

THE ANALYTIC S MATRIX

A BASIS FOR NUCLEAR DEMOCRACY

by

GEOFFREY F. CHEW

**Department of Physics and Lawrence Radiation Laboratory
University of California**

**W. A. BENJAMIN, INC.
NEW YORK — AMSTERDAM**

1966

Дж. ЧЬЮ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ S-МАТРИЦЫ

Перевод с английского
А. М. Бродского

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

Москва 1968

Книга посвящена наиболее трудной, имеющей принципиальный интерес проблеме современной теоретической физики — проблеме построения теории элементарных частиц. Автор в весьма доходчивой форме излагает исходные положения и главные результаты одного из перспективных направлений теории, основанного на некоторых предположениях относительно аналитических свойств матрицы рассеяния (S -матрицы). В рамках указанного направления в принципе, по-видимому, возможно не только получить динамическое описание элементарных частиц, но и определить их параметры (массы, константы связи и т. д.).

При изложении теории, одним из создателей которой является автор книги, он высказывает ряд критических замечаний о других подходах, интенсивно рассматриваемых в современной литературе. Хотя эта критика не может считаться общепризнанной, она так же, как и рассуждения Чью о дальнейших перспективах теории поля и теории элементарных частиц, представляет значительный интерес как отчетливое изложение определенной крайней точки зрения на эту сложнейшую проблему.

Центральное место в монографии занимает рассмотрение постулата о «максимальной аналитичности второй степени», из которого следует равноправный статус различных сильно взаимодействующих частиц и резонансов. Этот результат автор образно назвал «ядерной демократией».

Для чтения книги достаточно знакомства с основами квантовой механики (включая теорию рассеяния). Она будет полезной и интересной как для физиков, уже работающих в области теории элементарных частиц, так и для аспирантов и студентов, специализирующихся по теоретической физике.

Редакция литературы по физике

ПРЕДИСЛОВИЕ ПЕРЕВОДЧИКА

В книге Чью, предлагаемой вниманию читателей, изложены программа и главные результаты развития того направления современной теоретической физики, в котором поведение элементарных частиц предлагается описывать, исходя из постулируемых аналитических свойств S -матрицы совместно с условием унитарности. При этом делается попытка вывести из указанных исходных положений не только закономерности динамического поведения элементарных частиц, но и значения характеризующих их параметров (масс, констант связи и т. д.).

Во многих отношениях, в особенности в формулировке наиболее перспективных, по мнению автора, путей развития теории, данная монография аналогична изданным ранее широко известным работам Чью¹⁾. Имеются, однако, и существенные отличия, связанные как с появлением новых экспериментальных данных о сечениях рассеяния при высоких энергиях, так и, несомненно, с дальнейшим развитием аксиоматической теории S -матрицы.

Следует при этом заметить, что Чью не возлагает особых надежд на чисто логические построения и в

¹⁾ The S -Matrix Theory of Strong Interactions, New York, 1961; Nuclear Democracy and Bootstrap Dynamics в книге Jacob M., Chew F., Strong Interaction Physics, New York, 1964.

ряде пунктов подчеркивает, что если «не появится беспрецедентно умный теоретик», то только эксперимент сможет указать пути общего решения существующих сложных проблем. Соответственно изложение в книге до предела освобождено от сложных математических доказательств и сводится по существу к формулировке определенных положений и их физической мотивировке. В этом отношении книга Чью противоположна изданной почти одновременно под таким же названием книге Идена и др.¹⁾, в которой изложено лишь то ограниченное число результатов теории S-матрицы, для которого авторы смогли привести достаточно полные математические доказательства.

Центральное место в книге занимают главы, в которых формулируется так называемый постулат о максимальной аналитичности второй степени и анализируется «зашнуровочный» механизм описания динамического поведения субатомных частиц (Чью старается избегать термина «элементарные частицы»). Содержание указанного постулата состоит в том, что сильно взаимодействующие частицы (адроны) со всеми возможными физическими значениями момента объединяются путем аналитического продолжения парциальных амплитуд Грибова — Фруассара. При этом полюсы, сопоставляемые частицам, в связных частях амплитуд перестают быть независимыми и становятся членами ряда семейств, задаваемых траекториями полюсов Редже. Принцип максимальной аналитичности налагает, очевидно, очень сильные ограничения не только на массы частиц, но и на константы связи и асимптотическое поведение сечений при больших энер-

¹⁾ Eden R. S., Landshoff P. V., Olive D. I., Polkinghorne J. C., *The Analytic S-Matrix*, Cambridge, 1966.

гиях. По мнению Чью, мотивируемому некими общими рассуждениями, таким ограничениям слабозаимодействующие частицы удовлетворять не могут.

В рассматриваемой теории константы связи (вычеты в полюсах) и другие динамические характеристики предлагается определять путем «зашнуровки», т. е. совместного использования максимальной аналитичности второй степени с унитарностью и перекрестной симметрией. Пока это удалось сделать только в рамках довольно ограниченных моделей, две наиболее интересные из которых [нерелятивистская модель и полосное приближение (*strip model*)] подробно обсуждаются в книге.

Особый интерес представляют главы книги, в которых Чью излагает свои соображения о современном состоянии и дальнейших перспективах теории поля и теории элементарных частиц. Автор довольно много внимания уделяет рассмотрению возражений против его концепции, которые опираются, по мнению Чью, лишь на необоснованные аналогии с электродинамикой и ограниченный успех группового подхода в теории адронов и не имеют доказательной силы. Интерес, например, к кваркам Чью считает просто некоторой модой. При этом он, однако, оговаривает, что окончательное решение дилеммы: либо «аристократия» выделенных частиц как в электродинамике, либо «демократические» семейства адронов — должно следовать из будущих экспериментов.

С позицией автора во многих пунктах можно, конечно, не соглашаться, но отчетливое бескомпромиссное изложение определенной крайней точки зрения на весьма непростые центральные проблемы теоретической физики само по себе представляет интерес для

всех занимающихся теорией элементарных частиц¹⁾. В связи с этим, чтобы не нарушать весьма яркий и необычный для подобных монографий стиль изложения, было сочтено целесообразным не давать редакционных примечаний о других возможных точках зрения в тех случаях, когда автор, полемизируя со своими оппонентами, позволяет себе слишком категорические утверждения, далекие от считающихся общепринятыми.

А. М. Бродский

¹⁾ Заметим, что изложение в данной книге все же менее категорично, чем в цитируемых Чью его предыдущих работах (см., например, статью Чью в сб. «Новый метод в теории сильных взаимодействий», М., 1960). Задача правильной передачи при переводе степени сомнения автора в справедливости того или иного положения иногда даже вызывала затруднения.

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Настоящая монография возникла в результате переработки записей двух циклов лекций, опубликованных автором в 1961 и 1964 гг. [1, 2]. Предварительный вариант ее появился в трудах конференции в Лезуше в 1965 г. Основной целью, поставленной при переработке, было не столько добавление новых результатов, сколько рассмотрение всего материала с более единой точки зрения, чем это делалось раньше. Возможность такого, более единообразного рассмотрения является следствием современного развития аксиоматических основ аналитической теории S -матрицы.

В монографии не ставится задача обзора всех полученных к настоящему времени существенных теоретических выводов о свойствах S -матрицы. Мы не касаемся, в частности, описания частиц со спином. Опущено также изложение связи (посредством преобразования Фурье) между макроскопическим пространством-временем и переменными энергии-импульса в теории S -матрицы. В полном изложении оба эти вопроса должны были бы занимать важное место.

Основную роль в данной монографии играет введение принципа «максимальной аналитичности второй степени», который эквивалентен представлению о «ядерной демократии» и составляет основу так называемой динамики зашнуровки. Хотя в литературе предложено множество различного достоинства моделей зашнуровки, было бы нецелесообразным, как мы считаем, обсуждать и оценивать каждую из них. Мы предпочли сконцентрировать внимание на одной из таких моделей, наиболее нам знакомой, считая, что эта модель имеет не меньше смысла, чем любая другая, предложенная до сих пор.

Недавняя успешная группировка адронов с небольшими барионными числами в мультиплеты упоминается здесь лишь мимоходом. Такую группировку мы рассматриваем как результат, аналогичный оболочечной классификации адронов с большими барионными числами, т. е. как результат, чрезвычайно важный для упорядочивания наших знаний, но имеющий в то же время лишь весьма отдаленную связь с общими принципами.

По характеру своего изложения книга рассчитана на читателя, знакомого с основами нерелятивистской квантовой механики (включая теорию рассеяния), а также с группой Лоренца. Не требуется никакого знания квантовой теории поля. В действительности, как это уже подчеркивалось в лекциях 1961 г., опыт работы с теорией поля в лагранжевой формулировке может даже, наоборот, затруднить попытку изучения теории S -матрицы.

Дополнительный материал по рассматриваемому вопросу, весьма полезный для читателя, содержится в книгах [2—4]. В указанных книгах изложены, в частности, те следствия теории, которые можно сравнивать с экспериментом; без экспериментального подтверждения не было бы вообще достаточных оснований принимать всерьез аналитическое продолжение S -матрицы.

Джефри Чью

Беркли, Калифорния
июнь 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Chew G. F., The S -Matrix Theory of Strong Interactions, New York, 1961.
2. Chew G. F., Nuclear Democracy and Bootstrap Dynamics в книге Jacob M., Chew G. F., Strong Interaction Physics, New York, 1964.
3. Frautschi S. C., Regge Poles and S -Matrix Theory, New York, 1963.
4. Omnès R., Froissart M., Mandelstam Theory and Regge Poles, New York, 1963.

АНАЛИТИЧНОСТЬ КАК ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЙ ПРИНЦИП
ФИЗИКИ

Утверждение, что почти во всех физических теориях в той или иной форме используются аналитические функции, стало теперь банальным. Область применения таких функций настолько широка, что физики иногда забывают об исключительном статусе аналитических функций в математике. Ферми имел обыкновение говорить: «Если сомневаешься, разлагай в степенной ряд». Это высказывание отражает то убеждение, разделяемое большинством физиков, что каждый закон природы обычно аналитически зависит от непрерывно меняющихся параметров.

Почему возникло такое убеждение? Объяснение заключается, очевидно, просто в том, что в прошлом наиболее успешные физические теории всегда обладали аналитичностью. Хотя известная степень непрерывности в зависимости от физических непрерывных параметров вытекает из обычных *априорных* соображений, экстраординарная гладкость, присущая аналитическим функциям, в законах природы вовсе не следует из чисто логических рассуждений. Также не следует, конечно, из чистой логики то связанное с аналитичностью обстоятельство, что в прошлом теории выражались посредством дифференциальных уравнений. Формально указанная связь является отражением интуитивно понятной теоремы Пуанкаре, которая, грубо говоря, гласит следующее: если коэффициенты дифференциального уравнения аналитически зависят от некоторой величины, то и решения уравнения будут аналитическими функциями этой величины. Иными словами, Пуанкаре утверждает, что в теориях, основанных на дифференциальных уравнениях, сохраняется любая

аналитичность, которую мы вводили в коэффициенты.

Почему же в свою очередь указанные коэффициенты должны быть аналитическими? В случае более или менее замкнутых динамических теорий, таких, как классическая электродинамика, аналитичность чаще всего действительно выполняется. Отсюда можно сделать вывод, что для природы было бы неэкономичным новое свойство, которое не обязательно должно иметь место. Однако в рамках более общих теорий, например в нерелятивистской квантовой механике, вполне возможно считать коэффициенты неаналитическими. На собрании Американского физического общества в Вашингтоне в 1964 г. Вигнер рассказал следующую интересную историю. Вскоре после открытия квантовой механики он спросил фон Неймана, не удивляет ли того, что новый формализм не требует аналитичности. Фон Нейман ответил, что аналитические функции составляют крайне ограниченный специальный класс функций и нет никаких оснований считать лишь такие функции допустимыми в физике. Вигнер закончил свою историю замечанием, что, как показало дальнейшее тридцатипятилетнее развитие, все же, несмотря на мнение фон Неймана, физика в глубоком смысле *основывается* именно на аналитических функциях.

Было бы бессмысленным выяснять логический источник этого положения. Физическая теория не может основываться на логике, а всегда является догадкой, к которой приводит наблюдение за природой. Нельзя, в частности, утверждать, что для классической механики логично выражаться только посредством дифференциальных уравнений второго порядка. Это просто схема, которая оказалась в действительности работоспособной. В связи с аналитичностью имеет смысл поставить другой вопрос: составляет ли аналитичность сама по себе подходящий *априорный* принцип формулировки теории?

Ответ на этот вопрос в прошлом был отрицательным из-за очевидной важности переменных параметров. Все предыдущие теории включали разнообразные решения, соответствующие различным выборам опре-

деленных констант. Например, классическая теория Максвелла допускает существование частиц с произвольными зарядами и массами. Основной задачей было выразить эту произвольность строгим образом: наиболее подходящим и экономичным способом задачу удалось решить при использовании аппарата дифференциальных или интегральных уравнений. Мыслимо, конечно, сформулировать также указанные теории таким способом, в котором с самого начала кладется в основу аналитичность. Однако при этом для характеристики допустимого в теории произвола пришлось бы использовать громоздкий и неэстетический аппарат. Не могут быть простыми и красивыми правила определения природы и положений сингулярностей, если эти сингулярности произвольны, а не строго заданы.

Тем не менее в последние десять лет у многих физиков-теоретиков все более растет убеждение в том, что описание явлений природы на субатомном уровне может быть облегчено, если принять аналитичность за основное положение, а не трактовать ее как следствие теории. До сих пор для описания указанных явлений не установлена возможность формулировки фундаментальных дифференциальных или интегральных уравнений с осмысленным физическим содержанием, но в то же время получены серьезные экспериментальные доказательства в пользу аналитичности амплитуд ядерных реакций. Более того, растет убеждение в том, что эффективная теория сильных взаимодействий не должна допускать произвольных параметров. Возможно, вообще недопустима никакая степень произвола, причем все сильно взаимодействующие частицы (адроны) обладают эквивалентным статусом в системе «ядерной демократии». Использование представления об аналитической S -матрице может оказаться подходящей основой для развития теории, в которой все сингулярности определяются из общих принципов, а не являются произвольными.

Исторически признание аналитичности теории субатомных частиц явилось результатом как исследований

в теории поля, так и развития эксперимента¹⁾. Действительно, часто можно слышать, что дисперсионные соотношения²⁾ для амплитуд рассеяния были «выведены» из теории поля. В этом утверждении есть известная доля истины, но в то же время оно может привести к серьезным заблуждениям. Вполне возможно, что амплитуды рассеяния адронов действительно обладают обычно приписываемыми им аналитическими свойствами, в то время как сопоставление этим частицам полей не имеет никакого смысла. Иначе говоря, не известно, как построить поля, исходя только из аналитических амплитуд. Полевые представления включают больший набор функций, чем получающийся при аналитическом продолжении S -матрицы³⁾, и существование соответствующей большей области вовсе не вытекает с необходимостью из существования ее части. Даже если дальнейшее развитие покажет, что полевая теория адронов невозможна, предполагаемые аналитические свойства матрицы ядерного рассеяния все же могут уцелеть. В истории физики много таких прецедентов, когда определенные специальные аспекты старой ошибочной теории сохраняются в совершенно отличной новой теории⁴⁾.

Главным преимуществом теории S -матрицы по сравнению с квантовой теорией поля являются про-

1) Обзор истории вопроса содержится в статьях Гольдбергера и Мандельштама в сборнике [1].

2) Термин «дисперсионные соотношения» связан с формулой Коши, согласно которой аналитическая функция, не имеющая других сингулярностей, кроме полюсов и точек ветвления, выражается через вычеты в своих полюсах и скачки на разрезах.

3) Амплитуды рассеяния задаются на «массовой поверхности» [см. формулы (3.4)], в то время как при существовании полей должны иметь смысл продолжения на произвольные комплексные массы.

4) Приведенные замечания не относятся к формфакторам, часто используемым при анализе слабых или электромагнитных взаимодействий. Существование таких формфакторов тесно связано с существованием соответствующих электромагнитного и лептонных полей. Однако формфакторы не являются амплитудами рассеяния; это различие существенно для настоящего обсуждения. Нет экспериментальных доказательств существования формфакторов для сильных взаимодействий.

стота и отчетливый смысл вопросов, которые ставятся в ее рамках. В то же время квантовая теория поля отягощена дополнительной структурой, заимствованной из классической теории электромагнетизма и необходимой, очевидно, лишь для ответа на массу вопросов, которые никак нельзя связать с экспериментом. Однако теория S -матрицы слишком далеко уходит в другом направлении, так как она не пригодна для описания экспериментов, в которых силы между частицами продолжают действовать в процессе изменения импульсов. Подобным поведением обладают силы, которые мы понимаем лучше всего: дальнедействующие электромагнитное и гравитационное взаимодействия. В своей современной форме теория S -матрицы может описывать только короткодействующие взаимодействия.

S -матрица была впервые введена в 1937 г. Уиллером [2], а предположение о том, что она имеет фундаментальное значение, было высказано в 1943 г. Гейзенбергом [3]. При этом Гейзенберг выяснил ряд важных преимуществ введения S -матрицы по сравнению с использованием обычной квантовой теории и указал ряд ее свойств, которые остаются в центре внимания в современных работах. Однако в сороковых годах то свойство S -матрицы, которое мы называем сейчас *максимальной аналитичностью*, не привлекло должного внимания, без чего теория не получила динамического содержания. Гейзенберг и другие исследователи S -матрицы того периода в конце концов потеряли к ней интерес после того, как они пришли к заключению об отсутствии путей вычисления сил, действующих между частицами. Прошло целое десятилетие, прежде чем S -матрица вновь возродилась в качестве конкурента квантовой теории поля.

Постепенное выяснение динамического содержания аналитичности происходило в конце пятидесятых годов и было обязано многим исследователям, в том числе Гелл-Ману, Гольдбергеру, Ландау, Лоу, Мандельштаму, Померанчуку, а также автору настоящей книги¹⁾. Особенное влияние оказали исследования

¹⁾ См. сборник [1], а также введение в книге [5].

Мандельштама, выполненные им в 1958 г. [4]. Однако в этот период все результаты выводились из теории поля или по крайней мере использовались в ее рамках. Лишь в начале нынешнего десятилетия независимо Гансон, Стапп и я пришли к убеждению о возможности добавления *постулата* об аналитичности к старой гейзенберговской схеме и тем самым к отказу от полевых представлений [5—7]. С тех пор были предприняты значительные усилия для развития строгого аксиоматического представления принципа аналитичности, причем до настоящего времени наиболее удовлетворительные результаты были достигнуты Оливом [8]. В первых главах книги мы будем существенным образом опираться на результаты Олива и Стаппа.

ЛИТЕРАТУРА

1. La Théorie Quantique des Champs, „The Proceedings of the 12th Solvay Congress“, New York, 1961.
2. Wheeler J. A., Phys. Rev., 52, 1107 (1937).
3. Heisenberg W., Zs. Phys., 120, 513, 673 (1943).
4. Mandelstam S., Phys. Rev., 112, 1344 (1958).
5. Chew G. F., S-Matrix Theory of Strong Interactions, New York, 1961.
6. Stapp H. P., Phys. Rev., 125, 2139 (1962).
7. Gunson J., Journ. Math. Phys., 6, 827, 845 (1965).
8. Olive D., Phys. Rev., 135, B745 (1964).

ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ S-МАТРИЦЫ
(ИСКЛЮЧАЯ УНИТАРНОСТЬ)

§ 1. Суперпозиция, волновые пакеты и сохранение энергии-импульса

Теория S-матрицы не использует всего аппарата квантовой механики: в ней сохраняется только принцип суперпозиции. В теории нет ни гамильтониана, ни каких-либо других операторов, нет также изменяющихся во времени векторов состояния. Предполагается, что единственными наблюдаемыми величинами являются импульсы и направления спина частиц до и после соударения. Обычная связь посредством преобразования Фурье с *макроскопическим* пространством-временем должна быть принята для сопоставления теории с экспериментом [1]; однако локализованные пространственно-временные волновые пакеты нельзя построить суперпозицией состояний с импульсами, лежащими на массовой поверхности. Наиболее узкая допустимая ширина пакета соответствует, согласно экспериментальным ограничениям, комптоновской длине волны частицы. В то же время не известно никаких пределов точности определения импульса, по крайней мере в бесконечной Вселенной; континуум лежащих на массовой поверхности значений энергии-импульса может, очевидно, реализоваться независимо от того, существует ли микроскопический пространственно-временной континуум или нет.

В то же время есть все основания считать [1], что бесконечно малые пространственно-временные смещения *макроскопических* систем имеют смысл. Положение каждой отдельной частицы может не быть локализованным, но тем не менее можно придать смысл произвольному бесконечно малому смещению в пространстве-времени всего пакета как целого. В частности, считается общепринятым, что если вся (макро-

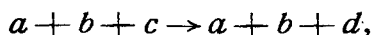
скопическая) аппаратура, используемая для приготовления и детектирования частиц, смещается одинаковым образом в пространстве-времени, то результаты экспериментов не меняются. Отсюда сразу следует сохранение энергии-импульса, если эти величины связаны с пространством-временем посредством преобразования Фурье [1].

§ 2. Лоренцовская инвариантность и закон разложения

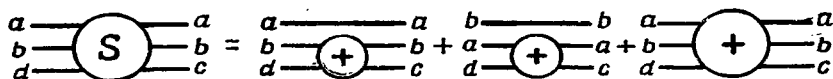
Какие еще существуют дополнительные общие принципы, которые можно положить в основу теории сильно взаимодействующих частиц, опирающихся на S -матрицу? Соответствующий список начинается с лоренцовской инвариантности и закона разложения. Каждый элемент матрицы рассеяния зависит от импульсов и ориентаций спина начальных и конечных частиц, единственных, по предположению, наблюдаемых величин. Как подчеркнул уже в 1943 г. Гейзенберг [2], зависимость от импульса и спина должна быть такой, чтобы при лоренцовском преобразовании совокупности этих величин, соответствующем переходу к другой системе отсчета, матричный элемент оставался неизменным. Поведение энергии и импульса, образующих четырехмерный вектор, при преобразованиях однородной группы Лоренца (сочетание вращений и трансляций в четырехмерном пространстве) является общеизвестным, чего нельзя сказать о поведении при таких преобразованиях спина. Простой и изящный метод описания спиновых преобразований был дан Стаппом [3] при использовании аппарата так называемых M -функций; другой широко применяемый метод, основанный на использовании амплитуд с определенной проекцией спина на направление импульса, был предложен Джэкобом и Вико [4]. При этом правила преобразования вне зависимости от способа описания однозначно определяются неприводимыми представлениями группы Лоренца.

Характерной особенностью макроскопического описания является возможность такого разделения раз-

личных событий в пространстве-времени, что эти события перестают сколь-либо заметно влиять друг на друга и их можно рассматривать по отдельности [5—7]. Указанная особенность выражается посредством следующего закона разложения для S -матрицы: каждый элемент S -матрицы может быть представлен в виде суммы отдельных компонент, которые называются обычно «связными частями» и каждая из которых содержит свои различные δ -функции сохранения энергии-импульса. Так, например, элемент, описывающий реакцию



содержит три составляющие, которые можно представить графически следующим образом:



Член с символом S внутри кружка в левой стороне графического равенства представляет полный матричный элемент S -матрицы. Члены с символом «+» внутри кружка представляют связные части. При этом первый, стоящий справа член представляет собой произведение двух связных частей, одна из которых соответствует свободному распространению частицы a и включает дельта-функцию¹⁾

$$\delta(p_a^f - p_a^i),$$

а другая соответствует реакции $b + c \rightarrow b + d$ и включает дельта-функцию

$$\delta(p_b^f + p_d - p_b^i - p_c).$$

Второй член по своему строению, очевидно, аналогичен первому. В то же время третий член содержит только одну связную часть (соответствующую

¹⁾ Индекс f (от английского слова final — конечный) соответствует конечным, а индекс i (от английского слова initial — начальный) — начальным состояниям. — Прим. перев.

столкновению, при котором взаимодействуют все три частицы) и включает только одну дельта-функцию

$$\delta(p_a^i + p_b^i + p_d - p_a^i - p_b^i - p_c).$$

Выделение различных дельта-функций сохранения энергии-импульса является, очевидно, необходимым до любых попыток аналитического продолжения S -матрицы. Говоря в дальнейшем о связанной « N -хвостке», где N — сумма чисел падающих и вылетающих частиц, мы будем всегда подразумевать, что соответствующая дельта-функция уже опущена и только $N-1$ импульсов являются независимыми.

§ 3. Сопоставление полюсов частицам; факторизация вычетов

Центральным свойством S -матрицы является ее аналитичность как функции импульсов падающих и вылетающих частиц. Наиболее далеко идущая попытка аксиоматизировать указанную аналитичность была сделана Оливом [8]. Олив, опираясь на предыдущие работы Гансона [5] и Стаппа [3], показал, что из закона разложения и унитарности следует та структура сингулярностей, которая уже сравнительно давно постепенно стала общепризнанной. Хотя логическая цепь рассуждений Олива является довольно длинной, определенные выводы можно представить в крайне простой форме. Из педагогических соображений мы начнем с перечисления тех аналитических свойств, которые, как нам представляется, покажутся читателям сразу очевидными.

К числу таких свойств прежде всего относится сопоставление частицам полюсов. S -матрица содержит много полюсов, возможно даже бесконечное число их. Наиболее важны те полюсы, которые выражаются через величины, названные Оливом инвариантами каналов. Канал представляет собой совокупность более чем одной частиц, и инвариантом канала является квадрат полной энергии в системе его центра тяжести. Соответственно в ковариантной записи инвариант ка-

нала c равен

$$s_c = \left(\sum_{l \in c} p_l \right)^2. \quad (2.1)$$

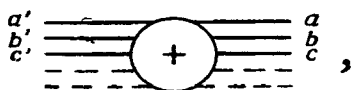
Полюсы относительно переменных инвариантов каналов возникают в фиксированных точках, не зависящих от значений других переменных. Если эти точки расположены в физической области или вблизи нее, то возникновение соответствующих полюсов приписывают существованию частиц, причем координата полюса равна квадрату массы частицы. Стабильным частицам соответствуют вещественные массы; массы обычных резонансов имеют малую отрицательную мнимую составляющую, равную их полуширине. В том случае, когда координаты полюсов обладают большими мнимыми составляющими или вообще по тем или иным причинам лежат далеко от физической области, сопоставление этих полюсов частицам в обычном смысле становится затруднительным. Однако не существует сколь-либо резкого разграничения между «ближними» и «дальними» полюсами. Все простые полюсы относительно инвариантов каналов обладают равноправным статусом в аналитической структуре, и поэтому все они будут в дальнейшем обозначаться как *полюсы, сопоставляемые частицам*¹⁾.

Полюс, сопоставляемый частице, возникает не только относительно переменной инварианта одного канала, но относительно переменных инвариантов всех других каналов, которые «взаимосвязаны» с данной частицей. При этом термин *взаимосвязанный с частицей канал* означает, что для этой частицы ничем не запрещен данный канал распада, кроме, быть может, закона сохранения энергии. Каналы, взаимосвязанные с одной и той же частицей, взаимосвязаны также друг с другом. В общем случае взаимосвязь каналов

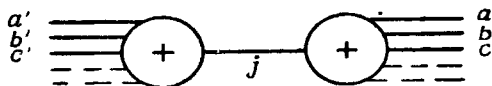
¹⁾ Примером полюса, который не соответствует ни стабильной частице, ни резонансу, является полюс, возникающий в 0^+ -нуклон-нуклонном канале и обозначаемый часто как «виртуальное» состояние дейтрона. В теории S -матрицы этот полюс имеет тот же статус, что и стабильный 1^+ -дейтрон, и трактуется, как если бы ему была сопоставлена частица.

ограничивается лишь правилами отбора, или, иначе говоря, она отсутствует, если только каналы обладают различными квантовыми числами.

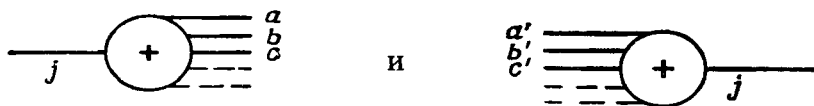
Связная часть описывает переходы между взаимосвязанными каналами. В общем случае мы будем обозначать связную часть диаграммой



причем линии справа обозначают исходный канал a, b, c, \dots , а линии слева — конечный канал a', b', c', \dots . Каждый полюс в связной части, соответствующий частице j , которая взаимосвязана как с начальным, так и с конечными каналами, будет обозначаться диаграммой вида



Последнее обозначение позволяет подчеркнуть то обстоятельство, что вычеты данных полюсов могут быть факторизованы, т. е. разбиты на произведения из двух множителей, зависящих от импульсов и спинов соответственно только начальных или только конечных каналов. Эти два множителя могут быть представлены очевидным образом диаграммами



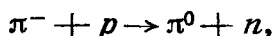
Смысл требования факторизуемости вычетов будет подробно разъяснен в следующем параграфе. Пользуясь терминологией известной теории Брейта — Вигнера, можно сказать, что для полюса, соответствующего обычному резонансу, квадрат каждого из множителей, из которых составляется вычет, пропорционален парциальной ширине, отвечающей распаду брейт-виг-

неровского резонанса в данный канал¹⁾. Вообще все положения, изложенные в настоящем параграфе, очевидным образом тесно связаны с формулой Брейта — Вигнера; обширное экспериментальное подтверждение этой формулы следует считать важным аргументом в пользу развиваемых здесь соображений.

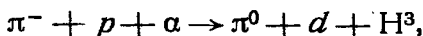
§ 4. Античастицы и принцип перестановки

Необходимость полюсов, сопоставленных частицам, обсуждалась в работах Гансона [5] не в связи с их появлением непосредственно в энергетических переменных канала, а в связи с анализом того, что Олив [8] назвал «кросс-энергией». Логика рассуждений Гансона и Олива приводит как к античастицам, так и к важнейшему свойству S -матрицы, называемому *принципом перестановки*.

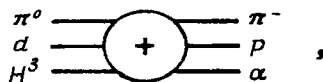
Фундаментальное требование состоит в том, что S -матрица должна описывать два (или более) последовательных столкновения, макроскопически разделенных в пространстве-времени. Например, нейтрон, получившийся по реакции



может впоследствии столкнуться с α -частицей с образованием тритона и дейтрона. Суммарный процесс



описываемый связной шестихвосткой



является крайне маловероятным при большинстве значений конечных импульсов, и лишь в области, где переменная кросс-энергии

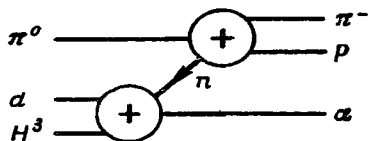
$$s = (p_{\pi^-} + p_p - p_{\pi^0})^2 = (p_d + p_{H^3} - p_{\alpha})^2$$

¹⁾ Если канал не является «открытым», т. е. энергия недостаточна для распада, то можно все же говорить о «приведенной» ширине.

близка по величине к квадрату массы нейтрона, можно ожидать резкого возрастания вероятности. Олив [8] показал, что это возрастание описывается пиком, соответствующим простому полюсу

$$\frac{\Gamma}{s - m_n^2},$$

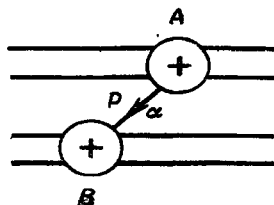
который можно представить диаграммой



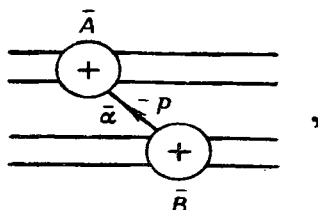
составленной из двух разделенных последовательных реакций.

Олив далее показал, что вычет подобного полюса действительно факторизуется так, как это следует из вида приведенной диаграммы. Факторизуемость оказывается здесь физически необходимой для независимости двух последовательных реакций; при ее отсутствии было бы вообще невозможным представление о частицах. Физически очевидным является также заключение, что каждый множитель в вычете сам по себе равен некоторой связной четыреххвостке с двумя начальными и двумя конечными частицами.

Предположим теперь, что приведенные выше рассуждения распространены на случай полюса относительно кросс-энергии в связной восьмихвостке, соединяющей один четырехчастичный канал с другим; пусть промежуточная частица относится к типу α и имеет массу m_α :



Как и в предыдущем случае, полюс возникает при $p^2 = m_\alpha^2$ с вычетом, составленным из двух множителей, которые представляют собой теперь связанные пятихвостки. Если p положительно-времениподобно ($p_0 > m_\alpha$), то можно сказать, что реакция A предшествует реакции B . Предположим, однако, что можно аналитически продолжить нашу связанную восьмихвостку в физическую область, где $p_0 < -m_\alpha$, оставаясь все время вблизи полюса $p^2 = m_\alpha^2$ ¹⁾. Согласно Гансону [5], полюс можно теперь интерпретировать только посредством последовательных реакций, описываемых диаграммой



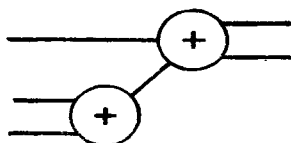
в которой промежуточная частица обладает импульсом $-p$ и внутренними квантовыми числами (электрический заряд, барионное число и т. д.), равными по величине, но противоположными по знаку квантовым числам частицы α . Полюс теперь, очевидно, связан с античастицей $\bar{\alpha}$, причем реакция \bar{B} предшествует реакции \bar{A} .

Поскольку факторизуемость вычета должна сохраняться все время в процессе аналитического продолжения от положительных к отрицательным p_0 , мы приходим к выводу, что связанная пятихвостка реакции \bar{A} , в которой $\bar{\alpha}$ является начальной частицей, должна аналитически продолжаться в связанную часть для реакции A с вылетающей частицей α . Совершенно то же самое можно сказать о соотношении связанных частей B и \bar{B} . Таким образом мы приходим к следующему общему принципу перестановок. Одна и та же аналитическая функция соответственно в положительно- и

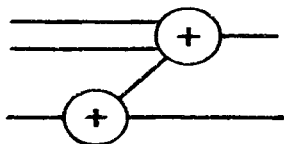
¹⁾ Начало и конец остаются при этом в физической области реакции, но в промежутке обязательно входят нефизические области переменных.

отрицательно-времениподобных областях ее переменных представляет связные части всех тех реакций, которые отличаются друг от друга заменой падающих частиц на вылетающие античастицы¹⁾.

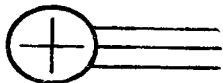
Из принципа перестановок непосредственно следует, что обсуждавшиеся в предыдущем параграфе полюсы относительно инвариантов каналов связаны посредством аналитического продолжения с рассматриваемыми здесь полюсами относительно кросс-энергии. Аналогичное заключение можно сделать о полюсах относительно «субэнергий», подобных показанным на диаграмме



или о полюсах в передаче импульса, подобных



¹⁾ Мы будем для удобства чисто формально представлять такую функцию диаграммой с только входящими



или только выходящими



линиями. В обоих случаях сумма импульсов всех частиц, так же как сумма всех внутренних квантовых чисел, оказывается равной нулю. Если принять первое соглашение, то в действительности падающие частицы можно отличить по их положительной энергии, а вылетающие античастицы — по их отрицательной энергии.

Вследствие принципа перестановок вообще все полюсы можно свести к основному виду, рассмотренному выше в § 3.

§ 5. Связная четыреххвостка

Сделаем перерыв в накоплении общих свойств S -матрицы и проиллюстрируем на простейшем примере связной четыреххвостки определенные следствия, вытекающие из сочетания лоренцевской инвариантности и принципа перестановок. Рассмотрим аналитическую связную часть $A(p_1, p_2, p_3, p_4)$, соответствующую диаграмме



Указанная аналитическая функция описывает шесть различных реакций, которые мы сгруппируем в пары с общим инвариантом каналов:

$$\left. \begin{array}{l} \pi^+ + \pi^0 \rightarrow k^+ + \bar{k}^0 \\ k^0 + k^- \rightarrow \pi^- + \bar{\pi}^0 \end{array} \right\} \text{квадрат полной энергии} = \\ = s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2,$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi^+ + k^- \rightarrow \bar{\pi}^0 + \bar{k}^0 \\ \pi^0 + k^0 \rightarrow \pi^- + k^+ \end{array} \right\} \text{квадрат полной энергии} = \\ = t = (p_1 + p_3)^2 = (p_2 + p_4)^2,$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi^+ + k^0 \rightarrow \bar{\pi}^0 + k^+ \\ \pi^0 + k^- \rightarrow \pi^- + \bar{k}^0 \end{array} \right\} \text{квадрат полной энергии} = \\ = u = (p_1 + p_4)^2 = (p_2 + p_3)^2.$$

Согласно теореме Холла — Вайтмана [9], лоренц-инвариантная аналитическая функция четырехвекторов импульса является аналитической функцией

инвариантов, которые можно составить из этих импульсов¹⁾. Учитывая ограничения массовой поверхностью $p_i^2 = m_i^2$ и сохранение полной энергии-импульса, нетрудно установить, что из векторов p_1, \dots, p_4 можно составить только два независимых инварианта. В качестве таких инвариантов можно выбрать любую пару из триплета (s, t, u) , причем оставшийся член этого триплета исключается с помощью соотношения

$$s + t + u = \sum_{i=1}^4 m_i^2. \quad (2.2)$$

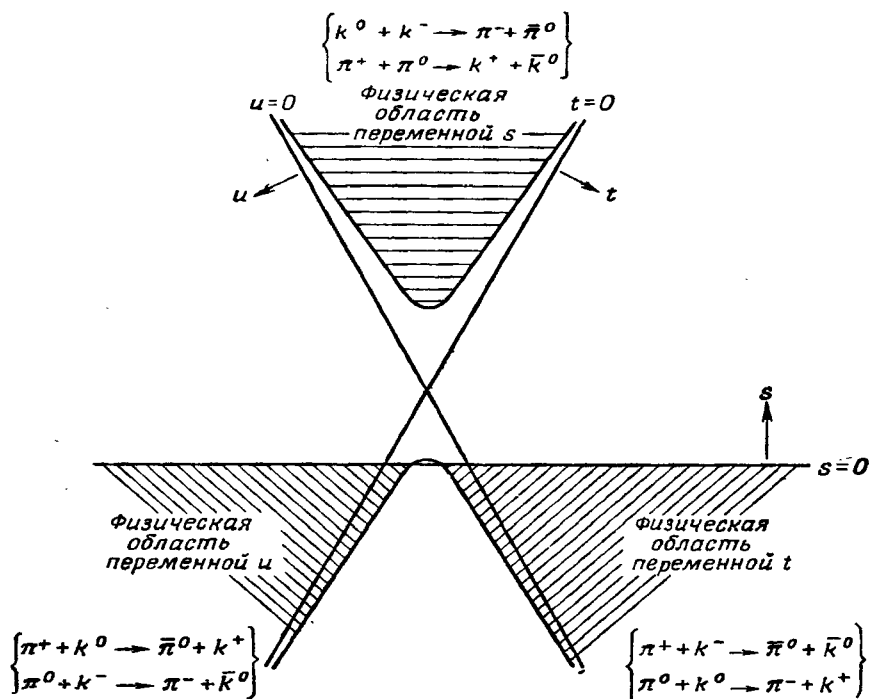
Таким образом мы приходим к аналитической функции двух комплексных переменных, например $\mathfrak{M}(s, t)$.

Эта функция, очевидно, не меняется при изменении знака у всех импульсов $p_i \rightarrow -p_i$, т. е. при преобразовании, которое переводит физическую область одной реакции в физическую область другой реакции, входящей в одну и ту же пару в приведенной выше схеме. Возникающая таким образом *TCP*-симметрия является в рассматриваемом случае тривиальным следствием лоренцевской инвариантности и принципа перестановок. Общие *TCP*-преобразования при наличии спина для произвольного числа частиц были рассмотрены Стаппом [3].

В пространстве двух независимых инвариантов имеются три отдельные физические области, отвечающие трем указанным выше парам реакций. Общие формулы для границ этих областей были получены Киблом [11] посредством использования того обстоятельства, что граница всегда отвечает рассеянию вперед (или назад) в соответствующей системе центра тяжести. Указанные три области не перекрываются друг с другом и лучше всего могут быть представлены треугольной диаграммой Мандельстама [12], на которой сохраняется равноправный статус всех трех пере-

¹⁾ Первоначально теорема Холла — Вайтмана была доказана вне массовой поверхности, но впоследствии необходимое обобщение было сделано Стаппом [10].

менных (s, t, u), несмотря на то что только две из них являются независимыми. На фиг. 1 показана диа-



Фиг. 1. Диаграмма Мандельстама для связной четыреххвостки с двумя пионными и двумя каонными линиями.

грамма Мандельстама для рассмотренного выше примера.

Упражнения

1. Покажите для случая общей связной четыреххвостки, что z_s — косинус угла между направлениями частицы 1 и частицы 3 — в системе центра тяжести для реакции $(1, 2) \leftrightarrow (3, 4)$ при квадрате полной энергии, равном $s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2$, задается соотношением

$$4q_{12}q_{34}z_s = t - u + \frac{(m_1^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_4^2)}{s}.$$

где q_{12} и q_{34} — модули трехмерных импульсов частиц соответственно в каналах (1, 2) и (3, 4). Подтвердите, что величины q_{12} и q_{34} связаны с s формулой

$$q_{ij}^2 = \frac{[s - (m_i + m_j)^2][s - (m_i - m_j)^2]}{4s}.$$

2. В частном случае $m_1 = m_2$ и $m_3 = m_4$ получите с помощью соотношений, установленных в упражнении 1, и аналогичных соотношений для кросс-реакций границы физических областей, показанные на фиг. 1 [прямую линию $s=0$ и гиперболу $tu = (m_3^2 - m_1^2)^2$].

§ 6. Точки ветвления у нормальных порогов; *iε*-правило для физической области

Кроме сопоставляемых частицам полюсов относительно инвариантов каналов, возникает еще один тип фиксированных сингулярностей. Ими являются точки ветвления у порогов каналов. На необходимость пороговых точек ветвления указал еще в 1948 г. Вигнер [13]; наиболее полно соображения относительно связи этих точек ветвления с унитарностью и рассмотренными выше полюсами были развиты Гансоном [5] и Оливом [8]. Мы будем здесь следовать такому же оправдываемому педагогическими соображениями способу изложения, что и в случае полюсов. Именно, мы начнем с формулировки простейших и наиболее очевидных свойств пороговых точек ветвления, стараясь обойтись без ссылок на вывод этих свойств с помощью развитых в литературе естественных, но в то же время довольно сложных логических рассуждений.

Рассмотрим некоторый набор взаимосвязанных каналов, характеризуемых заданными сохраняющимися квантовыми числами: барионным числом, электрическим зарядом и т. д. Для каждого канала определим «порог» s_c^t , равный квадрату суммы масс всех входящих в канал частиц

$$s_c^t = \left(\sum_{i \in c} m_i \right)^2. \quad (2.3)$$

Термин *порог* соответствует тому обстоятельству, что для вещественных значений инварианта s_c , *больших*

s_c^t . канал является физически «открытым», а для значений s_c , меньших s_c^t , — «закрытым». Рассмотрим далее набор всех связанных частей $A_{c'c}(s_c)$, описывающих переходы между двумя каналами (c в c') как функцию инварианта s_c , учитывая, что в силу сохранения¹⁾ энергии-импульса $s_{c'} = s_c$. Высказываемое утверждение заключается в том, что каждая связанная часть имеет как функция s_c конечную точку ветвления на пороге каждого канала, который взаимосвязан с данной связанной частью (а не только на порогах s_c^t и $s_{c'}^t$).

Чтобы отчетливее понять значение сказанного выше, следует вспомнить, что физическая область связанной части $A_{c'c}(s_c)$ соответствует вещественным значениям s_c , большим как s_c^t , так и $s_{c'}^t$. Эта область ограничена снизу наибольшим из значений s_c^t , $s_{c'}^t$. Таким образом, если пороги остальных каналов (кроме c или c') превышают наибольшее из значений s_c^t , $s_{c'}^t$, то эти пороги лежат в физической области $A_{c'c}$; в противном случае они попадают в нефизическую область. Согласно приведенному правилу, очевидно, что каждый из порогов вызывает появление точки ветвления в физической области специальной связанной части $A_{c_1c_1}$, описывающей упругое рассеяние и отвечающей тому каналу c_1 , который имеет наинизший из всех порогов.

Необходимость точек ветвления на порогах в физических областях обусловлена, грубо говоря, тем, что каждый раз при открытии нового канала изменяется «размерность» физической S -матрицы²⁾. Очевидно, в этой точке происходит что-то внезапное, а любое

1) Связанная часть $A_{c'c}$ может зависеть также от других переменных: субэнергий (энергий, соответствующих части линий), кросс-энергий и передач импульса. Будем, однако, считать, что все другие переменные фиксированы; если их все же придется изменять при изменении s_c (в силу ограничений, возникающих в конкретных задачах), то мы будем считать, что при s_c , лежащем вблизи полюса или порога, остальные переменные находятся в своей области аналитичности.

2) Более точно следовало бы здесь говорить о совокупности частных S -матриц перехода из одного канала в другой [15]. Выше каждого порога число таких частных S -матриц увеличивается. — *Прим. перев.*

внезапное изменение выражается при использовании аналитических функций посредством точечной сингулярности. То, что данная сингулярность должна быть конечной точкой ветвления, а не полюсом или какой-либо другой особенностью, диктуется условием унитарности, как это будет показано в гл. 3. Из изложения, приведенного в указанной главе, станет также ясным [уравнение (3.7)], как условие унитарности «перемещает» фиксированные сингулярности относительно переменных инвариантов каналов внутри взаимосвязанного набора связанных частей. Именно это перемещение является причиной как рассмотренного выше «обобществления» полюсов, так и появления точек ветвления в нефизических областях.

Читатель, очевидно, заметил формальную аналогию между правилами расположения полюсов, сопоставляемых частицам, и правилами расположения пороговых точек ветвления. Если бы мы ввели искусственным образом понятие об одночастичных каналах, то распределение полюсов можно было бы задать как частный случай распределения пороговых точек ветвления. Однако между этими двумя типами сингулярностей имеются принципиальные отличия, на два из которых мы хотим обратить внимание читателей. Во-первых, вычеты полюсов факторизуются; аналогичного свойства нет у точек ветвления. Во-вторых, при аналитическом продолжении в окрестности полюса нет необходимости дополнительно указывать порядок обхода полюса. Иначе говоря, можно обойти полюс и вернуться в исходную точку без изменения функции; это неверно в случае точки ветвления.

Так как точки ветвления нельзя обойти произвольным образом и так как они делят физическую область на отдельные отрезки¹⁾, необходимо задать правило связи между соседними физическими отрезками изменения переменной s_c посредством аналитического продолжения. Это правило известно уже дав-

¹⁾ «Отрезком» мы называем интервал вещественной оси между двумя последовательными порогами, в котором открыто определенное число каналов.

но и является простым, особенно в формулировке Олива. Именно если при движении вдоль вещественной оси s_c в физической области при подходе к пороговой точке ветвления бесконечно мало сместиться *вверх* от точки ветвления в комплексную область s_c , то после возвращения к вещественным s_c за точкой ветвления мы придем в соседнюю физическую область. Движение под точкой ветвления или полуоборот вокруг нее приводят в общем случае в нефизическую область. Олив назвал указанный способ обхода «*iε*-правилом» соответственно тому, что необходимое малое отклонение в комплексную плоскость s_c можно представить как добавление положительного мнимого слагаемого.

Физические причины происхождения *iε*-правила связаны с тем условием, что при использовании волновых пакетов, представляющих собой суперпозицию состояний с близкими импульсами и описывающих частицы, которые локализованы в макроскопическом пространстве-времени, S -матрица должна задавать определенное столкновение, только если исходные пакеты сближаются друг с другом, а конечные пакеты расходятся «после» соударения. Проводя преобразование Фурье, мы в пространственно-временной записи [14] получим, что *iε*-правило задает именно тот контур интегрирования, который необходим для выполнения указанного физического условия. Короче говоря, S -матрица преобразует «сходящиеся» состояния в «расходящиеся»¹⁾. Наиболее отчетливое рассмотрение данного условия для волновых пакетов содержится в обзоре Чэндлера и Стаппа [14].

Точно так же как и в случае полюсов, сопоставляемых частицам, из-за принципа перестановок точки ветвления появляются также по переменным кросс-энергии и передачи импульса, где их нельзя уже просто интерпретировать как физические пороги. При

¹⁾ Это условие, которое можно назвать условием «макроскопической причинности», не следует смешивать с аксиомой «микроскопической причинности» в квантовой теории поля, которая не выражается непосредственно через физически наблюдаемые величины.

аналитическом продолжении связной части следует рассматривать все возможные реакции, которые объединяются принципом перестановок, и для каждой из этих реакций задавать набор пороговых точек ветвления, возникающих относительно инвариантов соответствующих каналов.

У п р а ж н е н и е

Определите первые четыре (в порядке возрастания) пороговые точки ветвления относительно каждого из инвариантов каналов s , t и u для четыреххвостки, рассмотренной в качестве примера в предыдущем параграфе. Какие из них соответствуют истинным физическим порогам?

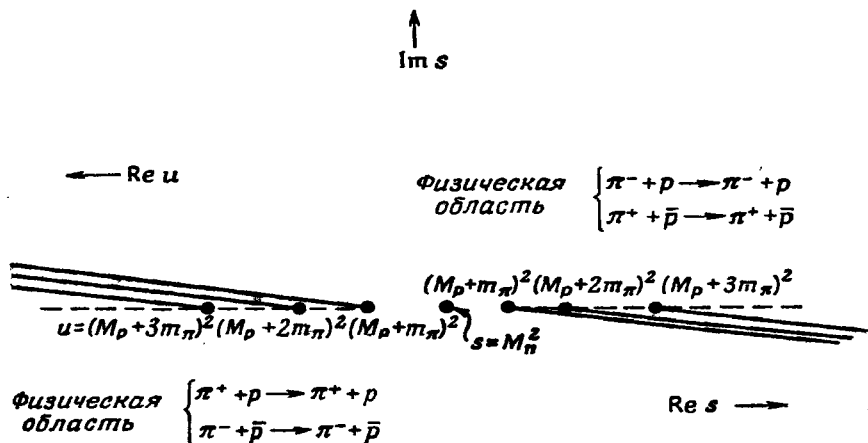
§ 7. Физический лист

В заключение настоящей главы мы выскажем еще одно утверждение об общих свойствах S -матрицы, которое может показаться читателям менее существенным, чем предыдущие, но тем не менее все же является важным. Оно касается пути аналитического продолжения при переходе в некоторой связной части от физической области одной реакции к физической области кросс-реакции (реакции, в которой падающая частица заменена на вылетающую античастицу). Утверждается, что существует единственный лист римановой поверхности для совокупности комплексных переменных энергии отдельных частиц, с которого можно попасть во все физические области, подходя сверху к соответствующим положительным осям и снизу — к соответствующим отрицательным осям. Этот лист обозначается как *физический лист* и задается посредством проведения разрезов от каждой нормальной пороговой точки ветвления в положительном направлении вдоль вещественной оси переменной инварианта соответствующего канала до бесконечности.

Вообще говоря, положение осложняется из-за ограничения массовой поверхностью и условия сохранения энергии-импульса¹⁾. Однако во всех проанализиро-

¹⁾ Дополнительные трудности возникают, когда на физическом листе появляются сингулярности Ландау, обсуждаемые в гл. 4. Рассматриваемые в данном параграфе примеры не содержат подобных трудностей.

ванных случаях приведенное правило задания физического листа оказывается однозначным, если перейти к независимому набору инвариантов каналов, такому, как набор (s, t) , для рассмотренной выше четыреххвостки. В частности, при фиксированном t имеется



Фиг. 2. Физический лист при $t = 0$ для связной части, рассматриваемой в § 6 настоящей главы.

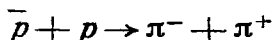
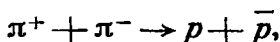
Две физические области показаны пунктирными линиями. Сплошные линии соответствуют разрезам, проведенным под небольшим углом, чтобы они не налагались друг на друга. В каждой физической области показаны только первые три точки ветвления.

специальный лист переменной s , на котором физическая область реакций $(1,2) \leftrightarrow (3,4)$ достигается при приближении к положительной вещественной оси сверху, а физическая область реакций $(1,4) \leftrightarrow (2,3)$ при приближении к отрицательной вещественной оси снизу. Мы рассмотрим подробно этот лист в гл. 5.

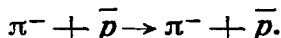
Сыгравший исторически важную роль пример, поясняющий высказанные в данном параграфе утверждения и позволяющий также проиллюстрировать расположение различных полюсов и пороговых точек ветвления, приведен на фиг. 2. Соответствующая связная часть описывает s -реакции

$$\begin{aligned} \pi^- + p &\rightarrow \pi^- + p, \\ \pi^+ + \bar{p} &\rightarrow \pi^+ + \bar{p}, \end{aligned}$$

t -реакции



и u -реакции



На фиг. 2 приведен физический лист переменной s при $t=0$, когда

$$u = 2M_p^2 + 2m_\pi^2 - s.$$

Сингулярности по s включают полюс, сопоставляемый нейтрону, в точке $s = M_n^2$ и последовательность пороговых точек ветвления при s , равном $(M_p + m_\pi)^2$, $(M_p + 2m_\pi)^2$ и т. д. В данном случае оказывается, что нет стабильных частиц, взаимосвязанных с u -каналом, так что из-за этого канала на физическом листе возникают только пороговые точки ветвления. Соответствующие разрезы показаны на фиг. 2 слева, поскольку $+\infty$ для u соответствует $-\infty$ для s .

В данном примере обе физические области отвечают упругому рассеянию вперед для соответствующих реакций. Как будет выяснено в гл. 5, можно выполнить аккуратную экспериментальную проверку структуры сингулярностей, приведенной на фиг. 2. Успешное подтверждение теории при такой экспериментальной проверке явилось исторически одним из главных оснований для доверия к общим принципам, изложенным в настоящей главе.

ЛИТЕРАТУРА ¹⁾

1. Stapp H. P., Phys. Rev., 139, B257 (1965).
2. Heisenberg W., Zs. Phys., 120, 513, 673 (1943).
3. Stapp H. P., Phys. Rev., 125, 2139 (1962).
4. Jacob M., Wick G. C., Ann. Phys., 7, 404 (1959).

¹⁾ Литература, отмеченная звездочкой, добавлена переводчиком. — Прим. перев.

5. Gunson J., Journ. Math. Phys., 6, 827, 845 (1965).
6. Olive D., Nuovo Cimento, 26, 76 (1962).
7. Wichmann E. H., Crichton J. H., Phys. Rev., 132, 2788 (1963).
8. Olive D., Phys. Rev., 135, B745 (1964).
9. Hall D., Wightman A. S., Kgl. Danske Videnskab. Selskab. Mat.-fys. Medd., 31, № 5 (1957).
10. Stapp H. P., UCRL-10843 (1963).
11. Kibble T., Phys. Rev., 117, 1159 (1960).
12. Mandelstam S., Phys. Rev., 112, 1344 (1958) (имеется перевод в сб. «Новый метод в теории сильных взаимодействий», ИЛ, 1960).
13. Wigner E. P., Phys. Rev., 73, 1002 (1948).
14. Chandler C., Stapp H. P., Asymptotic Causality Conditions and Physical Region Analyticity Properties of Scattering Amplitudes, Lawrence Radiation Lab. Report, Berkeley (1966).
- 15*. Ekstein H., Phys. Rev., 101, 880 (1956),

ГЛАВА 3

УНИТАРНОСТЬ И СКАЧКИ НА РАЗРЕЗАХ

§ 1. Условие унитарности для связанных частей

Унитарность входит в число общих свойств S -матрицы, указанных Гейзенбергом [1] в 1943 г. Физические причины, приводящие к требованию унитарности S -матрицы, неоднократно разбирались во многих работах с различной степенью общности и строгости, поэтому нет необходимости повторять здесь хорошо известные аргументы. Мы перейдем сразу к изложению следствий из унитарности, напомнив лишь еще раз читателю, что в теории S -матрицы из всех принципов квантовой механики используются только сохранение вероятности и принцип линейной суперпозиции амплитуд.

S -матрица унитарна лишь в физической области, но раз связанные части продолжают существовать в нефизических областях, то следует ожидать существования соотношений, которые можно назвать в некотором широком смысле *аналитическим продолжением условий унитарности*. Настоящая глава посвящена данному чрезвычайно важному аспекту теории S -матрицы. При этом будут указаны формулы для изменения связанных частей при обходе пороговых точек ветвления. Мы начнем с исследования отдельных отрезков физической области, ограниченных с двух сторон, как уже было разъяснено, пороговыми точками ветвления.

Предположим сначала, что мы находимся в отрезке, где открыт только один двухчастичный канал. Используя обозначения Олива [2], условие унитарности можно записать следующим образом:

$$\begin{array}{c} \text{---} \textcircled{S} \textcircled{S^*} \text{---} \\ \text{---} \textcircled{S^*} \textcircled{S} \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \textcircled{S^*} \text{---} \\ \text{---} \textcircled{S} \text{---} \end{array} = \text{---} \text{---}$$

Конкретный смысл изображенных на диаграмме кружков указан ниже в формулах (3.3) — (3.4а). Однако уже сейчас мы можем рассмотреть в схематической записи очевидные следствия из закона разложения. Разложение ¹⁾

$$\text{---} \textcircled{s} \text{---} = \text{---} \text{---} + \text{---} \textcircled{+} \text{---}$$

$$\text{---} \textcircled{st} \text{---} = \text{---} \text{---} - \text{---} \textcircled{-} \text{---}$$

ведет к равенству

$$\begin{aligned} \text{---} \textcircled{+} \text{---} - \text{---} \textcircled{-} \text{---} &= \text{---} \textcircled{+} \text{---} \textcircled{-} \text{---} = \\ &= \text{---} \textcircled{-} \text{---} \textcircled{+} \text{---} \end{aligned} \quad (3.1)$$

в котором тождественно сокращаются несвязные части. Олив показал, что подобные сокращения имеют место последовательно в каждом отрезке. Рассмотрим, например, следующий отрезок, в котором открыт только трехчастичный канал (a, b, c) и законы сохранения исключают связь с двухчастичными каналами. Условие унитарности теперь гласит

$$\text{---} \textcircled{s} \text{---} \textcircled{st} \text{---} = \text{---} \textcircled{st} \text{---} \textcircled{s} \text{---} = \text{---} \text{---} \text{---} ,$$

а разложение S -матрицы имеет вид

$$\begin{aligned} \text{---} \textcircled{s} \text{---} \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} &= \text{---} \text{---} \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} + \text{---} \textcircled{+} \text{---} \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} + \\ &+ \text{---} \textcircled{+} \text{---} \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} + \text{---} \textcircled{+} \text{---} \begin{matrix} b \\ a \\ c \end{matrix} + \text{---} \textcircled{+} \text{---} \begin{matrix} a \\ a \\ b \end{matrix} ; \end{aligned}$$

¹⁾ Знак минус в кружке  пока является чисто

условным. Однако в дальнейшем он будет полезным в связи с введением эрмитовой аналитичности.

аналогичная запись имеет место для S^\dagger . Подстановка разложения S -матрицы в условие унитарности приводит¹⁾ к выражению

$$\begin{aligned}
 & \text{---} \bigoplus \text{---} - \text{---} \bigominus \text{---} = \\
 = & \text{---} \bigoplus \text{---} \bigominus \text{---} + \sum \text{---} \bigoplus \text{---} \bigominus \text{---} + \\
 + & \sum \text{---} \bigoplus \text{---} \bigominus \text{---} + \sum \text{---} \bigoplus \text{---} \bigominus \text{---} , \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

причем суммы берутся по циклическим перестановкам частиц a, b, c . Несвязные части, например совокупности членов

$$\text{---} \bigoplus \text{---} \bigominus \text{---} - \text{---} \bigoplus \text{---} + \text{---} \bigominus \text{---} ,$$

сокращаются вследствие указанного выше условия унитарности для связной четыреххвостки.

Рассмотренные примеры показывают, как условие унитарности в различных физических отрезках приводит к формулам, выражающим сумму связной части и ее эрмитовски-сопряженной величины через разнообразные билинейные члены. Прервем теперь на некоторое время общее рассмотрение, чтобы пояснить смысл этих билинейных членов.

Сначала полезно явно выделить δ -функцию, содержащуюся в связной N -хвостке. Следуя общепринятому соглашению, запишем


$$\begin{aligned}
 \begin{array}{l} -p_{n+1} \\ -p_{n+2} \\ \vdots \\ -p_N \end{array} & \text{---} \bigoplus \text{---} \begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_N \end{array} = i(2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 + \dots + p_n + \\ & + p_{n+1} + p_{n+2} + \dots + p_N) \times \\ & \times M^+(p_1, p_2, \dots, p_{N-1}), \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

¹⁾ В правой части выражения можно менять порядок кружков \bigoplus и \bigominus , если только это делать одновременно во всех членах.

где M^+ — аналитическая функция $N-1$ импульса, причем каждый из N импульсов лежит на массовой поверхности

$$p_i^2 = p_{i0}^2 - (\vec{p}_i)^2 = m_i^2. \quad (3.4)$$

Аналогичным образом запишем



$$= i(2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 + \dots + p_N) \times \\ \times M^-(p_1, p_2, \dots, p_{N-1}). \quad (3.3a)$$

В общем случае при наличии частиц со спином величины M^+ и M^- являются спинорными (матричными) функциями вида, описанного Стаппом [3], а также Барутом, Музиничем и Вильямсом [4]. Истинный элемент S -матрицы окончательно получается в этом случае после «заклочения M -функции в обложку» между начальным и конечным спинорами. Из педагогических соображений мы дальше будем говорить лишь о простейшем формализме, относящемся к случаю бесспиновых частиц. После того как будет выяснен способ построения формул для скачков, станет понятным, что обобщение Стаппа, включающее спин, согласуется с предлагаемой процедурой.

Билинейные члены в связных частях, возникающие в условии унитарности, включают интегралы по промежуточным каналам. Все промежуточные частицы обладают на массовой поверхности положительной энергией, так что ввиду лоренцевской инвариантности каждый интеграл по фазовому пространству промежуточного канала с частицами, обладающими импульсами p_1, p_2, \dots, p_n , сводится к произведению интегралов $S_{p_1} \dots S_{p_n}$, где

$$S_{p_i} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4 p_i \delta(p_i^2 - m_i^2) \theta(p_{i0}). \quad (3.4a)$$

Если в промежуточный канал частица типа i входит n_i раз, то следует добавить множитель $(n_i!)^{-1}$. Множитель $(2\pi)^{-3}$ соответствует принятой нормировке связных

частей. Функция скачка $\theta(x)$ обращается в нуль при $x < 0$ и равна единице при $x \geq 0$.

В перечисленных обозначениях формула (3.1) принимает вид

$$\begin{aligned} M^+(p'_a p'_b p_a p_b) - M^-(p'_a p'_b p_a p_b) = \\ = + \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4 p''_a \{ \delta(p''_a{}^2 - m_a^2) \delta(p''_b{}^2 - m_b^2) \theta(p''_{a0}) \theta(p''_{b0}) \times \\ \times M^-(p'_a p'_b p''_a p''_b) M^+(p''_a p''_b p_a p_b) \}, \quad (3.1a) \end{aligned}$$

причем подразумевается

$$p_a + p_b = p'_a + p'_b = p''_a + p''_b.$$

Как было указано выше, в отсутствие спинов связанная четыреххвостка может зависеть только от двух независимых скаляров. Выберем в качестве одного из таких скаляров инвариант канала

$$s = (p_a + p_b)^2 = (p'_a + p'_b)^2 = (p''_a + p''_b)^2,$$

а в качестве другого z_s — косинус угла рассеяния в системе центра масс. После несложных вычислений условие унитарности преобразуется к виду

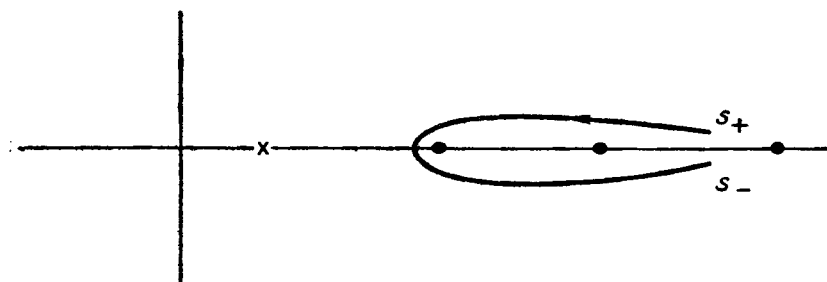
$$\begin{aligned} M^+(s, z_s) - M^-(s, z_s) = \\ = \frac{i}{16\pi^2} \frac{q_{ab}(s)}{\sqrt{s}} \int d\Omega_{\text{int}} M^-(s, z''_s) M^+(s, z'_s), \quad (3.16) \end{aligned}$$

где z'_s — косинус угла между начальным и промежуточным направлениями, z''_s — косинус угла между промежуточным и конечным направлениями. Интегрирование ведется по телесному углу вокруг направления промежуточного импульса.

Приведенный пример иллюстрирует конкретный смысл, приписываемый формулам, соответствующим условию унитарности для связанных частей. Мы можем теперь продолжить общую формулировку выражений для скачков, для чего используем понятие эрмитовой аналитичности.

§ 2. «Эрмитова аналитичность» и формулы для скачков

Формулы, соответствующие условию унитарности, вида (3.16) могут быть верны только на одном физическом отрезке вещественной оси, если считать, что M^- всюду эрмитово сопряжено с M^+ , поскольку функциональные соотношения с комплексным сопряжением не подходят для аналитического продолжения. Сделаем в связи с этим предположение, что $M^-(s)$ можно отождествлять с аналитическим продолжением $M^+(s)$ в (нефизическую) точку, достигаемую при обходе против часовой стрелки всех пороговых точек ветвления относительно s , лежащих на физическом листе слева от рассматриваемого физического отрезка (фиг. 3).



Фиг. 3. Типичная траектория «эрмитовой аналитичности» на физическом листе комплексной плоскости s .

Полюсы, соответствующие стабильным частицам, обозначаются крестиком; черные кружки означают пороговые точки ветвления.

Указанный переход мы называем «эрмитовой аналитичностью» и обозначаем связываемые им точки через s_+ и s_- . Другими словами, положим

$$M^-(s_+) = M^+(s_-). \quad (3.5)$$

Систематический, но, к сожалению, несколько утомительный вывод «эрмитовой аналитичности» был дан Оливом [2] при использовании $i\epsilon$ -правила и того обстоятельства, что стабильные частицы обладают вещественными массами. Мы ограничимся здесь наводящими соображениями, основанными на том

замечании, что стабильная частица, взаимосвязанная с s -каналами, вызывает появление в связной четыреххвостке полюса, лежащего на вещественной оси физического листа переменной s ниже самой нижней пороговой точки ветвления (см. фиг. 3). Вещественность полюса, очевидно, обеспечивается, если потребовать, чтобы диагональная связная часть $M(s, z) = M^+(s, z)$ была вещественной на вещественной оси s ниже нижнего порога. Из этого условия следует также, что часть $M(s, z)$ — «вещественно-аналитична», т. е. при физических z

$$M(s^*, z) = M^*(s, z) \quad (3.6)$$

всюду на том листе переменной s , верхняя и нижняя половины которого соприкасаются на рассматриваемом интервале вещественной оси¹⁾. В частности, имеем соотношение

$$M^*(s_+) = M(s_-),$$

являющееся специальным случаем (3.5). Из приведенных аргументов следует²⁾ достаточность условия «эрмитовой аналитичности» для вещественности полюсов, отвечающих стабильным частицам. За доказательством необходимости мы отсылаем читателей к оригинальной статье Олива [2].

Последовательное приравнивание в условиях унитарности для связных частей $M^+(s) = M(s_+)$ и $M^-(s) = M(s_-)$ приводит к формулам для скачков, задающих изменение связных частей при однократном обходе вокруг всех пороговых точек ветвления, лежащих ниже исходной физической точки. Указанные формулы можно продолжить вне физической области, и их часто называют *аналитическим продолжением унитарности*.

¹⁾ Вещественно-аналитические функции в определении Чью называются в литературе часто также вещественно-определенными аналитическими функциями. — *Прим. перев.*

²⁾ При выполнении инвариантности относительно инверсии времени «эрмитова аналитичность» и «вещественная аналитичность» становятся эквивалентными. В общем случае недиагональных связных частей без дополнительного требования инвариантности относительно инверсии времени такая эквивалентность не имеет места.

Комбинируя различные подобные формулы для последовательно соединенных физических отрезков, можно вывести правила нахождения скачков при обходе вокруг любых комбинаций точек ветвления. Например, можно показать, что обход вокруг любой *одной* точки ветвления, соответствующей порогу двухчастичного канала независимо от того, является ли этот порог нижним или нет, приводит к следующему скачку в связанной четыреххвостке [5, 6]:

$$M_{ba}(s) - M_{ba}(s_n) = \frac{1}{16\pi^2} \frac{q_n(s)}{\sqrt{s}} \int d\Omega_n M_{bn}(s_n) M_{na}(s). \quad (3.7)$$

В выражении (3.7) s_n лежит непосредственно под s на листе, на который можно попасть при однократном обходе против часовой стрелки вокруг n -й точки ветвления, не обходя при этом других точек ветвления, а $q_n(s)$ — модуль импульса каждой из двух частиц, составляющих канал n . Олив [6] сформулировал обобщение приведенного правила для произвольных инвариантов каналов в связанной части с любым числом линий.

При предшествующем обсуждении «эрмитовой аналитичности» предполагалось, что единственными сингулярностями на физическом листе являются полюсы, соответствующие частицам, и нормальные пороговые точки ветвления. При определенных обстоятельствах на физическом листе могут появляться сингулярности третьего типа, так называемые *точки ветвления Ландау*, которые будут описаны в следующей главе. Путь «эрмитовой аналитичности» должен быть в последнем случае деформирован определенным образом, так, чтобы исключить новые точки ветвления; однако подходящий путь всегда может быть найден [7].

§ 3. Независимость нормальных порогов

Важной особенностью указанных правил нахождения скачков является то обстоятельство, что они оперируют с конкретными инвариантами каналов независимо от значений других инвариантов, от которых зависит связанная часть. Существуют кинематические

ограничения вида (2.2), связывающие различные инварианты, но тем не менее всегда можно найти такой путь, чтобы точка ветвления относительно рассматриваемого инварианта была обойдена, но при этом точки ветвления относительно каких-либо других инвариантов не обходились.

Олив [2] назвал предыдущее свойство «независимостью нормальных порогов». Несколько более элегантным выражением свойства «независимости» является утверждение, что *порядок* обхода пороговых точек ветвления относительно *различных* инвариантов является несущественным. Свойство независимости окажется важным при формулировке динамических моделей; в общем случае оно подчеркивает различие между введенными до сих пор фиксированными полюсами и точками ветвления, с одной стороны, и сингулярностями Ландау, которые могут зависеть одновременно от двух или более инвариантов каналов — с другой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Heisenberg W., Zs. Phys., **120**, 513, 673 (1943).
2. Olive D., Phys. Rev., **135**, B745 (1964).
3. Stapp H. P., Phys. Rev., **125**, 2139 (1962).
4. Barut A., Muzinich I., Williams D., Phys. Rev., **130**, 442 (1963).
5. Gunson J., Journ. Math. Phys., **6**, 827, 845 (1965).
6. Olive D., Nuovo Cimento, **29**, 326 (1963); **37**, 1422 (1965).
7. Boyling J. B., Nuovo Cimento, **33**, 1356 (1964).

МАКСИМАЛЬНАЯ АНАЛИТИЧНОСТЬ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ.
СИНГУЛЯРНОСТИ ЛАНДАУ

§ 1. Простой пример сингулярности Ландау

В этой главе будет показано, что следующие из унитарности формулы для скачков обуславливают наличие в связанных частях сингулярностей, которые не являются ни полюсами, сопоставляемыми частицам, ни пороговыми точками ветвления. Эти новые сингулярности связаны с именем Ландау [1], хотя их существование было установлено независимо многими учеными; они появляются вследствие механизма, открытого Мандельштамом [2] и иллюстрируемого ниже на простом примере.

Рассмотрим формулу для скачков (3.7) для конкретной точки ветвления у нормального двухчастичного порога. В ней справа производится интегрирование по телесному углу промежуточного двухчастичного состояния. Предположим далее, что начальный и конечный каналы a и b также являются двухчастичными и, следовательно, характеризуются в системе центра тяжести направлением движения частиц. Мы можем выбрать соответствующее направление в начальном канале в качестве полярной оси и отсчитывать азимутальный угол от плоскости, содержащей направления начального и конечного движений. При этом вместо (3.7) можно написать

$$M_{ba}(s, z) - M_{ba}(s_n, z) = \\ = \frac{i}{16\pi^2} \frac{q_n(s)}{\sqrt{s}} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-1}^{+1} dz' M_{bn}(s_n, z') M_{na}(s, z'), \quad (4.1)$$

где, согласно правилу сложения косинусов,

$$z'' = zz' + \sqrt{1-z^2} \sqrt{1-z'^2} \cos \varphi'. \quad (4.2)$$

Специфическая особенность состоит в том, что если связные части под интегралом имеют по отдельности сингулярности соответственно по z' и z'' , то эти сингулярности «переносятся» в зависимость от z согласно (4.2). Такой перенос можно продемонстрировать различными способами, наиболее элегантен и общий из которых изложен с помощью топологических методов в работах [3, 4]. Мы здесь ограничимся тем наводящим соображением, что сингулярности по z возникают при учете формул (4.2) тогда, когда z' совпадает с точкой сингулярности¹⁾ $M_{na}(s, z')$, например при $z' = z_1$, и одновременно имеет место совпадение z'' с точкой сингулярности $M_{bn}(s_n, z'')$, например при $z'' = z_2$. При этом должна быть невозможна никакая малая деформация контура интегрирования по переменной φ' , позволяющая исключить сингулярность. Такое положение реализуется, когда связь (4.2) стационарна относительно вариаций φ' , т. е. когда

$$\frac{d}{d\varphi'} \cos \varphi' = 0$$

или

$$\cos \varphi' = \pm 1.$$

Уравнение Ландау для положения переносимой сингулярности по переменной z будет иметь соответственно вид

$$z_2 = zz_1 \pm \sqrt{1 - z^2} \sqrt{1 - z_1^2}. \quad (4.3)$$

или в более симметричной записи²⁾

$$z^2 + z_1^2 + z_2^2 - 2zz_1z_2 - 1 = 0. \quad (4.3a)$$

Приведенное уравнение Ландау имеет два решения; в дальнейшем мы для иллюстрации общего

¹⁾ Рассматриваемые сингулярности могут быть либо полюсами, сопоставляемыми частицам, либо точками ветвления, либо самими сингулярностями Ландау.

²⁾ Еще более простое выражение получается, если положить $z = \cos \theta$, $z_1 = \cos \theta_1$ и $z_2 = \cos \theta_2$. Уравнение Ландау имеет тогда вид $\theta = \theta_1 \pm \theta_2$.

положения сосредоточим внимание на одном из них

$$z = z_1 z_2 + \sqrt{(1 - z_1^2)(1 - z_2^2)}, \quad (4.4)$$

которое, как выяснится в гл. 9, имеет особо важное практическое значение. Вначале мы поставим только цель показать, что если (4.4) выразить через инварианты каналов, то мы не получим более фиксированных сингулярностей. Чтобы выкладки были как можно более простыми, предположим, что массы всех частиц в начальном, промежуточном и конечном состояниях одинаковы. Тогда

$$\begin{aligned} z &= 1 + \frac{2t}{s - 4m^2}, \\ z' &= 1 + \frac{2t'}{s - 4m^2}, \\ z'' &= 1 + \frac{2t''}{s - 4m^2}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Обозначим далее через t_1 положение сингулярности по t' , соответствующее сингулярности при $z' = z_1$, и через t_2 положение сингулярности по t'' , соответствующее сингулярности при $z'' = z_2$. Уравнение (4.4) примет в этом случае вид

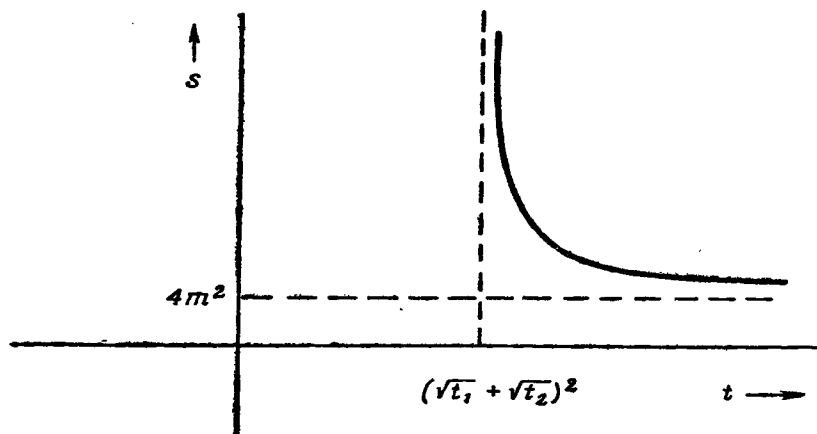
$$\begin{aligned} t = t_1 + t_2 + 2\sqrt{t_1 t_2} \sqrt{\left(1 + \frac{t_1}{s - 4m^2}\right)\left(1 + \frac{t_2}{s - 4m^2}\right)} + \\ + \frac{2t_1 t_2}{s - 4m^2}. \end{aligned} \quad (4.4a)$$

Уравнение (4.4a) представляет собой, как показано на фиг. 4, уравнение монотонной кривой в плоскости вещественных s, t с асимптотами $s = 4m^2$ и $t = (\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2})^2$. Приведенный пример иллюстрирует, как положение сингулярностей Ландау может в общем случае зависеть от более чем одного инварианта каналов.

Мы имеем здесь, конечно, дело с многолистной римановской поверхностью переменных z, z', z'' (или t, t', t''), и необходимо специально указывать лист, на котором лежат исходные и перенесенная сингулярности. Это можно сделать с помощью топологических

методов [3, 4], но для нас указанный вопрос не существен. Достаточно здесь отметить, что в общем случае формулы для скачков последовательным образом вызывают появление определенных хитрых сингулярностей¹⁾.

Более прямую физическую интерпретацию сингулярностей Ландау можно получить, рассматривая



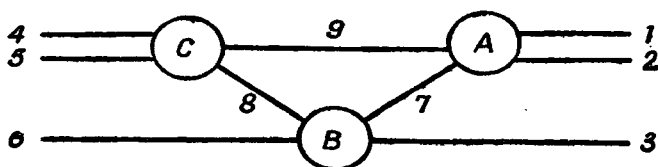
Фиг. 4. Кривая Ландау (4.4а) показана на вещественной (s, t) -плоскости.

Практическое значение данной кривой, впервые подчеркнутое Мандельштамом [2], будет рассмотрено в гл. 9.

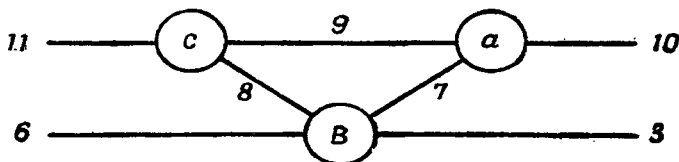
многократное рассеяние. Например, связанная шестихвостка, описывающая реакцию $3 \rightarrow 3$, должна содержать определенную сингулярность, соответствующую последовательности трех двухчастичных реакций — процессу, вероятность которого имеет иную зависимость от пространственного распределения начальных волновых пакетов, чем «истинное» трехчастичное соударе-

¹⁾ В связанных частях для каналов, содержащих только высоко стабильные частицы, такие, как нуклоны и пионы, сингулярности Ландау оказываются смещенными на нефизические листы. См. цитируемую в гл. 3 работу [7] и примечание на стр. 34.

ние

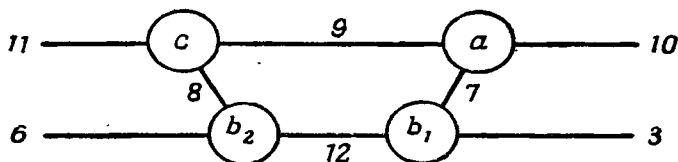


Положение такой сингулярности определяется условием, что каждый из «промежуточных» импульсов 7, 8 и 9 лежит на массовой поверхности, а также требованием, чтобы макроскопические пространственно-временные смещения складывались правильным образом. Детальная природа сингулярности определяется при рассмотрении произведения трех связанных четыреххвосток A , B и C . Можно далее рассмотреть аналитическое продолжение в окрестности конкретного полюса по переменной инварианта канала $s_{1,2}$, например при $s_{1,2} = m_{10}^2$ и аналогично в окрестности некоторого полюса по переменной $s_{4,5}$, например при $s_{4,5} = m_{11}^2$. Вычеты этих полюсов позволяют задать связную четыреххвостку для реакций $3 + 10 \rightarrow 6 + 11$, которая содержит сингулярность, соответствующую



и не имеющую непосредственного физического толкования. Наконец, если связная часть B содержит полюс по переменной инварианта канала $s_{3,7} = s_{6,8}$, например в точке m_{12}^2 , то это ведет к появлению в связной части реакции $3 + 10 \rightarrow 6 + 11$ сингулярности,

которую можно представить диаграммой



Этот последний тип сингулярностей соответствует рассмотренному в предыдущем примере, где была получена кривая Ландау (4.4а). Именно если

$$m_3 = m_{10} = m_6 = m_{11} = m_9 = m_{12} = m,$$

а

$$m_7 = \sqrt{t_1} \quad \text{и} \quad m_8 = \sqrt{t_2},$$

то мы получим сингулярность, расположенную, согласно (4.4а), если

$$s = (p_3 + p_{10})^2 = (p_6 + p_{11})^2$$

при

$$t = (p_{10} + p_{11})^2 = (p_3 + p_6)^2.$$

§ 2. Максимальная аналитичность первой степени

Из приведенных выше рассуждений следует не только положение, но и природа сингулярностей Ландау, т. е. правила изменения связанных частей при обходе соответствующих сингулярностей¹⁾. После задания полюсов, сопоставляемых частицам, и соответствующих им точек ветвления в нормальных порогах сингулярности Ландау можно, по всей видимости, определять последовательным образом. Высказанное положение весьма трудно проверить по следующим причинам:

1. Полюсы на нефизических листах вызывают появление сингулярностей Ландау в результате такого же механизма, что и полюсы, сопоставляемые стабиль-

¹⁾ Эти правила называют правилами Катковского [5]; мы их рассмотрим подробно в гл. 9.

ным частицам. Общее число «нестабильных» полюсов, по-видимому, бесконечно, и правила распределения их по листам не известны.

2. Имеются комплексные пороговые точки ветвления на нефизических листах, соответствующие комбинациям частиц, одна или более из которых нестабильны¹⁾. Общая структура листов из-за этого еще более усложняется, а число сингулярностей Ландау увеличивается.

3. Сами сингулярности Ландау генерируют дальнейшие сингулярности Ландау (возможность многократного рассеяния является неограниченной). Поэтому, даже если начать с конечного числа полюсов, общее число сингулярностей Ландау будет бесконечным, и не исключено, что они будут сгущаться, образуя существенно особые точки или естественные грани [7, 8]. Если выяснится, что это действительно имеет место, то все принципы аналитического продолжения необходимо будет пересмотреть.

Длительное время надеялись, что итерационная графическая техника, опирающаяся на аналогичные используемые в теории поля фейнмановские диаграммы, окажется пригодной для общего описания сингулярностей Ландау при задании полюсов, сопоставляемых частицам [9]. Сейчас, однако, признано, что существенные элементы структуры многолистной поверхности нельзя выразить посредством какого-либо конечного числа диаграмм²⁾. Тем не менее остается широко распространенным убеждение, что при известном распределении полюсов (и, следовательно, известном распределении пороговых точек ветвления) должен быть возможен вывод всех остальных сингулярностей S -матрицы посредством систематического

¹⁾ Существование подобных комплексных точек ветвления наиболее исчерпывающе обсуждалось в работе Цванцигера [6], который показал, что по крайней мере в двухчастичном случае соответствующая формула для скачков имеет такую же структуру, как и для только стабильных частиц.

²⁾ Мы учитываем то обстоятельство, что полюсы, сопоставляемые частицам, и пороговые точки ветвления относительно конкретного инварианта каналов появляются не на всех листах соответствующей переменной [10].

рассмотрения формул для скачков (или процессов многократного рассеяния). Приведенная выше гипотеза часто называется *принципом максимальной аналитичности*, поскольку согласно этой гипотезе исключаются «излишние» сингулярности. Мы предпочитаем использовать здесь термин *максимальная аналитичность первой степени*, потому что при этом никак не ограничиваются сами полюсы, сопоставляемые частицам. Дальнейшее предположение относительно ограничения полюсов будет рассмотрено в гл. 8.

Основным в приводимой выше характеристике максимальной аналитичности первой степени было представление о возможности *систематического* исследования формул для скачков. Согласно такому представлению, бесконечный набор полюсов можно, очевидно, некоторым образом упорядочить с соответствующим упорядочением пороговых точек ветвления — так, что существенные выводы можно сделать при рассмотрении последовательности отдельных формул для скачков. Общее правило подобного упорядочения до сих пор не известно, но Мандельштаму [2] удалось установить следующее свойство формул для скачков в двухчастичном случае, на котором мы останавливались выше. Именно, чтобы найти сингулярности Ландау в двухчастичном случае в некоторых конечных областях, необходимо знать сингулярности лишь в определенных *меньших* областях. Мандельштам нашел, что для ряда конкретных задач правила упорядочения состоят в действительности просто в расположении полюсов, сопоставляемых стабильным частицам, соответственно их массам¹⁾. Пока остается только верить, что, когда технические возможности исследования многочастичных скачков возрастут, удастся найти необходимые обобщения правил Мандельштама.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Nucl. Phys., 13, 181 (1959).
2. Mandelstam S., Phys. Rev., 112, 1344 (1958) (имеется перевод в сб. «Новый метод в теории сильных взаимодействий», ИЛ, 1960).

¹⁾ Эти правила Мандельштама будут рассмотрены в гл. 9.

3. Fotiadi D., Froissart M., Lascoux J., Pham F., *Topology*, **4**, 159 (1965).
4. Hwa R. C., Teplitz V. L., *Homology*, New York, 1966. (Готовится перевод.)
5. Cutkosky R. F., *Journ. Math. Phys.*, **1**, 429 (1960).
6. Zwanziger D., *Phys. Rev.*, **131**, 888 (1963).
7. Freund P., Karplus R., *Nuovo Cimento*, **21**, 519 (1961).
8. Schwartz J., *Phys. Rev.*, **138**, B187 (1965).
9. Polkinghorne J., *Nuovo Cimento*, **23**, 360; **25**, 901 (1962).
10. Gross D., Schwartz J., *Phys. Rev.*, **140**, B1054 (1965).

ГЛАВА 5

СВЯЗНАЯ ЧЕТЫРЕХХВОСТКА ПРИ ОДНОМ ФИКСИРОВАННОМ ИНВАРИАНТЕ

§ 1. Структура физического листа

Начнем использование изложенных выше принципов аналитичности с рассмотрения случая связанной четыреххвостки, кинематика для которой уже была развита в гл. 2. Напомним, что, хотя в этом случае имеются три инварианта канала, только два из них являются независимыми. Таким образом, если фиксировать один инвариант, то мы получим функцию одной комплексной переменной. В качестве такой переменной при фиксированном инварианте

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2$$

удобно взять симметричную величину ¹⁾

$$v = \frac{t-u}{2} + \frac{(m_1^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_4^2)}{2s}, \quad (5.1)$$

где

$$t = (p_1 + p_3)^2 = (p_2 + p_4)^2, \quad u = (p_1 + p_4)^2 = (p_2 + p_3)^2. \quad (5.2)$$

Из соотношения

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 \quad (5.3)$$

вытекает, что

$$v = t + \text{Функция от } s, \quad (5.4)$$

$$v = -u + \text{Функция от } s, \quad (5.5)$$

и, следовательно, сингулярности как по t , так и по u связаны линейными преобразованиями одинакового

¹⁾ Причины добавления в (5.1) слагаемого, обратно пропорционального s , станут очевидными при рассмотрении парциальных волн.

вида с сингулярностями по v (причем в случае u с обращением знака).

Рассмотрим физический лист и будем считать для простоты интервал значений s вещественным. Тогда смещения в (5.4) и (5.5) будут также вещественными и все сингулярности по v будут лежать на вещественной оси комплексной v -плоскости. Полюсы и пороговые точки ветвления t -реакции будут располагаться вдоль положительной полуоси вплоть до $+\infty$, а полюсы и пороговые точки ветвления u -реакции — вдоль отрицательной полуоси вплоть до $-\infty$. Как показал Кибл [1], вследствие стабильности для каждой из участвующих в рассеянии четырех частиц ¹⁾ всегда существует вещественный интервал значений s ниже наименьшего порога по s , лежащий также вне разрезов по t и u . Например, когда все четыре частицы являются пионами, легко проверить, что соответствующим интервалом по s является интервал

$$-4m_{\pi}^2 < s < 4m_{\pi}^2,$$

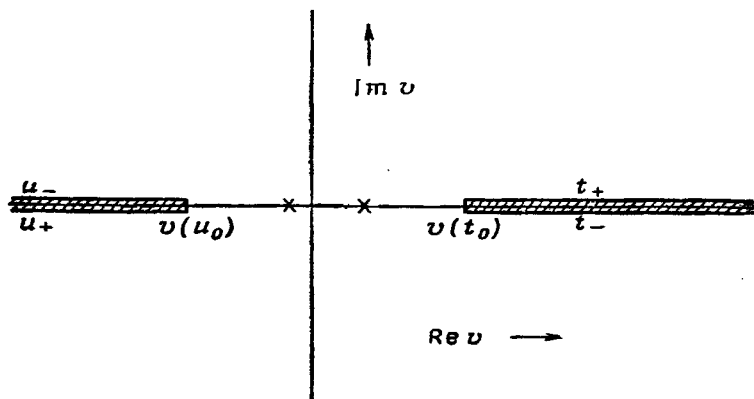
а искомый промежуток v вне разрезов заключен в пределах

$$\text{от } -\frac{s + 4m_{\pi}^2}{2} \quad \text{до } +\frac{s + 4m_{\pi}^2}{2}.$$

Выберем s внутри указанного выше интервала и в комплексной плоскости v проведем разрезы от точек ветвления t -порогов направо вдоль вещественной оси, а разрезы от точек ветвления u -порогов — налево вдоль вещественной оси. Разрезанная таким образом плоскость v показана на фиг. 5. Отметим, что на этой фигуре физическая область t -реакции располагается вдоль верхней стороны правого разреза, в то время как физическая область u -реакции лежит вдоль

¹⁾ Стабильность соответствует условиям вида $m_1 < m_2 + m_3 + m_4$. В действительности, если какая-либо из частиц является лишь едва стабильной, как, например, дейтрон, сингулярности Ландау «прижимаются» к физическому листу, усложняя анализ.

нижней стороны левого разреза. Полюсы, сопоставляемые стабильным частицам t - или u -каналов, если они



Фиг. 5. Физический лист плоскости v для физических значений s , лежащих непосредственно под нижним s -порогом.

Нижние t - и u -пороги начинаются соответственно в точках t_0 и u_0 . Крестики показывают возможные положения полюсов, соответствующих стабильным частицам.

существуют, будут лежать на вещественной оси в промежутке v вне разрезов.

§ 2. Каноническое дисперсионное соотношение

При указанном в предыдущем параграфе выборе разрезов мы путем непосредственного использования формулы Коши приходим к каноническому дисперсионному соотношению по одной переменной (при фиксированном s) для связной части, которую мы будем обозначать $F(v)$. Читателю должно быть ясным, что можно вывести (и действительно было выведено) большое число разнообразных дисперсионных соотношений, причем не только путем различных способов проведения разрезов, но и путем рассмотрения других аналитических функций, близких к $F(v)$ ¹⁾.

¹⁾ Например, функции $F(v)/[v(t_0) - v]^{1/2}$, которая является эрмитово-аналитической и имеет те же полюсы и точки ветвления, что и $F(v)$.

То соотношение, которое мы называем здесь «каноническим», является простейшим и в то же время наиболее полезным; оно было установлено, и его важность была подчеркнута Гелл-Маном и Гольдбергером с соавторами [2, 3] при анализе специальной модели еще до того, когда принципу аналитичности стали придавать серьезное значение. Как это будет рассмотрено в § 3 настоящей главы, успешное экспериментальное подтверждение дисперсионных соотношений для пион-нуклонного рассеяния вперед является главным аргументом в пользу принципа максимальной аналитичности первой степени.

Для вывода дисперсионных соотношений предварительно установим значения следующих двух скачков¹⁾:

$$\begin{aligned} d_t(\operatorname{Re} v) &= \frac{1}{2i} [M(t_+) - M(t_-)], & \operatorname{Re} v > v(t_0), \\ d_u(\operatorname{Re} v) &= \frac{1}{2i} [M(u_+) - M(u_-)], & \operatorname{Re} v < v(u_0). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Эти скачки *не являются* аналитическими функциями v , поскольку на различных интервалах вещественной оси необходимо, чтобы перейти от t_+ к t_- или от u_+ к u_- , обойти различное число пороговых точек ветвления²⁾. Рассмотрим далее контурный интеграл

$$I(v) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{dv'}{v' - v} F(v'), \quad (5.7)$$

где бесконечный контур c имеет вид, показанный на фиг. 6, и точка v лежит на физическом листе вне полюсов или разрезов. Если $F(v)$ убывает

¹⁾ Математические обозначения, которыми мы здесь пользуемся, довольно небрежны. Под $M(t_+)$ мы, в частности, понимаем значение $F(v)$ при v , получением подстановкой в (5.1) величины $t=t_+$, а под $M(u_+)$ — значение $F(v)$ при v , полученном подстановкой в (5.1) соответственно $u=u_+$.

²⁾ Ситуация здесь отличается от случая (4.1), где обходится одна точка ветвления и скачок представляет собой единую аналитическую функцию. Функции d_t и d_u иногда называют «кусочно-аналитическими».

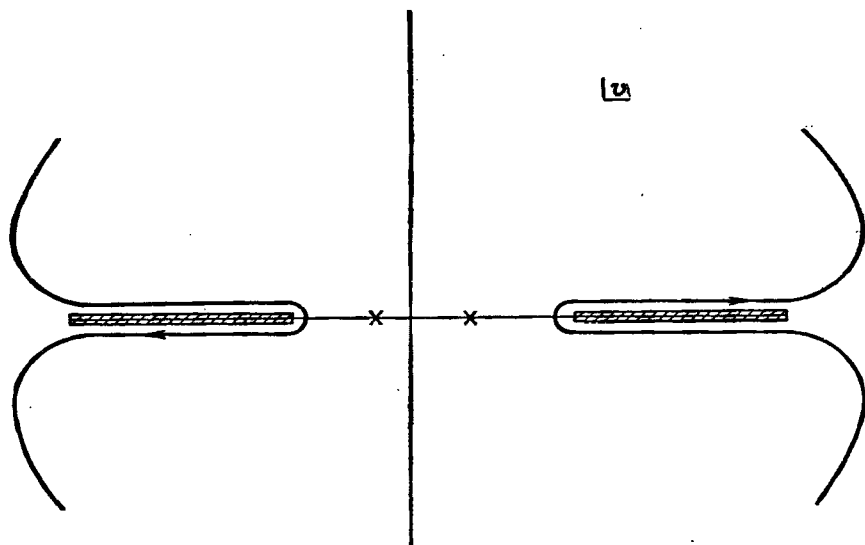
достаточно быстро на бесконечности, то

$$I(v) = \frac{1}{\pi} \int_{v(t_0)}^{\infty} \frac{dx}{x-v} d_t(x) + \frac{1}{\pi} \int_{v(u_0)}^{-\infty} \frac{dx}{x-v} d_u(x). \quad (5.8)$$

С другой стороны, величину (5.7) можно вычислить с помощью теоремы о вычетах:

$$I(v) = \sum_l \frac{\gamma_l}{v-v_l} + F(v), \quad (5.9)$$

где v_l — положения полюсов на физическом листе с вычетами γ_l . Таким образом, мы приходим к ка-



Фиг. 6. Контур c , используемый в формуле (5.7).

ноническому дисперсионному соотношению

$$F(v) = \sum_l \frac{\gamma_l}{v-v_l} + \frac{1}{\pi} \int_{v(t_0)}^{\infty} \frac{dx}{x-v} d_t(x) + \frac{1}{\pi} \int_{v(u_0)}^{-\infty} \frac{dx}{x-v} d_u(x). \quad (5.10)$$

Хотя скачки d_t и d_u не являются аналитическими функциями выделенной явно переменной v , они аналитически *зависят* от инварианта канала s , который до сих пор считался фиксированным¹⁾. Из этого обстоятельства вытекают фундаментальные следствия; здесь мы укажем следующие два.

1. Сначала s было выбрано специальным образом так, чтобы на вещественной оси v имелся промежуток между разрезами, но, после того как каноническое дисперсионное соотношение (5.10) было выведено, его оказалось возможным аналитически продолжить на любые значения s , включая те значения, при которых указанный промежуток отсутствует.

2. Дисперсионное соотношение (5.10) кажется оправданным, если только $F(v)$ обращается в нуль на бесконечности; однако мы вновь можем обратиться к аналитическому продолжению по s , позволяющему оправдать (5.10), если только $F(v)$ убывает с необходимой быстротой на бесконечности *лишь в какой-либо области значений s* . При этом достаточно убывания в любой области s , даже лежащей на нефизическом листе.

Предположение о том, что связанные части убывают как функции какой-либо специальной переменной на бесконечности в некоторой области остальных переменных, как будет показано в гл. 8, эквивалентно, грубо говоря, предположению о существовании максимальной аналитичности второй степени.

¹⁾ Все сингулярности скачков d_t и d_u относительно переменной s имеют, как показал Мандельштам [4], вид сингулярностей Ландау. Эти скачки не включают s -полюсов или пороговых точек ветвления. Отсутствие полюсов можно сразу усмотреть из того обстоятельства, что вычеты в s -полюсах зависят от t (или u) через $P_J(z_s)$, где J — спин соответствующей полюсу частицы. В следующем параграфе мы увидим, что z_s линейно по t (или u); соответственно вычеты s -полюсов являются полиномами по t (или u) и не имеют скачков по этим переменным. Поскольку s -полюсы и t - (или u -) пороги являются независимыми в смысле, указанном в гл. 3, § 3, то t - (или u -) скачки в случае нормальных порогов не могут содержать s -полюсов.

§ 3. Дисперсионные соотношения для упругого рассеяния вперед

С точки зрения экспериментальной проверки особенно важно применение формулы (5.10) к случаю связанной части, для которой $2 = \bar{1}$ и $4 = \bar{3}$, т. е. для упругого рассеяния в t -каналах ($1 + \bar{3} \rightarrow 1 + \bar{3}$) и u -каналах ($1 + \bar{3} \rightarrow 1 + \bar{3}$). Причина этого состоит в том, что при $s = 0$ скачки d_t и d_u можно в подобном случае непосредственно измерить в физической области, где они пропорциональны полным сечениям.

Сказанное можно подтвердить, если учесть следующие два обстоятельства. Во-первых, поскольку на физическом листе

$$M(t_-) = M^*(t_+) \quad \text{и} \quad M(u_-) = M^*(u_+),$$

имеем

$$\begin{aligned} d_t(v) &= \text{Im } M(t_+), \\ d_u(v) &= \text{Im } M(u_+). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Во-вторых, при $s = 0$ мы имеем дело с рассеянием вперед¹⁾, когда можно применить оптическую теорему

$$\begin{aligned} \text{Im } M(t_+) &= 2 \sqrt{t} q_{13}(t) \sigma_{13}^{\text{tot}}(t), & t > (m_1 + m_3)^2, \\ \text{Im } M(u_+) &= 2 \sqrt{u} q_{13}(u) \sigma_{13}^{\text{tot}}(u), & u > (m_1 + m_3)^2. \end{aligned} \quad (5.12)$$

При

$$t_0 = (m_1 + m_3)^2 \quad \text{и} \quad u_0 = (m_1 + m_3)^2$$

вся область скачков лежит в пределах экспериментальной доступности²⁾. Так как в физической области $F(v)$ можно также измерить непосредственно, мы по-

¹⁾ Результаты настоящего параграфа можно применить также при наличии спина к амплитудам с неизменяющейся проекцией спина на направление импульса (см. обзор [5]).

²⁾ Указанное заключение оправдано для упругого рассеяния πN (вместе с $\bar{\pi} N$), но, к сожалению, не для $NN(\bar{N}N)$ или $KN(\bar{K}N)$, где точки ветвления существуют ниже одного из физических порогов. Оно выполняется также для рассеяния $\pi\pi(\bar{\pi}\pi)$ и $\pi K(\bar{\pi}K)$, но, очевидно, такие эксперименты провести крайне трудно.

лучаем возможность [6] исчерпывающей проверки соотношения (5.10).

Интересно указать асимптотическое поведение (при ν , стремящемся к бесконечности) упругой связанной части в точке $s=0$. Экспериментально все полные сечения стремятся при высоких энергиях к постоянной, так что $F(\nu) \sim \nu$ при $\nu \rightarrow \infty$ и $s=0$. [Вещественная часть $F(\nu)$, согласно эксперименту, ведет себя не хуже, чем мнимая часть.] Несмотря на отмеченное сильное асимптотическое возрастание $F(\nu)$, формула (5.10) все же сохраняет смысл вследствие максимальной аналитичности второй степени [7]. Соответствующий аппарат будет развит в гл. 8.

Дисперсионные соотношения для упругого рассеяния при отрицательных s , малых по абсолютной величине (рассеяние почти вперед), также весьма важны с точки зрения сравнения с экспериментом. Хотя при этом скачки обязательно заходят в нефизические области, с этой трудностью все же можно справиться [8].

§ 4. Аналитичность по углу при фиксированной энергии

С теоретической точки зрения более плодотворными, чем при фиксированной передаче импульса (как в предыдущем параграфе), являются результаты, получающиеся при выборе величины s на верхней стороне соответствующего ей физического разреза (при $s=s_+$), где s играет роль квадрата энергии для реакции $1+2 \rightarrow 3+4$.

Переменная ν в этом случае пропорциональна z_s — косинусу угла рассеяния для s -реакции. Именно

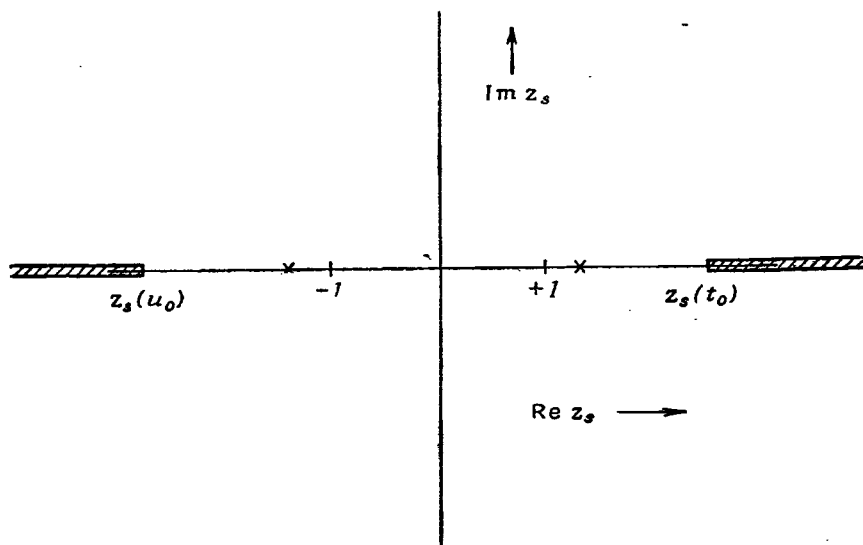
$$\nu = 2q_{12}(s)q_{34}(s)z_s, \quad (5.13)$$

где

$$q_{ij}^2(s) = \frac{[s - (m_i + m_j)^2][s - (m_i - m_j)^2]}{4s}. \quad (5.14)$$

Структуру сингулярностей на физическом листе комплексной плоскости z_s можно легко установить с помощью приведенных ранее формул; она

представлена на фиг. 7. Отметим, что физическая область на вещественной оси между -1 и $+1$ не содержит сингулярностей. В случае наличия полюсов они

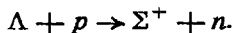


Фиг. 7. Физический лист плоскости z_s для s на физическом разрезе (при $s = s_+$).

располагаются между физической областью и ближайшей к ней точкой ветвления, причем t -полюсы лежат справа, а u -полюсы — слева.

Упражнение

Определите положение полюсов и ближайших точек ветвления на физическом листе переменной z_s для следующих двух s -реакций:



С целью подготовки к следующей главе, посвященной амплитудам парциальных волн, разделим величину $M(z_s)$ на части соответственно ее «правым» и «левым» сингулярностям в каноническом дисперсионном соот-

ношении по z_s ¹⁾

$$M(z_s) = M_R(z_s) + M_L(z_s), \quad (5.15)$$

где

$$M_R(z_s) = \sum_{\text{по } t\text{-полюсам}} \frac{\lambda_t}{z_s - z_{p_t}} + \frac{1}{\pi} \int_{z_s(t_0)}^{\infty} \frac{dy}{y - z_s} D_t(y), \quad (5.16)$$

$$M_L(z_s) = \sum_{\text{по } u\text{-полюсам}} \frac{\lambda_u}{z_s - z_{p_u}} + \frac{1}{\pi} \int_{z_s(u_0)}^{-\infty} \frac{dy}{y - z_s} D_u(y).$$

Оказывается, удобно ввести две новые функции $M^{\pm}(z_s)$ с помощью соотношений

$$M^{\pm}(z_s) = M_R(z_s) \pm M_L(-z_s). \quad (5.17)$$

Важные особенности этих функций следующие: а) обе функции имеют сингулярности только на правой полуоси z_s ; б) четная часть $M^+(z_s)$ совпадает с четной частью $M(z_s)$, а нечетная часть $M^-(z_s)$ совпадает с нечетной частью $M(z_s)$. Отметим, однако, что функции $M^{\pm}(z_s)$ сами по себе не являются ни четными, ни нечетными.

Если ввести также функции

$$D^{\pm}(y) = D_t(y) \pm D_u(-y), \quad (5.18)$$

то

$$M^{\pm}(z_s) = \text{Полюсы} + \frac{1}{\pi} \int_{z_0}^{\infty} \frac{dy}{y - z_s} D^{\pm}(y), \quad (5.19)$$

где z_0 равно наименьшей из величин $z_s(t_0)$ или $-z_s(u_0)$. Вооруженные приведенной выше информацией, мы сможем в следующей главе сказать довольно много о свойствах парциальных амплитуд.

¹⁾ В наших обозначениях $M(z_s) = F(v)$ и $M(z_s) \equiv M(s, z_s)$ при фиксированном s . Точно так же $D_t(z_s) = d_t(v)$ и $D_t(z_s) \equiv D_t(z_s, s)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kibble T., Phys. Rev., **117**, 1159 (1960).
2. Gell-Mann M., Goldberger M. L., Thirring W., Phys. Rev., **95**, 1612 (1954).
3. Goldberger M. L., Phys. Rev., **99**, 979 (1955).
4. Mandelstam S., Phys. Rev., **112**, 1344 (1958) (имеется перевод в сб. «Новый метод в теории сильных взаимодействий», ИЛ, 1960).
5. Jacob M., Chew G. F., Strong Interaction Physics, New York, 1964.
6. Hohler G., Selected Topics in πN Scattering and Photoproduction, в печати.
7. Igi K., Phys. Rev., **130**, 820 (1963).
8. Hamilton J., Woolcock W. S., Rev. Mod. Phys., **35**, 737 (1963).

РАЗЛОЖЕНИЕ ПО УГЛОВЫМ МОМЕНТАМ

§ 1. Двухчастичные парциальные амплитуды

Условие унитарности и формулы для скачков можно частично диагонализировать и, следовательно, упростить, если выполнить разложение по состояниям с определенным полным угловым моментом. При этом весьма существенно то обстоятельство, что каждая из частиц обладает фиксированным значением полного углового момента и соответственно сопоставляемый ей полюс входит только в одну компоненту разложения по J . Так как S -матрица определяется заданием полюсов, разложение по угловым моментам, естественно, привлекло значительное внимание.

Поскольку свойства представлений группы вращений после работ Вигнера [1] полностью выяснены, определение парциальных амплитуд с фиксированными значениями J и J_z не представляет каких-либо трудностей. Мы ограничимся здесь случаем четыреххвостки $M_{ba}(s, z_s)$ с бесспиновыми частицами, для которой формула проектирования на парциальные волны, как хорошо известно, имеет вид¹⁾

$$A_J^{ba}(s) = \frac{g}{2} \int_{-1}^{+1} dz_s P_J(z_s) M_{ba}(s, z_s). \quad (6.1)$$

Формула (6.1) определяет парциальную амплитуду $A_J^{ba}(s)$ для всех s независимо от сходимости разложения $M_{ba}(s, z_s)$ по парциальным волнам

$$M_{ba}(s, z_s) = \frac{1}{g} \sum_{J=0}^{\infty} (2J+1) A_J^{ba}(s) P_J(z_s). \quad (6.2)$$

¹⁾ Соответствующие правила в общем случае, включающем частицы со спином, рассмотрены в обзоре [5], процитированном в гл. 5.

Приведенное разложение сходится в эллипсе, имеющем фокусы в точках $z_s = \pm 1$ и проходящем через ближайшую сингулярность по z_s . На фиг. 7 (см. гл. 5) иллюстрируется расположение сингулярностей по z_s при физических значениях s . Расположение сингулярностей при произвольных значениях s определяется путем аналитического продолжения (5.13) и (5.1).

При выборе постоянной g в формуле (6.1) исходят из соображений удобства. Мы выберем эту постоянную таким образом, чтобы упростить коэффициент в условии унитарности для парциальных волн, или, что то же самое, коэффициент в соотношении между $A_J^{ba}(s)$ и матричным элементом $S_J^{ba}(s)$, получающимся при разложении S -матрицы по парциальным волнам. Именно, нормируем A_J^{ba} таким образом, чтобы

$$S_J^{ba}(s) = \delta^{ba} + 2i \sqrt{\rho_b(s) \rho_a(s)} A_J^{ba}(s), \quad (6.3)$$

где

$$\rho_a(s) = \frac{2q_a(s)}{\sqrt{s}}. \quad (6.4)$$

При этом значение g оказывается равным $(16\pi)^{-1}$.

«Односторонние» функции $M^\pm(s, z)$, введенные в предыдущей главе, также можно разложить по угловым моментам с парциальными амплитудами¹⁾ $A_J^\pm(s)$. Из представления (5.19) следует важная формула. Опустив для простоты полюсы, которые, очевидно, не могут существенно изменить ситуацию, получаем

$$A_J^\pm(s) = \frac{g}{2} \int_{-1}^{+1} dz P_J(z) \frac{1}{\pi} \int_{z_0}^{\infty} \frac{dy}{y-z} D^\pm(y, s), \quad (6.5)$$

$$A_J^\pm(s) = \frac{g}{\pi} \int_{z_0}^{\infty} dy Q_J(y) D^\pm(y, s), \quad (6.6)$$

где

$$Q_J(y) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{y-z} P_J(z) \quad (J=0, 1, 2, \dots) \quad (6.7)$$

¹⁾ Мы будем опускать индексы ba там, где это не вызывает недоразумений.

— функции Лежандра второго рода. Функция $Q_J(z)$ является «вещественно-аналитической» [2] в комплексной плоскости z с разрезом между логарифмическими точками ветвления ± 1 .

Отметим, что $A_J^+ = A_J$ для четных J и $A_J^- = A_J$ для нечетных J . Величины A_J^+ с нечетными J и величины A_J^- с четными J не имеют непосредственного физического смысла, однако они удовлетворяют условию унитарности (как будет показано в гл. 7) и важны при выяснении аналитических свойств S -матрицы.

§ 2. Представление о радиусе взаимодействия; периферические соударения

Функция Лежандра второго рода обладает важными асимптотическими свойствами. Рассмотрим сначала ее поведение при больших угловых моментах [2]:

$$Q_J(z) \sim \text{const} \frac{\exp \left[- \left(J + \frac{1}{2} \right) \ln (z + \sqrt{z^2 - 1}) \right]}{\sqrt{J}} \quad \text{при } J \rightarrow \infty. \quad (6.8)$$

Предположим, что интеграл (6.6) сходится равномерно по J для всех J , больших некоторого конечного значения. Тогда, как следует из (6.8), при s , лежащем в физической области, и соответственно z_0 , вещественном и большем единицы, нижние значения y в интервале по dy будут определять поведение $A_J^\pm(s)$ при $J \rightarrow \infty$. Иными словами, поведение высших угловых моментов задается теми сингулярностями в комплексной плоскости z , которые лежат наиболее близко к физической области. (Если имеются полюсы, то при $J \rightarrow \infty$ доминирующим будет полюс, ближайший к $z=1$.)

Приведенный выше результат можно интерпретировать с помощью представления о конечном «радиусе» взаимодействия. Сингулярности в плоскости z , расположенные на положительной вещественной оси при $z=y$, дают вклад в амплитуду, который при боль-

ших J убывает как $e^{-J\xi(y)}$, где

$$\xi(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1});$$

используя представление о прицельном параметре, мы можем интерпретировать $\sqrt{q_a q_b} \xi(y)$ как обратный «радиус». При значениях $q_s = \sqrt{q_a q_b}$, больших обратного радиуса, когда ¹⁾ $\xi(y) \ll 1$, функцию $\xi(y)$ можно аппроксимировать выражением $\sqrt{2(y-1)}$; при этом для радиуса получаем

$$r^{-1}(y) \approx \sqrt{2q_a q_b (y-1)}. \quad (6.9)$$

При упругом рассеянии

$$q_a = q_b = q_s \quad \text{и} \quad z_s = 1 + \frac{t}{2q_s^2}.$$

В этом случае полюс при $t = m_p^2$ соответствует

$$y - 1 = \frac{m_p^2}{2q_s^2} \quad \text{и} \quad r^{-1} \approx m_p,$$

т. е. мы приходим к обычной формуле Юкавы. В общем случае получаются более сложные соотношения между радиусом и положением сингулярности в кросс-канале, но порядок величины радиуса не меняется и соответствует порядку величины, следующему из формулы Юкавы. Отдаленные сингулярности по z_s соответствуют более короткодействующим, а близлежащие сингулярности—дальнодействующим взаимодействиям.

У п р а ж н е н и е

Найдите радиус взаимодействия как функцию энергии в пион-нуклонном упругом рассеянии $\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p$, соответствующий нейтронному полюсу в кросс-реакции $\pi^- + p \rightarrow \pi^- + p$. Подтвердите, что при низких энергиях этот радиус больше комптоновской длины волны нейтрона.

Если в спектре имеются полюсы относительно z_s , то при сравнении с экспериментальными угловыми

¹⁾ Когда средняя (геометрическая) длина волны $(q_a q_b)^{-1/2}$ больше радиуса взаимодействия, классическая теория прицельного параметра теряет смысл.

распределениями удобно обычно отделить соответствующие «наиболее дальнедействующие части» амплитуд. Предположим, например, что на физическом листе имеется один полюс $M^\pm(s, z)$ при $z = z_p$ с вычетом λ . Тогда мы можем написать

$$M^\pm(s, z) = \frac{\lambda}{z - z_p} + M'^\pm(s, z), \quad (6.10)$$

причем ближайшая сингулярность $M'^\pm(s, z)$ лежит при значении z_0 , большем z_p . Соответственно разложение $M'^\pm(s, z)$ по парциальным волнам сходится быстрее разложения $M^\pm(s, z)$ (так как эллипс сходимости больше) и для достижения заданной степени точности достаточно учитывать меньшее число парциальных волн. Указанная техника оказалась эффективной для учета пионного полюса в упругом нуклон-нуклонном рассеянии. В этом случае следующая за полюсом сингулярность отвечает двухпионному порогу, так что остаточный «радиус» в два раза короче полного радиуса и, следовательно, необходимо учитывать лишь вдвое меньше парциальных волн при каждом значении энергии, настолько большом, чтобы представления теории прицельного параметра сохраняли смысл [3].

Часто делались попытки, кроме полюсов, выделить аналогичным образом ближайшие куски разрезов в плоскости z . Однако из формулы (5.19) видно, что соответствующие составляющие нельзя охарактеризовать столь же просто с помощью чего-либо подобного вещественному вычету — требуется знать комплексную функцию скачка $D^\pm(y, s)$.

Если дальнедействующие (т. е. ближайшие к физической области) сингулярности по z более важны, чем короткодействующие (т. е. отдаленные от физической области), то о соответствующей реакции говорят как о «периферическом» соударении. Подобная терминология, очевидно, не является строгой и нельзя приписывать особенно глубокий смысл утверждениям, что одни реакции являются более периферическими, чем другие. Реальное значение имеет только то обстоятельство, что теоретический расчет ближайших сингулярностей является значительно более простым, чем

расчет отдаленных сингулярностей. Вследствие этого возникла тенденция уделять в теоретических работах львиную долю внимания наиболее периферическим соударениям.

§ 3. Пороговое поведение парциальных амплитуд

Вторым важным асимптотическим свойством $Q_J(z)$ является то, что при больших z

$$Q_J(z) \sim \text{const } z^{-(J+1)} \quad \text{при } z \rightarrow \infty. \quad (6.11)$$

Так как $Q_J(z)$ несингулярно на бесконечности, указанное асимптотическое поведение имеет место [2] по всем направлениям в комплексной плоскости z . В качестве первого применения приведенного свойства мы рассмотрим предел $A_J^{ba}(s)$, когда либо $q_a(s)$, либо $q_b(s)$ стремится к нулю. Из формул (5.13) и (5.1) видно, что переменная z_s стремится при фиксированном t (или u) к бесконечности при приближении к любому из указанных порогов. В частности, если $q_a \rightarrow 0$, когда $s \rightarrow s_a$, то

$$z(s, t) \xrightarrow{s \rightarrow s_a} \frac{v(s = s_a, t)}{2q_a(s)q_b(s)}. \quad (6.12)$$

Для дальнейшего анализа удобно переписать формулу (5.10) с помощью интегралов Коши вдоль разрезов по первоначальным переменным t и u . Опуская вновь полюсы при

$$\mathcal{D}_t(t, s) = D_t(z_s, s) \quad \text{и} \quad \mathcal{D}_u(u, s) = \mathcal{D}_u(z_s, s),$$

имеем

$$M_{ba}(s, z_s) = \frac{1}{\pi} \int_{t_c}^{\infty} \frac{dt'}{t' - t(s, z_s)} \mathcal{D}_t(t', s) + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{u_0}^{\infty} \frac{du'}{u' - u(s, z_s)} \mathcal{D}_u(u', s), \quad (6.13)$$

откуда

$$A_J^{ba}(s) = \frac{g}{\pi} \frac{1}{2q_a(s)q_b(s)} \int_{t_0}^{\infty} dt' Q_J(z_s(s, t')) \mathcal{D}_t(t', s) +$$

+ Интеграл, содержащий \mathcal{D}_a . (6.14)

Далее, скачок $\mathcal{D}_t(t, s)$ является несингулярным на s -порогах (см. примечание на стр. 61). Следовательно, если интеграл по dt' в (6.14) сходится равномерно по s вблизи рассматриваемого порога, то мы можем из (6.11) и (6.12) заключить, что

$$A_J^{ba}(s) \underset{\substack{\text{или} \\ s \rightarrow s_b}}{s \rightarrow s_a} \text{const} [q_a(s)q_b(s)]^J. \quad (6.15)^1$$

Возможны особые ситуации (например, когда стабильная частица со спином J взаимосвязана с каналами a и b), при которых интеграл в (6.14) не сходится по s вблизи порога и должен определяться путем аналитического продолжения из других областей s . В таких случаях вывод пороговых свойств парциальных волн перестает быть столь простым. В действительности до сих пор не дано окончательного вывода и распространенное убеждение об общем характере (6.15) опирается лишь на результаты рассмотрения специальных моделей, часть из которых будет разобрана ниже.

§ 4. Структура сингулярностей парциальных амплитуд

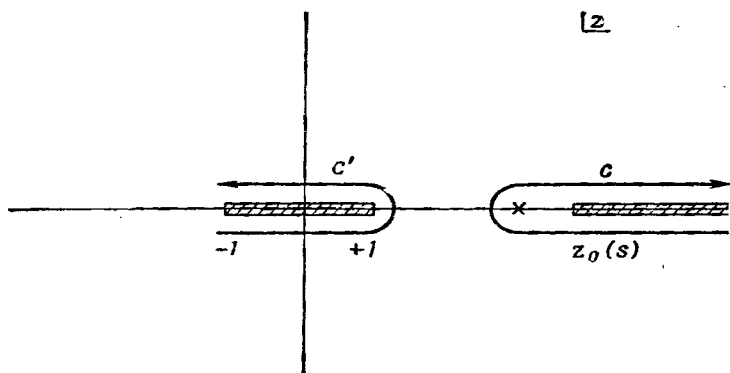
Для выяснения сингулярностей $A_J^{\pm}(s)$ в комплексной плоскости s удобно использовать формулу

$$A_J^{\pm}(s) = \frac{g}{2\pi i} \int_{c \text{ или } c'} dz Q_J(z) M^{\pm}(s, z), \quad (6.16)$$

где для s , лежащего в физической области ($s = s_+$), контуры интегрирования c и c' имеют вид, показанный

¹⁾ При наличии спина показатель J в формуле (6.15) нужно заменить на значение орбитального углового момента l .

на фиг. 8. В эквивалентности с формулой (6.6) в случае контура c нетрудно убедиться, а контур c' приво-



Фиг. 8. Контур c и c' в комплексной плоскости z , используемые в формуле (6.16).

Разрез от -1 до $+1$ возникает из-за $Q_J(z)$, а разрез от $z_0(s)$ до $+\infty$ — из-за $M^\pm(s, z)$.

дит к еще более известной формуле

$$A_J^\pm(s) = \frac{g}{2} \int_{-1}^{+1} dz P_J(z) M^\pm(s, z), \quad (6.17)$$

если принять во внимание, учитывая (6.7), что скачок $Q_J(z)$ вдоль разреза (снизу вверх) равен $i\pi P_J(z)$.

Далее из (6.16) мы видим, что все пороговые s -точки ветвления полной связной части должны сохраниться в парциальной амплитуде. Эти точки ветвления мы будем называть «правыми» сингулярностями, поскольку они располагаются вплоть до $+\infty$ вдоль положительной вещественной оси s ¹⁾. Поскольку далее положения z_s -полюсов и точек ветвления $M(s, z_s)$ являются функциями s , мы видим из (6.16) и фиг. 8, что могут возникнуть дополнительные s -сингулярности, если какой-либо из z_s -полюсов или некоторая точка

¹⁾ Каждый s -полюс остается, конечно, только в той парциальной амплитуде, значение J у которой равно спину соответствующей частицы.

ветвления сдвинется налево и прижмется к контуру у точек ветвления $Q_J(z)$ при $z=+1$ или $z=-1$. Соответствующее новое семейство точек ветвления $A_J^\pm(s)$, возникающее из-за полюсов и нормальных порогов t - и u -реакций, мы называем «левыми» сингулярностями, поскольку эти точки простираются в плоскости s до $-\infty$, хотя и не обязательно лежат на вещественной оси [4].

Для установления положения пары левых точек ветвления достаточно сослаться на формулы (5.13) и (5.1), согласно которым сингулярности из-за кросс-реакций (t или u) вызывают появление точек ветвления при значениях s , удовлетворяющих уравнениям

$$\pm 2q_{12}(s)q_{34}(s) = \frac{t-u}{2} + \frac{(m_1^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_4^2)}{2s}. \quad (6.18)$$

Эти уравнения представляют собой, очевидно, просто продолжение уравнений для границ физической области s -реакции. Чтобы проиллюстрировать сказанное выше на простом примере, предположим, что s -реакцией является упругое np -рассеяние и соответственно t -реакцией — процесс $n + \bar{n} \rightarrow p + \bar{p}$, а u -реакцией — процесс $\bar{p} + n \rightarrow \bar{p} + n$. Формула (6.18) тогда крайне упрощается из-за равенства

$$m_1^2 = m_2^2 = m_3^2 = m_4^2 = m_N^2$$

и принимает вид

$$\pm 2q_s^2(s) = t + \frac{s - 4m_N^2}{2}, \quad (6.19)$$

при этом формула (5.14) сводится к

$$q_s^2(s) = \frac{1}{4}(s - 4m_N^2), \quad (6.20)$$

откуда окончательно вытекает, что одна точка ветвления лежит при

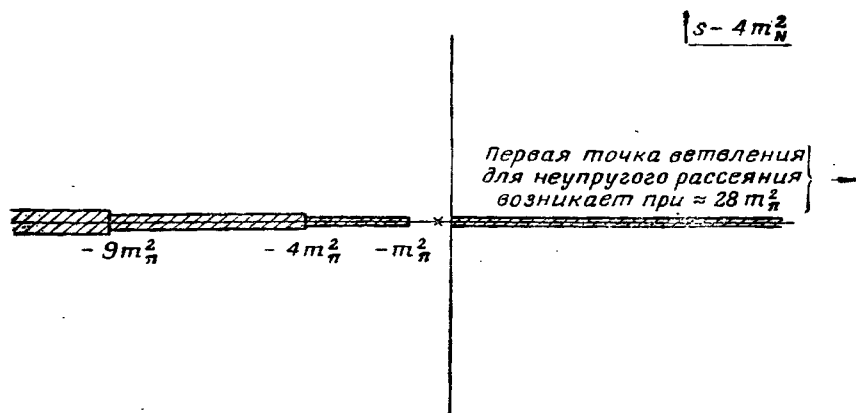
$$s = 4m_N^2 - t \quad \text{или} \quad q_s^2 = -\frac{t}{4}, \quad (6.21)$$

а другая уходит на бесконечность.

Продолжая рассмотрение примера с упругим np -рассеянием, мы можем сказать, что главной t -сингу-

лярностью является пионный полюс при $t = m_\pi^2$. следующая сингулярность — это двухпионная точка ветвления при $t = 4m_\pi^2$ и т. д. Удобно проводить разрезы от каждой из подобных точек ветвления до $-\infty$ вдоль вещественной s -оси, задавая таким образом физический лист, на котором парциальные амплитуды являются «эрмитово-аналитическими». Промежуток на вещественной оси без разрезов располагается в этом случае от ведущей левой точки ветвления при $s = 4m_N^2 - m_\pi^2$ до ведущей правой точки ветвления при $s = 4m_N^2$.

В избранном частном примере левые s -сингулярности, возникающие вследствие u -реакции, оказываются почти совпадающими с s -сингулярностями, возникающими вследствие t -реакции. Последний вы-



Фиг. 9. «Ближайшие» сингулярности парциальной амплитуды упругого pp -рассеяния.

Дейтронный полюс, входящий только при $J=1$, показан крестиком.

вод оправдан только для данной конкретной задачи, но то положение, что как t -, так и u -реакции вызывают появление левых s -сингулярностей, является вполне общим. На фиг. 9 показаны ведущие сингулярности парциальной амплитуды упругого pp -рассеяния на физическом листе смещенной переменной $s - 4m_N^2$, которая здесь более удобна, чем просто s .

В общем случае неравных масс каждая t - или u -сингулярность вызывает появление четырех точек ветвления по s , положение которых задается уравнением четвертого порядка

$$\begin{aligned} & [s - (m_1 + m_2)^2] [s - (m_1 - m_2)^2] \times \\ & \quad \times [s - (m_3 + m_4)^2] [s - (m_3 - m_4)^2] = \\ & \quad = [s(t - u) + (m_1^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_4^2)]^2. \quad (6.22) \end{aligned}$$

Одна из этих точек ветвления всегда лежит на бесконечности, а другая в нуле, так что после перемножения скобок в (6.22) и деления на s остается только решить квадратное уравнение.

Пример

Покажите, что левые точки ветвления в парциальной амплитуде рассеяния $\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p$, обусловленные нейтронным полюсом в кросс-реакции $\pi^- + p \rightarrow \pi^- + p$, расположены при $s=0$, $s=\infty$, $s = m_n^{-2}(m_p^2 - m_\pi^2)^2$ и $s = 2m_p^2 + 2m_\pi^2 - m_n^2$.

Сингулярности Ландау, даже расположенные на нефизических листах связанных частей, участвуют в образовании левых сингулярностей парциальных амплитуд на физическом листе [5]. Обычно соответствующие эффекты проявляются сравнительно далеко от физической области — там, где уже теряет смысл учитывать по отдельности перечисленные выше «простые» сингулярности из-за их большого числа. Поэтому мы не будем детально рассматривать влияние сингулярностей Ландау. Практически левые сингулярности парциальных амплитуд рассматриваются всегда коллективно, за исключением немногих случаев, когда они приближаются особенно близко к физической области.

§ 5. Скачки парциальных амплитуд

Соотношение между парциальной амплитудой и связанной частью определяется оператором проектирования, который не меняет полной энергии рассматриваемой реакции. Следовательно, правила построения скачков на разрезах, начинающихся у нормальных

порогов по инварианту соответствующего канала, должны носить для парциальных амплитуд тот же характер, что и для полных связанных частей. В частности, формула для скачков (4.1) после ее проектирования на парциальную волну с моментом J для s -реакции принимает вид

$$B_J^{ba}(s) - B_J^{ba}(s_n) = 2i\rho_n^J(s) B_J^{bn}(s) B_J^{na}(s_n), \quad (6.23)$$

где

$$B_J^{ba}(s) = [q_a(s) q_b(s)]^{-J} A_J^{ba}(s) \quad (6.24)$$

и

$$\rho_n^J(s) = q_n^{2J}(s) \rho_n(s) = \frac{2q_n^{2J+1}(s)}{V_s}. \quad (6.25)$$

Мы ввели здесь „приведенные“ парциальные амплитуды $B_J^{ba}(s)$ отчасти для того, чтобы включить в них пороговое поведение (6.15), а также для того, чтобы упростить формулы для скачков. Учитывая, что

$$q_n(s_n) = -q_n(s), \quad (6.26)$$

и вспоминая (6.11) и (6.12), мы получаем, что $Q_J(z_s(s, t))$ может содержать пороговые точки ветвления канала n , если a или b совпадают с n . Операция проектирования (6.14) будет тогда давать более сложные правила для нахождения скачков. С другой стороны, произведение

$$[q_a(s) q_b(s)]^{-(J+1)} Q_J(z_s(s, t)) \quad (6.27)$$

является регулярным на всех нормальных s -порогах, и в то же время, как видно из (6.14) и (6.24), именно это произведение входит в определение $B_J^{ba}(s)$.

Формула проектирования для скачков парциальных волн, позволяющая определить скачок на левом разрезе, есть формула (6.5), хотя вообще необходимо, очевидно, также знать характер зависимости $D^\pm(y, s)$ от s . Однако s -сингулярности $D^\pm(y, s)$ обычно относятся к типу сингулярностей Ландау и являются более отдаленными, чем сингулярности в задаваемых приве-

денным выше уравнением (6.22) точках, ближайшая из которых расположена при $z_0(s) = -1$. Посредством элементарного расчета из (6.5) получаем, что скачок $A_{\pm}^{\pm}(s)$ на ведущем разрезе (снизу вверх) равен

$$2i \left(\frac{g}{2} \right) \int_{-1}^{z_0(s)} dz P_J(z) D^{\pm}(z, s). \quad (6.28)$$

В общем случае совершенно независимо от сходимости интегралов (6.5) или (6.6) знания $D^{\pm}(z, s)$ достаточно для определения скачков на разрезах, отвечающих левым точкам ветвления парциальных амплитуд, даже если соответствующие точки ветвления относятся к типу Ландау. Это обстоятельство будет использовано ниже при обсуждении динамики зашнуровки, где оно имеет принципиальное значение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wigner E. P., Group Theory and Its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra, New York, 1959 (имеется перевод: Вигнер Е., Теория групп и ее приложения к квантовомеханической теории атомных спектров, ИЛ, 1961).
2. Bateman Manuscript Project, Higher Transcendental Functions, ed. A. Erdelyi, Vol. I, New York, 1953 (имеется перевод: Бейтмен Г., Эрдели А., Высшие трансцендентные функции, т. I, II, III, изд-во «Наука», М., 1965—1967).
3. Moravcsik M., The Two-Nucleon Interaction, Oxford, 1963.
4. McDowell S. W., Phys. Rev., 116, 774 (1960).
5. Jones E., Terplitz V., Nuovo Cimento, 31, 1079 (1964).

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ПО УГЛОВОМУ
МОМЕНТУ И АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ**

§ 1. Ограничение степени роста

Критический аспект теории S -матрицы связан с вопросом о поведении связанных частей, когда один или несколько инвариантов канала становятся очень большими. Пока еще нельзя считать окончательно ясным, необходимы ли для задания асимптотической структуры независимые граничные условия или же асимптотика следует уже из свойств, перечисленных в гл. 2—4. Указанная неопределенность сочетается с недостаточным знанием экспериментального асимптотического поведения в общем случае. Из эксперимента можно извлечь все же важные указания об асимптотической форме связанной четыреххвостки, которые тесно касаются теоретических рассуждений, излагаемых в настоящей главе.

Рассмотрим функцию $F(v) = F(s, v)$, обсуждавшуюся в гл. 5. Стандартное предположение заключается в том, что при $v \rightarrow \infty$ и фиксированном s

$$|F(s, v)| < \text{const } v^{N(s)} \quad \text{при } N(s) < \infty. \quad (7.1)^1$$

Почему такое ограничение степени роста является правдоподобным? В первую очередь, как уже упоминалось в гл. 5, эксперименты при $s=0$ показывают, что такое ограничение выполняется [с $N(0)=1$]. Аналогичное ограничение наблюдалось также экспериментально в определенном интервале вещественных отрицательных значений s . Кроме того, мы знаем, что представление о периферических соударениях (которое имеет достаточное экспериментальное подтвержде-

¹⁾ Мы часто будем записывать условие типа (7.1) в виде

$$F(s, v) = O(v^{N(s)}) \quad \text{при } v \rightarrow \infty.$$

ние) опирается на предположение о конечной степени роста при положительных s . В самом деле, представления о «радиусе» взаимодействия, развитые в гл. 6, § 2, предполагают для значений J , больших некоторого конечного $J_{\max}(s)$, существование равномерной сходимости интегралов

$$A_J^\pm(s) = \frac{g}{2\pi i} \int_{c \text{ или } c'} dz Q_J(z) M^\pm(s, z), \quad (7.2)$$

$$A_J^\pm(s) = \frac{g}{\pi} \int_{z_0(s)}^{\infty} dy Q_J(y) D^\pm(y, s). \quad (7.3)$$

Вспоминая асимптотическое поведение $Q_J(z)$, описываемое формулой (6.11), мы видим, что (7.2) и (7.3) сходятся, если только выполняется ограничение¹⁾

$$M^\pm(s, z) = O(z^{J_{\max}(s)}) \quad \text{при } z \rightarrow \infty. \quad (7.4)$$

Действительно, так как $z \sim v$ при фиксированном s , мы можем отождествить $N(s)$ в формуле (7.1) с $J_{\max}(s)$ в формуле (7.4).

Поскольку пока не выявлено каких-либо противоречий между условием (7.1) и рассмотренными ранее общими свойствами S -матрицы и поскольку даже имеются значительные экспериментальные подтверждения его, мы примем условие (7.1) за основу для дальнейшей дискуссии, считая его выполняющимся на всех листах римановской поверхности.

§ 2. Граница Фруассара

Фруассар [1] привел весьма важный аргумент в пользу того, что при $s \leq 0$ степень роста $J_{\max}(s)$ снижается до единицы. Чтобы опираться на уже полученные формулы, мы изложим соображения Фруассара для предельного поведения в случае $s \rightarrow \infty$ при фиксированном $t \leq 0$. В силу принципа перестановок такой

¹⁾ Читатель может легко проверить, что асимптотическое поведение «односторонней» функции $M^\pm(s, z)$ должно быть в основных чертах тем же самым, что и асимптотическое поведение полной связанной части.

предел эквивалентен пределу $v \rightarrow \infty$ (или $t \rightarrow \infty$) при фиксированном $s \leq 0$.

Примем в качестве исходного ограничение (7.4) для зависимости от z ; оно связано с соответствующими ограничениями для зависимостей от t и u при фиксированном s . Согласно рассуждениям гл. 6, § 2, мы можем после этого вывести ограничение по J

$$|A_J^\pm(s)| < C(s) e^{-J/q_s r(s)} \quad \text{при } J \rightarrow \infty, \quad (7.5)$$

которое в физической области s -реакции приводит к эффективному обрезанию [начиная со значений $J \approx \approx q_s r(s) \ln C(s)$] высших членов разложения по парциальным волнам

$$M^\pm(s, z_s) = \frac{1}{g} \sum_{J=0}^{\infty} (2J+1) A_J^\pm(s) P_J(z_s). \quad (7.6)$$

Рассмотрение формулы (6.9) для «радиуса» $r(s)$ показывает¹⁾, что $r(s) \rightarrow \text{const}$ и $q_s \sim \sqrt{s/2}$ при $s \rightarrow \infty$. Наше исходное предположение об ограничении степени роста означает, что $C(s)$ ограничено нужным образом и $\ln C(s)$ при $s \rightarrow \infty$ соответственно ограничен $\ln s$, умноженным на постоянную.

Отметим далее, что, согласно формуле (6.3), в физической s -области каждый член разложения матричного элемента S -матрицы по парциальным волнам не превышает по абсолютной величине единицы и, следовательно, на $A_J^\pm(s)$ налагается соответствующее ограничение. Комбинируя перечисленные ограничения, мы из (7.6) получаем

$$|M^\pm(s, z_s = 1)| < \text{const} \sum_{J=0}^{\text{const} \sqrt{s} \ln s} (2J+1) \quad \text{при } s \rightarrow \infty \quad (7.7)$$

или

$$M^\pm(s, z_s = 1) = O(s \ln^2 s) \quad \text{при } s \rightarrow \infty. \quad (7.8)$$

¹⁾ Значение $r(s=\infty)$ оказывается совпадающим со значением радиуса, задаваемым формулой Юкавы, т. е. с обратной величиной корня квадратного из положения либо ближайшего полюса, либо точки ветвления по переменным t и u .

С помощью подобных рассуждений мы приходим к выводу, что ограничение вида (7.8) имеет место при любом фиксированном отрицательном значении t или u . Иначе говоря, если

$$\mathfrak{M}(s, t) = M(s, z_s),$$

то

$$\mathfrak{M}(s, t) = O(s \ln^2 s) \quad \text{при } s \rightarrow \infty \quad (7.9)$$

при фиксированном $t \leq 0$

или

при фиксированном $u \leq 0$.

Существенным является здесь то обстоятельство, что внутри физического интервала $-1 \leq z_s \leq 1$, когда t и u отрицательны, полиномы Лежандра по абсолютной величине не превышают единицы¹⁾, что обеспечивает сходимость разложения (7.6). Выбор положительного значения фиксируемой переменной (t или u) вывел бы нас из физической области s .

Особенно интересно, что для амплитуд упругого рассеяния вперед найденное в эксперименте ограничение степени роста крайне близко приближается к границе Фруассара. Оно отличается от этой границы только сравнительно медленно меняющимся множителем $\ln^2 s$. В гл. 8 мы рассмотрим некоторые следствия из этого обстоятельства.

§ 3. Продолжение Фруассара — Грибова по угловому моменту

Существует самая непосредственная связь между рассмотренным выше асимптотическим поведением и

¹⁾ Как известно, в действительности полиномы $P_J(z_s)$ осциллируют и при $z \neq 1$ имеют место существенные взаимные сокращения членов с различными значениями J в разложении (7.6). Экспериментальные данные говорят, по-видимому, о существовании ограничения вида

$$|M(s, z)| < \text{const } e^{-\alpha(z) \sqrt{s}}$$

при $s \rightarrow \infty$, фиксированном $z \neq \pm 1$ и положительном $\alpha(z)$ [2]. До сих пор нет удовлетворительного объяснения этому явлению.

возможностью аналитического продолжения по угловому моменту. Подобная связь впервые была открыта Редже [3] в теории нерелятивистского потенциального рассеяния. Мандельштам понял, что открытие Редже имеет общее значение, и вместе с Чью и Фраутчи использовал его в релятивистской теории S -матрицы [4, 5]. В цитированных первых работах были исследованы частные приближения и не были выявлены все считающиеся сейчас существенными особенности. Общий подход для произвольной связной четыреххвостки был установлен независимо Фруассаром [6] и Грибовым [7]; мы будем следовать в изложении методу Фруассара — Грибова.

Рассмотрим формулы (7.2) и (7.3). Входящие под интегралы функции $Q_J(z)$ являются аналитическими¹⁾ в правой полуплоскости переменной J и при больших J ведут себя соответственно (6.11), причем как при вещественных, так и при комплексных J [8]. Таким образом, интегралы (7.2) и (7.3) сходятся равномерно при $\text{Re } J > J_{\text{макс}}(s)$ и их можно использовать для определения $A_J^\pm(s)$ как *аналитической* функции J в данной области. Асимптотическое поведение (6.8) при больших J сохраняется также для комплексных J , обеспечивая, согласно (7.3), экспоненциальное убывание $A_J^\pm(s)$ при $\text{Re } J \rightarrow \infty$, а также осцилляторный характер асимптотики при $\text{Im } J \rightarrow \pm \infty$ и фиксированном²⁾ $\text{Re } J$.

Можно установить, что формула для скачка (6.23) сохраняет силу для комплексных J и что «приведенная» парциальная амплитуда $B_J^\pm(s)$ остается «эрми-

¹⁾ Единственными сингулярностями $Q_J(z)$ как функции J являются полюсы при целых отрицательных J [8].

²⁾ С помощью теоремы Карлсона [9] можно показать, что продолжение Фруассара — Грибова по J является единственной аналитической интерполяцией значений при целых J ($|J| \rightarrow \infty$ в области $\text{Re } J \geq 0$) вида $O(e^{\lambda |J|})$ при $\lambda < \pi$. Формула (6.1) не пригодна для продолжения из-за плохого асимптотического поведения по J . Она эквивалентна формуле (7.2) только при положительных целых значениях J , когда выполняется формула (6.7).

тово-аналитичной»¹⁾ с той же структурой сингулярностей на плоскости s , что и при целых J [9]. В данной связи независимо Проспери [10] и Бэрдакчи [11] был отмечен тот замечательный факт, что формулы вида (6.28) для левых скачков $B_J^\pm(s)$ включают интегралы только по *конечному* интервалу z и определяют эти скачки (исключая изолированные точки) во всей плоскости J , а не только при $\text{Re } J > J_{\text{макс}}$. Это обстоятельство оказывается важным при попытке продолжения функции Фруассара — Грибова в лежащую слева от $J_{\text{макс}}$ область, где могут возникать сингулярности по J .

Отметим, что при $s \leq 0$ установленная в предыдущем параграфе граница Фруассара гарантирует отсутствие сингулярностей в комплексной плоскости J в области $\text{Re } J > 1$. Следовательно, каждая сингулярность, возникающая в данной области при положительных s , должна быть движущейся сингулярностью, т. е. ее положение должно зависеть от s , причем так, чтобы сингулярность уходила за границу запрещенной зоны при приближении s справа к нулю.

Ранее было отмечено, что сингулярности амплитуд Фруассара — Грибова (7.2) в комплексной плоскости углового момента не могут располагаться правее $J_{\text{макс}}(s)$. С помощью рассматриваемого в следующей главе преобразования Зоммерфельда — Ватсона оказывается возможным установить также обратное соотношение. Именно, если $\alpha_{\text{макс}}(s)$ — положение самой правой сингулярности и если амплитуды при всех физических значениях J связаны интерполяцией Фруассара — Грибова, то, как будет показано,

$$M^\pm(s, z_s) < \text{const } z_s^{\text{Re } \alpha_{\text{макс}}(s)}. \quad (7.10)$$

В таком случае $J_{\text{макс}}(s) = \text{Re } \alpha_{\text{макс}}(s)$. Однако при $\text{Re } J < J_{\text{макс}}(s)$ нет гарантии, что физические пар-

¹⁾ Эрмитова аналитичность означает здесь, что $B_J^\pm(s) = B_{J^*}(s^*)$. Выделение множителя с пороговыми импульсами необходимо для сохранения промежутка без разрезов между крайней левой и крайней правой точками ветвления в плоскости s при нецелых J [9].

циальные амплитуды обязательно равны соответствующим значениям аналитического продолжения амплитуды Фруассара — Грибова. В действительности часто, наоборот, считают, что одно или более из физических значений J , равных 0, $1/2$ или 1, нельзя получить продолжением от больших J . В предположении аналитичности по s граница Фруассара, очевидно, исключает возможность подобного особого статуса для какого-либо физического значения J , большего единицы. Однако до настоящего времени не удалось показать, основываясь лишь на общих принципах, которые были изложены в гл. 2—4, что три нижних значения J также должны быть рядовыми гражданами в системе ядерной демократии. Согласно рассуждениям, изложенным в последующих главах настоящей книги, может оказаться, что полная демократия является необходимым условием существования максимальной аналитичности первой степени. Пока же приходится привлекать дополнительные постулаты, которые будут предметом рассмотрения в следующей главе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Froissart M., Phys. Rev., **123**, 1053 (1961).
2. Cocconi G., et al., Phys. Rev., **138**, B165 (1965).
3. Regge T., Nuovo Cimento, **14**, 951 (1959); **18**, 947 (1960).
4. Chew G. F., Frautschi S. C., Phys. Rev., **123**, 1478 (1961).
5. Chew G. F., Frautschi S. C., Mandelstam S., Phys. Rev., **126**, 1202 (1962).
6. Froissart M., Invited paper at the 1961 La Jolla Conference on Weak and Strong Interactions, не опубликовано.
7. Грибов В. Н., ЖЭТФ, **41**, 677, 1962 (1961).
8. Bateman Manuscript Project, Higher Transcendental Functions, ed A. Erdelyi, Vol. I, New York, 1953 (имеется перевод: Бейтмен Г., Эрдели А., Высшие трансцендентные функции, т. I, II, III, изд-во «Наука», М., 1965—1967).
9. Squires E. J., Complex Angular Momenta and Particle Physics, New York, 1963.
10. Prosperi G. M., Nuovo Cimento, **26**, 541 (1962).
11. Bardakci K., Phys. Rev., **127**, 1832 (1962).

МАКСИМАЛЬНАЯ АНАЛИТИЧНОСТЬ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ;
ДИНАМИКА ЗАШНУРОВКИ

§ 1. Общая формулировка постулата.
Полюсы Редже

Постулируем, что амплитуду Фруассара — Грибова (7.2) или (7.3) можно продолжить на *все* физические значения J , даже ниже $J_{\text{макс}}$, и что при этом всегда получаются истинные физические амплитуды. Приведенное предположение, высказанное впервые в несколько иной форме Чью и Фраутчи [1], мы будем называть *постулатом максимальной аналитичности второй степени*. Данное предположение эквивалентно представлению об ядерной демократии [2], и его связь с динамикой зашнуровки будет объяснена в § 3 настоящей главы.

Непосредственным следствием выполнения аналитичности второй степени является превращение всех частиц в полюсы Редже [3]. Высказанное утверждение всего-навсего означает, что если $A_{\pm}^{\pm}(s)$ — аналитическая функция как s , так и J , то положения и вычеты s -полюсов должны аналитически зависеть от J . Кроме того, специальный случай постоянного полюса (не зависящего вообще от J) исключается, так как в формулу (7.3) не могут входить полюсы¹⁾ по s при $\text{Re} J > J_{\text{макс}}$. Из сказанного, согласно теории функций двух комплексных переменных, сразу следует, что можно говорить с равным основанием о сопоставляемом частице полюсе по переменной s с положением и вычетом, зависящими аналитически от s , как о полюсе по переменной J . В одних случаях оказывается более

¹⁾ В формуле (7.3) функция $D^{\pm}(y, s)$ не содержит полюсов по s (см. примечание на стр. 61), так что единственный допустимый путь возникновения подобного полюса связан с возможностью расходимости интеграла по dy .

удобным трактовать полюсы Редже как полюсы по переменной s , а в других случаях как полюсы по переменной J ; обе трактовки являются эквивалентными.

Аналитичность второй степени не требует, чтобы единственными сингулярностями на комплексной плоскости J были полюсы. Однако все сингулярности в правой полуплоскости J должны изменяться с изменением s ; это свойство уже было установлено в гл. 7, § 3 для сингулярностей в области $\text{Re } J > 1$. Иными словами, если мы хотим доходить путем аналитического продолжения до каждого физического значения J , включая $J=0$, то необходимо, чтобы существовала такая область значений s (возможно, на нефизических листах), для которой $J_{\text{макс}}(s) < 0$. Таким образом, становится ясной связь между аналитичностью второй степени и утверждением, сделанным в гл. 5 в конце § 2.

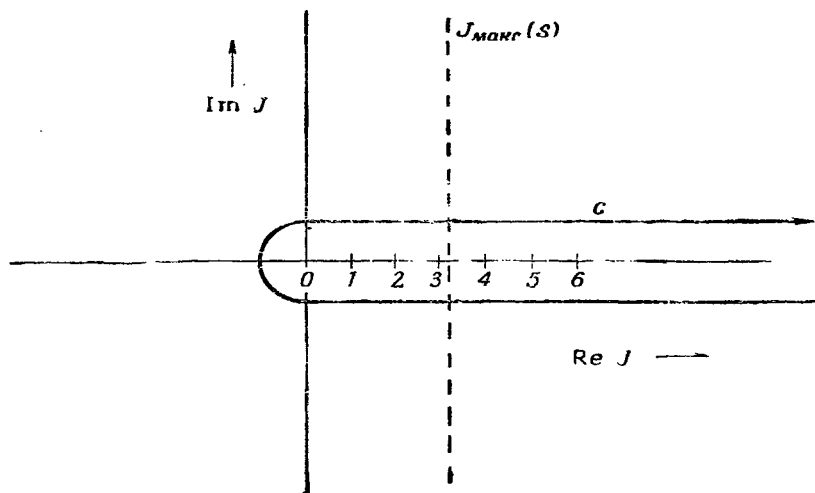
§ 2. Преобразование Зоммерфельда — Ватсона

Конкретную связь между асимптотическим поведением и сингулярностями по угловому моменту обычно получают, следуя методу Редже [4], с помощью преобразования Зоммерфельда — Ватсона. Мы ограничимся здесь лишь изложением общей схемы рассуждений, приведенных во всех подробностях в работе [3]. Рассмотрим представленную на фиг. 10 комплексную плоскость переменной J при частном значении s . Функция Фруассара — Грибова $A_J^\pm(s)$ не содержит никаких сингулярностей справа от $\text{Re } J = J_{\text{макс}}(s)$, и при s , лежащем в физической области, предполагается, что она не имеет сингулярностей по J в бесконечно малой окрестности вещественной положительной оси¹⁾. Мы можем соответственно представить функцию $M^\pm(s, z_s)$ посредством контурного интеграла

$$M^\pm(s, z_s) = - \frac{1}{2ig} \int_c (2J + 1) A_J^\pm(s) \frac{P_J(-z_s)}{\sin \pi J} dJ, \quad (8.1)$$

¹⁾ Отсутствие полюсов в указанной окрестности вытекает из аналитического продолжения унитарности, согласно которому парциальные амплитуды должны оставаться конечными при вещественных J и физических s .

где контур c , показанный на фиг. 10, обходит все положительные целые значения J и не содержит внутри себя никаких сингулярностей $A_J^\pm(s)$. Как нетрудно проверить, в силу теоремы о вычетах формула (8.1)



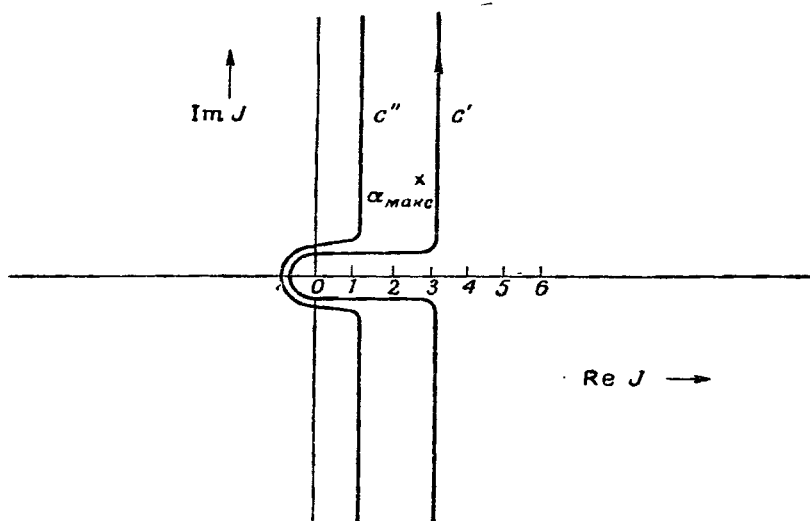
Фиг. 10. Контур в плоскости J , входящий в преобразование Зоммерфельда — Ватсона.

эквивалентна стандартному разложению по парциальным волнам (6.2); подынтегральное выражение в (8.1) содержит полюсы при целых $J=0, 1, 2, \dots$, каждый из которых соответствует члену разложения (6.2)¹⁾. Аналитичность второй степени гарантирует, что все получающиеся при этом члены являются физически правильными.

Пользуясь далее установленным хорошим поведением $A_J^\pm(s)$ при больших J , мы можем деформировать контур интегрирования c в показанный на фиг. 11 контур c' , проходящий правее самой правой сингулярности $A_J^\pm(s)$ относительно J . Обозначив положение этой

¹⁾ Знак минус в аргументе $P_J(-z_s)$ компенсируется различными знаками производной $\sin \pi J$ при нечетных и четных целых значениях J .

самой правой сингулярности через $\alpha_{\max}(s)$, мы можем сразу сделать первый вывод об асимптотическом поведении по z_s . Предполагая, что в правой полуплос-



Фиг. 11. Контуры c' и c'' в комплексной плоскости J .

кости переменной J имеется лишь конечное число изолированных сингулярностей, можно показать равномерную сходимость относительно z_s интеграла по контуру c' , и так как

$$P_J(-z_s) \sim \text{const } z_s^J \text{ при } z_s \rightarrow \infty, \quad \text{Re } J > -\frac{1}{2}, \quad (8.2)$$

то

$$M^\pm(s, z_s) = O(z_s^{\text{Re } \alpha_{\max}(s)}). \quad (8.3)$$

Таким образом, как и ожидалось, мы можем отождествить ограничение степени роста $J_{\max}(s)$ с вещественной частью самой правой сингулярности в комплексной плоскости J .

Если сингулярности $A_J^\pm(s)$ по J исчерпываются только полюсами и точками ветвления (что представляется правдоподобным), то можно явно вычислить

зависимость вклада каждой сингулярности в асимптотическое поведение соответственно от значения вычета для полюсов и скачка на разрезе для точек ветвления. Предположим, например, что ведущей сингулярностью является полюс Редже при $J = \alpha_i(s)$ с вычетом $\beta_i(s)$ и что следующие сингулярности смещены налево на конечное расстояние по $\text{Re } J$. В этом случае мы можем переписать формулу (8.1) в виде

$$M^{\pm}(s, z_s) = -\frac{1}{2ig} \int_{c''} dJ (2J + 1) A_J^{\pm}(s) \frac{P_J(-z_s)}{\sin \pi J} - \\ - \frac{\pi}{g} (2\alpha_i(s) + 1) \beta_i(s) \frac{P_{\alpha_i}(-z_s)}{\sin \pi \alpha_i(s)}, \quad (8.4)$$

где контур c'' проходит теперь правее всех сингулярностей, *исключая* ведущий полюс. При достаточно больших значениях z_s амплитуда определяется в основном вторым членом справа в (8.4), который зависит только от $\alpha_i(s)$ и $\beta_i(s)$. Для ближайшей точки ветвления с идущим влево разрезом соответствующие вычисления приведут к интегралу по скачку вдоль разреза.

Из приведенного выше анализа асимптотического поведения по z_s можно сделать выводы о поведении при больших t или u и фиксированном s . Может показаться, что вблизи порога по s возникает определенная трудность из-за сингулярности соотношения (5.13) между v (или t или u) и z_s ; однако при введении приведенной амплитуды $B_J^{\pm}(s)$ эта трудность снимается [3]. Наконец, можно рассмотреть саму связную часть, четная по z_s часть которой задается M^+ , а нечетная — M^- . Мы сразу получаем

$$\mathcal{M}(s, t) \underset{s \text{ фиксировано}}{\overbrace{t \text{ или } u \rightarrow \infty}} [t^{\alpha_{\text{макс}}(s)} \pm u^{\alpha_{\text{макс}}(s)}] \times \text{Функция от } s, \quad (8.5)$$

причем знак «+» берется, если ведущая сингулярность содержится в $A_J^+(s)$, а знак «—», если в $A_J^-(s)$ 1).

1) Часто говорят об $A_J^+(s)$ как о парциальной амплитуде с четной сигнатурой, а об $A_J^-(s)$ как о парциальной амплитуде с нечетной сигнатурой.

§ 3. Ядерная зашнуровка. Общее обсуждение

Из изложенных выше общих соображений следует вывод, что полюсы определяют не только все другие сингулярности, но и асимптотическое поведение и тем самым всю S -матрицу. Если это действительно так, все же еще остается вопрос о принципе задания полюсов. Подчеркнем здесь, что *максимальная аналитичность второй степени* налагает крайне жесткие ограничения на свободу выбора полюсов. Действительно, можно считать, что единственной совокупностью полюсов, согласующейся с изложенными принципами, является совокупность, отвечающая существующим в природе сильно взаимодействующим частицам. При этом еще далеко не доказано, что можно выбрать хотя бы одну такую не противоречащую общим принципам совокупность полюсов.

Прежде всего очевидно, что в случае аналитичности по угловым моментам нельзя произвольно вводить в S -матрицу какой-либо отвечающий частице полюс или даже конечное число таких полюсов. Если имеется полюс с одним физическим спином, то у этого полюса должны быть «коллеги» при всех высших спинах, отличающихся от исходного на четное число единиц углового момента¹⁾. Большинство из этих полюсов настолько далеки от физической области, что их никак нельзя по отдельности выявить в экспериментах. Тем не менее с теоретической точки зрения все они обладают равным статусом и каждому из них с одинаковым основанием можно присвоить титул частицы.

Второй вывод является менее очевидным, но мы постарались заранее подготовить к нему читателя еще при детальном обсуждении связной четыреххвостки. При этом мы установили, что полная характеристика полюсов относительно инварианта некоторого канала задается аналитическим продолжением скачков в

¹⁾ Каждый полюс Редже имеет определенную сигнатуру и, следовательно, становится физическим только через одно целое значение J .

кросс-реакциях, даже если эти скачки сами по себе никак не включают рассматриваемых полюсов. В то же время эти скачки в кросс-реакциях удовлетворяют формулам вида (3.7), основанным на аналитическом продолжении условия унитарности, в которое входят полюсы прямой реакции. Таким образом, сочетание принципа перестановок, унитарности и аналитичности второй степени приводит к тому, что было названо «зашнуровкой»¹⁾. Каждый из полюсов способствует образованию сингулярностей в кросс-реакциях, а последние сингулярности в свою очередь порождают этот полюс.

Из упрощенных моделей механизма зашнуровки, одну из которых мы опишем ниже, вытекает, что если только удастся найти решения, удовлетворяющие приведенному условию самосогласованности, то эти решения не будут содержать непрерывно изменяющихся параметров. Следующий важный общий пример подобного явления (не зависящий от моделей) можно понять сравнительно просто. Допустим существование такого параметра силы взаимодействия (аналогичного постоянной $e^2/\hbar c$ в электродинамике), который можно делать сколь угодно малым без нарушения согласованности теории. Все вычеты в полюсах и все скачки на разрезах должны при стремлении указанного параметра к нулю также стремиться к нулю, а общая энергетическая зависимость связанных частей (и их модулей) становиться все более и более слабой. В то же время мы предположили, что в *определенной* области энергий каждый заданный полюс Редже лежит в левой полуплоскости переменной J , и мы можем в пределе сделать зависимость положения полюса от энергии настолько слабой, чтобы ни один из полюсов никогда не достигал правой полуплоскости J . Но если нет полюсов в физической области J , то, значит,

¹⁾ Термин «зашнуровка» был введен в 1959 г. Чью и Мандельштамом [5, 6] при описании частного примера рассматриваемого здесь явления; имелся в виду специально ρ -мезонный полюс. Предположение, что *все* полюсы можно определить в результате коллективной зашнуровки, было сделано в 1961 г. Чью и Фраутчи [1].

вообще нет частиц! Следовательно, мы не имеем права допустить введения неограниченно приближающегося к нулю параметра взаимодействия.

Из модельных расчетов можно сделать заключение, что критическое значение силы взаимодействия, допускающее еще существование *каких-либо* частиц, лежит не намного ниже значения, наблюдаемого фактически в ядерной физике. С другой стороны, унитарность налагает ограничение *сверху* на силу сингулярностей, причем величина этого ограничения очень мало отличается (или даже вообще не отличается) от наблюдаемого в природе значения¹⁾. Таким образом, есть основания считать, что сила ядерных взаимодействий однозначно определяется механизмом зашнуровки.

Степень свободы выбора того или иного конкретного набора полюсов пока значительно менее ясна. Ни в одной из моделей до сих пор не учитывали всех считающихся существенными ограничений. Тем не менее из рассмотрения моделей, подобных описываемым в гл. 10 и 11, можно сделать вывод, что положения полюсов, подобно вычетам, не могут быть непрерывной переменной. Если существует более одного самосогласованного набора ядерных частиц, то различные приемлемые наборы должны, по-видимому, образовывать дискретную совокупность.

Центральной проблемой динамики зашнуровки является сейчас задача разработки техники продолжения формул Фруассара — Грибова (7.2) или (7.3) до значений углового момента, при которых появляются полюсы. Хотя общая техника такого продолжения пока еще не найдена, в следующих главах приведены модели, в рамках которых данная задача уже решена.

¹⁾ Естественной мерой силы связи при каждом частном значении энергии можно считать положение самого правого в плоскости J полюса Редже. Согласно границе Фруассара, вытекающей из унитарности, при нулевой энергии невозможны полюсы с $J > 1$. Из эксперимента следует, что так называемый полюс Померанчука — Редже (см. гл. 13) при нулевой энергии лежит в точности при $J = 1$. Это явление было названо принципом «максимальной силы» для сильных взаимодействий [7].

Можно надеяться, что вторая из этих моделей имеет в какой-то степени отношение к действительному миру ядерных частиц.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chew G. F., Frautschi S. C., Phys. Rev. Lett., 7, 394 (1961).
2. Jacob M., Chew G. F., Strong-Interaction Physics, New York, 1964.
3. Squires E. J., Complex Angular Momenta and Particle Physics, New York, 1963.
4. Regge T., Nuovo Cimento, 14, 951 (1959); 18, 947 (1960).
5. Chew G. F., в сб. Proceedings of the Kiev Conference on High Energy Physics, Plenary Session III, 1959, p. 332 (Чью Дж., Труды киевской конференции по физике высоких энергий, Атомиздат, 1960).
6. Chew G. F., Mandelstam S., Nuovo Cimento, 19, 752 (1961).
7. Chew G. F., Frautschi S. C., Phys. Rev. Lett., 8, 41 (1962).

МОДЕЛЬ НЕРЕЛЯТИВИСТСКОГО ПОТЕНЦИАЛЬНОГО
РАССЕЯНИЯ

§ 1. Степень пригодности модели

В наиболее интенсивно исследуемой модели связанной четыреххвостки предполагается, что одна из реакций (например, \mathcal{S} -реакция) взаимосвязна при всех энергиях только с конечным числом двухчастичных каналов. Подобное ограничение можно оправдать лишь в нерелятивистском приближении, в котором нельзя придать смысл обеим кросс-реакциям (t и u). При этом мы получаем условие унитарности и соответственно формулы для скачков только по s ¹⁾. В такой модели мы можем ввести произвольным образом полюсы по t и u на действительной оси с вещественными вычетами. Оказывается, что в этом случае существует единая аналитическая S -матрица, связывающая все физические значения J_s согласно формуле Фруассара—Грибова. Данная S -матрица идентична матрице, получающейся при решении уравнения Шредингера с потенциалом, соответствующим принятым полюсам по t и u .

Как мы увидим, в подобной модели имеется бесконечная последовательность t - и u -точек ветвления, весьма напоминающих пороговые точки ветвления. Однако без условия унитарности для (t, u) -реакций не существует независимых ограничений на (t, u) -сингулярности, которые весьма важны в полной теории S -матрицы²⁾. Отсутствует также возможность продол-

¹⁾ Унитарность по t - или u -реакции неизбежно вызывает появление многочастичных порогов по s , как это будет выяснено в конце настоящей главы при обсуждении мандельштамовской прогрессии.

²⁾ Например, t -полюс возможен только на одном из листов римановской поверхности, достигаемом при специальных обходах пороговых точек ветвления по t (см. работу [10] в гл. 4).

жения по угловому моменту в кросс-реакциях (t, u) . Вводимые произвольно t - и u -полюсы не являются полюсами типа Редже. Если все же попытаться говорить об угловом моменте кросс-реакции, необходимо иметь в виду, что соответствующие полюсы могут отвечать только $J_{t, u} = 0$.

Тем не менее, теория s -каналов в потенциальной модели сохраняет достаточно много черт истинной теории S -матрицы и поэтому заслуживает рассмотрения. Можно считать, что потенциальная модель содержит часть цикла зашнуровки с заданными сингулярностями кросс-реакций, которые определяют полюсы прямой реакции. Для иллюстрации другой части цикла, т. е. определения полюсов кросс-реакций из полюсов прямой реакции, нужна более реалистическая модель.

§ 2. Математическая формулировка модели

Все основные черты модели сохраняются, если ограничиться случаем единственного полюса по t при отсутствии полюсов по u . Кроме того, мы можем постулировать существование только одного двухчастичного s -канала так, чтобы иметь дело с амплитудой $\mathfrak{M}(s, t)$ упругого рассеяния с единственной пороговой s -точкой ветвления $s_0 = (m_a + m_b)^2$. Если полюс по t расположен при $t = m^2$, то оказывается, что возникает последовательность t -точек ветвления на физическом листе при $t = 4m^2, 9m^2, 16m^2, \dots$. Это упоминавшиеся выше псевдонормальные пороги; их наличие следует, как мы увидим, из существования t -полюса. Наша задача состоит в нахождении s -полюсов при заданном t -полюсе и интерполяции Фруассара — Грибова по J_s .

Выделим в амплитуде заданный полюс по t :

$$\mathfrak{M}(s, t) = V^s(t) + \mathfrak{M}^s(s, t), \quad (9.1)$$

где полюсный член

$$V^s(t) = \frac{\lambda}{m^2 - t} \quad (9.2)$$

можно условно назвать «потенциалом». Соответственно предположению об асимптотике, непротиворечивость которого подлежит проверке, величина $\mathfrak{M}^s(s, t)$

убывает (быстрее целой отрицательной степени s) при некотором фиксированном t и $s \rightarrow \infty$; в то же время при $t \rightarrow \infty$ и фиксированном s поведение величины $\mathfrak{M}^s(s, t)$ задается, согласно приведенному в гл. 8 анализу преобразования Зоммерфельда — Ватсона, ведущей сингулярностью J_s . В этом различии асимптотик опять проявляется асимметрия модели относительно s и t .

Функция $\mathfrak{M}^s(s, t)$ не имеет полюсов по t , но содержит все полюсы по s . Мы предположим, что она вещественно-аналитична в прямом произведении разрезанных плоскостей s и t , составляющем физический лист. Примем сначала, что разрез по t можно провести вдоль положительной вещественной оси от некоторой точки $\tau > m^2$ до ∞

$$\mathfrak{M}^s(s, t) = \frac{1}{\pi} \int_{\tau}^{\infty} dt' \frac{\mathcal{D}^s(t', s)}{t' - t}. \quad (9.3)$$

В формуле (9.3), как обычно, берется аналитическое продолжение интеграла по s , даже если для значений s , интересующих нас, $\mathfrak{M}^s(s, t)$ не стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Функция скачка $\mathcal{D}^s(y, s)$ является аналитической функцией s , не содержащей в точке s_0 ни полюсов, ни пороговых точек ветвления, а имеющей только сингулярности Ландау вида, описанного в гл. 4. Это следует из формулы (4.1) для скачка, связанного с порогом s_0 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i} [M^s(s_+, z) - M^s(s_-, z)] &= \\ &= \frac{1}{32\pi^2} \frac{q(s)}{\sqrt{s_0}} \int d\Omega' M(s_-, z'') M(s_+, z'). \end{aligned} \quad (9.4)$$

Нерелятивистское приближение использовано здесь при замене s на s_0 в множителе фазового объема. Кроме того, следует вычислять $q(s)$ в нерелятивистском пределе

$$q^2(s) = (s - s_0) \frac{m_a m_b}{(m_a + m_b)^2}. \quad (9.5)$$

§ 3. Прогрессия Мандельстама

Следуя процедуре Мандельстама [1], при подстановке выражения (9.3) в левую часть равенства (9.4) и выражения (9.1) в правую часть, после выполнения интегрирований по углам получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{\tau}^{\infty} dt' \frac{\rho^s(s, t')}{t' - t} &= \\ &= \frac{1}{32\pi^3 q \sqrt{s_0}} \int \int dt' dt'' \frac{\mathcal{D}(t', s_-) \mathcal{D}(t'', s_+)}{K^{1/2}(q^2; t, t', t'')} \times \\ &\quad \times \ln \frac{t - t' - t'' - (t't''/2q^2) + \sqrt{K}}{t - t' - t'' - (t't''/2q^2) - \sqrt{K}}, \end{aligned} \quad (9.6)$$

где

$$\rho^s(s, t) = \frac{1}{2i} [\mathcal{D}^s(t, s_+) - \mathcal{D}^s(t, s_-)] \quad (9.7)$$

есть двойной скачок Мандельстама и

$$\mathcal{D}(t, s) = \pi \lambda \delta(t - m^2) + \mathcal{D}^s(t, s), \quad (9.8)$$

$$\begin{aligned} K(q^2; t, t', t'') &= t^2 + t'^2 + t''^2 - \\ &\quad - 2(tt' + tt'' + t't'') - \frac{tt't''}{q^2}. \end{aligned} \quad (9.9)$$

Отметим, что K представляет собой квадратичную функцию t с нулями при двух различных вещественных значениях t ; можно показать, что большее из этих значений является монотонно возрастающей функцией t' и t'' , ограниченной снизу $(\sqrt{t'} + \sqrt{t''})^2$, если q^2 — вещественная и положительная величина.

Под интегралом в правой части (9.6) следует брать ту ветвь логарифма, которая вещественна в физической области $-4q^2 < t < 0$. Исследование интеграла в этом случае показывает, что при фиксированных (вещественных и положительных) значениях t' и t'' подынтегральное выражение является вещественно-аналитической функцией t с точкой ветвления в том нуле K , который соответствует большему значению t , и разрезом, начинающимся в этой точке ветвления и идущим по положительной вещественной оси до

бесконечности. Нетрудно проверить, что положение данной точки ветвления задается соотношением (4.4а) при $t_1 = t'$ и $t_2 = t''$. Нижними значениями t' и t'' , входящими при интегрировании, являются $t' = t'' = m^2$, так что, согласно (4.4а), разрез в полном интеграле начинается в точке

$$t = \tau(s) = 4m^2 + \frac{m^2}{q^2(s)}. \quad (9.10)$$

Беря скачок по t в обеих частях (9.6), получаем

$$\rho^s(s, t) = \frac{1}{16\pi^2 q \sqrt{s_0}} \iint dt' dt'' \frac{\mathcal{D}(t', s_-) \mathcal{D}(t'', s_+)}{K^{1/2}(q^2, t, t', t'')}, \quad (9.11)$$

где интегрирование ограничивается областью

$$t > t' + t'' + \frac{t't''}{2q^2} + 2 \left[(t't'') \left(1 + \frac{t'}{4q^2} \right) \left(1 + \frac{t''}{4q^2} \right) \right]^{1/2}. \quad (9.12)$$

Это последнее ограничение ведет к прогрессии Мандельштама, согласно которой двойной скачок и \mathcal{D} можно вычислить последовательными этапами. Из определений (9.7) и (9.8) следует

$$\mathcal{D}(t, s) = \pi \lambda \delta(t - m^2) + \frac{1}{\pi} \int_{s_0(t)}^{\infty} ds' \frac{\rho^s(s', t)}{s' - s}, \quad (9.13)$$

где, согласно обращению (9.10), нижний предел определяется величиной

$$q_0^2(t) = \frac{m^2}{t - 4m^2}, \quad q_0^2 = q_0^2(s). \quad (9.14)$$

Таким образом, знание $\rho^s(s, t)$ в определенном интервале t эквивалентно знанию $\mathcal{D}(t, s)$ в том же интервале. Однако, согласно (9.11) и (9.12), если нам известно $\mathcal{D}(t, s)$ вплоть до значения $t = t_1$, то можно сразу подсчитать $\rho^s(s, t)$ вплоть до $t_2 = (m + \sqrt{t_1})^2$. На следующем этапе мы можем продвинуться вплоть до $t_3 = (m + \sqrt{t_2})^2$ и т. д. Необходимо лишь знать

\mathcal{D} в некотором ненулевом интервале; соответствующая информация задается при $0 < t < 4m^2$ членом с дельта-функцией в формуле (9.13). Подобным образом *максимальная аналитичность первой степени* позволяет полностью определить скачок по t , если заданы положение и вычет полюса (или полюсов) по t . Можно, далее, с помощью (9.11) и (9.13) проверить, что при $s \rightarrow \infty$ и фиксированном t функция $\mathcal{D}^s(t, s)$ ведет себя как $O(s^{-1/2})$. Таким образом, подтверждается исходное предположение об асимптотическом поведении при больших s .

Детальное рассмотрение прогрессии Мандельстама позволяет установить существование последовательности границ Ландау для $\rho^s(s, t)$, асимптотически приближающихся к линиям $t=4m^2, 9m^2, 16m^2, \dots$ при $s \rightarrow \infty$. При интегрировании по ds' в формуле (9.13) и затем по dt' в формуле (9.3) при построении $\mathcal{M}^s(s, t)$ указанные асимптоты вызывают появление в соответствующих положениях фиксированных точек ветвления по t . Это как раз те сингулярности, которые мы ранее назвали «псевдонормальными порогами», поскольку они отвечают t -каналам с соответственно 2, 3, 4, ... частицами, причем каждая имеет массу m . Тот факт, что последовательность таких сингулярностей *бесконечна*, является крайне важным для возможности существования s -полюсов; можно показать, что любое конечное число этапов прогрессии Мандельстама приводит к t -скачкам в $\mathcal{D}^s(t, s)$, которые обращаются в нуль при $t \rightarrow \infty$. Из (9.3) следует, что в последнем случае никогда не могут возникнуть s -полюсы. Вообще s -полюсы возможны только при нарушении сходимости (9.3), т. е. тогда, когда в некоторой ситуации $\mathcal{D}^s(t, s)$ не исчезает при $t \rightarrow \infty$. Таким образом, мы видим, что возможность присутствия полюсов относительно инварианта какого-либо конкретного канала зависит от существования взаимосвязных с кросс-реакциями каналов со сколь угодно большим числом частиц. В рассматриваемой здесь нерелятивистской модели такие многочастичные t -каналы не имеют прямого физического смысла, но в более реалистической модели они должны проявляться в эксперименте.

§ 4. N/D -метод

Нам остается рассмотреть формулу (9.3), когда $\mathcal{D}(t, s)$ не исчезает при $t \rightarrow \infty$, т. е. взять продолженные парциальной амплитуды Фруассара — Грибова

$$A_J(s) = \frac{g\lambda}{2q^2} Q_J \left(1 + \frac{m^2}{2q^2}\right) + \frac{g}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dt}{2q^2} \mathcal{D}^s(t, s) Q_J \left(1 + \frac{t}{2q^2}\right) \quad (9.15)$$

в область

$$\operatorname{Re} J \leq J_{\max}(s), \quad \text{где } \mathcal{D}^s(t, s) = O(t^{J_{\max}(s)})$$

при $t \rightarrow \infty$ и фиксированном s .

Прежде всего необходимо со всех точек зрения установить вид сингулярностей в правой полуплоскости углового момента. (В оставшейся части данной главы символ J будет обозначать J_s .) Как впервые показал Редже [2], опираясь на уравнение Шредингера, эти сингулярности представляют собой полюсы¹⁾. Мы наметим здесь другой способ доказательства указанного положения, лежащий в рамках теории S -матрицы. Этот способ позволяет также определить положения и вычеты полюсов, т. е. полностью решить динамическую задачу.

Действительно, после того как установлено, что указанные особенности ограничиваются полюсами и что асимптотическое поведение при больших t (или z_s) определяется (8.4), можно использовать итерации Мандельштама для вычисления $\mathcal{D}^s(y, s)$ вплоть до столь больших значений y , при которых начинает доминировать ведущий полюс Редже [4]. Положение и вычет этого полюса можно затем выразить через параметры асимптотического поведения. Вычитая вклад ведущего полюса, можно затем определить аналогич-

¹⁾ Бланкенбеклер, Гольдбергер, Кури и Трейман [3] показали, что решение уравнения Шредингера с потенциалом, преобразование Фурье которого имеет вид полюса (9.2), приводит к S -матрице, совпадающей с S -матрицей, получающейся из формул настоящего параграфа.

ным образом следующий полюс Редже и т. д. Подобная процедура была фактически использована для грубой оценки с помощью численных расчетов [5] параметров ведущего полюса. Однако при этом требуется выполнить много итераций и трудно получить желаемую точность. Другой подход, к описанию которого мы переходим, требует значительно меньше итераций Мандельштама для получения той же точности.

Рассмотрим функцию

$$B_J(s) = q^{-2J} A_J(s),$$

которая вещественно-аналитична в комплексной s -плоскости, разрезанной от $s=s_0$ до $+\infty$ и от $q^2 = -m_p^2/4$ до $-\infty$. Скачок на правом разрезе задается [см. формулу (6.23)] выражением

$$\frac{1}{2i} [B_J(s_+) - B_J(s_-)] = \rho^J(s) B_J(s_-) B_J(s_+), \quad (9.16)$$

где

$$\rho^J(s) = \frac{2q^{2J+1}}{\sqrt{s_0}}.$$

Скачок $B_J(s)$ на левом разрезе (снизу вверх) можно вычислить с помощью (9.15); он оказывается равным $2i\Delta_J(s)$, где

$$\Delta_J(s) = \frac{g}{4(-q^2)^{J+1}} \left\{ \theta\left(-\frac{m^2}{4} - q^2\right) \pi \lambda P_J\left(-1 - \frac{m^2}{2q^2}\right) + \theta(-m^2 - q^2) \int_{4m^2}^{-4q^2} dt P_J\left(-1 - \frac{t}{2q^2}\right) \mathcal{D}^s(t, s) \right\}. \quad (9.17)$$

Характерной особенностью последней формулы является то, что при интегрировании аргумент P_J остается в пределах от -1 до $+1$ и, следовательно, интеграл является аналитической функцией во всей комплексной плоскости J .

Введем теперь функцию, являющуюся интегралом по левому разрезу $B_J(s)$:

$$B_J^L(s) = \frac{1}{\pi} \int_{q'^2 = -m^2/4}^{-\infty} \frac{ds'}{s' - s} \Delta_J(s') = V_J^s(s) + B_J^{s, L}(s), \quad (9.18)$$

где

$$V_J^s(s) = g \frac{\lambda}{2q^{2J+2}} Q_J \left(1 + \frac{m^2}{2q^2} \right) \quad (9.19)$$

и

$$B_J^{s,L}(s) = \frac{g}{4\pi} \int_{q'^2 = -m^2}^{-\infty} \frac{ds'}{s' - s} \frac{1}{(-q'^2)^{J+1}} \times \\ \times \int_{4m^2}^{-4q'^2} dt P_J \left(-1 - \frac{t}{2q'^2} \right) \mathcal{D}^s(t, s'). \quad (9.20)^1$$

Если

$$\mathcal{D}^s(t, s) = O(s^{-\varepsilon}), \quad (9.21)$$

$s \rightarrow \infty$

то интеграл (9.20) является определенным (и аналитическим относительно J) при условии $\text{Re } J > J_{\text{макс}}(\infty) - \varepsilon$. Ранее было отмечено, что в нерелятивистской модели $\varepsilon = 1/2$, и детальный анализ в рамках этой же модели, который мы здесь опускаем, приводит к равенству $J_{\text{макс}}(\infty) = -1$. В качестве правдоподобного аргумента в пользу последнего утверждения можно сказать, что так как, согласно (9.15),

$$B_J(s) \underset{s \rightarrow \infty}{\sim} V_J^s(s) \quad (9.22)$$

и так как, согласно (9.19), функция $V_J^s(s)$ является аналитической во всей плоскости J , за исключением точек, соответствующих отрицательным целым значениям $J = -1, -2, \dots$, где $Q_J(s)$ имеет простые полюсы, то каждый J -полюс $B_J(s)$ должен приближаться к отрицательному целому значению, когда $s \rightarrow \infty$. Приведенный аргумент является недостаточным для полного доказательства, поскольку предельное поведение

¹⁾ Альтернативное выражение имеет вид

$$B_J^{s,L}(s) = \frac{g}{\pi^2} \int \int ds' dt \frac{\rho^s(s', t)}{s' - s} \left[\frac{Q_J(1 + t/2q(s)^2)}{2q(s)^{2J+2}} - \frac{Q_J(1 + t/2q(s')^2)}{2q(s')^{2J+2}} \right],$$

но в такой записи менее ясны аналитические свойства по J .

(9.22) следует из (9.15) для $\text{Re } J > J_{\text{макс}}(\infty)$, но тем не менее конечный вывод от этого не изменяется [6]. Общее заключение состоит в том, что $B_J^L(s)$ является аналитической функцией во всей правой полуплоскости J . Кроме того,

$$B_J^L(s) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0. \quad (9.23)$$

Теперь мы можем, наконец, перейти к N/D -разложению парциальной амплитуды ¹⁾

$$B_J(s) = N_J(s) D_J^{-1}(s). \quad (9.24)$$

При этом левые разрезы $B_J(s)$ включаются в «числитель» $N_J(s)$, а правые разрезы сопоставляются «знаменателю» $D_J(s)$. Метод Винера — Хопфа [9] показывает, как в общем случае построить функции N_J и D_J , которые, не считая выделенных разрезов, мероморфны на физическом листе (их сингулярности расположены самое большее в изолированных точках). При использовании специальных свойств $B_J(s)$ будет показано, что имеется возможность выбора $N_J(s)$ и $D_J(s)$ вообще без полюсов.

Большинство необходимых нам свойств $B_J(s)$ следует из формулы (9.15), которая определена на всем физическом листе s при $\text{Re } J > L$, где L — максимальное значение $J_{\text{макс}}(s)$ на данном листе ²⁾. Прежде всего мы знаем, что при $\text{Re } J > L$ на физическом листе нет s -полюсов. Мы имеем далее предельное поведение (9.22) при $\text{Re } J > L$, согласно которому, в частности,

$$B_J(s) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0. \quad (9.25)$$

¹⁾ N/D -метод был открыт Чью и Мандельштамом [7]. Близкая техника, основанная на рассмотрении $B_J^{-1}(s)$, использовалась ранее Чью и Лоу [8]; однако в общем случае граничные условия не удовлетворялись.

²⁾ В рассматриваемой модели существование конечной верхней грани степени роста по t при любом s было непосредственно показано Мандельштамом [10] с помощью итерационной процедуры.

Наконец, из (9.15) можно вывести, что при $\text{Re } J > L$ фаза $B_J(s)$ при $s = \infty$ должна быть той же самой, что и при $s = s_0$ ¹⁾.

Представим «знаменатель» $D_J(s)$ при $\text{Re } J > L$ в виде

$$D_J(s) = D_J(s_0) \exp \left\{ -\frac{s-s_0}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds'}{s'-s} \frac{\delta_J(s') - \delta_J(s_0)}{s' - s_0} \right\}, \quad (9.26)$$

где $\delta_J(s)$ — фаза $B_J(s)$ на верхней стороне правого разреза [величина $\delta_J(s)$ представляет собой сдвиг фазы для упругого рассеяния]. Запись формулы (9.26) соответствует правилам Винера — Хопфа для частного случая отсутствия как нулей, так и полюсов у $D_J(s)$ на физическом листе. Мы имеем право выбрать знаменатель в таком виде, если только затем определим $N_J(s)$ по формуле (9.24) как $B_J(s)D_J(s)$.

Из (9.26) при учете равенства $\delta_J(\infty) = \delta_J(s_0)$ следует:

$$D_J(s) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} C, \quad (9.27)$$

где C — вещественная постоянная. Удобно нормировать $D_J(\infty)$ на единицу, после чего мы можем написать дисперсионное соотношение

$$D_J(s) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds'}{s'-s} \text{Im } D_J(s'). \quad (9.28)$$

Рассмотрим теперь «числитель» $N_J(s)$. Из (9.25) и (9.27) вытекает, что при $\text{Re } J > L$ «числитель» стремится к нулю в пределе $s \rightarrow \infty$. Известно также, что $N_J(s)$ не содержит полюсов, но вполне может иметь нули. Мы приходим в результате из-за асимптотиче-

¹⁾ Несмотря на то, что нерелятивистские парциальные амплитуды всегда в обеих указанных точках вещественны, все же возможна разность фаз, кратная целому числу π . Такая разность фаз, действительно, существует согласно знаменитой теореме Левинсона тогда, когда на физическом листе имеются s -полюсы (см. обзор Мандельстама, на который мы ссылались в гл. 1).

ского поведения (9.23) и (9.27) к следующей формуле:

$$N_J(s) = B_J^L(s) D_J(s) - \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds'}{s' - s} \operatorname{Im} [B_J^L(s') D_J(s')], \quad (9.29)$$

первый член которой дает правильные скачки на левом разрезе, а второй сокращает нежелательный правый разрез. Из (9.16) находим, что вдоль правого разреза

$$\operatorname{Im} B_J^{-1}(s) = -\rho_J(s), \quad (9.30)$$

так что в этой области

$$\operatorname{Im} D_J(s) = -\rho_J(s) N(s). \quad (9.31)$$

В той же области $\operatorname{Im} B_J^L(s) = 0$, и, следовательно, формулу (9.29) можно переписать в виде

$$N_J(s) = B_J^L(s) D_J(s) + \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds'}{s' - s} B_J^L(s') \rho_J(s') N_J(s'). \quad (9.32)$$

Объединяя (9.28) и (9.31), находим

$$D_J(s) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds'}{s' - s} \rho_J(s') N_J(s') \quad (9.33)$$

и, подставляя (9.33) в (9.32), окончательно получаем ¹⁾

$$N_J(s) = B_J^L(s) + \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds'}{s' - s} [B_J^L(s') - B_J^L(s)] \rho_J(s') N_J(s'). \quad (9.34)$$

Линейное интегральное уравнение (9.34) было здесь выведено только для $\operatorname{Re} J > L$, но, как показал

¹⁾ N/D -метод, развитый первоначально для физических J , был распространен Мандельштамом [10] на случай комплексных J . Уравнение (9.34) было получено независимо Мандельштамом и Урецким [11].

Мандельстам [10], его можно продолжить по J во всей правой полуплоскости J и определить $N_J(s)$ как соответствующую аналитическую функцию J . При этом существенно то обстоятельство, что как неоднородный член, так и ядро в (9.34) являются аналитическими функциями, если аналитична функция $B_J^L(s)$, а, как мы уже установили, область аналитичности $B_J^L(s)$ включает всю правую полуплоскость J .

Если бы ядро (9.34) было квадратично-интегрируемым во всей правой полуплоскости J , то мы могли бы сразу, сославшись на теорию Фредгольма, заключить, что единственными возможными сингулярностями N_J в данной области являются простые полюсы при тех значениях J , где существует решение однородного уравнения. Эти полюсы должны быть независимыми от s и при переходе (9.33) в $D_J(s)$ должны сокращаться в отношении $N_J(s)D_J^{-1}(s)$. Единственными J -сингулярностями $B_J(s)$ могут быть в этом случае зависящие от s -полюсы, соответствующие нулям $D_J(s)$, причем траектория Редже $\alpha_i(s)$ задается равенством ¹⁾

$$D_{\alpha_i(s)}(s) = 0. \quad (9.35)$$

Из теоремы о неявных функциях вытекает, что траектория Редже имеет в основном ту же структуру сингулярностей, что и знаменатель, и одновременно с ним вещественна или комплексна. В частности, траектория Редже на физическом листе имеет правый разрез, но не имеет левого разреза ²⁾.

¹⁾ Отметим, что при наличии нулей $D_J(s)$ на физическом листе s выражение (9.26) перестает быть справедливым, а выражение (9.33) все же сохраняется.

²⁾ Как было выяснено Тэйлором [6], точки ветвления траектории могут возникнуть также, если

$$\left[\frac{\partial}{\partial J} D_J(s) \right]_{J=\alpha_i(s)} = 0.$$

Такие точки ветвления соответствуют возможности пересечения различных траекторий и качественно отличаются от тех сингулярностей, которые мы классифицировали как «правые» или «левые».

Вычет полюса Редже является также «вещественно-аналитической» функцией s , задаваемой равенством

$$\gamma_i(s) = \frac{N_{\alpha_i(s)}(s)}{[(\partial/\partial J) D_J(s)]_{J=\alpha_i(s)}}. \quad (9.36)$$

С первого взгляда $\gamma_i(s)$ имеет левые разрезы. Однако, вспоминая (9.35), с помощью (9.34) и (9.33) получаем

$$N_{\alpha_i(s)}(s) = \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds'}{s' - s} B_{\alpha_i(s)}^L(s') \rho_{\alpha_i(s)}(s') N_{\alpha_i(s)}(s'), \quad (9.37)$$

откуда следует, что вычет (9.36) в действительности содержит только правый разрез.

На самом деле, ядро уравнения (9.34) является квадратично-интегрируемым только при $\text{Re } J < 3/2$ и Мандельштаму [10] пришлось использовать довольно сложные рассуждения (которые мы здесь не воспроизводим), чтобы связать большие и малые значения J . Окончательные заключения о структуре J -сингулярностей $B_J(s)$ остаются при этом неизменными.

Суммируем изложенное выше. Было не только установлено, что в рассматриваемой модели единственными сингулярностями S -матрицы являются полюсы Редже в правой полуплоскости J , но и указана процедура расчета положений и вычетов этих полюсов. Эта процедура включает два этапа:

а) итерации Мандельштама для получения $\mathcal{D}^s(t, s)$ и тем самым $B_J^L(s)$;

б) решение линейного интегрального уравнения для $N_J(s)$ и тем самым для $D_J(s)$. Практически было выяснено, что одного или двух шагов в итерации Мандельштама часто уже достаточно, чтобы получить весьма точные результаты при применении N/D -метода [12]. Так или иначе мы достигли основной цели настоящей главы, состоящей в том, чтобы проиллюстрировать, как общие принципы построения S -матрицы позволяют провести динамический расчет s -полюсов, если заданы кросс-сингулярности. Используемая при этом модель, хотя и позволяет провести вычисления до

конца, имеет, очевидно, много принципиальных недостатков. В следующих трех главах мы рассмотрим более реалистическую модель.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mandelstam S., Phys. Rev., 112, 1344 (1958) (имеется перевод в сб. «Новый метод в теории сильных взаимодействий», ИЛ, 1960).
2. Regge T., Nuovo Cimento, 14, 951 (1959); 18, 947 (1960).
3. Blankenbecler R., Goldberger M. L., Khuri N. N., Trieman S. B., Ann. Phys., 10, 62 (1960).
4. Chew G. F., Frautschi S. C., Mandelstam S., Phys. Rev., 126, 1202 (1962).
5. Burke P., Tate C., in Proceedings of the 1962 International Conference on High Energy Physics, CERN, 507, 1962.
6. Taylor J. R., Thesis, University of California, Berkeley, 1963.
7. Chew G. F., Mandelstam S., Phys. Rev., 119, 467 (1960).
8. Chew G. F., Low F. E., Phys. Rev., 101, 1570 (1956).
9. Titchmarsh E., Introduction to the Theory of Fourier Integrals, Oxford, 1948, p. 339 (имеется перевод: Титчмарш, Введение в теорию интегралов Фурье, ИЛ, 1951).
10. Mandelstam S., Ann. Phys., 21, 302 (1963).
11. Uretsky T., Phys. Rev., 123, 1459 (1961).
12. Luming M., Phys. Rev., 136, B1120 (1964).

ГЛАВА 10

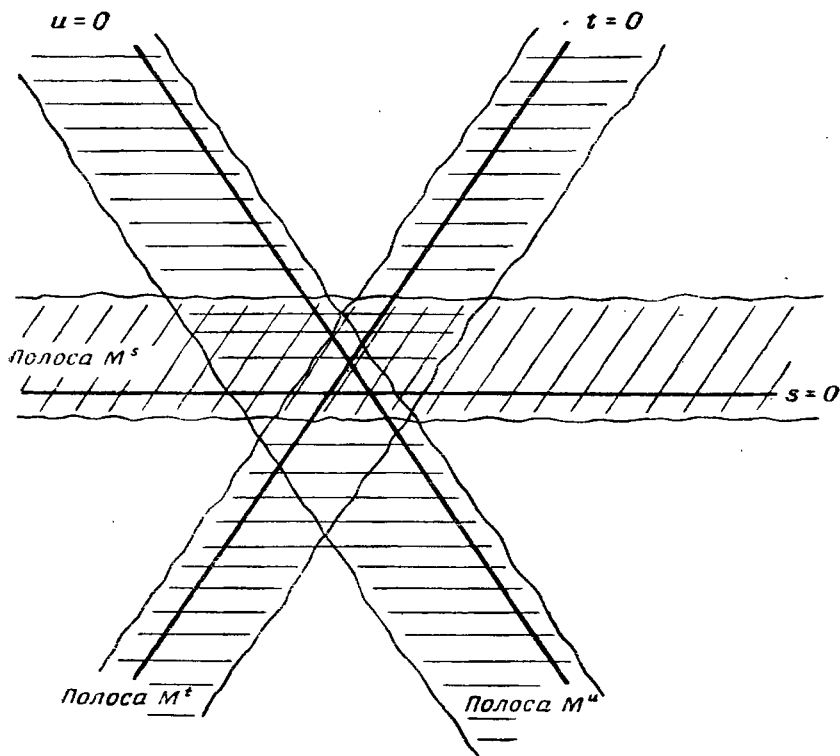
ПОЛОСНАЯ МОДЕЛЬ СВЯЗНОЙ ЧЕТЫРЕХХВОСТКИ

Во всех предложенных до сих пор моделях теории S -матрицы независимо от того, релятивистские они или нерелятивистские, главную роль играют двухчастичные каналы. Это не значит, что всегда полностью пренебрегают каналами с более чем двумя частицами — они лишь учитываются менее тщательно. Причины такого выделения двухчастичных каналов носят отчасти исторический характер (двухчастичные модели атомов во многих случаях оказались полезными) и отчасти связаны с трудностью учета большого числа степеней свободы, присущего многочастичным каналам. Можно все же указать известное рациональное обоснование для предположения, что двухчастичные каналы играют доминирующую роль в зашнуровке адронов.

Это обоснование вытекает в основном из эксперимента. Прежде всего надежно установлено, что связанная четыреххвостка велика только в трех узких полосах диаграммы Мандельштама, показанных на фиг. 12. Полоса, обозначенная M^s , проявляется двумя способами.

1. В физической s -области возможны большие пики в сечении при низких энергиях; они сопоставляются с s -полюсами с определенным J_s и имеют соответствующую полиномиальную зависимость от z_s . Подобные пики всегда исчезают при энергиях выше примерно 2 Гэв в системе центра масс, показывая тем самым, что даже если резонансы и продолжаются до высоких значений s , то вычеты соответствующих им полюсов быстро убывают с ростом энергии.

2. Полюсы физического s -листа не могут, конечно, располагаться ниже $s=0$, иначе они проникли бы в физическую область t - и u -реакций, нарушая там унитарность. Все же если существуют низколежащие



Фиг. 12. Полосные области диаграммы Мандельштама.

s -полюсы на физическом листе или вблизи него, то систематически наблюдаются пики в t - и u -реакциях в направлении вперед (или назад), где модуль $|s|$ мал. (В тех немногих случаях, когда отсутствуют низколежащие s -полюсы, не наблюдается также и пиков последнего рода.) Эти пики имеют ширину по $|s|$ порядка $\frac{1}{3} \Gamma_{эв}$ и сохраняются вплоть до неограниченно высоких значений t (или u), как этого и следовало

ожидать из-за независимости положения s -полюсов от инвариантов кросс-каналов. Вне указанных пиков вперед и назад связные четыреххвостки при высоких энергиях весьма малы.

Переставляя местами переменные s , t , u , можно сделать совершенно эквивалентные выводы о полосах, обозначенных M^t и M^u . Подводя итог, можно сказать, что связные четыреххвостки малы всюду, кроме тех областей, где по крайней мере один из трех инвариантов каналов меньше нескольких $(\Gamma\varepsilon v)^2$. Поскольку существование трех выделенных полос обязано, очевидно, полюсам, кажется разумным построить модель¹⁾, в которой

$$M = M^s + M^t + M^u, \quad (10.1)$$

где M^s включает все s -полюсы, M^t — все t -полюсы и M^u — все u -полюсы. Если далее предположить, что M^s велико только при малом $|s|$, а M^t и M^u соответственно при малых $|t|$ и $|u|$, то сразу получается искомая полосная структура.

Следующий важный экспериментальный факт состоит в том, что внутри s -полосы, где основную роль играют s -полюсы, главными нормальными порогами по s являются пороги двухчастичных каналов, если включить также пороги с образованием нестабильных частиц²⁾. Только если мы выходим из полосы в область больших s , многочастичные каналы действительно становятся доминирующими. Поскольку полюсы и основные ближайшие точки ветвления по одной и той же переменной обязательно влияют друг на друга, естественно включить все двухчастичные s -пороги внутрь s -полосы в M^s вместе с s -полюсами. Аналогичным образом в M^t включают нижние двухчастичные пороги по t , а в M^u — нижние двухчастичные пороги

¹⁾ Такая модель постепенно завоевывала признание в литературе в течение первой половины шестидесятых годов (см. указанные в конце этой главы работы).

²⁾ Так, процесс $\pi + N \rightarrow \pi + \pi + N$ разыгрывается в значительной степени внутри полосы (т. е. в области πN -резонансов), однако его можно представить в хорошем приближении как следствие процессов $\pi + N \rightarrow \pi + \Delta$, $\pi + N \rightarrow \rho + N$ и т. д.

по u . С другой стороны, поскольку полосы M^t и M^u играют доминирующую роль при больших s , естественно включить в них дополнительно все многочастичные s -пороги, освободив от этих сингулярностей M^s . Соответственно из M^t исключаются многочастичные t -пороги и из M^u — многочастичные u -пороги.

Здесь можно установить известные аналогии между формулой (10.1) и моделью предыдущей главы. В частности, мы можем определить

$$V^s = M^t + M^u \quad (10.2)$$

как «потенциал», действующий в s -реакции. Этот «потенциал» содержит кросс-полюсы и не включает s -полюсов и двухчастичных s -порогов. Далее, полная амплитуда $M = M^s + V^s$ стремится к V^s как при s , стремящемся к бесконечности при фиксированном малом значении t (или u), так и при J_s , стремящемся к бесконечности (поскольку в V^s сконцентрированы все ведущие u - и t -сингулярности). Наиболее важно, пожалуй, что в M^s содержатся только нормальные s -пороги двухчастичных каналов. Таким образом, можно надеяться сформулировать аналогично тому, как это было сделано в предыдущей главе, динамические уравнения, с помощью которых M^s вычисляется по заданным $M^t + M^u$. После нахождения соответствующей процедуры можно будет с ее помощью также получить M^t по заданным $M^s + M^u$ и M^u по заданным $M^s + M^t$. Указанная взаимная динамика и составляет зашнуровку.

Хотя в модели, обрисованной в настоящей главе, и не игнорируются полностью многочастичные пороги, в ней все же не рассматриваются формулы для многочастичных скачков. По отдельности аккуратно учитываются только двухчастичные скачки. Как мы увидим в следующих главах, многочастичные разрезы входят в полосную модель только косвенно через итерации Мандельстама, точно так же как и в нерелятивистской модели. При условии, что многочастичные скачки по отдельности малы и велик лишь их суммарный вклад, можно ожидать, что рассматриваемый подход имеет

реальный смысл. В этом отношении являются обнадеживающими экспериментальные данные по кратному рождению: рождаемые частицы, по-видимому, широко распределяются по различным каналам.

До сих пор нет отчетливого теоретического объяснения явной малости многочастичных скачков, и обычно ссылаются на следующий качественный аргумент. При низких энергиях быстро убывает множитель фазового объема каналов с увеличением числа входящих в них частиц, в то время как при высоких энергиях граница Фруассара накладывает ограничения на сечения и в результате совокупный вклад многих каналов в полный скачок должен быть ограниченным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chew G. F., Frautschi S. C., Phys. Rev., 123, 1478 (1961).
2. Chew G. F., Phys. Rev., 129, 2363 (1963).
3. Chew G. F., Jones C. E., Phys. Rev., 135, B208 (1964).

ГЛАВА II

ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПОЛОСНОЙ МОДЕЛИ

Предварительное исследование комплексных порогов для нестабильных частиц, выполненное Драммондом [1], показало, что они качественно не отличаются от обычных порогов для стабильных частиц. При этом возникают, конечно, определенные осложнения, но Драммонд установил, что все же можно сохранить неизменными важнейшие элементы полосной модели. Соответственно в дальнейшем мы будем вести рассмотрение, как если бы мы имели дело только со стабильными частицами. Далее, включение в динамику любого конечного числа двухчастичных каналов не приводит, по-видимому, к каким-либо дополнительным осложнениям по сравнению со случаем одного двухчастичного канала¹⁾. Все вычисления становятся только более сложными. Поэтому из педагогических соображений мы будем выписывать, так же как делали в нерелятивистской модели, только уравнения, относящиеся к случаю наличия лишь одного двухчастичного канала. Как обычно, спины всех входящих в рассмотрение частиц будут считаться равными нулю.

Первым шагом является введение «односторонних» функций, соответствующих $M(s, z_s)$, $V^s(s, z_s)$ и $M^s(s, z_s)$. Каждая из этих новых функций имеет только правый разрез по z_s , причем мы сохраняем между ними такое же соотношение

$$M^{\pm}(s, z_s) = V^{s(\pm)}(s, z_s) + M^{s(\pm)}(s, z_s), \quad (11.1)$$

¹⁾ Один из способов матричного обобщения N/D -уравнений был указан Бьеркенем [2]. При этом в точности сохраняется запись (9.33) и (9.34), с тем лишь отличием, что все функции становятся матрицами с размерностью, равной числу каналов.

что и между исходными «двухсторонними» функциями. Предполагается, что по своему построению функции $M^{s(\pm)}$ содержат все s -полюсы и пороговую точку ветвления при $s_0 = (m_a + m_b)^2$. «Потенциалы» $V^{s(\pm)}$ не включают этой точки ветвления, но содержат многочастичные s -пороги. Для упрощения обозначений неудобные индексы (\pm) в оставшейся части главы будут опущены, поскольку все уравнения имеют одинаковый вид независимо от сигнатуры.

Потенциал можно представить в виде интеграла Коши по своему разрезу (включая полюсы, если они имеются) по z_s , или, что то же самое, по t

$$V^s(s, z_s) = \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{\infty} \frac{dt'}{t' - t} \mathcal{D}^V(t', s). \quad (11.2)$$

Аналогичным образом можно выразить M и M^s через их t -скачки \mathcal{D} и \mathcal{D}^s соответственно; в итоге из (11.1) получаем

$$\mathcal{D}(t, s) = \mathcal{D}^V(t, s) + \mathcal{D}^s(t, s). \quad (11.3)$$

Отметим, что нижний предел t_0 в t -спектре потенциала обязательно лежит ниже начала t -спектра в M^s , поскольку все t - и u -полюсы и двухчастичные пороги включены в V^s .

Формула для двухчастичного скачка по s имеет вид¹⁾

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i} [M^s(s_+, z_s) - M^s(s_-, z_s)] &= \\ &= \frac{\rho(s)}{64\pi^2} \int d\Omega' M(s_-, z'_s) M(s_+, z'_s), \end{aligned} \quad (11.4)$$

где $\rho(s) = 2q_{ab}(s)/\sqrt{s}$ — обычный множитель фазового объема. Точно так же как в гл 9, подстановка в (11.4) t -разложений M^s и M приводит после

¹⁾ Следует иметь в виду, что выше многочастичных s -порогов полная амплитуда M имеет дополнительный скачок, возникающий из-за потенциала.

вычисления t -скачков к формуле Мандельстама

$$\rho^s(s, t) = \frac{\rho(s)}{32\pi^2 q_s^2} \iint dt' dt'' \frac{\mathcal{D}(t', s_-) \mathcal{D}(t'', s_+)}{K^{1/2}(q_s^2, t, t', t'')} \quad (11.5)$$

с областью интегрирования, ограниченной тем же условием (9.12), что и в нерелятивистской модели. Двойная спектральная функция $\rho^s(s, t)$ является s -скачком \mathcal{D}^s , так что из (11.3) мы получаем

$$\mathcal{D}(t, s) = \mathcal{D}^V(t, s) + \frac{1}{\pi} \int_{s_0(t)}^{\infty} \frac{ds'}{s' - s} \rho^s(s', t). \quad (11.6)$$

Сочетание уравнений (11.5) и (11.6) позволяет производить итерации Мандельстама исходя из знания \mathcal{D}^V , т. е. исходя, по существу, из потенциала.

Недостатком приведенных соотношений является отсутствие какой-либо гарантии того, что функция

$$M^s = \frac{1}{\pi^2} \iint ds' dt' \frac{\rho^s(s', t')}{(s' - s)(t' - t)} \quad (11.7)$$

должна действительно становиться малой вне s -полосы. Это условие существенно для самосогласованности полосной модели. В то же время из (11.5) и (11.6) можно, наоборот, усмотреть тенденцию ко все большему возрастанию каждой последующей итерации с увеличением s , если для некоторого вещественного положительного t сам потенциал растет быстрее первой степени s [3]. Поскольку заведомо существуют частицы со спином, большим единицы, по крайней мере в отдельных случаях будут существовать полюсы по t , содержащие соответственно высокую степень s ; таким образом, необходимы весьма деликатные сокращения различных членов, чтобы ряд итераций Мандельстама не «разбежался».

В связи с указанной дилеммой рассматривают различные возможности модификации полосной модели. Весьма грубый, но в то же время простой подход заключается в замене множителя фазового объема двухчастичного канала $\rho(s)$ на модифицированный множитель $\rho_1(s)$, который равен $\rho(s)$ при $s < s_1$ и быстро убывает до нуля при $s > s_1$. Параметр s_1 , назы-

ваемый «шириной полосы», не будет, очевидно, произвольным при точных вычислениях, поскольку полная зашнуровка должна зависеть только от отношений энергии¹⁾. Однако введение подобного грубого обрезания нельзя считать удовлетворительным, и это заставляет продолжать усилия по усовершенствованию модели.

В полосной модели итерации Мандельстама точно так же, как в нерелятивистской потенциальной модели, дают t -скачок

$$\mathcal{D}^s(t, s) = \frac{1}{\pi} \int \frac{ds'}{s' - s} \rho^s(s', t), \quad (11.8)$$

который не должен в общем случае убывать при $t \rightarrow \infty$. Соответственно нельзя прямо находить функцию

$$\mathcal{M}^s(s, t) = \frac{1}{\pi} \int \frac{dt'}{t' - t} \mathcal{D}^s(t', s), \quad (11.9)$$

содержащую s -полюсы²⁾. Используемый здесь подход полностью аналогичен принятому в предыдущей модели. Если установить, что единственными сингулярностями в правой полуплоскости J_s являются простые полюсы (Редже), то можно заключить, что

$$\mathcal{M}^s(s, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} - \sum_l r_l(s) \frac{P_{\alpha_l(s)}(-z_s)}{\sin \pi \alpha_l(s)}, \quad (11.10)$$

где справа отброшены асимптотически исчезающие члены. В то же время, подсчитывая t -скачок по формуле (11.10), мы находим [3], что

$$\mathcal{D}^s(t, s) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \sum_l r_l(s) P_{\alpha_l(s)}(z_s), \quad (11.11)$$

где справа опять исключены члены, более быстро убывающие при $t \rightarrow \infty$. Таким образом, путем достаточно большого числа итераций Мандельстама, переводящих

¹⁾ В частности, удвоение ширины полосы должно приводить только к удвоению масс всех частиц без реальных физических следствий.

²⁾ Появление таких полюсов связано фактически, как уже обсуждалось, с расходимостью интеграла по t' .

нас в область больших t , мы можем посредством сопоставления с (11.11) установить функции вычета $r_i(s)$ и траектории $\alpha_i(s)$ и затем вычесть из $\mathcal{D}^s(t, s)$ и $\mathcal{M}^s(s, t)$ их асимптотически исчезающие части. Оставшаяся часть \mathcal{D}^s будет после этого давать оставшуюся часть \mathcal{M}^s , выраженную уже через сходящийся интеграл вида (11.9).

Чтобы установить мероморфность в правой полуплоскости J_s , рассмотрим амплитуды Фруассара—Грибова, соответствующие разложению (11.1)¹⁾,

$$B_J(s) = V_J^s(s) + B_J^s(s). \quad (11.12)$$

Подобное разложение возможно потому, что «односторонние» составляющие $V^{s(\pm)}$ и $M^{s(\pm)}$ имеют аналитическую структуру по z_s , позволяющую выполнить продолжение по J_s согласно Фруассару—Грибову. Ранее уже было отмечено, что $B_J(s)$ стремится к V_J^s при возрастании s или J и что многочастичный скачок $B_J(s)$ полностью включается в потенциал. Нижний порог в потенциале, являющийся неупругим порогом, мы будем обозначать через s_{in} .

Представим теперь $B_J(s)$ в виде

$$B_J(s) = \frac{N_J(s)}{D_J(s)}, \quad (11.13)$$

где D_J имеет только правый разрез от s_0 до ∞ , а N_J имеет, кроме левого разреза, также правый разрез от s_{in} до ∞ . В физической области вдоль верхней стороны правого разреза

$$\text{Im } B_J(s) = \rho_1^J(s) |B_J(s)|^2 + \text{Im } V_J^s(s), \quad (11.14)$$

где множитель $\rho_1^J = q^{2J}\rho_1$ быстро убывает до нуля при $s > s_1$, а второй (неупругий) член отсутствует при $s < s_{\text{in}}$. Чтобы удовлетворить (11.14), воспользуемся приемом, предложенным в работе [4]. Прежде всего

¹⁾ В оставшейся части этой главы мы будем вместо J_s писать просто J .

определим функцию S_J^1 :

$$S_J^1 = 1 + 2i\rho_1^J \left(\frac{N_J}{D_J} \right). \quad (11.15)$$

Введенная величина равна матричному элементу S -матрицы для упругого рассеяния при $s < s_1$ и быстро стремится к единице при $s > s_1$. Далее, примем, что «знаменатель» имеет в физической области фазу, равную половине взятой со знаком минус фазы S_J^1 . Таким образом,

$$S_J^1 = \eta_J^1 \frac{D_J^*}{D_J}, \quad (11.16)$$

где η_J^1 — абсолютное значение S_J^1 . Сравнивая формулы (11.15) и (11.16), находим

$$\eta_J^1 D_J^* - D_J = 2i\rho_1^J N_J, \quad (11.17)$$

или

$$\operatorname{Im} D_J = - \left(\frac{2}{1 + \eta_J^1} \right) \rho_1^J \operatorname{Re} N_J \quad \text{при } s > s_0, \quad (11.18)$$

$$\operatorname{Im} N_J = \begin{cases} \left(\frac{1 - \eta_J^1}{2\rho_1^J} \right) \operatorname{Re} D_J & \text{при } s > s_{\text{in}}, \\ 0 & \text{при } s_0 < s < s_{\text{in}}. \end{cases} \quad (11.19)$$

Можно проверить, что уравнение (11.14) выполняется, если только параметр η_J^1 связан с мнимой частью потенциала следующим образом:

$$\frac{1 - (\eta_J^1)^2}{4} = \begin{cases} \rho_1^J \operatorname{Im} V_J^s & \text{при } s > s_{\text{in}}, \\ 0 & \text{при } s < s_{\text{in}}. \end{cases} \quad (11.20)$$

Очевидно, мы должны потребовать выполнения неравенств

$$0 \leq \rho_1^J \operatorname{Im} V_J^s \leq \frac{1}{4},$$

что нужно всегда проверять до начала динамических расчетов.

Исходя из формулы (11.18) и пользуясь теми же рассуждениями, что и в гл. 9, сразу находим

уравнение для «знаменателя» при больших J

$$D_J(s) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds'}{s' - s} \bar{\rho}_1^J(s') \bar{N}_J(s'), \quad (11.21)$$

где

$$\bar{N}_J = \frac{2\eta_J^1}{1 + \eta_J^1} \operatorname{Re} N_J \quad (11.22)$$

и

$$\bar{\rho}_1^J = \left(\frac{\rho_1^J}{\eta_J^1} \right). \quad (11.23)$$

Далее, на основании (11.12) и (11.20) с помощью процедуры, аналогичной использованной в гл. 9, получаем для больших J линейное интегральное уравнение

$$\bar{N}_J = \bar{B}_J^L(s) + \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds'}{s' - s} [\bar{B}_J^L(s') - \bar{B}_J^L(s)] \bar{\rho}_1^J(s') \bar{N}_J(s'), \quad (11.24)$$

у которого как неоднородный член, так и ядро определяются через функцию

$$\bar{B}_J^L(s) = \operatorname{Re} V_J^s(s) + B_J^{s, L}(s) + \frac{P}{\pi} \int_{s_{\text{in}}}^{\infty} \frac{ds'}{s' - s} \frac{(1 - \eta_J^1(s'))^2}{4\rho_1^J(s')}, \quad (11.25)$$

где символ P означает главное значение интеграла. Величину \bar{B}_J^L интересно сравнить с ее нерелятивистским аналогом, задаваемым формулой (9.18). Как в релятивистском, так и в нерелятивистском случаях компонента $B_J^{s, L}$ является интегралом по левым разрезам B_J^s , и ее можно получить из \mathcal{D}^s с помощью формулы (9.20) при $\operatorname{Re} J > J_{\text{макс}}(-\infty) - \varepsilon$.

Так же как в гл. 9, можно показать, что \bar{B}_J^L является аналитической функцией во всей правой J -пло-

скости¹⁾. Более того, ввиду обрезания при $s=s_1$ легко установить фредгольмовский характер уравнения (11.24). Следовательно, это уравнение определяет требующееся аналитическое продолжение по J с единственными сингулярностями B_J в правой полуплоскости, являющимися полюсами Редже, которые возникают из-за нулей в «знаменателе».

Существенным при выводе формулы (11.24), так же как и при выводе ее аналога (9.34), является то, что при $\text{Re } J > L$ функция D не имеет нулей или полюсов и стремится к единице при $s \rightarrow \infty$, а N не имеет полюсов и стремится при $s \rightarrow \infty$, к потенциалу (в этом пределе $\eta_J^1 = 1$). Подобное условие исключает произвольные нули и полюсы на физическом листе [5]. В цитированной работе рассмотрена также возможность того, что параметр η_J (или, что то же самое, потенциал) имеет сингулярности по J , изменяющие вид (11.24) при уменьшении J от бесконечности. В нашей полосной модели потенциал считается по определению аналитической функцией в правой полуплоскости J и вид (11.24) остается неизменным для всех физических значений углового момента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Drummond I. T., Phys. Rev., **140**, B482 (1965).
2. Bjorken J. D., Phys. Rev. Lett., **4**, 473 (1960).
3. Chew G. F., Frautschi S. C., Mandelstam S., Phys. Rev., **126**, 1202 (1962).
4. Frye G., Warnock R., Phys. Rev., **130**, 478 (1963).
5. Hartle J. B., Jones C. E., Phys. Rev., **140**, B90 (1965).

¹⁾ В полосной модели $\varepsilon=1$ (а не $1/2$), и мы можем опираться на границу Фруассара, гарантирующую неравенство

$$J_{\text{макс}}(-\infty) \leq 1.$$

ГЛАВА 12

ПРИБЛИЖЕНИЕ ПОЛЮСАМИ РЕДЖЕ В ПОЛОСНОЙ МОДЕЛИ

Хотя физическое содержание приведенных выше уравнений выяснено пока далеко не полностью и они еще остаются предметом интенсивного исследования, определенные ограниченные варианты полосной модели, которые мы предполагаем рассмотреть в этой и следующей главе, уже привели к обнадеживающим качественным результатам. Прежде чем переходить к теоретическому выводу этих результатов, лучше объяснить, как указания, подтверждающие наш общий подход, можно получить из анализа экспериментальных пиков в сечениях реакций в направлениях вперед и назад при высоких энергиях. Как уже упоминалось, факт существования таких пиков является важной составляющей частью общего обоснования модели.

В полосной модели единственными сингулярностями в правой полуплоскости J_s являются полюсы Редже; следовательно, асимптотическое выражение связанной четыреххвостки при больших t или u и фиксированном s при использовании преобразования Зоммерфельда — Ватсона (см. гл. 8) определяется формулой

$$\mathfrak{M}(s, t) \xrightarrow[\substack{t \text{ или } u \rightarrow \infty \\ s \text{ фиксировано}}]{} -\pi \sum_i \frac{b_i(s)}{\sin \pi \alpha_i(s)} \times \\ \times [(-t)^{\alpha_i(s)} \pm (-u)^{\alpha_i(s)}], \quad (12.1)$$

где каждый коэффициент $b_i(s)$ пропорционален вычету в соответствующем i -м полюсе. Согласно модели $\alpha_i(s)$ и $b_i(s)$ вещественны в физической области t - и u -реакций, где s отрицательно. Далее, можно заранее

сказать, что $\alpha_i(s)$ — возрастающая функция¹⁾ и по порядку равна обратному значению «ширины полосы» (которая в нашей модели определяет масштаб скоростей изменения всех величин).

Для большинства t - или u -реакций при доступных сейчас энергиях [$t, u \leq 50$ (Гэв)²] в сумму правой части (12.1) существенным образом входит несколько различных полюсов, что затрудняет выяснение характеристических свойств соответствующих выражений²⁾. Все же существует несколько реакций, например $\pi^- p \rightarrow \pi^0 n$ и $\pi^- p \rightarrow \eta n$, в которых можно ожидать, что в результате игры квантовых чисел доминирует в кросс-реакциях один s -полюс. В этих случаях были подтверждены [1] следующие выводы из предела (12.1):

1. При больших t (или u) амплитуда ведет себя как степень с вещественным показателем, который зависит от s и возрастает, не противореча условию $\alpha_i(m_0^2) = J_0$, где m_0 — масса наиболее легкой физической частицы со спином J_0 на рассматриваемой траектории³⁾. Производная от траектории имеет порядок единицы углового момента на (Гэв)².

2. Фаза амплитуды однозначно определяется функцией траектории $\alpha_i(s)$ по правилам, следующим из (12.1); в частности, если t положительно и u отрицательно, то фаза задается множителем $\exp[-i\pi\alpha_i(s)] \pm 1$.

Мандельстам [2] высказал аргументы в пользу того, что в правой полуплоскости углового момента возникают движущиеся точки ветвления и полюсы, что должно сильно усложнить асимптотическое поведение по сравнению с предсказываемым (12.1). Эти точки ветвления по угловому моменту связаны с многочастичными эффектами, недостаточно аккуратно учитываемыми

¹⁾ Возрастание траектории $\alpha_i(s)$ соответствует тому известному факту, что при прочих равных условиях энергия связанного состояния возрастает с увеличением углового момента.

²⁾ К сожалению, наиболее легко измеряемая реакция — упругое рассеяние — включает даже в простейших случаях не менее трех различных полюсов [1]. Эти полюсы могут в принципе быть разделены, но для этого требуется много весьма точных экспериментов.

³⁾ В двух указанных выше примерах такими частицами являются ρ - и A_2 -мезоны.

в полосной модели; до сих пор, однако, не сделано оценок величин скачков на соответствующих разрезах. Такие скачки вполне могут оказаться относительно малыми, и если дальнейшие эксперименты более полно подтвердят (12.1) [в частности, подтвердят связь коэффициента $b_i(s)$ с вычетом соответствующего полюса ¹⁾], то доминирующая роль полюсов можно будет считать эмпирически установленной ²⁾.

Как было сказано, запись суммы (12.1) по дискретному набору полюсов Редже согласуется с современными данными о пиках вперед и назад при высоких энергиях в t - и u -реакциях, когда s отрицательно. Путем небольших изменений мы можем сделать сумму подобного вида оправданной также для малых значений t и u с пиками, соответствующими резонансам и связным состояниям в положительной области s . Для этого достаточно заменить $(-t)^{\alpha_i(s)}$ на функцию Лежандра $P_{\alpha_i(s)}(-z_s)$ с дополнительным множителем, позволяющим сохранить правильную нормировку при больших z_s ³⁾. Полюсы по s будут входить при этом не только в правильных точках [из-за обращения в нуль $\sin \pi \alpha_i(s)$ при прохождении траектории через физические целые значения], но и с правильными вычетами при всех t и u . Таким образом, можно аппроксимировать функцию $M^s(s, t, u)$ во всей s -полосе, задав положения и вычеты тех полюсов, которые достигают правой полуплоскости J_s . Такая аппроксимация, хотя и является довольно сырой, значительно более пригодна для качественного анализа, чем использова-

¹⁾ Факторизуемость вычетов приводит ко многим важным предсказаниям об экспериментальном поведении сечений при высоких энергиях [3].

²⁾ Читатель не должен забывать, что критическим пунктом теории S -матрицы является существование ограничения степени роста при больших t или u , зависящего от s , но не требование доминирования полюсов. Полосная модель может оказаться непригодной без нарушения общих принципов теории.

³⁾ Соответствующее соотношение имеет вид

$$P_{\alpha}(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\alpha + 1/2)}{\Gamma(\alpha + 1)} (2z)^{\alpha}, \quad \operatorname{Re} \alpha > -\frac{1}{2}.$$

ние полной функции M^s , получаемой путем итераций Мандельстама. В дальнейшем мы будем поэтому исходить при рассмотрении зашнуровки из приближения, в котором полосные функции M^s , M^t и M^u представляются суммой полюсов Редже.

Рассмотрим сначала функцию M^t , составляющую часть «погенциала» $V^s = M^t + M^u$, генерирующего s -полюсы. Кроме условия, что M^t имеет хорошие t -полюсы и хорошее поведение при больших s и фиксированном t , мы должны также исключить очень большие s -скачки внутри s -полосы в связи с ограничением, вытекающим из унитарности [см. (11.20)]

$$0 \leq \rho^J s \operatorname{Im} V_{J_s}^s \leq \frac{1}{4}. \quad (12.2)$$

Действительно удается с помощью определенного способа получить, что итерация Мандельстама для M^t (основанная на «взаимном потенциале» $V^t = M^s + M^u$) обнадеживающим образом удовлетворяет приведенным пределам, но при этом мнимые части простых выражений для M^t через полюсы Редже возрастают до недопустимо больших значений при малых по абсолютной величине s . Наиболее гарантированная процедура состоит в таком построении, чтобы s -разрез в M^t начинался при s_1 и оставался полностью вне s -полосы. Этого мы можем достигнуть, заменяя функцию $P_{\alpha_j(t)}(-z_t)$, разрез которой начинается при $z_t = 1$ ($s \approx 0$), на другую функцию с теми же значениями при целых α_j и тем же пределом при больших z_t , но с разрезом по z_t , начинающимся в точке $z_1(t) = z_t(s = s_1, t)$. Был построен целый ряд таких функций, приводящих к одним и тем же выводам.

Суммируя сказанное, повторим, что мы предполагаем возможность аппроксимировать M^t выражением

$$M^t \approx \sum_j \frac{1}{2} [M_j^t(t, z_t) \pm M_j^t(t, -z_t)], \quad (12.3)$$

в котором каждый отдельный член M_j^t полностью задается траекторией $\alpha_j(t)$, (приведенным) вычетом $\gamma_j(t)$

и шириной полосы s_1 ¹⁾). Аналитическая структура M_j^t включает s -разрез, идущий от s_1 до ∞ , а также t -полюсы и точки ветвления у двухчастичных нормальных порогов ²⁾). Построение соответствующих разложений для M^s и M^u является очевидным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Phillips R., Rarita W., Phys. Rev., **139**, B1336 (1965); Phys. Rev. Lett., **15**, 807 (1965).
2. Mandelstam S., Nuovo Cimento, **30**, 1148 (1963).
3. Squires E. J., Complex Angular Momenta and Particle Physics, New York, 1963.
4. Khuri N. N., Phys. Rev., **130**, 429 (1963).
5. Chew G. F., Jones C. E., Phys. Rev., **135**, B208 (1964).

¹⁾ См., например, работы [4] или [5]. Авторы последней работы пользуются выражением

$$M_j^t(t, z_t) = \Gamma_j(t) \int_{-\infty}^{z_1(t)} \frac{dz'}{z' - z_t} P_{\alpha_j(t)}(-z')$$

где

$$\Gamma_j(t) = \frac{1}{g} [2\alpha_j(t) + 1] \gamma_j(t) [-q_a(t) q_b(t)]^{\alpha_j(t)}.$$

²⁾ Эти точки ветвления содержатся в траектории и вычете.

**ЯДЕРНАЯ ЗАШНУРОВКА
(ПРОДОЛЖЕНИЕ ОБЩЕГО ОБСУЖДЕНИЯ)**

Резюмируем наше качественное обсуждение ядерной зашнуровки в рамках приближения полюсами Редже в полосной модели. Мы видим, что «потенциал», действующий в некоторой заданной реакции, возникает из-за полюсов в кросс-реакциях. Какие свойства полюсов Редже определяют важность их роли как источника возникновения сил? Обычно наиболее существенными свойствами являются масса и спин для полюса, сопоставляемого на траектории первой *физической частице*. Чем меньше масса и чем больше спин, тем существеннее вклад в потенциал.

В чем тут дело? Рассмотрим представление (12.3) для вклада j -го полюса Редже t -реакции в s -потенциал. Соответствующая функция является аналитической по z_t в эллипсе, имеющем фокусы в точках $z_t = \pm 1$ и проходящем через $\pm z_1(t)$, т. е. в области, включающей весь интервал s -полосы. Таким образом, всюду внутри полосы мы можем представить j -ю компоненту потенциала посредством разложения по полиномам Лежандра от z_t :

$$V_j^s(t, s) = \frac{1}{g} \sum_{\substack{J_t - \text{четные} \\ \text{или нечетные} \\ \text{целые числа}}} (2J_t + 1) V_{j, J_t}^s(t) P_{J_t}(z_t). \quad (13.1)$$

Это разложение быстро сходится в физической области s -реакции, если s не очень близко к s_1 . Сходимость обусловлена обычным экспоненциальным затуханием при больших J_t (см. гл. 6, § 2)

$$V_{j, J_t}^s(t) \underset{J_t \rightarrow \infty}{<} C(t) e^{-J_t \xi(z_1)},$$

которое сказывается уже при $J \geq 1$ из-за фруассаровского запрета полюсов Редже с $J_t > 1$ при $t < 0$. В грубом приближении $V_{j, J_t}^s(t)$ можно представить в виде

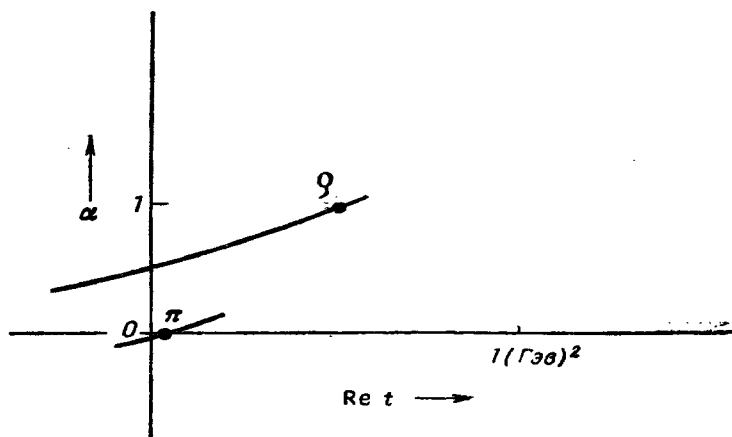
$$V_{j, J_t}^s(t) \approx [q_a(t) q_b(t)]^{\alpha_j(t)} \frac{\gamma_j^{ba}(t)}{J_t - \alpha_j(t)} e^{-[J_t - \alpha_j(t)] \xi(z_1)}, \quad (13.2)$$

в котором сохраняются правильные t -полюсы и правильное поведение при больших J_t . Указанное представление было найдено независимо Кури [2] и Джонсом. Поскольку в физической s -области $\alpha_i(t) \leq 1$ и $\xi(z_1) \geq 1$ всюду, за исключением непосредственной близости к границе полосы, только ведущий член ($J_t^0 = 0$ или 1)¹⁾ разложения (13.1) может играть важную роль в динамических уравнениях гл. 11. Все остальные члены сильно «зарезаются» из-за экспоненциального множителя в правой стороне (13.2).

Физическая область s -реакции начинается при $t=0$, так что в формуле (13.2) видна тенденция к увеличению потенциала при стремлении к нулю знаменателя вблизи $t=0$ в случае $\alpha_j(0)$, лежащего не намного ниже ведущего физического значения J_t^0 . Следует далее ожидать, что $\alpha_j(t)$ является гладкой и монотонно-возрастающей функцией t в области t -резонансов (и связанных состояний) [4]. Соответственно малость массы первой частицы на траектории обуславливает малость значения $J_t^0 - \alpha_j(0)$ и, следовательно, большой вклад в потенциал. Для иллюстрации указанного эффекта на фиг. 13 приведены π - и ρ -траектории, причем пересечение с $t=0$ определено из экспериментов при высоких энергиях [5]. Мы видим, что для ρ -траектории значение $J_t^0 - \alpha_\rho(0)$ равно примерно 0,5, а для π -траектории значение $J_t^0 - \alpha_\pi(0)$ составляет менее 0,05. В связи с этим π -траектория должна давать наиболее важный вклад при генерации сил.

¹⁾ Если рассматривать t -реакцию с нечетным барионным числом, то нижним значением J_t (в зависимости от сигнатуры) будет $1/2$ или $3/2$. При этом сохраняется правило, что на каждой заданной траектории последовательные физические значения J_t отличаются на две единицы момента [3].

С другой стороны, зависимость ведущего члена в (13.1) от s содержит максимальную степень $s^{j_t^0}$ внутри полосы и динамические уравнения гл. 11 оказываются чувствительными к зависимости потенциала от энергии. Действительно, было найдено, что линейный



Фиг. 13. Участки π - и ρ -траекторий, включающие первые физические точки и продолжение в область отрицательных значений t .

по энергии рост, связанный с ρ -мезоном, компенсирует большое отношение массы ρ - к массе π -мезона, потенциал которого не зависит от энергии. Объединяя указанные два соображения, можно сказать, что верхняя траектория (см. фиг. 13) имеет тенденцию становиться главным источником сил. Каждая систематическая программа зашнуровки должна идти сверху вниз. К счастью, границу Фруассара позволяет установить положение «верха», так как ни одна траектория не может лежать выше $J_t=1$ при $t=0$.

Обратим, между прочим, внимание читателей на то обстоятельство, что в общем случае приближенная замена (13.2) на

$$[q_a(t) q_b(t)]^{j_t^0} \frac{\gamma_j^{ba}(m^2)}{\alpha'_j(m^2)} \frac{1}{m^2 - t}, \quad (13.3)$$

где m^2 — значение t , при котором $\alpha_j = J_t^0$ является неудовлетворительной. Такую замену часто используют, чтобы обойтись без определения траектории и вычетов в непрерывном интервале t ; при этом в рассмотрение входят только масса и константа связи физической частицы. Однако простые оценки зависимости вычета от t показывают, что выражение (13.3) может привести к ошибкам в порядке величины в физической области s -реакции в случае, если она расположена относительно далеко от точки $t = m^2$ [1]. Лучше всего приближение (13.3) оправдывается для пионной траектории, для которой m^2 очень мало.

Следующий вопрос, которого надо коснуться, — это знак и значение модуля функции вычета $\gamma_j(t)$, которая, напоминаем, вещественна ниже первого порога t -реакции. Как это и должно быть, положительный знак соответствует в s -каналах силам притяжения, а отрицательный — силам отталкивания. Чтобы в результате решения динамических уравнений гл. 11 могла получиться высоколежащая реджевская траектория $\alpha_i(s)$ с расположенными на ней стабильными частицами или резонансами, должно иметь место значительное преобладание сил притяжения.

Знак диагонального вычета $\gamma_j^{aa}(t)$ определяется условием, что в комплексной области физического листа нет t -полюсов¹⁾. Вблизи t -полюса связанная четыреххвостка имеет вид (13.3), и если положение m^2 полюса лежит выше нижнего t -порога, но по-прежнему вблизи физической области (как в случае обычного резонанса), то мнимая часть m^2 должна быть отрицательной²⁾. Таким образом, при $t = \text{Re } m^2$ на максимуме резонанса в физической области множитель $(m^2 - t)^{-1/2}$

¹⁾ Можно показать, что полюсы, возникающие в нерелятивистской потенциальной модели, обладают этим свойством; оно существенно для выполнения макроскопической причинности. Пока не доказано, что в нашей релятивистской модели вообще невозможно возникновение комплексных полюсов на физическом листе но в простейших вариантах модели это действительно так.

²⁾ В обозначениях теории Брейта — Вигнера мнимая часть m равна $-\Gamma/2$, где Γ — полная ширина резонанса.

становится чисто мнимым с положительным коэффициентом. Вспоминая, что условие унитарности требует положительности мнимой части диагональной парциальной амплитуды, мы приходим к заключению о положительном знаке вещественной части $\gamma_j^{aa}(m^2)/\alpha'_j(m^2)$. Для расчета потенциала s -реакции необходимо, правда, значение вычета при отрицательных s , но в рассмотренных простых вариантах релятивистской модели не было замечено [6] тенденции к изменению знака $\text{Re } \gamma_j^{aa}(t)$ при переходе от положительных к отрицательным t .

Недиагональные вычеты не имеют определенного знака, в связи с чем здесь возможно существование источника сил отталкивания. Эффективное отталкивание может быть также следствием знака « \pm » в формуле (5.17), которая используется при составлении «односторонних» функций. Вообще вопрос — отталкивание или притяжение — является, очевидно, довольно сложным; однако из проведенных до настоящего времени исследований можно сделать следующие три общих заключения:

1. Для каналов, в которых установлено существование суммарной силы сильного притяжения, можно указать взаимосвязанные с ними частицы с малой массой, причем положения и вычеты соответствующих полюсов качественно согласуются с предположением, что эти полюсы являются динамическим следствием (см. гл. 11) сил притяжения. Хорошим примером является Δ^{++} -резонанс (часто называемый $3-3$ -резонансом), выступающий как «связное состояние» в π^+p -канале, причем преимущественное притяжение является следствием нейтронной траектории в кросс-канале π^-p . Притяжение наиболее сильно при квантовых числах, в точности совпадающих с квантовыми числами Δ . «Взаимный» пример представляет собой нейтрон, который выступает как связное состояние π^-p - и π^0n -каналов, причем преимущественное притяжение обусловлено здесь полюсами Редже Δ^{++} и Δ^0 в кросс-реакциях. При этом опять наиболее сильное притяжение имеет место в случае, когда обнаруживаются частицы

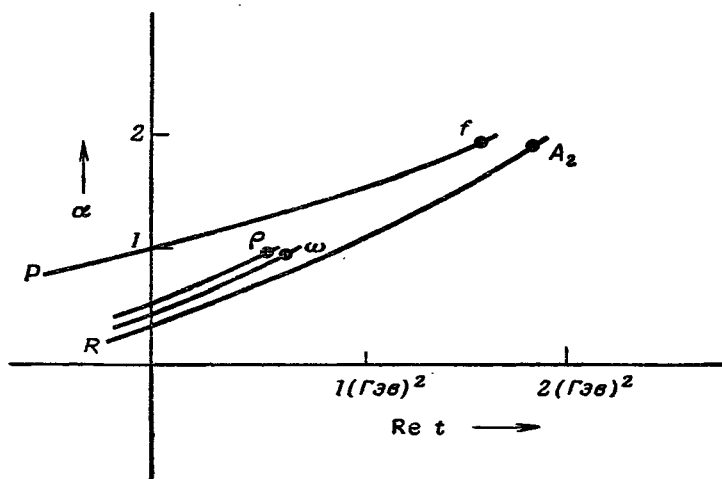
малой массы с квантовыми числами данных каналов [7].

2. Каналы с сильным притяжением не наблюдаются в тех случаях, когда не обнаружено частиц малой массы с квантовыми числами данных каналов. Примером может служить канал со следующим набором квантовых чисел: барионное число — нуль, гиперзаряд — нуль, четная сигнатура и положительная четность, электрический заряд — два. В этом случае имеют место преимущественно силы отталкивания и не найдено соответствующих частиц.

3. Каналы с квантовыми числами вакуума всегда, очевидно, включают силы притяжения, причем эти силы больше, чем силы с какими-либо другими квантовыми числами [8—10]. В ряде случаев из-за особенно простого характера квантовых чисел вакуума в потенциал вообще почти не могут входить составляющие от сил отталкивания.

Соответственно сказанному весьма правдоподобно, что траектория Редже «высшего ранга» должна иметь четную сигнатуру, положительную четность, нулевое барионное число, нулевой заряд, нулевой гиперзаряд и т. д. Это подтверждают эксперименты при высоких энергиях; действительно, траектория с вакуумподобными свойствами, по-видимому, проходит при $t=0$ через самую высокую из допустимых точек $J_t=1$. Мы будем называть эту траекторию траекторией Померанчука, поскольку предположение о преобладании ее вклада в высокоэнергетических полных сечениях и сечениях упругого рассеяния было сделано впервые Померанчуком [11—13]. Согласно экспериментам при высоких энергиях снизу от траектории Померанчука, другие траектории (в частности, ρ) начинаются лишь после разрыва в примерно 0,4 единицы J_t [4, 5]. Общее число траекторий, расположенных при $t=0$ от $J_t=1$ до $J_t=0$, равно, по-видимому, восемнадцати: девять с четной сигнатурой и положительной четностью и девять с нечетной сигнатурой и отрицательной четностью, причем барионное число каждой траектории равно нулю [14]. Восемь из указанных траекторий показаны на фиг. 14.

Нечетно-отрицательные траектории, подобные ρ , достигают первой физической точки ($J_t=1$) при положительных значениях t , соответствующих массам



Фиг. 14. Участки P -, ρ -, ω - и R -траекторий.

P - и ω -траектории относятся к синглетам, причем первыми физическими частицами являются соответственно $f(2^+)$ и $\omega(1^-)$; ρ - и R -траектории относятся к триплетам, причем в последнем случае первым физическим триплетом является $A_2(2^+)$ (см. работу [1] в гл. 12).

обычных частиц¹⁾. Однако первое пересечение четноположительных траекторий с физическим значением ($J_t=0$) происходит, очевидно, при отрицательных t , что кажется невозможным из-за появления в этом случае частиц с мнимой массой. Одно из решений этой дилеммы состоит, по-видимому, в том, что при указанном значении t вычет строго обращается в нуль при $\alpha_j(t) = 0$, исключая тем самым физический t -полюс [15]. Необходимость такого обращения вычета в нуль диктуется условием унитарности для кросс-реакций, которое не допускает существования полюса

¹⁾ Значения $J_t=3$ вдоль этих траекторий пока не наблюдались. Если только они окажутся вообще наблюдаемыми, то в соответствии с наклоном кривых на фиг. 13 их массы должны составлять приблизительно $1,7 \text{ Гэв}$.

в соответствующих физических областях. Другая возможность заключается в том, что четно-положительные траектории вообще не доходят на физическом листе до $J_t=0$, стремясь к пределу, лежащему между 0 и 1, при $t \rightarrow -\infty$ [16].

Каждый наблюдаемый экспериментально набор из девяти траекторий можно разделить на два синглета, два эквивалентных (частицы — античастицы) дублета и один триплет в соответствии с классификацией SU_2 -симметрии¹⁾. Причины возникновения SU_2 -симметрии не известны, но можно предположить, что они следуют из механизма зашнуровки. Одно важное обстоятельство вытекает из вычислений Коллинза и Теплица [18, 19]: четно-положительный синглет не может «зашнуровать» сам себя; то же самое, по-видимому, можно сказать о каждом четно-положительном мультиплете. Силы притяжения в этих случаях недостаточны независимо от того, проходит ли при $t=0$ траектория ниже $J_t=0$ (первая частица 0^+) или же между $J_t=0$ и $J_t=1$ (первая частица 2^+). В то же время в ряде исследований было установлено, что нечетно-отрицательные траектории обеспечивают достаточно сильное притяжение [7].

Первейшей задачей динамики зашнуровки является трактовка указанных восемнадцати траекторий как самозамыкающихся в предположении, что остальные лежащие ниже траектории менее важны. Эмпирическое объединение траекторий в мультиплеты должно в принципе обеспечить поставленную задачу, но хотелось бы объяснить само существование мультиплетов, а не принимать их с самого начала как независимый закон природы.

Нельзя полностью игнорировать те девять нечетно-положительных траекторий, которые приводят к наличию стабильных частиц с нулевым барионным числом²⁾. Как было сказано выше, эти низколежащие

¹⁾ Упорядочение в рамках больших мультиплетов обсуждалось в работе [17] в связи с SU_3 -симметрией [17].

²⁾ Имеются в виду стабильные π -триплет, два K -дублета и η -синглет; χ -синглет (960 Мэв) нестабилен.

траектории играют относительно небольшую роль как генераторы сил по сравнению с группами уже рассмотренных траекторий, но в то же время комбинации соответствующих им стабильных частиц обуславливают появление нижних порогов в ряде каналов. Так, например, естественно рассматривать ρ -траекторию в первом приближении как следствие динамики $\pi\pi$ -канала [8]. Подобный подход позволил получить качественно правильные выводы, хотя он далеко не удовлетворителен в количественном отношении. Так или иначе представляется необходимым в определенной степени учитывать стабильные мезоны в любом варианте зашнуровки, так что число «ведущих» траекторий должно быть, пожалуй, увеличено до 27.

Имеются теоретические и экспериментальные указания о том, что может существовать «нонет» нечетно-положительных траекторий в примерно той же области, что и «нонет» четно-отрицательных траекторий. Первыми такими физическими частицами должны быть мезоны с $J=1^+$ и массой, составляющей примерно $1,3 B_{\pi\pi}$, так что пороги соответствующих каналов должны быть весьма высокими и генерируемые силы очень слабыми. В первом приближении последними траекториями можно пренебречь.

Мы не касались пока также траекторий с ненулевым барионным числом. Эмпирически замечено, что с увеличением барионного числа высота траектории убывает; иначе говоря, масса частиц повышается при увеличении барионного числа. По этой причине можно надеяться на успех в понимании механизма зашнуровки при работе только с мезонными траекториями. При этом закон сохранения барионного числа является в действительности законом природы, который пока никак не удалось связать, хотя бы качественно, с зашнуровкой.

Несмотря на то что барионы занимают в нашей иерархии более низкое положение, чем мезоны, мы знаем о ряде барионов довольно много ввиду их стабильности, облегчающей эксперименты. При этом специальный теоретический интерес вызывает особое положение πN -канала, в котором две частицы

существенно отличаются по массе (примерно в 7 раз). Ввиду такого соотношения масс конкретные левые сингулярности определенного вида расположены в парциальных πN -амплитудах настолько близко к физической области, что можно сразу получить (приближенные) динамические выводы без решения длинной цепочки уравнений [20]. Исходя из этого, например, Чью и Лоу [21] предсказали, что вычет Δ -полюса должен быть примерно равен половине вычета N -полюса; данный результат был впоследствии подтвержден. Из сказанного вытекает вывод, что аналитическая теория S -матрицы имеет нетривиальное динамическое содержание, но использованная конкретная техника расчетов не должна быть обязательно одинаковой при решении различных проблем.

Другая причина интереса к барионам заключается в том, что выполненные с высокой точностью эксперименты показывают возможность существования высших реджевских частиц, таких, как N ($1688, 5/2^+$), принадлежащих, по-видимому, к той же траектории, что и нуклон. Интересно, что получающийся при этом наклон барионных траекторий имеет примерно тот же порядок величины, что и упоминавшийся выше для мезонных траекторий, найденный из опытов при высоких энергиях. Это обстоятельство можно также считать определенным подтверждением взгляда о том, что параметры сильных взаимодействий динамически определяются в теории S -матрицы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chew G. F., Problems in Fundamental Physics, Yukawa Commemoration, Kyoto, 1965, p. 118; Phys. Rev., 140, B1427 (1965).
2. Khuri N., Phys. Rev., 130, 429 (1963).
3. Singh V., Phys. Rev., 129, 1889 (1963).
4. Squires E. J., Complex Angular Momenta in Particle Physics, New York, 1963.
5. Phillips R., Rarita W., Phys. Rev., 139, B1336 (1965).
6. Chew G. F., Teplitz V. L., Phys. Rev., 136, B1154 (1964).
7. Zachariasen F., Proceedings of the 1965 Hawaii Summer School in Theoretical Physics.
8. Chew G. F., Frautschi S. C., Mandelstam S., Phys. Rev., 126, 1202 (1962).

9. Neville D., Phys. Rev. Lett., **13**, 118 (1964).
10. Masuda N., Progr. Theoret. Phys., **33**, 864 (1965).
11. Померанчук И. Я., ЖЭТФ, **3**, 306 (1956).
12. Померанчук И. Я., Окунь Л. Б., ЖЭТФ, **3**, 307 (1956).
13. Померанчук И. Я., ЖЭТФ, **7**, 499 (1958).
14. Arnold R., Phys. Rev. Lett., **14**, 657 (1965).
15. Chew G. F., Phys. Rev. Lett., **16**, 60 (1966).
16. Chew G. F., Jones C. E., Phys. Rev., **135**, B208 (1964).
17. Gell-Mann M., Ne'eman Y., The Eightfold Way, New York, 1964.
18. Collins P. D. B., Phys. Rev., **139**, B696 (1965).
19. Collins P. D. B., Teplitz V. L., Phys. Rev., **140**, B663 (1965).
20. Chew G. F., Phys. Rev. Lett., **9**, 233 (1962).
21. Chew G. F., Low F. E., Phys. Rev., **101**, 1570 (1956).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

**§ 1. Аристократия или демократия;
симметрия против динамики**

Каково современное положение вещей с точки зрения физики в теории сильных взаимодействий, основанной на S -матрице? Возникшая сейчас ситуация является настолько необычной, не имеющей, пожалуй, какого-либо исторического прецедента, что ее обсуждение заслуживает нескольких страниц в конце данной книги.

Большинство из общих принципов теории S -матрицы получило обширное экспериментальное подтверждение. Если не считать аналитичности второй степени, свойства, перечисленные в гл. 2—7, не вызывают каких-либо возражений у значительной части физиков. Сохраняется скептицизм в отношении понятия о ядерной демократии, которое мы ввели в связи с продолжением по угловому моменту (аналитичность второй степени). Текущая литература пестрит ссылками на «кварки» — ставшие мгновенно модными гипотетические элементарные частицы, соответствующие нереджевским полюсам с $J=1/2$. В то же время большинство физиков согласно с тем, что все *до сих пор действительно наблюдавшиеся* адроны объединяются демократическим образом траекториями Редже. Почему при отсутствии экспериментальных доказательств существования сильно взаимодействующих «аристократов» сохраняется сопротивление полной ядерной демократии? Иначе говоря, почему кварки столь популярны в определенных кругах?

Это можно, по-видимому, объяснить следующими тремя основными причинами. Во-первых, прецедентом электромагнитной теории, которая описывает большую часть наблюдаемых физических явлений.

(Порядок обучения физики в действительности таков, что весь ее предмет становится почти синонимом электромагнетизма.) Аристократическая структура является характерной особенностью электромагнетизма. Независимо от того, говорится ли о фотоне или об электромагнитном поле, всегда имеется *априорный* центральный компонент теории, существование которого принимается как данное, а не вытекает из общих принципов. Некоторые внешние свойства сильных взаимодействий действительно напоминают электромагнетизм, и можно понять, почему многим физикам кажется, что обе теории должны быть в своей основе одинаковыми.

Автор сам тоже разделяет мнение, что единство физических явлений представляет собой наиболее приятную сторону физики. Тем не менее, по-видимому, нельзя исключить вывод о различии в статусе между электромагнетизмом и сильными взаимодействиями. Электромагнетизм обеспечивает возможность осуществления экспериментов, на которые опирается физика. В частности, существование твердого (или условно твердого) вещества, сохраняющего форму, в которой можно различать отдельные компоненты, существенно для определения самого понятия измерения. Трудно себе представить возможность существования твердых тел без следующих двух центральных особенностей электромагнетизма: 1) нулевого (или очень малого) значения массы фотона, благодаря чему возникают далекодействующие силы, и 2) малости постоянной тонкой структуры, что позволяет быть атому много большим ядра по размерам при примерно той же массе¹⁾. Чисто ядерная материя без электромагнетизма не может, по-видимому, приобрести характеристики твердого тела. Если подобная точка зрения оправдана, то значения массы фотона и постоянной тонкой структуры тесно связаны с возможностью измерений и, быть может, даже с самим смыслом макроскопического пространства-времени. Соответственно

¹⁾ При этом предполагается, что малость массы электрона связана с малостью постоянной тонкой структуры.

нельзя ожидать, что значения указанных величин могут вытекать из чисто динамических соображений. Наоборот, параметры сильных взаимодействий, непосредственно не связанные с процессом измерения, сохраняют шанс определения из динамики. Возможно, лучшим ответом на обвинение теории S -матрицы в разрушении единства физики посредством разделения электромагнетизма и ядерных взаимодействий является утверждение, что без такого разделения вообще не было бы физики!

После всего сказанного стоит еще добавить, что, не считая лоренц-инвариантности, почти ни один из рассмотренных общих принципов теории S -матрицы не допускает существования частиц с нулевой массой [1]. В связи с этим представляются беспредметными гипотезы о том, что фотон может оказаться все же плеем и как-то получаться из зашнуровки. Единственный последовательный подход, основывающийся на теории S -матрицы, можно сейчас усмотреть в том, что сначала нужно предположить отсутствие электромагнетизма и, определив в этом предположении матричный элемент «чистого» сильного взаимодействия, лишь затем учесть электромагнитные поправки по теории возмущений. (Вопрос о таких поправках сам по себе заслуживает отдельной монографии и здесь не будет рассматриваться.)

Может ли теория S -матрицы включить, по всей видимости, аристократические лептоны? В этом случае окончательный ответ менее очевиден. Однако, поскольку главными взаимодействиями электронов и мюонов являются электромагнитные взаимодействия и поскольку электрон играет важную роль в процессах измерения, автору кажется все же маловероятным, чтобы лептоны можно было получить естественным образом из теории S -матрицы. Точка зрения, принятая в настоящей книге, состоит в том, что мы рассматриваем только теорию адронов.

Причиной, питающей второй источник сомнений в существование ядерной демократии, является наблюдаемая мультиплетная структура ядерных частиц с

малыми барионными числами, которая была связана с группами симметрии [2]. Одной из таких групп является группа SU_3 с представлением наименьшей размерности, имеющим кратность три. Хотя представления высшей размерности (октеты и декуплеты) действительно наблюдаются в природе, до сих пор не было найдено триплетов, что дало основание приписать «скрытым» триплетам, которые были названы кварками¹⁾, особые свойства. Подобные соображения основываются, однако, лишь на убеждении, что SU_3 -симметрия, несмотря на ее сильное нарушение, носит фундаментальный характер. При этом забывают, что в ядерной физике уже давно известны различные симметрии, связь которых с основными законами является весьма отдаленной. В качестве примера можно указать так называемую оболочечную структуру, согласно которой определенные адроны с большими барионными числами группируются в мультиплеты, обладающие сходными характеристиками. Существование приближенной оболочечной структуры считается «динамически случайным» следствием сложной игры различных факторов, характеризующих ядерные силы. Точно то же вполне можно сказать и о SU_3 ²⁾. При таком подходе отсутствие триплетов не имеет какого-либо особенно глубокого смысла.

Третьей причиной антипатии к динамической и демократической структуре ядерного сообщества без элементарных частиц является то обстоятельство, что она делает жизнь для физиков крайне трудной. Изменений в этом отношении можно ожидать только после нахождения совершенно новой техники анализа рассма-

¹⁾ Крайне парадоксальна логика, согласно которой для объяснения невозможности наблюдения кварков их считают очень тяжелыми — с массой примерно 10 Гэв (или более). Таким образом, эти элементарные частицы должны обладать большей массой, чем составленные из них образования!

²⁾ Если SU_3 , подобно оболочечной структуре, имеет динамическое происхождение, то, по нашему мнению, эта симметрия должна выполняться только для определенных групп полюсов. Для многих полюсов группа SU_3 не должна вообще иметь какого-либо смысла.

триваемых явлений. Модели, подобные описанным в гл. 10 и 11, хотя и могут многому научить, все же, по видимому, не позволяют достаточно глубоко понять все встающие проблемы. В этих моделях искусственно выделяется роль связанных четыреххвосток с внешними линиями, соответствующими частицам с заданным спином, и, кроме того, вообще все рассмотрение основывается главным образом на аналогии с потенциальным рассеянием. (Откуда пришло представление о потенциале? Из электромагнитной теории, всякая аналогия с которой является, как мы выяснили, крайне опасной!)

Одним из направлений развития аналитической теории S -матрицы, которое представляется нам весьма важным, является продолжение связанных частей по спине отдельных (внешних) частиц. Другим важным направлением мы считаем выяснение точек ветвления по угловому моменту. Несмотря на огромную проделанную работу [3, 4], все попытки подвинуться в указанных направлениях не принесли пока какого-либо заметного успеха. Для развития необходимого аппарата может потребоваться не один год, и многим физикам начинает казаться, что эти вопросы не имеют реального значения. Возникает впечатление, что удачная отгадка некоторой новой группы симметрии — с соответствующим набором фундаментальных частиц — позволит быстрее выбраться из дебрей.

Именно это впечатление является главной причиной существующего сейчас большого интереса к кваркам, и если подобные истинно элементарные частицы действительно будут найдены, то привлекательность аналитической теории S -матрицы как основы для описания сильных взаимодействий будет в значительной мере утрачена. Однако накопленные за последние более чем тридцать лет экспериментальные данные свидетельствуют, что существование адронной аристократии весьма маловероятно. Физикам независимо от того, нравится ли им это или нет, придется, по видимому, признать, что теория сильных взаимодействий отвечает ядерной демократии.

§ 2. Эксперимент и теория

Недостаточно осознанной замечательной особенностью теории S -матрицы является то обстоятельство, что она, очевидно, *может* не потребовать добавления каких-либо новых основных положений. Мы не можем пока правильно учесть даже уже выдвинутые исходные положения, имеющие твердое экспериментальное обоснование. Проблема состоит, по-видимому, не в открытии дополнительных основных принципов, а в установлении порядка среди уже признанных. В то же время сравнение с экспериментом продолжает играть в развитии теории решающую роль. В чем же причина такой парадоксальной ситуации? Дело в том, что от природы можно ждать важнейших указаний об истинной структуре теории. Секретное оружие теории S -матрицы состоит в том, что она сохраняет возможность развития даже тогда, когда математика становится слишком сложной для физиков-теоретиков. Поскольку основной объект теории — связанная часть — поддается прямому экспериментальному измерению, можно делать вид, что находишь решения крайне сложных нелинейных систем, слушая подсказки природы.

Хорошим примером может послужить степень асимптотического роста при высоких энергиях и фиксированной передаче импульса. Соответствующие экспериментальные наблюдения значительно стимулировали развитие всей теории S -матрицы, и вытекающие из них следствия еще далеко не исчерпаны. (Особенно интригующим является, в частности, что все полные сечения стремятся при высоких энергиях к постоянным.) Последние эксперименты содержат указания о существовании экспоненциальной зависимости от энергии при фиксированном угле. Если такая зависимость будет установлена в общем случае, то это окажет громадное влияние на теорию.

Важным побочным продуктом теории S -матрицы, заслуживающим специального упоминания, является непрерывное усовершенствование техники анализа экспериментов. Условие аналитичности позволяет, очевидно, коррелировать эксперименты при различных

энергиях и углах, исключая тем самым многие источники неоднозначности. Соответствующее развитие продвинулось уже довольно далеко и имеет широкие перспективы. Действительно, *каждое* продвижение в теоретическом понимании S -матрицы сразу сказывается в экспериментальном анализе, поскольку, как подчеркивалось выше, теоретики имеют дело с непосредственно измеряемой величиной¹⁾. В указанном смысле аналитическая теория S -матрицы играет в физике элементарных частиц объединяющую роль: язык теоретиков и экспериментаторов становится одинаковым.

Теория S -матрицы действительно *настолько* близка к эксперименту, что о ней иногда возникает неверное представление как о «феноменологической теории» без реального содержания. Мне кажется, что читатели, которые ознакомились с основными положениями, изложенными в данной монографии, вряд ли присоединятся к такому заблуждению, и мы упомянули о нем лишь, чтобы еще раз подчеркнуть необычайно тесную связь, существующую в этом случае между теорией и экспериментом.

§ 3. Настоящее и будущее

Теперь настал момент отчетливо разъяснить читателям, что систематическая трактовка теории S -матрицы еще остается делом будущего. Если только на сцене не появится беспрецедентно умный теоретик, то для достижения логически-последовательного метода анализа придется искать дополнительных указаний в эксперименте. Модели, подобные описанным в гл. 10 и 11, будут, несомненно, далее исследоваться и привлекать внимание к наиболее важным пунктам. Хотя установлено, что из этих моделей вытекают важные

¹⁾ Как подчеркнул Гансон [5], это замечание справедливо даже в случае нефизических областей. Если только принять допустимость аналитического продолжения, *каждая* часть пространства комплексного момента становится в принципе доступной посредством экстраполяции данных достаточно точных измерений в физической области.

экспериментальные корреляции, пока не ясно, насколько далеко эти корреляции сохранят силу.

Есть указания, что проблема формулировки отчетливого набора исходных аксиом теории S -матрицы тесно связана с задачей полного выяснения вытекающих из них физических следствий. В частности, строгая формулировка аналитичности первой степени может потребовать существования определенной процедуры систематического расположения сингулярностей, и в том числе полюсов. Вполне возможно, что при этом окажется ненужным введение аналитичности второй степени и единственными согласующимися с условием унитарности и аналитичностью первой степени будут полюсы Редже.

Хотя возможен период теоретического затишья из-за необходимости решения крайне сложных вопросов, автору все же кажется, что раз продолжают эксперименты, теория не остановится. До тех пор пока какие-либо из представляющихся сейчас очевидными принципов не будут отвергнуты или не будет выяснена принципиальная непригодность существующих моделей, нельзя игнорировать уже установленное физическое содержание теории.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chew G. F., *Physics*, **1**, 77 (1964).
2. Gell-Mann M., Ne'eman Y., *The Eightfold Way*, New York, 1964.
3. Mandelstam S., *Nuovo Cimento*, **30**, 1148 (1963).
4. Грибов В. Н., Померанчук И. Я., Тер-Мартirosян К. А., *Phys. Rev.*, **139**, B184 (1965).
5. Gunson J., *Journ. Math. Phys.*, **6**, 827, 845 (1965).

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие переводчика	5
Предисловие автора	9
Литература	10
Глава 1. Аналитичность как фундаментальный принцип физики	11
Литература	16
Глава 2. Общие принципы построения S-матрицы (исключая унитарность)	17
§ 1. Суперпозиция, волновые пакеты и сохранение энергии-импульса	17
§ 2. Лоренцовская инвариантность и закон разложения	18
§ 3. Сопоставление полюсов частицам; факторизация вычетов	20
§ 4. Античастицы и принцип перестановки	23
§ 5. Связная четыреххвостка	27
§ 6. Точки ветвления у нормальных порогов; $i\epsilon$ -правило для физической области	30
§ 7. Физический лист	34
Литература	36
Глава 3. Унитарность и скачки на разрезах	38
§ 1. Условие унитарности для связанных частей	38
§ 2. «Эрмитова аналитичность» и формулы для скачков	43
§ 3. Независимость нормальных порогов	45
Литература	46
Глава 4. Максимальная аналитичность первой степени. Сингулярности Ландау	47
§ 1. Простой пример сингулярности Ландау	47
§ 2. Максимальная аналитичность первой степени	52
Литература	54

Глава 5. Связная четыреххвостка при одном фиксированном инварианте	56
§ 1. Структура физического листа	56
§ 2. Каноническое дисперсионное соотношение	58
§ 3. Дисперсионные соотношения для упругого рассеяния вперед	62
§ 4. Аналитичность по углу при фиксированной энергии	63
Литература	66
Глава 6. Разложение по угловым моментам	67
§ 1. Двухчастичные парциальные амплитуды	67
§ 2. Представление о радиусе взаимодействия; периферические соударения	69
§ 3. Пороговое поведение парциальных амплитуд	72
§ 4. Структура сингулярностей парциальных амплитуд	73
§ 5. Скачки парциальных амплитуд	77
Литература	79
Глава 7. Аналитическое продолжение по угловому моменту и асимптотическое поведение	80
§ 1. Ограничение степени роста	80
§ 2. Граница Фруассара	81
§ 3. Продолжение Фруассара — Грибова по угловому моменту	83
Литература	86
Глава 8. Максимальная аналитичность второй степени; динамика зашнуровки	87
§ 1. Общая формулировка постулата. Полюсы Редже	87
§ 2. Преобразование Зоммерфельда — Ватсона	88
§ 3. Ядерная зашнуровка. Общее обсуждение	92
Литература	95
Глава 9. Модель нерелятивистского потенциального рассеяния	96
§ 1. Степень пригодности модели	96
§ 2. Математическая формулировка модели	97
§ 3. Прогрессия Мандельстама	99
§ 4. N/D -метод	102
Литература	110

Глава 10. Полосная модель связной четыреххвостки . . .	111
Литература	115
Глава 11. Динамические уравнения для полосной модели	116
Литература	123
Глава 12. Приближение полюсами Редже в полосной модели	124
Литература	128
Глава 13. Ядерная зашнуровка (продолжение общего суждения)	129
Литература	138
Глава 14. Заключение	140
§ 1. Аристократия или демократия; симметрия против динамики	140
§ 2. Эксперимент и теория	145
§ 3. Настоящее и будущее	146
Литература	147

Дж. ЧЬЮ

Аналитическая теория S -матрицы

Редактор *Е. И. Майкова*

Художник *Л. Г. Ларский*

Технический редактор *В. П. Сизова*

Сдано в производство 10/X 1967 г. Подписано к печати 21/II 1968 г. Бумага тип. № 2 $84 \times 108^{1/32} = 2,38$ бум. л. 7,98 усл. печ. л. Уч.-изд. л. 6,71. Изд. № 2/4391.

Цена 46 коп. Зак. 908. (Темплан 1968 г. изд-ва «Мир», пор. № 49).

ИЗДАТЕЛЬСТВО „МИР“

Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой
Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР
Измайловский пр., 29

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

**Готовятся к печати
книги по физике**

Гейзенберг В. Введение в единую полевую теорию элементарных частиц.
Перевод с английского.

Один из выдающихся физиков нашего времени лауреат Нобелевской премии В. Гейзенберг прочитал курс лекций в Мюнхенском университете для молодых физиков о современных представлениях физики элементарных частиц. Эти лекции легли в основу настоящей книги. Значительное внимание в ней уделено последним работам автора и его сотрудников по нелинейной спинорной теории элементарных частиц.

Книга рассчитана на широкий круг физиков, интересующихся современными проблемами теории элементарных частиц.

Грин Х. Матричная квантовая механика.
Перевод с английского.

Книга написана на базе лекций, прочитанных автором для студентов 3-го курса Аделаидского университета (Австралия). В ней изложены основы классической квантовой механики в ее матричном варианте. Рассматриваются решения фундаментальных задач квантовой механики.