольку конструкция фокусирующей части несущественна, будем в дальнейшем представлять себе ее в виде линзы. Поле вблизи от фокуса не может быть вычислено на основе лучевой теории, которая дает бесконечную интенсивность в самом фокусе. На основе волновых представлений можно найти распределение интенсивности вблизи фокуса, называемое дифракционным изображением. Флуктуации амплитуды и фазы в падающей волне вызывают флуктуации дифракционного изображения — изображение «дышит». При этом не только наблюдаются отклонения интенсивности от среднего распределения, но и само среднее распределение существенно зависит от флуктуаций в падающей волне. В связи с этим в теории фокусирующих систем возникают две задачи: 1) нахождение среднего распределения в дифракционной картине; 2) исследование вопроса о распределении флуктуаций в ней.

В настоящей книге мы рассмотрим обе задачи, не ограничиваясь требованием малости флуктуаций и опираясь на работы [70—72].

Глава VIII

ОБЩИЕ ФОРМУЛЫ

§ 37. Формула Дебая

Если известно распределение амплитуды $A(F)$ и фазы $S(F)$ на поверхности сферы за линзой, то поле вблизи фокуса можно вычислить по формуле Дебая [73, 74]

$$p = \frac{i}{\lambda F} \exp(-ikF) \int A(F) \exp iS(F) \exp \frac{ikFr}{F} ds. \quad (37.1)$$

При этом начало координатной системы выбрано в фокусе (центр сферы). Положение элемента ds поверхности сферы определяется вектором \mathbf{F} , положение точки наблюдения — вектором \mathbf{r} .

Физический смысл формулы (37.1) ясен. Действительно, расстояние R от элемента сферы ds до точки наблюдения определяется формулой

$$R = \sqrt{F^2 + r^2 - 2\mathbf{F}\mathbf{r}} \approx F - \mathbf{F}\mathbf{r}/F,$$

если расстояние r много меньше фокусного расстояния ($r \ll F$). Величина $k(F - \mathbf{F}\mathbf{r}/F)$ представляет набег фазы волны, распространявшейся от элемента ds в точку наблюдения. Следовательно, возмущение, создаваемое элементом ds сферы в точке наблюдения, будет равно

$$\frac{A(\mathbf{F})}{F} \exp iS(\mathbf{F}) \exp \left[-ik \left(F - \frac{\mathbf{F}\mathbf{r}}{F} \right) \right] ds.$$

Интегрируя по участку сферы, ограниченному диафрагмой линзы, получим формулу, отличающуюся от (37.1) лишь множителем i/λ . Этот множитель появляется, если задачу решать более строго, пользуясь формулой Кирхгофа. Впрочем необходимость введения множителя i/λ вытекает и из соображений размерности.

Формула (37.1) была получена Дебаем в предположении, что фазовая aberrация отсутствует ($S = 0$) и амплитуда сферической волны вдоль фронта постоянна ($A = \text{const}$). При наличии фазовой aberrации и непостоянстве амплитуды формула Дебая остается в силе, если только изменение фазы S и относительное изменение амплитуды A на длине волны вдоль поверхности интегрирования малы по сравнению с единицей, как это показал Б. Д. Тартаковский [75]. В нашем случае это условие выполняется. Заметное изменение флуктуации уровня или фазы может произойти только на расстоянии порядка радиуса корреляции в среде, а так как длина волны много меньше радиуса корреляции, то изменение на длине волны будет мало.

Произведение $A(\mathbf{F}) \exp iS(\mathbf{F})$ представляет собой комплексную амплитуду падающей волны. Обозначая комплексную амплитуду той же буквой $A(\mathbf{F})$, запишем формулу Дебая в следующем окончательном виде:

$$p = \frac{i}{\lambda F} \exp(-ikF) \int A(\mathbf{F}) \exp ik \frac{\mathbf{F}\mathbf{r}}{F} ds. \quad (37.2)$$

В декартовых координатах с началом в фокусе и осью абсцисс, направленной вдоль главной оси линзы, имеем

$$\mathbf{F}\mathbf{r} = xx' + yy' + zz', \quad (37.3)$$

где x, y, z — координаты элемента ds сферы; x', y', z' — координаты точки наблюдения. Комплексная амплитуда должна быть задана как функция декартовых координат $A(x, y, z)$. Тогда поле p

вблизи фокуса будет найдено по формуле Дебая как функция координат x', y', z' .

Координаты x, y, z связаны соотношением $x^2 + y^2 + z^2 = F^2$, поэтому независимыми будут только две. Считая независимыми y и z , для x получим

$$x = \sqrt{F^2 - (y^2 + z^2)}.$$

В случае параксиальной линзы это соотношение можно заменить приближенным

$$x = F - \frac{1}{2} \frac{y^2 + z^2}{F}.$$

Тогда равенство (37.3) запишется следующим образом:

$$\Gamma r = \left(F - \frac{1}{2} \frac{y^2 + z^2}{F} \right) x' + y y' + z z'. \quad (37.4)$$

Ограничиваясь в дальнейшем параксиальными линзами, можем считать, что распределение комплексной амплитуды на выходной сферической поверхности линзы совпадает с распределением на ее входной плоской поверхности, и на этом основании заменить в формуле Дебая интегрирование по участку сферы интегрированием по участку плоскости, ограниченному диафрагмой линзы.

§ 38. Статистическое усреднение

Среднее распределение энергии вблизи фокуса можно характеризовать величиной

$$\langle |p(x', y', z')|^2 \rangle = \langle p(x', y', z') p^*(x', y', z') \rangle.$$

На основании формулы (37.2) имеем

$$\langle p^* p \rangle = \frac{1}{\lambda^2 F^2} \iint_{s_1 s_2} \langle A(F_1) A^*(F_2) \rangle \exp \left[\frac{ik}{F} (F_1 - F_2) r \right] ds_1 ds_2, \quad (38.1)$$

где F_1 и F_2 — вектора, определяющие положение точек с координатами соответственно (y_1, z_1) и (y_2, z_2) в отверстии диафрагмы линзы.

Величина $\langle A(F_1) A^*(F_2) \rangle$ представляет собой поперечную корреляционную функцию поля падающей волны в отверстии диафрагмы. Эта функция была вычислена в § 33. На основании формулы (33.15) имеем

$$\langle A(F_1) A^*(F_2) \rangle = A_0^2 \exp \{ -2\alpha' L [1 - \delta(y_1 - y_2, z_1 - z_2)] \},$$

где A_0 — начальная амплитуда падающей волны, L — путь, пройденный волной в случайно-неоднородной среде. Функция $\delta(y_1 - y_2, z_1 - z_2)$ определяется формулой (33.12), т. е. имеет следующий

вид:

$$\delta(y_1 - y_2, z_1 - z_2) = \frac{\int_0^{\infty} N(\xi, y_1 - y_2, z_1 - z_2) d\xi}{\int_0^{\infty} N(\xi, 0, 0) d\xi}.$$

Введем обозначение

$$\alpha = 2\alpha' L. \quad (38.2)$$

Тогда формула (38.1) окончательно переписется следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle p^* p \rangle &= \frac{A_0^2}{\lambda^2 F^2} \iint_{s_1, s_2} \exp\{\alpha [\delta(y_1 - y_2, z_1 - z_2) - 1]\} \times \\ &\times \exp\left[\frac{ik}{F}(F_1 - F_2)r\right] ds_1 ds_2. \end{aligned} \quad (38.3)$$

Теперь легко получить формулу для среднего квадрата флуктуации поля вблизи фокуса. Действительно,

$$\langle |\Delta p|^2 \rangle = \langle |p - \langle p \rangle|^2 \rangle = \langle (p^* - \langle p^* \rangle)(p - \langle p \rangle) \rangle = \langle p^* p \rangle - \langle p^* \rangle \langle p \rangle. \quad (38.4)$$

Первый член $\langle p^* p \rangle$ определяется формулой (38.3). Каждый из сомножителей $\langle p^* \rangle$ и $\langle p \rangle$ во втором члене можно найти с помощью формулы Дебая. Усредняя обе части равенства в формуле (37.2), для среднего поля $\langle p \rangle$ вблизи фокуса линзы получим

$$\langle p \rangle = \frac{i}{\lambda F} \exp(-ikF) \int_s \langle A(F) \rangle \exp\left(ik \frac{Fr}{F}\right) ds. \quad (38.5)$$

Функция $\langle A(F) \rangle$ представляет собой среднее значение поля падающей волны в отверстии диафрагмы. Эта функция была вычислена в § 32.

На основании формулы (32.14) имеем

$$\langle A(F) \rangle = A_0 \exp(-\alpha' L).$$

Вводя величину α по формуле (32.2), перепишем формулу (38.5) для среднего поля в следующем виде:

$$\langle p \rangle = \frac{iA_0}{\lambda F} \exp(-ikF) \int_s \exp\left(-\frac{\alpha}{2}\right) \exp\left(ik \frac{Fr}{F}\right) ds.$$

Формула для $\langle p^* \rangle$ отличается от формулы для $\langle p \rangle$ только знаком мнимой единицы. Поэтому

$$\langle p^* \rangle \langle p \rangle = \frac{A_0^2}{\lambda^2 F^2} \iint_{s_1, s_2} \exp(-\alpha) \exp\left[\frac{ik}{F}(F_1 - F_2)r\right] ds_1 ds_2. \quad (38.6)$$

На основании формул (38.3), (38.4) и (38.6) для среднего квадрата флуктуаций поля вблизи фокуса получаем

$$\langle |\Delta p|^2 \rangle = \frac{A_0^2}{\lambda^2 F^2} \iint_{s_1, s_2} \left\{ \exp \alpha [\delta(y_1 - y_2, z_1 - z_2) - 1] - \exp(-\alpha) \right\} \exp \left[\frac{ik}{F} (F_1 - F_2) r \right] ds_1 ds_2. \quad (38.7)$$

Из формул (38.3) и (38.7) следует, что не только флуктуация поля, но и среднее распределение поля вблизи фокуса зависит от флуктуаций поля в падающей на линзу волне.

Предположим, что коэффициент корреляции флуктуаций показателя преломления имеет гауссов вид $N = \exp(-r^2/a^2)$. Тогда из формулы (35.16) имеем

$$\delta(y_1 - y_2, z_1 - z_2) = \exp \left[-\frac{(y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}{a^2} \right].$$

Теперь основные формулы (38.3) и (38.7), характеризующие среднее распределение поля и распределение флуктуаций поля вблизи от фокуса, приобретают следующий вид:

$$\langle pp^* \rangle = \frac{A_0^2}{\lambda^2 F^2} \iint_{s_1, s_2} \exp \left\{ \alpha \left[\exp \left(-\frac{(y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}{a^2} \right) - 1 \right] \right\} \times \exp \left[\frac{ik}{F} (F_1 - F_2) r \right] ds_1 ds_2, \quad (38.8)$$

$$\langle |\Delta p|^2 \rangle = \frac{A_0^2}{\lambda^2 F^2} \iint_{s_1, s_2} \left\{ \exp \left(\alpha \left[\exp \left(-\frac{(y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}{a^2} \right) - 1 \right] \right) - \exp(-\alpha) \right\} \exp \left[\frac{ik}{F} (F_1 - F_2) r \right] ds_1 ds_2. \quad (38.9)$$

В дальнейшем мы ограничимся анализом двух последних формул. Выводы, сделанные на основе этого анализа, качественно не изменятся и при другом выборе коэффициента корреляции флуктуаций показателя преломления среды.

Однако и анализ этих двух формул представляет собой сложную математическую задачу. Желая упростить задачу, предположим, что линза ограничена квадратной диафрагмой. Учитывая это и вынося множитель $\exp(-\alpha)$ за знак интеграла, перепишем формулы (38.8) и (38.9) в следующем окончательном виде:

$$\langle pp^* \rangle = \frac{A_0^2}{\lambda^2 F^2} \exp(-\alpha) \iiint_{-h/2}^{h/2} \exp \left\{ \alpha \exp \left[-\frac{(y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}{a^2} \right] \right\} \times \exp \left[\frac{ik}{F} (F_1 - F_2) r \right] dy_1 dz_1 dy_2 dz_2, \quad (38.10)$$

$$\langle |\Delta p|^2 \rangle = \frac{A_0^2}{\lambda^2 F^2} \exp(-\alpha) \times \\ \times \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \exp \left[\alpha \exp \left(- \frac{(y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}{a^2} \right) \right] - 1 \right\} \times \\ \times \exp \left[\frac{ik}{F} (F_1 - F_2) r \right] dy_1 dz_1 dy_2 dz_2, \quad (38.11)$$

где h — размеры квадратной диафрагмы, а величина $(F_1 - F_2) r$ на основании (37.4) выражается через декартовы координаты следующим образом:

$$(F_1 - F_2) r = (y_2^2 - y_1^2 + z_2^2 - z_1^2) \frac{x'}{2F} + (y_1 - y_2) y' + (z_1 - z_2) z'. \quad (38.12)$$

Можно думать, что поле вблизи фокуса линзы, ограниченной квадратной диафрагмой, будет в основных чертах сходно с полем линзы, ограниченной круглой диафрагмой.

§ 39. Метод вычисления интегралов

Интегралы в формулах (38.10) и (38.11) могут быть вычислены с помощью рядов. Первый сомножитель под интегралом в формуле (38.10) разложим в ряд по степеням $\alpha \exp(-l^2/a^2)$, где $l^2 = (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$. Тогда получим

$$\exp \left[\alpha \exp \left(- \frac{l^2}{a^2} \right) \right] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m}{m!} \exp \left(- m \frac{l^2}{a^2} \right). \quad (39.1)$$

Это разложение справедливо при любых вещественных значениях переменных интегрирования. Тогда подынтегральное выражение будет представлять собой ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m}{m!} \exp \left[- m \frac{l^2}{a^2} + \frac{ik}{F} (F_1 - F_2) r \right]. \quad (39.2)$$

Члены этого ряда удовлетворяют неравенству

$$\left| \frac{\alpha^m}{m!} \exp \left[- m \frac{l^2}{a^2} + \frac{ik}{F} (F_1 - F_2) r \right] \right| \leq \frac{\alpha^m}{m!}.$$

Следовательно, ряд $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m}{m!}$, сходящийся при любом α , служит мажорантным рядом для ряда (39.2). По признаку Вейерштрасса, ряд (39.2) сходится равномерно для всех действительных $y_{1,2}$ и $z_{1,2}$. Кроме того, члены ряда (39.2) — непрерывные функции тех же переменных. Значит, допустимо почленное интегрирование этого ряда на любом сегменте действительной оси [76].

Примененный нами метод разложения в ряд позволяет свести задачу о пространственном распределении флуктуаций поля

вблизи фокуса к задаче о средней дифракционной картине. Действительно, если воспользоваться разложением (39.1), то в формуле (38.11) подынтегральная функция преобразуется в ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha^m}{m!} \exp \left[-m \frac{l^2}{a^2} + \frac{ik}{f} (F_1 - F_2) r \right],$$

который отличается от ряда (39.2) лишь отсутствием первого члена (суммирование в последнем выражении начинается с $m = 1$).

Таким образом, решение задачи о распределении флуктуаций можно получить из решения задачи о распределении средней интенсивности отбрасыванием первого члена, соответствующего первому члену ряда (39.2).

Мы не будем производить почленного интегрирования в формулах (38.10) и (38.11) в общем виде. Вместо этого перейдем к рассмотрению некоторых наиболее интересных частных случаев.

Глава IX

СРЕДНЕЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕНСИВНОСТИ ВБЛИЗИ ФОКУСА ЛИНЗЫ

Если размеры линзы малы по сравнению с радиусом корреляции флуктуаций показателя преломления среды ($h \ll a$), то первый множитель под интегралом в формуле (38.10) обращается в единицу и формула приобретает такой вид, какой она имела бы в отсутствие флуктуаций в падающей волне. Это значит, что флуктуации поля в падающей волне могут оказать существенное влияние на среднее распределение интенсивности вблизи фокуса линзы только в том случае, если размеры линзы велики или хотя бы того же порядка, что и радиус корреляции в среде ($h \gtrsim a$). Поэтому рассмотрим случай большой линзы ($h \gtrsim a$). Применим формулу (38.10) к исследованию среднего распределения интенсивности как в фокальной плоскости, так и вдоль главной оси линзы.

§ 40. Среднее распределение в фокальной плоскости большой линзы

Исследуем сначала среднее распределение в фокальной плоскости ($x' = 0$), не налагая никаких ограничений на величину α , но при условии, что размеры линзы велики по сравнению с радиусом корреляции ($h \gtrsim a$). На основании (38.12) формула (38.10)

приобретает вид

$$\langle P^* P \rangle = \frac{A_0^2}{\lambda^2 F^2} \exp(-\alpha) \iiint_{-h/2}^{h/2} \exp \left\{ \alpha \exp \left[- \frac{(y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}{a^2} \right] \right\} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{ik}{F} [y' (y_1 - y_2) + z' (z_1 - z_2)] \right\} dy_1 dz_1 dy_2 dz_2.$$

Представим подынтегральное выражение в виде ряда:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m}{m!} \exp \left\{ - m \frac{(y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}{a^2} + \right. \\ \left. + i \frac{k}{F} [y' (y_1 - y_2) + z' (z_1 - z_2)] \right\}. \quad (40.1)$$

Четырехкратный интеграл от первого члена ряда распадается на однократные и берется элементарно:

$$\iiint_{-h/2}^{h/2} \exp \left[i \frac{k}{F} (y' y_1 - y' y_2 + z' z_1 - z' z_2) \right] dy_1 dy_2 dz_1 dz_2 = \\ = h^4 \left(\frac{\sin khy'/2F}{khy'/2F} \right)^2 \left(\frac{\sin khz'/2F}{khz'/2F} \right)^2.$$

Интегрирование каждого из остальных членов ряда (40.1) сводится к вычислению двух двукратных интегралов, ибо переменные y и z разделяются.

Рассмотрим интеграл от m -го члена ряда

$$\frac{\alpha^m}{m!} \int_{-h/2}^{h/2} \exp \left[- m \frac{(y_1 - y_2)^2}{a^2} + i \frac{ky'}{F} (y_1 - y_2) \right] dy_1 dy_2 \times \\ \times \int_{-h/2}^{h/2} \exp \left[- m \frac{(z_1 - z_2)^2}{a^2} + i \frac{kz'}{F} (z_1 - z_2) \right] dz_1 dz_2, \quad (40.2)$$

где m' — любое число натурального ряда.

Введем новые координаты: относительную $y = y_1 - y_2$ и центра тяжести $y_0 = (y_1 + y_2)/2$.

При вычислении двукратного интеграла (40.2) существенный вклад дают значения y , удовлетворяющие условию $my^2/a^2 \lesssim 1$ или $|y| \lesssim a/\sqrt{m}$. Но $a \ll h$, тем более $a/\sqrt{m} \ll h$. Отсюда $|y| \ll h$. При этом условии (40.2) можно интегрировать по y в пределах от $-\infty$ до $+\infty$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \exp \left[- \frac{m}{a^2} (y_1 - y_2)^2 + i \frac{k}{F} y' (y_1 - y_2) \right] dy_1 dy_2 =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-h/2}^{h/2} dy_0 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{m}{a^2} y^2 + i \frac{ky'}{F} y\right) dy = \\
&= ha \sqrt{\frac{\pi}{m}} \exp\left[-\frac{1}{m} \left(\frac{kay'}{2F}\right)^2\right].
\end{aligned}$$

Второй двукратный интеграл аналогичен первому. Приходим к следующему результату для выражения (40.2):

$$\pi a^2 h^2 \frac{\alpha^m}{m!m} \exp\left[-\frac{1}{m} \left(\frac{ka}{2F}\right)^2 (y'^2 + z'^2)\right].$$

Окончательно формула (38.10) приобретает вид:

$$\begin{aligned}
\langle p^* p \rangle &= \frac{A_0^2 h^4}{\lambda^2 F^2} e^{-\alpha} \left\{ \left(\frac{\sin khy'/2F}{khy'/2F} \right)^2 \left(\frac{\sin khz'/2F}{khz'/2F} \right)^2 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\pi a^2}{h^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha^m}{m!m} \exp\left[-\frac{1}{m} \left(\frac{ka}{2F}\right)^2 (y'^2 + z'^2)\right] \right\}.
\end{aligned} \tag{40.3}$$

Мы получили решение в виде бесконечного быстро сходящегося ряда. Но для фокуса легко представить формулу (40.3) в замкнутом виде, если воспользоваться соотношением [31]

$$\text{Ei}(x) = C + \ln|x| + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m!m},$$

где $\text{Ei}(x)$ — интегральная показательная функция, а $C = 0,577216\dots$ — константа Эйлера. По своему физическому смыслу $\alpha \geq 0$. Для средней интенсивности в фокусе имеем

$$\langle p^* p \rangle = \frac{A_0^2 h^4}{\lambda^2 F^2} e^{-\alpha} \left\{ 1 + \frac{\pi a^2}{h^2} [\text{Ei}(\alpha) - \ln \alpha - C] \right\}. \tag{40.4}$$

При графическом представлении полученных результатов, в связи с малой величиной побочных максимумов, по сравнению с центральным, целесообразно рассмотреть отдельно область вблизи двух первых минимумов и в самом фокусе. Графики фиг. 13, 14 построены при соотношении между размерами диафрагмы и радиусом корреляции $h/a = 10$.

На фиг. 13 приведен график, рассчитанный по формуле (40.4). Средняя интенсивность нормирована к значению интенсивности в фокусе в отсутствие флуктуаций. Из графика видно, что средняя интенсивность в фокусе быстро спадает с ростом флуктуаций в падающей волне и уже для $\alpha = 3$ составляет 6,27% от значения в случае $\alpha = 0$.

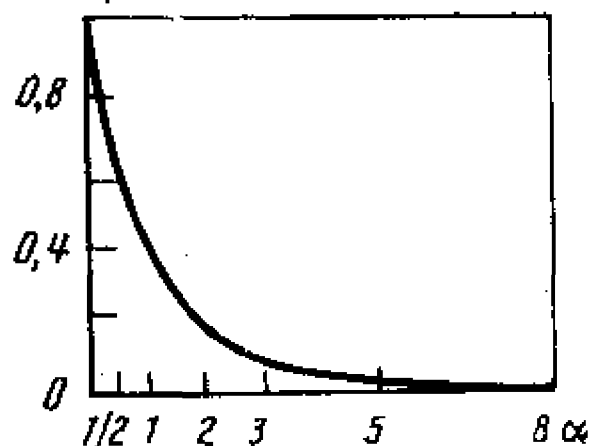
На фиг. 14 изображено распределение средней интенсивности в фокальной плоскости для наиболее интересных случаев $\alpha = 0,5; 1$ и 3 в сравнении с классической дифракционной картиной

($\alpha = 0$). По оси абсцисс отложена величина $\beta = kau'/2F$, пропорциональная расстоянию от фокуса в направлении, параллельном одной из сторон диафрагмы (для данного объектива и фиксированных длине прошедшей волны и радиусе корреляции в среде). На оси ординат средняя интенсивность взята в процентах, причем за 100% принята интенсивность в фокусе в отсутствие флуктуаций.

С ростом флуктуаций в падающей волне уменьшается четкость, контрастность дифракционного изображения, ярко выражена тенденция к монотонному убыванию средней интенсивности при удалении от фокуса. Происходит «перекачка» энергии в стороны от фокуса, «размазывание» энергии по всей фокальной плоскости.

Следует отметить быструю сходимость ряда в (40.3). Так, в самом «неблагоприятном» из рассмотренных случаев $\alpha = 3$ для вычисления с точностью до пятого десятичного знака достаточно взять восемь членов ряда.

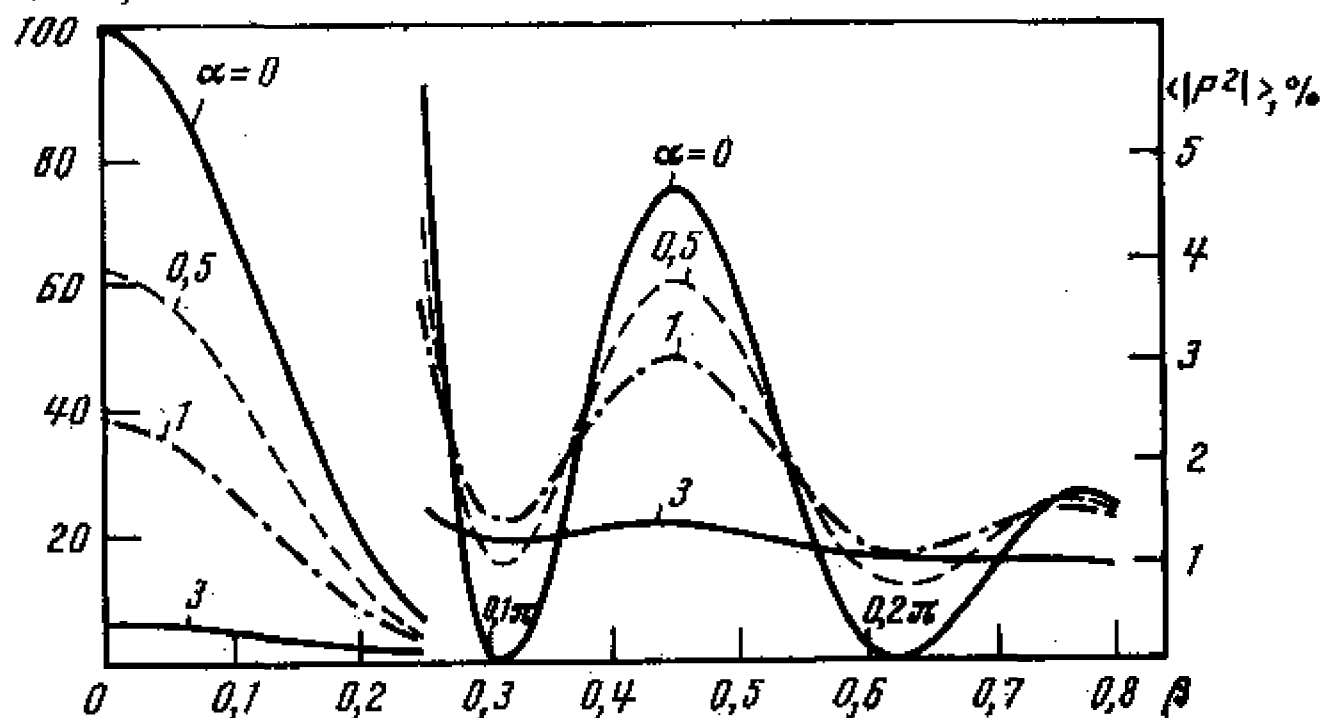
$\langle \rho^* \rho \rangle$



Фиг. 13. Зависимость средней интенсивности в фокусе от флуктуаций в падающей волне

Фиг. 14. Распределение средней интенсивности в фокальной плоскости

$\langle |\rho|^2 \rangle, \%$



§ 41. Среднее распределение
вдоль главной оси большой линзы

Теперь применим формулу (38.10) для исследования среднего распределения интенсивности вдоль главной оси линзы ($y' = z' = 0$). В этом случае формула (38.10) принимает вид:

$$\langle P^*P \rangle = \frac{A_0^2}{\lambda^2 F^2} \exp(-\alpha) \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-h/2}^{h/2} \exp \left\{ \alpha \exp \left[-\frac{(y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}{a^2} \right] \right\} \times \\ \times \exp \left[i \frac{kx'}{2F^2} (y_2^2 - y_1^2 + z_2^2 - z_1^2) \right] dy_1 dy_2 dz_1 dz_2. \quad (41.1)$$

Перепишем подынтегральное выражение в форме ряда

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!} \exp \left[-m \frac{y^2}{a^2} + i \frac{kx'}{2F^2} (y_2^2 - y_1^2 + z_2^2 - z_1^2) \right]. \quad (41.2)$$

Четырехкратный интеграл от первого члена ряда (41.2) распадается на однократные. Найдем их при помощи таблиц [31]. Обозначим

$$\frac{k|x'|}{2F^2} y_2^2 = \eta^2, \quad \frac{k|x'|}{2F^2} y_1^2 = \xi^2.$$

Тогда

$$\int_{h/2}^{h/2} \exp \left(i \frac{kx'}{2F^2} y_2^2 \right) dy_2 = 2F \sqrt{\frac{2}{k|x'|}} \int_0^{\frac{h}{2F} \sqrt{\frac{k|x'|}{2}}} \exp(\pm i\eta^2 d\eta) = \\ = \sqrt{\frac{\pi}{2}} h \frac{C \left(\frac{h}{2F} \sqrt{\frac{k|x'|}{2}} \right) \pm iS \left(\frac{h}{2F} \sqrt{\frac{k|x'|}{2}} \right)}{\frac{h}{2F} \sqrt{\frac{k|x'|}{2}}}.$$

Здесь знак определяется знаком x' . $C(z)$ и $S(z)$ — интегралы Френеля:

$$C(z) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z \cos t^2 dt; \quad S(z) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z \sin t^2 dt.$$

Далее

$$\int_{-h/2}^{h/2} \exp \left(-\frac{kx'}{2F^2} y_1^2 \right) dy_1 = 2F \sqrt{\frac{2}{k|x'|}} \int_0^{\frac{h}{2F} \sqrt{\frac{k|x'|}{2}}} \exp(\mp i\xi^2 d\xi) = \\ = \sqrt{\frac{\pi}{2}} h \frac{C \left(\frac{h}{2F} \sqrt{\frac{k|x'|}{2}} \right) \mp iS \left(\frac{h}{2F} \sqrt{\frac{k|x'|}{2}} \right)}{\frac{h}{2F} \sqrt{\frac{k|x'|}{2}}}.$$

Произведение этих интегралов равняется

$$\frac{\pi h^2}{2} \frac{C^2 \left(\frac{h}{2F} \sqrt{\frac{k|x'|}{2}} \right) + S^2 \left(\frac{h}{2F} \sqrt{\frac{k|x'|}{2}} \right)}{\left(\frac{h}{2F} \sqrt{\frac{k|x'|}{2}} \right)^2}$$

для любого значения x' . Интегралы по y и z тождественны между собой. Поэтому для первого члена ряда (41.2) имеем

$$\begin{aligned} & \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-h/2}^{h/2} \exp \left[i \frac{kx'}{2F^2} (y_2^2 - y_1^2 + z_2^2 - z_1^2) \right] dy_1 dy_2 dz_1 dz_2 = \\ & = \frac{\pi^2 h^4}{4} \left[\frac{C^2 \left(\frac{h}{2F} \sqrt{\frac{k|x'|}{2}} \right) + S^2 \left(\frac{h}{2F} \sqrt{\frac{k|x'|}{2}} \right)}{\left(\frac{1}{2F} \sqrt{\frac{k|x'|}{2}} \right)^2} \right]^2. \end{aligned}$$

Для интегрирования остальных членов ряда положим $h \gg a$ и перейдем к новым координатам: $y = y_1 - y_2$, $y_0 = (y_1 + y_2)/2$. Как было показано при вычислении выражения (40.2), можно интегрировать по y в бесконечных пределах.

Интеграл от m -го члена ряда (41.2) имеет вид

$$\int_{-h/2}^{h/2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\alpha^m}{m!} \exp \left[-m \frac{y^2}{a^2} + i \frac{kx'}{2F^2} (y_2^2 - y_1^2 + z_2^2 - z_1^2) \right] dy_1 dy_2 dz_1 dz_2. \quad (41.3)$$

Выполним интегрирование по y_1, y_2

$$\begin{aligned} & \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-h/2}^{h/2} \exp \left[-m \frac{(y_1 - y_2)^2}{a^2} + i \frac{kx'}{2F^2} (y_2^2 - y_1^2) \right] dy_1 dy_2 = \\ & = \int_{-h/2}^{h/2} dy_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left(-m \frac{y^2}{a^2} - i \frac{kx'}{F^2} y_0 y \right) dy = \\ & = \int_{-h/2}^{h/2} \exp \left[- \left(\frac{kax'}{2F^2} \right)^2 \frac{1}{m} y_0^2 \right] \sqrt{\frac{\pi a^2}{m}} dy_0 = \\ & = \frac{\pi ah}{2\sqrt{m}} \frac{\Phi(kahx'/4F^2 \sqrt{m})}{kahx'/4F^2 \sqrt{m}}, \end{aligned}$$

где $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-t^2) dt$.

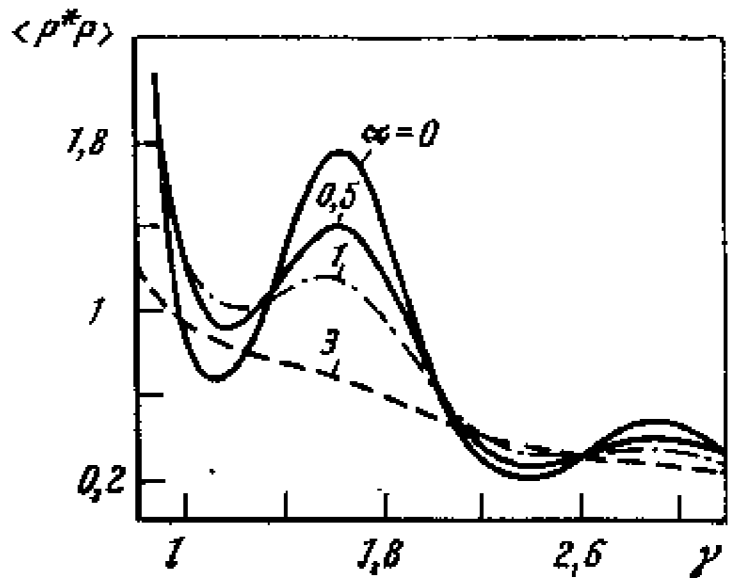
Интегрирование по z_1, z_2 в (41.3) дает тот же множитель. Следовательно, интеграл (41.3) равен

$$\frac{\pi^2 a^2 h^2}{4} \frac{\alpha^m}{m! m} \left[\frac{\Phi(kahx'/4\sqrt{m}F^2)}{kahx'/4\sqrt{m}F^2} \right]^2.$$

Формула (41.1) окончательно запишется следующим образом:

$$\langle p^*p \rangle = \frac{\pi^2 h^4 A_0^2}{4\lambda^2 F^2} e^{-\alpha} \left\{ \left[\frac{C^2 \left(\frac{h}{2F} \sqrt{\frac{k|x'|}{2}} \right) + S^2 \left(\frac{h}{2F} \sqrt{\frac{k|x'|}{2}} \right)}{\left(\frac{h}{2F} \sqrt{\frac{k|x'|}{2}} \right)^2} \right]^2 + \right. \\ \left. + \frac{a^2}{h^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha^m}{m!m} \left[\frac{\Phi \left(\frac{kah}{4\sqrt{m}F^2} x' \right)}{\frac{kah}{4\sqrt{m}F^2} x'} \right]^2 \right\}. \quad (41.4)$$

$\Phi(\varepsilon)/\varepsilon$ — четная функция ε . Следовательно, $\langle p^*p \rangle$ является четной функцией x' , т. е. распределение средней интенсивности вдоль главной оси линзы симметрично относительно фокуса.



Фиг. 15. Распределение средней интенсивности вдоль главной оси

На фиг. 15 представлено это распределение при $h/a = 10$ для $\alpha = 0; 0,5; 1$ и 3 . По оси абсцисс отложена величина $\gamma = kahx'/4F^2$, пропорциональная расстоянию от фокуса. На оси ординат средняя интенсивность взята в процентах к интенсивности в фокусе при $\alpha = 0$.

Исследование показывает, что с ростом флуктуаций в падающей волне для распределения $\langle p^*p \rangle$ вдоль главной оси имеют место те же закономерности, которые были отмечены для распределения в фокальной плоскости.

При $\alpha = 0$ формулы (40.3) и (41.4) переходят в известные классические формулы для дифракционной картины в случае квадратной диафрагмы.

§ 42. Средняя интенсивность в фокусе линзы произвольных размеров

Формулы (40.3) и (41.4), характеризующие распределение интенсивности в фокальной плоскости и вдоль главной оси, получены для большой линзы ($h \gg a$). Однако среднюю интенсивность в фокусе можно вычислить, и не делая никаких предположений о

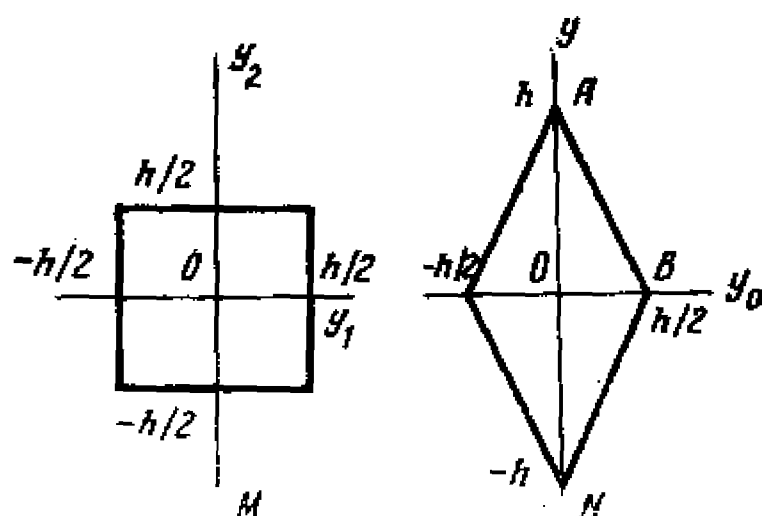
соотношении между размерами диафрагмы и радиусом корреляции. Для фокуса формулу (38.10) можно записать в таком виде:

$$\langle P^*P \rangle = \frac{A_0^2}{\lambda^2 F^2} e^{-\alpha} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-h/2}^{h/2} \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha^m}{m!} \exp\left(-m \frac{l^2}{a^2}\right) \right] dy_1 dy_2 dz_1 dz_2. \quad (42.1)$$

Проинтегрируем m -й член ряда

$$\int_{-h/2}^{h/2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\alpha^m}{m!} \exp\left[-m \frac{(y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}{a^2}\right] dy_1 dy_2 dz_1 dz_2. \quad (42.2)$$

Перейдем к новым координатам: относительной $y = y_1 - y_2$ и центра тяжести $y_0 = (y_1 + y_2)/2$. Якобиан перехода равен еди-



Фиг. 16. Преобразование области интегрирования

нице. Область интегрирования M для y_1 и y_2 (фиг. 16) преобразуется в область N для y и y_0 . Так как подынтегральное выражение есть функция четная относительно новых переменных, то интеграл по всей области N равен учетверенному интегралу, взятому по $\triangle AOB$:

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-h/2}^{h/2} \exp\left[-m \left(\frac{y_1 - y_2}{a}\right)^2\right] dy_1 dy_2 &= 4 \int_0^{h/2} dy_0 \int_0^{-2y_0+h} \exp\left[-m \left(\frac{y}{a}\right)^2\right] dy = \\ &= \frac{2\sqrt{\pi}a}{\sqrt{m}} \int_0^{h/2} \Phi\left[\frac{\sqrt{m}}{a}(h - 2y_0)\right] dy_0 = \frac{\sqrt{\pi}a}{\sqrt{m}} \int_0^h \Phi\left(\frac{\sqrt{m}t}{a}\right) dt = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}a}{\sqrt{m}} \left\{ h\Phi\left(\frac{\sqrt{m}h}{a}\right) + \frac{\exp[-m(h/a)^2] - 1}{\sqrt{m} \sqrt{\pi/a}} \right\} = \\ &= \frac{a^2}{m} \left\{ \sqrt{\pi} \frac{\sqrt{m}h}{a} \Phi\left(\frac{\sqrt{m}h}{a}\right) + \exp\left[-m\left(\frac{h}{a}\right)^2\right] - 1 \right\}. \end{aligned}$$

Для интеграла (42.2) получим

$$\frac{\alpha^m a^4}{m! m^2} \left\{ \sqrt{\pi} \frac{\sqrt{m}h}{a} \Phi\left(\frac{\sqrt{m}h}{a}\right) + \exp\left[-m\left(\frac{h}{a}\right)^2\right] - 1 \right\}^2.$$

Формула (42.1) примет следующий вид:

$$\langle P^*P \rangle = \frac{A_0^2 h^4}{\lambda^2 F^2} \exp(-\alpha) \left\{ 1 + \left(\frac{a}{h} \right)^4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha^m}{m! m^2} \left[\sqrt{\pi} \frac{\sqrt{m} h}{a} \Phi \left(\frac{\sqrt{m} h}{a} \right) + \exp[-m(h/a)^2] - 1 \right]^2 \right\}. \quad (42.3)$$

Отсюда при $h \gg a$ легко получается формула (40.4).

Глава X

ФЛУКТУАЦИИ ЗА ЛИНЗОЙ

В настоящей главе рассмотрен вопрос о распределении флуктуаций поля вблизи фокуса большой линзы, а также вопрос о флуктуациях в фокусе линзы произвольных размеров и ее усредняющем действии.

§ 43. Распределение флуктуаций

В § 39 было показано, что распределение флуктуаций поля можно получить из среднего распределения интенсивности, если отбросить в последнем первый член разложения в ряд по степеням параметра $\alpha \exp(-l^2/a^2)$. Отбрасывая первый член разложения (40.3), найдем распределение флуктуаций поля в фокальной плоскости линзы:

$$\langle |\Delta p|^2 \rangle = \frac{A_0^2 \pi a^2 h^2}{\lambda^2 F^2} e^{-\alpha} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha^m}{m! m} \exp \left[-\frac{1}{m} \left(\frac{ka}{2F} \right)^2 (y'^2 + z'^2) \right]. \quad (43.1)$$

Точно так же найдем из (41.4) распределение флуктуаций поля вдоль главной оси:

$$\langle |\Delta p|^2 \rangle = \frac{A_0^2 \pi^2 a^2 h^2}{4\lambda^2 F^2} e^{-\alpha} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha^m}{m! m} \left[\frac{\Phi(ka h x' / 4 \sqrt{m} F^2)}{4a h x' / 4 \sqrt{m} F^2} \right]^2. \quad (43.2)$$

Из формул (43.1) и (43.2) видно, что распределения флуктуаций в фокальной плоскости и вдоль главной оси большой линзы являются монотонно убывающими функциями расстояния от фокуса.

Используя разложение интегральной показательной функции в ряд

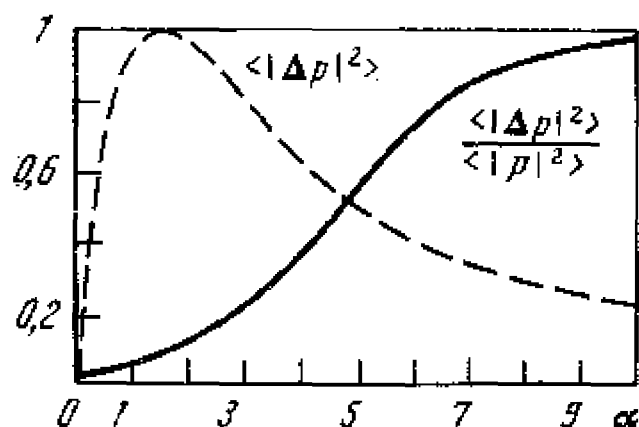
$$\text{Ei}(\alpha) = C + \ln \alpha + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha^m}{m! m},$$

для фокуса можно представить формулу (43.1) в замкнутом виде:

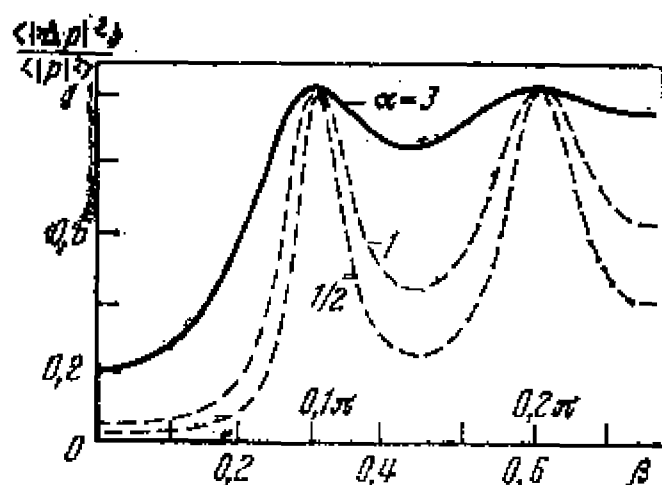
$$\langle |\Delta p|^2 \rangle = \frac{A_0^2 \pi a^2 h^2}{\lambda^2 F^2} e^{-\alpha} [\text{Ei}(\alpha) - \ln \alpha - C]. \quad (43.3)$$

Зависимость $\langle |\Delta p|^2 \rangle$ от α изображена на фиг. 17. Кривая имеет максимум при $\alpha \approx 1,5$. Средний квадрат флуктуаций поля на графике нормирован к максимальному значению в фокусе. График рассчитан при соотношении $h/a = 10$.

Наличие максимума легко понять. Вначале с ростом флуктуаций α в падающей волне флуктуации поля $\langle |\Delta p|^2 \rangle$ в фокусе



Фиг. 17. Флуктуации в фокусе



Фиг. 18. Распределение относительной флуктуации в фокальной плоскости

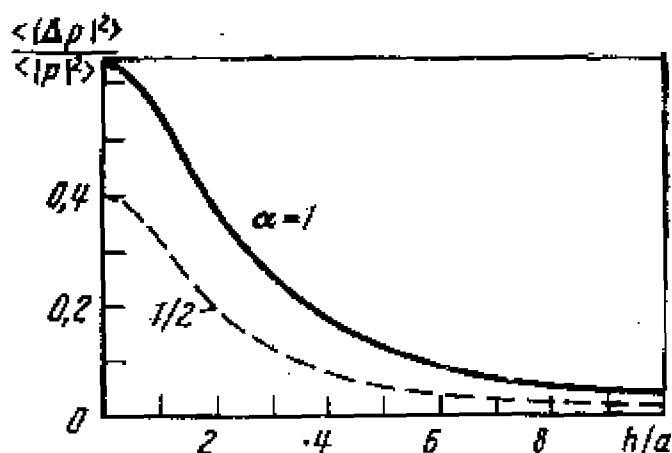
тоже растут. Когда же флуктуации фазы в падающей волне становятся достаточно большими, то парциальные волны, приходящие от различных элементов поверхности линзы, интерферируя, начинают взаимно гаситься. В результате среднее поле $\langle p \rangle$ и средняя интенсивность $\langle |p|^2 \rangle$ в фокусе уменьшаются. А так как $\langle |\Delta p|^2 \rangle = \langle |p|^2 \rangle - \langle p \rangle^2$, то уменьшаются и флуктуации поля $\langle |\Delta p|^2 \rangle$ в фокусе линзы.

Пользуясь формулами (43.3) и (40.4), легко исследовать зависимость относительной флуктуации поля $\langle |\Delta p|^2 \rangle / \langle |p|^2 \rangle$ в фокусе от величины флуктуаций в падающей волне. График этой зависимости также изображен на фиг. 17. Как видно из графика, при увеличении α относительная флуктуация поля в фокусе монотонно возрастает, стремясь к единице.

Итак, распределение флуктуаций давления является монотонно убывающей функцией расстояния от фокуса. С другой стороны, как мы видели в предыдущей главе, среднее распределение интенсивности имеет осциллирующий характер. Следовательно, относительная флуктуация давления тоже будет осциллирующей функцией расстояния от фокуса, причем максимумы этой функции будут совпадать с минимумами среднего распределения интенсивности.

Используя различные формулы последних глав, можно количественно исследовать распределение относительной флуктуации поля вблизи фокуса большой линзы. Ограничимся фокальной плоскостью. По формулам (43.1) и (40.3) на фиг. 18 построены распределения в фокальной плоскости большой линзы ($h/a = 10$) для α , равного 1/2, 1 и 3. Из сравнения с фиг. 15 видно, что максимумы распределения относительной флуктуации поля приблизительно совпадают с минимумами среднего распределения интенсивности. С ростом флуктуаций в падающей волне осцилляции уменьшаются, отчетливо выступает тенденция к спрямлению кривой распределения.

Этот результат можно было предсказать, рассмотрев исходные формулы (38.10) и (38.11). Действительно, в случае очень сильных



Фиг. 19. Зависимость относительной флуктуации в фокусе от размеров объектива

флуктуаций ($\alpha \gg 1$) в формуле (38.11) единицей можно пренебречь по сравнению с членом $\exp\left[-\alpha \exp\left(-\frac{(y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}{a^2}\right)\right]$. Тогда формула (38.11) совпадает с формулой (38.10). Это значит, что в предельном случае очень сильных флуктуаций относительная флуктуация давления будет равна единице во всех точках фокальной плоскости.

Для распределения относительной флуктуации вдоль главной оси большой линзы имеют место те же закономерности. Более того, они сохраняются и в случае малой линзы ($h \ll a$).

§ 44. Флуктуации в фокусе линзы произвольных размеров

Отбрасывая первый член в формуле (42.3), найдем средний квадрат флуктуаций давления в фокусе линзы произвольных размеров:

$$\langle |\Delta p|^2 \rangle = \frac{A_0^2 \pi a^4}{\lambda^2 F^2} e^{-\alpha} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha^m}{m! m} \left[\frac{\sqrt{m} h}{a} \Phi\left(\frac{\sqrt{m} h}{a}\right) + \frac{\exp[-m(h/a)^2] - 1}{\sqrt{\pi}} \right]^2.$$

Отсюда при $h \gg a$ вытекает формула (43.3).

На фиг. 19 представлены относительные флуктуации поля в фокусе линзы в зависимости от размеров отверстия диафрагмы для $\alpha = 1/2$ и 1. С увеличением размеров диафрагмы флуктуации уменьшаются. В этом заключается усредняющее действие большой линзы. Подтверждается этот вывод, в частности, тем фактом, что мерцание звезд гораздо более заметно невооруженным глазом, чем при наблюдении в большой телескоп.

В заключение заметим, что некоторые результаты теории, развитой в последней части книги, нашли свое приложение и дальнейшее развитие в статистической теории антенн [77—79].

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Как видно из формул (17.2) и (17.3), флуктуация фазы и флуктуация уровня определяются соответственно действительной и мнимой частями выражения

$$\Psi'(x, y, z) = -\frac{ik^2}{2\pi} \int_0^x \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x-\xi} \exp\left[i\frac{kr^2}{2(x-\xi)}\right] \mu(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta. \quad (1)$$

Покажем, что точная формула (16.9) в случае крупномасштабных неоднородностей действительно переходит в формулу (1). Предположим, что флуктуация показателя преломления может быть разложена в интеграл Фурье

$$\mu(\xi, \eta, \zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi, \kappa_2, \kappa_3) \exp[-i(\kappa_2\eta + \kappa_3\zeta)] d\kappa_2 d\kappa_3. \quad (2)$$

Тогда (16.9) перепишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \Psi'(x, y, z) &= -\frac{ik^2}{2\pi} \int_0^x \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r} \exp(ik[r - (x - \xi)]) \varphi(\xi, \kappa_2, \kappa_3) \times \\ &\times \exp[-i(\kappa_2\eta + \kappa_3\zeta)] d\xi d\eta d\zeta d\kappa_2 d\kappa_3 = \\ &= -\frac{ik^2}{2\pi} \int_0^x \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r} \exp(ikr) \exp\{i[\kappa_2(y - \eta) + \\ &+ \kappa_3(z - \zeta)]\} \exp[-i(\kappa_2y + \kappa_3z) - \\ &- ik(x - \xi)] \varphi(\xi, \kappa_2, \kappa_3) d\xi d\eta d\zeta d\kappa_2 d\kappa_3. \end{aligned} \quad (3)$$

Введем полярные координаты на плоскости $\eta\zeta$, положив

$$\begin{aligned} y - \eta &= \rho \cos \varepsilon, & z - \zeta &= \rho \sin \varepsilon, \\ \kappa_2 &= \kappa \cos \alpha, & \kappa_3 &= \kappa \sin \alpha. \end{aligned}$$

Тогда

$$\kappa_2 (y - \eta) + \kappa_3 (z - \zeta) = \kappa r \cos (\varepsilon - \alpha).$$

Интегрирование по ε в (3) дает бesselеву функцию нулевого порядка:

$$\begin{aligned} \Psi' = & - ik^2 \int_0^x d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} \exp [- ik (x - \xi) - i (\kappa_2 y + \kappa_3 z)] \varphi (\xi, \kappa_2, \kappa_3) \times \\ & \times d\kappa_2 d\kappa_3 \int_0^\infty \frac{1}{r} \exp (ikr) \mathcal{J}_0 (\kappa r) \rho d\rho. \end{aligned} \quad (4)$$

Пользуясь формулой Зоммерфельда [80], разложим сферическую волну на цилиндрические:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \exp (ikr) = & \int_0^\infty \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} \mathcal{J}_0 (\lambda \rho) \times \\ & \times \exp [- \sqrt{\lambda^2 - k^2} (x - \xi)] \quad (x - \xi > 0). \end{aligned}$$

Тогда внутренний интеграл в (4) запишется следующим образом:

$$\int_0^\infty \rho d\rho \int_0^\infty \frac{\exp [- \sqrt{\lambda^2 - k^2} (x - \xi)]}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} \mathcal{J}_0 (\kappa \rho) \mathcal{J}_0 (\lambda \rho) \lambda d\lambda. \quad (5)$$

На основании равенства

$$f(\kappa) = \int_0^\infty \rho d\rho \int_0^\infty f(\lambda) \mathcal{J}_0 (\kappa \rho) \mathcal{J}_0 (\lambda \rho) \lambda d\lambda,$$

известного под названием интеграла Фурье — Бесселя и справедливого в том случае, если интеграл $\int_0^\infty \kappa |f(\kappa)| d\kappa$ существует, двойной интеграл (5) равен

$$\frac{\exp [- \sqrt{\kappa^2 - k^2} (x - \xi)]}{\sqrt{\kappa^2 - k^2}}.$$

Формула (4) окончательно запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \Psi' = & k^2 \int_0^x \int_{-\infty}^{+\infty} (k^2 - \kappa^2)^{-1/2} \exp [- i (\kappa_2 y + \kappa_3 z)] \times \\ & \times \exp [- ik (x - \xi) + i (k^2 - \kappa^2)^{1/2} (x - \xi)] \times \\ & \times \varphi (\xi, \kappa_2, \kappa_3) d\xi d\kappa_2 d\kappa_3. \end{aligned} \quad (6)$$

Переходим к рассмотрению приближенной формулы (1). Заменяя в ней μ (ξ, η, ζ) на основании (2), получим

$$\begin{aligned} \Psi'(x, y, z) = & -\frac{ik^2}{2\pi} \int_0^x \frac{d\xi}{x-\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi, \kappa_2, \kappa_3) d\kappa_2 d\kappa_3 \times \\ & \times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[ik \frac{(y-\eta)^2}{2(x-\xi)} - i\kappa_2 \eta \right] d\eta \times \\ & \times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[ik \frac{(z-\zeta)^2}{2(x-\xi)} - i\kappa_3 \zeta \right] d\zeta. \end{aligned} \quad (7)$$

Два последних интеграла вычислим методом перевала. С этой целью введем новые переменные $\xi_1 = \xi/x$, $\eta_1 = \eta/x$, $y_1 = y/x$. Тогда первый из указанных интегралов запишется так:

$$x \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{ ikx \left[\frac{(y_1 - \eta_1)^2}{2(1 - \xi_1)} - \frac{\kappa_2}{k} \eta_1 \right] \right\} d\eta_1.$$

Обозначая

$$f(\eta_1) \equiv i \left[\frac{(y_1 - \eta_1)^2}{2(1 - \xi_1)} - \frac{\kappa_2}{k} \eta_1 \right]$$

и учитывая, что параметр kx велик ($kx \gg 1$), воспользуемся методом перевала при вычислении интеграла

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[kxf(\eta_1)] d\eta_1.$$

Точку перевала находим из условия $\partial f / \partial \eta_1 = 0$, т. е.

$$\frac{y_1 - \eta_1^0}{1 - \xi_1} + \frac{\kappa_2}{k} = 0,$$

откуда

$$\eta_1^0 = \frac{\kappa_2}{k} (1 - \xi_1) + y_1.$$

Далее,

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \eta_1^2} \right)_{\eta_1^0} = \frac{i}{1 - \xi_1}.$$

Разлагая функцию $f(\xi_1, \eta_1)$ в ряд вблизи точки перевала, получим

$$\begin{aligned} f(\eta_1) = & f(\eta_1^0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \eta_1^2} \right)_{\eta_1^0} \Delta \eta_1^2 = \\ = & -\frac{i}{2} \frac{\kappa_2^2}{k^2} (1 - \xi_1) - i \frac{\kappa_2}{k^2} y_1 + \frac{i}{2} \frac{1}{1 - \xi_1} \Delta \eta_1^2. \end{aligned}$$

Перевальный путь надо выбрать так, чтобы $\Delta\eta = (1 + i)s$, где s — действительный параметр. Тогда

$$f(\eta_1) = -\frac{i}{2} \frac{\kappa_2^2}{k^2} (1 - \xi_1) - i \frac{\kappa_2}{k} y_1 - \frac{1}{1 - \xi_1} s^2,$$

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{2i} \exp \left[-ix \frac{1}{2} \frac{\kappa_2^2}{k} (1 - \xi_1) - i\kappa_2 y \right] \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left(-\frac{\kappa x}{1 - \xi_1} s^2 \right) ds = \\ &= \sqrt{\frac{2\pi i (1 - \xi_1)}{\kappa x}} \exp \left[-\frac{i}{2} x \frac{\kappa_2^2}{k} (1 - \xi_1) - i\kappa_2 y \right]. \end{aligned}$$

Формула (7) приобретает вид

$$\begin{aligned} \Psi'(x, y, z) &= k \int_0^x \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[-i(\kappa_2 y + \kappa_3 z) - i \frac{1}{2k} (\kappa_2^2 + \kappa_3^2) (x - \xi) \right] \times \\ &\times \varphi(\xi, \kappa_2, \kappa_3) d\xi d\kappa_2 d\kappa_3. \end{aligned} \quad (8)$$

Теперь видно, что в случае крупномасштабных неоднородностей ($k \gg \kappa$) точная формула (6) переходит в приближенную (8). Для этого достаточно в амплитуде положить $(k^2 - \kappa^2)^{-1/2} \approx k^{-1}$, а в фазе ограничиться двумя членами в разложении

$$(k^2 - \kappa^2)^{1/2} \approx k \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\kappa^2}{k^2} \right).$$

ПРИЛОЖЕНИЕ II

При вычислении встречающихся в тексте (гл. V и VI) интегралов необходимо воспользоваться известным в теории вероятностей тождеством [30]

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4\pi^2 S_1 S_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[-\frac{(y_1 + y)^2 + (z_1 + z_2)^2}{2S_1} \right] \times \\ &\times \exp \left[-\frac{(y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}{2S_2} \right] dy dz = \\ &= \frac{1}{2\pi (S_1 + S_2)} \exp \left[-\frac{(y_1 + y_2)^2 + (z_1 + z_2)^2}{2(S_1 + S_2)} \right] \end{aligned}$$

(результат свертки двух законов Гаусса есть снова закон Гаусса). Полагая в этом тождестве сперва $y_1 = y_2 = \eta/2$, $z_1 = \xi/2$, $z_2 = \xi/2 + l'$, $S_1 = ia_1$, $S_2 = -ia_2$, а затем $y_1 = y_2 = \eta/2$, $z_1 =$

$= \zeta/2, Z_2 = \zeta/2 + l', S_1 = ia_1, S_2 = ia_2$, запишем два равенства:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi^2 a_1 a_2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[-\frac{\left(\frac{\eta}{2} + y\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{2} + z\right)^2}{2ia_1} \right] \times \\ & \times \exp \left[-\frac{\left(\frac{\eta}{2} - y\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{2} + l' - z\right)^2}{-2ia_2} \right] dydz = \\ & = \frac{1}{2\pi i (a_1 - a_2)} \exp \left[-\frac{\eta^2 + (\zeta + l')^2}{2i(a_1 - a_2)} \right], \\ & - \frac{1}{4\pi^2 a_1 a_2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[-\frac{\left(\frac{\eta}{2} + y\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{2} + z\right)^2}{2ia_1} \right] \times \\ & \times \exp \left[-\frac{\left(\frac{\eta}{2} - y\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{2} + l' - z\right)^2}{2ia_2} \right] dydz = \\ & = \frac{1}{2\pi i (a_1 + a_2)} \exp \left[-\frac{\eta^2 + (\zeta + l')^2}{2i(a_1 + a_2)} \right]. \end{aligned}$$

Переходя от показательных функций к тригонометрическим, получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi^2 a_1 a_2} \iint \left\{ \cos \left[\frac{\left(\frac{\eta}{2} + y\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{2} + z\right)^2}{2a_1} \right] \times \right. \\ & \times \cos \left[\frac{\left(\frac{\eta}{2} - y\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{2} + l' - z\right)^2}{2a_2} \right] + \\ & + \sin \left[\frac{\left(\frac{\eta}{2} + y\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{2} + z\right)^2}{2a_1} \right] \times \\ & \times \sin \left[\frac{\left(\frac{\eta}{2} - y\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{2} + l' - z\right)^2}{2a_2} \right] \left. \right\} dydz + \\ & + \frac{1}{4\pi^2 a_1 a_2} \iint \left\{ -i \cos \left[\frac{\left(\frac{\eta}{2} + y\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{2} + z\right)^2}{2a_1} \right] \times \right. \\ & \times \sin \left[\frac{\left(\frac{\eta}{2} - y\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{2} + l' - z\right)^2}{2a_2} \right] + \\ & + i \sin \left[\frac{\left(\frac{\eta}{2} + y\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{2} + z\right)^2}{2a_1} \right] \times \\ & \times \cos \left[\frac{\left(\frac{\eta}{2} - y\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{2} + l' - z\right)^2}{2a_2} \right] \left. \right\} dydz = \\ & = \frac{1}{2\pi (a_1 - a_2)} \sin \frac{\eta^2 + (\zeta + l')^2}{2(a_1 - a_2)} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - i \frac{1}{2\pi (a_1 - a_2)} \cos \frac{\eta^2 + (\zeta + l')^2}{2(a_1 - a_2)}, \quad (1) \\
& - \frac{1}{4\pi^2 a_1 a_2} \iint \left\{ \cos \left[\frac{\left(\frac{\eta}{2} + y\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{2} + z\right)^2}{2a_1} \right] \times \right. \\
& \times \cos \left[\frac{\left(\frac{\eta}{2} - y\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{2} + l' - z\right)^2}{2a_2} \right] - \\
& - \sin \left[\frac{\left(\frac{\eta}{2} + y\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{2} + z\right)^2}{2a_1} \right] \times \\
& \times \sin \left[\frac{\left(\frac{\eta}{2} - y\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{2} + l' - z\right)^2}{2a_2} \right] \left. \right\} dydz - \\
& - \frac{1}{4\pi^2 a_1 a_2} \iint \left\{ i \cos \left[\frac{\left(\frac{\eta}{2} + y\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{2} + z\right)^2}{2a_1} \right] \times \right. \\
& \times \sin \left[\frac{\left(\frac{\eta}{2} - y\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{2} + l' - z\right)^2}{2a_2} \right] + \\
& + i \sin \left[\frac{\left(\frac{\eta}{2} + y\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{2} + z\right)^2}{2a_1} \right] \times \\
& \times \cos \left[\frac{\left(\frac{\eta}{2} - y\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{2} + l' - z\right)^2}{2a_2} \right] \left. \right\} dydz = \\
& = \frac{1}{2\pi (a_1 + a_2)} \sin \frac{\eta^2 + (\zeta + l')^2}{2(a_1 + a_2)} - i \frac{1}{2\pi (a_1 + a_2)} \cos \frac{\eta^2 + (\zeta + l')^2}{2(a_1 + a_2)}. \quad (2)
\end{aligned}$$

Складывая эти равенства и приравнявая в отдельности действительные и мнимые части, найдем

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{4\pi^2 a_1 a_2} \iint \sin \left[\frac{\left(\frac{\eta}{2} + y\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{2} + z\right)^2}{2a_1} \right] \times \\
& \times \sin \left[\frac{\left(\frac{\eta}{2} - y\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{2} + l' - z\right)^2}{2a_2} \right] dydz = \\
& = \frac{1}{2\pi (a_1 - a_2)} \sin \left[\frac{\eta^2 + (\zeta + l')^2}{2(a_1 - a_2)} \right] + \\
& + \frac{1}{2\pi (a_1 + a_2)} \sin \left[\frac{\eta^2 + (\zeta + l')^2}{2(a_1 + a_2)} \right], \quad (3) \\
& \frac{2}{4\pi^2 a_1 a_2} \iint \cos \left[\frac{\left(\frac{\eta}{2} + y\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{2} + z\right)^2}{2a_1} \right] \times \\
& \times \sin \left[\frac{\left(\frac{\eta}{2} - y\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{2} + l' - z\right)^2}{2a_2} \right] dydz =
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi(a_1 - a_2)} \cos \left[\frac{\eta^2 + (\zeta + l')^2}{2(a_1 - a_2)} \right] +$$

$$+ \frac{1}{2\pi(a_1 + a_2)} \cos \left[\frac{\eta^2 + (\zeta + l')^2}{2(a_1 + a_2)} \right]. \quad (4)$$

Вычитая (2) из (1), получим

$$\frac{2}{4\pi^2 a_1 a_2} \iint \cos \left[\frac{\left(\frac{\eta}{2} + y\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{2} + z\right)^2}{2a_1} \right] \times$$

$$\times \cos \left[\frac{\left(\frac{\eta}{2} - y\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{2} + l' - z\right)^2}{2a_2} \right] dydz =$$

$$= \frac{1}{2\pi(a_1 - a_2)} \sin \left[\frac{\eta^2 + (\zeta + l')^2}{2(a_1 - a_2)} \right] -$$

$$- \frac{1}{2\pi(a_1 + a_2)} \sin \left[\frac{\eta^2 + (\zeta + l')^2}{2(a_1 + a_2)} \right], \quad (5)$$

$$\frac{2}{4\pi^2 a_1 a_2} \iint \sin \left[\frac{\left(\frac{\eta}{2} + y\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{2} + z\right)^2}{2a_1} \right] \times$$

$$\times \cos \left[\frac{\left(\frac{\eta}{2} - y\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{2} + l' - z\right)^2}{2a_2} \right] dydz =$$

$$= \frac{1}{2\pi(a_1 + a_2)} \cos \left[\frac{\eta^2 + (\zeta + l')^2}{2(a_1 + a_2)} \right] -$$

$$- \frac{1}{2\pi(a_1 - a_2)} \cos \left[\frac{\eta^2 + (\zeta + l')^2}{2(a_1 - a_2)} \right]. \quad (6)$$

В обозначениях § 17 формулы (3) — (6) запишутся следующим образом:

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1 \left(a_1, \sqrt{\left(\frac{\eta}{2} + y\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{2} + z\right)^2} \right) \times$$

$$\times \Phi \left(a_2, \sqrt{\left(\frac{\eta}{2} - y\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{2} + l' - z\right)^2} \right) dydz =$$

$$= \frac{1}{2} [\Phi_1(a_1 - a_2, \rho) + \Phi_1(a_1 + a_2, \rho)],$$

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \Phi_2 \left(a_1, \sqrt{\left(\frac{\eta}{2} + y\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{2} + z\right)^2} \right) \times$$

$$\times \Phi_1 \left(a_2, \sqrt{\left(\frac{\eta}{2} - y\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{2} + l' - z\right)^2} \right) dydz =$$

$$= \frac{1}{2} [\Phi_2(a_1 - a_2, \rho) + \Phi_1(a_1 + a_2, \rho)],$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_2 \left(a_1, \sqrt{\left(\frac{\eta}{2} + y\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{2} + z\right)^2} \right) \times \\
& \times \Phi_2 \left(a_2, \sqrt{\left(\frac{\eta}{2} - y\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{2} + l' - z\right)^2} \right) dydz = \\
& = \frac{1}{2} [\Phi_1(a_1 - a_2\rho) - \Phi_1(a_1 + a_2, \rho)], \\
& \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1 \left(a_1, \sqrt{\left(\frac{\eta}{2} + y\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{2} + z\right)^2} \right) \times \\
& \times \Phi_2 \left(a_2, \sqrt{\left(\frac{\eta}{2} - y\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{2} + l' - z\right)^2} \right) dydz = \\
& = \frac{1}{2} [\Phi_2(a_1 + a_2, \rho) - \Phi_2(a_1 - a_2, \rho)],
\end{aligned}$$

где

$$\rho^2 = \eta^2 + (\zeta + l')^2.$$

При рассмотрении вопроса о флуктуациях уровня и фазы и корреляции между ними в точке приема необходимо положить $l' = 0$. При рассмотрении поперечной автокорреляции флуктуаций уровня (или фазы) в различных точках $l' \neq 0$.

ПРИЛОЖЕНИЕ III

Покажем, что добавочный член $2i\alpha'^2 f^2 \Delta x \langle M_{nl}^0 \rangle$, который должен появиться в уравнении (35.20) в результате замены в уравнении (35.18) $\langle M_{nl}^0 \rangle$ на $\langle M_{nl} \rangle$, точно компенсируется членами четвертого порядка относительно μ , если их учесть в исходном уравнении (35.5) при вычислении выражения

$$2 \sum_{\lambda=1}^{\lambda=l} \langle \mu_{\lambda} M_{nl} \rangle - 2 \sum_{\nu=l+1}^{\nu=n} \langle \mu_{\nu} M_{nl} \rangle. \quad (1)$$

На основании формулы (35.19) имеем

$$\begin{aligned}
f^2 = & \sum_{\lambda} \sum_{\lambda_1} \sum_{\lambda_2} \sum_{\lambda_3} \delta_{\lambda\lambda_1} \delta_{\lambda_2\lambda_3} + \sum_{\nu} \sum_{\nu_1} \sum_{\nu_2} \sum_{\nu_3} \delta_{\nu\nu_1} \delta_{\nu_2\nu_3} + 4 \sum_{\lambda} \sum_{\nu} \sum_{\lambda_1} \sum_{\nu_1} \delta_{\lambda\nu} \delta_{\lambda_1\nu_1} + \\
& + 2 \sum_{\lambda} \sum_{\lambda_1} \sum_{\nu} \sum_{\nu_1} \delta_{\lambda\lambda_1} \delta_{\nu\nu_1} - 4 \sum_{\lambda} \sum_{\lambda_1} \sum_{\lambda_2} \sum_{\nu} \delta_{\lambda\lambda_1} \delta_{\lambda_2\nu} - 4 \sum_{\nu} \sum_{\nu_1} \sum_{\lambda} \sum_{\nu_2} \delta_{\nu\nu_1} \delta_{\lambda\nu_2},
\end{aligned} \quad (2)$$

откуда следует, что добавочный член распадается на шесть слагаемых, содержащих четырехкратные суммы.

С другой стороны, все члены четвертого относительно μ порядка можно так объединить в шесть группы, чтобы каждая группа

компенсировала одно из слагаемых в добавочном члене. Покажем это на примере первого слагаемого в добавочном члене, содержащего суммирование только по индексу λ . В этом случае нужно учесть в выражении (1) все члены вида $\mu_\lambda A''_{\lambda_1}$, $\mu_\lambda A'_{\lambda_1} A''_{\lambda_1}$, при $\lambda_2 \neq \lambda_1$ и $\mu_\lambda A'_{\lambda_1} A'_{\lambda_2} A''_{\lambda_2}$, при $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.

Член вида $\langle \mu A''' \rangle$ был рассмотрен в § 32. Совершенно так же вычисляется член вида $\mu_\lambda A''_{\lambda_1}$

$$\begin{aligned} \left\langle \mu_\lambda A''_{\lambda_1} \prod_{\lambda' \neq \lambda_1} A_{\lambda'}^0 \prod A_{\nu'}^{0*} \right\rangle &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{\xi} \int_{x_0}^{\xi_1} \frac{d\xi d\xi_1 d\xi_2}{(x-\xi)(x-\xi_1)(x-\xi_2)} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[\frac{i\rho^2}{2(x-\xi)} + \frac{i\rho_1^2}{2(\xi-\xi_1)} + \frac{i\rho_2^2}{2(\xi_1-\xi_2)} \right] \langle \mu(x, y_\lambda, z_\lambda) \mu(\xi, \eta, \zeta) \times \\ &\times \mu(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) \mu(\xi_2, \eta_2, \zeta_2) A^0(\xi_2, \eta_2, \zeta_2) \prod_{\lambda' \neq \lambda_1} A_{\lambda'}^0 \prod A_{\nu'}^{0*} \rangle \times \\ &\times d\eta d\zeta d\eta_1 d\zeta_1 d\eta_2 d\zeta_2, \end{aligned}$$

где

$$\rho^2 = (y_\lambda - \eta)^2 + (z_\lambda - \zeta)^2; \quad \rho_1^2 = (\eta - \eta_1)^2 + (\zeta - \zeta_1)^2;$$

$$\rho_2^2 = (\eta_1 - \eta_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2)^2.$$

Применяя метод стационарной фазы при вычислении интегралов по переменным η , ζ , η_1 , ζ_1 , η_2 , ζ_2 и учитывая, что μ и A^0 статистически независимы всюду, кроме пренебрежимо малой области $\xi_2 - x_0 \sim a$, получим

$$\begin{aligned} \left\langle \mu_\lambda A''_{\lambda_1} \prod_{\lambda' \neq \lambda_1} A_{\lambda'}^0 \prod A_{\nu'}^{0*} \right\rangle &= \\ &= i \langle M_{nl}^0 \rangle \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{\xi} \int_{x_0}^{\xi_1} \langle \mu(x, y_\lambda, z_\lambda) \mu(\xi, y_{\lambda_1}, z_{\lambda_1}) \times \\ &\times \mu(\xi_1, y_{\lambda_1}, z_{\lambda_1}) \mu(\xi_2, y_{\lambda_1}, z_{\lambda_1}) \rangle d\xi d\xi_1 d\xi_2. \end{aligned} \quad (3)$$

В случае нормального распределения флуктуаций показателя преломления момент четвертого порядка выражается через моменты второго порядка согласно формуле (32.24). В соответствии с этим интеграл в формуле (3) распадается на три интеграла, из которых лишь один содержит член, пропорциональный $\Delta\lambda$. Отбрасывая два других интеграла (пропорциональных a) и повторяя выкладки § 30, найдем:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{\xi} \int_{x_0}^{\xi_1} \langle \mu(x, y_\lambda, z_\lambda) \mu(\xi, y_{\lambda_1}, z_{\lambda_1}) \mu(\xi_1, y_{\lambda_1}, z_{\lambda_1}) \mu(\xi_2, y_{\lambda_1}, z_{\lambda_1}) \rangle d\xi d\xi_1 d\xi_2 &= \\ &= \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{\xi} \int_{x_0}^{\xi_1} \langle \mu(x, y_\lambda, z_\lambda) \mu(\xi, y_{\lambda_1}, z_{\lambda_1}) \rangle \langle \mu(\xi_1, y_{\lambda_1}, z_{\lambda_1}) \mu(\xi_2, y_{\lambda_1}, z_{\lambda_1}) \rangle \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times d\xi_1 d\xi_2 = \langle \mu^2 \rangle^2 \int_{x_0}^x N(x - \xi, y_\lambda - y_{\lambda_1}, z_\lambda - z_{\lambda_1}) d\xi \times \\ & \times \int_{x_0}^{\xi_1} \int_{x_0}^{\xi_2} N(\xi_1 - \xi_2, 0, 0) d\xi_1 d\xi_2 = \alpha' \delta(y_\lambda - y_{\lambda_1}, z_\lambda - z_{\lambda_1}) \Delta x = \alpha' \delta_{\lambda\lambda_1} \Delta x. \end{aligned} \quad (4)$$

На основании (4) формула (3) окончательно запишется так:

$$\left\langle \mu_\lambda A_{\lambda_1}'' \prod_{\lambda' \neq \lambda_1} A_{\lambda'}^0 \prod A_{\nu}^{*0} \right\rangle = -i \alpha' \Delta x \langle M_{nl}^0 \rangle \delta_{\lambda\lambda_1}. \quad (5)$$

Теперь рассмотрим член вида $\mu_\lambda A_{\lambda_1}' A_{\lambda_1}''$, при $\lambda_2 \neq \lambda_1$

$$\begin{aligned} & \left\langle \mu_\lambda A_{\lambda_1}' A_{\lambda_1}'' \prod_{\lambda' \neq \lambda_1 + \lambda_2} A_{\lambda'}^0 \prod A_{\nu}^{*0} \right\rangle \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{x_0}^x d\xi \int_{x_0}^{\xi_1} d\xi_1 \int_{x_0}^{\xi_2} \frac{d\xi_2}{(x - \xi)(x - \xi_1)(\xi_1 - \xi_2)} \times \\ & \times \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[\frac{i\rho^2}{2(x - \xi)} + \frac{i\rho_1^2}{2(x - \xi_1)} + \frac{i\rho_2^2}{2(\xi_1 - \xi_2)} \right] \times \\ & \times \langle \mu(x, y_\lambda, z_\lambda) \mu(\xi, \eta, \zeta) \mu(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) \mu(\xi_2, \eta_2, \zeta_2) \rangle \times \\ & \times \left\langle A^0(\xi, \eta, \zeta) A^0(\xi_2, \eta_2, \zeta_2) \prod_{\lambda' \neq \lambda_1 \neq \lambda_2} A_{\lambda'}^0 \prod A_{\nu}^{*0} \right\rangle d\eta d\zeta d\eta_1 d\xi_1 d\eta_2 d\zeta_2, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \rho^2 &= (y_{\lambda_1} - \eta)^2 + (z_{\lambda_1} - \zeta)^2, \quad \rho_1^2 = (y_{\lambda_2} - \eta_1)^2 + (z_{\lambda_2} - \zeta_1)^2; \\ \rho_2^2 &= (\eta_1 - \eta_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2)^2. \end{aligned}$$

Пользуясь методом стационарной фазы, найдем:

$$\begin{aligned} & \left\langle \mu_\lambda A_{\lambda_1}' A_{\lambda_1}'' \prod_{\lambda' \neq \lambda_1 \neq \lambda_2} A_{\lambda'}^0 \prod A_{\nu}^{*0} \right\rangle = \\ & = -i \langle M_{nl}^0 \rangle \int_{x_0}^x d\xi \int_{x_0}^{\xi_1} d\xi_1 \int_{x_0}^{\xi_2} d\xi_2 \langle \mu(x, y_\lambda, z_\lambda) \times \\ & \times \mu(\xi, y_{\lambda_1}, z_{\lambda_1}) \mu(\xi_1, y_{\lambda_2}, z_{\lambda_2}) \mu(\xi_2, y_{\lambda_2}, z_{\lambda_2}) \rangle. \end{aligned} \quad (6)$$

В соответствии с формулой (32.24) интеграл в формуле (6) распадается на три интеграла, и она преобразуется к виду:

$$\left\langle \mu_\lambda A_{\lambda_1}' A_{\lambda_1}'' \prod_{\lambda' \neq \lambda_1 \neq \lambda_2} A_{\lambda'}^0 \prod A_{\nu}^{*0} \right\rangle = -i \langle \mu^2 \rangle^2 \langle M_{nl}^0 \rangle (I_1 + I_2 + I_3), \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{x_0}^x d\xi \int_{x_0}^{\xi_1} d\xi_1 \int_{x_0}^{\xi_2} d\xi_2 N(x - \xi, y_\lambda - y_{\lambda_1}, z_\lambda - z_{\lambda_1}) N(\xi_1 - \xi_2, 0, 0), \\ I_2 &= \int_{x_0}^x d\xi \int_{x_0}^{\xi_1} d\xi_1 \int_{x_0}^{\xi_2} d\xi_2 N(x - \xi_1, y_\lambda - y_{\lambda_1}, z_\lambda - z_{\lambda_1}) \times \\ & \times N(\xi - \xi_2, y_{\lambda_1} - y_{\lambda_1}, z_{\lambda_1} - z_{\lambda_2}), \end{aligned}$$

$$I_3 = \int_{x_0}^x d\xi \int_{x_0}^x d\xi_1 \int_{x_0}^{\xi_1} d\xi_2 N(x - \xi_2, y_{\lambda_2} - y_{\lambda_1}, z_{\lambda_2} - z_{\lambda_1}) \times \\ \times N(\xi - \xi_1, y_{\lambda_1} - y_{\lambda_2}, z_{\lambda_1} - z_{\lambda_2}). \quad (8)$$

Легко убедиться в том, что два интеграла I_1 и I_2 содержат члены, пропорциональные Δx . Перепишем интеграл I_1 следующим образом:

$$I_1 = \int_{x_0}^x N(x - \xi, y_{\lambda} - y_{\lambda_1}, z_{\lambda} - z_{\lambda_1}) d\xi \int_{x_0}^x d\xi_1 \int_{x_0}^{\xi_1} N(\xi_1 - \xi_2, 0, 0) d\xi_2. \quad (9)$$

Пользуясь формулой (32.19), преобразуем внутренние интегралы в формуле (9) к виду $(x - x_0) \int_0^{x-x_0} N(\xi', 0, 0) d\xi'$. Тогда формула (9) примет вид:

$$I_1 = \Delta x \int_0^{\infty} N(\xi', 0, 0) d\xi' \int_0^{\infty} N(\xi'', y_{\lambda} - y_{\lambda_1}, z_{\lambda} - z_{\lambda_1}) d\xi''.$$

В интеграле I_2 область существенных значений ξ_1 лежит в интервале $x - \xi_1 \sim a$. Поэтому верхний предел ξ_1 внутреннего интеграла можно заменить на x . Совершаемая при этом ошибка будет величиной порядка $a/\Delta x$. После такой замены перепишем интеграл I_2 следующим образом:

$$I_2 = \int_{x_0}^x N(x - \xi_1, y_{\lambda} - y_{\lambda_2}, z_{\lambda} - z_{\lambda_2}) d\xi_1 \times \\ \times \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x N(\xi - \xi_2, y_{\lambda_1} - y_{\lambda_2}, z_{\lambda_1} - z_{\lambda_2}) d\xi d\xi_2. \quad (10)$$

Двойной интеграл в формуле (10) преобразуется:

$$2(x - x_0) \int_0^{x-x_0} N(\xi, y_{\lambda_1} - y_{\lambda_2}, z_{\lambda_1} - z_{\lambda_2}) d\xi,$$

и формула (10) приобретает вид:

$$I_2 = 2\Delta x \int_0^{\infty} N(\xi'', y_{\lambda} - y_{\lambda_2}, z_{\lambda} - z_{\lambda_2}) d\xi'' \times \\ \times \int_0^{\infty} N(\xi', y_{\lambda_1} - y_{\lambda_2}, z_{\lambda_1} - z_{\lambda_2}) d\xi'. \quad (11)$$

Коэффициент 2 в формуле (11) обусловлен тем, что переменные интегрирования ξ и ξ_2 в формуле (10), в отличие от переменных ξ и ξ_1 в формуле (9), не связаны условием $\xi_2 \leq \xi$. Иными словами, разность $\xi - \xi_2$ может принимать как положительные, так и отри-

пательные значения, изменяясь в пределах от $-(x - x_0)$ до $x - x_0$, в то время как разность $\xi - \xi_1$ изменяется в пределах от 0 до $x - x_0$.

Третий интеграл I_3 не содержит членов, пропорциональных Δx . Из формулы (8) видно, что область существенных значений ξ_2 удовлетворяет условию $x - \xi_2 \sim a$. Так как $\xi_2 \ll \xi_1$, то область изменения ξ_1 тоже не превышает a . Наконец, область существенных значений ξ следует из условия $\xi - \xi_1 \sim a$, т. е. по порядку величины равна a . Итак, интеграл I_3 по порядку величины равен a^3 , в то время как интегралы I_1 и I_2 имеют порядок $\Delta x \cdot a^2$.

Пренебрегая интегралом I_3 по сравнению с интегралами I_1 и I_2 , а также используя обозначение (35.16), преобразуем формулу (7) к следующему окончательному виду:

$$\left\langle \mu_\lambda A'_{\lambda_1} A'_{\lambda_2} \prod_{\lambda' \neq \lambda_1 + \lambda_2} A_{\lambda'}^0 \prod A_{\nu'}^{*0} \right\rangle = -i\alpha' \Delta x \langle M_{nl}^0 \rangle (\delta_{\lambda\lambda_1} + 2\delta_{\lambda\lambda_2} \delta_{\lambda_1\lambda_2}). \quad (12)$$

Наконец, рассмотрим член вида $\mu_\lambda A'_{\lambda_1} A'_{\lambda_2} A'_{\lambda_3}$ при $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$. На основании (32.5) имеем

$$\begin{aligned} \left\langle \mu_\lambda A'_{\lambda_1} A'_{\lambda_2} A'_{\lambda_3} \prod_{\lambda' + \lambda_1 \neq \lambda_2 + \lambda_3} A_{\lambda'}^0 \prod A_{\nu'}^{*0} \right\rangle &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{x_0}^x d\xi \int_{x_0}^x d\xi_1 \int_{x_0}^x d\xi_2 \times \\ &\times \frac{1}{(x - \xi)(x - \xi_1)(x - \xi_2)} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int \exp \left[\frac{i\rho^2}{2(x - \xi)} + \frac{i\rho_1^2}{2(x - \xi_1)} + \frac{i\rho_2^2}{2(x - \xi_2)} \right] \times \\ &\times \langle \mu(x, y_\lambda, z_\lambda) \mu(\xi, \eta, \zeta) \mu(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) \mu(\xi_2, \eta_2, \zeta_2) \rangle \times \\ &\times \left\langle A^0(\xi, \eta, \zeta) A^0(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) A^0(\xi_2, \eta_2, \zeta_2) \prod_{\lambda' + \lambda_1 + \lambda_2 \neq \lambda_3} A_{\lambda'}^0 \prod A_{\nu'}^{*0} \right\rangle \times \\ &\times d\eta d\zeta d\eta_1 d\xi_1 d\eta_2 d\xi_2, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \rho^2 &= (y_\lambda - \eta)^2 + (z_\lambda - \zeta)^2; \quad \rho_1^2 = (y_{\lambda_1} - \eta_1)^2 + (z_{\lambda_1} - \zeta_1)^2; \\ \rho_2^2 &= (y_{\lambda_2} - \eta_2)^2 + (z_{\lambda_2} - \zeta_2)^2. \end{aligned}$$

Пользуясь методом стационарной фазы, найдем

$$\begin{aligned} \left\langle \mu_\lambda A'_{\lambda_1} A'_{\lambda_2} A'_{\lambda_3} \prod_{\lambda' + \lambda_1 + \lambda_2 \neq \lambda_3} A_{\lambda'}^0 \prod A_{\nu'}^{*0} \right\rangle &= -i \langle M_{nl}^0 \rangle \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x d\xi d\xi_1 d\xi_2 \times \\ &\times \langle \mu(x, y_\lambda, z_\lambda) \mu(\xi, y_{\lambda_1}, z_{\lambda_1}) \mu(\xi_1, y_{\lambda_2}, z_{\lambda_2}) \mu(\xi_2, y_{\lambda_3}, z_{\lambda_3}) \rangle = \\ &= -i \langle \mu^2 \rangle^2 \langle M_{nl}^0 \rangle (I_1 + I_2 + I_3), \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x d\xi d\xi_1 d\xi_2 N(x - \xi, y_\lambda - y_{\lambda_1}, z_\lambda - z_{\lambda_1}) \times \\
 &\quad \times N(\xi_1 - \xi_2, y_{\lambda_1} - y_{\lambda_2}, z_{\lambda_1} - z_{\lambda_2}) = \\
 &= 2\Delta x \int_0^\infty N(\xi', y_\lambda - y_{\lambda_1}, z_\lambda - z_{\lambda_1}) d\xi' \times \\
 &\quad \times \int_0^\infty N(\xi'', y_{\lambda_1} - y_{\lambda_2}, z_{\lambda_1} - z_{\lambda_2}) d\xi''; \quad (14)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x d\xi d\xi_1 d\xi_2 N(x - \xi_1, y_\lambda - y_{\lambda_2}, z_\lambda - z_{\lambda_2}) \times \\
 &\quad \times N(\xi - \xi_2, y_{\lambda_1} - y_{\lambda_2}, z_{\lambda_1} - z_{\lambda_2}) = \\
 &= 2\Delta x \int_0^\infty N(\xi', y_\lambda - y_{\lambda_2}, z_\lambda - z_{\lambda_2}) d\xi' \times \\
 &\quad \times \int_0^\infty N(\xi'', y_{\lambda_1} - y_{\lambda_2}, z_{\lambda_1} - z_{\lambda_2}) d\xi''; \quad (15)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x d\xi d\xi_1 d\xi_2 N(x - \xi_2, y_\lambda - y_{\lambda_1}, z_\lambda - z_{\lambda_1}) \times \\
 &\quad \times N(\xi - \xi_1, y_{\lambda_1} - y_{\lambda_2}, z_{\lambda_1} - z_{\lambda_2}) = \\
 &= 2\Delta x \int_0^\infty N(\xi', y_\lambda - y_{\lambda_1}, z_\lambda - z_{\lambda_1}) d\xi' \times \\
 &\quad \times \int_0^\infty N(\xi'', y_{\lambda_1} - y_{\lambda_2}, z_{\lambda_1} - z_{\lambda_2}) d\xi''. \quad (16)
 \end{aligned}$$

Подставляя найденные для интегралов I_1, I_2, I_3 выражения (14), (15) и (16) в формулу (13), получим

$$\begin{aligned}
 &\left\langle \mu_\lambda A'_{\lambda_1} A'_{\lambda_2} A'_{\lambda_3} \prod_{\lambda' = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} A_{\lambda'}^0 \prod A_\nu^{*0} \right\rangle = \\
 &= -2i\alpha'^2 \Delta x \langle M_{nl}^0 \rangle (\delta_{\lambda\lambda_1} \delta_{\lambda_2\lambda_3} + \delta_{\lambda\lambda_2} \delta_{\lambda_1\lambda_3} + \delta_{\lambda\lambda_3} \delta_{\lambda_1\lambda_2}). \quad (17)
 \end{aligned}$$

Итак, найдены все члены четвертого порядка, принадлежащие одной группе. Они определяются формулами (5), (12) и (17).

Просуммируем члены, соответствующие фиксированному значению λ . Временно отбрасывая общий коэффициент $-2i\alpha'^2 \Delta x \langle M_{nl}^0 \rangle$, получим

$$\begin{aligned} & \sum_{\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3} \sum \sum 2 (\delta_{\lambda\lambda_1} \delta_{\lambda_2\lambda_3} + \delta_{\lambda\lambda_2} \delta_{\lambda_1\lambda_3} + \delta_{\lambda\lambda_3} \delta_{\lambda_1\lambda_2}) + \\ & + \sum_{\lambda_1 \neq \lambda_2} \sum (\delta_{\lambda\lambda_1} + 2\delta_{\lambda\lambda_2} \delta_{\lambda_1\lambda_2}) + \sum_{\lambda_1} \delta_{\lambda\lambda_1}. \end{aligned} \quad (18)$$

Выражение $\delta_{\lambda\lambda_1} \delta_{\lambda_2\lambda_3} + \delta_{\lambda\lambda_2} \delta_{\lambda_1\lambda_3} + \delta_{\lambda\lambda_3} \delta_{\lambda_1\lambda_2}$ симметрично относительно индексов $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, т. е. не изменяет своего вида при перестановке любой пары индексов. Число перестановок — 6. Поэтому суммирование по области $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ можно заменить суммированием по области $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$ с последующим делением на 6. Итак,

$$\begin{aligned} & \sum_{\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3} \sum \sum (\delta_{\lambda\lambda_1} \delta_{\lambda_2\lambda_3} + \delta_{\lambda\lambda_2} \delta_{\lambda_1\lambda_3} + \delta_{\lambda\lambda_3} \delta_{\lambda_1\lambda_2}) = \\ & = \frac{1}{6} \sum_{\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3} \sum \sum (\delta_{\lambda\lambda_1} \delta_{\lambda_2\lambda_3} + \delta_{\lambda\lambda_2} \delta_{\lambda_1\lambda_3} + \delta_{\lambda\lambda_3} \delta_{\lambda_1\lambda_2}). \end{aligned} \quad (19)$$

Теперь индексы $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ изменяются в одних и тех же пределах, принимая целые значения от 1 до l . Следовательно, равны трехкратные суммы в правой части равенства (19), т. е.

$$\sum_{\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3} \sum \sum \delta_{\lambda\lambda_1} \delta_{\lambda_2\lambda_3} = \sum_{\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3} \sum \sum \delta_{\lambda\lambda_2} \delta_{\lambda_1\lambda_3} = \sum_{\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3} \sum \sum \delta_{\lambda\lambda_3} \delta_{\lambda_1\lambda_2}.$$

Поэтому первый член выражения (18) преобразуется к следующему виду:

$$\sum_{\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3} \sum \sum 2 (\delta_{\lambda\lambda_1} \delta_{\lambda_2\lambda_3} + \delta_{\lambda\lambda_2} \delta_{\lambda_1\lambda_3} + \delta_{\lambda\lambda_3} \delta_{\lambda_1\lambda_2}) = \sum_{\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3} \sum \sum \delta_{\lambda\lambda_1} \delta_{\lambda_2\lambda_3}. \quad (20)$$

Если в последнем выражении приравнять между собой только два индекса ($\lambda_2 = \lambda_3$ или $\lambda_3 = \lambda_1$ или $\lambda_1 = \lambda_2$), то появятся слагаемые, входящие в состав второго члена

$$\sum_{\lambda_1 \neq \lambda_2} \sum (\delta_{\lambda\lambda_1} + 2\delta_{\lambda\lambda_2} \delta_{\lambda_1\lambda_2})$$

выражения (18). Приравнивая три индекса, получим последний член выражения (18).

Таким образом, выражение (18) представляет собой трехкратную сумму по индексам $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ вида

$$\sum_{\lambda_1} \sum_{\lambda_2} \sum_{\lambda_3} \delta_{\lambda\lambda_1} \delta_{\lambda_2\lambda_3}.$$

В этой сумме три индекса λ_1 , λ_2 и λ_3 независимо друг от друга пробегают все значения от 1 до l .

В соответствии с выражением (2) трехкратную сумму необходимо просуммировать еще по индексу λ и умножить на отброшенный коэффициент $-2i\alpha'^2\Delta x \langle M_{ni}^0 \rangle$. Тогда получим член $-2i\alpha'^2\Delta x \langle M_{ni}^0 \rangle \sum_{\lambda} \sum_{\lambda_1} \sum_{\lambda_2} \sum_{\lambda_3} \delta_{\lambda\lambda_1} \delta_{\lambda_2\lambda_3}$, компенсирующий одно из слагаемых в добавочном члене.

Точно так же можно доказать, что члены вида $\mu_\nu A_{\nu_1}''$, $\mu_\nu A_{\nu_1}' A_{\nu_2}''$ при $\nu_2 \neq \nu_1$ и $\mu_\nu A_{\nu_1}' A_{\nu_2}' A_{\nu_3}'$ при $\nu_1 < \nu_2 < \nu_3$ компенсируют в добавочном члене четырехкратную сумму по индексу ν . Объединяя в группу остальные члены четвертого порядка, легко показать, что каждая группа членов компенсирует соответствующее слагаемое в добавочном члене.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Брежневских. Волны в слоистых средах. М., «Наука», 1973.
2. Ю. Н. Барабаненков, Ю. А. Крайцов, С. М. Рытов, В. И. Татарский. Состояние теории распространения волн в случайно-неоднородной среде.— УФН, 1970, 102, вып. 1, 3.
3. С. М. Рытов. Дифракция света на ультразвуковых волнах.— Изв. АН СССР, серия физич., 1937, № 2, 223.
4. Л. А. Чернов. Локальный метод расчета сильных флуктуаций поля в задаче о распространении волн в среде со случайными неоднородностями. VI Всес. акуст. конф. Реферат АИИ — 1. М., 1968.
5. L. Libermann. Effect of temperature inhomogeneities in the ocean on the propagation of sound.— J. Acoust. Soc. America, 1951, 23, N 5.
6. Е. Скучик. Температурная микроструктура моря и флуктуации уровня звука. Сб. «Подводная акустика». М., «Мир», 1965, стр. 247.
7. Г. И. Приймак. Некоторые результаты исследований статистической микронеоднородности морской среды.— Изв. АН СССР, серия геофизич., 1961, 8, 1224.
8. В. С. Гостев, Р. Ф. Швачко. О микроструктуре температурного поля в океане.— Физика атмосферы и океана, 1969, 5, № 10, 1066.
9. N. W. Lord. Fluctuating acoustic refraction in deep ocean water. Fourth Internat. Congr. on Acoustics. K 25. Copenhagen, 21—28 August, 1962.
10. С. М. Рытов. Введение в статистическую радиофизику. М., «Наука», 1966.
11. Н. Г. Денисов. О влиянии области отражения на рассеяние радиоволн в ионосфере.— Изв. вузов, радиофизика, 1960, 3, № 2, 208.
12. Ф. Г. Басс, С. Я. Брауде, Э. А. Канер, А. В. Мень. Флуктуации электромагнитных волн в тропосфере при наличии поверхности раздела.— УФН, 1961, 73, вып. 1, 89.
13. В. М. Комиссаров. Поле точечного излучателя в плоскостой среде со случайной неоднородностью.— Изв. вузов, радиофизика, 1967, 10, № 4, 498.
14. K. Gödecke. Messungen der atmosphärische Turbulenz.— Ann. Hydrogr., 1935, N 10, 400.
15. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский. О диффузии лучей в среде со случайными неоднородностями.— Изв. вузов, радиофизика, 1971, 11, № 5, 706.
16. И. Г. Колчинский. Об амплитуде дрожания изображений звезд в телескопах в зависимости от зенитного расстояния.— Астрон. ж., 1952, 29, № 3, 350.
17. В. Я. Харанен. О распространении звука в среде со случайными флуктуациями показателя преломления.— Докл. АН СССР, 1953, 38 № 2.
18. Н. Г. Денисов. О распространении волн в плоскостой среде, содержащей статистические неоднородности.— Изв. вузов, радиофизика, 1958, 1, № 5—6, 34.
19. В. М. Комиссаров. Статистика

- лучей в плоскостной среде со случайной неоднородностью. — Изв. вузов, радиофизика, 1966, 9, № 1, 292.
20. В. А. Красильников. О влиянии пульсаций коэффициента преломления в атмосфере на распространение ультракоротких радиоволн. — Изв. АН СССР, серия геогр. и геофизич., 1949, 13, № 1, 33.
 21. P. G. Bergman. The propagation of radiation in the medium with random inhomogeneity. — Phys. Rev., 1946, 70, N 7-8, 486.
 22. В. И. Татарский. Распространение волн в турбулентной атмосфере, М., «Наука», 1967.
 23. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954, стр. 356.
 24. Д. И. Блохинцев. Акустика неоднородной движущейся среды. М.—Л., Гостехиздат, 1951, стр. 61.
 25. Л. Беранек. Акустические измерения. М., ИЛ, 1952, стр. 16.
 26. С. L. Pekeris. Note on scattering in an inhomogeneous medium. — Phys., Rev., 1947, 71, № 4, 268.
 27. H. Booker, W. Gordon. A theory of radio scattering in the troposphere. — Proc. IRE, 1950, 38, № 4, 401.
 28. J. A. Fejer. The diffraction of waves in passing from an irregular reflecting medium. — Proc. Roy. Soc., 1953, A 220, N 1143, 455.
 29. H. Stares. Scattering of electromagnetic energy in a randomly inhomogeneous atmosphere. — J. Appl. Phys., 1952, 23, N 10, 1152.
 30. А. М. Обухов. О влиянии слабых неоднородностей атмосферы на распространение звука и света. — Изв. АН СССР, серия геофиз., 1955, 5, № 2, 1853.
 31. И. М. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., «Наука», 1971.
 32. Г. С. Горелик. Колебания и волны. М.—Л., Гостехиздат, 1950.
 33. D. J. Mintzer. Wave propagation in a randomly inhomogeneous medium. — J. Acoust. Soc. America, 1953, 25, N 5, 922.
 34. D. J. Mintzer. Wave propagation in a randomly inhomogeneous medium. — J. Acoust. Soc. America, 1953, 25, № 6, 1107.
 35. J. H. Ellison. The propagation of sound waves through a medium with very small random variations in refractive index. — J. Atmos. and Terr. Phys., 1951, 2, N 1, 14.
 36. S. O. Rice. Statistical fluctuations of radio field strength far beyond the horizon. — Proc. IRE, 1953, 41, N 2, 274.
 37. E. C. S. Megaw. Waves and fluctuations. — Proc. Inst. Electr. Engrs, 1953, pt III, N 63, 1.
 38. J. C. Voge. Fluctuations du champ électromagnétique dus à l'extrémité d'un trajet de propagation en visibilité directe. — C. r. Acad. sci. Paris, 1953, 237, N 4, 351.
 39. Ю. А. Рыжов, В. В. Талойкин. Излучение и распространение электромагнитных волн в хаотически неоднородных средах. — Изв. вузов, радиофизика, 1970, 13, № 3, 356.
 40. Т. В. Гнеденко. Курс теории вероятностей. М., «Наука», 1969.
 41. D. J. Mintzer. Wave propagation in a randomly inhomogeneous medium. — J. Acoust. Soc. America, 1954, 26, N 2, 186.
 42. Т. А. Широкова. Второе приближение метода плавных возмущений. — Акуст. ж., 1959, 5, вып. 4, 485.
 43. В. И. Татарский. Второе приближение в задаче о распространении волн в среде со случайными неоднородностями. — Изв. вузов, радиофизика, 1962, 5, вып. 3, 490.
 44. Л. А. Чернов, Н. Г. Кузнецова. О границах применимости метода плавных возмущений. — Морское приборостроение, Научно-технический сборник, серия «Акустика», 1972, вып. 1, 162.
 45. В. А. Красильников. Некоторые эксперименты по распространению звука в турбулентной атмосфере. — Докл. АН СССР, 1945, 16, № 3, 108.
 46. В. А. Красильников, К. М. Иванов-Шуц. Некоторые новые опыты по распространению звука в атмосфере. — Докл. АН СССР, 1949, № 4, 639.

47. *M. J. Sheehy*. Transmission of 24 kc underwater sound from a deep source.— *J. Acoust. Soc. America*, 1950, 22, 24.
48. *Р. Ф. Швачко*. Флуктуации звука и случайные неоднородности в океане.— *Акуст. ж.*, 1967, 83, вып. 1, 119.
49. *R. M. Kennedy*. Phase and amplitude fluctuation in propagation through a layered ocean.— *J. Acoust. Soc. America*, 1969, 46, N 3, 737.
50. *H. E. Butler*. Abberation of stellar scintillation.— *Proc. Roy. Irish. Acad.*, 1951, 54a, N 6, 321.
51. *E. C. S. Megaw*. Interpretation of stellar scintillation.— *Quart. Roy. Meteorol. Soc.*, 1954, 80, N 344, 248.
52. *М. Е. Грачева, А. С. Гурвич, М. А. Калистратова*. Измерения дисперсии «сильных» флуктуаций интенсивности лазерного излучения в атмосфере.— *Изв. вузов, радиофизика*, 1970, 13, № 1, 56.
53. *В. Н. Алексеев, В. М. Фролов*. Уравнения для статистических моментов волнового поля в случайно-неоднородной среде.— *Акуст. ж.*, 1972, 18, вып. 4, 506.
54. *В. А. Фок*. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. М., «Советское радио», 1970.
55. *Л. С. Долин*. Уравнение для корреляционных функций волнового пучка в хаотически неоднородной среде.— *Изв. вузов, Радиофизика*, 1968, 11, 6, 840.
56. *M. J. Beran*. Propagation of the mutual coherence function through random media.— *J. Opt. Soc. America*, 1966, 56, N 11, 1475.
57. *Л. А. Чернов*. Уравнения для статистических моментов поля в случайно-неоднородной среде.— *Акуст. ж.*, 1969, 15, вып. 4, 594.
58. *В. И. Татарский*. Распространение света в среде со случайными неоднородностями показателя преломления в приближении марковского случайного процесса.— *ЖЭТФ*, 1969, 56, № 6, 2106.
59. *В. И. Шишов*. К вопросу о флуктуациях амплитуды при распространении электромагнитных волн в средах со случайными неоднородностями.— *Труды ФИАН СССР*, 1967, 38, 171.
60. *В. И. Шишов*. К теории распространения волн в случайных средах.— *Изв. вузов, радиофизика*, 1968, 11 № 6, 866.
61. *M. J. Beran, T. L. Ho*. Propagation of the fourth-order coherence function in a random medium (a nonperturbative formulation).— *J. Opt. Soc. America*, 1969, 59, N 9.
62. *И. М. Дагкесамская, В. И. Шишов*. Сильные флуктуации интенсивности при распространении волн в статистически однородных и изотропных средах.— *Изв. вузов, радиофизика*, 1970, 13, № 1, 16.
63. *В. И. Шишов*. Сильные флуктуации интенсивности плоской волны, распространяющиеся в случайно-преломляющей среде.— *ЖЭТФ*, 1971, 61, вып. 4 (10), 1399.
64. *В. И. Татарский*. Распространение коротких волн в среде со случайными неоднородностями в приближении марковского случайного процесса. Отделение океанологии, физики атмосферы и географии АН СССР. Препринт. М., 1970.
65. *K. S. Gochelashvily, V. I. Shishov*. Multiple scattering of light in a turbulent medium. Academy of Sciences of the USSR. P. N. Lebedev Physical Institute. Preprint N 71, Moscow, 1971.
66. *W. P. Brown*. Fourth moment of a wave propagation in a random medium.— *J. Opt. Soc. America*, 1972, 62, N 8, 966.
67. *М. Е. Грачева, А. С. Гурвич, С. С. Кашкаров, В. В. Покасов*. Соотношения подобия и их экспериментальная проверка при сильных флуктуациях интенсивности лазерного излучения. Отделение океанологии, физики атмосферы и географии АН СССР. Препринт. М., 1973.
68. *А. С. Гурвич, Р. А. Казарян, С. О. Ломадзе, К. П. Погосян, В. В. Покасов*. Частотные спектры флуктуаций интенсивности излучения на волнах 0,63 мкм и 10,6 мкм в турбулентной атмосфере. Институт физики ат-

- мосферы АН СССР, Институт физических исследований АН АрмССР. Препринт. Москва — Ереван, 1974.
69. *К. С. Гогелашвили, В. И. Шишов.* Насыщенные флуктуации интенсивности лазерного излучения в турбулентной среде.— *ЖЭТФ*, 1974, 66, вып. 4, 1237.
 70. *М. Н. Кром, Л. А. Чернов.* Влияние флуктуаций в падающей волне на распределение средней интенсивности вблизи фокуса линзы.— *Акуст. ж.*, 1958, 4, вып. 4, 341.
 71. *М. Н. Кром.* Флуктуации поля вблизи фокуса линзы.— *Акуст. ж.*, 1959, 5, вып. 1, 45.
 72. *Л. А. Чернов, М. Н. Кром.* Зависимость дифракционного изображения в линзе от величины флуктуаций в падающей волне. Труды совещания по исследованию мерцания звезд. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1959, стр. 47.
 73. *P. Debye.* Das Verhalten von Lichtwellen in der Nähe eines Brennpunktes oder einer Brennlinie.— *Ann. Phys.*, 1909, 2, № 30, 775.
 74. *Л. Д. Розенберг.* Звуковые фокусирующие системы, М.—Л., Изд-во АН СССР, 1949.
 75. *Б. Д. Тартаковский.* О дифракции звуковых волн в сходящихся пучках.— *Акуст. ж.*, 1958, 4, вып. 4, 335.
 76. *И. И. Привалов.* Введение в теорию функций комплексного переменного. М., Гостехиздат, 1954.
 77. *G. E. Lord, S. R. Murphy.* Reception characteristics of a linear array in random transmission medium.— *J. Acoust. Soc. America*, 1964, 36, N 5, 850.
 78. *G. E. Lord.* Variance of the bearing of a discrete linear-difference array in a random transmission medium.— *J. Acoust. Soc. America*, 1964, 38, N 8, 1545.
 79. *Я. С. Шифрин.* Вопросы статистической теории антенн. М., «Советское радио», 1970.
 80. *Ф. Франк, Р. Мизес.* Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. М.—Л., ОНТИ, 1937, стр. 941.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
--------------------	---

Часть первая ЛУЧЕВАЯ ТЕОРИЯ

Глава	I. Статистические характеристики среды	7
	§ 1. Корреляционная и структурная функции	8
	§ 2. Определение вида корреляционной или структурной функции	11
Глава	II. Статистика лучей	14
	§ 3. Уравнение луча	15
	§ 4. Коэффициент диффузии лучей	16
	§ 5. Угловое распределение лучей. Уравнение Эйнштейна—Фоккера—Колмогорова	19
	§ 6. Среднее смещение луча	22
	§ 7. Флуктуации времени пробега и интенсивности лучей	24

Часть вторая ДИФРАКЦИОННАЯ ТЕОРИЯ

Глава	III. Волновое уравнение	30
	§ 8. Вывод волнового уравнения для неоднородной среды	30
	§ 9. Волновое уравнение для среды сложного состава	32
Глава	IV. Рассеяние на неоднородностях	34
	§ 10. Метод малых возмущений	34
	§ 11. Формула рассеяния	35
	§ 12. Коэффициент рассеяния	41
	§ 13. Применимость формулы рассеяния	42
	§ 14. Ослабление звукового пучка, обусловленное рассеянием	43
Глава	V. Флуктуации	44
	§ 15. Метод малых возмущений	45
	§ 16. Метод плавных возмущений	46
	§ 17. Приближение Френеля	49
	§ 18. Флуктуации уровня и фазы	50
	§ 19. Область больших значений волнового параметра (дифракция Фраунгофера)	55

	§ 20. Область малых значений волнового параметра.	57
	§ 21. Область средних значений волнового параметра.	60
Глава	VI. Корреляция флуктуаций	61
	§ 22. Корреляция флуктуаций уровня и фазы в точке приема	61
	§ 23. Продольная автокорреляция флуктуаций уровня (или фазы)	64
	§ 24. Поперечная автокорреляция флуктуаций уровня (или фазы)	68
	§ 25. Условие квазистатичности	77
	§ 26. Автокорреляция флуктуаций уровня во времени.	78
	§ 27. О границах применимости метода плавных возмущений	82
	§ 28. Среднее поле и корреляционная функция поля	85
	§ 29. Сравнение с экспериментом	88
Глава	VII. Теория сильных флуктуаций поля	96
	§ 30. Параболическое уравнение	97
	§ 31. Границы применимости параболического уравнения	99
	§ 32. Локальный метод. Среднее поле	102
	§ 33. Статистические моменты поля второго порядка	111
	§ 34. Малые флуктуации	116
	§ 35. Уравнение для статистического момента поля любого порядка	118
	§ 36. Уравнение для смешанного момента поля четвертого порядка. Флуктуации интенсивности	126

Часть третья

ВЛИЯНИЕ ФЛУКТУАЦИЙ НА ДИФРАКЦИОННОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ ФОКУСИРУЮЩЕЙ СИСТЕМЫ

Глава	VIII. Общие формулы	133
	§ 37. Формула Дебая	133
	§ 38. Статистическое усреднение	135
	§ 39. Метод вычисления интегралов	138
Глава	IX. Среднее распределение интенсивности вблизи фокуса линзы	139
	§ 40. Среднее распределение в фокальной плоскости большой линзы	139
	§ 41. Среднее распределение вдоль главной оси большой линзы	143
	§ 42. Средняя интенсивность в фокусе линзы произвольных размеров	145
Глава	X. Флуктуации за линзой	147
	§ 43. Распределение флуктуаций	147
	§ 44. Флуктуации в фокусе линзы продольных размеров	149

ПРИЛОЖЕНИЯ

	Приложение I	151
	Приложение II.	154
	Приложение III	158
ЛИТЕРАТУРА		166