Ernesto Cesaro

Элементарный учебникъ алгебраическаго анализа и исчисленія безконечно малыхъ

ЭРНЕСТО ЧЕЗАРО
ПРОФЕССОРЪ УНИВЕРСИТЕТА ВЪ НЕАПОЛѢ

ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ УЧЕБНИКЪ АЛГЕБРАИЧЕСКАГО АНАЛИЗА И ИСЧИСЛЕНІЯ БЕЗКОНЕЧНО МАЛЫХЪ

СЪ МНОГОЧИСЛЕННЫМИ ПРИМѢРАМИ ДЛЯ УПРАЖНЕНІЯ

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

Переводъ съ нѣмецкаго съ примѣчаніями и дополненіями профессора

К. А. ПОССЕ

СЪ 71 ЧЕРТЕЖЕМЪ

1924

MATHESIS

ОДЕССА 1914

ОДЕССА

Типографія Акціонернаго Южно-Русскаго Общества Печатнаго Дѣла
(Пушкинская ул., собств. домъ № 18).

Отъ редактора русскаго перевода.

При обработкѣ второй части учебника Чезáро мы измѣнили систему, которой придерживались въ первой части, а именно вмѣсто того, чтобы выдѣлять наши примѣчанія и дополненія въ особые отдѣлы въ концѣ каждой книги, мы помѣщаемъ здѣсь эти примѣчанія и дополненія непосредственно за тѣми мѣстами текста, къ которымъ они относятся, отмѣчая ихъ прямыми скобками [ ].

Кромѣ того, нѣкоторые §§ оригинала, въ которыхъ слишкомъ сжатое изложеніе могло бы повести къ недоразумѣніямъ, изложены нами въ измѣненной и болѣе подробной редакціи. Наиболѣе существенному измѣненію въ этомъ отношеніи подвергся § 714, трактующій объ условіяхъ интегрируемости функцій, а §§ 708[a] и 736[a] вставлены цѣликомъ для поясненія слѣдующихъ за ними статей.

Глава о дифференціальныхъ уравненіяхъ представляетъ собою не болѣе, какъ конспектъ, который можно разсматривать лишь какъ введеніе къ этому важному и обширному отдѣлу анализа; для подробнаго его изученія необходимо обратиться къ одному изъ указанныхъ самимъ авторомъ, въ предисловіи къ первой части его учебника, сочиненій.

Изъ авторскаго дополненія къ его учебнику (Anhang) мы исключили §§ 815—825, въ которыхъ сообщаются нѣкоторыя свѣдѣнія о варіаціонномъ исчисленіи, потому что краткое изложеніе началъ этого исчисленія, данное авторомъ, мы считаемъ малодоступнымъ, а развивать эти начала подробнѣе, что увеличивало бы размѣры и безъ того очень большой книги, мы не считали необходимымъ, въ виду отдаленной связи этого отдѣла съ остальнымъ содержаніемъ книги.

Въ подстрочномъ примѣчаніи къ § 815, авторъ рекомендуетъ для подробнаго ознакомленія съ варіаціоннымъ исчисленіемъ III-й томъ „*Cours d'Analyse*“, C. Jordan'a и статью Hadamard'a въ „Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques“, 1901, стр. 5, содержащую въ себѣ критику началъ варіаціоннаго исчисленія. Современное изложеніе этого исчисленія читатель найдетъ въ книгѣ O. Bolza „*Vorlesungen über die Variationsrechnung*“, 1909.

К. Лоссе.

ОГЛАВЛЕНІЕ

КНИГА ШЕСТАЯ

КНИГА ШЕСТАЯ.

Дифференціальное исчисленіе.

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНІЕ.

Функціи отъ одной независимой перемѣнной.

546. Безконечно малыя и безконечно большія. Безконечно большимъ или просто безконечнымъ, какъ мы уже знаемъ, называютъ перемѣнное число, стремящееся превзойти по абсолютной величинѣ всякую границу, какъ бы велика она ни была, а безконечно малымъ называютъ всякое перемѣнное число, имѣющее предѣломъ нуль [1]). Итакъ, понятіе о безконечно маломъ, равно какъ и понятіе о безконечномъ (см. § 254, b), заключаетъ само въ себѣ понятіе объ **измѣняемости**. Такъ, напримѣръ, объемъ твердаго тѣла, подвергающагося таянью, можно назвать безконечно малымъ, а объемъ неизмѣннаго атома во вселенной таковымъ назвать нельзя. Въ самомъ дѣлѣ, если бы мы попытались сравнивать объемъ атома съ объемомъ вселенной, предполагая послѣдній безконечнымъ, то принуждены были бы принять, что единица мѣры безпредѣльно возрастаетъ, и каждому значенію этой единицы соотвѣтствовало бы нѣкоторое число, служащее мѣрою объема атома и убывающее безпредѣльно. Слѣдовательно, не самый объемъ атома, а число, служащее для его измѣренія, было бы перемѣннымъ и безконечно малымъ. Однако, стать на такую точку зрѣнія мы не

---

[1]) А. Коши (Cauchy), „Алгебраическій анализъ“ (1821). Въ „Bulletin de la classe des Sciences de l'Académie de Belgique“ (1901, p. 549) цѣлыхъ 40 страницъ посвящены опроверженію этого, будто бы „совсѣмъ плохого опредѣленія“. На самомъ же дѣлѣ аргументы автора этой статьи могутъ служить, и то только отчасти, указаніемъ на недостаточность нѣкоторыхъ общепринятыхъ опредѣленій (вѣроятностей и т. д.), восполненіе которыхъ именно и требуетъ устраненія всякого иного толкованія термина „безконечно малое“.

можемъ, потому что во всякомъ вычисленіи всѣ входящія въ него числа должны быть отнесены къ одной и той же единицѣ мѣры. Какъ бы велика ни была эта единица, объемъ атома всегда выразится опредѣленнымъ числомъ, можетъ быть, весьма малымъ, но постояннымъ. Для яснаго пониманія исчисленія безконечно малыхъ никогда не слѣдуетъ упускать изъ вида, что безконечно малыя и безконечно большія числа — величины по самому существу своему перемѣнныя, и что ихъ надо, говоря словами Ньютона, разсматривать, какъ „quantitates magnitudine determinatas, sed cogita semper diminuendas sine limite“, т. е. какъ безпредѣльно убывающія, разумѣется по абсолютной величинѣ.

547. Двѣ безконечно малыя величины называются величинами одного и того же порядка, если отношеніе ихъ стремится къ конечному предѣлу, отличному отъ нуля. Если же отношеніе одной безконечно малой β къ другой α стремится къ нулю (такъ что β есть произведеніе α на величину также безконечно малую), то говорятъ, что β безконечно малая порядка высшаго, чѣмъ α. Въ противоположномъ случаѣ, когда отношеніе β къ α безпредѣльно возрастаетъ по абсолютной величинѣ, β будетъ порядка низшаго, чѣмъ α. Не всегда, однако, возможно, на основаніи этихъ опредѣленій, рѣшить, будутъ ли данныя двѣ безконечно малыя одного и того же порядка, или нѣтъ, потому что отношеніе ихъ не всегда стремится къ опредѣленному предѣлу. Такъ, напримѣръ, число $\beta = \alpha \sin \frac{1}{\alpha}$, очевидно, безконечно мало одновременно съ α, но нельзя сказать, стремится ли β къ нулю столь же быстро, какъ α, или быстрѣе *). Тѣмъ не менѣе, если отношеніе β къ α постоянно колеблется, по абсолютной величинѣ, между двумя положительными границами, то принято считать β и α безконечно малыми одного и того же порядка. Когда разсматриваютъ одновременно нѣсколько безконечно малыхъ, то обыкновенно одну изъ нихъ, скажемъ α, выбранную по произволу, называютъ главною безконечно малою, и разсматриваютъ отношенія другихъ къ α и различнымъ ея степенямъ. При этомъ называютъ безконечно малыми порядка n $(n > 0)$ тѣ изъ нихъ, порядокъ которыхъ равенъ порядку α^n **). Такъ, напримѣръ, $\log(1+\alpha)$, $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ — безконечно малыя перваго порядка, если α главная безконечно малая. Далѣе, $1-\cos\alpha$ — второго, $\alpha-\sin\alpha$ — третьяго, $\alpha \sin(\sin\alpha) - \sin^2\alpha$ — шестого, $\operatorname{tg}(\sin\alpha) - \sin(\operatorname{tg}\alpha)$ — седьмого порядка и т. д. [1]). Впрочемъ, надо замѣтить, что не всегда воз-

*) Иными словами, будетъ ли β одного порядка съ α, или высшаго, такъ какъ отношеніе β/α ни къ какому предѣлу не стремится.

**) Иными словами, β будетъ порядка n, если $\lim \frac{\beta}{\alpha_n}$ существуетъ и не равенъ 0.

[1]) См. упражненія въ „Mathesis“ 1898, стр. 31 и 1902, стр. 145.

можно опредѣлить порядокъ данной безконечно малой. Такъ, напримѣръ, при α безконечно маломъ, $e^{-\frac{1}{\alpha^2}}$ и $\frac{1}{\log\alpha}$ также безконечно малыя, но въ то время, какъ отношеніе первой къ α^n (§ 312, а) стремится къ нулю, каково бы ни было число n, отношеніе второй къ α^n возрастаетъ безпредѣльно по абсолютной величинѣ, и нельзя сказать, какъ великъ порядокъ первой и какъ малъ порядокъ второй. Безконечно малыя величины

$$\ldots \frac{1}{\log\log\frac{1}{\alpha^2}}, \frac{1}{\log\frac{1}{\alpha^2}}, \ldots, \sqrt{\alpha}, \sin\alpha,$$

$$1-\cos\alpha, \alpha-\sin\alpha, \ldots, e^{-\frac{1}{\alpha^2}}, e^{-e^{\frac{1}{\alpha^2}}}, \ldots$$

расположены въ такомъ порядкѣ, что каждая изъ нихъ безконечно мала относительно всѣхъ предыдущихъ. Поэтому, считая справа налѣво, находимъ, что порядокъ безконечно малыхъ, начиная съ произвольно большого значенія, убываетъ и стремится къ нулю. Аналогично этому можно классифицировать безконечно большія величины *).

548. Замѣтимъ здѣсь же, что несправедливо было бы считать, что всякая безконечно малая или безконечно большая величина получаетъ опредѣленное мѣсто въ подобной скалѣ сравненія. Такъ, напримѣръ, нельзя сказать, чему равно число n, опредѣляющее порядокъ величины $\beta=\frac{\alpha}{\log\alpha}$. Въ самомъ дѣлѣ, съ одной стороны, ясно, что n должно было бы быть больше 1 (потому что $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{1}{\log\alpha}$ стремится къ нулю вмѣстѣ съ α), а съ другой стороны, невозможно, чтобы n было больше 1, такъ какъ при любомъ $n>1$ отношеніе $\frac{\beta}{\alpha^n}=\frac{1}{\alpha^{n-1}\log\alpha}$ возрастаетъ безпредѣльно съ приближеніемъ α къ 0 **). Въ извѣстномъ смыслѣ (§ 169) можно, пожалуй, сказать, что въ скáлѣ сравненія, состоящей изъ послѣдовательныхъ степеней α, число $\frac{\alpha}{\log\alpha}$ лежитъ справа отъ α, и что порядокъ его равенъ $1+0$. Точно такъ же тщетно было бы искать мѣсто, которое занимаетъ безконечно малая β, связанная съ α, соотношеніемъ $\beta=\alpha^2\log\frac{\alpha}{\beta}$. Дѣйствительно, положивъ $\alpha=\beta t$, найдемъ $\beta=\frac{1}{t^2\log t}$, $\alpha=\frac{1}{t\log t}$, откуда видно, что t должно возрастать безпредѣльно, чтобы α и β

*) Разсмотрѣніе ихъ, однако, всегда можно замѣнить разсмотрѣніемъ безконечно малыхъ, замѣтивъ, что при α безконечно большомъ, $\frac{1}{\alpha}$ безконечно малое.

**) Потому что при $\mu>0$ $\lim\limits_{\alpha=0} \alpha^\mu\log\alpha=0$.

стремились къ нулю. Замѣчая теперь, что $\frac{\beta}{\alpha^n} = t^{n-2}(\log t)^{n-1}$, видимъ, что при $n \geqq 2$ это отношеніе безпредѣльно возрастаетъ, а при $n < 2$ стремится къ нулю. Поэтому β лежитъ, такъ сказать, слѣва отъ α^2, т. е. стремится къ нулю не столь быстро, какъ α^2, но быстрѣе, чѣмъ всякое α^n при $n < 2$; если угодно, можно сказать, что порядокъ β равенъ $2-0$. Обобщая эти замѣчанія, положимъ, что существуютъ вообще два числа n' и n'', для которыхъ

$$\lim \frac{\beta}{\alpha^{n'}} = 0, \quad \lim \frac{\beta}{\alpha^{n''}} = \pm \infty \cdot$$

Въ такомъ случаѣ, очевидно, можно замѣнить въ этихъ равенствахъ всякое число n' меньшимъ, а всякое n'' — большимъ числомъ. Ясно поэтому, что числа n' образуютъ ансамбль, имѣющій верхнюю границу μ (§ 172), а числа n'' — ансамбль, имѣющій нижнюю границу λ, при чемъ, очевидно, $\lambda \geqq \mu$. Если случится, что значенія λ и μ совпадаютъ, и общая ихъ величина равна n, то можно сказать, что порядокъ β равенъ n, когда n не принадлежитъ ни тому, ни другому ансамблю, хотя и не существуетъ предѣла для $\frac{\beta}{\alpha^n}$. Но можетъ случиться, что n наибольшее изъ чиселъ n' (т. е. принадлежитъ къ первому ансамблю) или наименьшее изъ чиселъ n'' (т. е. принадлежитъ ко второму ансамблю); тогда навѣрно порядокъ числа β не равенъ n. Его можно было бы изобразить въ первомъ случаѣ черезъ $n+0$, во второмъ черезъ $n-0$. Наконецъ, можетъ случиться, что λ не $=\mu$, и тогда исчезаетъ всякое средство измѣрить порядокъ числа β какимъ нибудь числомъ. Достаточно привести примѣръ безконечно малой

$$\beta = \alpha^{1+\frac{1}{\alpha} - \left[\frac{1}{\alpha}\right]},$$

для которой

$$\lim \frac{\beta}{\alpha^n} = \left| \begin{array}{ll} 0 & \text{въ случаѣ } n < 1, \\ \pm\infty & \text{въ случаѣ } n > 2. \end{array} \right.$$

Замѣчаемъ, что $\frac{\beta}{\alpha}$ не стремится къ нулю, потому что принимаетъ безчисленное множество разъ значеніе 1, когда α проходитъ рядъ значеній $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$. Отсюда слѣдуетъ, что $\mu = 1$. Точно также $\frac{\beta}{\alpha^2}$ не стремится къ $\pm\infty$, потому что это отношеніе остается $< e$, когда α проходитъ рядъ значеній

$$\frac{1}{2-\frac{1}{\log 2}}, \quad \frac{1}{3-\frac{1}{\log 3}}, \quad \frac{1}{4-\frac{1}{\log 4}}, \quad \frac{1}{5-\frac{1}{\log 5}}, \ldots.$$

Слѣдовательно, $\lambda = 2$. Для всякаго значенія n между 1 и 2, отношеніе $\frac{\beta}{\alpha^n}$ можетъ принимать сколь угодно малыя и сколь угодно большія значенія, и невозможно указать числа, служащаго мѣрою порядка β.

549. Основная теорема. Когда говорятъ, что двѣ безконечно малыя отличаются одна отъ другой на безконечно малую высшаго порядка, или, что отношеніе ихъ стремится къ предѣлу, равному единицѣ, то этимъ утверждаютъ два положенія, въ сущности равносильныя, потому что каждое изъ равенствъ

$$\lim \frac{\beta - \alpha}{\alpha} = 0, \ \lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$$

есть слѣдствіе другого*). Замѣтивъ сказанное выше, легко доказать слѣдующую, основную для дифференціальнаго исчисленія, теорему: **Предѣлъ отношенія двухъ безконечно малыхъ не измѣнится, если эти безконечно малыя замѣнить другими, имъ эквивалентными.** Дѣйствительно, если нужно вычислить предѣлъ $\frac{\beta}{\alpha}$, и извѣстно, что β' отъ β, α' отъ α отличаются на безконечно малыя высшаго порядка, то достаточно вычислить предѣлъ $\frac{\beta'}{\alpha'}$, и замѣтить, что

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta}{\beta'} \cdot \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \frac{\alpha'}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot$$

550. Положимъ теперь, что дано нѣкоторое уравненіе между двумя безконечно малыми $\alpha = \beta$, которымъ нужно воспользоваться съ слѣдующей цѣлью: раздѣливъ обѣ части равенства на прилично-выбранную безконечно малую γ и переходя къ предѣламъ, вывести равенство $a = b$ между двумя постоянными величинами. Обыкновенно уравненіе $\alpha = \beta$ имѣетъ сложный видъ, неудобный или даже недоступный для примѣненія обыкновенныхъ правилъ вычисленія предѣловъ; въ такомъ случаѣ доказанная теорема и оказывается полезною потому, что позволяетъ въ обѣихъ частяхъ равенства отбросить слагаемыя, безконечно малыя высшаго порядка относительно тѣхъ, которыя останутся. Такимъ образомъ получается новое уравненіе $\alpha' = \beta'$, это уравненіе будетъ, вообще говоря, не точное, а, какъ говорятъ, вѣрное до безконечно малыхъ высшаго порядка. Это обстоятельство, однако, никакого вліянія не оказываетъ на тотъ результатъ, который желаютъ вывести изъ даннаго уравненія. Дѣйствительно, раздѣливъ обѣ части новаго уравненія $\alpha' = \beta'$ на γ (или даже на другую безконечно малую γ', эквивалентную γ) и переходя къ предѣ-

---

*) Безконечно малыя α и β, удовлетворяющія такимъ равенствамъ, называютъ эквивалентными.

ламъ, мы все таки получимъ искомое равенство $a = b$, потому что

$$\lim \frac{\alpha'}{\gamma'} = \lim \frac{\alpha}{\gamma}, \text{ и } \lim \frac{\beta'}{\gamma'} = \lim \frac{\beta}{\gamma}.$$

Замѣтимъ, однако, что не въ этомъ состоитъ сущность дифференціальнаго исчисленія. Дифференціальное исчисленіе пользуется систематическимъ примѣненіемъ нѣкотораго символа, съ помощью котораго достигается то, что можно a priori быть увѣреннымъ, что полученное указаннымъ путемъ равенство $\alpha' = \beta'$ будетъ также точнымъ, а не только вѣрнымъ до безконечно малыхъ высшаго порядка. Такимъ образомъ оказывается, что при замѣнѣ чиселъ α и β числами α' и β' мы отбрасываемъ въ обѣихъ частяхъ равенства дѣйствительно равныя между собою безконечномалыя высшаго порядка, сами того не замѣчая, и прямо получаемъ безконечно малыя $\alpha' = a\gamma'$, $\beta' = b\gamma'$. А тогда переходъ къ предѣламъ становится уже не нужнымъ, потому что равенство $\alpha' = \beta'$ непосредственно даетъ и $a = b$. Вычисленіе предѣловъ отходитъ, слѣдовательно, на задній планъ, чтобы уступить мѣсто **дифференціальному исчисленію**, которое, конечно, тѣмъ не менѣе, основывается на понятіи о предѣлѣ *).

551. Разсматривая дифференціальное исчисленіе съ намѣченной точки зрѣнія, можемъ сказать, что оно обязано своимъ происхожденіемъ генію Лейбница. До настоящаго времени эта наука сохранила ту самую форму, въ которой она была изобрѣтена Лейбницемъ; сохранились тѣ же названія и тѣ же символы, изобрѣтеніе которыхъ надо приписать не столько удачно сдѣланному выбору, сколько остроумію изобрѣтателя. Тщательность, съ которою Лейбницъ дѣлалъ выборъ тѣхъ или иныхъ обозначеній, видна изъ того факта [1]), что, сравнивая свою методу съ методою Ньютона (одновременно съ Лейбницемъ открывшаго дифференціальное исчисленіе) и защищая ея преимущества передъ послѣднею, онъ говоритъ, что „способъ обозначеній есть важная, бросающаяся въ глаза, часть искусства изобрѣтать, и намъ кажется, что наши обозначенія лучше освѣщаютъ сущность дѣла“ (donnent plus d'ouverture). (Oeuvres math. t. V, p. 307). Въ недавнее время, важное значеніе номенклатуры и обозначеній снова было выставлено на видъ Эрнестомъ Махомъ (Mach), въ его „Популярно-научныхъ лекціяхъ“, гдѣ онъ говоритъ, что „способъ выраженія и цѣлесообразная система символовъ и техническихъ терминовъ представляютъ собою не только необходимое пособіе для совмѣстной работы ученыхъ и для передачи добытыхъ результатовъ изъ поколѣнія въ поколѣніе, но въ то же время они представляютъ собою прежде всего единственное средство избавить человѣческую память и человѣческій умъ отъ всякаго излишняго

*) Намѣченная здѣсь въ общихъ чертахъ мысль подробнѣе развивается далѣе въ § 556.

[1]) См. P. Mansion „Résumé du Cours d'Analyse“ (стр. 209).

бремени и труда и такимъ образомъ сберечь ихъ для болѣе важныхъ и болѣе существенныхъ актовъ ихъ дѣятельности. Всякій, кто занимался математическими работами, испытывалъ такое чувство, какъ будто формулы и символы берутъ отчасти на себя трудъ работать за него, или, употребляя слова знаменитаго Эйлера, что „его карандашъ иногда бываетъ остроумнѣе его головы". „Какъ бы страннымъ это ни казалось", говоритъ Махъ, „но сила математическихъ наукъ основана главнымъ образомъ на томъ, что имъ посчастливилось устранить всякую лишнюю работу ума и довести экономію умственныхъ силъ до крайнихъ предѣловъ. Къ этому идеалу стремятся и естественныя науки, особенно наиболѣе развитыя вѣтви ихъ" [1]).

552. Первый дифференціалъ. Изъ опредѣленія (§ 281) производной нѣкоторой функціи y отъ x слѣдуетъ, что $\delta y = y'\delta x + \varrho\delta x$ для всякаго даннаго значенія x, при чемъ ϱ стремится къ нулю, когда, при фиксированномъ значеніи x, будемъ приближать δx къ нулю. Такъ какъ разность между δy и $y'\delta x$ безконечно малая порядка высшаго, чѣмъ δx, то при разысканіи предѣловъ можно замѣнить δy черезъ $y'\delta x$. Мы вскорѣ убѣдимся въ большой пользѣ такой замѣны. Величину $y'\delta x$, въ томъ предположеніи, что x независимая перемѣнная, мы будетъ обозначать черезъ dy и называть **дифференціаломъ** функціи y. Итакъ, дифференціаломъ функціи называется произведеніе производной функціи на безконечно малое приращеніе, произвольно приписанное независимой перемѣнной *). Изъ этого опредѣленія тотчасъ вытекаютъ нижеслѣдующія слѣдствія:

a) Дифференціалъ независимаго перемѣннаго x есть не что иное, какъ произвольное приращеніе, которое приписываютъ каждому значенію x и разсматриваютъ, какъ перемѣнное число, стремящееся къ нулю. Въ самомъ дѣлѣ, при $y = x$ имѣемъ $y' = 1$, и, по опредѣленію дифференціала ($dy = y'\delta x$), получимъ $dx = \delta x$.

b) Равенство, опредѣляющее дифференціалъ, обращается теперь въ $dy = y'\,dx$, откуда получается

$$y' = \frac{dy}{dx}\,. \tag{1}$$

Это новое обозначеніе производной и употребляется въ дифференціальномъ исчисленіи. Производныя представляются теперь уже какъ отношенія, а не какъ предѣлы отношеній двухъ безконечно малыхъ.

c) Общнѣе, отношеніе дифференціаловъ двухъ функцій изображаетъ производную одной функціи, взятую по

---

[1]) Изъ рецензіи G. Vailati (Rivista sperimentale di Freniatria, 1896).

*) Собственно говоря, приращеніе δx независимой перемѣнной есть совершенно произвольное число, и лишь въ виду приложеній его обыкновенно разсматриваютъ, какъ безконечно малое.

другой. Въ самомъ дѣлѣ (§ 284), если $y=f(u)$, гдѣ u функція отъ независимой перемѣнной x, то

$$dy = y'dx = f'(u)\,u'dx = f'(u)\,du, \quad f'(u) = \frac{dy}{du}.$$

553. Геометрическая интерпретація. На кривой линіи, изображаемой уравненіемъ $y=f(x)$, въ смежности съ данною неподвижною точкою M, имѣющею абсциссу x, разсмотримъ другую точку M', абсцисса которой пусть будетъ $x+\delta x$. Предположить δx безконечно малымъ значитъ (§ 546) представитъ себѣ, что точка M' движется по кривой и стремится совпасть съ M. Пусть H и Q будутъ точки пересѣченія ординаты точки M' съ двумя прямыми, проходящими черезъ M, при чемъ первая изъ этихъ прямыхъ параллельна оси x-овъ, а вторая — касательная къ кривой. Если x—независимая перемѣнная, то, очевидно, будемъ имѣть (§ 293).

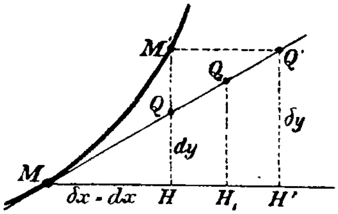

Рис. 27.

$$MH = dx = \delta x, \quad HQ = dy, \quad HM' = \delta y.$$

Слѣдовательно, подставить dy вмѣсто δy, значитъ пренебречь отрѣзкомъ QM' или замѣнить точку M' точкою Q для всѣхъ положеній точки M' въ смежности съ точкою M, иначе говоря, замѣнить кривую ея касательною въ смежности съ каждою данною ея точкою. Впрочемъ, какова бы ни была независимая перемѣнная, точка $(x+dx,\ y+dy)$ всегда принадлежитъ касательной, тогда какъ точка $(x+\delta x,\ y+\delta y)$ всегда принадлежитъ кривой. Но при данномъ положеніи второй точки M' первая $(x+dx, y+dy)$ можетъ быть въ Q, въ Q', или въ иномъ положеніи на касательной, смотря по тому, будетъ ли независимая перемѣнная x, y или какая нибудь другая *).

554. Правила дифференцированія. Чтобы дифференцировать данную функцію, т. е. вычислить дифференціалъ какой-нибудь функціи отъ x, достаточно, на основаніи опредѣленія дифференціала, вычислить производную и умножить ее на dx. Такимъ образомъ получаемъ

$$d(x^n) = nx^{n-1}dx, \quad de^x = e^x dx, \quad d\sin x = \cos x\,dx, \quad d\cos x = -\sin x\,dx,$$

$$d\log x = \frac{dx}{x}, \quad d\,\mathrm{tg}\,x = \frac{dx}{\cos^2 x}, \quad d\,\mathrm{arc\,tg}\,x = \frac{dx}{1+x^2},$$

*) Т. е., смотря по тому, будетъ ли $\delta x = dx$, или $\delta y = dy$, или ни то, ни другое.

$$d \arcsin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \text{ и т. д.,}$$

хотя бы x и не было независимою перемѣнною (§ 552, с). Извѣстныя правила разысканія производныхъ также легко переводятся въ соотвѣтствующія правила дифференцированія. Такъ, напримѣръ, чтобы дифференцировать сумму двухъ или нѣсколькихъ функцій, надо сложить дифференціалы всѣхъ слагаемыхъ. Дифференціалъ произведенія двухъ функцій получится, когда умножимъ каждую функцію на дифференціалъ другой и сложимъ полученныя произведенія, и т. д. Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ

$$d(u+v) = (u+v)'\,dx = (u'+v')\,dx = u'dx + v'dx = du + dv,$$

$$du\,v = (uv)'dx = uv'dx + vu'dx = u\,dv + v\,du,$$

$$d\frac{u}{v} = \left(\frac{u}{v}\right)' dx = \frac{vu' - uv'}{v^2}dx = \frac{vu'dx - uv'dx}{v^2} = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$$

и т. д.*).

555. Послѣдовательные дифференціалы. Прежде, чѣмъ идти далѣе, намъ надо нѣсколько ближе заняться разсмотрѣніемъ смысла, который имѣетъ дифференціалъ независимой перемѣнной. При данномъ x дифференціалъ dx есть безконечно малая величина, которую мы предварительно предположимъ зависящею отъ нѣкоторой другой безконечно малой α, выбранной за главную. Когда мы переходимъ отъ одного значенія x къ другому, то нѣтъ никакого основанія считать, что произвольный законъ, выражающій зависимость dx отъ α, остается безъ измѣненія. Поэтому dx можно разсматривать какъ функцію не только отъ α, но и отъ x:

(2) $$dx = \varphi(x, \alpha)$$

Если представимъ себѣ, что ось x-овъ можетъ деформироваться, при чемъ всякая точка x переходитъ въ $x + dx$, то уравненія (2) можно разсматривать, какъ выраженіе закона, по которому точки деформированной оси возвращаются въ первоначальныя положенія съ приближеніемъ α къ нулю**). Произвольная функція φ подчинена лишь тому условію, чтобы она стремилась къ нулю вмѣстѣ съ α и имѣла послѣдовательныя частныя производныя (§ 368) по перемѣнной x. При этихъ условіяхъ dx, какъ функція отъ x, также

---

*) Однимъ словомъ, правила дифференцированія получаются изъ правилъ разысканія производныхъ, если въ формулировкѣ послѣднихъ замѣнимъ слово „производная", словомъ „дифференціалъ". На этомъ основаніи на русскомъ языкѣ терминъ „дифференцированіе" употребляется какъ въ смыслѣ разысканія производной, такъ и въ смыслѣ разысканія дифференціала.

**) Деформацію оси x-овъ надо себѣ представить состоящей въ томъ, что сама ось остается неподвижною, а отдѣльныя ея точки по ней перемѣщаются (in sich deformierbar).

имѣетъ дифференціалъ, который называется вторымъ дифференціаломъ отъ x и обозначается знакомъ d^2x:

(3) $$d^2x = ddx = \varphi_x'(x, a)\,dx = \varphi(x, a) \cdot \varphi_x'(x, a).$$

Теперь мы установимъ одно соглашеніе, имѣющее первостепенное значеніе для всего послѣдующаго. Первымъ дѣломъ мы примемъ, что оба свойства, которыми пользуется dx, а именно стремленіе къ нулю вмѣстѣ съ a и зависимость отъ x, являются отдѣленными одно отъ другого въ выраженіи (2). Для этого достаточно положить:

(4) $$dx = a\chi(x),$$

при чемъ на минуту мы еще будемъ считать $\chi(x)$ за произвольную функцію отъ x. Такимъ образомъ, dx является въ видѣ произведенія одной безконечно малой, независящей отъ x, на функцію отъ x; слѣдовательно, dx будетъ безконечно малою перваго порядка, и ее отнынѣ мы и примемъ за главную. Дифференцируя далѣе, мы найдемъ одинъ за другомъ третій, четвертый и т. д. дифференціалы:

$$d^3x = a^3(\chi\chi'^2 + \chi\chi''),\quad d^4x = a^4(\chi\chi'^3 + 4\chi^2\chi'\chi'' + \chi^3\chi'''),\ \cdots.$$

Дифференціалъ порядка n, т. е. результатъ n послѣдовательныхъ дифференцированій, обозначается знакомъ d^nx и будетъ безконечно малою n-го порядка. Какъ видимъ, результаты послѣдовательныхъ дифференцированій быстро усложняются, и многія преимущества дифференціальнаго исчисленія были бы потеряны, если бы мы рѣшили оставить функцію $\chi(x)$ произвольною. Гораздо цѣлесообразнѣе будетъ положить $\chi(x) = 1$, такъ какъ тогда будемъ имѣть:

(5) $$d^2x = 0,\quad d^3x = 0,\quad d^4x = 0,\ \cdots$$

и всѣ вычисленія, какъ скоро окажется, значительно упростятся. Въ этомъ и состоитъ основное соглашеніе. Его можно формулировать такъ: **Первый дифференціалъ независимой перемѣнной предполагается независящимъ отъ этой перемѣнной.** Теперь легко вычислить послѣдовательные дифференціалы любой функціи и показать, что n-тый дифференціалъ есть безконечно малая n-го порядка:

$$d^2y = ddy = d(y'dx) = dy' \cdot dx = y''dx \cdot dx = y''dx^2,$$

$$d^3y = dd^2y = d(y''dx^2) = dy'' \cdot dx^2 = y'''dx \cdot dx^2 = y'''dx^3$$

и т. д. Вообще $d^ny = y^{(n)}dx^n$, если условимся писать dx^n вмѣсто $(dx)^n$ *). Такимъ образомъ, приходимъ къ соотношенію

(6) $$y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n},$$

*) Чего не надо смѣшивать съ $d(x^n) = nx^{n-1}dx$.

включающему въ себѣ и равенство (1) (при $n=1$). Итакъ: производная порядка n нѣкоторой функціи, взятая по **независимой** перемѣнной, равна отношенію n-аго дифференціала функціи къ n-ой степени дифференціала независимой перемѣнной. При этомъ (§ 552, c), при $n=1$, можно опустить оговорку, что перемѣнная независима, а при $n>1$ этого сдѣлать нельзя, потому что при послѣдовательныхъ дифференцированіяхъ dy мы пользовались формулами (5), а онѣ не будутъ имѣть мѣста, если x не независимая перемѣнная.

556. Теперь мы въ состояніи понять то, на что въ § 550 былъ данъ только намекъ. Равенство между безконечно малыми $\alpha'=\beta'$ (полученное черезъ устраненіе безконечно малыхъ высшаго порядка изъ равенства $\alpha=\beta$) — будетъ навѣрно точнымъ, если въ него не входятъ никакія другія безконечно малыя, кромѣ такихъ, которыя получены при помощи дифференцированій, предполагая, что это уравненіе (приведенное къ цѣлому виду) сдѣлано однороднымъ, такъ что въ немъ остались только члены наинизшаго порядка n. Въ самомъ дѣлѣ, чтобы получить точное уравненіе надо было бы раздѣлить обѣ части на dx^n и перейти къ предѣлу. Но этотъ переходъ къ предѣлу сдѣлался уже излишнимъ, потому что отношенія между степенями дифференціаловъ, когда эти степени будутъ безконечно малыми одного и того же порядка, равны своимъ предѣламъ, такъ что искомое точное равенство какъ разъ и будетъ $\alpha'/dx^n=\beta'/dx^n$ или $\alpha'=\beta'$. Въ этомъ и заключается весь секретъ дифференціальнаго исчисленія. Кромѣ того, однородность окончательныхъ соотношеній между дифференціалами служитъ средствомъ контроля въ практикѣ вычисленій. Теперь понятно, насколько важно разысканіе дифференціальныхъ безконечно малыхъ, получаемыхъ отъ пренебреженія безконечно малыми частями высшаго порядка въ тѣхъ безконечно малыхъ, которыя являются при вычисленіяхъ. Для каждаго α существуетъ безчисленное множество безконечно малыхъ, отличающихся отъ α на безконечно малыя высшаго порядка, но между ними находится только **одна**, равная дифференціалу нѣкоторой функціи u. Въ самомъ дѣлѣ, если для другой функціи v, разность $\alpha-dv$, какъ и $\alpha-du$, была бы безконечно малою высшаго порядка, то было бы достаточно отбросить эти безконечно малыя въ равенствѣ

$$du=dv+(\alpha-dv)-(\alpha-du),$$

чтобы придти къ равенству $du=dv$, навѣрное точному. Слѣдовательно, дифференціальныя безконечно малыя, т. е. du и dv, совпадаютъ по величинѣ, функція v существенно не отличается отъ u, потому что $d(u-v)=0$, откуда $u-v=$ постоянной. Въ практическомъ вычисленіи всегда стараются представить α въ формѣ приращенія нѣкоторой функціи u (§ 552) и тогда единственная дифференціальная безконечно малая, которую можно подставить вмѣсто α

и будетъ именно du. Такимъ образомъ, съ помощью символа операціи d, дифференціальное исчисленіе достигаетъ полной точности, такъ какъ оно единственнымъ образомъ замѣняетъ встрѣчаемыя при вычисленіи безконечно малыя другими, получаемыми при помощи дифференцированія опредѣленныхъ функцій. Эти новыя безконечно малыя связаны тѣми же соотношеніями, какія существуютъ между тѣми безконечно малыми, которыя ими замѣняются.

[**Примѣчаніе**. Разсужденія § 556 могутъ показаться не вполнѣ ясными для лицъ, впервые знакомящихся съ дифференціальнымъ исчисленіемъ, но съ примѣненіемъ этихъ разсужденій мы встрѣтимся лишь въ геометрическихъ приложеніяхъ дифференціальнаго исчисленія, гдѣ они и представятся въ болѣе ясномъ свѣтѣ. Здѣсь же мы ограничимся нижеслѣдующими замѣчаніями. Всякое однородное, въ указанномъ выше смыслѣ, соотношеніе между дифференціалами нѣкоторыхъ функцій y, z, ... отъ одной независимой перемѣнной x, въ которое можетъ входить и dx, въ сущности представляетъ соотношеніе между производными этихъ функцій, взятыми по x, только переписанное съ помощью новыхъ, дифференціальныхъ обозначеній этихъ производныхъ, указанныхъ формулою (6). Чтобы перейти отъ соотношенія между дифференціалами къ соотношенію между производными, стоитъ только раздѣлить всѣ члены перваго соотношенія на одну и ту же надлежащую степень dx. Обратно, чтобы отъ соотношенія между производными перейти къ соотношенію между дифференціалами, стоитъ только написать выраженія производныхъ по формулѣ (6) и затѣмъ помножить всѣ члены на одну и ту же степень dx. Напримѣръ, соотношеніе

$$dz^2 = dx^2 + dy^2$$

равносильно равенству

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

или

$$z'^2 = 1 + y'^2;$$

соотношеніе

$$dy\,d^2z - dz\,d^2y = dx^3$$

равносильно равенству

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2z}{dx^2} - \frac{dz}{dx} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = 1$$

или

$$y'z'' - z'y'' = 1.$$

При такомъ разсмотрѣніи соотношеній между дифференціалами, вопросъ о томъ, будутъ ли эти соотношенія точными, или только вѣрными до безконечно малыхъ высшаго порядка, отпадаетъ самъ собою. Соотношенія эти, будучи равносильными соотношеніямъ между производными, т. е. соотношеніямъ по самому существу своему точнымъ, какъ не заключающимъ въ себѣ никакихъ безконечно малыхъ, будутъ, конечно, и сами точными. Вмѣстѣ съ тѣмъ легко видѣть, что неоднородныя соотношенія между дифференціалами не имѣютъ смысла. Въ самомъ дѣлѣ, если бы такое соотношеніе имѣло мѣсто, то перенеся въ одну часть равенства члены наинизшаго порядка n, а въ другую всѣ остальные, и раздѣливъ обѣ части на dx^n, получили бы невозможное равенство между нѣкоторымъ опредѣленнымъ числомъ, не равнымъ нулю, съ одной стороны, и перемѣннымъ безконечно малымъ числомъ — съ другой].

557. Измѣненіе независимой перемѣнной. Формула (6), при $n > 1$, выведена въ томъ предположеніи, что перемѣнная x независима. Поэтому, если желаютъ ввести новую независимую перемѣнную (что часто бываетъ нужно), то прежде всего необходимо вернуть этой формулѣ ея общность и потомъ только приступить къ замѣнѣ прежней перемѣнной новой. Съ этой цѣлью достаточно повторить послѣдовательныя дифференцированія выраженія dy, выполненныя въ § 555, но не пользоваться при этомъ формулами (5). Такимъ путемъ найдемъ

$$d^2y = d(y'dx) = dy'dx + y'ddx = y''dx^2 + y'd^2x,$$

далѣе

$$d^3y = y'''dx^3 + 3y''dx\,d^2x + y'd^3x,$$

$$d^4y = y^{IV}dx^4 + 6y'''dx^2d^2x + 3y''d^2x^2 + 4y''dx\,d^3x + y'd^4x$$

и т. д. Изъ перваго равенства находимъ

$$(7) \qquad y'' = \frac{d^2y}{dx^2} - y'\frac{d^2x}{dx^2} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}.$$

Точно также

$$(8) \qquad y''' = \frac{d^3y}{dx^3} - 3y''\frac{d^2x}{dx^2} - y'\frac{d^3x}{dx^3}$$

$$= \frac{dx^2d^3y - 3dx\,d^2x\,d^2y + 3dy\,d^2x^2 - dx\,dy\,d^3x}{dx^5}$$

и т. д. Къ тѣмъ же результатамъ можно скорѣе придти, дифференцируя нѣсколько разъ подъ рядъ формулу (1), справедливую безъ всякихъ ограниченій. Дѣйствительно, тогда получимъ

$$y''dx = d\frac{dy}{dx} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^2},$$

откуда вытекаетъ формула (7). Дифференцируя (7), найдемъ

$$y'''dx = \frac{dx(dx\,d^3y - dy\,d^3x) - 3d^2x(dx\,d^2y - dy\,d^2x)}{dx^4},$$

откуда получится (8) и т. д. Впослѣдствіи намъ иногда случится разсматривать $\frac{d}{dx}$ какъ символъ операціи, состоящей въ разысканіи производной, взятой по x. Сообразно вышесказанному, если мы эту операцію еще разъ хотимъ повторить, не назначая независимой перемѣнной, то должны примѣнить символъ $\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}$, между тѣмъ, какъ символъ $\frac{d^2}{dx^2}$ будетъ обозначать ту же операцію, когда за независимую перемѣнную взято x. Въ самомъ дѣлѣ, изъ (7) мы имѣемъ

$$\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}=\frac{d^2}{dx^2}-\frac{d^2x}{dx^2}\frac{d}{dx}.$$

Точно такъ же изъ (8) получимъ

$$(9)\qquad \frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}=\frac{d^3}{dx^3}-3\frac{d^2x}{dx^2}\frac{d^2}{dx^2}+\left(3\frac{d^2x^2}{dx^4}-\frac{d^3x}{dx^3}\right)\frac{d}{dx} \text{ и т. д.}$$

558. Упражненія. а) Если въ нѣкоторое выраженіе, содержащее въ себѣ производныя отъ y по x, желаемъ ввести производныя отъ y, взятыя по другой перемѣнной t, то можно воспользоваться выведенными въ предыдущемъ § выраженіями y', y'', y''', ..., если x задана, какъ функція отъ t, и, слѣдовательно, извѣстны производныя $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, ... Дѣйствительно, такимъ путемъ найдемъ

$$\frac{dx}{dt}y'=\frac{dy}{dt},\quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^3 y''=\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^5 y'''=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2-\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt}\frac{d^3x}{dt^3}$$

и т. д. Если же, наоборотъ, новая перемѣнная t задана, какъ функція отъ x, и мы хотимъ принять t за независимую, то будемъ имѣть всегда

$$(10)\qquad y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}t'.$$

Далѣе, чтобы выразить y'', можно воспользоваться формулою (7), замѣтивъ предварительно, что вслѣдствіе равенства $d^2t=0$ должно быть $t''dx^2+t'd^2x=0$ *), и слѣдовательно,

$$(11)\qquad dx=\frac{dt}{t'},\quad d^2x=-\frac{t''dt^2}{t'^3}.$$

Отсюда, по формулѣ (7), найдемъ

$$(12)\qquad y''=\frac{d^2y}{dt^2}t'^2+\frac{dy}{dt}t''.$$

Это соотношеніе можно легче получить, взявъ производныя по x отъ обѣихъ частей равенства (10). Поступая аналогично этому съ формулой (12), найдемъ

$$y'''=\frac{d^3y}{dt^3}t'^3+3\frac{d^2y}{dt^2}t'\,t''+\frac{dy}{dt}t'''.$$

---

*) $dt=t'dx$, $d^2t=t''dx^2+t'd^2x=0$, такъ какъ t принято за независимую перемѣнную.

Къ этому же результату можно придти и съ помощью формулы (8), но не столь просто, присоединивъ къ (11) еще формулу

$$(13)\qquad d^3x = \frac{3t''^2 - t' t'''}{t'^5}\, dt^3,$$

которую получимъ, написавъ, что $d^3t = 0$ или, дифференцируя вторую формулу (11), и т. д.

b) Положимъ, что желаютъ принять за независимую перемѣнную самую функцію y и вычислить производныя x', x'', x''', ... отъ x, взятыя по y. Формулы (11), (13) и т. д. дадутъ

$$x' = \frac{1}{y'},\quad x'' = -\frac{y''}{y'^3},\quad x''' = \frac{3y''^2 - y'y'''}{y'^5},\ \ldots .$$

Ихъ можно получить проще, взявъ послѣдовательныя производныя отъ обѣихъ частей перваго равенства $x' = \frac{1}{y'}$. Можно также воспользоваться формулами (7), (8) и т. д., выразивъ равенствами $d^2y = 0$, $d^3y = 0$, ..., что y взято за независимую перемѣнную. Такимъ путемъ приходимъ къ формуламъ

$$y' = \frac{1}{x'},\quad y'' = -\frac{x''}{x'^3},\quad y''' = \frac{3x''^2 - x'x'''}{x'^5},\ \ldots,$$

которыя отличаются отъ предыдущихъ только замѣною буквы x на y и обратно. Впрочемъ, заранѣе было очевидно, что эти соотношенія должны быть симметричны относительно x и y, и дѣйствительно имъ можно дать видъ:

$$x'y' = 1,\quad x''x'^{-\frac{3}{2}} + y''y'^{-\frac{3}{2}} = 0,$$

$$\frac{3x''^2 - 2x'x'''}{x'^3} + \frac{3y''^2 - 2y'y'''}{y'^3} = 0,\ \ldots,$$

или другіе аналогичные, прямо получаемые дифференцированіемъ перваго равенства $x'y' = 1$. Смотря по тому, примемъ ли x или y за независимую перемѣнную при этой операціи, получимъ первое или второе изъ нижеслѣдующихъ уравненій:

$$x'y'' + x''y'^2 = 0,\quad y'x'' + y''x'^2 = 0.$$

Умножая первое на $x'^{\frac{1}{2}}$ или второе на $y'^{\frac{1}{2}}$, получаемъ

$$x''y'^{\frac{3}{2}} + y''x'^{\frac{3}{2}} = 0.$$

Дифференцируя же первое по y, а второе по x, найдемъ

$$x'''y'^2 + 3x''y'' + y'''x'^2 = 0,$$

и т. д.

c) Легко показать, что $dx\,d^2y - dy\,d^2x$ выражается черезъ первыя и вторыя производныя отъ x и y относительно какой угодно перемѣнной t и черезъ **первый** дифференціалъ t. Поэтому, при вычисленіи этого выраженія въ различныхъ частныхъ случаяхъ, можно, для упрощенія выкладки, принять t за независимую перемѣнную, и заранѣе быть увѣренными, что результатъ будетъ справедливъ и тогда, когда t не будетъ независимою перемѣнною. Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ

$$\begin{vmatrix} dx & d^2x \\ dy & d^2y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{dx}{dt}\,dt & \frac{d^2x}{dt^2}\,dt^2 + \frac{dx}{dt}\,d^2t \\ \frac{dy}{dt}\,dt & \frac{d^2y}{dt^2}\,dt^2 + \frac{dy}{dt}\,d^2t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{dx}{dt} & \frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{dy}{dt} & \frac{d^2y}{dt^2} \end{vmatrix} dt^3$$

или

$$dx\,d^2y - dy\,d^2x = \left(\frac{dx}{dt}\,\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\,\frac{d^2x}{dt^2}\right) dt^3.$$

Это замѣчаніе примѣнимо вообще ко всякому опредѣлителю n-го порядка, въ которомъ ν-ый столбецъ состоитъ изъ ν-ыхъ дифференціаловъ n функцій. Напримѣръ *),

$$\begin{vmatrix} dx & d^2x & d^3x \\ dy & d^2y & d^3y \\ dz & d^2z & d^3z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{dx}{dt} & \frac{d^2x}{dt^2} & \frac{d^3x}{dt^3} \\ \frac{dy}{dt} & \frac{d^2y}{dt^2} & \frac{d^3y}{dt^3} \\ \frac{dz}{dt} & \frac{d^2z}{dt^2} & \frac{d^3z}{dt^3} \end{vmatrix} dt^6.$$

Возвращаясь къ выраженію $dx\,d^2y - dy\,d^2x$, положимъ, что x и y обозначаютъ Декартовы координаты точки на плоскости и предложимъ себѣ преобразовать его къ полярнымъ координатамъ r и θ. Пользуясь предыдущимъ замѣчаніемъ, можно, для упрощенія выкладки, принять θ за независимую перемѣнную, и въ такомъ случаѣ изъ равенства $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, находимъ

$$dx = \cos\theta\cdot dr - r\sin\theta\cdot d\theta,\quad dy = \sin\theta\cdot dr + r\cos\theta\cdot d\theta,$$

$$d^2x = \cos\theta\cdot d^2r - 2\sin\theta\cdot dr\,d\theta - r\cos\theta\cdot d\theta^2,$$

$$d^2y = \sin\theta\cdot d^2r + 2\cos\theta\cdot dr\,d\theta - r\sin\theta\cdot d\theta^2.$$

Откуда видно, что

$$\begin{vmatrix} dx & d^2x \\ dy & d^2y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} dr & d^2r - r\,d\theta^2 \\ r\,d\theta & 2\,dr\,d\theta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$$

и окончательно

$$(14)\quad dx\,d^2y - dy\,d^2x = r^2 d\theta^3 + 2\,d\theta\,dr^2 - r\,d\theta\,d^2r = (r^2 + 2\,r'^2 - r r'')\,d\theta^3.$$

Хотя этотъ результатъ полученъ въ предположеніи $d^2\theta = 0$, но онъ остается справедливымъ независимо отъ этого, конечно, предполагая, что подъ r'' понимается не $\frac{d^2r}{d\theta^2}$, а $\frac{d}{d\theta}\,\frac{dr}{d\theta} = \frac{d^2r}{d\theta^2} - r'\frac{d^2\theta}{d\theta^2}$.

d) Предложимъ себѣ преобразовать выраженіе радіуса кривизны (§ 348, e)

$$\varrho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

Это выраженіе не требуетъ, чтобы непремѣнно x было независимою перемѣнною, если только подъ y'' будемъ подразумѣвать ея общее выраженіе (7). Такимъ образомъ, примѣняя еще формулу (1), получимъ

$$(15)\qquad \varrho = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}.$$

---

*) Это вытекаетъ изъ основныхъ свойствъ опредѣлителей (§ 17).

Въ полярныхъ координатахъ имѣемъ

$$dx^2 + dy^2 = (\cos\theta \cdot dr - r\sin\theta \cdot d\theta)^2 + (\sin\theta \cdot dr + r\cos\theta \cdot d\theta)^2$$
$$= dr^2 + r^2 d\theta^2,$$

а потому, припоминая (14) и раздѣляя числителя и знаменателя на $d\theta^3$,

$$\varrho = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 - rr''}.$$

Этому выраженію можно дать болѣе простую форму, полезную въ приложеніяхъ. Мы къ ней придемъ, принимая, что уравненіе кривой дано въ видѣ $r = 1/f(\theta)$ и выражая ϱ въ функціи отъ f, f', f''; мы тотчасъ находимъ

$$\frac{r'}{r} = -\frac{f'}{f}, \quad r^2 + r'^2 = \frac{f^2 + f'^2}{f^4}, \quad r'^2 - rr'' = \frac{ff'' - f'^2}{f^4},$$

откуда

$$\varrho = \frac{(f^2 + f'^2)^{\frac{3}{2}}}{(f + f'')f^3}.$$

e) Къ другимъ замѣчательнымъ формамъ для ϱ придемъ, если введемъ новую перемѣнную s, удовлетворяющую уравненію $ds^2 = dx^2 + dy^2$ и обозначающую, какъ увидимъ впослѣдствіи, длину дуги кривой, отсчитываемую отъ нѣкоторой данной точки. Исключая d^2x или d^2y изъ формулы (15), съ помощью соотношенія

$$ds\,d^2s = dx\,d^2x + dy\,d^2y,$$

получимъ формулы

$$\varrho = -\frac{dy\,ds^2}{ds\,d^2x - dx\,d^2s}, \quad \varrho = \frac{dx\,ds^2}{ds\,d^2y - dy\,d^2s},$$

которыя, на основаніи (9), можно написать такъ

$$\frac{d}{ds}\frac{dx}{ds} = -\frac{1}{\varrho}\frac{dy}{ds}, \quad \frac{d}{ds}\frac{dy}{ds} = \frac{1}{\varrho}\frac{dx}{ds}.$$

Эти формулы, которыя впослѣдствіи (§ 591) окажутся очевидными, особенно полезны въ вопросахъ Механики. Возвышая ихъ въ квадратъ и складывая, найдемъ

$$\frac{1}{\varrho^2} = \left(\frac{d}{ds}\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d}{ds}\frac{dy}{ds}\right)^2,$$

или, на основаніи соотношенія (9),

$$\frac{1}{\varrho^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 - \left(\frac{d^2s}{ds^2}\right)^2.$$

559. Примѣчанія. a) Обыкновенное дифференціальное исчисленіе всецѣло основано, какъ мы видѣли въ § 555, на условіи (4), съ присоединеніемъ къ нему дальнѣйшаго: $\chi(x) = 1$. Безконечно различныя формы, которыя можетъ принять дифференціальное исчисленіе соотвѣтственно различнымъ формамъ функціи $\chi(x)$, всѣ сводятся къ одной, потому что переходъ отъ одной функціи $\chi(x)$ къ другой равносиленъ измѣненію независимой перемѣнной въ обыкновенномъ дифференціальномъ исчисленіи. Чтобы въ этомъ убѣдиться, надо предпослать, что (какъ будетъ показано въ началѣ седьмой книги), въ силу необходимой непрерывности функціи $\chi(x)$, всегда существуетъ нѣкоторая функція t отъ x, производная которой равна $\chi(x)$. Въ томъ дифференціальномъ исчисленіи, въ основѣ котораго лежитъ функція $\chi(x)$, дифференціалы функціи t будутъ

$$dt = t'dx = \frac{1}{\chi(x)} \cdot a\chi(x) = a, \quad d^2t = d^3t = \cdots = 0,$$

т. е. свойства (5) переносятся съ x на t, и разсматриваемое дифференціальное исчисленіе не отличается отъ обыкновеннаго, въ которомъ за независимую перемѣнную взята t. Поэтому естественно съ самаго начала приписать независимой перемѣнной свойство, состоящее въ томъ, что ея дифференціалъ число постоянное. Противъ этого соглашенія, издавна возстаетъ сонмъ метафизиковъ, не отдавая себѣ разумѣется яснаго отчета въ смыслѣ оспариваемаго условія. Иные понимаютъ его такъ, что полагая dx постояннымъ, надо считать, что dx имѣетъ одно весьма малое фиксированное значеніе; другіе, что x скачками переходитъ въ $x+dx$, $x+2dx$, $x+3dx$, ...; третьи, что dx остается безъ измѣненія лишь отъ одного дифференцированія до другого; наконецъ, есть и такіе, которые дѣлаютъ видъ[1]), что принимаютъ всѣ эти нелѣпыя и вздорныя интерпретаціи вмѣстѣ. Противъ всего этого нужно подчеркнуть слѣдующее: смыслъ условія, что dx — постоянное, состоитъ въ томъ, и только въ томъ, что **dx отъ x не зависитъ**. Когда говорятъ, что dx стремится къ нулю, то это можно себѣ представить происходящимъ слѣдующимъ образомъ: ось x-овъ, будучи передвинута, какъ твердый стержень вдоль самой себя, стремится принять прежнее положеніе.

b) Однако возможность существованія такого дифференціальнаго исчисленія, въ которомъ не существуетъ никакой перемѣнной, имѣющей постоянный дифференціалъ, не исключается. Для того, чтобы дифференціалъ нѣкоторой функціи t отъ x былъ постояннымъ, необходимо, чтобы $t''dx^2 + t'd^2x = 0$; слѣдовательно, раздѣляя (3) на (2), находимъ, что $\frac{d^2x}{dx^2} = \frac{d}{dx}\log\varphi(x, a)$ должно зависѣть отъ x и только отъ x (потому что $\frac{d^2x}{dx^2} = -\frac{t''}{t'^2}$, гдѣ t функція одного x). Отсюда вытекаетъ, что $\varphi(x, a) = \chi(x)\psi(a)$, гдѣ $\psi(a)$ — безконечно малое при a безконечно маломъ. Ничто не мѣшаетъ обозначить эту безконечно малую просто черезъ a, и мы приходимъ опять къ формулѣ (4). Если отбросимъ это условіе (характеристичное для дифференціальнаго исчисленія Лейбница), то

---

[1]) „Nuove considerazioni sulla metafisica del Calcolo infinitesimale" (Memorie della R. Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna, 1895, p. 309).

вычисленія § 557 по формѣ останутся не тронутыми, но произойдутъ измѣненія, глубоко затрагивающія свойства послѣдовательныхъ дифференціаловъ. Такъ, напримѣръ, если положимъ $dx = \alpha e^{\alpha x}$, то $d^2x = \alpha^2 e^{\alpha x} dx = \alpha^3 e^{2\alpha x}$, $d^3x = 2\alpha^4 e^{2\alpha x} dx = 2\alpha^5 e^{3\alpha x}$ и т. д., такъ что $d^n x$ будетъ безконечно малою порядка $2n - 1$, а не n, относительно α, и вмѣсто (6) будемъ имѣть, при $n > 1$,

$$y^{(n)} = \lim_{\alpha=0} \frac{d^n y}{d x^n},$$

при чемъ символъ lim нельзя отбросить. Точно такъ же, если бы мы положили $dx = \alpha e^{-\frac{x}{\alpha}}$ и условились, что безконечно малое число α всегда сохраняетъ знакъ числа x, т. е. что $\frac{x}{\alpha} > 0$, мы нашли бы, что n-ый дифференціалъ будетъ quasi n-го порядка (въ смыслѣ § 548) относительно dx, но равенство (6) уже не имѣло бы мѣста. Дѣйствительно, отношеніе $\frac{d^n y}{dx^n}$ будетъ безконечно большимъ, по абсолютной величинѣ, и вмѣсто (6) при всякомъ n будемъ имѣть

$$y' = \lim_{\alpha=0} \frac{d^n y}{d^n x},$$

такъ какъ при $dx = \alpha e^{-\frac{x}{\alpha}} \left(\frac{x}{\alpha} > 0\right)$ имѣемъ $d^2x = -\alpha e^{-2\frac{x}{\alpha}}$, $d^2y = y'' dx^2 + y' d^2x$; $\frac{d^2y}{d^2x} = -y'' \cdot \alpha + y'$, $\lim_{\alpha=0} \frac{d^2y}{d^2x} = y'$ и т. д. Подобное дифференціальное исчисленіе, можетъ быть, и представляло бы нѣкоторыя выгоды, но оно навѣрно потеряло бы тѣ, которыми обладаетъ обыкновенное, благодаря простотѣ и однородности его формулъ и точной оцѣнкѣ порядка безконечно малыхъ. Исчезло бы главнымъ образомъ то обстоятельство, въ которомъ можно усмотрѣть (согласно сказанному въ § 556) настоящую причину существованія дифференціальнаго исчисленія. А именно, отношенія между такими степенями дифференціаловъ, которыя будутъ безконечно малыми одного и того же порядка, не были бы уже равны предѣламъ этихъ отношеній, и исчисленіе предѣловъ не оказалось бы поглощеннымъ въ этомъ новомъ исчисленіи.

Функціи отъ нѣсколькихъ перемѣнныхъ.

560. Частные дифференціалы. Положимъ, что въ функціи $f(x, y, z, \ldots)$ перемѣннымъ $x, y, z, \ldots$, которыя считаемъ независимыми, даны произвольныя приращенія $\delta x, \delta y, \delta z, \ldots$. Разсматривая данную функцію, какъ функцію одного x, одного y и т. д. (срав. § 367), можемъ искать ея дифференціалы

$$d_x f = f'_x \cdot \delta x, \quad d_y f = f'_y \cdot \delta y, \quad d_z f = f'_z \cdot \delta z, \ \ldots,$$

называемые частными дифференціалами. Сумма ихъ называется полнымъ дифференціаломъ и обозначается символомъ df. Замѣтимъ прежде всего, что полные дифференціалы независимыхъ перемѣнныхъ будутъ не что иное, какъ произвольныя ихъ приращенія δx, δy, δz, ... Въ самомъ дѣлѣ, полагая $f = x$, имѣемъ $f'_x = 1$, $f'_y = f'_z = \cdots = 0$, слѣдовательно, $dx = \delta x$, и т. д. Поэтому формулы, опредѣляющія частные дифференціалы, дадутъ:

$$f'_x = \frac{d_x f}{dx}, \quad f'_y = \frac{d_y f}{dy}, \quad f'_z = \frac{d_z f}{dz}, \quad \ldots$$

Такимъ образомъ, каждая частная производная представляется въ видѣ отношенія двухъ безконечно малыхъ. Для упрощенія письма можно отбросить указатели x, y, z, ... въ числителяхъ. При этомъ нечего опасаться какого-либо недоразумѣнія, потому что каждый df въ числителѣ будетъ изображать частный дифференціалъ, взятый по той перемѣнной, которая написана въ знаменателѣ. Впрочемъ, такъ какъ иногда (см. § 561) все-таки возможно смѣшеніе частныхъ дифференціаловъ съ ихъ суммою df, то принято *) при частныхъ дифференцированіяхъ употреблять символъ ∂ вмѣсто d и писать

$$f'_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f'_y = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad f'_z = \frac{\partial f}{\partial z}, \quad \ldots$$

Въ этомъ видѣ частныя производныя и будутъ изображаемы въ дальнѣйшихъ вычисленіяхъ.

561. Полные дифференціалы. По опредѣленію полнаго дифференціала имѣемъ

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \cdots, \tag{16}$$

когда x, y, z, ... независимыя перемѣнныя. Но важно замѣтить, что соотношеніе (16) остается справедливымъ и тогда, когда перемѣнныя, въ которыхъ выражена функція f, не независимыя перемѣнныя. Разсмотримъ, въ самомъ дѣлѣ, функцію $f(u, v, w, \ldots)$, въ которой u, v, w, ... функціи отъ какого угодно числа другихъ перемѣнныхъ x, y, z, ..., уже независимыхъ одна отъ другой. Ясно, что частныя производныя функціи f по u, v, w, ... всегда можно обозначать такъ:

$$f'_u = \frac{\partial f}{\partial u}, \quad f'_v = \frac{\partial f}{\partial v}, \quad f'_w = \frac{\partial f}{\partial w}, \quad \ldots,$$

потому что, при вычисленіи этихъ производныхъ, u, v, w, ... разсматриваются, какъ перемѣнныя независимыя. Но пока мы еще

---

*) По примѣру Якоби, но не всѣми авторами.

не въ правѣ утверждать, что опредѣляемый формулою (16) полный дифференціалъ можетъ быть выраженъ и формулою

$$df = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv + \frac{\partial f}{\partial w} dw + \cdots; \tag{17}$$

чтобы доказать справедливость этой формулы, замѣтимъ слѣдующее. Если мы возьмемъ производныя отъ функціи f въ томъ предположеніи, что измѣняется только x, или только y, и т. д., то по правилу разысканія производной сложной функціи (§ 369), найдемъ

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} + \cdots,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y} + \cdots,$$

. . . .

Подставляя эти выраженія въ (16) и замѣчая, что

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz + \cdots,$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz + \cdots,$$

. . . .

мы и получимъ формулу (17). Ее надо разсматривать, какъ основную для всего дифференціальнаго исчисленія. Важное ея значеніе зависитъ именно отъ того обстоятельства, что для составленія полнаго дифференціала не нужно знать ни того, какія перемѣнныя приняты за независимыя, ни того, *какъ велико число этихъ перемѣнныхъ*. Если въ частномъ случаѣ $y, z, \ldots$ будутъ функціи отъ x, то и $f(x, y, z, \ldots)$ будетъ функція отъ x, производную которой получимъ, раздѣливъ обѣ части формулы (16) на dx:

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dx} + \cdots.$$

Это замѣчаніе объясняетъ пользу введеніе символа ∂ вмѣсто d; потому что $\frac{df}{dx}$ вообще не равна $\frac{\partial f}{\partial x}$ *).

*) Иногда $\frac{df}{dx}$ называютъ *полною* производною отъ $f(x, y, z, \ldots)$, а $\frac{\partial f}{\partial x}$ — *частною* производной; при вычисленіи первой принимается во вниманіе, что $y, z, \ldots$ функціи отъ x; при вычисленіи второй, $y, z, \ldots$ разсматриваются, какъ постоянныя. Напримѣръ, для $f = x^2 + xy + y^2$, $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y$, $\frac{df}{dx} = 2x + y + (2y + x)\frac{dy}{dx}$.

562. Геометрическая интерпретація. Чтобы указать геометрическое значеніе полнаго дифференціала, по крайней мѣрѣ, для случая двухъ независимыхъ перемѣнныхъ, разсмотримъ функцію, опредѣляемую уравненіемъ $z=f(x, y)$. Это уравненіе изображаетъ въ Декартовыхъ координатахъ нѣкоторую поверхность въ пространствѣ. Положимъ, что нѣкоторая дуга MM' кривой, лежащей на поверхности, между точками $M(x, y, z)$ и $M'(x+dx, y+dy, z+dz)$, проектирована параллельно оси z-овъ на касательную плоскость (см. § 659, уравненіе (3)) къ поверхности въ точкѣ M, и пусть проекція точки M' будетъ точка Q. На параллелограммѣ $PA'P'B'$, лежащемъ въ плоскости (xy), у котораго точка P имѣетъ координаты $(x, y, 0)$ и стороны $PA'=dx$, $PB'=dy$ (dx и dy произвольныя приращенія x и y), построимъ параллелопипедъ съ ребрами, параллельными OZ, и положимъ, что эти ребра пересѣкутъ касательную плоскость (кромѣ точекъ M и Q, въ которыхъ эта плоскость пересѣкается съ ребрами PM и $P'Q$) въ точкахъ A и B. На касательной плоскости получится параллелограммъ $MAQB$, діагонали котораго MQ и AB пересѣкутся въ точкѣ, лежащей на срединѣ той и другой. Поэтому будемъ имѣть $MP+QP'=AA'+BB'$. Съ другой стороны, припоминая сказанное въ § 553, будемъ имѣть

$$MP=z, \quad AA'=z+\frac{\partial z}{\partial x}dx, \quad BB'=z+\frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Слѣдовательно, $QP'=z+\frac{\partial z}{\partial x}dz+\frac{\partial z}{\partial y}dy=z+dz$. Иными словами, dz есть приращеніе HQ*) ординаты касательной плоскости, въ то время, какъ δz есть приращеніе HM' ординаты самой поверхности. Замѣна δz на dz равносильна, слѣдовательно, замѣнѣ поверхности въ окрестности точки M касательною плоскостью въ этой точкѣ.

563. Послѣдовательное дифференцированіе. Если въ функціи $f(x, y, z, \ldots)$ будемъ разсматривать одну изъ перемѣнныхъ, x — напримѣръ, какъ единственную перемѣнную, то всѣ соображенія, которыми мы пользовались, когда говорили о послѣдовательныхъ производныхъ функцій отъ одной перемѣнной, остаются въ силѣ; поэтому мы можемъ изображать послѣдовательныя частныя производныя отъ f по x въ видѣ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}, \quad \ldots,$$

условившись считать произвольныя приращенія dx, dy, dz, ... независящими отъ x, y, z, ... Далѣе, мы видѣли (§ 368), что

---

*) H — точка пересѣченія ординаты $M'P'$ съ плоскостью, параллельною плоскости (xy), проходящею черезъ M.

при выполненіи извѣстныхъ условій, въ обыкновенныхъ вычисленіяхъ вообще всегда имѣющихъ мѣсто, результатъ n послѣдовательныхъ частныхъ дифференцированій, въ которыхъ берутъ i—разъ производную по x, j—разъ по y, и т. д. $(i+j+\cdots=n)$ не зависитъ отъ порядка дѣйствій. Поэтому можно считать, что сперва взяты i—разъ производныя по x, затѣмъ j—разъ по y и т. д. Результатъ n послѣдовательныхъ дифференцированій условились обозначать такъ:

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k \ldots}.$$

Напримѣръ, частныя производныя отъ z—функціи отъ x и y—будутъ

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^3},\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y},\ \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2},\ \frac{\partial^3 z}{\partial y^3},\ \ldots$$

Первыя пять, часто встрѣчающіяся въ теоріи поверхностей, обыкновенно обозначаютъ для краткости просто буквами p, q, r, s, t. Переходя отъ разысканія производныхъ къ разысканію дифференціаловъ, беремъ равенство (16) и дифференцируемъ его, разсматривая при этомъ dx, dy, dz, ..., какъ величины, независящія отъ x, y, z, ... Тогда получаемъ

$$d^2f=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\cdots\right)\cdot dx+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\cdots\right)\cdot dy+\cdot$$
$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2+\cdots+2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dx\,dy+\cdots.$$

Такъ какъ операцію d можно изобразить независимо отъ той функціи, надъ которою эта операція производится, написавъ

$$d=\frac{\partial}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial}{\partial y}\cdot dy+\frac{\partial}{\partial z}\cdot dz+\cdots,$$

то видимъ, что

$$d^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\cdot dx^2+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\cdot dy^2+\cdots+2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\cdot dx\,dy+\cdots$$

или символически

$$d^2=\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial}{\partial y}\cdot dy+\frac{\partial}{\partial z}\cdot dz+\cdots\right)^2.$$

Дифференцируя еще разъ и продолжая такъ же далѣе, очевидно, придемъ къ символической формулѣ:

$$d^n=\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial}{\partial y}\cdot dy+\frac{\partial}{\partial z}\cdot dz+\cdots\right)^n,$$

которая предполагаетъ (при $n>1$), что x, y, z, ... независимыя перемѣнныя. Если же, напротивъ того, имѣемъ, напримѣръ, $z=f(x, y)$, гдѣ x и y функціи отъ другихъ независимыхъ перемѣнныхъ, то послѣдовательное дифференцированіе дастъ:

$$dz=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy,\quad d^2z=\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial}{\partial y}\cdot dy\right)^2 f+\frac{\partial f}{\partial x}d^2x+\frac{\partial f}{\partial y}d^2y,$$

$$d^3z=\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial}{\partial y}\cdot dy\right)^3 f+3\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx\,d^2x+3\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dy\,d^2x$$
$$+\frac{\partial f}{\partial x}d^3x+\frac{\partial f}{\partial y}d^3y+3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy\,d^2y+3\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}dx\,d^2y,$$

. . . .

564. Формула Тэйлора. Дифференціальное обозначеніе даетъ возможность написать формулу Тэйлора (§ 330) въ замѣчательно простомъ видѣ, примѣнимомъ одинаково какъ въ случаѣ одной, такъ и въ случаѣ нѣсколькихъ перемѣнныхъ, а именно

$$(18)\qquad \delta f=df+\tfrac{1}{2}d^2f+\tfrac{1}{6}d^3f+\tfrac{1}{24}d^4f+\cdots$$

Ограничиваясь для бо́льшей ясности случаемъ одной перемѣнной, замѣтимъ, что формула (8) § 330 можетъ быть написана въ слѣдующемъ видѣ:

$$(19)\qquad \delta f(x)=f'(x)\,\delta x+\tfrac{1}{2}f''(x)\,\delta x^2+\tfrac{1}{6}f'''(x)\,\delta x^3+\cdots$$

(полагая $x-a=\delta a$, $f(x)-f(a)=\delta f(a)$ и замѣняя затѣмъ букву a буквою x). Если примемъ x за перемѣнную независимую, то $\delta x=dx$, $f^{(n)}(x)\delta x^n=d^nf$, и формула (19) принимаетъ видъ (18). Эта послѣдняя, очевидно, справедлива вообще (т. е. когда x не независимая перемѣнная), потому что каждый членъ формулы (18) имѣетъ опредѣленное значеніе, не связанное съ тѣмъ или инымъ выборомъ независимой перемѣнной. Это замѣчаніе необходимо, потому что ошибочно было бы сказать, что и въ общемъ случаѣ n-ый членъ формулы (19) равенъ $\frac{d^nf}{n!}$. Чтобы и въ общемъ случаѣ получить изъ формулы (19) формулу (18) надо было бы взять выраженіе

$$\delta x=dx+\tfrac{1}{2}d^2x+\tfrac{1}{6}d^3x+\tfrac{1}{24}d^4x+\cdots$$

возвысивъ его во 2-ую, 3-ью и т. д. степени, написать

$$\delta f=(dx+\tfrac{1}{2}d^2x+\tfrac{1}{6}d^3x+\cdots)f'+\tfrac{1}{2}(dx^2+dx\,d^2x+\cdots)f''+\cdots$$

и собрать затѣмъ безконечно малые члены одного и того же порядка:

$$f'dx=df,\quad \tfrac{1}{2}(f'd^2x+f''dx^2)=\tfrac{1}{2}d^2f,$$
$$\tfrac{1}{6}(f'd^3x+3f''\,dx\,d^2x+f'''dx^3)=\tfrac{1}{6}d^3f,\quad \ldots$$

565. Измѣненіе перемѣнныхъ независимыхъ. Если хотимъ выразить частныя производныя функціи $f(x, y, z, \ldots)$ по $x, y, z, \ldots$ въ новыхъ перемѣнныхъ u, v, w, ..., число которыхъ равно числу прежнихъ, то, разсматривая $x, y, z, \ldots$ какъ функціи отъ $u, v, w, \ldots$ и измѣняя сперва одно u, затѣмъ одно v и т. д., найдемъ

$$\left\{\begin{array}{l}
\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}+\cdots \\
\frac{\partial f}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}+\cdots \\
\frac{\partial f}{\partial w}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial w}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial w}+\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right.$$

Эта система линейныхъ относительно $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial}, \cdots$ уравненій опредѣлитъ эти функціи, если опредѣлитель

$$\mathfrak{J}=\begin{vmatrix}
\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} & \cdots \\
\frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} & \cdots \\
\frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots
\end{vmatrix}$$

не равенъ нулю [1]). Этотъ опредѣлитель называется функціональнымъ опредѣлителемъ или Якобіаномъ системы функцій $x, y, z, \ldots$ относительно перемѣнныхъ $u, v, w, \ldots$ и обозначается обыкновенно слѣдующимъ образомъ:

$$\mathfrak{J}=\frac{\partial(x, y, z, \ldots)}{\partial(u, v, w, \ldots)}.$$

Рѣшая разсматриваемую систему, найдемъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{\mathfrak{J}}\cdot\frac{\partial(f, y, z, \ldots)}{\partial(u, v, w, \ldots)} \tag{20}$$

и точно также

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial(x, f, z, \ldots)}{\partial(u, v, w, \ldots)}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial(x, y, f, \ldots)}{\partial(u, v, w, \ldots)}, \ldots$$

Для полученія слѣдующихъ частныхъ производныхъ (2-хъ, 3-хъ и т. д.), надо поступить съ найденными первыми такъ, какъ было поступлено съ функціею f.

566. Къ разсматриваемой задачѣ приводитъ вопросъ о преобразованіи даннаго уравненія или выраженія, содержащаго производ-

---

[1]) Мы вскорѣ увидимъ, что условіе это будетъ выполнено, если $x, y, z, \ldots$ независимы одно отъ другого.

ныя отъ f по $x, y, z, \ldots$ такимъ образомъ, чтобы въ него вошли производныя по нѣкоторымъ другимъ перемѣннымъ. Тогда надо выразить $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \cdots$ черезъ $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}, \cdots$, и если $x, y, z, \ldots$, заданы въ видѣ функцій отъ $u, v, w, \ldots$, то вышеизложенный процессъ предпочтительнѣе всякаго другого. Иногда случается, что, наоборотъ, $u, v, w, \ldots$ заданы, какъ функціи отъ $x, y, z, \ldots$ Тогда можно непосредственно написать:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}+\cdots \tag{21}$$

Аналогично этому найдутся и $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \cdots$ и т. д. Чтобы показать, какимъ образомъ эти формулы сводятся къ формуламъ предыдущаго параграфа, дѣлаемъ послѣдовательно $f=x$, $f=y$, $f=z, \ldots$, предполагая, что провѣрена (пріемомъ, который будетъ изложенъ въ слѣдующей главѣ) возможность разсматривать и $x, y, z, \ldots$ какъ функціи отъ $u, v, w, \ldots$, имѣющія производныя. Тогда найдемъ

$$\left\{\begin{array}{l}
1=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}+\cdots \\
0=\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}+\cdots \\
0=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}+\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right.$$

Изъ этихъ уравненій находимъ

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial(y, z, \ldots)}{\partial(v, w, \ldots)}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial(y, z, \ldots)}{\partial(u, w, \ldots)}, \quad \frac{\partial w}{\partial x}=\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial(y, z, \ldots)}{\partial(u, v, \ldots)}, \quad \ldots,$$

а подставляя эти выраженія въ (21) мы и получимъ формулу (20), въ которой, впрочемъ, заключаются и послѣднія формулы, если по очереди положимъ $f=u$, $f=v$, $f=w, \ldots$.

567. Можно и другимъ путемъ придти къ формулѣ (20). Мы его здѣсь укажемъ, чтобы съ очевидностью обнаружить, что и частная производная есть не что иное, какъ нѣкоторое отношеніе, а именно отношеніе двухъ частныхъ дифференціаловъ. Такъ, напримѣръ, чтобы получить $\frac{\partial f}{\partial x}$, можно раздѣлить дифференціалы

$$df=\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv+\cdots, \quad dx=\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv+\cdots$$

первый на второй, обративъ ихъ предварительно въ частные, принимая $dy = 0$, $dz = 0$, ... Такимъ путемъ получимъ

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial u}\right)du + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v}\right)dv + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial w} - \frac{\partial f}{\partial w}\right)dw + \cdots = 0,$$

при условіи. что du, dv, ... связаны соотношеніями

$$\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv + \frac{\partial y}{\partial w}dw + \cdots = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}du + \frac{\partial z}{\partial w}dw + \cdots = 0,$$

(выражающими, очевидно, равенства $dy = 0$, $dz = 0$, ...). Исключая du, dv, dw, ..., находимъ

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} & \cdots \\ \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} & \cdots \\ \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial w} - \frac{\partial f}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = 0,$$

откуда и получается выраженіе (20) для $\frac{\partial f}{\partial x}$.

568. Производная по данному направленію. Чтобы имѣть дѣло съ опредѣленнымъ случаемъ, допустимъ, что дана функція $f(x, y, z)$ отъ трехъ независимыхъ перемѣнныхъ, т. е. величина, значеніе которой дано для всякой точки (x, y, z) пространства. Самый естественный способъ обобщенія понятія производной, когда отъ функцій отъ одной перемѣнной переходятъ къ функціямъ отъ нѣсколькихъ перемѣнныхъ, состоитъ въ нижеслѣдующемъ. Разсматриваютъ приращеніе, получаемое функціею при переходѣ отъ одной точки M къ другой M', и ищутъ предѣлъ отношенія этого приращенія къ длинѣ h отрѣзка MM', въ предположеніи, что точка M остается неподвижною, а M' стремится къ совпаденію съ M. При этомъ направленіе MM' считается извѣстнымъ и опредѣляется косинусами α, β, γ угловъ, образуемыхъ имъ съ положительными направленіями осей координатъ. Этотъ предѣлъ и называется *производной данной функціи по данному направленію*. Въ каждой точкѣ, слѣдовательно, существуетъ *безчисленное множество* производныхъ, соотвѣтствующихъ различнымъ направленіямъ, но всѣ онѣ связаны между собою простымъ и замѣчательнымъ соотношеніемъ. А именно, производная по направленію (α, β, γ) равна

$$\lim_{h=0}\frac{f(x+\alpha h, y+\beta h, z+\gamma h) - f(x, y, z)}{h}$$

$$= \lim_{h=0}\left[\alpha f'_x(x+\theta\alpha h, \ldots) + \beta f'_y(x+\theta\alpha h, \ldots) + \cdots\right] = \alpha\frac{\partial f}{\partial x} + \beta\frac{\partial f}{\partial y} + \gamma\frac{\partial f}{\partial z}.$$

При этомъ частныя производныя, предполагаемыя непрерывными, вычислены для точки M. Представимъ себѣ теперь безконечно малую длину $d\sigma$, отложенную отъ точки M по прямой, проведенной черезъ M въ направленіи (α, β, γ). Производную по разсматриваемому направленію принято обозначать черезъ $\frac{\partial f}{\partial \sigma}$, такъ что

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Теперь фиксируемъ опредѣленное направленіе, направляющіе косинусы котораго α_0, β_0, γ_0 пропорціональны первымъ частнымъ производнымъ функціи f, такъ что

$$\frac{\alpha_0}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{\beta_0}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{\gamma_0}{\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{1}{\sqrt{\Delta f}}, \text{ гдѣ } \Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2.$$

Обозначая черезъ θ уголъ между направленіями (α, β, γ) и $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$, будемъ имѣть

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = (\alpha\alpha_0 + \beta\beta_0 + \gamma\gamma_0)\sqrt{\Delta f} = \cos\theta \cdot \sqrt{\Delta f}.$$

Если по направленію $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ отложимъ отрѣзокъ, равный $\sqrt{\Delta f}$, то проекція этого отрѣзка на любое направленіе измѣряетъ величину производной, взятой по этому направленію. Отсюда, между прочимъ, слѣдуетъ, что $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ есть то направленіе, по которому функція измѣняется всего быстрѣе. Напротивъ того, по безчисленному множеству направленій, перпендикулярныхъ къ $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$, функція имѣетъ стремленіе оставаться постоянною.

569. Дифференціальные параметры. Такъ называются тѣ выраженія, составленныя изъ частныхъ производныхъ функціи, которыя пользуются свойствомъ инваріантности, т. е. независимости отъ выбора координатныхъ осей. Понятно, что подобныя выраженія имѣютъ весьма важное значеніе въ Геометріи, Механикѣ, Физикѣ и вообще вездѣ, гдѣ дѣло идетъ о соотношеніяхъ и свойствахъ, не имѣющихъ никакого отношенія къ тѣмъ осямъ, которыя выбираются за координатныя [1]). Такъ, первыя частныя производныя отъ f, очевидно, связаны съ координатными осями и измѣняются вмѣстѣ съ ними; а сумма ихъ квадратовъ Δf остается безъ измѣненія, и на этомъ основаніи называется дифференціальнымъ параметромъ перваго порядка. Въ самомъ дѣлѣ, мы видѣли въ преды-

[1]) Въ этомъ направленіи разработано, такъ называемое, „абсолютное дифференціальное исчисленіе" (Calcolo diff. assoluto), изобрѣтенное G. Ricci (Риччи), проф. Падуанскаго Университета (Bulletin des sciences math. et astr., 1892, p. 186).

дущемъ параграфѣ, что Δf равно квадрату отъ $\frac{\partial f}{\partial \sigma}$, взятой въ направленіи наибыстрѣйшаго измѣненія f. Это направленіе, очевидно, зависитъ только отъ значеній функцій f, а не отъ системы осей, выбранной за основу вычисленій *). Точно также инваріантно выраженіе

$$\Delta^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

называемое дифференціальнымъ параметромъ 2-го порядка. Дѣйствительно, взявъ еще разъ производную по направленію (α, β, γ), получимъ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2} = \alpha \frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} + \cdots\right) + \beta \frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} + \cdots\right) + \cdots.$$

Общее мѣсто точекъ, для которыхъ эта вторая производная $\frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2}$ равна нулю, будетъ конусъ второго порядка:

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \beta^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \cdots + 2\,\alpha\beta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \cdots = 0 \tag{22}$$

(α, β, γ разсматриваются, какъ координаты точекъ на конусѣ, а x, y, z, какъ постоянныя). Ясно, что этотъ конусъ не зависитъ отъ выбора осей. Поэтому дискриминантъ квадратичной формы (22) (относительно α, β, γ), равный опредѣлителю Гессе функціи f, будетъ инваріантомъ, и тѣмъ же свойствомъ инваріантности (§ 89) пользуются суммы его главныхъ миноровъ перваго и второго порядка, а въ частности и $\Delta^2 f$. Функціи, для которыхъ всегда $\Delta^2 f = 0$, (уравненіе Лапласа) называются **гармоническими** функціями (см. § 401) и играютъ весьма важную роль въ приложеніяхъ. Гармоническою функціею будетъ, напримѣръ, температура тѣла, находящагося въ термическомъ равновѣсіи, потенціалы внѣ пространства, занимаемаго дѣйствующими массами и т. д. **).

570. Предыдущія соображенія бросаютъ новый свѣтъ на вопросы изслѣдованія о maxima и minima функцій отъ нѣсколькихъ перемѣнныхъ. Если проведемъ черезъ точку M прямую и будемъ разсматривать только тѣ значенія функціи f, которыя она прини-

---

*) Легко непосредственно провѣрить, что

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right)^2,$$

если x, y, z связаны съ x', y', z' извѣстными формулами преобразованія прямоугольныхъ координатъ.

**) Теорія гармоническихъ функцій и ихъ приложенія подробно развиты въ сочиненіи Weber-Riemann, Partielle Differentialgleichungen der mathem. Physik, 5-ое изд. 1911.

маетъ въ точкахъ на этой прямой, то ясно, что функція f въ точкѣ M — навѣрное будетъ maximum или minimum, если въ этой точкѣ $\frac{\partial f}{\partial \sigma} = 0$, а $\frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2}$ не равно 0. Такъ какъ уравненіе $\frac{\partial f}{\partial \sigma} = 0$ удовлетворяется для безчисленнаго множества направленій, перпендикулярныхъ къ $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$, то мы видимъ, что черезъ каждую точку M въ пространствѣ можно провести безчисленное множество прямыхъ, лежащихъ въ одной плоскости, вдоль которыхъ функція f въ точкѣ M будетъ maximum или minimum; исключеніе могутъ представлять только нѣкоторыя прямыя, а именно образуюшія конуса (22), на которыхъ и $\frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2} = 0$. Все это относится къ тому предположенію, что въ точкѣ M не равны нулю одновременно всѣ три первыя частныя производныя отъ f по x, y, z; въ противномъ случаѣ $\frac{\partial f}{\partial \sigma}$ была бы равна нулю по всякому направленію (α, β, γ), и функція f въ такой точкѣ M была бы maximum или minimum вдоль всевозможныхъ прямыхъ, черезъ нее проходящихъ, за исключеніемъ, можетъ быть, тѣхъ, которыя лежатъ на поверхности конуса (22). Если этотъ конусъ мнимый, то такихъ исключеній не будетъ, и $\frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2}$ сохраняетъ постоянный знакъ для всѣхъ направленій, такъ какъ эта производная функція непрерывная, не обращающаяся въ нуль для вещественныхъ значеній α, β, γ. Отсюда ясно, почему функція f, имѣющая въ точкѣ M либо всегда maximum, либо всегда minimum по всякому направленію, дѣйствительно будетъ и въ пространствѣ maximum или minimum въ точкѣ M. Если, наоборотъ, конусъ (22) вещественный, то въ M не будетъ ни maximum, ни minimum функціи f, такъ какъ вдоль нѣкоторыхъ прямыхъ f будетъ maximum $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2} < 0\right)$, а вдоль другихъ minimum $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2} > 0\right)$; конусъ (22) служитъ границею, отдѣляющею область однѣхъ прямыхъ отъ области другихъ. Въ частномъ случаѣ гармоническихъ функцій, для которыхъ сумма вторыхъ частныхъ производныхъ $\Delta^2 f$ равна нулю, эти производныя не могутъ имѣть всѣ три одинъ и тотъ же знакъ, а потому конусъ (22) будетъ вещественный. Отсюда слѣдуетъ, что гармоническія функціи нигдѣ не имѣютъ ни maximum'а, ни minimum'а.

571. Упражненія. а) Предложимъ себѣ выразить дифференціальные параметры функціи $f(x, y)$ отъ Декартовыхъ координатъ точки на плоскости въ полярныхъ координатахъ. Мы имѣемъ $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, и

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} = -\frac{\partial f}{\partial x}\sin\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\theta.$$

Слѣдовательно,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\sin\theta, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r}\sin\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\cos\theta. \tag{23}$$

Впрочемъ, послѣднія формулы можно получить прямо (см. § 566), какъ и первыя, замѣтивъ, что изъ равенства $r^2=x^2+y^2$ и $\theta=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$, получается

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}=\cos\theta,\quad \frac{\partial\theta}{\partial x}=-\frac{y}{r^2}=-\frac{\sin\theta}{r},$$

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}=\sin\theta,\quad \frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{x}{r^2}=\frac{\cos\theta}{r}.$$

Возвышая въ квадратъ и складывая выраженія (23), находимъ

$$\Delta f=\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)^2.$$

Примѣняя теперь формулы (23) къ $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$, вмѣсто f, получимъ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\cos\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\sin\theta\right)\cdot\cos\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\cos\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\sin\theta\right)\cdot\sin\theta,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\sin\theta+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\cos\theta\right)\cdot\sin\theta+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\sin\theta+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\cos\theta\right)\cdot\cos\theta,$$

т. е.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\cos^2\theta+2\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial r\,\partial\theta}\right)\sin\theta\cos\theta+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}\right)\sin^2\theta,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\sin^2\theta-2\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial r\,\partial\theta}\right)\sin\theta\cos\theta+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}\right)\cos^2\theta,$$

Слѣдовательно,

$$\Delta^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}.$$

Въ случаѣ n перемѣнныхъ, если f функція одного $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2+\cdots}$, будемъ имѣть

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x}{r}\frac{df}{dr},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y}{r}\frac{df}{dr},\quad \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{z}{r}\frac{df}{dr},\quad \ldots,$$

далѣе

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{1}{r}\frac{df}{dr}+\frac{x^2}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{df}{dr}\right)\quad\text{и т. д.}$$

Слѣдовательно,

$$\Delta f=\left(\frac{df}{dr}\right)^2,\quad \Delta^2 f=\frac{n}{r}\frac{df}{dr}+r\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{df}{dr}\right)=\frac{1}{r^{n-1}}\frac{d}{dr}\left(r^{n-1}\frac{df}{dr}\right).$$

Послѣдняя формула показываетъ, что если хотимъ имѣть гармоническую функцію отъ одного r, то должны положить $r^{n-1}\frac{df}{dr}=$ постоянному числу. Поэтому, при $n=2$, f должно быть вида $C\log r+C_1$, а при $n\gtrless 2$, $f=C_2r^{2-n}+C_3$, гдѣ $C,\ C_1,\ C_2,\ C_3$ — постоянныя.

b) Чтобы вычислить опредѣлитель Гессе $H=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2$, надо еще знать

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\cos\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\sin\theta\right)\cdot\sin\theta$$
$$+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\cos\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\sin\theta\right)\cdot\cos\theta.$$

Если положимъ для сокращенія

$$\varphi=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}\right),\quad \psi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\theta},$$

то найдемъ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\varphi\sin 2\theta-\psi\cos 2\theta.$$

Найденныя въ предыдущемъ упражненіи выраженія можно также написать въ видѣ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{1}{2}\Delta^2 f+\varphi\cos 2\theta+\psi\sin 2\theta,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{1}{2}\Delta^2 f-\varphi\cos 2\theta-\psi\sin 2\theta.$$

Слѣдовательно, $H=\frac{1}{4}(\Delta^2 f)^2-(\varphi^2+\psi^2)$, или

$$H=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} & \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)\\ \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) & \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}\end{vmatrix}.$$

c) Перейдемъ теперь къ разысканію выраженій вторыхъ частныхъ производныхъ функціи $f(x, y)$, взятыхъ по x и y въ какихъ угодно новыхъ перемѣнныхъ u и v. Поступая, какъ въ § 565, получимъ

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{\mathfrak{I}}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right),\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{\mathfrak{I}}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}-\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right),\tag{24}$$

Затѣмъ изъ соотношеній

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}&=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}&=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}&=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}
\end{aligned}\right.$$

надо будетъ найти $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Опредѣлитель этой системы будетъ (§ 27, a)

$$\begin{vmatrix}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 & 2\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u} & \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2\\ \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\\ \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 & 2\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial v} & \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2\end{vmatrix}=\mathfrak{I}^3,$$

Алгебраическія дополненія его элементовъ будутъ равны гомологичнымъ элементамъ опредѣлителя

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 & -\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial v} & \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 \\ -2\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} & -2\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} \\ \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 & -\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u} & \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 \end{vmatrix},$$

умноженнымъ на $\mathfrak{J}$ *). Отсюда слѣдуетъ (на основаніи правила Крамера)

$$\mathfrak{J}^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\right)\right]$$
$$+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}\right)\right]$$
$$-2\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}\right)\right] \text{ и т. д.,}$$

куда вмѣсто $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ надо подставить выраженія (24). Но мы быстрѣе и прямѣе придемъ къ цѣли, если (какъ въ первомъ упражненіи) примѣнимъ формулы (24) къ $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$, вмѣсто f. Такимъ путемъ получимъ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}\right)$$
$$-\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

или

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{\mathfrak{J}^2}\left[\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right]$$
$$+\frac{1}{\mathfrak{J}}\left[\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial u}{\partial v}\right) - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial y}{\partial v}\right)\right]\frac{\partial f}{\partial u}$$
$$+\frac{1}{\mathfrak{J}}\left[\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial y}{\partial u}\right) - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\right]\frac{\partial f}{\partial v},$$

и аналогично этому

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{\mathfrak{J}^2}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} + \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right]$$
$$+\frac{1}{\mathfrak{J}}\left[\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial x}{\partial v}\right)\right]\frac{\partial f}{\partial u}$$
$$+\frac{1}{\mathfrak{J}}\left[\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial x}{\partial u}\right) - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right]\frac{\partial f}{\partial v}.$$

---

*) Т. е. имѣющимъ тѣ же указатели строкъ и столбцовъ, такъ что алгебраическое дополненіе элемента $\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2$ равно $\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2\mathfrak{J}$ и т. д.

d) Теперь мы имѣемъ возможность выразить первый и второй дифференціальные параметры f въ новыхъ перемѣнныхъ u и v. Въ эти выраженія войдутъ, какъ мы увидимъ, функціи

$$a=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2,\quad b=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2,\quad c=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v},$$

которыя являются въ преобразованіи $ds^2=dx^2+dy^2$ къ виду

$$ds^2=a\,du^2+2c\,du\,dv+b\,dv^2. \tag{25}$$

Сперва, путемъ возвышенія въ квадратъ и сложенія, изъ формулъ (24) получимъ

$$\Delta f=\frac{1}{\mathfrak{J}^2}\left[b\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2-2c\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v}+a\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right].$$

Далѣе изъ послѣднихъ формулъ предыдущаго упражненія получается путемъ сложенія

$$\Delta^2 f=\frac{1}{\mathfrak{J}^2}\left(b\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}-2c\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}+a\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)$$
$$+\frac{1}{\mathfrak{J}}\left[\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{b}{\mathfrak{J}}-\frac{\partial}{\partial v}\frac{c}{\mathfrak{J}}\right)\frac{\partial f}{\partial u}+\left(\frac{\partial}{\partial v}\frac{a}{\mathfrak{J}}-\frac{\partial}{\partial u}\frac{c}{\mathfrak{J}}\right)\frac{\partial f}{\partial v}\right]$$

или

$$\Delta^2 f=\frac{1}{\mathfrak{J}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{b}{\mathfrak{J}}\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{c}{\mathfrak{J}}\frac{\partial f}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{a}{\mathfrak{J}}\frac{\partial f}{\partial v}-\frac{c}{\mathfrak{J}}\frac{\partial f}{\partial u}\right)\right];$$

это весьма важная формула Лямэ (Lamé). Къ этой формулѣ можно придти также, слѣдуя пути, указанному въ § 566. Тотчасъ найдемъ

$$\Delta^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\Delta u+2\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\Delta v+\frac{\partial f}{\partial u}\Delta^2 u+\frac{\partial f}{\partial v}\Delta^2 v.$$

Съ другой стороны, вслѣдствіе соотношеній

$$\left\{\begin{aligned}
1&=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, & 0&=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y},\\
0&=\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, & 1&=\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y},
\end{aligned}\right.$$

будемъ имѣть

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial y}{\partial v},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial y}{\partial u},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial x}{\partial v},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial x}{\partial u},$$

откуда

$$\Delta u=\frac{b}{\mathfrak{J}^2},\quad \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{c}{\mathfrak{J}^2},\quad \Delta v=\frac{a}{\mathfrak{J}^2},$$
$$\Delta^2 u=\frac{1}{\mathfrak{J}}\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{b}{\mathfrak{J}}-\frac{\partial}{\partial v}\frac{c}{\mathfrak{J}}\right),\quad \Delta^2 v=\frac{1}{\mathfrak{J}}\left(\frac{\partial}{\partial v}\frac{a}{\mathfrak{J}}-\frac{\partial}{\partial u}\frac{c}{\mathfrak{J}}\right)$$

и т. д. Если построимъ кривыя u и v (§ 413), то значенія a, b, c въ каждой точкѣ получатся прямо изъ геометрическихъ соображеній. Дѣйствительно, изъ (25) видно, что $\sqrt{a}\cdot du$ и $\sqrt{b}\cdot dv$ изображаютъ ds соотвѣтственно для кривыхъ $v=\text{const.}$ и $u=\text{const.}$ *). Если α и β обозначаютъ углы этихъ кривыхъ въ точкѣ M съ осью x-овъ, то

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial x}{\partial u},\quad \sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial y}{\partial u},\quad \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{b}}\frac{\partial x}{\partial v},\quad \sin\beta=\frac{1}{\sqrt{b}}\frac{\partial y}{\partial v},$$

а уголъ ω между кривыми опредѣляется формулою

$$\cos\omega=\cos(\beta-\alpha)=\frac{c}{\sqrt{ab}},$$

а такъ какъ очевидно, $\mathfrak{J}^2=ab-c^2$, то можно также написать $\sin\omega=\frac{\mathfrak{J}}{\sqrt{ab}}$. Напримѣръ, полагая въ случаѣ полярныхъ координатъ $u=r$, $v=\theta$, прямо изъ чертежа видно, что $a=1$, $b=r^2$, $c=0$ и формула Лямэ сейчасъ же сводится къ выраженію, данному въ первомъ упражненіи. Вообще для всякой ортогональной системы кривыхъ (т. е., когда $c=0$) формула Лямэ принимаетъ слѣдующій, чрезвычайно простой видъ

$$\Delta^2 f=\frac{1}{\sqrt{ab}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\frac{\partial f}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\frac{\partial f}{\partial v}\right)\right].$$

Неявныя функціи.

572. Если въ уравненіи $f(x,y)=0$ мы будемъ разсматривать y, какъ функцію отъ x, то правило разысканія производной сложной функціи тотчасъ дастъ уравненіе

$$\frac{\partial f}{\partial x}+y'\frac{\partial f}{\partial y}=0, \tag{26}$$

изъ котораго при $\frac{\partial f}{\partial y}\gtreqless 0$ и находимъ значеніе y'. Но, поступая такимъ образомъ, мы молча предполагаемъ, что производная y' существуетъ, между тѣмъ какъ мы еще не имѣемъ основанія a priori утверждать ни того, что y' существуетъ, ни даже того, что вообще можно разсматривать y, какъ функцію отъ x. Однако (при извѣстныхъ условіяхъ), эти утвержденія допустимы. Положимъ, въ самомъ дѣлѣ, что (x_0, y_0) есть нѣкоторая пара значеній x и y, удовлетворяющихъ уравненію $f(x,y)=0$, и примемъ, что f'_x и f'_y будутъ непрерывны, когда x измѣняется въ интервалѣ (x_0-h, x_0+h), а y въ интервалѣ (y_0-k, y_0+k). Кромѣ того, предположимъ, что h и k достаточно малы для того, чтобы f'_y сохраняла знакъ числа $f'_y(x_0,y_0)\gtreqless 0$, въ указанныхъ интервалахъ. Такое предположеніе возможно вслѣдствіе непрерывности f'_y. Далѣе ясно, что въ силу нашихъ предположеній отношеніе f'_y къ f'_x не можетъ быть какъ угодно мало по абсолютной величинѣ и потому существуетъ такое положительное число α, для котораго $|f'_y|>\alpha|f'_x|$,

*) ds есть дифференціалъ дуги кривой (см. § 582).

когда x и y остаются въ разсматриваемыхъ интервалахъ. Если h, которое можно взять сколь угодно малымъ, будетъ меньше $k\alpha$, то будемъ имѣть

$$h\,|f'_x| < k\alpha\,|f'_x| < k\,|f'_y|.$$

Отсюда слѣдуетъ, что въ равенствѣ

$$f(x_0+\xi,\, y_0 \pm k) = \xi f'_x(x_0+\theta\xi,\, y_0 \pm \theta k) \pm k f'_y(x_0+\theta\,\xi,\, y_0 \pm \theta k),$$

$(0 < \theta < 1)$ которое даетъ формула Тэйлора въ силу равенства $f(x_0, y_0) = 0$, для всякаго значенія ξ, лежащаго между $-h$ и $+h$, первый членъ правой части будетъ меньше второго по абсолютной величинѣ. Поэтому знакъ числа $f(x_0+\xi,\, y_0 \pm k)$ будетъ совпадать со знакомъ числа $\pm k f'_y(x_0+\theta\,\xi,\, y_0 \pm \theta k)$, а такъ какъ f'_y сохраняетъ постоянный знакъ, то приходимъ къ слѣдующему заключенію: при фиксированномъ ξ, $f(x_0+\xi, y)$ есть функція одного y, имѣющая разные знаки при $y=y_0-k$ и $y=y_0+k$. Но эта функція непрерывна, потому что имѣетъ производную f'_y. Слѣдовательно (§ 275), она обращается въ нуль для нѣкотораго значенія $y=\eta$, лежащаго въ интервалѣ $(y_0-k,\, y_0+k)$; при томъ она не можетъ обратиться въ нуль болѣе одного раза въ этомъ интервалѣ, потому что производная f'_y сохраняетъ въ немъ знакъ и, слѣдовательно, $f(x_0+\xi,\, y)$ либо постоянно убываетъ, либо постоянно возрастаетъ. Итакъ, справедливо, что, выбравъ по произволу значеніе $x = x_0+\xi\,(-h \leqq \xi \leqq h)$, мы найдемъ одно и только одно такое значеніе $y=y_0+\eta\,(-k<\eta<k)$, что для этой пары значеній будемъ имѣть $f(x, y) = 0$. Слѣдовательно, въ указанныхъ границахъ данное уравненіе, дѣйствительно, опредѣляетъ y, какъ функцію отъ x. Функція эта притомъ непрерывна, потому что, если въ уравненіи $f(x_0+\xi,\, y_0+\eta) = 0$, т. е. въ уравненіи

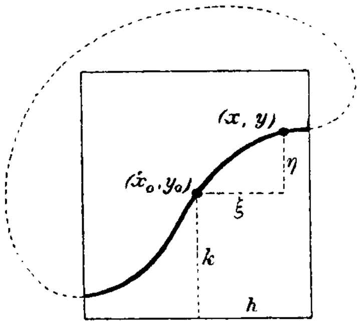

Рис. 28.

$$\xi f'_x(x_0+\theta\xi,\, y_0+\theta\eta) + \eta f'_y(x_0+\theta\xi,\, y_0+\theta\eta) = 0$$

ξ будетъ стремиться къ нулю, то и η будетъ стремиться къ нулю, потому что $f'_y \gtrless 0$. Наконецъ, эта функція имѣетъ производную, потому что съ приближеніемъ къ нулю, имѣемъ

$$\lim\frac{\eta}{\xi} = -\lim\frac{f'_x(x_0+\theta\,\xi,\, y_0+\theta\eta)}{f'_y(x_0+\theta\,\xi,\, y_0+\theta\eta)} = -\frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)}.$$

Такимъ образомъ, исходя изъ точки (x_0, y_0), мы нашли безчисленное множество точекъ, координаты которыхъ удовлетворяютъ уравненію

$f(x, y) = 0$, лежащихъ въ прямоугольникѣ, опредѣляемомъ вершинами $(x_0 \pm h, y_0 \pm k)$, и всѣ эти точки находятся въ тѣхъ же условіяхъ, какъ и точка (x_0, y_0). Послѣднее вышеприведенное заключеніе поэтому приложимо ко всѣмъ этимъ точкамъ, и формула (26) доказана. Замѣтимъ наконецъ, что въ силу непрерывности f'_x и f'_y и условія $f'_y \gtrless 0$, функція y' также непрерывна.

573. Можно высказать и болѣе общій результатъ. Если соотношеніе

$$f(x, y, z, \ldots, u) = 0 \tag{27}$$

удовлетворяется значеніями $x_0, y_0, z_0, \ldots, u_0$ перемѣнныхъ, и въ окрестности этихъ значеній первыя частныя производныя функціи f существуютъ и непрерывны и, кромѣ того, для этихъ значеній $f'_u \gtrless 0$, то можно утверждать, что u есть функція отъ перемѣнныхъ $x, y, z, \ldots$, имѣющая непрерывныя первыя частныя производныя. Онѣ получаются, если возьмемъ частныя производныя отъ функціи $f(x, y, z, \ldots, u)$, разсматривая u, какъ функцію отъ $x, y, z, \ldots$, и приравняемъ ихъ нулю*).

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \ldots$$

Доказательство ведется точно такъ же, какъ въ разсмотрѣнномъ выше частномъ случаѣ.

574. Дальнѣйшія дифференцированія дадутъ послѣдовательныя производныя функціи y. Напримѣръ, въ случаѣ уравненія $f(x, y) = 0$, надо продифференцировать $\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$, чтобы получить y''. А именно—мы получимъ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial f}{\partial y} d^2 y = 0,$$

откуда, послѣ подстановки значенія y', взятаго изъ (26), тотчасъ найдемъ

$$-y''\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2$$

или

$$y'' = \frac{1}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3}\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} \text{ и т. д.}$$

*) Говоря короче, дифференцируя уравненіе (27).

Рѣшимъ еще вопросъ о вычисленіи частныхъ производныхъ p, q, r, s, t функціи z, неявно опредѣляемой уравненіемъ $f(x, y, z) = 0$. Первыя двѣ найдутся изъ уравненій

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} p = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} q = 0, \tag{28}$$

получаемыхъ изъ уравненія $f = 0$, если возьмемъ частныя производныя отъ обѣихъ частей равенства по x и по y. Дифференцируя по x первое и по y второе уравненіе, получимъ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} p + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} p^2 + \frac{\partial f}{\partial z} r = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} q + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} q^2 + \frac{\partial f}{\partial z} t = 0,$$

откуда для r и t получаются (послѣ подстановки вмѣсто p и q ихъ значеній) слѣдующія выраженія

$$r = \frac{1}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^3} \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{vmatrix}, \qquad t = \frac{1}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^3} \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{vmatrix}.$$

Если продифференцируемъ по y первое или по x второе изъ уравненій (28), то получимъ

$$s = \frac{1}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^3} \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{vmatrix}.$$

Замѣтимъ, что вышенаписанные три опредѣлителя получаются изъ опредѣлителя

$$D = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{vmatrix},$$

если возьмемъ алгебраическiя дополненiя элементовъ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $-\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$, $\frac{d^2 f}{d x^2}$ послѣдняго. Отсюда, по извѣстному свойству опредѣлителей (§ 38), слѣдуетъ

$$rt - s^2 = -\frac{D}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^4}.$$

575. Можно доказать еще болѣе общiй результатъ, а именно: если даны m уравненiй

$$(29)\qquad \begin{cases} f(x, y, z, \ldots, u, v, w, \ldots) = 0, \\ \varphi(x, y, z, \ldots, u, v, w, \ldots) = 0, \\ \psi(x, y, z, \ldots, u, v, w, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

которымъ удовлетворяютъ значенiя $x = x_0$, $y = y_0$, ..., $u = u_0$, $v = v_0$, ..., то можно разсматривать m перемѣнныхъ u, v, w, ..., какъ функцiи отъ n перемѣнныхъ x, y, z, ... и эти функцiи имѣютъ первыя частныя производныя по всѣмъ перемѣннымъ. При этомъ, однако, предполагается, что первыя частныя производныя функцiй f, φ, ψ, ... непрерывны и, кромѣ того, что для разсматриваемыхъ значенiй перемѣнныхъ Якобiанъ

$$\mathfrak{J} = \frac{\partial(f, \varphi, \psi, \ldots)}{\partial(u, v, w, \ldots)}$$

не равенъ нулю. При $m = 1$, мы имѣемъ уже извѣстную намъ теорему § 573. Чтобы доказать общую теорему, достаточно показать, что она будетъ справедлива для m уравненiй, если допустимъ ея справедливость для $m - 1$ уравненiй. Такъ какъ предполагается, что въ точкѣ $(x_0, y_0, \ldots, u_0, v_0, \ldots)$ $\mathfrak{J} \gtrless 0$, то можно быть увѣреннымъ, что, по крайней мѣрѣ, одна изъ производныхъ $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial v}$, $\frac{\partial f}{\partial w}$, ... въ этой точкѣ не равна 0. Положимъ, что $\frac{\partial f}{\partial u} \gtrless 0$. Тогда, принимая во вниманiе наши предположенiя и теорему § 573 *), мы можемъ утверждать, что u есть функцiя отъ перемѣнныхъ x, y, z, ..., v, w, ..., имѣющая непрерывныя первыя частныя производныя. Если представимъ себѣ, что это выраженiе u подставлено въ остальныя уравненiя системы (29), то получимъ новую систему

$$(30)\qquad \begin{cases} \varphi_1(x, y, z, \ldots, v, w, \ldots) = 0, \\ \psi_1(x, y, z, \ldots, v, w, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

*) Примѣняя ее, мы разсматриваемъ первое изъ уравненiй (29).

Система (30) состоитъ изъ $m-1$ уравненій, связывающихъ $m-1$ перемѣнныхъ $v, w, \ldots$ съ n остальными. Первыя частныя производныя функціи $\varphi_1, \psi_1, \ldots$ существуютъ и непрерывны, потому что

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} \text{ и т. д.}$$

(что вытекаетъ изъ самаго происхожденія функцій $\varphi_1, \psi_1, \ldots$). Мы сейчасъ покажемъ, что Якобіанъ системы $\varphi_1, \psi_1, \ldots$ относительно $v, w, \ldots$

$$\mathfrak{J}_1 = \frac{\partial(\varphi_1, \psi_1, \ldots)}{\partial(v, w, \ldots)}$$

не равенъ нулю. А тогда система (30), по предположенію, опредѣляетъ $v, w, \ldots$ какъ функціи отъ $x, y, z, \ldots$, и эти функціи имѣютъ первыя частныя производныя. Но то же самое можно сказать и объ u, если представимъ себѣ, что въ его выраженіе, полученное изъ перваго уравненія системы (29), подставлены выраженія $v, w, \ldots$ изъ системы (30). Такимъ образомъ и получается система функцій $u, v, w, \ldots$, принимающихъ значенія $u_0, v_0, w_0, \ldots$ при $x=x_0, y=y_0, \ldots$ и имѣющихъ въ окрестности послѣднихъ значеній первыя частныя производныя. Все дѣло сводится, слѣдовательно, къ тому, чтобы доказать, что $\mathfrak{J}_1 \gtrless 0$. Для этого представимъ себѣ, что въ опредѣлителѣ $\mathfrak{J}$ элементы перваго столбца по умноженіи ихъ на $\frac{\partial u}{\partial v}$ прибавлены къ элементамъ второго столбца, затѣмъ тѣ же элементы, по умноженіи на $\frac{\partial u}{\partial w}$, прибавлены къ элементамъ третьяго столбца и т. д. Тогда элементы новаго опредѣлителя будутъ

$$\begin{array}{lll}
\frac{\partial f}{\partial u}, & \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial v} = 0, & \frac{\partial f}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial w} = 0, \;\ldots \\
\frac{\partial \varphi}{\partial u}, & \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial v} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} & \frac{\partial \varphi}{\partial w} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial w} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial w}, \;\ldots \\
\frac{\partial \psi}{\partial u}, & \frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial v} = \frac{\partial \psi_1}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial w} + \frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial w} = \frac{\partial \psi_1}{\partial w}, \;\ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

и мы находимъ $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_1 \frac{\partial f}{\partial u}$. Такъ какъ $\frac{\partial f}{\partial u}$ величина конечная, а $\mathfrak{J}$ не равно нулю, то и $\mathfrak{J}_1$ не равно нулю.

576. Доказавъ существованіе первыхъ частныхъ производныхъ отъ функцій, опредѣляемыхъ системою (29), мы можемъ теперь весьма легко вычислить эти производныя. Для этого нужно только дифференцировать по каждой изъ независимыхъ перемѣнныхъ каждое изъ уравненій системы (29). Такъ, напримѣръ, взявъ производныя по x, получимъ слѣдующую систему линейныхъ уравненій относительно $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x}, \ldots$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}+\cdots=0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}+\cdots=0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial x}+\frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial \psi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}+\cdots=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

опредѣлитель которой $\mathfrak{J}$ не равенъ нулю. Отсюда, по правилу Крамера, получимъ

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial(f,\varphi,\ldots)}{\partial(x,v,\ldots)}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial(f,\varphi,\ldots)}{\partial(u,x,\ldots)}, \ldots$$

577. Упражненія. a) Вычислить уголъ между двумя плоскими кривыми $\varphi=0$, $\psi=0$, пересѣкающимися въ точкѣ (x, y). По формулѣ (26) угловые коэффиціенты касательныхъ къ этимъ кривымъ опредѣляются формулами

$$\operatorname{tg}\alpha=-\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}, \quad \operatorname{tg}\beta=-\frac{\frac{\partial \psi}{\partial x}}{\frac{\partial \psi}{\partial y}},$$

откуда

$$\sin\alpha=-\frac{1}{\sqrt{\Delta\varphi}}\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{\Delta\varphi}}\frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

$$\sin\beta=-\frac{1}{\sqrt{\Delta\psi}}\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{\Delta\psi}}\frac{\partial \psi}{\partial y},$$

слѣдовательно (см. § 571, d),

$$\sin\omega=\sin(\beta-\alpha)=\frac{1}{\sqrt{\Delta\varphi\cdot\Delta\psi}}\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x,y)}.$$

Замѣтимъ, что касаніе этихъ кривыхъ ($\omega=0$) характеризуется тѣмъ, что Якобіанъ системы функцій φ и ψ обращается въ нуль.

b) Если плоская кривая задана уравненіемъ

$$f(x, y, u, v, \ldots)=0,$$

гдѣ u, v, ... опредѣляются, какъ неявныя функціи отъ координатъ x и y, n уравненіями

$$\varphi(x, y, u, v, \ldots)=0, \quad \psi(x, y, u, v, \ldots)=0, \ldots$$

и требуется построить къ этой кривой касательную въ данной точкѣ, то нѣтъ надобности исключать u, v, w, ... изъ $n+1$ данныхъ уравненій, съ тѣмъ, чтобы получить уравненіе между одними x и y. Можно разсматривать y, u, v, w, ... какъ неявныя функціи отъ x, опредѣляемыя данными уравненіями, взять производныя по x, и изъ полученной системы линейныхъ уравненій (относительно $\frac{dy}{dx}, \frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}, \dots$) исключить производныя функцій $u, v, w, \dots$. Одно изъ важнѣйшихъ преимуществъ дифференціальнаго исчисленія и состоитъ въ томъ, что оно позволяетъ избѣгать практически невыполнимыхъ исключеній (неизвѣстныхъ изъ системы не линейныхъ и сложныхъ уравненій). Оно всегда при помощи дифференцированія приводитъ къ системѣ линейныхъ уравненій, которыя всегда можно рѣшить. Такъ, въ разсматриваемомъ случаѣ получается формула

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial(f, \varphi, \psi, \dots)}{\partial(x, u, v, \dots)}}{\dfrac{\partial(f, \varphi, \psi, \dots)}{\partial(y, u, v, \dots)}},$$

представляющая, очевидно, обобщеніе формулы (26).

c) Подобнымъ же образомъ, положимъ, что нѣкоторая поверхность задана двумя уравненіями съ четырьмя перемѣнными. Тогда можно представить себѣ, что соотношеніе между тремя координатами x, y, z получается, какъ результатъ исключенія u изъ уравненій

$$\varphi(x, y, z, u) = 0, \quad \psi(x, y, z, u) = 0.$$

Положимъ, что требуется вычислить p, q, r, s, t, т. е. первыя и вторыя частныя производныя отъ z, разсматриваемой, какъ функція двухъ независимыхъ перемѣнныхъ x и y. Взявъ производныя отъ данныхъ уравненій одинъ разъ по x, другой разъ по y, получаемъ системы

$$\left|\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ &\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{aligned}\right., \qquad \left|\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ &\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{aligned}\right.$$

изъ которыхъ черезъ исключеніе производныхъ отъ u, находимъ

$$p = -\frac{\dfrac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, u)}}{\dfrac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(z, u)}}, \qquad q = -\frac{\dfrac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(y, u)}}{\dfrac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(z, u)}}.$$

Другія три производныя можно найти или непосредственно вычисляя производныя отъ p и q помощью полученныхъ ихъ выраженій, или съ помощью рѣшеній линейныхъ уравненій, получаемыхъ черезъ дифференцированіе уравненій вышеприведенныхъ двухъ системъ. Въ частности, если поверхность задана уравненіемъ $z = f(x, y, u)$ гдѣ u опредѣляется, какъ неявная функція отъ x и y уравненіемъ $\varphi(x, y, u) = 0$, то тотчасъ находимъ

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

слѣдовательно,

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} - \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}} = \frac{\dfrac{\partial(f, \varphi)}{\partial(x, u)}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}}.$$

Отсюда слѣдуетъ

$$r = \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

гдѣ вмѣсто $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ надо подставить ихъ выраженія, получаемыя изъ уравненій

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ и т. д.}$$

578. Когда даны m функцій $y_1, y_2, \ldots, y_m$ отъ n независимыхъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то весьма важно бываетъ установить, что эти функціи **независимы**, т. е., что ни одна изъ нихъ не будетъ функціей другихъ. Для этого достаточно изслѣдовать Якобіеву матриссу системы, т. е. матриссу

$$\left|\begin{array}{ccccc} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_1}{\partial x_3} & \ldots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} & \ldots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \frac{\partial y_m}{\partial x_3} & \ldots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{array}\right|,$$

элементы которой предполагаются непрерывными функціями. Если μ есть рангъ этой матриссы, то данная система заключаетъ въ себѣ μ независимыхъ функцій, а остальныя $m-\mu$ будутъ функціями отъ этихъ μ. Эту важную теорему мы теперь и докажемъ

a) Можно предположить, что Якобіанъ

$$\mathfrak{J} = \frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_\mu)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_\mu)}$$

не равенъ нулю, потому что, по условію, Якобіева матрисса содержитъ въ себѣ, по крайней мѣрѣ, одинъ опредѣлитель порядка μ, не равный нулю. Представивъ себѣ, что тѣ именно μ функцій y и независимыхъ перемѣнныхъ x, которыя входятъ въ этотъ опредѣлитель, нумерованы указателями $1, 2, \ldots, \mu$, мы и придемъ къ тому, что $\mathfrak{J}$ есть одинъ изъ опредѣлителей, не равныхъ нулю. Пусть выраженія данныхъ функцій будетъ

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots x_n), \; y_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots$$

Положимъ

$$\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) - y_i$$

и разсмотримъ систему

(31) $$\varphi_1 = 0, \; \varphi_2 = 0, \ldots, \varphi_m = 0.$$

На основаніи сказаннаго въ § 575, эта система способна опредѣлить перемѣнныя

(32) $$x_1, x_2, \ldots, x_\mu, \quad y_{\mu+1}, y_{\mu+2}, \ldots, y_m,$$

какъ неявныя функціи остальныхъ

(33) $$y_1, y_2, \ldots, y_\mu, \quad x_{\mu+1}, x_{\mu+2}, \ldots, x_n,$$

такъ какъ для этого нужно только, чтобы функціональный опредѣлитель

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\mu, \varphi_{\mu+1}, \varphi_{\mu+2}, \ldots, \varphi_m)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_\mu, y_{\mu+1}, y_{\mu+2}, \ldots, y_m)}$$

не былъ равенъ нулю, а это такъ и будетъ, потому что

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_i} = -1, \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} = 0$$

и разсматриваемый опредѣлитель приводится къ $(-1)^{m-\mu}\mathfrak{J}$. Поэтому, если $b_1, b_2, \ldots, b_m$ будутъ значенія функцій $y_1, y_2, \ldots, y_m$ въ точкѣ $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, въ окрестности которой мы допускаемъ существованіе и непрерывность первыхъ частныхъ производныхъ функцій $f_1, f_2, \ldots, f_m$, то система (31) опредѣляетъ величины (32), какъ неявныя функціи отъ остальныхъ перемѣнныхъ въ окрестности точки $(b_1, b_2, \ldots, b_\mu, a_{\mu+1}, a_{\mu+2}, \ldots, a_n)$. Другими словами, каждой системѣ значеній, по произволу выбранныхъ для чиселъ (33), лишь бы эти значенія находились въ извѣстной близости къ точкѣ $(b_1, b_2, \ldots, b_\mu, a_{\mu+1}, a_{\mu+2}, \ldots, a_n)$, мы получимъ вполнѣ опредѣленныя значенія для чиселъ (32). Слѣдовательно, если представимъ себѣ, что первымъ μ изъ перемѣнныхъ x даны именно эти только что упомянутыя значенія, а остальнымъ $n-\mu$ данныя имъ первоначально значенія, то $y_1, y_2, \ldots, y_\mu$ примутъ назначенныя имъ значенія, которыя можно выбрать по произволу въ извѣстныхъ границахъ. Итакъ, первыя μ функцій y дѣйствительно независимы одна отъ другой.

b) Остается еще показать, что остальныя $m-\mu$ будутъ функціями первыхъ μ. Изъ предыдущаго видно только, что каждая изъ нихъ есть функція отъ $y_1, y_2, \ldots, y_\mu$ и $x_{\mu+1}, x_{\mu+2}, \ldots, x_n$. Слѣдовательно, достаточно показать, что если i и j больше μ, то функціи y_j не зависятъ отъ x_i. Но, взявъ производныя по x_i отъ уравненій (31), продолжая при этомъ разсматривать величины (32), какъ функціи отъ величины (33), получимъ

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_i} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial x_\mu}\frac{\partial x_\mu}{\partial x_i} + \frac{\partial f_1}{\partial x_i} = 0,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_i} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial f_2}{\partial x_\mu}\frac{\partial x_\mu}{\partial x_i} + \frac{\partial f_2}{\partial x_i} = 0,$$

. . . .

$$\frac{\partial f_\mu}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_i} + \frac{\partial f_\mu}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\mu}\frac{\partial x_\mu}{\partial x_i} + \frac{\partial f_\mu}{\partial x_i} = 0,$$

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_i} + \frac{\partial f_j}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial f_j}{\partial x_\mu}\frac{\partial x_\mu}{\partial x_i} + \frac{\partial f_j}{\partial x_i} - \frac{\partial y_j}{\partial x_i} = 0,$$

откуда, исключая производныя отъ $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ по x_i, находимъ

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_\mu} & \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_\mu}{\partial x_1} & \frac{\partial f_\mu}{\partial x_2} \ldots & \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\mu} & \frac{\partial f_\mu}{\partial x_i} \\ \frac{\partial f_j}{\partial x_1} & \frac{\partial f_j}{\partial x_2} \ldots & \frac{\partial f_j}{\partial x_\mu} & \frac{\partial f_j}{\partial x_i} - \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \end{vmatrix} = 0,$$

т. е. $\mathfrak{J}\frac{\partial y_j}{\partial x_i} = 0$, и наконецъ, $\frac{\partial y_j}{\partial x_i} = 0$ (что и показываетъ, что y_j не зависитъ отъ x_i, при i и $j > \mu$) *).

579. Слѣдствіе. Необходимое и достаточное условіе для того, чтобы n функцій $u, v, w, \ldots$ отъ n перемѣнныхъ $x, y, z, \ldots$ были независимы между собою, состоитъ въ томъ, чтобы

$$\frac{\partial(u, v, w, \ldots)}{\partial(x, y, z, \ldots)} \gtrless 0.$$

Здѣсь также предполагается, что разсматриваемыя функціи имѣютъ непрерывныя первыя частныя производныя.

[**Примѣчаніе.** Относительно теоремъ §§ 578—579 надо замѣтить слѣдующее (ср. G. Kowalewsky, „Einführung in die Determinantentheorie“, § 127). Рангъ матриссы Якоби (§ 578) можетъ имѣть различныя значенія въ различныхъ точкахъ разсматриваемой области. Напримѣръ, Якобіева матрисса функцій $x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2$ имѣетъ рангъ n, когда всѣ x_i отличны отъ нуля, и рангъ $n-p$, когда p изъ нихъ равны нулю. Точку, въ окрестности которой рангъ матриссы Якоби не постояненъ (сколь бы малой ни сдѣлать эту окрестность), назовемъ *особенной*. Теорема §§ 578—579 не имѣетъ мѣста въ окрестности особенныхъ точекъ. Такъ, напримѣръ, функція x_1^2 и x_2, очевидно, независимы въ окрестности точки $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, а функціональный опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} 2x_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

равенъ нулю въ этой точкѣ и во всѣхъ точкахъ, для которыхъ $x_1 = 0$. Точки эти *особенныя*, потому что въ нихъ рангъ матриссы Якоби равенъ 1, а въ окрестности ихъ, гдѣ x_1 отлично отъ нуля, рангъ равенъ 2.]

---

*) Другой опредѣлитель изъ тѣхъ двухъ, на которые разлагается предыдущій, будетъ равенъ нулю, потому что его порядокъ $\mu + 1$ больше ранга матриссы.

580. Укажемъ въ заключеніе еще одно замѣчательное свойство функціональныхъ опредѣлителей, которое можно разсматривать, какъ обобщеніе правила разысканія производной функціи отъ функціи. Положимъ, что перемѣнныя y_j выражаются функціями отъ перемѣнныхъ x_i черезъ посредство другихъ функцій $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Такъ какъ по правилу дифференцированія функціи отъ функцій

$$\frac{\partial y_j}{\partial x_i} = \frac{\partial y_j}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \frac{\partial y_j}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial y_j}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_i},$$

то теорема объ умноженіи опредѣлителей тотчасъ показываетъ, что произведеніе опредѣлителей

$$\frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)}, \quad \frac{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

будетъ равно функціональному опредѣлителю функцій y_j по отношенію къ перемѣннымъ x_i, т. е.

$$\frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)} \cdot \frac{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}. \tag{34}$$

Въ частности, имѣемъ

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)} \cdot \frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = 1\ ^{*}). \tag{35}$$

581. Упражненія. a) Формула (34) заключаетъ въ себѣ, другую, выведенную нами раньше. Если хотимъ, напримѣръ, ввести новыя перемѣнныя въ функцію f, то можемъ написать

$$\frac{\partial(f, y, z, \ldots)}{\partial(u, v, w, \ldots)} = \frac{\partial(f, y, z, \ldots)}{\partial(x, y, z, \ldots)} \cdot \frac{\partial(x, y, z, \ldots)}{\partial(u, v, w, \ldots)},$$

а такъ какъ первый множитель въ правой части, очевидно, приводится къ $\frac{\partial f}{\partial x}$, то будемъ имѣть снова формулу (20)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\dfrac{\partial(f, y, z, \ldots)}{\partial(u, v, w, \ldots)}}{\dfrac{\partial(x, y, z, \ldots)}{\partial(u, v, w, \ldots)}}.$$

Аналогично этому получимъ

$$\frac{\partial(f, \varphi)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(f, \varphi, z, \ldots)}{\partial(x, y, z, \ldots)} = \frac{\dfrac{\partial(f, \varphi, z, \ldots)}{\partial(u, v, w, \ldots)}}{\dfrac{\partial(x, y, z, \ldots)}{\partial(u, v, w, \ldots)}}$$

---

*) Послѣдняя формула есть обобщеніе правила разысканія производной обратной функціи.

и, въ частности,

$$(36)\qquad \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{\dfrac{\partial(z,\ldots)}{\partial(w,\ldots)}}{\dfrac{\partial(x,y,z,\ldots)}{\partial(u,v,w,\ldots)}} \text{ и т. д.}$$

b) Чтобы показать пользу этихъ формулъ, ограничимся случаемъ трехъ перемѣнныхъ x, y, z, заданныхъ въ видѣ явныхъ функцій отъ u, v, w, и вычислимъ производныя отъ u, v, w по x, y, z, не выводя предварительно явныхъ выраженій u, v, w черезъ x, y, z. Мы предположимъ, что какъ x, y, z, такъ и u, v, w независимыя перемѣнныя, т. е.

$$\mathfrak{J} = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \gtrless 0.$$

Формула (20) тотчасъ дастъ

$$(37)\qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial(y,z)}{\partial(v,w)},\quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial(z,x)}{\partial(v,w)},\ \ldots,\ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial(y,z)}{\partial(w,u)},\ \ldots,$$

и задача рѣшена. Замѣтимъ, что нѣтъ надобности знать эти производныя, чтобы вычислить функціональный опредѣлитель системы u, v, w относительно x, y, z, такъ же какъ и его миноры второго порядка, потому что въ силу формулъ (35) и (36) или формулы (37) будемъ имѣть

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \frac{1}{\mathfrak{J}},\quad \frac{\partial(v,w)}{\partial(y,z)} = \frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial x}{\partial u},\quad \frac{\partial(v,w)}{\partial(z,x)} = \frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial y}{\partial u},\ \ldots.$$

Если требуется вычислить дифференціалы функцій u, v, w, то можно сперва написать полные дифференціалы отъ x, y, z. Затѣмъ формулы

$$(38)\qquad \left\{\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv + \frac{\partial x}{\partial w}dw,\\ dy &= \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv + \frac{\partial y}{\partial w}dw,\\ dz &= \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv + \frac{\partial z}{\partial w}dw \end{aligned}\right.$$

дадутъ значенія

$$du = \frac{1}{\mathfrak{J}}\left[\frac{\partial(y,z)}{\partial(v,w)}dx + \frac{\partial(z,x)}{\partial(v,w)}dy + \frac{\partial(x,y)}{\partial(v,w)}dz\right] \text{ и т. д.}$$

Изъ нихъ снова получаются формулы (37).

c) Въ нѣкоторыхъ приложеніяхъ примѣняютъ формулу (38) для вычисленія суммы $dx^2 + dy^2 + dz^2$, которая тотчасъ и преобразуется въ выраженіе

$$a\,du^2 + b\,dv^2 + c\,dw^2 + 2f\,dv\,dw + 2g\,dw\,du + 2h\,du\,dv,$$

гдѣ для сокращенія положено

$$a = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2, \quad b = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2, \quad \ldots, \quad f = \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w}, \quad \ldots {}^{*});$$

Важно замѣтить, что когда извѣстны шесть функцій a, b, c, f, g, h, то и функціональный опредѣлитель $\mathfrak{J}$ будетъ извѣстенъ, а именно:

$$\mathfrak{J}^2 = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}. \tag{39}$$

Подобнымъ же образомъ найдемъ и суммы

$$\sum \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2, \quad \sum \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2, \quad \ldots, \quad \sum \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \ldots,$$

значенія которыхъ равны соотвѣтственно минорамъ $bc - f^2$, $ca - g^2$, $\ldots$, $gh - af$, $\ldots$, раздѣленнымъ на $\mathfrak{J}^2$ **). Особенно замѣчателенъ тотъ случай, когда f, g, h тождественно равны нулю. Тогда на основаніи послѣднихъ замѣчаній получимъ $\Delta u = \frac{1}{a}$ и т. д., и, кромѣ того, можно доказать, что

$$\Delta^2 u = \frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial}{\partial u}\frac{\mathfrak{J}}{a}, \quad \Delta^2 v = \frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial}{\partial v}\frac{\mathfrak{J}}{b}, \quad \Delta^2 w = \frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial}{\partial w}\frac{\mathfrak{J}}{c}.$$

Отсюда слѣдуетъ (см. § 571, d), что, примѣняя операцію Δ^2 къ любой функціи, можно написать

$$\Delta^2 = \sum \left(\Delta u \cdot \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \Delta^2 u \cdot \frac{\partial}{\partial u}\right) = \frac{1}{\mathfrak{J}} \sum \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mathfrak{J}}{a}\frac{\partial}{\partial u}\right)$$

или

$$\Delta^2 = \frac{1}{\sqrt{abc}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\frac{bc}{a}}\cdot\frac{\partial}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{\frac{ca}{b}}\cdot\frac{\partial}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\sqrt{\frac{ab}{c}}\cdot\frac{\partial}{\partial w}\right)\right]. \tag{40}$$

Это формула Лямэ для пространства.

d) Если x, y, z зависятъ еще отъ одной перемѣнной t, независящей отъ u, v, w, то опредѣлитель $\mathfrak{J}$ будетъ вообще зависѣть отъ t, и можетъ встрѣтиться надобность вычислить производную $\mathfrak{J}'$, взятую по t. Обозначая

---

*) Какъ здѣсь, такъ и во всемъ дальнѣйшемъ, постоянно встрѣчаются суммы, состоящія изъ трехъ слагаемыхъ, получаемыхъ одно изъ другого черезъ круговую подстановку осей x-въ, y-овъ и z-въ, и всѣхъ другихъ буквъ, соотвѣтствующихъ этимъ осямъ. Въ такихъ случаяхъ, для сокращенія письма, вводится символъ Σ, подъ которымъ выписывается лишь одно изъ трехъ слагаемыхъ. Напримѣръ, если разсматриваются три группы буквъ (x, y, z), (u, v, w), (λ, μ, ν), то

$$\sum \lambda\left(\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial w}\right) = \lambda\left(\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial w}\right) + \mu\left(\frac{\partial z}{\partial w} - \frac{\partial x}{\partial u}\right) + \nu\left(\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial v}\right);$$

$$\sum \lambda \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w} = \lambda\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w} + \mu\frac{\partial y}{\partial w}\frac{\partial y}{\partial u} + \nu\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

**) См. §§ 29 и 30.

знакомъ $'$ производныя, взятыя по t, и примѣняя правило дифференцированія опредѣлителей (§ 373), получимъ

$$\mathfrak{J}' = \frac{\partial(x', y, z)}{\partial(u, v, w)} + \frac{\partial(x, y', z)}{\partial(u, v, w)} + \frac{\partial(x, y, z')}{\partial(u, v, w)}.$$

Раздѣляя на $\mathfrak{J}$, получимъ формулу

$$(41) \qquad (\log \mathfrak{J})' = \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial z'}{\partial z},$$

встрѣчающуюся въ Гидродинамикѣ. Мы воспользуемся ею, чтобы инымъ путемъ вывести формулу Лямэ[1]). Представимъ себѣ x, y, z, какъ функціи отъ независимыхъ перемѣнныхъ ξ, η, ζ, t, и производныя x', y', z', взятыя по t, какъ извѣстныя функціи отъ x, y, z. Ясно, что u, v, w, какъ функціи отъ x, y, z, также зависятъ отъ ξ, η, ζ и t. Производныя ихъ по t связаны съ x', y', z' соотношеніями

$$x' = u'\frac{\partial x}{\partial u} + v'\frac{\partial x}{\partial v} + w'\frac{\partial x}{\partial w}, \ldots$$

Если возьмемъ за x', y', z' частныя производныя нѣкоторой функціи $\varphi(x, y, z)$, то получимъ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = x'\frac{\partial x}{\partial u} + y'\frac{\partial y}{\partial u} + z'\frac{\partial z}{\partial u} = au' + hv' + gw', \quad \ldots.$$

Отсюда, обозначая черезъ $a_0, b_0, \ldots, h_0$ алгебраическія дополненія элементовъ $a, b, \ldots, h$ въ опредѣлителѣ (39), раздѣленныя на $\mathfrak{J}$, выводимъ, что

$$\mathfrak{J}\, u' = a_0\frac{\partial \varphi}{\partial u} + h_0\frac{\partial \varphi}{\partial v} + g_0\frac{\partial \varphi}{\partial w}, \quad \ldots$$

Установивъ это, примѣнимъ формулу (41) къ первому и третьему опредѣлителю въ равенствѣ

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \cdot \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)},$$

замѣтивъ предварительно, что формула (41) уже не примѣнима къ опредѣлителю $\mathfrak{J}$, такъ какъ u, v, w зависятъ отъ t. Тогда получимъ

$$\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial z'}{\partial z} = (\log \mathfrak{J})' + \frac{\partial u'}{\partial u} + \frac{\partial v'}{\partial v} + \frac{\partial w'}{\partial w}$$

$$= \frac{1}{\mathfrak{J}}\left[\frac{\partial}{\partial u}(\mathfrak{J} u') + \frac{\partial}{\partial v}(\mathfrak{J} v') + \frac{\partial}{\partial w}(\mathfrak{J} w')\right],$$

т. е.

$$\Delta^2 \varphi = \frac{1}{\mathfrak{J}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(a_0\frac{\partial \varphi}{\partial u} + h_0\frac{\partial \varphi}{\partial v} + g_0\frac{\partial \varphi}{\partial w}\right) + \cdots\right].$$

Въ частности, когда $f = g = h = 0$, имѣемъ

$$\mathfrak{J} = \sqrt{abc}, \quad a_0 = \sqrt{bc/a}, \quad b_0 = \sqrt{ca/b}, \quad c_0 = \sqrt{ab/c}, \quad f_0 = g_0 = h_0 = 0$$

и находимъ снова формулу (40).

---

[1]) Beltrami. Memorie dell' Accad. di Bologna, serie 3a, t. I, стр. 467.

ПРИЛОЖЕНІЯ КЪ ПЛОСКИМЪ КРИВЫМЪ.

Дифференціалъ дуги.

582. Строгое опредѣленіе длины дуги кривой линіи требуетъ рѣшенія нѣкоторыхъ весьма трудныхъ вопросовъ [1]), которые здѣсь мы постараемся обойти. Мы допустимъ, что имѣемъ уже интуитивное представленіе о длинѣ дуги, по крайней мѣрѣ, для тѣхъ немногихъ плоскихъ кривыхъ, которыя встрѣчаются въ приложеніяхъ. Для этихъ кривыхъ, которыя всѣ могутъ быть изображены геометрически, можно сдѣлать еще слѣдующее допущеніе: Всякая дуга можетъ быть раздѣлена на такія части MM', что въ то время, когда одинъ ея конецъ M' стремится къ совпаденію съ другимъ неподвижнымъ M, разсматриваемая дуга MM' все время обращена вогнутостью въ одну и ту же сторону. Длина такой дуги будетъ тогда заключаться между длиною ея хорды MM' и суммою отрѣзковъ на касательныхъ въ точкахъ M и M', между точками касанія и точкою Q пересѣченія касательныхъ. Предполагая производную y' отъ ординаты по абсциссѣ непрерывною, мы можемъ сказать, что съ приближеніемъ точки M' къ M, прямыя QM' и MM' будутъ стремиться къ совпаденію съ QM, а поэтому, при безконечно маломъ MM', углы QMM' и $QM'M$ будутъ также безконечно малы. Отсюда слѣдуетъ, что отношеніе отрѣзковъ QM и QM' къ ихъ проекціямъ на MM' стремится къ 1, и поэтому (§ 549) эти отрѣзки отличаются отъ своихъ проэкцій на безконечно малыя высшаго порядка. Поэтому и сумма $QM+QM'$, а тѣмъ болѣе и длина дуги MM', отличается отъ хорды MM' на безконечно малую высшаго порядка и, слѣдовательно,

$$\lim \frac{\text{дуга } MM'}{\text{хорда } MM'} = 1\,.$$

583. Обозначимъ теперь черезъ s длину дуги, у которой одинъ конецъ помѣщается въ произвольно выбранной неподвижной точкѣ A на кривой, а другой въ точкѣ M. Ясно, что s будетъ измѣняться вмѣстѣ съ координатами x и y точки M. Когда точка M придетъ въ точку M', координаты которой равны $x+\delta x$ и $y+\delta y$, то длина дуги s переходитъ въ $s+\delta s$, такъ что δs будетъ равно длинѣ дуги MM'. Обозначая черезъ l длину хорды MM', которая отличается отъ δs, а слѣдовательно, и отъ ds (§ 552) на безконечно малыя высшаго порядка, будемъ имѣть $l^2=\delta x^2+\delta y^2$. Замѣняя здѣсь l, δx и δy соотвѣтственно величинами ds, dx и dy, мы пренебрегаемъ въ обѣихъ частяхъ равенства безконечно малыми высшаго порядка. Но такъ какъ въ полученномъ такимъ образомъ соотношеніи

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \tag{1}$$

---

[1]) См., напр., „Cours d'Analyse" par. C. Jordan (2-е изд., 1-й томъ стр. 90—107).

не входятъ никакія безконечно малыя, кромѣ дифференціаловъ, то (§ 556) можно быть увѣреннымъ, что это соотношеніе точное.

[**Примѣчаніе.** Если желаемъ получить формулу (1), не ссылаясь на соображенія § 556, то можно поступить слѣдующимъ образомъ: Изъ формулы $l^2 = \delta x^2 + \delta y^2$ находимъ

$$\left(\frac{l}{\delta x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)^2 \text{ или } \left(\frac{l}{\delta s} \cdot \frac{\delta s}{\delta x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)^2.$$

Переходя къ предѣламъ и припоминая, что $\lim\left(\frac{l}{\delta s}\right) = 1$, получаемъ

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2,$$

а умножая обѣ части равенства на dx^2, находимъ

$$ds^2 = dx^2 + dy^2].$$

Эта важная формула и служитъ для вычисленія s. Она показываетъ, что, разсматривая s, какъ функцію отъ x, получимъ для производной отъ s по x выраженіе $\sqrt{1+y'^2}$, а въ седьмой книгѣ будетъ показано, какъ опредѣляется функція по данной ея производной. Если x независимая перемѣнная, то (§ 553) ds изображаетъ длину отрѣзка на касательной въ точкѣ M, между M и точкою пересѣченія касательной съ ординатою точки M'. Величина ds лишь тогда равна длинѣ дуги MM', когда s взята за независимую перемѣнную. Вообще же ds есть отрѣзокъ касательной между точками (x, y) и $(x + dx, y + dy)$.

[**Примѣчаніе.** Координаты произвольной точки $M(x, y)$ на всякой плоской кривой можно разсматривать, какъ функціи одного независимаго параметра t и задавать кривую двумя уравненіями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Функціи φ и ψ мы всегда будемъ предполагать непрерывными и имѣющими непрерывныя первыя производныя $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$. Въ частномъ случаѣ, когда за параметръ t взята абсцисса x, получаемъ изображеніе кривой однимъ уравненіемъ $y = \psi(x)$. Вообще каждому значенію t соотвѣтствуетъ опредѣленная точка на кривой. Выбравъ точку A, соотвѣтствующую нѣкоторому значенію $t = t_0$, за начало счета дугъ, мы выбираемъ также по произволу направленіе возрастающихъ или положительныхъ дугъ; обыкновенно это направленіе выбирается такъ, чтобы дуга AM возрастала, когда точка M движется по кривой въ ту сторону, въ которую надо подвинуться, чтобы параметръ t также возрасталъ. Подъ буквою s мы всегда подразумѣваемъ алгебраическую длину дуги AM, т. е. $s = +AM$, когда направленіе отъ A къ M совпадаетъ съ положительнымъ направленіемъ на кривой, и $s = -AM$ въ противоположномъ случаѣ. При такомъ условіи s будетъ функція отъ t, равная нулю при $t = t_0$ (когда M совпадаетъ съ A), и принимающая какъ положительныя, такъ и отрицательныя значенія. Формула $ds^2 = dx^2 + dy^2$ (1) остается справедливою, какъ бы мы ни выбирали направленіе возрастающихъ дугъ, но переходя отъ нея къ формулѣ

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}.$$

и, въ частности (при $t = x$) къ формулѣ

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2},$$

мы должны взять положительное или отрицательное значеніе корня, смотря по тому, возрастаетъ ли s или убываетъ при возрастаніи t (или x). То же замѣчаніе относится и къ формулѣ

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + r'^2},$$

выведенной въ концѣ § 584, когда $r = f(\theta)$ есть уравненіе кривой въ полярныхъ координатахъ.]

584. Преобразовывая формулу (1) къ полярнымъ координатамъ, получимъ (§ 558, d)

(2) $$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2.$$

Къ этой формулѣ можно, впрочемъ, придти, какъ и къ (1), непосредственно изъ геометрическихъ соображеній. Отложимъ на радіусѣ-векторѣ OM' длину $OM'' = OM = r$, и пусть P будетъ проекція точки M на прямую OM'. Тогда будемъ имѣть $l^2 = PM'^2 + MP^2$. Въ этомъ равенствѣ можно замѣнить l черезъ ds, $MP = r \sin \delta\theta$ сперва черезъ $r\delta\theta$, затѣмъ черезъ $rd\theta$, а PM', черезъ $M''M' = \delta r$, пренебрегая безконечно малою 2-го порядка $PM'' = r(1 - \cos\delta\theta)$, и окончательно черезъ dr. Тогда и получимъ соотношеніе (2), которое навѣрно будетъ точнымъ, потому что заключаетъ въ себѣ одни дифференціалы. Можно также исходить изъ равенства

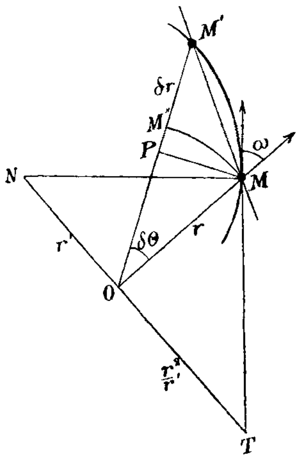

Рис. 29.

$$l^2 = r^2 + (r + \delta r)^2 - 2r(r + \delta r)\cos\delta\theta,$$

и можно a priori быть увѣреннымъ, что въ правой части сократятся, какъ конечные (т. е. не безконечно малые) члены, такъ и безконечно малые перваго порядка, и что ds^2 будетъ въ точности равно суммѣ безконечно малыхъ членовъ 2-го порядка, когда въ ней останутся одни лишь дифференціалы. И дѣйствительно, предыдущее выраженіе сведется къ слѣдующему

$$l^2 = \delta r^2 + 4r(r+\delta r)\sin^2\frac{\delta\theta}{2}.$$

Замѣняя здѣсь l черезъ ds, δr черезъ dr, $\sin\frac{\delta\theta}{2}$ черезъ $\frac{1}{2}\,d\theta$ и отбрасывая $r\,dr\,d\theta^2$, вновь получаемъ формулу (2). Этою формулою также пользуются для вычисленія s, замѣтивъ, что она даетъ для производной отъ s по θ выраженіе $\sqrt{r^2+r'^2}$.

585. Мы покажемъ теперь, что разность между безконечно малою дугою и соотвѣтствующею хордою, вообще говоря, будетъ безконечно малою третьяго порядка относительно самой дуги *). Дѣйствительно, (§ 564) формула Тэйлора даетъ

$$(3)\qquad \delta x = dx + \tfrac{1}{2}d^2x + \tfrac{1}{6}d^3x + \cdots,\quad \delta y = dy + \tfrac{1}{2}d^2y + \tfrac{1}{6}d^3y + \cdots,$$

какова бы ни была независимая перемѣнная. Если s взята за независимую перемѣнную (§ 558, е), то

$$dx^2 + dy^2 = ds^2,\qquad d^2x^2 + d^2y^2 = \frac{ds^4}{\varrho^2},$$

а двукратное дифференцированіе перваго изъ этихъ уравненій дастъ

$$dx\,d^2x + dy\,d^2y = 0,\quad dx\,d^3x + dy\,d^3y = -\frac{ds^4}{\varrho^2}.$$

Слѣдовательно,

$$l^2 = \delta x^2 + \delta y^2 = ds^2 - \frac{ds^4}{12\,\varrho^2} + \cdots$$

Пренебрегая безконечно малыми высшаго порядка и замѣняя въ частности въ равенствѣ

$$\delta s^2 - l^2 = \frac{ds^4}{12\,\varrho^2} + \cdots$$

$\delta s + l$ черезъ $2\,ds$, находимъ

$$\delta s - l = \frac{ds^3}{24\,\varrho^2} + \cdots$$

или въ точномъ видѣ

$$\lim\frac{\smile MM' - \text{хорда } MM'}{(\smile MM')^3} = \frac{1}{24\,\varrho^2}.$$

Для повѣрки этого результата въ частномъ случаѣ разсмотримъ на окружности круга радіуса ϱ дугу $MM' = 2\varrho\alpha$. Длина хорды

---

*) Въ нѣкоторыхъ особенныхъ точкахъ, какъ увидимъ дальше, порядокъ можетъ повыситься или понизиться.

$MM' = 2\varrho \sin\alpha$, и лѣвая часть предыдущаго равенства приводится къ

$$\lim_{\alpha=0} \frac{\alpha - \sin\alpha}{4\varrho^2 \alpha^3} = \frac{1}{24\varrho^2}.$$

Относительно разсматриваемаго здѣсь вопроса можно, слѣдовательно, сказать, что въ окрестности съ точкою M кривая линія уподобляется своему соприкасающемуся кругу (§ 348, e).

Касательная и нормаль.

586. На кривой линіи, изображаемой уравненіемъ $Y = f(X)$ въ прямоугольныхъ Декартовыхъ координатахъ, возьмемъ нѣкоторую точку M, координаты которой обозначимъ черезъ x и y. Уравненіе всякой прямой, проходящей черезъ M, будетъ $Y - y = m(X - x)$, и, какъ извѣстно (§ 293), для касательной $m = y'$ и, слѣдовательно, $m = -\frac{1}{y'}$ для нормали. Поэтому уравненіе касательной и нормали будутъ соотвѣтственно

$$(4) \qquad Y - y = y'(X - x), \qquad Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x).$$

гдѣ y' или $f'(x)$ есть значеніе $f'(X)$ въ точкѣ M. Въ Дифференціальномъ Исчисленіи касательную разсматриваютъ съ болѣе простой точки зрѣнія, а именно (§ 553), какъ прямую, соединяющую точки (x, y) и $(x + dx,\ y + dy)$. На основаніи этого замѣчанія можно прямо написать уравненія касательной и нормали въ видѣ

$$(5) \qquad \frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy}, \qquad (X - x)\,dx + (Y - y)\,dy = 0,$$

отъ котораго тотчасъ можно перейти къ (4), написавъ $y'dx$ вмѣсто dy и сокративъ на общій множитель dx. Формулы (5) оказываются особенно удобными въ томъ случаѣ, когда кривая задана уравненіемъ $X = \varphi(t)$, $Y = \psi(t)$. Если далѣе кривая задана уравненіемъ $f(X, Y) = 0$, то для всякой ея точки имѣемъ

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0,$$

и уравненія (5) принимаютъ видъ

$$(6) \qquad (X - x)\frac{\partial f}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \qquad \frac{X - x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{Y - y}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

И къ этимъ уравненіямъ можно придти непосредственно. Дѣйствительно, направленіе, по которому функція $f(X, Y)$ стремится сохранить то значеніе, которое оно имѣетъ въ точкѣ (x, y), т. е.

значеніе, равное 0, есть направленіе касательной, а потому (§ 568) косинусы угловъ, образуемыхъ нормалью съ осями координатъ, пропорціональны частнымъ производнымъ функціи f, вычисленнымъ для точки (x, y), при чемъ предполагается, что эти производныя не равны нулю одновременно. Впрочемъ, первое изъ уравненій (6) можно разсматривать, какъ уравненіе, къ которому приводится уравненіе самой кривой, если мы отбросимъ безконечно малыя высшаго порядка въ выраженіяхъ координатъ точекъ, смежныхъ съ (x, y), и примемъ во вниманіе, что въ уравненіи

$$f(X,\ Y) = f(x, y) + (X-x)\frac{\partial f}{\partial x} + (Y-y)\frac{\partial f}{\partial y} + \cdots$$

$f(x, y)$ равно нулю. Дѣйствительно, мы уже замѣтили раньше (§ 553), что при упомянутомъ условіи, кривая, въ окрестности точки касанія, замѣняется касательною прямою. Въ приложеніяхъ полезно запомнить уравненіе касательной и нормали во всѣхъ трехъ формахъ (4), (5) и (6), и примѣнять ту или другую, смотря по тому, которая будетъ удобнѣе.

587. Полезно также умѣть написать уравненіе касательной къ алгебраической кривой въ однородномъ видѣ. Положимъ, что дано уравненіе кривой $f(X,\ Y) = 0$ въ цѣломъ раціональномъ видѣ. Извѣстно, что для приведенія его къ однородному виду надо оставить безъ измѣненія члены наивысшей степени n, и умножить члены $(n-1)$-ой, $(n-2)$-ой и т. д. степени соотвѣтственно на Z, Z^2 и т. д. Такимъ путемъ уравненіе приведется къ однородному виду $f(X,\ Y,\ Z) = 0$, и стоитъ только положить $Z = 1$, чтобы снова получить первоначальное уравненіе. Для точки $(x,\ y,\ z)$, лежащей на кривой, имѣемъ $f(x,\ y,\ z) = 0$, и по теоремѣ Эйлера (§ 372)

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = nf(x,\ y,\ z) = 0.$$

Припомнимъ теперь, что въ неоднородныхъ Декартовыхъ координатахъ уравненіе касательной было

$$(X-x)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1 + (Y-y)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1 = 0,$$

гдѣ $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1$ и $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1$ обозначаютъ результатъ подстановки $z = 1$ въ $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$. Поэтому будемъ имѣть

$$x\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1 + y\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_1 = 0,$$

и послѣднее уравненіе обращается въ

$$X\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1 + Y\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_1 = 0,$$

или, дѣлая его однороднымъ, въ

$$X\frac{\partial f}{\partial x}+Y\frac{\partial f}{\partial y}+Z\frac{\partial f}{\partial z}=0.$$

588. Уравненіями касательной и нормали пользуются тогда, когда эти прямыя встрѣчаются въ вопросахъ Аналитической Геометріи. Если же требуется только построить касательную и нормаль въ данной точкѣ $M(x, y)$ на кривой, то достаточно указать еще только одну точку, которую надо соединить съ M, чтобы получить касательную или нормаль. Съ этой цѣлью часто вычисляютъ длины нѣкоторыхъ отрѣзковъ, называемыхъ подкасательною и поднормалью. Если P есть проекція точки M на ось x-овъ, а T и N точки пересѣченія касательной и нормали съ тою же осью, то отрѣзокъ TP называютъ подкасательною, PN поднормалью. Изъ чертежа (который читатель легко сдѣлаетъ самъ) тотчасъ находимъ

$$TP=y\cot\varphi=\frac{y}{y'},\qquad PN=y\operatorname{tg}\varphi=yy'.$$

[**Примѣчаніе**. Для опредѣленія положенія на оси x-овъ точекъ N и T, которыя надо соединить съ точкою M на кривой, чтобы построить нормаль и касательную, недостаточно знать абсолютныя значенія отрѣзковъ PN и PT; необходимо еще знать направленіе, въ которомъ надо отложить длины этихъ отрѣзковъ отъ точки P, для полученія точекъ N и T. Условимся считать PN и PT положительными или отрицательными, смотря по тому, будутъ ли направленія отъ P къ N и отъ P къ T совпадать съ положительнымъ или съ отрицательнымъ направленіемъ оси x-овъ. Тогда, какъ извѣстно изъ Аналитической Геометріи, всегда будемъ имѣть $PN=\xi_N-x$, $PT=\xi_T-x$, гдѣ ξ_N и ξ_T будутъ абсциссы точекъ N и P, т. е. значенія X, получаемыя изъ уравненія нормали и изъ уравненія касательной при $Y=0$. Уравненіе нормали

$$Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x)$$

даетъ при $Y=0$, $\xi_N-x=yy'$, а уравненіе касательной

$$Y-y=y'(X-x)$$

при томъ же предположеніи $\xi_T-x=-\frac{y}{y'}\cdot$ Слѣдовательно, будемъ имѣть по величинѣ и по знаку $PN=yy'$, $PT=-\frac{y}{y'}\cdot$ Отсюда видимъ, что, если въ точкѣ M y и y' одинаковыхъ знаковъ, то точка N лежитъ съ положительной, а точка T съ отрицательной стороны отъ P; противоположное расположеніе получимъ, когда y и y' — разныхъ знаковъ.]

При употребленіи полярныхъ координатъ, для построенія касательной, полезно знать уголъ ω, образуемый касательною съ радіусомъ векторомъ точки касанія. Въ треугольникѣ MPM', который мы разсматривали въ § 584, имѣемъ

$$\operatorname{tg}\omega = \lim \operatorname{tg} OM'M = \lim \frac{MP}{PM'} = \lim \frac{MM''}{M''M'} = \lim \frac{r\delta\theta}{\delta r} = \frac{r}{r'}.$$

Если изъ полюса O проведемъ перпендикуляръ къ радіусу вектору и замѣтимъ точки T и N, въ которыхъ онъ пересѣкаетъ касательную и нормаль, то отрѣзокъ OT называется полярною подкасательною, а отрѣзокъ ON полярною поднормалью. Длины ихъ, очевидно, выражаются формулами

$$OT = r\operatorname{tg}\omega = \frac{r^2}{r'}, \quad ON = r\cot\omega = r'.$$

Подъ длиною нормали подразумѣваютъ абсолютную длину отрѣзка нормали между точкою M на кривой и точкою пересѣченія нормали съ осью абсциссъ, въ случаѣ Декартовыхъ координатъ, и съ перпендикуляромъ изъ полюса къ радіусу вектору, въ случаѣ полярныхъ координатъ. Очевидно, длина нормали равна соотвѣтственно

$$y\sqrt{1+y'^2} \text{ или } \sqrt{r^2+r'^2}.$$

[**Примѣчаніе.** Въ формулѣ $\operatorname{tg}\omega = \frac{r}{r'}$ подъ ω подразумѣваемъ острый или тупой уголъ, смотря по тому, будутъ ли r и r' одинаковыхъ или разныхъ знаковъ. Нетрудно убѣдиться, что формулы $OT = \frac{r^2}{r'}$ и $ON = r'$ будутъ всегда справедливы, если будемъ считать OT положительнымъ, когда направленіе отъ O къ T соотвѣтствуетъ углу $\theta - \frac{\pi}{2}$, а ON положительнымъ, когда направленіе отъ O къ N соотвѣтствуетъ углу $\theta + \frac{\pi}{2}$, и, конечно, отрицательными въ противномъ случаѣ. Для дальнѣйшаго важно замѣтить еще слѣдующее: при изслѣдованіи кривыхъ, заданныхъ уравненіями въ полярныхъ координатахъ, мы будемъ считать, что какъ уголъ θ, такъ и радіусъ векторъ r могутъ принимать всевозможныя значенія отъ $-\infty$ до $+\infty$. При этомъ, если какому-нибудь значенію $\theta = \theta_1$ соотвѣтствуетъ положительное значеніе $\varrho = \varrho_1$, то для построенія точки (ϱ_1, θ_1) мы отложимъ длину ϱ_1 отъ точки O въ томъ направленіи, которое опредѣляется угломъ θ_1, а если при $\theta = \theta_1$, значеніе $\varrho = \varrho_1$ будетъ отрицательно, то мы отложимъ длину $(-\varrho_1)$ по направленію противоположному. Это соглашеніе даетъ возможность весьма часто однимъ и тѣмъ же уравненіемъ изобразить различныя вѣтви кривой, которыя иначе потребовали бы различныхъ уравненій для своего изображенія. Для бо́льшихъ подробностей мы можемъ рекомендовать читателю Briot et Bouquet „Leçons de Géométrie analytique“ 16-е изданіе (1897 г.), стр. 452, гдѣ приведены многіе примѣры построенія кривыхъ, заданныхъ въ полярныхъ координатахъ.]

589. Упражненія. a) Для параболы второго порядка построеніе нормали особенно просто (см. § 294, a). А именно, если примемъ ось параболы за ось абсциссъ, то найдемъ, что поднормаль — величина постоянная. Эго свойство, кромѣ того, характерно для этой кривой, потому что изъ уравненія $yy' = a$ слѣдуетъ $\frac{1}{2}y^2 = ax + \text{const.}$, а помѣстивъ начало координатъ на кривой, получимъ $y^2 = 2ax$.

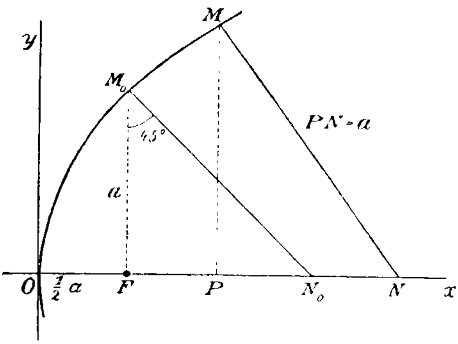

Рис. 30.

b) Для какой кривой подкасательная — величина постоянная?

По условію $\frac{y}{y'} = a$, т. е производная $\log y$ должна быть равна постоянной $\frac{1}{a}$. Припоминая, что двѣ функціи, имѣющія равныя производныя, отличаются одна отъ другой лишь постояннымъ слагаемымъ, находимъ

$$\log y = \frac{x}{a} + \text{const.}$$

Постоянную можно взять равною $\log a$, выбравъ подлежащимъ образомъ начало координатъ на оси x-овъ, и получаемъ *логариѳмическую кривую*

$$y = a e^{\frac{x}{a}}.$$

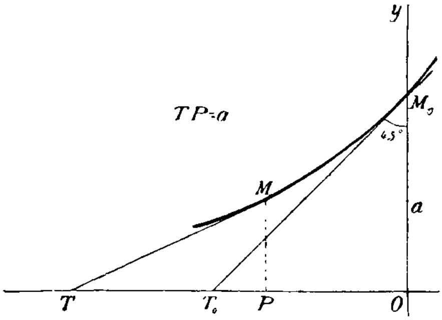

Рис. 31.

c) Одна изъ весьма интересныхъ кривыхъ (уже разсмотрѣнная въ § 527, f) изображается уравненіемъ $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ или (§ 408)

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Она называется *цѣпною линіею*, потому что гибкая, нерастяжимая нить, тяжелая и однородная, какъ доказывается въ Механикѣ, принимаетъ форму этой линіи, будучи привѣшена за оба конца. Кромѣ того, та же линія, повернутая вершиною A къ верху, даетъ профиль свода безъ тренія. Мы имѣемъ здѣсь

$$y' = \operatorname{sh}\frac{x}{a} = \operatorname{tg}\varphi,$$

гдѣ φ — гиперболическая амплитуда (§ 409) отъ $\frac{x}{a}$. Отсюда слѣдуетъ

$$\operatorname{ch}\frac{x}{a} = \sec\varphi \text{ и } y\cos\varphi = a,$$

т. е. проекція ординаты на нормаль есть величина постоянная. Кромѣ того, изъ

$$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{\cos\varphi} = \frac{y}{a} = ay''$$

имѣетъ $ds = a\,dy'$, откуда $s = a\operatorname{tg}\varphi$, если дуга отсчитывается отъ вершины A. Слѣдовательно, для спрямленія дуги AM, надо проектировать ординату точки M на касательную въ этой точкѣ.

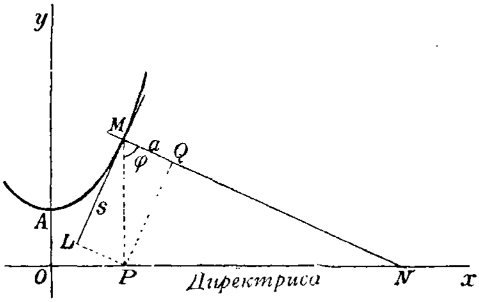

Рис. 32.

d) Въ Механикѣ также доказывается, что существуетъ такое распредѣленіе плотности нити, при которомъ она въ каждой точкѣ представляетъ одинаковое сопротивленіе разрыву. Но тогда нить принимаетъ иную форму, форму кривой, носящей названіе, соотвѣтственно вышеуказанному свойству, *цѣпной линіи равнаго сопротивленія*. Она изображается уравненіемъ $y = -a\log\cos\frac{x}{a}$. Она состоитъ изъ безчисленнаго множества вѣтвей, одна изъ нихъ лежитъ между асимптотами[1]) $x = \pm\frac{\pi}{2}a$ и касается оси абсциссъ въ началѣ координатъ; другія получатся, если будемъ передвигать эту первую вѣтвь параллельно оси абсциссъ въ обѣ стороны на величину $2\pi a$ сколько угодно разъ. Центральная вѣтвь, обращенная вершиною къ верху даетъ профиль свода безъ перегрузки.

e) Весьма замѣчательна *логариѳмическая спираль*, т. е. кривая, пересѣкающая подъ однимъ и тѣмъ же угломъ пучокъ прямыхъ, выходящихъ изъ одной точки*). Если уголъ ω величина постоянная, и положимъ $m = \operatorname{cotg}\omega$, то изъ уравненія $\operatorname{tg}\omega = \frac{r}{r'}$ получимъ $\frac{r'}{r} = m$, откуда $\log r = m\theta + \log a$ и, наконецъ, $r = ae^{m\theta}$, гдѣ a также постоянная величина. Это и есть (знакомое уже на основаніи сказаннаго въ § 412) уравненіе логариѳмической спирали.

---

[1]) Объ асимптотахъ, о которыхъ читатель уже знаетъ изъ Аналитической Геометріи, подробнѣе будетъ сказано въ § 596.

*) Если этотъ уголъ равенъ $\frac{\pi}{2}$, логариѳмическая спираль, очевидно, обращается въ окружность круга.

Полярная поднормаль $r' = mr$, полярная подкасательная $\frac{r^2}{r'} = \frac{r}{m}$, слѣдовательно, и та и другая пропорціональны радіусу вектору. Далѣе, имѣемъ

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + r'^2} = \frac{\sqrt{1+m^2}}{m} r', \quad s = \frac{r}{\cos\omega} = MT.$$

Слѣдовательно, когда точка M описываетъ кривую, то длина дуги спирали, отсчитываемая отъ полюса, въ каждый моментъ равна длинѣ отрѣзка MT. Изъ этого свойства непосредственно вытекаетъ другое, благодаря которому логариѳмическою спиралью и пользуются на практикѣ, а именно: когда спираль катится безъ скольженія по нѣкоторой прямой, то полюсъ ея описываетъ также прямую. Наконецъ, эта кривая даетъ случай замѣтить, что при нѣкоторыхъ условіяхъ отношеніе безконечно малой дуги къ ея хордѣ (см. § 582) можетъ и не стремиться къ 1. Дѣйствительно, когда точка M. двигаясь по спирали, стремится къ совпаденію съ полюсомъ O, то отношеніе хорды OM къ дугѣ OM остается постоянно равнымъ $\cos\omega$. Надо, однако, замѣтить, что въ точкѣ O не существуетъ касательной *).

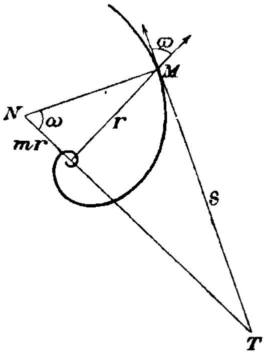

Рис. 33.

f) Чтобы получить кривую, имѣющую постоянную полярную поднормаль, надо положить $r' = a$. Отсюда, прилично выбирая положеніе полярной оси, будемъ имѣть $r = a\theta$. Кривая, изображаемая этимъ уравненіемъ, называется *Архимедовой спиралью*. При возрастаніи θ отъ 0 до ∞, ω возрастаетъ отъ 0 до $\frac{\pi}{2}$, такъ какъ $\operatorname{tg}\omega = \theta$. Слѣдовательно, кривая касается полярной оси въ полюсѣ, а затѣмъ пересѣкаетъ различные радіусы векторы подъ углами, все болѣе и болѣе приближающимися къ прямому, т. е. стремится сдѣлаться нормальною къ радіусу вектору. Концы N полярныхъ поднормалей, очевидно, лежатъ на окружности круга радіуса a съ центромъ въ полюсѣ. Изъ каждой точки окружности этого круга можно провести безчисленное множество нормалей къ кривой, точки встрѣчи которыхъ съ кривою лежатъ на прямой, проходящей черезъ полюсъ. Это свойство, однако, далеко не характеризуетъ Архимедову спираль. Тѣмъ же свойствомъ обладаютъ, напримѣръ, кривыя, изображаемыя уравненіемъ

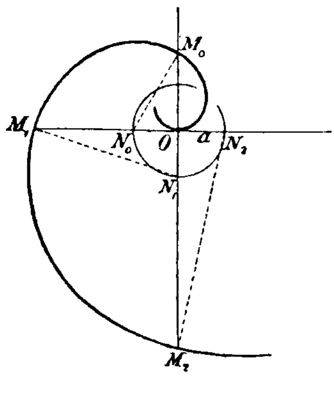

Рис. 34.

$$\theta = \frac{r}{a} + k \log\frac{r}{a},$$

къ которымъ, при $k = 0$, принадлежитъ и Архимедова спираль. Другое свойство можетъ быть прямо выведено изъ уравненія $r = a\theta$. Построимъ кругъ, концентрическій съ кру-

*) Собственно говоря, полюсъ O не принадлежитъ кривой, потому что r никогда не равенъ нулю, а приближается къ нулю безпредѣльно, когда θ стремится къ $-\infty$ (при $m>0$). Слѣдовательно, полюсъ есть асимптотическая точка, къ которой кривая безпредѣльно приближается, дѣлая около нея безконечное число оборотовъ.

гомъ радiуса a, при чемъ радiусъ второго круга можно выбрать по произволу, лишь бы онъ былъ больше a (фиг. 35). Продоживъ радiусы векторы OM и OM' до встрѣчи съ окружностью этого круга въ точкахъ Q и Q', проведемъ изъ этихъ точекъ касательныя QP и $Q'P'$ къ первому кругу. Треугольники OPQ и $OP'Q'$, очевидно, между собою равны, а потому, уголъ POP' равенъ углу $QOQ' = \delta\theta$. Поэтому длина дуги $PP' = a\delta\theta = \delta r$. Принявъ неподвижную точку A на окружности внутренняго круга за начало дугъ, будетъ имѣть

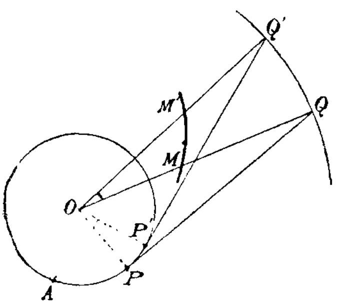

Рис. 35.

$$\smile PP' = \smile AP' - \smile AP,$$

$$\delta r = OM' - OM = QM - Q'M',$$

а отсюда, складывая съ равенствомъ $PQ = P'Q'$, получимъ

$$\smile AP + PQ + QM = \smile AP' + P'Q' + Q'M',$$

т. е. сумма $\smile AP + PQ + QM$ остается постоянной при движенiи M по спирали. Поэтому эту точку M можно связять съ неподвижною точкою A гибкою нерастяжимою нитью, которая, оставаясь всегда натянутою, должна навертываться на окружность внутренняго круга и проходить черезъ точку Q, двигающуюся по окружности внѣшняго круга. На этомъ основано устройство простого прибора, служащаго для черченiя Архимедовой спирали [1]. На томъ же свойствѣ ($\delta r = a\,\delta\theta$) основано приложенiе Архимедовой спирали, какъ профиля эксцентрика, предназчаченнаго для производства равномѣрнаго движенiя.

Примѣчанiе. Упомянутое выше свойство Архимедовой спирали, вытекающее прямо изъ постоянства полярной поднормали, можно формулировать слѣдующимъ образомъ: нормали во всѣхъ точкахъ спирали, лежащихъ на одномъ и томъ же радiусѣ векторѣ, пересѣкаются въ одной и той же точкѣ на окружности круга радiуса a, съ центромъ въ полюсѣ O. Аналогичное свойство кривой

$$\theta = \frac{r}{a} + k \log \frac{r}{a} \tag{1}$$

состоитъ въ томъ, что нормали во всѣхъ точкахъ кривой, лежащихъ на одномъ и томъ же радiусѣ векторѣ, пересѣкаются въ одной и той же точкѣ на окружности круга радiуса $a\sqrt{1+k^2}$ съ центромъ въ полюсѣ O. Доказать это свойство можно слѣдующимъ образомъ. Замѣтимъ сперва, что всѣ точки, лежащiя на одномъ и томъ же радiусѣ векторѣ соотвѣтствуютъ значенiямъ θ, отличающимся одно отъ другого на $2l\pi$, гдѣ l цѣлое число. Вопросъ, очевидно, сведется къ тому, чтобы показать. что нормали въ точкахъ (r_1, θ_1) и (r_2, θ_2), гдѣ $\theta_2 = \theta_1 + 2l\pi$, пересѣкутся въ точкѣ (X, Y), гдѣ X и Y не зависятъ отъ l и удовлетворяютъ уравненiю $X^2 + Y^2 = a^2(1+k^2)$. Обозначая черезъ x и y Декартовы координаты любой точки (r, θ) по кривой (1), и полагая $\frac{r}{a} = t$, получимъ $x = at\cos(t + k\log t)$, $y = at\sin(t + k\log t)$. Обозначая черезъ t_1 и t_2 значенiя параметра t, соотвѣтствующiя значенiямъ θ_1 и θ_2 угла θ, и составляя уравненiя нормалей въ этихъ точкахъ по формулѣ

$$(X - x)\,dx + (Y - y)\,dy = 0,$$

[1]) См. Клиффордъ „Здравый смыслъ въ точныхъ наукахъ", перев. Кулишера (Москва 1910), стр. 196.

найдемъ для нормали въ точкѣ (t_1) уравненіе

$$M_1 Y + N_1 X = a t_1, \tag{2}$$

гдѣ

$$M_1 = (t_1 + k)\cos\theta_1 + \sin\theta_1,$$
$$N_1 = \cos\theta_1 - (t_1 + k)\sin\theta_1,$$

а для нормали въ точкѣ (t_2) уравненіе

$$M_2 Y + N_2 X = a t_2, \tag{3}$$

гдѣ

$$M_2 = (t_2 + k)\cos\theta_1 + \sin\theta_1,$$
$$N_2 = \cos\theta_1 - (t_2 + k)\sin\theta_1,$$

такъ какъ

$$\cos\theta_2 = \cos\theta_1, \quad \sin\theta_2 = \sin\theta_1;$$

замѣчаемъ, что

$$M_1 \sin\theta_1 + N_1\cos\theta_1 = 1, \quad M_2\sin\theta_1 + N_2\cos\theta_1 = 1,$$

и

$$M_1 N_2 - M_2 N_1 = t_1 - t_2.$$

Въ силу этихъ равенствъ, для ординатъ точки (X, Y) пересѣченія нормалей (2) и (3) получимъ выраженія

$$X = a(\sin\theta_1 - k\cos\theta_1), \quad Y = a(\cos\theta_1 - k\sin\theta_1)$$

и

$$X^2 + Y^2 = a^2(1 + k^2),$$

что и требовалось показать].

g) Разсмотримъ теперь кривую, характеризуемую свойствомъ имѣть постоянную полярную подкасательную. Она называется *гиперболическою спиралью* и изображается уравненіемъ $r\theta = a$. Съ приближеніемъ θ къ 0, r возрастаетъ безпредѣльно; слѣдовательно, кривая имѣетъ безконечную вѣтвь, постоянно приближающуюся къ прямой, отстоящей отъ полярной оси въ разстояніи a, потому что

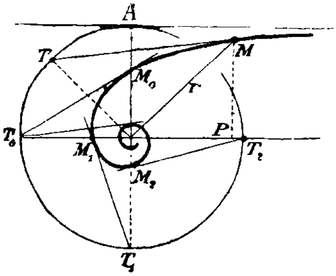

Рис. 36.

$$\lim_{\theta=0} r\sin\theta = a.$$

Наоборотъ, при безпредѣльномъ возрастаніи θ, r стремится къ нулю, постоянно убывая, т. е. кривая оборачивается вокругъ полюса безконечно большое число разъ, никогда его не достигая. Точки T, концы полярныхъ подкасательныхъ, очевидно, лежатъ на окружности круга радіуса a съ центромъ въ полюсѣ. Изъ каждой точки этой окружности можно провести безчисленное множество касательныхъ къ кривой, точки касанія которыхъ лежатъ на прямой, проходящей черезъ полюсъ. Полная неопредѣленность касательной въ полюсѣ (условно причисляемой къ точкамъ на кривой), становится такимъ образомъ, очевидною.

h) Послѣднее свойство гиперболической спирали принадлежитъ и другимъ кривымъ, и между прочимъ, такъ называемой, *кохлеоидѣ* (Kochleoide), изображаемой уравненіемъ $r = a\dfrac{\sin\theta}{\theta}$. Дѣйствительно,

$$\operatorname{cotg}\omega = \frac{r'}{r} = \operatorname{cotg}\theta - \frac{1}{\theta}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\sin(\omega - \theta)}{\sin\omega} = \frac{\sin\theta}{\theta} = \frac{r}{a}.$$

Съ другой стороны (рис. 37), если проведемъ прямую OS, симметричную съ полярною осью OA относительно радіуса вектора OM, и отмѣтимъ точку S пересѣченія этой прямой съ касательною въ точкѣ M, то въ треугольникѣ OMS будемъ имѣть

$$OS = \frac{r \sin \omega}{\sin(\omega - \theta)} = a,$$

т. е. S лежитъ на окружности круга радіуса a съ центромъ въ полюсѣ. Слѣдовательно, касательныя въ безчисленномъ множествѣ точекъ, лежащихъ на одномъ и томъ же радіусѣ векторѣ, встрѣчаются въ одной точкѣ S упомянутаго круга, подобно тому, какъ это имѣетъ мѣсто въ гиперболической спирали. Но въ кохлеоидѣ точка S симметрична съ вершиною $A(\theta = 0)$ относительно радіуса вектора, а въ гиперболической спирали точка S лежитъ на перпендикулярѣ къ радіусу вектору, проведенномъ черезъ полюсъ.

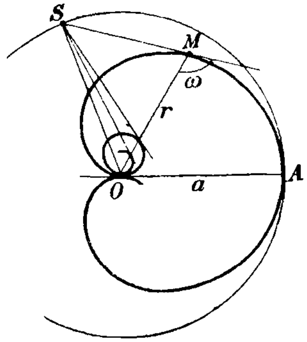

Рис. 37.

[**Примѣчаніе.** Изслѣдованіе уравненія $r = a\dfrac{\sin\theta}{\theta}$ показываетъ, что кохлеоида проходитъ черезъ точку A на полярной оси въ разстояніи a отъ полюса, затѣмъ проходитъ безчисленное множество разъ черезъ полюсъ, касаясь въ немъ полярной оси, и въ то же время постоянно и безпредѣльно къ нему приближается. Кромѣ того, она симметрична относительно полярной оси.]

i) Кривая, изображаемая уравненіемъ $r = \dfrac{a\theta}{\sin\theta}$, называется *квадратрисою* (Диностра́та) (рис. 38). Она состоитъ изъ безчисленнаго множества вѣтвей, изъ которыхъ одна, лежащая между асимптотами $x = \pm \pi a$, имѣетъ нѣкоторое сходство съ одною изъ вѣтвей цѣпной линіи равнаго сопротивленія. Эта кривая замѣчательна по тому употребленію, которое изъ нея дѣлали древніе въ вопросѣ о квадратурѣ круга[1]). Построеніе нормали въ данной точкѣ основано на томъ замѣчаніи, что проекція полярной нормали на полярную ось есть величина постоянная. Дѣйствительно, изъ уравненія $r\sin\theta = a\theta$ получается путемъ дифференцированія

$$r\cos\theta + r'\sin\theta = a.$$

Изъ уравненія въ Декартовыхъ координатахъ $\left(y = x\operatorname{cotg}\dfrac{x}{a}\right)$ увидимъ, пользуясь разложеніемъ въ рядъ: $x\operatorname{cotg}\dfrac{x}{a} = a - \dfrac{x^2}{3a} + \cdots$, что въ окрестности вершины кривая эта уподобляется параболѣ $x^2 = 3ay$.

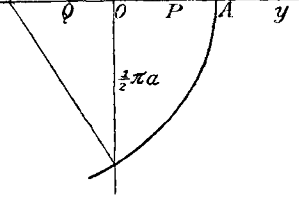

Рис. 38.

1) См. „Лекціи по избраннымъ вопросамъ элементарной геометріи". Казань 1898.

j) Если увеличимъ или уменьшимъ каждый радіусъ векторъ нѣкоторой кривой на постоянную длину, то получимъ новую кривую, которая называется конхоидою данной кривой. Такъ какъ r' не мѣняется отъ увеличенія или уменьшенія r на постоянную, то тотчасъ видимъ, что нормали всѣхъ конхоидъ данной кривой въ точкахъ, лежащихъ на одномъ и томъ же радіусѣ векторѣ, пересѣкаются въ одной точкѣ, лежащей на перпендикулярѣ къ радіусу вектору, проведенномъ черезъ полюсъ. Это свойство даетъ средство для построенія нормали къ данной кривой, если извѣстно построеніе нормали къ одной изъ ея конхоидъ.

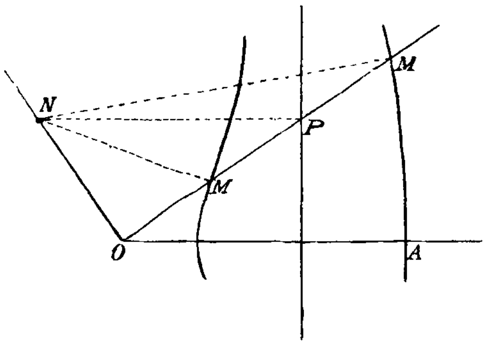

Рис. 39.

Интересно замѣтить, что всѣ конхоиды Архимедовой спирали относительно полюса будутъ равныя между собою спирали, изображающія безчисленное множество положеній, которыя можетъ принять данная спираль при вращеніи ея около полюса. Замѣчательна кривая — называемая просто *конхоидою*, т. е. конхоидою прямой линіи. Она имѣетъ различный видъ въ зависимости отъ того, будетъ ли постоянная длина, откладываемая по радіусамъ векторамъ больше или меньше разстоянія отъ полюса до прямой. Эта кривая была изобрѣтена древними для рѣшенія задачи о трисекціи угла [1]).

k) Еще важнѣе конхоида окружности круга относительно точки, лежащей на самой окружности: $r = a\cos\theta + b$ (рис. 40) (a — діаметръ круга). Она называется *улиткою* (Schnecke) и принимаетъ три различныя формы, въ зависимости отъ того, будетъ ли длина b (считаемая всегда положительною) меньше a, или больше a, но меньше $2a$, или, наконецъ, больше $2a$. При $b = a$ получается частный случай улитки, такъ называемая *кардіоида*, составляющая какъ бы границу, отдѣляющую типъ улитокъ, на которыхъ лежитъ полюсъ и которыя образуютъ внутреннюю петлю ($b < a$), и другой типъ ($b > a$), въ которомъ полюсъ не лежитъ на кривой. Впрочемъ, чтобы узнать лежитъ ли полюсъ на кривой и опредѣлить прямую, которой она въ этомъ случаѣ касается въ полюсѣ, нужно только положить $r = 0$. Тогда находимъ $\cos\theta = -\frac{b}{a}$, уравненіе, дающее для θ вещественное значеніе при $b \leqq a$. Чтобы узнать, пересѣкаетъ ли кривая полярную ось въ другихъ точкахъ, надо положить $\theta = \pi n$, и отложить отъ полюса длины

$$r = (-1)^n a + b$$

---

[1]) См. Клейнъ „Лекціи и т. д.". Большое число кривыхъ описаны и проанализированы въ сочиненіи G. Loria „Spezielle algebraische und transcendente Kurven" (Leipzig, Teubner).

въ положительномъ или отрицательномъ направленіи по полярной оси, смотря по тому, будетъ ли n четное или нечетное. Такимъ образомъ получаются двѣ точки, въ разстояніяхъ $a+b$ и $b-a$ отъ полюса, и дѣлается очевиднымъ, что при $b > a$ кривая окружаетъ полюсъ со всѣхъ сторонъ. Ниже мы увидимъ, что лишь при $b \geqq 2a$ кривая вездѣ вогнута въ сторону

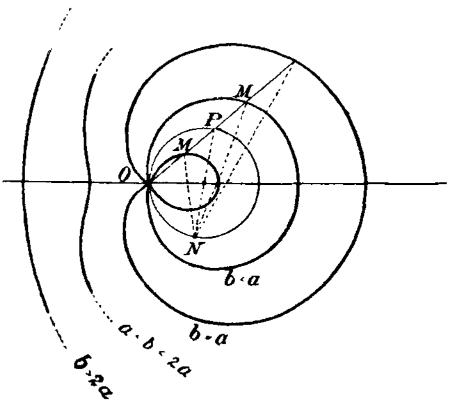

Рис. 40.

даннаго круга. Для построенія нормали въ данной точкѣ M достаточно соединить точку M съ точкой на окружности даннаго круга, діаметрально противоположною точкѣ пересѣченія окружности съ радіусомъ векторомъ точки M.

1) Если одновременно съ кривою линіею $r = f(\theta)$ будемъ разсматривать другую кривую, опредѣляемую уравненіемъ

$$r = \frac{af(\theta)}{a + f(\theta)},$$

то достаточно замѣтить, что $\frac{r^2}{r'} = \frac{f^2}{f'}$, чтобы убѣдиться, что касательныя къ обѣимъ кривымъ, въ точкахъ, соотвѣтствующихъ одному и тому же значенію θ, пересѣкаются на перпендикулярѣ, проведенномъ изъ полюса къ радіусу вектору. Между кривыми, соотвѣтствующими прямой линіи $r = \frac{p}{k \cos\theta}$, находится, между прочимъ, коническое сѣченіе $r = \frac{p}{1 + k\cos\theta}$, и мы получаемъ такимъ образомъ способъ построенія касательной къ коническому сѣченію, равносильный въ сущности слѣдующему извѣстному свойству: если двѣ прямыя пересѣкаются подъ прямымъ угломъ въ одномъ изъ фокусовъ коническаго сѣченія, то каждая изъ нихъ пересѣкаетъ директрису, соотвѣтствующую этому фокусу, въ полюсѣ другой прямой.

[**Примѣчаніе.** Уравненіе $r = \frac{p}{k\cos\theta}$, очевидно, изображаетъ директрису коническаго сѣченія $r = \frac{p}{1 + k\cos\theta}$, т. е. поляру фокуса F. Проведемъ радіусъ векторъ FM данной точки на коническомъ сѣченіи и продолжимъ его до встрѣчи съ директрисою въ точкѣ K; затѣмъ проведемъ радіусъ векторъ $FL \perp FM$ и продолжимъ его до встрѣчи съ директрисою въ точкѣ T. Соединивъ M съ T, получимъ касательную MT въ точкѣ M, потому что FT будетъ общая полярная подкасательная для прямой KL въ точкѣ K и коническаго сѣченія въ точкѣ M. Вмѣстѣ съ тѣмъ, очевидно, T будетъ полюсъ прямой FM, а K полюсъ прямой FL.

m) *Синусъ-спиралями* (Sinusspiralen) [1]) называютъ кривыя, изображаемыя уравненіемъ $r^m = a^m \sin m\theta$. Такъ какъ

$$r^{m-1}\,r' = a^m \cos m\theta, \qquad \operatorname{tg}\omega = \frac{r}{r'} = \operatorname{tg} m\theta,$$

то ω, какъ видимъ, измѣняется пропорціонально θ. Поэтому имѣемъ такую теорему: когда радіусъ векторъ равномѣрно вращается около полюса, тогда и касательная равномѣрно вращается около точки касанія. На этомъ основаніи синусъ спирали называются также кривыми пропорціональнаго изгиба. Къ числу ихъ принадлежатъ нѣкоторыя извѣстныя кривыя, какъ напримѣръ, парабола (съ фокусомъ въ полюсѣ) при $m = -\frac{1}{2}$, равносторонняя гипербола (съ центромъ въ полюсѣ) при $m = -2$. При $m = \frac{1}{2}$ получаемъ опять кардіоиду, при $m = 2$ другую замѣчательную кривую *лемнискату* (рис. 41). Она проходитъ, какъ и всякая синусъ-спираль, при $m > 0$, черезъ полюсъ и вся помѣщается въ конечной части плоскости. Наоборотъ, синусъ-спирали, соотвѣтствующія отрицательнымъ m, имѣютъ безконечныя вѣтви и не проходятъ черезъ полюсъ.

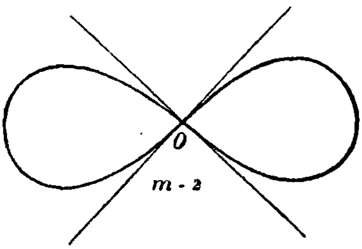

Рис. 41.

590. Основная теорема дифференціальнаго исчисленія (§ 549) и въ геометрической формѣ имѣетъ полезныя приложенія. Положимъ, напримѣръ, что дѣло идетъ о построеніи касательной къ кривой линіи въ нѣкоторой точкѣ M. Въ такомъ случаѣ можно замѣнить точку M', безконечно близкую къ M, точкою M'', безконечно близкою къ M', если только разстояніе $M'M''$ будетъ безконечно мало относительно MM', т. е., если $\lim \frac{M'M''}{MM'} = 0$. Дѣйствительно, если существуетъ касательная въ точкѣ M, съ которой стремится совпасть прямая MM', то и прямая MM'' стремится къ тому же предѣльному положенію, потому что въ треугольникѣ $M'MM''$, каковъ бы ни былъ уголъ при M'', всегда имѣемъ

$$\lim \sin M'MM'' = \lim \frac{M'M''}{MM'} \sin MM''M' = 0.$$

Приведемъ теперь же нѣсколько примѣровъ на приложеніе этого пріема [2]).

---

[1]) О свойствахъ этихъ и аналогичныхъ имъ кривыхъ см. G. Loria (l. c.) или E. Cesàro „Vorlesungen über natürliche Geometrie", стр. 54.

[2]) Читатель найдетъ многочисленныя приложенія этого принципа въ старомъ, но до сихъ поръ интересномъ сочиненіи Duhamel „Eléments du Calcul infinitésimal" (t. I. livre I.) (имѣется и въ русскомъ переводѣ), а также въ „Дифференціальномъ исчисленіи" Ж. Бертрана (русскій переводъ Пирожкова, СПБ. 1910, глава I).

a) Когда кругъ катится безъ скольженія по прямой, то каждая точка его окружности описываетъ кривую, называемую *циклоидою*. Пусть N и N' будутъ тѣ точки, въ которыхъ кругъ, разсматриваемый въ двухъ различныхъ положеніяхъ, касается прямой, а M и M' соотвѣтствующія положенія точки, описывающей циклоиду. Чтобы осуществить переходъ изъ M въ M', очевидно, можно себѣ представить, что кругъ сперва вращается около своего центра такимъ образомъ, что точка M переходитъ въ L, при чемъ она отдалится отъ точки N (на прямой) на длину дуги ML, равную отрѣзку NN'. Затѣмъ, кругъ передвигается параллельно прямой и этимъ переносится въ новое положеніе, при чемъ точка M, уже находящаяся въ L, перейдетъ въ M', описавъ отрѣзокъ $LM' = NN'$. На этомъ отрѣзкѣ и можно замѣнить точку M' точкою M'', для которой $LM'' = LM$, потому что при этомъ мы пренебрегаемъ разностью

$$LM' - LM'' = \smile LM - \text{хорда } LM,$$

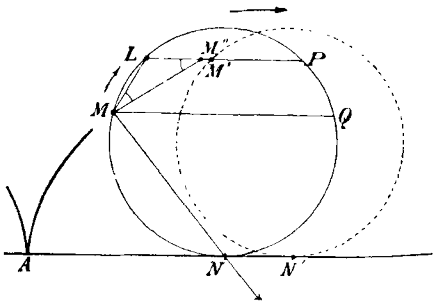

Рис. 42.

т. е. безконечно малою 3-го порядка. Теперь, слѣдовательно, можно разсматривать нормаль къ циклоидѣ въ точкѣ M, какъ предѣльное положеніе перпендикуляра, опущеннаго изъ точки L на прямую MM''. Если проведемъ прямыя, параллельныя неподвижной прямой, черезъ точки L и M, и замѣтимъ точки P и Q ихъ пересѣченія съ окружностью круга, то увидимъ, что перпендикуляръ изъ L на MM' раздѣлитъ дугу MNP пополамъ, потому что треугольникъ LMM'' равнобедренный. Слѣдовательно, нормаль въ точкѣ M—предѣльное положеніе этого перпендикуляра—раздѣлитъ дугу MNQ пополамъ, т. е. пройдетъ черезъ точку N. Впослѣдствіи этотъ результатъ мы провѣримъ вычисленіемъ (§ 595, п).

b) Разсмотримъ еще кривую линію, которую описываетъ вершина M угла постоянной величины (рис. 42), стороны котораго двигаются, оставаясь всегда касательными къ двумъ даннымъ кривымъ. Пусть P и Q будутъ точки касанія сторонъ даннаго угла въ данномъ положеніи, P' и Q'—аналогичныя точки для другого положенія, когда вершина угла находится въ точкѣ M', безконечно близкой къ M. Проведемъ черезъ P и Q прямыя, параллельныя сторонамъ угла въ новомъ его положеніи, и пусть M'' будетъ точка пересѣченія этихъ прямыхъ. Замѣтимъ теперь, что разстоянія точки M'' отъ сторонъ угла въ новомъ его положеніи будутъ безконечно малыя не ниже 2-го порядка, потому что они соотвѣтственно равны разстояніямъ точекъ на кривой, безконечно близкихъ къ точкѣ касанія, отъ касательной въ этой точкѣ *). Отсюда легко заключить, что разстояніе $M'M''$ будетъ

*) А именно, точки P отъ касательной въ P', и точки Q отъ касательной въ Q'.

также безконечно малая высшаго порядка относительно MM'. Поэтому искомая касательная будетъ предѣльное положеніе для прямой MM''. Но углы при M и M'' равны между собою (по условію), слѣдовательно. M'' лежитъ на окружности круга, проходящаго черезъ три точки M, P и Q, и предѣльное положеніе прямой MM'' есть касательная въ точкѣ M къ окружности этого круга. Поэтому, для построенія нормали къ общему мѣсту точки M надо соединить эту точку съ точкою пересѣченія нормалей въ данныхъ кривыхъ въ точкахъ P и Q.

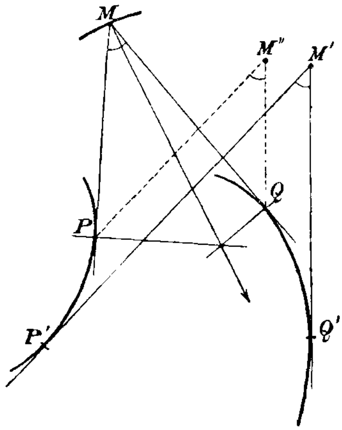

Рис. 43.

c) Подэрою (Podaire, Fusspunktkurve) данной кривой относительно точки O называютъ общее мѣсто основаній перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ точки O на касательныя къ данной кривой. Если M есть точка на данной кривой, а P проекція точки O на касательную въ M, то нормаль къ подэрѣ въ точкѣ P получимъ, соединивъ P съ серединою OM. Это построеніе тотчасъ выводится изъ предыдущаго, если замѣтимъ, что разсматриваемый случай есть частный случай предыдущаго, а именно, соотвѣтствующій предположенію, что данный уголъ здѣсь прямой, и одна изъ данныхъ кривыхъ обращается въ точку O.

[**Примѣчаніе.** Дѣйствительно, если вторая кривая обращается въ точку O, то касательная къ этой кривой въ точкѣ O, проведенная изъ точки P, будетъ прямая OP, нормаль—перпендикуляръ къ OP въ точкѣ O, а нормаль къ данной кривой въ точкѣ M—прямая, параллельная OP. Точка пересѣченія K нормалей будетъ, слѣдовательно, вершина прямоугольника, построеннаго на MP и OP, а потому діагональ его PK—нормаль къ подэрѣ въ точкѣ P—пройдетъ черезъ середину діагонали OM. Въ цитированномъ уже „Дифференціальномъ Исчисленіи“ Бертрана читатель найдетъ простое доказательство указаннаго построенія, независимое отъ построенія въ общемъ вопросѣ, разсмотрѣнномъ въ пунктѣ b). Наконецъ, полезнымъ упражненіемъ будетъ аналитическое доказательство того же построенія, основанное на общихъ выраженіяхъ координатъ точки $P(X, Y)$ черезъ координаты точки $M(x, y)$ на данной кривой, и на разсмотрѣніи уравненія нормали къ общему мѣсту точекъ P.]

Такимъ путемъ можно, напримѣръ, найти извѣстное уже (§ 589, k) построеніе нормали къ улиткѣ. А именно, легко убѣдиться, что кривая линія $r = a\cos\theta + b$ есть подэра окружности круга радіуса b относительно точки, отстоящей отъ центра на разстояніи, равномъ a. Если, въ частности, имѣемъ двѣ касающіяся взаимно окружности круговъ, изъ которыхъ одинъ окружаетъ другой и имѣетъ вдвое большій радіусъ, то подэра внѣшняго круга относительно точки касанія есть конхоида внутренняго круга, и именно кардіоида.

d) Въ заключеніе разсмотримъ эллипсъ. Пусть M и M' двѣ безконечно близкія точки на кривой, F и F'—ея фокусы, P проекція M на $M'F$ и P' проекція M' на MF'. Съ точностью до безконечно малыхъ 2-го порядка можемъ написать:

$$M'P = M'F - MF, \qquad MP' = MF' - M'F',$$

$$M'P - MP' = (M'F + M'F') - (MF + MF') = 0.$$

Слѣдовательно, $M'P = MP'$. Раздѣливъ на MM', находимъ

$$\cos MM'F = \cos M'MF',$$

а переходя къ предѣлу $\angle TMF = \angle TMF'$, т. е. касательная одинаково наклонена къ радіусамъ векторамъ точки касанія, выходящимъ изъ фокусовъ. Это свойство характеризуетъ эллипсъ, потому что изъ послѣдняго равенства, идя обратнымъ путемъ, получимъ точное равенство $dMF + dMF' = 0$, т. е. $MF + MF' = \text{Const}$. Такимъ же образомъ ведется доказательство аналогичнаго свойства касательной къ гиперболѣ, и еще проще для параболы.

Кривизна.

591. Опредѣленія. Угломъ смежности называется дифференціалъ, эквивалентный (§ 556) углу между касательными въ двухъ безконечно близкихъ точкахъ на кривой. Отношеніе угла смежности къ дифференціалу дуги называется кривизною кривой въ разсматриваемой точкѣ. Ясно, что если φ есть уголъ наклоненія касательной къ нѣкоторой неподвижной прямой, то $d\varphi$ есть уголъ смежности, а кривизна, слѣдовательно, равна производной отъ φ, взятой по дугѣ s. Чтобы оправдать установленное здѣсь опредѣленіе кривизны, замѣтимъ слѣдующее. Если, кромѣ данной точки M на кривой, возьмемъ еще точку M', достаточно близкую къ M, чтобы дуга MM' на всемъ своемъ протяженіи была вогнута въ одну и ту же сторону (§ 552), то естественно будетъ принять, что при данной длинѣ этой дуги δs, кривизна ея будетъ тѣмъ больше, чѣмъ больше уголъ между касательными въ крайнихъ ея точкахъ M и M'. Поэтому, естественно принять за мѣру кривизны этой дуги отношеніе $\frac{\delta\varphi}{\delta s}$, а это отношеніе и стремится къ предѣлу $\frac{\partial\varphi}{\partial s}$, когда, при фиксированной точкѣ M, точка M', двигаясь по кривой, стремится совпасть съ M. Возьмемъ теперь за неподвижную прямую ось абсциссъ. Направляющіе косинусы касательной изобразятся тогда формулами:

$$\frac{dx}{ds} = \cos\varphi, \quad \frac{dy}{ds} = \sin\varphi,$$

откуда, взявъ производныя, находимъ

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\sin\varphi\frac{d\varphi}{ds}, \quad \frac{d^2y}{ds^2} = \cos\varphi\frac{d\varphi}{ds},$$

а, слѣдовательно (§ 558, d),

$$(7) \qquad \frac{1}{\varrho} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{ds^3} = \frac{d\varphi}{ds}.$$

Въ частномъ случаѣ, когда разсматриваемая кривая есть окружность круга радіуса ϱ, формула эта выражаетъ, что кривизна во всѣхъ точкахъ одинакова и равна $\frac{1}{\varrho}\cdot$ Поэтому, мы можемъ высказать слѣдующее положеніе: **кривизна какой угодно кривой въ данной на ней точкѣ измѣряется кривизной соприкасающагося въ этой точкѣ круга данной кривой** (§ 348, е). На этомъ основаніи радіусъ и центръ соприкасающагося круга называютъ **радіусомъ и центромъ кривизны** данной кривой въ данной точкѣ.

[**Примѣчаніе.** Направляющими косинусами касательной, какъ для плоскихъ, такъ и для неплоскихъ кривыхъ, мы будемъ называть косинусы угловъ, образуемыхъ положительнымъ направленіемъ касательной съ положительными направленіями координатныхъ осей. За положительное направленіе на касательной всегда будемъ выбирать то, которое идетъ въ сторону возрастающихъ дугъ, при чемъ послѣднее можемъ выбирать по произволу. Обозначая, въ случаѣ плоской кривой, черезъ α и β направляющіе косинусы касательной, мы — при установленномъ выше условіи — будемъ имѣть по величинѣ и по знаку

$$\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \beta = \frac{dy}{ds}.$$

Для доказательства, проведемъ сѣкущую черезъ разсматриваемую точку (s) на кривой и черезъ точку $(s+\delta s)$, расположенную на кривой съ той стороны отъ первой точки, въ которую возрастаютъ дуги (такъ что $\delta s > 0$). Если мы направимъ эту сѣкущую въ сторону возрастанія дугъ, т. е. отъ точки (s) къ точкѣ $(s+\delta s)$, то ея направляющіе косинусы выразятся такъ:

$$\frac{\delta x}{+\sqrt{\delta x^2+\delta y^2}}, \quad \frac{\delta y}{+\sqrt{\delta x^2+\delta y^2}}$$

или

$$\frac{\delta x}{\delta s}\cdot\frac{\delta s}{+\sqrt{\delta x^2+\delta y^2}}, \quad \frac{\delta y}{\delta s}\cdot\frac{\delta s}{+\sqrt{\delta x^2+\delta y^2}}.$$

Такъ какъ $\delta s > 0$, а отношеніе длины дуги къ длинѣ хорды стремится къ единицѣ (§ 582), то въ предѣлѣ для направляющихъ косинусовъ касательной, направленной въ сторону возрастанія дугъ, мы и получимъ указанныя выше выраженія. Замѣтимъ еще, что въ большинствѣ курсовъ дифференціальной Геометріи радіусъ кривизны ϱ считается числомъ положительнымъ, и опредѣляется формулою $\frac{1}{\varrho} = \left|\frac{d\varphi}{ds}\right|$; въ настоящемъ же сочиненіи ϱ опредѣляется формулою $\frac{1}{\varrho} = \frac{d\varphi}{ds}$ и можетъ быть, какъ положительнымъ, такъ и отрицательнымъ числомъ.]

592. Опредѣленіе кривизны можно еще инымъ образомъ оправдать, если предварительно согласиться принять за мѣру кривизны круга обратную величину его радіуса. Такое соглашеніе совмѣстимо съ обыденнымъ понятіемъ о кривизнѣ, по которому круги малаго радіуса искривлены больше, чѣмъ круги большого радіуса. Основываясь на этомъ и переходя къ измѣренію кривизны любой кривой въ данной на ней точкѣ M, разсмотримъ всѣ круги, касающіеся этой кривой въ точкѣ M, и обращенные выпуклостью въ ту же сторону, какъ и данная кривая въ этой точкѣ. На основаніи того же интуитивнаго представленія, которое мы имѣемъ о кривизнѣ, можемъ, очевидно, сказать, что кривая въ точкѣ M имѣетъ кривизну бо̀льшую, чѣмъ кривизна внѣшнихъ круговъ и ме́ньшую, чѣмъ кривизна внутреннихъ круговъ. Подъ внѣшними кругами понимаются тѣ, окружности которыхъ проходятъ между касательною и данною кривою, а подъ внутренними тѣ, относительно которыхъ кривая и касательная лежатъ съ одной стороны. Если покажемъ, что соприкасающійся кругъ составляетъ границу, отдѣляющую внѣшніе круги отъ внутреннихъ, то и придемъ къ утвержденію, что кривизна данной кривой равна кривизнѣ соприкасающагося круга. Чтобы доказать упомянутое свойство соприкасающагося круга, обозначимъ черезъ r радіусъ какого нибудь изъ круговъ, касающихся данной кривой въ точкѣ $M(x, y)$, а черезъ h алгебраическую величину разстоянія точки $M'(x+\delta x, y+\delta y)$ на данной кривой отъ окружности выбраннаго круга. Тогда имѣемъ

$$(2r+h)h = (\delta x + r\sin\varphi)^2 + (\delta y - r\cos\varphi)^2 - r^2.$$

[**Примѣчаніе.** Разстояніе точки M' отъ окружности откладывается по нормали къ окружности и берется со знакомъ $+$, если точка M' лежитъ внѣ этой окружности, и со знакомъ $-$, если M' внутри ея. Если C есть центръ выбраннаго круга, то при сдѣланномъ соглашеніи о знакѣ h, на основаніи извѣстныхъ теоремъ элементарной Геометріи, будемъ имѣть въ обоихъ случаяхъ

$$(2r+h)h = CM'^2 - r^2.$$

Замѣчая еще, что координаты (ξ, η) центра разсматриваемаго круга опредѣляются формулами

$$\xi = x - r\sin\varphi, \quad \eta = y + r\cos\varphi,$$

гдѣ φ уголъ касательной къ данной кривой въ точкѣ M съ осью x-въ, находимъ $CM'^2 = (\delta x + r\sin\varphi)^2 + (\delta y - r\cos\varphi)^2$ и, слѣдовательно,

$$(2r+h)h = (\delta x + r\sin\varphi)^2 + (\delta y - r.\cos\varphi)^2 - r^2.$$

Обозначая черезъ l длину хорды MM' и припоминая, что

$\cos\varphi = \frac{dx}{ds}$, $\sin\varphi = \frac{dy}{ds}$, найдемъ

$$(2r+h)h = l^2 + 2r\frac{\delta x\, dy - \delta y\, dx}{ds},$$

т. е.,

$$2rh + h^2 = l^2 + r\frac{dy\, d^2x - dx\, d^2y}{ds} + \tfrac{1}{3} r\frac{dy\, d^3x - dx\, d^3y}{ds} + \cdots].$$

Отбрасывая безконечно малыя выше 3-го порядка (относительно ds), и припоминая сказанное въ § 585, мы можемъ замѣнить l^2 черезъ ds^2, и получимъ

$$h = \frac{ds^2}{2r} - \frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{2\,ds} - \frac{dx\, d^3y - dy\, d^3x}{6\,ds} - \cdots.$$

Принимая теперь s за независимую перемѣнную, находимъ

$$dx\, d^2y - dy\, d^2x = \frac{ds^3}{\varrho}, \qquad dx\, d^3y - dy\, d^3x = ds^3 d\frac{1}{\varrho}$$

и окончательно

$$h = \frac{ds^2}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\varrho}\right) + \frac{ds^2\, d\varrho}{6\varrho^2} + \cdots.$$

Мы видимъ, что h будетъ вообще безконечно малою 2-го порядка; при этомъ въ смежности съ точкою M, $h > 0$ при $r < \varrho$, и $h < 0$ при $r > \varrho$, т. е. точки M', достаточно близкія къ M, лежатъ всѣ внѣ или всѣ внутри касательнаго круга, смотря по тому, будетъ ли этотъ кругъ внутри или внѣ соприкасающагося круга. Если же $r = \varrho$ (т. е. касательный кругъ совпадаетъ съ соприкасающимся кругомъ), то h будетъ порядка выше второго и имѣетъ знакъ, одинаковый съ $d\varrho$. Отсюда вытекаетъ слѣдующее: Положимъ, что въ точкѣ M $\frac{d\varrho}{ds}$ непрерывна и неравна нулю; представимъ себѣ, что мы передвигаемся по кривой въ направленіи возрастающихъ дугъ, т. е. что $ds < 0$ для точекъ, предшествующихъ M, и $ds > 0$ для точекъ, слѣдующихъ за M. Если въ точкѣ M $\frac{d\varrho}{ds} > 0$, т. е. ϱ возрастаетъ, а кривизна убываетъ (рис. 44),

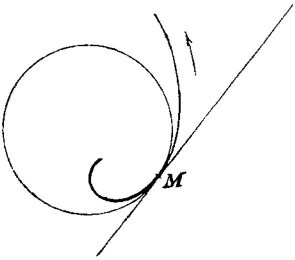

Рис. 44.

то знакъ $d\varrho$, а, слѣдовательно, и h, переходитъ изъ $-$ въ $+$, и точки, предшествующія M, будутъ внутри, а слѣдующія за нею внѣ соприкасающагося круга. Какъ разъ противоположное будетъ имѣть мѣсто въ случаѣ $\frac{d\varrho}{ds} < 0$ въ точкѣ M. Итакъ, вообще соприкасающійся кругъ пересѣкаетъ кривую въ той точкѣ, въ которой онъ съ нею касается. Исключеніе могутъ представить лишь такія точки, въ которыхъ $\frac{d\varrho}{ds} = 0$, и для которыхъ h безконечно малая не ниже 4-го порядка. Во всѣхъ случаяхъ безъ исключенія соприкасающійся кругъ характеризуется тѣмъ, что точки M', безконечно близкія къ M, на данной кривой, отстоятъ отъ него на безконечно малыхъ разстояніяхъ не ниже второго порядка.

593. Пусть H есть точка пересѣченія нормалей въ точкахъ M и M', легко показать, что центръ кривизны въ точкѣ M есть предѣльное положеніе точки H, съ которымъ она стремится совпасть, когда точка M' стремится совпасть съ точкою M, остающеюся на мѣстѣ. Въ самомъ дѣлѣ, если n обозначаетъ длину MH, то разстояніе точки M отъ нормали $M'H$, очевидно, равно $n \sin(\delta\varphi)$; съ другой стороны, то же разстояніе равно проекціи MM', т. е. суммѣ проекцій δx и δy на касательную въ точкѣ M'. Слѣдовательно,

$$n \sin \delta\varphi = \cos(\varphi + \delta\varphi) \cdot \delta x + \sin(\varphi + \delta\varphi) \cdot \delta y.$$

Обозначая предѣльное значеніе n черезъ ϱ, получаемъ отсюда

$$\varrho\, d\varphi = \cos\varphi \cdot dx + \sin\varphi \cdot dy = ds,$$

т. е. ϱ равно радіусу кривизны, а такъ какъ центръ кривизны лежитъ на нормали MH, то теорема и доказана. На этомъ основаніи можемъ утверждать, что нормали въ точкахъ, безконечно близкихъ къ M, проходятъ въ безконечно малыхъ разстояніяхъ отъ центра кривизны въ точкѣ M. Легко и вычислить эти разстоянія; стоитъ только замѣтить, что, пренебрегая безконечно малыми высшаго порядка, имѣемъ:

$$n = (\cos\varphi \cdot \delta x + \sin\varphi \cdot \delta y) \cot \delta\varphi = \frac{dx \cdot \delta x + dy \cdot \delta y}{ds\, d\varphi} = \frac{ds}{d\varphi} + \frac{d^2 s}{2\, d\varphi}\ ^{*)}$$

и, наконецъ, $n = \varrho + \frac{1}{2} d\varrho$, если выберемъ ϱ за независимую перемѣнную.

594. Формула (7) заключаетъ въ себѣ всѣ другія, служащія для вычисленія кривизны, и зачастую превосходитъ ихъ въ смыслѣ простоты и удобства вычисленій. Если положимъ

$$\varphi = \operatorname{arctg} y' \quad \text{или} \quad \varphi = \theta + \operatorname{arctg}\frac{r}{r'},$$

смотря по тому, Декартовы ли или полярныя координаты желаемъ примѣнить, то, дифференцируя, найдемъ

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{y''}{1+y'^2}, \quad \frac{d\varphi}{d\theta} = 1 + \frac{r'^2 - r r''}{r^2 + r'^2},$$

---

*) Потому что $\cos\varphi\, \delta y - \sin\varphi\, \delta x$ — безконечно малая высшаго порядка.

а такъ какъ $ds = \sqrt{1+y'^2}\cdot dx = \sqrt{r^2+r'^2}\cdot d\theta$, то снова и получимъ выраженія

$$(8)\qquad \varrho = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''},\qquad \varrho = \frac{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2+2r'^2-rr''}.$$

Если кривая задана уравненіемъ $f(x, y) = 0$, то достаточно обратиться къ выведенному уже раньше (§ 574) результату, чтобы изъ первой формулы (8) получить

$$(9)\qquad \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{(\Delta f)^{\frac{3}{2}}}\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{vmatrix}.$$

Но и этотъ результатъ можно получить непосредственно изъ (7). Разсматривая φ, какъ функцію отъ x и y, которыя сами суть функціи отъ s, имѣемъ

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{ds} = \cos\varphi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \sin\varphi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

слѣдовательно,

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\partial}{\partial x}\sin\varphi - \frac{\partial}{\partial y}\cos\varphi.$$

Съ другой стороны, извѣстно (§ 586), что косинусы угловъ нормали съ осями Ox и Oy выражаются формулами

$$(10)\qquad -\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{\Delta f}}\frac{\partial f}{\partial x},\qquad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{\Delta f}}\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Поэтому

$$-\frac{1}{\varrho} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{\Delta f}}\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{\Delta f}}\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

или

$$(11)\qquad -\frac{1}{\varrho} = \frac{\Delta^2 f}{\sqrt{\Delta f}} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{\Delta f}} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{\Delta f}}.$$

Это есть весьма важная формула Бонне (Bonnet). Простое вычисленіе дастъ

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{\Delta f}} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{\Delta f}}$$

$$= -\frac{1}{(\Delta f)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right],$$

а такъ какъ

$$\frac{\Delta^2 f}{\sqrt{\Delta f}} = \frac{1}{(\Delta f)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right],$$

то мы и приходимъ къ формулѣ

$$\frac{1}{\varrho} = -\frac{1}{(\Delta f)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\right],$$

совпадающей съ (9). Что касается формулы (11), то она важна потому, что ею обнаруживается инваріантный характеръ кривизны. Дѣйствительно, инваріантный характеръ перваго члена уже извѣстенъ (§ 569); поэтому достаточно будетъ показать, что сумма двухъ другихъ имѣетъ геометрическое значеніе, независимое отъ положенія координатныхъ осей. Обозначая для краткости функцію $\frac{1}{\sqrt{\Delta f}}$ черезъ g, и проведя черезъ произвольную точку M кривую, для всѣхъ точекъ которой g равно постоянной, легко будетъ вычислить уголъ, образуемый этою кривою съ данною. А именно, примѣняя формулы (10) ко второй кривой, тотчасъ найдемъ (см. § 577, а) выраженіе

$$\cos\omega = \frac{1}{\sqrt{\Delta f \cdot \Delta g}}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y}\right).$$

и формула (11) принимаетъ видъ $-\frac{1}{\varrho} = \frac{\Delta^2 f}{\sqrt{\Delta f}} + \sqrt{\Delta f \cdot \Delta g} \cdot \cos\omega$.

595. Упражненія. а) Мы поставимъ себѣ задачей построить центры кривизны тѣхъ плоскихъ кривыхъ, которыя чаще всего встрѣчаются на практикѣ. Начнемъ съ простѣйшей изъ нихъ послѣ окружности круга, а именно съ логариѳмической спирали ($r = ae^{m\theta}$), приводящейся къ окружности круга при $m = 0$. Такъ какъ $r' = mr$, $r'' = mr' = m^2 r$, то $r'^2 = rr''$, и вторая изъ формулъ (8) тотчасъ дастъ $\varrho = \sqrt{r^2 + r'^2} = n$. Еще скорѣе придемъ къ этому результату съ помощью формулы (7), если замѣтимъ, что изъ $\varphi = \theta + \omega$ слѣдуетъ $d\varphi = d\theta$ ($\omega = \text{const.}$), а такъ какъ $ds = n\,d\theta$, то и получимъ $\varrho = n$, т. е. въ логариѳмической спирали радіусъ кривизны равенъ длинѣ полярной нормали. Слѣдовательно (см. § 589, е, рис. 33), центръ кривизны находится въ точкѣ N. Это свойство является очевиднымъ, если припомнимъ сказанное въ § 593, изъ котораго слѣдуетъ, что точка пересѣченія H нормалей въ M и M' лежитъ на окружности круга OMM', потому что $\angle OMH = \angle OM'H$ (по опредѣленію спирали: $\omega = \text{const.}$). Когда M' приближается къ M, кругъ OMM' стремится сдѣлаться касательнымъ къ кривой въ точкѣ M, а точка H стремится къ точкѣ N, діаметрально противоположной M на предѣльномъ положеніи окружности круга. Раньше мы замѣтили, что длина полярной касательной MT равна длинѣ дуги OM, а теперь обратимъ вниманіе на соотношеніе $\varrho = ms$, которое, такъ сказать, можно прочитать въ треугольникѣ NMT. Для всякой плоской кривой можно аналогичнымъ образомъ разсматривать соотношеніе между ϱ и s. Оно называется „натуральнымъ уравненіемъ кривой“ и вполнѣ достаточно, чтобы опредѣлить фигуру кривой [1]).

---

1) См. „Naturliche Geometrie“, стр. 2.

[**Примѣчаніе**. Допустимъ, что двѣ кривыя C_1 и C_2 имѣютъ одно и то же натуральное уравненіе

$$\frac{1}{\varrho}=f(s),$$

и покажемъ, что онѣ конгруентны. Отличая указателями аналогичные элементы обѣихъ кривыхъ, мы будемъ имѣть—при равныхъ значеніяхъ дугъ—

$$\frac{1}{\varrho_1}=\frac{1}{\varrho_2},$$

откуда, въ силу (7),

$$\text{(I)} \qquad \frac{d\varphi_1}{ds}=\frac{d\varphi_2}{ds}.$$

Перенесемъ одну изъ кривыхъ такъ, чтобы совпали точки, отъ которыхъ на C_1 и C_2 отсчитываются дуги, а затѣмъ повернемъ эту кривую такъ, чтобы совпали и положительныя направленія касательныхъ въ этихъ точкахъ. Тогда, при $s=0$

$$\text{(II)} \qquad x_1=x_2, \quad y_1=y_2,$$

$$\text{(III)} \qquad \varphi_1=\varphi_2.$$

Изъ равенства (I), въ силу § 307, b, вытекаетъ, что φ_1 и φ_2 могутъ отличаться лишь на постоянную; но, въ виду равенства (III), эта постоянная равна нулю, такъ что равенство (III) имѣетъ мѣсто для всѣхъ значеній s. Въ такомъ случаѣ, для всѣхъ же значеній s,

$$\frac{dx_1}{ds}=\cos\varphi_1=\cos\varphi_2=\frac{dx_2}{ds}$$

$$\frac{dy_1}{ds}=\sin\varphi_1=\sin\varphi_2=\frac{dy_2}{ds}.$$

откуда аналогичнымъ образомъ заключаемъ, что и равенства (II) имѣютъ мѣсто всегда, т. е. кривыя совпадаютъ. Итакъ, кривыя, имѣющія одно и то же натуральное уравненіе, могутъ отличаться только по положенію, видъ же ихъ этимъ уравненіемъ опредѣляется вполнѣ. На этомъ и основана важная роль натуральныхъ уравненій].

b) Для логариѳмической кривой ($y=ae^{\frac{x}{a}}$; рис. 31) имѣемъ

$$y'=\frac{y}{a}=\operatorname{tg}\varphi, \qquad y''=\frac{\operatorname{tg}\varphi}{a}.$$

Первая изъ формулъ (8) дастъ

$$\varrho=\frac{1}{y''\cos^3\varphi}=\frac{a}{\sin\varphi\cdot\cos^2\varphi}=\frac{a}{\sin\varphi}+\frac{y}{\cos\varphi}.$$

Пусть T и N будутъ точки, въ которыхъ касательная и нормаль встрѣчаютъ асимптоту. Если перпендикуляръ къ асимптотѣ, возставленный въ точкѣ T, встрѣтитъ нормаль въ точкѣ H, то, на основаніи предыдущей формулы, $\varrho=NH$. Поэтому мы найдемъ центръ кривизны C, если отложимъ по нормали длину $HC=MN$.

c) Въ разносторонней гиперболѣ, отнесенной къ асимптотамъ, имѣемъ

$$y=\frac{a^2}{x}, \qquad y'=-\frac{a^2}{x^2}=-\frac{y}{x}.$$

Слѣдовательно, $\angle MTO = \theta$ (рис. 45), т. е. углу между радіусомъ векторомъ и полярной осью (осью x-овъ). Далѣе,

$$y'' = \frac{2a^2}{x^3} = \frac{2y}{x^2}, \qquad 1 + y'^2 = 1 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{r^2}{x^2}, \qquad \varrho = \frac{r^3}{2a^2};$$

слѣдовательно, радіусъ кривизны въ точкѣ M пропорціоналенъ кубу діаметра, проходящаго черезъ M. Чтобы построить центръ кривизны, замѣтимъ, что

$$\varrho = \frac{r^3}{2a^2} = \frac{r^3}{2xy} = \frac{r}{\sin 2\theta} = MQ.$$

Слѣдовательно, $MC = MQ$, т. е. центръ кривизны лежитъ симметрично съ Q относительно M. Къ тому же результату придемъ съ помощью формулы (7), замѣтивъ, что $\varphi = \pi - \theta$, откуда $d\varphi = -d\theta$, и $\varrho = -n$ (гдѣ n — длина полярной нормали). Замѣтимъ здѣсь еще слѣдующее: если

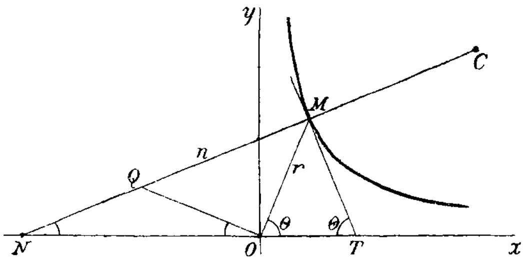

Рис. 45.

возьмемъ еще двѣ точки M' и M'' на гиперболѣ и соединимъ центръ круга $MM'M''$ съ ортоцентромъ треугольника $MM'M''$, то центръ тяжести этого треугольника раздѣлитъ эту прямую на два отрѣзка, относящихся одинъ къ другому, какъ 1 къ 2, а съ другой стороны, по извѣстному свойству равносторонней гиперболы, ортоцентръ лежитъ на кривой (см. примѣчаніе). Когда M' и M'' приближаются къ M, то центръ тяжести треугольника стремится къ M, а центръ описаннаго около него круга къ C (центръ соприкасающагося круга), откуда ясно, что ортоцентръ стремится къ совпаденію съ точкою пересѣченія H нормали съ другою вѣтвью гиперболы, и что $MH = 2\varrho$. Иными словами: діаметръ соприкасающагося круга въ любой точкѣ равносторонней гиперболы равенъ отрѣзку, отсѣкаемому самою кривою на нормали въ точкѣ M.

[**Примѣчаніе.** Ортоцентромъ треугольника называется точка пересѣченія его высотъ, центръ тяжести G — точка пересѣченія медіанъ, центръ описаннаго круга C_1 — точка пересѣченія перпендикуляровъ къ сторонамъ, возставленныхъ изъ ихъ серединъ. Эти три точки лежатъ на одной прямой, и если K есть ортоцентръ, то $GK = 2\,GC_1$ (см. „Сборникъ геометрическихъ задачъ" Пржевальскаго. Москва, 1894. Отд. III. Теорема 52 на стр. 66; доказательство на стр. 263). Свойство равносторонней гиперболы, упомянутое въ 595, с, читатель легко докажетъ самъ, или найдетъ въ „Anal. Geometrie der Kegelschnitte" Salmon-Fiedler (4-е изд. 1874 г., стр. 289, § 236). Предѣльное положеніе ортоцентра K находится на нормали въ точкѣ M, потому что K на перпендикулярѣ къ $M'M''$, а предѣльное положеніе $M'M''$ есть касательная въ M.]

d) Кардіоида прежде всего замѣчательна тѣмъ, что она особенно просто спрямляется. Изъ уравненія $r = a(1 + \cos\theta)$ послѣдовательно находимъ

$$r' = -a\sin\theta,\quad \frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2+r'^2} = 2a\cos\frac{\theta}{2},\quad s = 4a\sin\frac{\theta}{2}\cdot$$

если за начало дугъ приме́мъ вершину A ($s = 0$ при $\theta = 0$). Если радіусъ векторъ OM встрѣчаетъ въ точкѣ L окружность круга радіуса $OA = 2a$ съ центромъ въ полюсѣ O, то изъ предыдущей формулы получаемъ, что длина дуги AM равна длинѣ прямолинейнаго отрѣзка AL. Въ частности, оттуда же слѣдуютъ, что длина всей кардіоиды равна $8a$. Кромѣ того, имѣемъ

$$r'' = -a\cos\theta,\quad r'^2 - rr'' = a^2(1+\cos\theta) = \frac{1}{2}n^2,\quad \varrho = \frac{n^3}{n^2 + \frac{1}{2}n^2} = \frac{2}{3}n\,.$$

Слѣдовательно, центръ кривизны въ точкѣ M дѣлитъ длину полярной нормали въ отношеніи 1 къ 2. Это свойство еще скорѣе выводится изъ формулы (7), если построеніе нормали уже извѣстно. Дѣйствительно, опишемъ кругъ діаметра, равнаго a, конхоида котораго (§ 589, k) относительно точки O на его окружности и будетъ данная кардіоида. Пусть H будетъ центръ этого круга, P та точка на его окружности, которая лежитъ на радіусѣ векторѣ OM, а Q — точка, діаметрально противоположная точкѣ P. Тогда MQ, какъ извѣстно, будетъ нормаль къ кардіоидѣ (§ 589, k). Изъ того что, какъ треугольникъ MPQ, такъ и треугольникъ OHP равнобедренны, слѣдуетъ, что $\angle PMQ = \frac{1}{2}\theta$, а потому нормаль наклонена къ полярной оси подъ угломъ $\frac{3}{2}\theta$; слѣдовательно, $d\varphi = \frac{3}{2}d\theta$ и $\varrho = \frac{2}{3}n$. Пусть N будетъ другая точка окружности нашего круга, лежащая на MQ. Такъ какъ треугольникъ MPQ равнобедренный, то точка N — проекція точки P

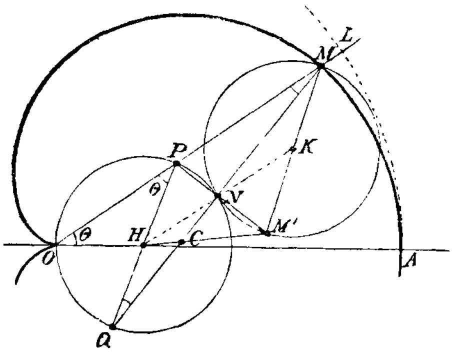

Рис. 46.

на MQ — очевидно дѣлитъ отрѣзокъ MQ пополамъ. Пусть M' будетъ точка, симметричная съ P относительно N. Прямая HM' пересѣчетъ нормаль MQ въ центрѣ кривизны C. Дѣйствительно, построенная такимъ образомъ точка C есть центръ тяжести треугольника PQM', слѣдовательно,

$$MC = MN + \tfrac{1}{3}NQ = \tfrac{4}{3}MN = \tfrac{2}{3}MQ\,.$$

Наконецъ, замѣтимъ, что натуральное уравненіе кардіоиды есть $s^2 + 9\varrho^2 = \text{const}$. Если будемъ отсчитывать дуги отъ полюса, то найдемъ, что длина дуги OM равна

$$s = 4a\left(1 - \sin\frac{\theta}{2}\right)\cdot$$

Съ другой стороны, хорда OM равна

$$r = a(1+\cos\theta) = s - \frac{s^2}{8a}.$$

Къ этому соотношенію легко придти и геометрическимъ путемъ съ помощью слѣдующаго замѣчанія: изъ уравненія кардіоиды видно, что перпендикуляръ, опущенный изъ A на OM, проходитъ черезъ точку, симметричную съ L относительно M. Слѣдовательно, $AL^2 = 4a \cdot 2ML$, т. е. $(4a-s)^2 = 8a(2a-r)$ и т. д. Отсюда слѣдуетъ, что съ приближеніемъ M къ O, разность между дугою OM и хордою OM будетъ безконечно малою не 3-го порядка (см. § 585), а только 2-го. Это объясняется тѣмъ, что въ точкѣ O кривизна безконечна.

e) Изъ уравненія синусъ-спиралей $r^m = a^m \sin m\theta$ выводимъ $r^{m-1}r' = a^m \cos m\theta$; далѣе, $(m-1)r^{m-2}r'^2 + r^{m-1}r'' = -mr^m$, т. е. $(m-1)r'^2 + rr'' = -mr^2$, и наконецъ, $r'^2 - rr'' = m(r^2 + r'^2)$. Поэтому

$$\varrho = \frac{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+m)(r^2+r'^2)} = \frac{\sqrt{r^2+r'^2}}{1+m} = \frac{n}{1+m},$$

результатъ, очевидный по формулѣ (7), потому что $\varphi = \theta + \omega = (1+m)\theta$. Отсюда слѣдуетъ, что радіусъ кривизны пропорціоналенъ длинѣ полярной нормали. При $m = -2$ и $m = \frac{1}{2}$ снова находимъ извѣстное уже построеніе центра кривизны въ равносторонней гиперболѣ и кардіоидѣ. При $m = 2$ получается аналогичное построеніе для лемнискаты. При $m = -\frac{1}{2}$ находимъ, что въ параболѣ радіусъ кривизны дѣлится пополамъ перпендикуляромъ, возставленнымъ изъ фокуса къ радіусу вектору, и т. д. Если, наконецъ, положимъ $m = 0$, то снова получаемъ извѣстное построеніе для логариѳмической спирали. На этомъ основаніи, несмотря на то, что при $m = 0$ уравненіе $r^m = a^m \sin m\theta$ теряетъ смыслъ, логариѳмическую спираль разсматриваютъ, какъ частный случай синусъ-спиралей, соотвѣтствующій значенію указателя $m = 0$. Она представляетъ нѣкоторымъ образомъ границу, отдѣляющую одинъ классъ синусъ-спиралей, не выходящихъ изъ конечной части плоскости, отъ другого, въ которомъ спирали распространяются въ безконечность.

f) Одинъ классъ синусъ-спиралей получается изъ другого посредствомъ такъ называемаго преобразованія при помощи взаимныхъ радіусовъ векторовъ или обращенія (Inversion). Подъ этимъ названіемъ понимаютъ такое геометрическое преобразованіе, въ которомъ каждой точкѣ на плоскости соотвѣтствуетъ взаимная съ нею относительно нѣкотораго постояннаго круга. Если $r = f(\theta)$ есть уравненіе нѣкоторой кривой, то $r = \frac{a^2}{f(\theta)}$ есть уравненіе кривой, полученной ея обращеніемъ относительно круга радіуса a съ центромъ въ полюсѣ. Такимъ образомъ, Архимедова спираль и гиперболическая спираль, кохлеоида и квадратриса, равносторонняя гипербола и лемниската, парабола и кардіоида, и вообще двѣ синусъ-спирали съ указателями, равными по величинѣ и противоположными по знаку, представляютъ собою пару взаимнообратныхъ кривыхъ. Поэтому полезно знать, какимъ образомъ можно построить центръ кривизны для одной изъ взаимнообратныхъ кривыхъ, когда извѣстно построеніе для другой. Мы предоставляемъ читателю доказать, что въ двухъ соотвѣтствующихъ точкахъ взаимнообратныхъ кривыхъ касательныя антипараллельны относительно радіуса вектора, и центры кривизны лежатъ на одной прямой съ центромъ обращенія (т. е. центромъ постояннаго круга).

g) *Астроидою* называется кривая, уравненіе которой въ прямоугольныхъ Декартовыхъ координатахъ есть $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. Она симметрична относительно координатныхъ осей и состоитъ изъ четырехъ равныхъ между собою дугъ, касающихся координатныхъ осей въ крайнихъ своихъ точкахъ (рис. 47). Пусть AB будетъ одна изъ этихъ четырехъ дугъ; примемъ за начало счета дугъ середину ея, т. е. точку $x = y = \frac{a}{2\sqrt{2}}$. Мы найдемъ изъ уравненія кривой

$$y' = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad \sqrt{1+y'^2} = \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad s = \frac{3}{2}(ax^2)^{\frac{1}{3}} - \frac{3}{4}a.$$

Отсюда, въ частности, вытекаетъ, что длина всей астроиды равна $6a$. Далѣе, имѣемъ

$$y'' = \frac{1}{3x}\left(\frac{a^2}{xy}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad \varrho = 3(axy)^{\frac{1}{3}}.$$

Простое вычисленіе покажетъ, что натуральное уравненіе кривой есть $4s^2 + \varrho^2 = \frac{9}{4}a^2$. Различныя свойства кривой, однако, легче обнаруживаются, если будемъ ее разсматривать, какъ геометрическое мѣсто точекъ, получаемыхъ слѣдующимъ построеніемъ. Опишемъ около начала координатъ радіусомъ $OA = a$ окружность круга и каждую ея точку N спроектируемъ сперва на координатныя оси въ P и Q, а затѣмъ на PQ въ точку M. Общее мѣсто точекъ M и будетъ астроида. Дѣйствительно, если обозначимъ черезъ θ уголъ NOA, то $MP = a\sin^2\theta$, $MQ = a\cos^2\theta$, а координаты точки M будутъ

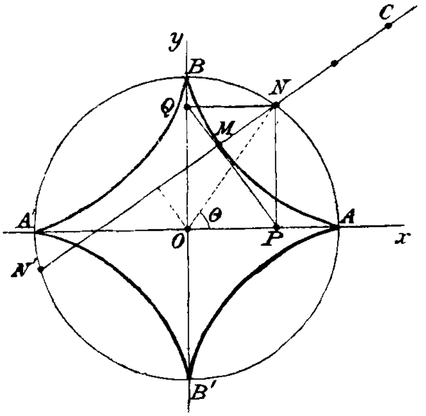

Рис. 47.

$$x = MQ \cdot \cos\theta = a\cos^3\theta,$$
$$y = MP \cdot \sin\theta = a\sin^3\theta,$$

и удовлетворяютъ, какъ видимъ, уравненію $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. Теперь замѣтимъ, что

$$dx = -3a\sin\theta\cos^2\theta\, d\theta, \quad dy = 3a\cos\theta\sin^2\theta\, d\theta, \quad ds = 3a\sin\theta\cos\theta\, d\theta.$$

Слѣдовательно, угловой коэффиціентъ касательной въ M равенъ $-\operatorname{tg}\theta$, т. е. прямая PQ и есть касательная. Отсюда тотчасъ слѣдуетъ, что отрѣзокъ, отсѣкаемый координатными осями на касательной, постоянно равенъ a. Далѣе, если за начало счета дугъ примемъ середину дуги AB, то найдемъ, что $s = -\frac{3}{4}a\cos 2\theta$, а поэтому

$$\text{дуга } MA = \frac{3}{4}a(1 - \cos 2\theta) = \frac{3}{2}a\sin^2\theta = \frac{3}{2}MP.$$

Слѣдовательно, чтобы спрямить дуги MA и MB, стоитъ только продолжить каждый изъ отрѣзковъ MP и MQ по касательной на половину его длины. Наконецъ, радіусъ кривизны, независимо отъ знака, будетъ

$$\varrho = \frac{ds}{d\theta} = \frac{3}{2}a\sin 2\theta,$$

и мы тотчасъ видимъ, что $4s^2+\varrho^2=\frac{9}{4}a^2$, какъ было сказано выше. Замѣчая еще, что $MN=a\sin\theta\cos\theta$, получаемъ $\varrho=3MN$. Слѣдовательно, радіусъ кривизны равенъ утроенной длинѣ MN. Если обозначимъ черезъ N' другую точку пересѣченія нормали съ окружностью круга, то можно также сказать, что центръ кривизны C симметрично расположенъ съ N' относительно M.

h) На *коническомъ сѣченіи* (съ центромъ) кривизна измѣняется пропорціонально кубу разстоянія отъ центра до касательной. Разсмотримъ для опредѣленности эллипсъ, отнесенный къ его осямъ; изъ уравненія $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ послѣдовательно получимъ

$$b^2x+a^2yy'=0,\quad b^2+a^2y'^2+a^2yy''=0,\quad a^2y^3y''=-b^4.$$

Введя разстояніе отъ центра до касательной

$$h=\frac{y-xy'}{\sqrt{1+y'^2}}=\frac{b^2}{y\sqrt{1+y'^2}}$$

и, выбравъ надлежащимъ образомъ знакъ ϱ, получимъ

$$\varrho=\frac{a^2b^2}{h^3}.$$

Другія формы для ϱ получимъ, вводя въ разсмотрѣніе, вмѣсто h, длину l сопряженнаго съ OM полудіаметра, или длину n отрѣзка нормали MN между точкою на кривой и осью, проходящею черезъ фокусы. Стоитъ только замѣтить, что $lh=ab$ и $nh=b^2$, чтобы получить

$$\varrho=\frac{l^3}{ab},\qquad \varrho=\frac{n^3}{p^2},$$

гдѣ, какъ обыкновенно, $p=b^2/a$. Послѣднее выраженіе для ϱ весьма удобно получается при помощи полярныхъ координатъ. Полярное уравненіе коническаго сѣченія, если полюсъ помѣщенъ въ одномъ изъ фокусовъ, а полярная ось по оси кривой, проходящей черезъ фокусы, имѣетъ видъ $r=\frac{p}{1-k\cos\theta}$, и извѣстная формула (§ 558, d), въ которой надо положить

$$f=\frac{1-k\cos\theta}{p},\qquad f'=\frac{k}{p}\sin\theta,\qquad f''=\frac{k}{p}\cos\theta,\qquad f+f''=\frac{1}{p},$$

тотчасъ дастъ

$$\varrho=\frac{(r^2-2kr^2\cos\theta+k^2r^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}.$$

Замѣтимъ вмѣстѣ съ тѣмъ, что въ треугольникѣ FMF', въ которомъ нормаль MN дѣлитъ уголъ M пополамъ, имѣемъ

$$\frac{FN}{2ka}=\frac{FM}{2a},\quad FN=kr,\quad n^2=r^2-2kr^2\cos\theta+k^2r^2,$$

припоминая, что $MF+MF'=2a$, $NF+NF'=2ka$. Такимъ образомъ снова получаемъ упомянутое выраженіе ϱ.

i) Теперь мы интерпретируемъ геометрически это выраженіе и постараемся построить центръ кривизны въ данной точкѣ коническаго сѣченія (рис. 48). Прежде всего замѣчаемъ, что, проектируя FNM на FM, находимъ

$$n \cos \psi = r - kr \cos \theta = p,$$

т. е. проекція нормали на радіусъ векторъ величина постоянная, равная p. Замѣтивъ это, получаемъ далѣе

$$\varrho = \frac{n^3}{p^2} = \frac{n}{\cos^2 \psi}.$$

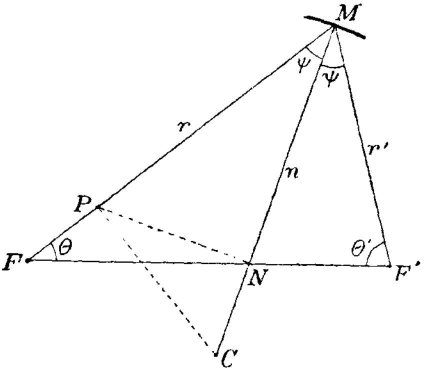

Рис. 48.

Итакъ, возставимъ перпендикуляръ къ нормали въ точкѣ N и продолжимъ его до точки встрѣчи P съ однимъ изъ радіусовъ векторовъ точки M: затѣмъ, возставимъ въ точкѣ P перпендикуляръ къ радіусу вектору; этотъ перпендикуляръ пересѣчетъ нормаль въ центрѣ кривизны точки M. Къ тому же результату можно придти съ помощью нѣкоторыхъ замѣчаній, относящихся къ приложенію безконечно малыхъ въ Геометріи (§ 590, d), а именно, положивъ $MF = r$, $MF' = r'$ и обозначая черезъ θ и θ' углы при вершинахъ F и F' въ треугольникѣ MFF', можемъ написать

$$r\,d\theta = -r'\,d\theta' = \cos \psi \cdot ds.$$

Такъ какъ уголъ наклоненія нормали къ оси FF' измѣряется числомъ $\theta + \psi$ или дополненіемъ до π числа $\theta' + \psi$, то для угла смежности $d\varphi$, очевидно, получимъ

$$d\varphi = d\theta + d\psi, \qquad -d\varphi = d\theta' + d\psi.$$

Отсюда, вычитая одно равенство изъ другого и раздѣляя на ds, находимъ

$$\frac{2}{\varrho} = \frac{d\theta}{ds} - \frac{d\theta'}{ds} = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) \cos \psi.$$

Съ другой стороны, фокусы раздѣляются гармонически касательною и нормалью, а потому ихъ проекціи на нормаль дѣлятъ гармонически отрѣзокъ n, такъ что

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{r \cos \psi} + \frac{1}{r' \cos \psi} = \frac{2}{\varrho \cos^2 \psi},$$

или $\varrho \cos^2 \psi = n$ и т. д. При помощи самыхъ простыхъ геометрическихъ соображеній указанное построеніе можно превратить въ другое, не менѣе полезное, данное Маннгеймомъ (Mannheim) [1]) (рис. 49). Положимъ, что перпендикуляръ, опущенный изъ C на FF' встрѣчаетъ PP' (перпендикуляръ къ нормали MN) въ точкѣ Q, а прямая, проведенная черезъ Q параллельно FF', пересѣкаетъ MF и MF' въ точкахъ G и G'. Такъ какъ углы

---

[1]) „Cours de Géométrie descriptive", p. 175.

CPG и CQG прямые, то точки C, P, Q, G лежатъ на окружности круга; а потому $\angle CGQ = \angle CPQ$. Такимъ же образомъ доказывается, что $\angle CG'Q = \angle CP'Q$, а такъ какъ, очевидно, $\angle CPQ = \angle CP'Q$, то и $\angle CGQ = \angle CG'Q$, т. е. треугольникъ CGG' равнобедренный и Q, слѣдовательно, дѣлитъ GG' пополамъ. Отсюда слѣдуетъ, что прямая MQ проходитъ черезъ середину FF', т. е. черезъ центръ коническаго сѣченія. Такимъ образомъ и получается слѣдующее построеніе

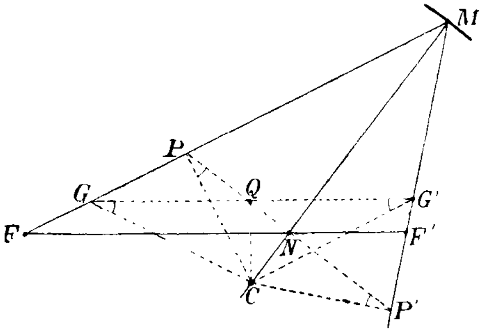

Рис. 49.

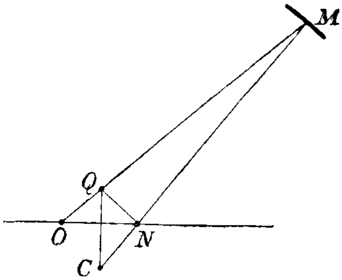

Рис. 50.

(рис. 50): изъ точки N возставимъ перпендикуляръ къ нормали до пересѣченія его въ точкѣ Q съ діаметромъ, проходящимъ черезъ M; затѣмъ изъ точки Q опускаемъ перпендикуляръ на прямую FF'; этотъ перпендикуляръ пересѣчетъ нормаль въ центрѣ кривизны C.

j) Первое построеніе центра кривизны коническаго сѣченія даетъ намъ средство рѣшить слѣдующую задачу: Извѣстно построеніе центра кривизны нѣкоторой данной кривой. Требуется построить центръ кривизны въ соотвѣтствующей точкѣ подэры данной кривой относительно данной точки (рис. 51). Положимъ, что точкѣ M на данной кривой соотвѣтствуетъ точка P на подэрѣ, т. е. P есть проекція неподвижной данной точки O на касательную къ данной кривой въ точкѣ M. Пусть Q будетъ проекція центра кривизны C данной кривой на OM. Проектируемъ Q на нормаль MC, и полученную точку N соединимъ съ O. Центръ кривизны подэры въ точкѣ P находится въ точкѣ пересѣченія K прямой ON съ нормалью къ подэрѣ въ точкѣ P.

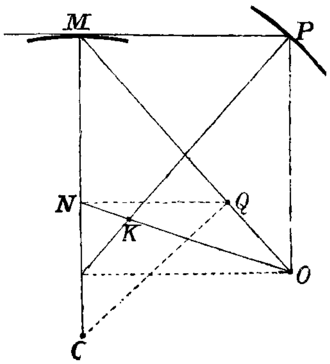

Рис. 51.

Въ самомъ дѣлѣ, пренебрегая безконечно малыми высшаго порядка, можно замѣнить данную кривую въ смежности съ точкою M соприкасающимся ея кругомъ (§ 592) или какою нибудь другою кривою, имѣющею тотъ же центръ кривизны C. На мѣсто подэры данной кривой относительно точки O, въ смежности съ точкою P, явится тогда подэра новой кривой, но положеніе центра кривизны K не измѣнится. Въ Аналитической Геометріи доказывается, что подэра коническаго сѣченія относительно ея фокуса есть окружность круга, построеннаго на большой оси коническаго сѣченія, какъ на діаметрѣ *). Поэтому мы можемъ утверждать, что K есть центръ коническаго сѣченія, одинъ изъ фокусовъ котораго лежитъ въ O, которое проходитъ черезъ M и имѣетъ соотвѣтствующій центръ кривизны въ точкѣ C. Но изъ построенія совершенно ясно, что для этого коническаго сѣченія прямая ON есть ось, проходящая черезъ его фокусы. Слѣдовательно, K лежитъ на ON, что и требовалось доказать. Полезнымъ упражненіемъ для читателя будетъ приложеніе доказаннаго построенія къ лемнискатѣ, разсматриваемой, какъ подэра равносторонней гиперболы относительно ея центра и къ кардіоидѣ, какъ подэрѣ окружности круга относительно нѣкоторой ея точки. Съ помощью простыхъ геометрическихъ соображеній онъ найдетъ уже раньше указанныя спеціальныя построенія.

k) Примѣняя къ параболѣ первое построеніе центра кривизны коническаго сѣченія, легко замѣтить на основаніи равенства отмѣченныхъ угловъ, что треугольники MFN и PFN равнобедренны (рис. 52), откуда слѣдуетъ, что F дѣлитъ $N P$ пополамъ. Такимъ образомъ мы приходимъ къ найденному уже построенію, на основаніи котораго можно сказать, что **парабола есть синусъ-спираль съ полюсомъ въ фокусѣ**. Если вмѣсто фокуса дана директриса, то указанное построеніе надо замѣнить другимъ, которое мы выведемъ весьма просто изъ предыдущаго. Проектируемъ M въ G на директрису, и пусть S — точка пересѣченія нормали съ директрисою. Прямоугольные треугольники MFL и MGS равны между собою, потому что углы при M между собою равны, и $MF = MG$, по извѣстному свойству параболы. Слѣдовательно, гипотенузы ML и MS также между собою равны. Отсюда слѣдуетъ, что **радіусъ кривизны равенъ удвоенному отрѣзку нормали между точкою на кривой и директрисою**. Кривыя линіи, въ которыхъ радіусъ кривизны пропорціоналенъ длинѣ нормали въ Декартовыхъ координатахъ, называются *кривыми Рибокура* (Ribaucour) Поэтому можно сказать, что **парабола есть кривая Рибокура**.

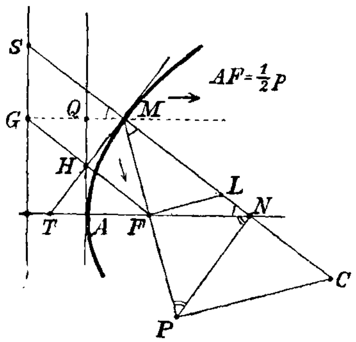

Рис. 52.

l) Къ числу ихъ принадлежитъ, между прочимъ, **цѣпная линія**. Въ самомъ дѣлѣ, мы доказали раньше (§ 589, c), что (рис. 32) въ прямоугольномъ треугольникѣ MPN проекція MQ длины $MP(=y)$ на гипотенузу $MN(=n)$ равна a, такъ что $y^2 = an$, а изъ уравненія кривой получимъ

$$y'' = \frac{1}{2a}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = \frac{y}{a^2}, \qquad \varrho = \frac{n^3}{y^3 y''} = \frac{a^2 n^3}{y^4} = n.$$

Слѣдовательно, **центръ кривизны расположенъ симметрично съ N относительнó M**. Мы видѣли раньше также, что дуга s, считаемая отъ вершины A, равна PQ. Отсюда слѣдуетъ, что въ треугольникѣ MPN имѣемъ $s^2 = MQ \cdot QN$. А такъ какъ $n = MQ + QN$, то оказывается, что натуральное уравненіе цѣпной линіи будетъ $\varrho = a + \frac{s^2}{a}$.

*) См. Salmon-Fiedler „Kegelschnitte“ (1878), стр. 252.

m) Для цѣпной линіи равнаго сопротивленія

$$y = -a \log \cos \frac{x}{a}$$

имѣемъ

$$y' = \operatorname{tg} \frac{x}{a}, \quad \sqrt{1+y'^2} = \frac{1}{\cos \frac{x}{a}}, \quad y'' = \frac{1}{a \cos^2 \frac{x}{a}}, \quad \varrho = \frac{a}{\cos \frac{x}{a}},$$

т. е. $\varrho \cos \varphi = a$. Слѣдовательно, проекція радіуса кривизны на ось симметріи кривой равна постоянной величинѣ a. Вычисленіе длины дуги s не такъ легко, мы его выполнимъ въ слѣдующей книгѣ. Тогда мы увидимъ также, что натуральное уравненіе нашей кривой есть

$$\varrho = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}}\right).$$

n) Еще одна весьма важная изъ кривыхъ Рибокура есть циклоида (§ 590, a). Обращаясь къ рис. 53, замѣчаемъ, что (по опредѣленію) $ON = \smile MN = a\,\theta$, а потому координаты точки M будутъ

$$x = ON - PN = a(\theta - \sin\theta), \quad y = PH + HM = a(1 - \cos\theta).$$

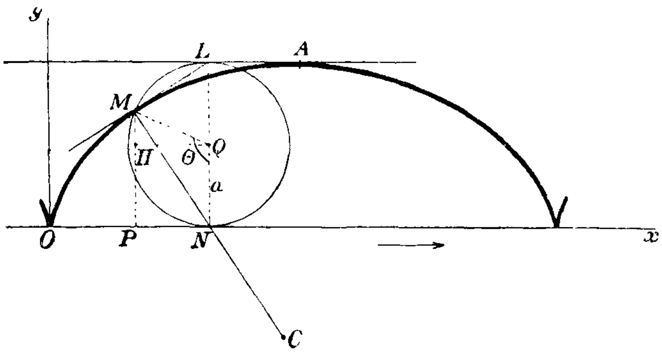

Рис. 53.

Отсюда слѣдуетъ

$$dx = a(1 - \cos\theta)\, d\theta, \quad dy = a \sin\theta\, d\theta,$$

а потому $\frac{dy}{dx} = \cot\frac{\theta}{2}$. Съ другой стороны, $\angle MLN = \frac{1}{2} \angle MQN = \frac{1}{2}\theta$. Слѣдовательно, ML – касательная, а поэтому MN — нормаль къ кривой въ точкѣ M. Возвышая въ квадратъ и складывая выраженія dx и dy, получаемъ ds^2, и изъ него послѣдовательно

$$ds = 2a \sin\frac{\theta}{2}\, d\theta, \quad s = 4a\left(1 - \cos\frac{\theta}{2}\right) = 8a \sin^2\frac{\theta}{4},$$

если условимся отсчитывать дуги отъ точки O. Длину цѣлой вѣтви циклоиды, т. е. такой ея дуги, которую опишетъ точка катящагося круга по совершеніи имъ полнаго оборота, получимъ, положивъ $\theta = 2\pi$. Эта длина оказывается равною $8a$, т. е. учетверенному діаметру катящагося круга. Далѣе, такъ какъ уголъ смежности, независимо отъ знака, равенъ $\frac{1}{2}d\theta$, то тотчасъ находимъ $\rho = 4a\sin\frac{\theta}{2}$, т. е. $\rho = 2n$ $(n = MN)$. Итакъ, центръ кривизны расположенъ симметрично съ M относительно N. Это свойство почти очевидно послѣ сказаннаго въ § 593 и § 590, a [1]. Наконецъ, если перенесемъ начало счета дугъ въ вершину A, середину полной дуги циклоиды, то найдемъ $s = 4a\cos\frac{\theta}{2}$, и тотчасъ получаемъ натуральное уравненіе циклоиды: $s^2 + \rho^2 = \text{const}$.

o) Всѣ кривыя линіи, описываемыя какою нибудь точкою кривой, катящейся безъ скольженія по другой неподвижной плоской кривой, называются рулеттами (Rollkurven). Всѣ рулетты обладаютъ тѣмъ свойствомъ, которое мы замѣтили въ циклоидѣ, а именно, что нормаль къ рулеттѣ всегда проходитъ черезъ мгновенную точку касанія подвижной и неподвижной кривой *). Когда неподвижная кривая обращается въ прямую линію, а подвижная въ окружность круга, то рулетта и будетъ циклоидою. Въ обратномъ случаѣ, когда подвижная прямая катится безъ скольженія по неподвижной окружности круга, каждая точка прямой описываетъ кривую, которая называется *эвольвентою круга* (или разверткою круга). Если θ есть уголъ, на который подвижная прямая повернулась въ сторону, противоположную движенію часовой стрѣлки, начиная съ того момента, когда точка этой прямой, описывающая эвольвенту круга, находилась въ A, то координаты точки M, когда OA примемъ за ось асбциссъ, будутъ **)

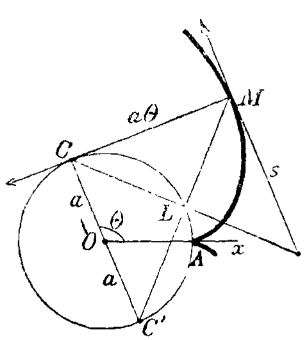

Рис. 54.

$$x = a(\cos\theta + \theta\sin\theta), \quad y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta).$$

Поэтому

$$dx = a\,\theta\cos\theta\,d\theta, \quad dy = a\,\theta\sin\theta\,d\theta, \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\theta,$$

$$ds = a\,\theta\,d\theta, \quad \rho = \frac{ds}{d\theta} = a\,\theta.$$

Слѣдовательно, кривая остается постоянно нормальною къ подвижной прямой, и центръ кривизны всегда находится въ точкѣ касанія подвижной прямой съ неподвижнымъ кругомъ. Длина дуги AM есть $s = \frac{1}{2}a\,\theta^2$, а потому натуральное уравненіе эвольвенты круга есть $\rho^2 = 2as$. Изъ него мы можемъ получить слѣдующее: Если прямая MC', соединяющая M съ точкою C', діаметрально противоположною точкѣ C, пересѣкаетъ окружность круга въ точкѣ L, то прямая CL отсѣчетъ на касательной отъ точки M отрѣзокъ, равный s.

---

[1]) Duhamel: „Éléments du Calcul", т. I, стр. 177.

*) См. Cesàro „Naturliche Geometrie". § 57.

**) X = проекціи OM = пр. OC + пр. CM на Ox и т. д.

p) Когда и неподвижная и подвижная кривыя будутъ окружности круговъ, то рулеттами будутъ *гипоциклоида* или *эпициклоида*, смотря по тому, будетъ ли касаніе круговъ внутреннее или внѣшнее. Мы ограничимся здѣсь изслѣдованіемъ этихъ спеціальныхъ рулеттъ, имѣющихъ важное приложеніе въ теоріи механизмовъ. Чтобы имѣть дѣло съ опредѣленнымъ случаемъ, допустимъ, что кругъ радіуса ma катится безъ скольженія по другому кругу радіуса a, при чемъ касаніе круговъ будетъ внѣшнее (рис. 55). Результаты, которые получимъ, будутъ относиться къ эпициклоидамъ, если предположимъ $m > 0$, но тѣ же формулы будутъ относиться къ гипоциклоидамъ, если предположимъ $m < 0$. Мы предположимъ, что подвижная точка M находится сперва въ точкѣ A на окружности неподвижнаго круга, имѣющаго центръ въ O, и направимъ ось абсциссъ по прямой OA. Подвижный кругъ радіуса ma, съ центромъ въ Q, катится безъ скольженія въ сторону, противоположную движенію часовой стрѣлки. Разсмотримъ его въ томъ новомъ положеніи, въ которое онъ придетъ, когда линія центровъ обоихъ круговъ повернется на уголъ $m\theta$ около точки O. Пусть N будетъ тогда точка касанія круговъ. Теперь примемъ во вниманіе, что по условію движенія дуга AN = дугѣ MN, а слѣдовательно, уголъ NQM необходимо равенъ θ. Отсюда получается, что координаты точки M будутъ

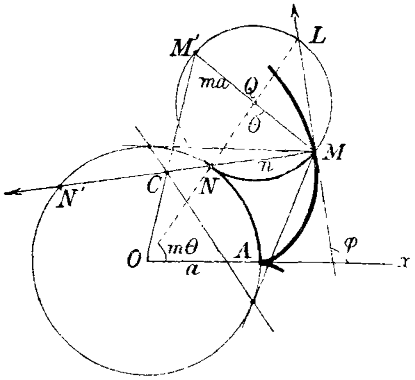

Рис. 55.

$$x = a\{(1+m)\cos m\theta - m\cos(\theta + m\theta)\},$$
$$y = a\{(1+m)\sin m\theta - m\sin(\theta + m\theta)\}.$$

Слѣдовательно,

$$dx = 2m(1+m)a\sin\frac{\theta}{2}\cos\left(\frac{\theta}{2} + m\theta\right)d\theta.$$

$$dy = 2m(1+m)a\sin\frac{\theta}{2}\sin\left(\frac{\theta}{2} + m\theta\right)d\theta$$

и, наконецъ,

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2} + m\theta\right), \quad \frac{ds}{d\theta} = 2m(1+m)a\sin\frac{\theta}{2}.$$

Итакъ, уголъ наклоненія касательной къ оси x-овъ есть $\varphi = \frac{\theta}{2} + m\theta$. Если соединимъ точку M съ точкою L, діаметрально противоположною точкѣ N на подвижномъ кругѣ, то уголъ наклоненія ML къ оси x-овъ будетъ равенъ суммѣ угловъ $QLM = \frac{1}{2}\theta$ и $AON = m\theta$. Слѣдовательно, ML — касательная, а потому MN — нормаль. Далѣе, если будемъ считать дуги отъ A, то, очевидно, будемъ имѣть

$$s = 4m(1+m)a\left(1 - \cos\frac{\theta}{2}\right) = 8m(1+m)a\sin^2\frac{\theta}{4},$$

и поэтому длина полной дуги эпициклоиды равна $8m(1+m)a$.

Если, напротивъ, будемъ считать дуги отъ середины полной дуги ($s = 0$ при $\theta = \pi$), то будемъ имѣть

$$s = -4\,m\,(1+m)\,a\cos\frac{\theta}{2},$$

а такъ какъ, съ другой стороны,

$$\varrho = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{2}{1+2\,m}\,\frac{ds}{d\theta} = \frac{4\,m\,(1+m)}{1+2\,m}\,a\sin\frac{\theta}{2},$$

то натуральное уравненіе эпициклоидъ и гипоциклоидъ будетъ

$$s^2 + (1+2\,m)^2\,\varrho^2 = \text{const}.$$

Чтобы построить центръ кривизны, замѣтимъ, что отрѣзокъ нормали MN имѣетъ длину $n = 2\,m\,a\sin\frac{\theta}{2}$. Другой отрѣзокъ нормали MN', отсѣкаемый неподвижнымъ кругомъ, имѣетъ длину n', которую можно вычислить съ помощью пропорціи $\frac{n'-n}{n} = \frac{a}{m\,a}$, откуда и получаемъ $m\,n' = (1+m)\,n$. Замѣтивъ это, имѣемъ

$$\varrho = \frac{2\,(1+m)\,n}{1+2\,m} \quad \text{или} \quad \frac{2}{\varrho} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n'}.$$

Слѣдовательно, точка C гармонически сопряжена съ M относительно NN', т. е. центръ кривизны въ каждой точкѣ M лежитъ на полярѣ этой точки относительно неподвижнаго круга. Это свойство тотчасъ преобразуется въ другое, если примемъ во вниманіе слѣдующее замѣчаніе. Радіусъ ON', очевидно, параллеленъ QM. Если проектируемъ четыре гармонически сопряженныя точки M, N, C, N' изъ O на QM, то проекція N' будетъ въ безконечности, а потому проекція N, т. е. точка Q, должна дѣлить пополамъ проекцію MC, т. е. C проектируется въ точку, симметрично расположенную съ M относительно Q. Иными словами: центръ кривизны въ точкѣ M лежитъ на томъ изъ діаметровъ неподвижнаго круга, который проходитъ черезъ точку M', діаметрально противоположную точкѣ M на окружности подвижнаго круга.

q) Въ предѣльномъ случаѣ $m = 0$, при чемъ предполагается, что съ приближеніемъ m къ нулю, ma остается постояннымъ, а слѣдовательно, a безпредѣльно возрастаетъ, получимъ циклоиду ($\varrho = 2\,n$). Наоборотъ, при $m = \infty$, при чемъ предполагается, что $m\theta$ сохраняетъ постоянное значеніе ϑ, снова находимъ свойства эвольвенты круга ($\varrho = n$).

$$\varrho = 2\,a\lim m\sin\frac{\theta}{2} = a\,\vartheta, \qquad s = 8\,a\lim m\,(1+m)\sin^2\frac{\theta}{4} = \frac{1}{2}\,a\,\vartheta^2.$$

Впрочемъ, ясно, что въ этомъ случаѣ, вслѣдствіе совпаденія точекъ N и N', и точка C должна съ ними совпасть. При $m = -\frac{1}{2}$, получимъ $\varrho = \infty$, т. е. гипоциклоида обращается въ прямую линію, что можно также видѣть, выполняя построеніе нормали или центра кривизны. Иными словами: если нѣкоторый кругъ, внутренне касаясь другого, вдвое большаго круга, катится по этому неподвижному кругу безъ скольженія, то каждая его точка движется по діаметру неподвижнаго круга (рис. 56) Это свойство, которое можно прямо прочесть на чертежѣ, примѣняется въ нѣкоторыхъ зубчатыхъ колесахъ. Кардіоиды также принадлежатъ къ роду эпициклоидъ, что видно изъ общихъ формулъ, если въ нихъ положимъ $m = 1$. Впрочемъ, то же самое можно видѣть и на рис. 46.

Въ самомъ дѣлѣ, принимая во вниманіе, что $\angle PHN$ вдвое больше угла PQN и, слѣдовательно, равенъ θ, мы видимъ, что прямая $HN \parallel OM$ и проходитъ поэтому черезъ точку K — середину MM', такъ какъ HN дѣлитъ PM' пополамъ. Отсюда слѣдуетъ, что окружность круга, построеннаго по MM', какъ на діаметрѣ, касается въ точкѣ N окружности неподвижнаго круга. Съ другой стороны, очевидное равенство угловъ OHN и MKN показываетъ, что и дуги ON и MN обоихъ круговъ равны между собою. Итакъ, кардіоиду можно разсматривать, какъ рулетту, описываемую точкою подвижнаго круга, катящагося безъ скольженія по другому равному ему кругу. Общій пріемъ построенія центра кривизны приведется въ нашемъ случаѣ къ указанному уже раньше спеціальному построенію. Наконецъ, въ случаѣ $m = -\frac{1}{2}$ получаемъ астроиду (рис. 57). Чертежъ тотчасъ показываетъ, что кругъ построенный на половинѣ LN радіуса ON, какъ на діаметрѣ, проходитъ черезъ точку M на астроидѣ. Такъ какъ уголъ MKN, очевидно, вчетверо больше угла AON, то дуга MN внутренняго круга всегда равна дугѣ AN внѣшняго круга.

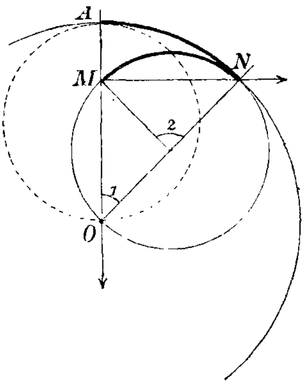

Рис. 56.

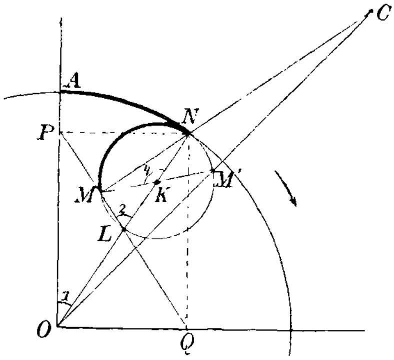

Рис. 57.

Поэтому астроиду можно разсматривать, какъ гипоциклоиду, описываемую точкою круга, катящагося (внутренне) безъ скольженія по другому неподвижному вчетверо большему кругу. Общій способъ построенія центра кривизны приводится здѣсь къ извѣстному уже изъ предыдущаго спеціальному, потому что на основаніи извѣстнаго соотношенія между отрѣзками, отсѣкаемыми трансверсалью OC на сторонахъ треугольника MKN, имѣемъ

$$NC = \frac{KM'}{MM'} \cdot \frac{ON}{OK} \cdot MC = \frac{2}{3} MC, \quad \rho = \frac{3}{2} NC = 3\, MN.$$

r) Первый способъ построенія центра кривизны въ эпи- и гипоциклоидахъ, указанный въ упражненіи p), наводитъ на мысль изслѣдовать кривыя, опредѣляемыя слѣдующимъ свойствомъ: въ каждой точкѣ M на кривой радіусъ кривизны пропорціоналенъ отрѣзку нормали между точкою M и полярою точки M относительно неподвижнаго круга. Мы предложили бы это изслѣдованіе читателю для упражненія. Кромѣ названныхъ выше, этимъ свойствомъ пользуется безчисленное множество другихъ кривыхъ и, между прочимъ, коническія сѣченія. Для нихъ неподвижный кругъ есть кругъ Монжа (Monge), т. е. кругъ, концентрическій съ коническимъ сѣченіемъ, и радіуса, равнаго $\sqrt{a^2 + b^2}$. Если въ общемъ случаѣ неподвижный кругъ сведется къ точкѣ, то получимъ снова синусъ-спирали. Если, наоборотъ, этотъ кругъ сведется къ прямой линіи, то получимъ кривыя Рибокура. Слѣдовательно, въ числѣ коническихъ сѣченій содержится одна синусъ-спираль и одна кривая Рибокура. Первая получится, если положимъ $a^2+b^2=0$; это будетъ, слѣдовательно, равносторонняя гипербола. Вторая получится, если будемъ увеличивать a^2+b^2 до ∞, или если представимъ себѣ, что центръ кривой удаляется въ безконечность: это будетъ парабола.

Асимптоты.

596. Представимъ себѣ двѣ точки, двигающіяся по двумъ кривымъ и стремящіяся къ совпаденію, въ то время, какъ прямая, ихъ соединяющая, уходитъ въ безконечность или безостановочно вращается около неподвижной точки. Когда подобное обстоятельство имѣетъ мѣсто (при чемъ не исключается возможность, что при нѣкоторомъ опредѣленномъ соотвѣтствіи между разсматриваемыми точками оно можетъ и не имѣть мѣста), то говорятъ, что кривыя линіи будутъ асимптотами одна относительно другой, или что онѣ расположены асимптотически одна къ другой. Представимъ себѣ, напримѣръ, что нѣкоторая точка M удаляется въ безконечность, двигаясь по кривой $y=f(x)$, такъ что разстояніе ея отъ начала координатъ возрастаетъ безпредѣльно. Тогда, по крайней мѣрѣ, одна изъ ея Декартовыхъ координатъ будетъ также безпредѣльно возрастать. Если только одна изъ координатъ возрастаетъ безпредѣльно, то всегда можно предположить, что этою координатою будетъ именно абсцисса, потому что другой случай всегда сведется къ этому путемъ замѣны y на x и обратно. Предпославъ сказанное, разсмотримъ на другой кривой, $y=g(x)$, точку, имѣющую для каждаго положенія M общую съ точкою M абсциссу x. Предположимъ далѣе, что съ приближеніемъ x къ $\pm\infty$, т. е. при безпредѣльномъ возрастаніи $|x|$, разность $f(x)-g(x)$ стремится къ нулю. Тогда можно утверждать, что разсматриваемыя кривыя расположены асимптотически одна къ другой, и то же самое можно сказать о кривыхъ, полярныя уравненія которыхъ будутъ $r=f(\theta)$ и $r=g(\theta)$. Такъ какъ при этомъ (§ 308, c) и разность $f'(x)-g'(x)$ стремится къ нулю, если она вообще къ какому-нибудь предѣлу стремится, а не колеблется постоянно, то оказывается, что обѣ кривыя не только стремятся пройти черезъ общую точку, но, вообще говоря, стремятся также пріобрѣсти общую касательную, однако, послѣднее обстоятельство необходимо всегда тщательно изслѣдовать.

597. Обозначимъ въ дальнѣйшемъ черезъ x и y координаты точки M, стремящейся въ безконечность при движеніи по данной кривой. Если удастся опредѣлить постоянныя m и h такъ, чтобы $y-mx-h$ стремилось къ нулю съ приближеніемъ x къ $\pm\infty$, то можно будетъ сказать, что прямая $Y = mX + h$ будетъ **асимптотою** данной кривой. Разысканіемъ этихъ прямолинейныхъ асимптотъ мы и займемся подробнѣе. Изъ уравненія

$$\lim_{x=\pm\infty}(y - mx - h) = 0$$

тотчасъ слѣдуетъ $y - mx$ или $x\left(\frac{y}{x} - m\right)$ стремится къ конечному предѣлу h. Такъ какъ первый множитель x безпредѣльно возрастаетъ по абсолютной величинѣ, то второй $\frac{y}{x} - m$ необходимо долженъ стремиться къ нулю. Слѣдовательно,

$$\lim_{x=\pm\infty}\frac{y}{x} = m, \qquad \lim_{x=\pm\infty}(y - mx) = h.$$

Въ послѣдовательномъ примѣненіи этихъ равенствъ (геометрически очевидныхъ) и состоитъ правило разысканія асимптотъ кривыхъ, заданныхъ уравненіями въ Декартовыхъ координатахъ. Въ полярныхъ координатахъ асимптоту можно опредѣлить угломъ α ея наклоненія къ полярной оси и разстояніемъ ея q отъ полюса. Сперва замѣтимъ, что если $\frac{1}{r} = f(\theta)$ есть уравненіе данной кривой, то $f(\theta)$ стремится къ нулю, когда M удаляется въ безконечность. Слѣдовательно, если эта функція непрерывна, то углы, образуемые полярною осью съ асимптотами будутъ корнями уравненія $f(\theta) = 0$. Для полнаго опредѣленія асимптоты, соотвѣтствующей нѣкоторому данному корню α этого уравненія, достаточно замѣтить, что разстояніе точки M отъ асимптоты должно стремиться къ нулю, а потому на основаніи опредѣленія $f'(\alpha)$ должны имѣть

$$q = \lim_{r=\infty} r\sin(\theta - \alpha) = \lim_{\theta=\alpha}\frac{\theta - \alpha}{f(\theta)} = \frac{1}{f'(\alpha)}.$$

[**Примѣчаніе**. Опредѣляя q формулою $q = \lim\limits_{r=\infty} r\sin(\theta - \alpha)$, нужно подъ q подразумѣвать разстояніе, взятое съ $+$ или $-$, смотря по тому, слѣва или справа отъ полюса O асимптота пересѣкаетъ полярную ось, при общепринятомъ въ Аналитической Геометріи счетѣ угла θ. Въ этомъ легко убѣдиться, построивъ изъ O перпендикуляръ OQ къ асимптотѣ, и прямую OK, параллельную асимптотѣ, а черезъ точку M прямую, параллельную OQ, пересѣкающую OK въ точкѣ K, а асимптоту въ точкѣ N. Тогда $OQ = \lim MK$ равно $\lim r\cdot\sin(\theta - \alpha)$ въ первомъ случаѣ и равно $\lim r\cdot\sin(\alpha - \theta)$ во второмъ.]

598. Теперь мы докажемъ слѣдующую теорему: Если съ удаленіемъ точки M въ безконечность касательная въ этой точкѣ стремится къ нѣкоторому предѣльному положенію, то это предѣльное положеніе есть асимптота кривой. На этомъ основаніи въ Аналитической Геометріи асимптоты и разсматриваютъ, какъ касательныя въ точкахъ пересѣченія кривой съ безконечно удаленною прямой. Чтобы доказать эту теорему, сравнимъ уравненіе касательной $Y = y'X + (y - xy')$ съ уравненіемъ ея предѣльнаго положенія $Y = m_1 X + h_1$. Допустить существованіе этого предѣльнаго положенія значитъ предположить, что при безпредѣльномъ возрастаніи $|x|$ существуютъ предѣлы чиселъ y' и $y - xy'$, такъ что

$$\lim y' = m_1, \qquad \lim (y - xy') = h_1.$$

Въ то же время теорема Лопиталя даетъ

$$m = \lim \frac{y}{x} = \lim y' = m_1.$$

и далѣе,

$$h = \lim (y - mx) = \lim \frac{\frac{y}{x} - m}{\frac{1}{x}} = \lim (y - xy') = h_1,$$

что и доказываетъ теорему. То же самое можно столь же просто вывести, пользуясь полярными координатами. Въ самомъ дѣлѣ, разстояніе отъ полюса до касательной, если его считать, какъ сказано въ примѣчаніи къ предыдущему §, равно $-r \sin \omega$ [$\omega = \beta - \theta$, при чемъ β есть уголъ между касательной и полярною осью] и можетъ стремиться къ конечному предѣлу q_1 лишь въ томъ случаѣ, когда ω стремится къ предѣлу $n\pi$, гдѣ n цѣлое число. Отсюда вытекаетъ слѣдующее: если предѣльное положеніе касательной наклонено къ полярной оси подъ угломъ β_1, т. е. если $\beta = \theta + \omega$ имѣетъ предѣлъ β_1, то существуетъ и $\alpha = \lim \theta = \beta_1 - n\pi$ и, кромѣ того,

$$q = \lim \frac{1}{f'(\theta)} = -\lim \frac{r^2}{r'} = -\lim r \operatorname{tg} \omega = -\lim r \sin \omega = q_1.$$

599. Упражненія. a) Кривая $y = \frac{\cos x}{x}$, очевидно, асимптотична относительно каждой изъ осей координатъ Но въ то время, какъ одна изъ асимптотъ, ось y-овъ, можетъ быть разсматриваема, какъ предѣльное положеніе, съ которымъ стремится совпасть касательная въ точкѣ M при безпредѣльномъ возрастаніи y, о другой, оси x-овъ, этого сказать нельзя, потому что $y - xy'$ ни къ какому предѣлу не стремится при безпредѣльномъ возрастаніи $|x|$. Иными словами, касательная постоянно колеблется, что, впрочемъ, видно и изъ того, что касательныя къ кривой въ безчисленномъ множествѣ точекъ пересѣченія кривой съ осью x-овъ проходятъ по очереди черезъ точки $y = 1$ и $y = -1$ на оси y-овъ. Итакъ, при извѣстныхъ условіяхъ асимптота можетъ и не быть предѣльнымъ положеніемъ касательной и теорема, обратная доказанной въ предыдущемъ §, не справедлива.

b) Въ предыдущемъ примѣрѣ касательная, хотя и не имѣетъ предѣльнаго положенія, стремится, однако, сдѣлаться параллельною асимптотѣ. Иное дѣло будетъ у кривой

$$y = 2^{-[x]}(1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{x - [x]}),$$

которую мы разсматривали раньше (§ 294, f). Здѣсь направленіе касательной колеблется такъ, что она безчисленное множество разъ дѣлается перпендикулярною къ асимптотѣ. Для кривой $xy = [x]$ получается опять новое обстоятельство: при безконечномъ x имѣемъ 1) $\lim y = 1$, 2) $\lim y' = 0$ и 3) $\lim (y - xy') = 2 \lim \frac{[x]}{x} = 2$, т. е. касательная стремится къ предѣльному положенію ($y = 2$), но это положеніе не совпадаетъ съ асимптотою ($y = 1$). Этотъ результатъ не противорѣчитъ теоремѣ, доказанной въ предыдущемъ §; дѣйствительно, при доказательствѣ ея мы примѣняли теорему Лопиталя, слѣдовательно, молча предполагали, что производная y' — единственна; между тѣмъ какъ въ данномъ примѣрѣ производная слѣва совсѣмъ не существуетъ для всѣхъ точекъ, абсцисса которыхъ цѣлое число. Этотъ примѣръ показываетъ только, что надо быть всегда осторожнымъ въ примѣненіи теоремы, и не забывать провѣрить, выполнены ли всѣ ограниченія, при которыхъ она справедлива.

c) Чтобы разыскать асимптоты кривой, заданной уравненіями $x \cos\theta = a$, $y = b(\operatorname{tg}\theta - \theta)$ (рис. 58) (профиль развертывающагося геликоида), или точнѣе говоря, той вѣтви кривой, которая соотвѣтствуетъ значеніямъ θ въ интервалѣ $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$, надо прежде всего замѣтить, что для безпредѣльнаго возрастанія той или другой изъ координатъ x и y необходимо приближать θ къ $\pm\frac{\pi}{2}$. При этихъ условіяхъ имѣемъ

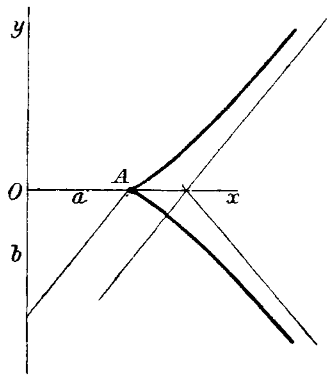

Рис. 58.

$$m = \lim \frac{y}{x} = \frac{b}{a} \lim (\sin\theta - \theta\cos\theta) = \pm \frac{b}{a},$$

$$\lim\left(y \mp \frac{b}{a}x\right) = b \lim \frac{\sin\theta - \theta\cos\theta \mp 1}{\cos\theta} = -b \lim \theta = \mp \frac{1}{2}\pi b.$$

Слѣдовательно, искомыя асимптоты будутъ прямыя, изображаемыя уравненіями $\frac{x}{a} \mp \frac{y}{b} = \frac{\pi}{2}$.

d) При разысканіи асимптотъ не надо забывать измѣнять x не только до $+\infty$, но и до $-\infty$, потому что въ обоихъ случаяхъ могутъ получиться различныя асимптоты. Напримѣръ, для кривой $y = x\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, когда x стремится къ $\pm\infty$, получаемъ

$$m = \lim \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \pm 1,$$

$$h = \lim (y \mp x) = \mp \lim \frac{2x}{e^{2x} + 1} = 0,$$

и кривая асимптотична къ прямымъ, дѣлящимъ пополамъ углы между осями координатъ (рис. 59). Болѣе простой примѣръ даетъ кривая $y = \operatorname{arc\,tg} x$.

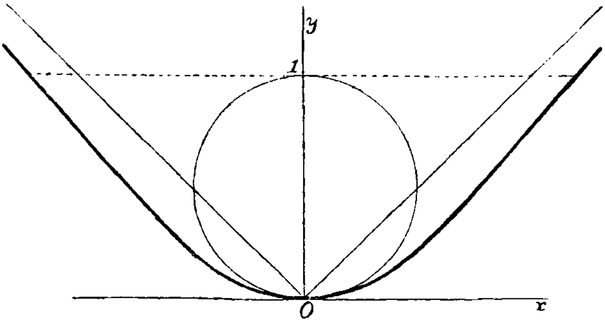

Рис. 59.

Разсмотрѣніе обоихъ случаевъ необходимо и для того, чтобы знать, по одному или по обоимъ направленіямъ кривая приближается къ асимптотѣ.

e) Кривая $y = \left(\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}\right)$ имѣетъ въ началѣ координатъ двѣ касательныя (рис. 60), потому что (§ 282, c) слѣва отъ начала $y' = 1$, а справа $y' = 0$.

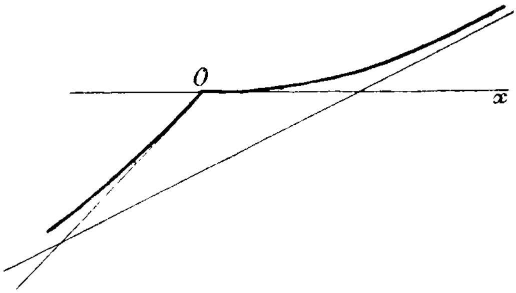

Рис. 60.

Съ приближеніемъ x къ $\pm\infty$, $|y|$ возрастаетъ безпредѣльно. Но обѣ вѣтви кривой, получаемыя такимъ образомъ, имѣютъ одну и ту же асимптоту, потому что $\lim e^{\frac{1}{x}} = 1$, $\lim x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) = 1$, и слѣдовательно,

$$m = \lim \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{2}, \quad h = \lim\left(y - \frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}\lim x\,\frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}} = -\frac{1}{4},$$

при $x = \pm\infty$. Поэтому уравненіе асимптоты будетъ $x - 2y = \frac{1}{2}$. Къ тому же результату еще проще придемъ съ помощью разложенія y въ безконечный рядъ

$$y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{48\,x^2} + \cdots$$

f) Разложенія въ ряды весьма полезны при изслѣдованіи безконечныхъ вѣтвей кривыхъ. Такъ, напримѣръ, для кривой $y = xe^{\frac{1}{x}}$ достаточно замѣтить, что $y = x + 1 + \frac{1}{2x} + \cdots$, чтобы тотчасъ обнаружить асимптоту: $y = x + 1$. Такъ какъ при этомъ y безпредѣльно возрастаетъ и тогда, когда x стремится къ нулю убывая и, наоборотъ, стремится къ нулю, когда x приближается къ нулю возрастая, то мы видимъ, что обѣ вѣтви кривой имѣютъ найденную выше асимптоту, а кромѣ того, одна вѣтвь имѣетъ еще асимптотою ось y-овъ, а другая вѣтвь исходитъ изъ начала координатъ. Подобнымъ же образомъ легко убѣдиться, что кривая $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$ имѣетъ единственную прямолинейную асимптоту — ось y-овъ (для одной правой вѣтви), но зато имѣетъ еще параболическую асимптоту $y = x^2 + x + \frac{1}{2}$, распространяющуюся внутри лѣвой и внѣ правой вѣтви. Замѣчательна, далѣе, кривая $y = \dfrac{x^2}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$, весьма похожая на параболу и стремящаяся по мѣрѣ удаленія въ безконечность совпасть съ параболою $y = \frac{1}{4}(2x^2 - x)$. Если мы эту параболу передвинемъ по плоскости такъ, чтобы вершина ея попала въ начало координатъ, то въ этой точкѣ обѣ кривыя — данная и парабола, будутъ касаться одна другой и въ то же время пересѣкаться, потому что справа отъ начала $y < \frac{1}{2}x^2$, а слѣва $y > \frac{1}{2}x^2$.

g) Примѣняя къ гиперболической спирали ($r\theta = a$) формулы, выведенныя въ концѣ § 597, получаемъ

$$f(\theta) = \frac{\theta}{a}, \quad f'(\theta) = \frac{1}{a}, \quad \alpha = 0, \quad q = a,$$

и находимъ такимъ образомъ снова асимптоту, параллельную полярной оси, на которую уже указывали раньше (§ 589, g). Такимъ же образомъ для квадратрисы (§ 589, i) получимъ

$$f(\theta) = \frac{\sin\theta}{a\theta}, \quad f'(\theta) = \frac{\theta\cos\theta - \sin\theta}{a\theta^2}, \quad \alpha = n\pi, \quad q = (-1)^n n\pi a.$$

Аналогично этому показываютъ, что синусъ-спирали (§ 589, m) лишь при $m < -1$ имѣютъ асимптоты въ конечной части плоскости и въ этомъ случаѣ всѣ эти асимптоты проходятъ черезъ полюсъ и образуютъ съ полярной осью углы

$$0, \quad \frac{\pi}{m}, \quad \frac{2\pi}{m}, \quad \frac{3\pi}{m}, \ldots$$

h) Для коническаго сѣченія, заданнаго уравненіемъ $r = \dfrac{p}{1 - k\cos\theta}$, имѣемъ

$$f(\theta) = \frac{1 - k\cos\theta}{p}, \quad f'(\theta) = \frac{k}{p}\sin\theta, \quad \cos\alpha = \frac{1}{k}, \quad q = \frac{\pm p}{\sqrt{k^2 - 1}}.$$

Лишь для гиперболы, т. е. при $k > 1$, α — вещественное; безчисленное множество угловъ, которыхъ косинусъ равенъ $\frac{1}{k}$, опредѣляютъ всего два различныхъ направленія, антипараллельныхъ относительно фокальной оси гиперболы. Въ этомъ случаѣ $p = -\frac{b^2}{a}$, $k^2 - 1 = \frac{b^2}{a^2}$, поэтому $q = \pm b$ или $q = \pm ka\sin\alpha$. Слѣдовательно, обѣ асимптоты проходятъ черезъ центръ и отстоятъ отъ полюса, т. е. отъ фокусовъ, въ разстояніи b.

i) Если при изслѣдованіи кривыхъ въ полярныхъ координатахъ оказывается, что r стремится къ предѣлу a, когда θ измѣняется до $\pm\infty$, то можно утверждать, что кривая имѣетъ **асимптотическій кругъ** радіуса a съ центромъ въ полюсѣ. Полезно замѣтить, что обыкновенно (§ 308, c) съ приближеніемъ r къ a, производная r' въ то же время стремится къ нулю, такъ что ω стремится къ $\frac{\pi}{2}$, а слѣдовательно, кривая стремится сдѣлаться касательною къ кругу. Въ частности, когда $a=0$ получается **асимптотическая точка**. Этотъ случай имѣетъ мѣсто для различныхъ разсмотрѣнныхъ раньше кривыхъ (§ 589, e, g, h), а именно для логариѳмической и гиперболической спиралей и для кохлеоиды. Достаточно построить конхоиды (§ 589, j) этихъ кривыхъ относительно полюса, чтобы получить другія кривыя, имѣющія асимптотическіе круги. Особенно замѣчательны конхоиды логариѳмической спирали, которыя для одной и той же данной спирали всѣ другъ другу подобны. Въ самомъ дѣлѣ, если направимъ полярную ось отъ полюса данной спирали къ точкѣ ея пересѣченія съ асимптотическимъ кругомъ одной изъ ея конхоидъ, то уравненіе конхоиды необходимо будетъ вида $r=a\,(e^{m\theta}\pm 1)$, гдѣ только a — радіусъ асимптотическаго круга — произвольно. Вѣтвь, соотвѣтствующая знаку $+$, лежитъ внѣ этого круга и обвиваетъ его безконечное число разъ. Другая вѣтвь проникаетъ внутрь круга, проходитъ черезъ полюсъ, въ смежности съ которымъ она имѣетъ видъ, подобный Архимедовой спирали ($r=ma\theta$), а затѣмъ удаляется отъ него безконечнымъ числомъ оборотовъ, безпредѣльно приближаясь къ окружности круга.

600. Займемся теперь подробнѣе асимптотами алгебраическихъ кривыхъ, и начнемъ съ тѣхъ, которыя параллельны оси y-овъ. Съ этой цѣлью расположимъ уравненіе кривой, которое предположимъ приведеннымъ къ цѣлой раціональной формѣ, по убывающимъ степенямъ y:

$$y^n\,\psi(x)+y^{n-1}\,\psi_1(x)+y^{n-2}\,\psi_2(x)+\cdots+\psi_n(x)=0\,.$$

При безконечномъ y величина x должна стремиться къ конечному предѣлу l, къ вычисленію котораго и сводится вопросъ. При этомъ непрерывныя функціи $\psi(x)$, $\psi_1(x)$, ... будутъ стремиться къ конечнымъ предѣламъ $\psi(l)$, $\psi_1(l)$, ... Если раздѣлимъ всѣ члены уравненія на y^n и будемъ увеличивать $|y|$ до ∞, то найдемъ, что $\psi(l)=0$. Это и есть уравненіе, каждому корню l котораго соотвѣтствуетъ асимптота $X=l$. Оставляя теперь въ сторонѣ асимптоты, параллельныя оси y-овъ, расположимъ уравненіе данной кривой по однороднымъ группамъ членовъ одинаковой степени. Положивъ $y=tx$, можемъ написать

$$x^n\,\varphi(t)+x^{n-1}\,\varphi_1(t)+x^{n-2}\,\varphi_2(t)+\cdots+\varphi_n(t)=0\,. \tag{12}$$

Но $m=\lim t$ и m число конечное; слѣдовательно, если раздѣлимъ уравненіе (12) на x^n, то при безконечномъ x найдемъ $\varphi(m)=0$. Это уравненіе надо рѣшить, чтобы найти угловые коэффиціенты асимптотъ. Предположимъ сперва, что m простой корень уравненія $\varphi(m)=0$, такъ что $\varphi'(m)\gtrless 0$, и постараемся найти соотвѣтствующее значеніе h. Раздѣливъ уравненіе (12) на x^{n-1}, получаемъ

$$x\varphi(t)+\varphi_1(t)+\frac{\varphi_2(t)}{x}+\cdots=0; \tag{13}$$

далѣе, замѣчая, что

$$\lim x(t-m)=\lim(y-mx)=h,$$

и принимая во вниманіе, что $\varphi(m)=0$, находимъ

$$\lim x\varphi(t)=\lim x(t-m)\cdot\lim\frac{\varphi(t)}{t-m}=h\varphi'(m),$$

на основаніи опредѣленія $\varphi'(m)$. Итакъ, уравненіе (13) приводится къ

$$h\varphi'(m)+\varphi_1(m)=0 \text{ и даетъ } h=-\frac{\varphi_1(m)}{\varphi'(m)}.$$

Если m кратный корень φ, то $\varphi'(m)=0$, и если при этомъ $\varphi_1(m)$ не равно 0, то можно сказать, что асимптота удалена въ безконечность. Если при $\varphi'(m)=0$ и $\varphi_1(m)=0$, то предыдущее уравненіе не опредѣляетъ h, и надо возвратиться къ уравненію (12). Раздѣливъ его на x^{n-2}, получимъ

$$x^2\varphi(t)+x\varphi_1(t)+\varphi_2(t)+\frac{\varphi_3(t)}{x}+\cdots=0. \tag{14}$$

Теперь

$$\lim x^2\varphi(t)=\lim x^2(t-m)^2\cdot\lim\frac{\varphi(t)}{(t-m)^2}=\frac{1}{2}h^2\varphi''(m);$$

и уравненіе (14) при безконечномъ x приводится къ

$$\tfrac{1}{2}h^2\varphi''(m)+h\varphi_1'(m)+\varphi_2(m)=0 \tag{15}$$

и даетъ два значенія для h, соотвѣтствующія двумъ (вещественнымъ или мнимымъ) асимптотамъ (предполагая, конечно, что $\varphi''(m)$ не равно 0). Если m тройной корень функціи φ, то, вообще говоря, одна изъ соотвѣтствующихъ асимптотъ находится въ безконечности; обѣ будутъ въ безконечности, если и $\varphi_1'(m)=0$; наконецъ, если всѣ коэффиціенты уравненія (15) равны нулю, то надо снова разсмотрѣть уравненіе (12), раздѣлить его на x^{n-3} и затѣмъ перейти къ предѣлу при безконечномъ x, что даетъ

$$\tfrac{1}{6}h^3\varphi'''(m)+\tfrac{1}{2}h^2\varphi_1''(m)+h\varphi_2'(m)+\varphi_3(m)=0$$

и т. д.

601. Съ помощью однородныхъ координатъ разысканіе асимптотъ алгебраическихъ кривыхъ можно провести проще, пользуясь теоремою, доказанной въ § 598. Прежде всего замѣтимъ, что результатъ, выражаемый уравненіемъ $\varphi(m)=0$, можно формулировать слѣдующимъ образомъ: если въ уравненіи кривой n-го порядка откинемъ всѣ члены степеней ниже n, то полученное уравненіе будетъ изображать систему прямыхъ, проведенныхъ черезъ начало координатъ параллельно n асимптотамъ кривой; эти прямыя могутъ быть вещественными или мнимыми, различными или совпадающими одна съ другой. Это сдѣлается, такъ сказать, очевиднымъ, если положимъ

$$\Phi(x, y, z) = x^n \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + z x^{n-1} \varphi_1\left(\frac{y}{x}\right) + z^2 x^{n-2} \varphi_2\left(\frac{y}{x}\right) + \cdots,$$

чтобы привести уравненіе кривой къ однородному виду, и замѣтимъ потомъ, что написать уравненіе $\varphi = 0$ все равно, что положить $z = 0$ въ уравненіи $\Phi = 0$, т. е. разсмотрѣть n точекъ пересѣченія кривой съ безконечно удаленною прямою. Теперь напишемъ уравненіе касательной (§ 587)

$$X\frac{\partial \Phi}{\partial x} + Y\frac{\partial \Phi}{\partial y} + Z\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \tag{16}$$

и, чтобы выразить, что точка касанія уходитъ въ безконечность, положимъ въ коэффиціентахъ этого уравненія $z = 0$. Получится уравненіе, однородное относительно x и y. Изъ этого уравненія и того, которое получится изъ $\Phi = 0$ при $z = 0$, исключаемъ отношеніе $\frac{y}{x}$. Въ результатѣ и получится уравненіе, изображающее совокупность асимптотъ. Въ сущности, эта метода не отличается отъ изложенной выше. Въ самомъ дѣлѣ, при $z = 0$, имѣемъ $\Phi = x^n \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, т. е. $\Phi = 0$, когда $\frac{y}{x}$ принимаетъ значеніе, равное m, удовлетворящее уравненію $\varphi(m) = 0$. Кромѣ того, имѣемъ (при $z = 0$)

$$x\frac{\partial \Phi}{\partial x} + y\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = x^{n-1}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = x^{n-1}\varphi_1\left(\frac{y}{x}\right),$$

слѣдовательно,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -m x^{n-1}\varphi'(m), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = x^{n-1}\varphi'(m), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = x^{n-1}\varphi_1(m)$$

и уравненіе (16) въ неоднородныхъ координатахъ принимаетъ видъ

$$Y = mX - \frac{\varphi_1(m)}{\varphi'(m)}.$$

602. Упражненія. а) Дана кривая $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, носящая названіе *Декартова листа* (Folium Cartesii). Для разысканія углового коэффиціента асимптоты имѣемъ уравненіе $1 + m^3 = 0$, имѣющее одинъ вещественный корень $m = -1$; далѣе,

$$h = -\frac{\varphi_1(m)}{\varphi'(m)} = \frac{3ma}{3m^2} = -a.$$

Слѣдовательно, кривая имѣетъ только одну вещественную асимптоту, изображаемую уравненіемъ $x+y+a=0$. Въ приложеніяхъ нѣтъ надобности помнить формулы, выведенныя въ § 600; достаточно помнить только пріемъ, съ помощью котораго эти формулы были выведены. Такъ, въ нашемъ примѣрѣ, замѣтивъ, что $x+y$ единственный вещественный множитель совокупности членовъ наивысшей степени x^3+y^3, можно прямо написать уравненіе асимптоты

$$x+y=\left(\frac{3axy}{x^2-xy+y^2}\right)_{y=-x}=-a.$$

Къ тому же результату придемъ, пользуясь разложеніемъ y въ рядъ:

$$y=-x-a+\frac{a^3}{3x^2}-\frac{a^4}{3x^3}+\cdots.$$

b) Разсмотримъ болѣе общее уравненіе

$$(x+y)(x^2-2kxy+y^2)=2(1+k)axy,$$

дающее при $k=\frac{1}{2}$ опять Декартовъ листъ, а при $k=0$ другую важную кривую — *логоциклику*. При $k^2<1$ существуетъ только одна вещественная асимптота, изображаемая уравненіемъ

$$x+y=\left(\frac{2(1+k)axy}{x^2-2kxy+y^2}\right)_{y=-x}=-a,$$

такъ что всѣ кривыя, соотвѣтствующія различнымъ значеніямъ k, имѣютъ общую асимптоту $x+y+a=0$. Напротивъ того, всѣ кривыя, для которыхъ $k^2>1$, имѣютъ еще двѣ другія вещественныя асимптоты, параллельныя прямымъ

$$x^2-2kxy+y^2=(y-mx)(y-m'x)=0,$$

гдѣ $m=k\pm\sqrt{k^2-1}$. Уравненіе одной изъ асимптотъ есть

$$y-mx=\left(\frac{2(1+k)axy}{(x+y)(y-m'x)}\right)_{y=mx}=\frac{2(1+k)ma}{(1+m)(m-m')}=\frac{ma}{m-1},$$

такъ что для изображенія обѣихъ асимптотъ получается уравненіе

$$y=kx+\frac{1}{2}a\pm\left(x+\frac{\frac{1}{2}a}{k-1}\right)\sqrt{k^2-1}.$$

Эти асимптоты пересѣкаются въ точкѣ $x=y=-\dfrac{a}{2(k-1)}$ и образуютъ уголъ, косинусъ котораго равенъ $\dfrac{1}{k}$. Только при $k=2$ всѣ три асимптоты проходятъ черезъ одну точку и соотвѣтственно параллельны сторонамъ равносторонняго треугольника.

c) Чтобы показать примѣненіе однородныхъ координатъ, разсмотримъ снова Декартовъ листъ и положимъ

$$\Phi(x, y, z)=x^3+y^3-3axyz,$$

чтобы затѣмъ приложить сказанное въ предыдущемъ §. При $z=0$ имѣемъ

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}=3x^2,\quad \frac{\partial \Phi}{\partial y}=3y^2,\quad \frac{\partial \Phi}{\partial z}=-3axy$$

и уравненіе всѣхъ асимптотъ получится черезъ исключеніе $\frac{y}{x}$ изъ уравненій

$$x^3+y^3=0,\qquad Xx^2+Yy^2-axy=0,$$

или, черезъ исключеніе m изъ уравненій $1+m^3=0$ и $x+m^2y=ma$ (если обозначимъ текущія координаты X и Y буквами x и y). Выполняя это исключеніе, получимъ уравненіе

$$x^3+y^3+a^3=3axy,$$

которое разлагается на слѣдующія три

$$x+y+a=0,\quad x+\omega y+\omega^2 a=0,\quad x+\omega^2 y+\omega a=0,$$

гдѣ ω — мнимый кубическій корень изъ 1. Слѣдовательно, Декартовъ листъ, кромѣ вещественной асимптоты $x+y+a=0$, имѣетъ еще двѣ мнимыя, пересѣкающіяся въ точкѣ (a, a). Полученное уравненіе можно было бы прямо написать, исходя изъ того замѣчанія, что общее уравненіе всѣхъ асимптотъ алгебраической кривой n-го порядка должно получиться изъ уравненія самой кривой, если въ немъ измѣнимъ коэффиціенты при членахъ ниже $(n-1)$-го порядка такимъ образомъ, чтобы уравненіе разложилось на n линейныхъ уравненій. Въ случаѣ Декартова листа это замѣчаніе прямо приводитъ къ цѣли, потому что, какъ мы уже знаемъ (§ 473), достаточно прибавить a^3 къ x^3+y^3-3axy, чтобы получить значеніе циркулянта (x, y, a), который разлагается на три линейныхъ множителя.

d) Положимъ еще

$$\Phi(x, y, z)=ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy.$$

Уравненіе касательной будетъ

$$(ax+hy+gz)X+(hx+by+fz)Y+(gx+fy+cz)Z=0.$$

Положивъ $z=0$ и $Z=1$, получаемъ

$$(aX+hY+g)x+(hX+bY+f)y=0$$

и надо будетъ исключить $\frac{y}{x}$ изъ этого уравненія и уравненія

$$ax^2+by^2+2hxy=0.$$

Тогда, замѣнивъ опять X и Y черезъ x и y, получимъ

$$a(hx+by+f)^2+b(ax+hy+g)^2-2h(ax+hy+g)(hx+by+f)=0$$

или

$$\begin{vmatrix} a & h & ax+hy+g \\ h & b & hx+by+f \\ ax+hy+g & hx+by+f & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Вычитая изъ послѣдняго столбца первый, умноженный на x, и второй, умноженный на y, и поступая также со строками, находимъ

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c-\Phi \end{vmatrix} = 0 .$$

Итакъ, уравненіе совокупности всѣхъ асимптотъ коническаго сѣченія

$$ax^2 + by^2 + c + 2fy + 2gx + 2hxy = 0$$

получимъ, поставивъ въ правой части вмѣсто нуля $\frac{D}{ab-h^2}$, гдѣ D дискриминантъ формы Φ. Къ этому результату можно придти быстрѣе, пользуясь тѣмъ же замѣчаніемъ, которое мы примѣнили въ предыдущемъ примѣрѣ; оно приводитъ къ замѣнѣ числа c, такимъ числомъ c', чтобы уравненіе разложилось на два линейныхъ. Для этого необходимо, чтобы новый дискриминантъ

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & h & 0 \\ h & b & 0 \\ g & f & c'-c \end{vmatrix} = D + (ab-h^2)(c'-c)$$

обратился въ нуль, откуда и получаемъ $c' = c - \frac{D}{ab-h^2}$.

Особенности плоскихъ кривыхъ.

603. Точки изгиба (Wendepunkte). Нѣкоторыя особенности, проявляющіяся въ извѣстныхъ точкахъ кривой, и вліяющія на ея форму, даютъ основаніе называть эти точки особенными (singuläre Punkte). Такъ, напримѣръ, въ тѣхъ точкахъ, въ которыхъ $y' = 0$, является та особенность, что ордината кривой, вообще говоря, будетъ максимумъ или минимумъ, однако, такія точки не причисляются къ особеннымъ, потому что достаточно измѣнить направленіе осей, чтобы эта особенность передвинулась въ другое мѣсто. Но это уже не относится къ такимъ точкамъ, въ которыхъ $y'' = 0$; эти точки называются точками изгиба и будутъ особенными, потому что въ нихъ кривизна равна нулю, т. е. онѣ обладаютъ свойствомъ, которое нельзя уничтожить перемѣною координатныхъ осей. Впрочемъ, легко показать и непосредственно, что въ смежности съ точкою M кривая не такъ расположена относительно касательной, какъ въ смежности съ обыкновенными точками. Если перенесемъ начало координатъ въ M и направимъ координатныя оси по касательной и по нормали, то по опредѣленію y'', какъ производной отъ y', будемъ имѣть $\lim\limits_{x=0} \frac{y'}{x} = 0$*), и по теоремѣ Лопиталя $\lim\limits_{x=0} \frac{y}{x^2} = 0$. Слѣдовательно, разстояніе отъ касательной въ точкѣ M до безконечно близкихъ къ M точекъ на кривой будетъ безконечно малымъ выше 2-го порядка, такъ что можно сказать, что въ смежности съ точкою изгиба кривая тѣснѣе примыкаетъ къ касательной, чѣмъ въ обыкновенныхъ точкахъ. Далѣе, чтобы оправдать названіе точки изгиба, замѣтимъ, что y'', обращаясь въ нуль, вообще говоря, измѣняетъ свой знакъ, а поэтому (§ 348, d), при переходѣ черезъ такую точку выпуклость кривой переходитъ въ вогнутость и наоборотъ. Слѣдовательно, здѣсь дѣйствительно происходитъ изгибъ кривой въ обыкновенномъ смыслѣ слова, и касательная пересѣкаетъ кривую. Это обстоятельство, однако, не будетъ имѣть мѣста, если y'' сохраняетъ постоянный знакъ въ смежности съ M, и когда нуль есть максимумъ или минимумъ функціи y''. Отсюда слѣдуетъ, что абсциссы точекъ, въ которыхъ касательная пересѣкаетъ кривую, будутъ простыми корнями, или корнями нечетной кратности функціи y'' (§ 313). Это объясняется также весьма просто тѣмъ, что эти значенія x дѣлаютъ y' максимумомъ или минимумомъ, т. е. будутъ абсциссами тѣхъ точекъ на кривой, въ которыхъ касательная перестаетъ вращаться въ одномъ направленіи и начинаетъ вращаться въ другомъ. Это ясно видно и изъ формулы (7).

604. Чтобы разыскать точки изгиба кривой $y = f(x)$, надо рѣшить уравненіе $f''(x) = 0$ или другое (§ 594), ему равносильное, выражающее, что кривизна равна нулю. Если, напримѣръ, кривая задана уравненіями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, то вмѣсто $y'' = 0$ удобнѣе взять уравненіе $dx\, d^2y - dy\, d^2x = 0$, иными словами, точки изгиба соотвѣтствуютъ тѣмъ значеніямъ t, которыя обращаютъ въ нуль функцію $\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)$. Если же кривая задана въ полярныхъ координатахъ, то надо пользоваться уравненіемъ $r^2 + 2r'^2 - rr'' = 0$, исключая корни уравненія $r = 0$ (очевидно, кратные), а если уравненіе кривой задано въ видѣ $\frac{1}{r} = f(\theta)$, то надо рѣшить уравненіе $f + f'' = 0$.

[**Примѣчаніе.** По формулѣ (8) $\frac{1}{\varrho} = 0$, когда

$$r^2 + 2r'^2 - rr'' = 0, \tag{1}$$

а $r^2 + r'^2$ не равно 0; поэтому и надо исключить корни уравненія $r = 0$, для которыхъ при условіи (1) и $r' = 0$. Если $r = \frac{1}{f}$, то уравненіе (1) обратится въ $f + f'' = 0$, при f не равномъ 0.]

---

*) Потому что при нашемъ выборѣ осей y и y' равны 0 при $x = 0$.

Если, наконецъ, кривая задана уравненіемъ $f(x, y) = 0$ въ Декартовыхъ координатахъ, то уравненіе, дающее точки изгиба, будетъ

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & 0 \end{vmatrix} = 0 \tag{17}$$

[по формулѣ (9)], при чемъ исключаются тѣ точки, для которыхъ и $\Delta f = 0$. Въ случаѣ алгебраическихъ кривыхъ уравненіе (17) можно представить въ замѣчательной формѣ, предполагая, что уравненіе кривой приведено къ однородному виду. Пусть n будетъ степень уравненія; умножимъ въ написанномъ выше опредѣлителѣ послѣдній столбецъ на $n-1$, затѣмъ вычтемъ изъ него первый столбецъ, умноженный на x, и второй, умноженный на y; потомъ повторимъ тѣ же операціи со строками. Первые два элемента послѣдняго столбца или послѣдней строки обратятся тогда (§ 371) въ

$$(n-1)\frac{\partial f}{\partial x} - \left(x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) = z\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z},$$

$$(n-1)\frac{\partial f}{\partial y} - \left(x\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = z\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z},$$

а послѣдній элементъ въ

$$-(n-1)\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right) - z\left(x\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + y\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right)$$

$$= (n-1)\, z\frac{\partial f}{\partial z} - z\left((n-1)\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right),$$

что приведется къ $z^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$. Разсматриваемое уравненіе приметъ, слѣдовательно, видъ

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Итакъ, чтобы опредѣлить точки изгиба алгебраической кривой $f=0$, надо приравнять нулю Гессіанъ H функціи f, приведенной къ однородному виду (см. §§ 378 и 569). Кривая $H=0$ называется кривою Гессе отъ данной кривой $f=0$. Точками изгиба данной кривой будутъ, слѣдовательно, точки пересѣченія данной кривой съ ея кривою Гессе; а такъ какъ послѣдняя порядка $3(n-2)$, то число точекъ изгиба, вообще говоря, равно $3n(n-2)$. Такъ напримѣръ, коническія сѣченія совсѣмъ не имѣютъ точекъ изгиба; кривыя 3-го порядка имѣютъ ихъ девять (изъ коихъ 6 всегда мнимыя) и т. д. Надо замѣтить, припоминая формулу (9), что всякая общая точка кривыхъ $f=0$ и $H=0$ только тогда будетъ точкою изгиба, когда ея координаты не обращаютъ въ нуль Δf, т. е. когда первыя производныя отъ f не равны нулю одновременно. Условіе $\Delta f = 0$, одновременно съ $f=0$, даетъ другія особенныя точки, которыя также удовлетворяютъ уравненію (17) и потому лежатъ на кривой Гессе. Объ этихъ точкахъ мы вскорѣ будемъ говорить (§ 606); здѣсь замѣтимъ только, что ихъ существованіе уменьшаетъ число $3n(n-2)$ точекъ изгиба.

605. Упражненія. a) Для квадратрисы $y = x \operatorname{cotg} \dfrac{x}{a}$ имѣемъ $y'' = \dfrac{2(y-a)}{a^2 \sin^2 \dfrac{x}{a}}$, и уравненіе, опредѣляющее точки изгиба будетъ $y=a$, предполагая, что $x \gtrless 0$. Слѣдовательно, центральная вѣтвь не имѣетъ точекъ изгиба, но касательная въ вершинѣ пересѣкаетъ всѣ другія вѣтви въ соотвѣтствующихъ точкахъ изгиба. Нормали къ кривой во всѣхъ этихъ точкахъ проходятъ черезъ начало координатъ.

b) Фигура кривой, изображаемой уравненіемъ $y = x \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ (§ 599, d) обнаруживаетъ двѣ точки изгиба, симметричныя относительно оси y-овъ; и дѣйствительно, уравненіе $y''=0$ приводится къ $y=1$ — уравненію прямой, пересѣкающей данную кривую въ двухъ точкахъ изгиба

c) Для кривой $y = x^2 \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$ уравненіе точекъ изгиба слишкомъ сложно, чтобы можно было съ пользою ихъ примѣнить. Но о формѣ кривой можно составить заключеніе, замѣтивъ, что эта кривая (рис. 61) проходитъ черезъ начало координатъ, касаясь въ немъ оси x-овъ (см. § 294, b), и уходитъ въ безконечность, имѣя асимптотою прямую $y = \frac{1}{2}x$. Кромѣ того, разложеніе

$$y = \frac{x}{2} - \frac{1}{8x} + \cdots$$

показываетъ еще, что кривая асимптотична къ гиперболѣ $x^2 - 2xy = \frac{1}{4}$. Это облегчаетъ ея приближенное вычерчиваніе и даетъ основаніе предположить, что кривая въ трехъ точкахъ, въ томъ числѣ въ началѣ координатъ, образуетъ изгибы. Однако, должно замѣтить, что точка O не будетъ точкою изгиба, и такимъ образомъ получается примѣръ кривой, которая пересѣкаетъ свою касательную къ точкѣ, не принадлежащей къ точкамъ изгиба. Дѣйствительно, мы знаемъ (§ 314, i), разсматривая y'', какъ производную отъ y' справа и слѣва, что при $x=0$, $y''=+2$ или $y''=-2$. Достаточно, впрочемъ, замѣтить, что $\lim\left(\dfrac{y}{x^2}\right) = \pm 1$, чтобы увидѣть, что точкѣ O не достаетъ существеннаго признака точекъ изгиба, а именно разстояніе между касательной въ точкѣ O и точками, безко-

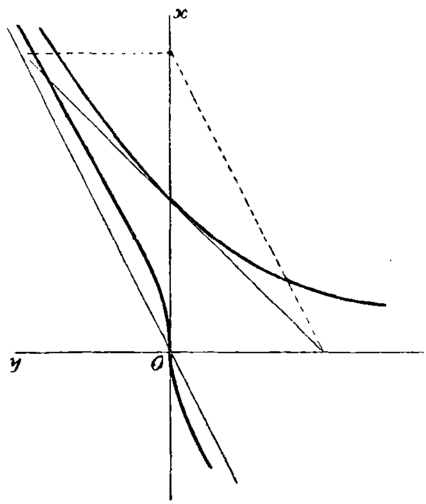

Рис. 61.

нечно близкими къ O на кривой, есть безконечно малая не выше 2-го порядка, а именно 2-го, какъ для обыкновенныхъ точекъ.

d) Чтобы убѣдиться, насколько полезно имѣть вѣрный аналитическій признакъ точки изгиба ($y''=0$) достаточно построить кривую $y = e^x + \sin x$, прибавляя къ каждой ординатѣ логариѳмической кривой величину $\sin x$. Грубый чертежъ привелъ бы къ заключенію, что кривая при $x>0$ изгибается безконечное число разъ, между тѣмъ это несправедливо, потому что функція $y''= e^x - \sin x$ положительныхъ корней не имѣетъ, такъ какъ при $x > 0$ $e^x > 1 \geqq \sin x$. Наоборотъ, при $x < 0$ кривая имѣетъ безчисленное множество точекъ изгиба, а именно въ точкахъ пересѣченія кривыхъ $y = e^x$ и $y = \sin x$.

e) Для улитки ($r = a\cos\theta + b$) легко найдемъ

$$r^2 + 2r'^2 - rr'' = 2a^2 + b^2 + 3ab\cos\theta.$$

Чтобы эта функція отъ θ могла имѣть вещественные корни, необходимо, чтобы $2a^2 + b^2$ были не больше $3ab$; слѣдовательно, b должно заключаться въ интервалѣ $(a, 2a)$, но нижнюю границу a надо исключить, потому что при $b=a$ получаемъ $\theta=\pi$, а это двойной корень функціи r. Слѣдовательно, (см. § 589, k) единственныя улитки, имѣющія точки изгиба, будутъ тѣ, для которыхъ $b > a$ и $\leqq 2a$.

f) Изъ всѣхъ конхоидъ прямой линіи (§ 589, j) разсмотримъ тѣ, которыя проходятъ черезъ полюсъ. Изъ ихъ уравненія $(r-a)\cos\theta = a$ находимъ для опредѣленія точекъ изгиба уравненіе $\cos^3\theta + 3\cos^2\theta - 2 = 0$, дающее для $\cos\theta$ значенія -1, $-1+\sqrt{3}$, $-1-\sqrt{3}$. Первое значеніе надо отбросить, потому что оно обращаетъ въ нуль r и r', послѣднее не даетъ вещественнаго значенія для θ; остается второе, дающее $r=\frac{a}{2}(3+\sqrt{3})$. Это число есть радіусъ того круга, съ центромъ въ полюсѣ, который пересѣкаетъ кривую въ двухъ ея точкахъ изгиба. Легко показать, что точки изгиба всѣхъ конхоидъ одной и той же прямой относительно одного и того же полюса лежатъ на полукубической параболѣ $x^3=4\,ay^2$.

g) Въ заключеніе предложимъ себѣ вопросъ: могутъ ли конхоиды логариѳмической спирали (§ 599, i) имѣть точки изгиба, хотя a priori кажется, что такихъ точекъ не должно быть? Изъ уравненія $r=a\,(e^{m\theta}\pm 1)$ выводимъ

$$r^2+2\,r'^2-rr''=(1+m^2)\,r^2\mp 2\,m^2\,ar+2\,m^2\,a^2$$

и видимъ, что при $m^2<8$ этотъ трехчленъ для вещественныхъ r въ нуль не обращается. Отсюда слѣдуетъ, что искомыя спирали будутъ въ числѣ тѣхъ, которыя пересѣкаютъ радіусы векторы подъ достаточно малымъ угломъ, а именно такимъ, синусъ котораго меньше 1/3. Каждая изъ этихъ конхоидъ имѣетъ двѣ точки изгиба, соотвѣтствующія значеніямъ r, лежащимъ между a и $2\,a$. Дуги безчисленнаго множества конхоидъ одной и той же спирали, концы которыхъ лежатъ въ точкахъ изгиба, видны изъ полюса подъ постояннымъ угломъ, который при $m=2\sqrt{2}$ равенъ нулю, и при очень большомъ m весьма малъ.

606. Кратныя точки. Для опредѣленія касательной въ точкѣ, лежащей на кривой $f(x,y)$, какъ извѣстно (§ 572), имѣемъ уравненіе

$$\frac{\partial f}{\partial x}+y'\frac{\partial f}{\partial y}=0\,, \tag{18}$$

которое даетъ значеніе y' въ предположеніи, что $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны и, кромѣ того, $\frac{\partial f}{\partial y}\gtrless 0$. Если же въ точкѣ M $\frac{\partial f}{\partial y}=0$, то нельзя уже утверждать, что въ смежности съ M y есть функція отъ x, т. е., что каждому значенію x соотвѣтствуетъ одно и только одно значеніе y; но вслѣдствіе предположенной непрерывности, для точекъ въ смежности съ M это будетъ справедливо, т. е. для точекъ M', безконечно близкихъ къ M, производная y' существуетъ и опредѣляется уравненіемъ (18). Когда M' стремится къ M, $\frac{\partial f}{\partial y}$ стремится къ нулю, между тѣмъ, какъ $\frac{\partial f}{\partial x}$ стремится къ предѣлу, вообще говоря, не равному нулю, такъ что y' стремится къ безконечности. Отсюда слѣдуетъ, что въ точкѣ M касательная параллельна оси y-овъ, и въ этомъ никакой особенности не заключается. Но если и $\frac{\partial f}{\partial x}$ стремится къ нулю, то безъ особаго изслѣдованія о значеніи y' въ точкѣ M ничего сказать нельзя. Уравненіе (18) обращается въ тождество, и надо прибѣгнуть къ новому дифференцированію, которое дастъ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2y'\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+y'^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+y''\frac{\partial f}{\partial y}=0\,. \tag{19}$$

Допустимъ, что съ приближеніемъ M' къ M y' стремится къ конечному предѣлу и постараемся его найти. Замѣтимъ при этомъ, что если бы y' стремилось къ безконечности, то достаточно было бы вмѣсто $\frac{dy}{dx}$ разсмотрѣть отношеніе $\frac{dx}{dy}$ (стремящееся къ нулю), чтобы убѣдиться, что нижеслѣдующіе результаты остаются справедливыми. Теперь докажемъ прежде всего, что $y''\frac{\partial f}{\partial y}$ не можетъ стремиться къ предѣлу, отличному отъ нуля. Для этого воспользуемся теоремою Лопиталя и напишемъ

$$\lim y' = \lim \frac{y'\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \lim \left(y' + \frac{y''\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y}} \right).$$

Такъ какъ функція

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y'\frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

по предположенію, конечна, то $\lim y''\frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Поэтому, при переходѣ къ предѣлу, уравненіе (19) обращается въ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2y'\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y'^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \tag{20}$$

гдѣ вторыя производныя функціи f относятся къ точкѣ M, а y' обозначаетъ предѣлъ, къ которому стремится y', когда точка M' стремится къ M. Слѣдовательно, для y' въ точкѣ M имѣемъ два значенія, т. е. кривая въ точкѣ M имѣетъ двѣ касательныя, которыя могутъ быть вещественными и различными или совпадающими въ одну, или мнимыми, что зависитъ отъ знака опредѣлителя

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} \tag{21}$$

Въ первомъ случаѣ точка M называется **двойною**, во второмъ **точкою возврата** (Rückkehrpunkt или Spitze), и въ третьемъ **уединенною или изолированной точкою**, такъ какъ въ смежности съ нею нѣтъ вещественныхъ точекъ кривой (рис. 62). Дѣйствительно, если опредѣлитель (21) положительное число, то, какъ извѣстно (§ 379), функція f въ точкѣ M имѣетъ максимумъ или минимумъ, а такъ какъ ея значеніе въ M равно нулю, то въ смежности съ M функція f постоянно меньше 0 или постоянно больше 0 (изолированная точка). Если, напротивъ того, опредѣлитель (21) меньше 0, то угловое пространство около M раздѣляется (см. § 570) на двѣ области: въ одной изъ нихъ вблизи M $f>0$, въ другой $f<0$, и эти области вполнѣ разграничиваются тѣми прямыми, по направленію которыхъ f стремится сохранить значеніе нуль. Эти прямыя и будутъ какъ разъ двѣ касательныя къ кривой $f=0$ въ точкѣ M *). Пре-

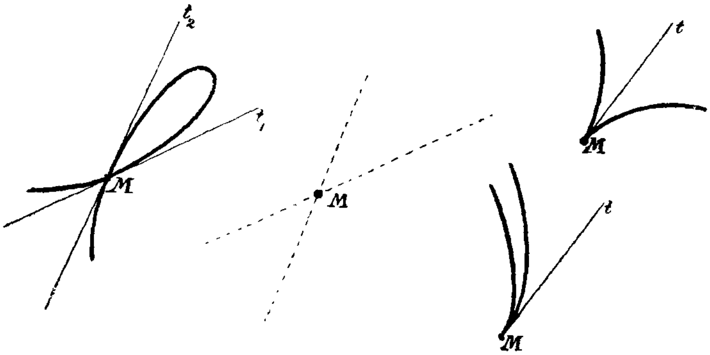

Рис. 62.

дыдущее изслѣдованіе, однако, не достаточно строго. Чтобы его провести съ полною строгостью надо было бы руководиться соображеніями, аналогичными тѣмъ, которыми мы пользовались въ § 572 [1]).

607. Резюмируя изложенное выше, можемъ сказать, что при разысканіи разсматриваемыхъ особенныхъ точекъ на кривой $f=0$, надо приравнять нулю первыя производныя отъ f по x и по y, найти всѣ рѣшенія $x=a$, $y=b$ этихъ уравненій и удержать тѣ рѣшенія, которыя удовлетворяютъ и уравненію кривой. Подставляя эти рѣшенія во вторыя частныя производныя функцій f, надо разсмотрѣть случай $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \gtrless 0$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$. Если $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \gtrless 0$, то получается двойная точка, точка возврата или изолированная точка, смотря по тому, будетъ ли функція (21) т. е. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2<0$, $=0$ или >0. Если, далѣе, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0$, но $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \gtrless 0$, то уравненіе (20) имѣетъ одинъ безконечный корень, и получается двойная точка, въ которой одна изъ касательныхъ параллельна оси y-овъ. Если въ точкѣ (a, b), $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$, и $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=0$, но $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \gtrless 0$, то уравненіе (20) имѣетъ оба безконечныхъ корня, и получается точка возврата съ касательною, параллельною оси y-овъ. Наконецъ, можетъ случиться, что всѣ три производныя 2-го порядка обратятся въ нуль въ точкѣ $x=a$, $y=b$.

*) Точка возврата соотвѣтствуетъ тому случаю, когда опредѣлитель (21) равенъ 0, и уравненіе (20) имѣетъ равные корни.

[1]) См. D'Arcais. „Corso di Calcolo infinitesimale" vol. I, pp. 509—515.

Тогда уравненіе (20) обращается въ тождество и надо прибѣгнуть къ слѣдующему

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^3} + 3\,y'\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y} + 3\,y'^2\,\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2} + y'^3\,\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = 0\,.$$

Это уравненіе даетъ вообще три значенія для y', такъ что получается тройная точка. Продолжая идти тѣмъ же путемъ приходимъ къ понятію о m — кратной точкѣ или кратной точкѣ порядка m. Она характеризуется геометрически тѣмъ, что принадлежитъ m вѣтвямъ кривой, вещественнымъ или мнимымъ, а аналитически тѣмъ, что въ ней обращаются въ нуль всѣ частныя производныя порядка ниже m и, по крайней мѣрѣ, одна изъ производныхъ порядка m не равна нулю. Если приведемъ уравненіе кривой къ однородному виду, то проще еще можно сказать, что m — кратная точка характеризуется тѣмъ, что въ ней обращаются въ нуль всѣ частныя производныя порядка $(m-1)$-го. Въ заключеніе замѣтимъ еще, что всѣ кратныя точки, какъ и точки изгиба, лежатъ на кривой Гессе, и можно сказать, что онѣ и для этой кривой будутъ кратными точками.

608. Точки возврата. Изъ двойныхъ точекъ наиболѣе замѣчательны точки возврата, потому что въ смежности съ ними, какъ и съ точками изгиба, расположеніе кривой относительно касательной является исключительнымъ. Въ самомъ дѣлѣ, если примемъ разсматриваемую точку за начало координатъ и направимъ координатныя оси по касательной и по нормали, то ясно, чтъ вмѣстѣ съ x и y функція f и ея первыя и вторыя частныя производныя, за исключеніемъ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, должны обратиться въ нуль, потому что уравненіе (20) должно имѣть двойной корень $y'=0$. Далѣе, такъ какъ вообще $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$ не равно 0 въ началѣ координатъ, то уравненіе кривой должно принять видъ $y^2 = kx^3$, если отбросимъ безконечно малыя выше 3-го порядка. Это значитъ, что въ смежности съ точкою возврата кривая имѣетъ форму, весьма близкую къ полукубической параболѣ $(y^2 = kx^3)$, и потому лежитъ по одну лишь сторону отъ нормали, развѣтвляясь на двѣ вѣтви, отдѣленныя одна отъ другой касательною. Это общій случай и, когда онъ имѣетъ мѣсто, говорятъ, что имѣемъ точку возврата перваго рода, сохраняя названіе точки возврата второго рода для исключительнаго случая, когда вѣтви кривой не отдѣляются касательною. Этотъ случай можетъ наступить лишь тогда, когда и $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 0$ въ разсматриваемой точкѣ. Въ общемъ случаѣ $\lim\limits_{x=0}\left(\frac{y}{x^2}\right) = \infty$, такъ что кривая сильнѣе удаляется отъ касательной, чѣмъ въ обыкновенной точкѣ. Отсюда заключаютъ, что въ точкѣ возврата кривизна вообще безконечна; иными словами, радіусъ кривизны равенъ нулю, а такъ какъ, обращаясь въ нуль, онъ вообще мѣняетъ знакъ, то и инымъ путемъ становится ясно, почему точки возврата 2-го рода являются, какъ исключеніе.

609. Теперь умѣстно будетъ вернуться на минуту къ вопросу о разысканіи точекъ изгиба кривыхъ, заданныхъ уравненіями въ полярныхъ координатахъ. Въ § 604 мы исключили тѣ значенія θ, которыя, обращая въ нуль функцію $r^2 + 2r'^2 - rr''$, одновременно обращаютъ въ нуль r, потому что они обращаютъ въ нуль и r', а слѣдовательно, и $r^2 + r'^2$, такъ что ничего нельзя сказать о томъ, что тогда дѣлается съ кривизною. Не трудно даже показать, что кривизна, вообще говоря, не только не стремится къ нулю, а напротивъ, возрастаетъ безпредѣльно, такъ что вмѣсто точки изгиба получается точка возврата. Итакъ, чтобы узнать, будетъ ли полюсъ точкою изгиба, надо приравнять нулю полное выраженіе кривизны, а не одного числителя этого выраженія, или непосредственно изслѣдовать ходъ кривой около полюса. Положимъ, что $r = 0$ при $\theta = \alpha$, и разсмотримъ въ смежности съ полюсомъ точку на кривой, имѣющую координаты $x = r\cos(\theta - \alpha)$, $y = r\sin(\theta - \alpha)$, если координатныя оси направлены по касательной и по нормали въ полюсѣ. Очевидно, что съ приближеніемъ θ къ α,

$$\varrho = \lim \frac{x^2}{2y} = \lim \frac{r\cos^2(\theta - \alpha)}{2\sin(\theta - \alpha)} = \frac{1}{2}\lim \frac{r}{\theta - \alpha} = \frac{1}{2}r',$$

на основаніи опредѣленія производной r', которую надо вычислить для $\theta = \alpha$. Впрочемъ, и вторая изъ формулъ (8) приводится при $r = 0$, $r' \gtreqless 0$, къ равенству $\varrho = \frac{1}{2}r'$. Слѣдовательно, если r' обращается въ нуль вмѣстѣ съ r при $\theta = \alpha$, то $\varrho = 0$. Чтобы получить точку изгиба, надо было бы имѣть $r' = \infty$.

610. Упражненія. а) Для Декартова листа, изображаемаго уравненіемъ $x^3 + y^3 = 3axy$, начало координатъ двойная точка, потому что $\frac{1}{3}\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 - ay$, $\frac{1}{3}\frac{\partial f}{\partial y} = y^2 - ax$ обращаются въ нуль при $x = y = 0$ (какъ при $x = y = a$, но послѣднія значенія не удовлетворяютъ уравненію кривой). Далѣе, $\frac{1}{3}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2x$, $\frac{1}{3}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -a$, $\frac{1}{3}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2y$. Слѣдовательно, уравненіе (20), приводящееся здѣсь къ $0 + y' + 0 \cdot y'^2 = 0$ имѣетъ одинъ корень, равный 0, а другой — безконечный. Кривая, слѣдовательно, касается обѣихъ координатныхъ осей въ началѣ координатъ (рис. 63). Впрочемъ, чтобы придти къ этому результату, вовсе нѣтъ надобности прибѣгать къ общей методѣ. А именно, если допустимъ, что съ приближеніемъ x къ нулю y' стремится къ нѣкоторому конечному предѣлу, и напишемъ уравненіе кривой въ видѣ $x + y\left(\frac{y}{x}\right)^2 = 3a\frac{y}{x}$, то тотчасъ же увидимъ, что этотъ предѣлъ $\left(\text{равный} \lim\limits_{x=0} \frac{y}{x}\right)$ равенъ нулю. Слѣдовательно, кривая касается оси x-овъ въ началѣ координатъ, а по причинѣ симметріи, она касается и оси y-овъ. Если желаемъ составить себѣ понятіе о фигурѣ кривой въ смежности съ началомъ координатъ, то достаточно приближать x къ нулю такъ, чтобы и $\frac{y}{x}$ стремилось къ нулю и отбросить въ уравненіи кривой безконечно малыя выше 3-го порядка. Тогда увидимъ, что вѣтвь, касающаяся оси x-овъ уподобляется параболѣ $x^2 = 3ay$, а слѣдовательно, вѣтвь, касающаяся оси y-овъ — параболѣ $y^2 = 3ax$.

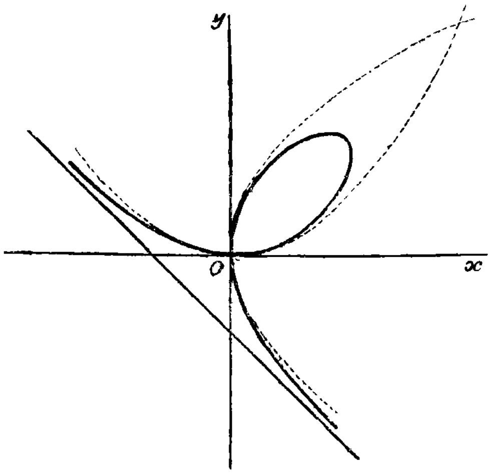

Рис. 63.

Къ подобнымъ же заключеніямъ приводитъ изслѣдованіе логоциклики и общихъ кривыхъ, разсмотрѣнныхъ въ § 602.

b) Кривая $x^4 = (x^2 - y^2)y$ (рис. 64) имѣетъ въ началѣ координатъ тройную точку, что можно показать съ помощью изложенной въ § 607 методы, или проще и скорѣе, написавъ уравненіе кривой въ видѣ $x = \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^3$. Приближая x къ 0, получимъ уравненіе $y' - y'^3 = 0$, откуда для y' въ началѣ координатъ получаются три значенія 0, 1 и -1. Для построенія кривой полезно взять за независимую перемѣнную $t = \frac{y}{x}$ и замѣнить уравненіе кривой двумя уравненіями $x = t - t^3$ и $y = t^2 - t^4$. На чертежѣ указаны границы интерваловъ, въ которыхъ измѣняется t, когда движущаяся точка, выйдя изъ безконечности, описываетъ данную кривую, чтобы снова удалиться въ безконечность, три раза пройдя черезъ начало координатъ ($t = -1, 0, 1$).

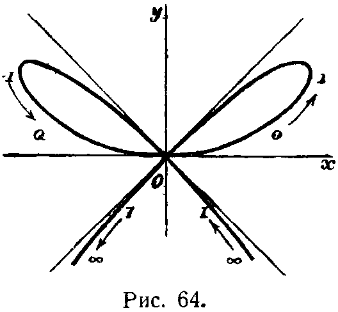

Рис. 64.

c) У кривой $x^5 + y^5 = 5ax^2y^2$ находимъ въ началѣ координатъ четырехкратную точку, происходящую отъ соединенія двухъ точекъ возврата. Болѣе общее уравненіе

$$x^{2n+1} + y^{2n+1} = (2n+1)ax^n y^n$$

изображаетъ кривую, принадлежащую къ типу предыдущей кривой или къ типу Декартова листа, смотря по тому, будетъ ли n число четное или нечетное. Это находится въ связи съ положеніемъ единственной вещественной асимптоты $x+y=(-1)^n a$.

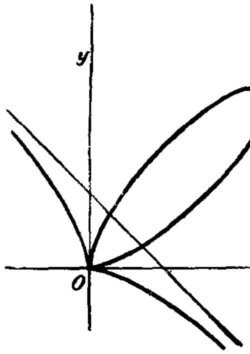

Рис. 65.

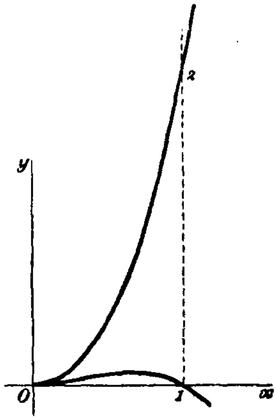

Рис. 66.

d) Примѣры точекъ возврата встрѣчались уже въ разсмотрѣнныхъ раньше кривыхъ (кардіоидѣ, эвольвентѣ круга, астроидѣ, циклоидѣ и т. д.). Читатель можетъ для упражненія провѣрить, что упомянутыя кривыя въ смежности съ такими точками уподобляются полукубической параболѣ въ смежности съ ея точкою возврата и показать, что во всѣхъ этихъ точкахъ радіусъ кривизны равенъ нулю. Такъ, напримѣръ, для вертикальнаго профиля развертывающагося геликоида (§ 599, c), помѣстивъ начало координатъ въ точку возврата, найдемъ

$$\lim_{\theta=0}\left(\frac{x}{\theta^2}\right)=\frac{1}{2}a,\qquad \lim_{\theta=0}\left(\frac{y}{\theta^3}\right)=\frac{1}{3}b,$$

такъ что при безконечно маломъ θ, уравненіе кривой стремится совпасть съ уравненіемъ $9a^3y^2=8b^2x^3$. На кривой $(y-x^2)^2=x^5$ находимъ точку возврата второго рода (рис. 66). Чтобы y былъ вещественнымъ, очевидно, необходимо, чтобы x былъ больше 0. Если напишемъ уравненіе такъ: $y=x^2(1\pm\sqrt{x})$, то увидимъ, что кривая состоитъ изъ двухъ вѣтвей, касающихся оси x-овъ въ началѣ координатъ. Но по отношенію къ касательной въ этой точкѣ кривая имѣетъ тотъ же характеръ, какъ и въ обыкновенной точкѣ, потому что $\lim\frac{y}{x^2}=1$, откуда слѣдуетъ, что кривизна въ этой точкѣ измѣряется числомъ 2. Добавимъ къ этому еще, что одна вѣтвь кривой параболически распространяется въ безконечность, а другая послѣ изгиба въ точкѣ $x=\left(\frac{8}{15}\right)^2$, имѣетъ наибольшую ординату въ точкѣ $x=\left(\frac{4}{5}\right)^2$, пересѣкаетъ ось x-овъ при $x=1$, и затѣмъ также параболически уходитъ въ безконечность.

e) Замѣчательный примѣръ кривой съ точками изгиба и точками возврата представляетъ такъ называемый двурогъ (Zweihorn, cocked hat); я уравненіе

$$y=\frac{a^2-x^2}{2x\pm\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Чтобы примѣнить методу § 607, надо было бы привести уравненіе къ цѣлому раціональному виду. Но здѣсь удобнѣе будетъ оставить его въ томъ видѣ, въ какомъ оно написано, и замѣтить, что кривая состоитъ изъ двухъ вѣтвей, соотвѣтствующихъ двумъ различнымъ знакамъ въ знаменателѣ. Кратными точками, очевидно, будутъ тѣ, для которыхъ два различныя опредѣленія y совпадаютъ. Это будетъ при $x^2=a^2$, гдѣ $y=0$. Чтобы вычислить значенія y' въ этихъ точкахъ ($\pm a$, 0), можно и не прибѣгать къ дифференцированію, а замѣтить, что по опредѣленію производной получается

$$y'=\lim_{x=\pm a}\frac{y}{x\mp a}=\pm 2a\lim_{x=\pm a}\frac{y}{x^2-a^2}=\mp 1,$$

т. е. $y'=-1$, при $x=a$, и $y'=1$, при $x=-a$. Такъ какъ въ обѣихъ точкахъ касательная оказывается единственною, то точки эти будутъ точками возврата. Касательныя въ этихъ точкахъ пересѣкаются въ одной изъ вершинъ

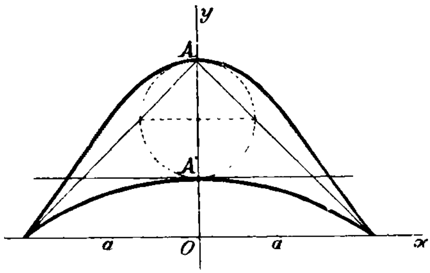

Рис. 67

кривой (0, a) (рис. 67). Кривизна въ этой вершинѣ также вычисляется съ помощью примѣненнаго выше пріема, а именно:

$$\frac{1}{2\varrho}=\lim_{x=0}\frac{a-y}{x^2}=\frac{1}{a}+\lim_{x=0}\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}=\frac{3}{2a}.$$

Слѣдовательно, $\varrho=\frac{1}{3}a$; поэтому, если $A'(0,\frac{1}{3}a)$ есть другая вершина кривой, то соприкасающійся кругъ въ точкѣ A будетъ кругъ, построенный на AA' какъ на діаметрѣ. Что касается точекъ изгиба, то, положивъ $y''=0$, находимъ $3\sqrt{a^2-x^2}\pm 2a=0$,— уравненіе, которое удовлетворяется (если удержимъ знакъ —) значеніемъ $x=\pm\frac{1}{3}a\sqrt{5}$, откуда $y=\frac{1}{3}a$. Слѣдовательно, точки изгиба находятся въ пересѣченіи касательной въ вершинѣ A' съ кривою.

f) Примѣняя методу § 607 къ уравненію, изображающему совокупность двухъ кривыхъ ($\varphi=0$ и $\psi=0$), мы получимъ, кромѣ кратныхъ точекъ, также и точки ихъ пересѣченія. Въ самомъ дѣлѣ, если $f=\varphi\cdot\psi$, то $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$, очевидно, обратятся въ нуль вмѣстѣ съ f всякій разъ, какъ φ и ψ одновременно обратятся въ нуль; а такъ какъ въ разсматриваемомъ случаѣ, кромѣ того

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix}^2,$$

то, какъ видимъ, точки, общія двумъ кривымъ, представляются, какъ настоящія кратныя точки. Въ частности, когда правая часть обращается въ нуль, что имѣетъ мѣсто (§ 577, a) когда кривыя $\varphi=0$ и $\psi=0$ взаимно касаются одна другой, исчезаетъ и лѣвая часть, и точки пересѣченія кривыхъ представляются въ видѣ точекъ возврата, хотя кривыя и располагаются по обѣ стороны отъ нормали.

611. Алгебраическія кривыя никакихъ другихъ особенныхъ точекъ, кромѣ разсмотрѣнныхъ выше, не имѣютъ, если за элементъ, образующій кривую, принимается точка. Если введемъ въ разсмотрѣніе тангенціальныя координаты и, вмѣсто точекъ на кривой, будемъ разсматривать касательныя къ кривой, то, по принципу двойственности, можно вполнѣ дуалистически повторить все вышеизложенное изслѣдованіе. Вмѣсто двойныхъ, тройныхъ и д. т. точекъ получаются двойныя, тройныя и т. д. касательныя. Но никакихъ существенно новыхъ особенностей при этомъ не получается. Получаются касательныя возврата и касательныя изгиба, но первыя будутъ не что иное, какъ касательныя въ точкахъ изгиба, а вторыя — касательныя въ точкахъ возврата. На этомъ основаніи число ν точекъ возврата и число μ точекъ изгиба соотвѣтствуютъ другъ другу совершенно такъ же, какъ соотствѣтствуютъ другъ другу число ν' двойныхъ точекъ и число μ' двойныхъ касательныхъ, порядокъ n кривой и ея классъ m. Другое весьма важное, само себѣ соотвѣтствующее число, есть такъ называемый родъ (Geschlecht, genre) кривой; оно обыкновенно обозначается буквою p. Доказывается, что для кривой n-го порядка, не имѣющей кратныхъ точекъ, это число равно $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ [1]). Извѣстно также, что при томъ же условіи классъ m кривой равенъ $n(n-1)$, а число μ точекъ изгиба (§ 604) равно $3n(n-2)$. Но можно показать, что существованіе ν' двойныхъ точекъ и ν точекъ возврата уменьшаютъ упомянутыя три числа на $\nu+\nu'$, $3\nu+2\nu'$ и $8\nu+6\nu'$. На основаніи принципа двойственности находятъ поэтому, что если изъ чиселъ $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$, $m(m-1)$ и $3m(m-2)$ вычтемъ соотвѣтственно $\mu+\mu'$, $3\mu+2\mu'$ и $8\mu+6\mu'$, то получимъ число p, n и ν. Формулы, къ которымъ такимъ образомъ приходимъ, называются формулами Плюккера (Plücker). Изъ нихъ легко выводится,

---

[1]) Для подробнаго изученія теоріи плоскихъ алгебраическихъ кривыхъ читателю рекомендуется первый томъ „Cours d'Analyse" par. C. Jordan.

что для кривой порядка n, класса m и рода p, числа особенныхъ точекъ и касательныхъ будутъ

$$\nu = 2(n+p-1)-m, \quad \nu' = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-6)+m-3p,$$
$$\mu = 2(m+p-1)-n, \quad \mu' = \tfrac{1}{2}(m-1)(m-6)+n-3p,$$

если не существуетъ другихъ болѣе сложныхъ особенностей. Особенно замѣчательны кривыя нулеваго рода ($p=0$), имѣющія характеризующее ихъ свойство быть уникурсальными (unicursale); это значитъ, что координаты ихъ точекъ x и y, выражаются раціональными функціями отъ третьей перемѣнной. Къ числу ихъ принадлежатъ, напримѣръ, коническія сѣченія и первыя три изъ разсмотрѣнныхъ въ предыдущемъ § кривыхъ.

612. Трансцендентныя кривыя могутъ имѣть и другія особенности, кромѣ перечисленныхъ выше.

a) Прежде всего легко убѣдиться, что такія кривыя могутъ имѣть безчисленное множество особенныхъ точекъ. Это мы уже видѣли на примѣрѣ квадратрисы (безчисленное множество изгибовъ), циклоиды (безчисленное число точекъ возврата) и т. д. Теперь добавимъ, что кривая $y^2 = x\sin^2 x$

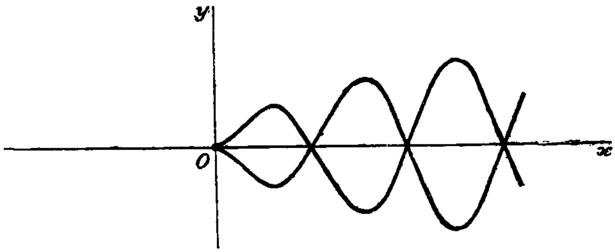

Рис. 68.

(рис. 68) имѣетъ точку возврата въ началѣ координатъ, безконечное число уединенныхъ и безконечное число двойныхъ точекъ на оси x-овъ. Внѣ этой оси кривая имѣетъ безконечное множество точекъ изгиба, абсцисы которыхъ удовлетворяютъ уравненію $1+4x^2=4x\operatorname{cotg} x$. Эти точки безпредѣльно приближаются къ оси x-овъ по мѣрѣ удаленія отъ начала координатъ по направленію положительныхъ x-овъ, располагаясь все ближе и ближе къ точкамъ кривой $xy^2=1$. Кромѣ того, данная кривая безконечное число разъ касается параболы $y^2=x$ *).

b) Безконечное множество точекъ изгиба, и притомъ въ конечномъ интервалѣ, имѣетъ кривая $y = x\sin\frac{1}{x}$, съ асимптотою, параллельною оси x-въ ($y=1$). Такъ какъ здѣсь $x^4y'' = -y$, то всѣ изгибы лежатъ на оси x-овъ. Кромѣ безчисленнаго множества касательныхъ возврата **), схо-

*) Эти замѣчанія принадлежатъ бывшему ученику Чезаро, д-ру В. Д'Ескамаръ (V. d'Escamard) и помѣщены во 2-мъ изд. (1905 г.) Elementi di Calcolo infinitesimale (E. Cesàro) въ видѣ поправки.

**) Т. е. касательныхъ въ точкахъ изгиба.

дящихся въ двухъ точкахъ на оси y-овъ), кривая имѣетъ еще двѣ особенныя касательныя, а именно прямыя, дѣлящія пополамъ углы между координатными осями, которыхъ она касается въ безконечномъ числѣ точекъ. Эта же кривая замѣчательна еще слѣдующимъ свойствомъ: изъ каждой точки на оси y-овъ, лежащей въ интервалѣ $(-1, 1)$, можно провести безчисленное множество касательныхъ, точки касанія которыхъ лежатъ на прямой, проходящей черезъ начало координатъ. Аналогичными свойствами обладаетъ кривая $y = x\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)$, имѣющая асимптотою ось x-овъ.

c) Точкою прекращенія называютъ такую точку, въ которой внезапно прекращается нѣкоторая вѣтвь кривой. Такою точкою будетъ, напримѣръ, начало координатъ для одной изъ вѣтвей кривой $y = e^{-\frac{1}{x}}$, имѣющей еще точку изгиба при $x = \frac{1}{2}$ (рис. 69) и асимптоту $y = 1$. Кривая

$$y = \left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) \Big/ \left(e^{\frac{1}{x}} + 1\right)$$

состоитъ также изъ двухъ вѣтвей, прекращающихся на оси y-овъ въ точкахъ $y = \pm 1$, имѣющихъ точки изгиба на прямой $y = 2x$, и асимптоту — ось x-овъ. Кривая $y = x\log x$ также даетъ очень простой примѣръ точки

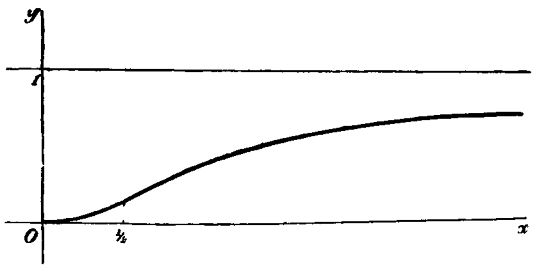

Рис. 69.

прекращенія, а именно въ началѣ координатъ, гдѣ она касается оси y-овъ. Другіе примѣры даютъ кривыя

$$y = \frac{x^2}{\log x}, \qquad y = x^2 \log\frac{x}{y};$$

каждая изъ нихъ имѣетъ вѣтвь, прекращающуюся въ началѣ координатъ. Это происходитъ отъ того, что первая кривая не имѣетъ вещественныхъ точекъ при $x < 0$, а вторая при $x < y$. Для первой кривой начало координатъ по отношенію къ касательной въ этой точкѣ играетъ роль какъ будто точки изгиба, потому что (см. § 548)

$$\lim\frac{y}{x^2} = 0, \text{ но при } n > 2, \ \lim\frac{y}{x^n} = \infty,$$

а для второй—какъ будто точки возврата, потому что

$$\lim\frac{y}{x^2} = \infty, \text{ но при } n < 2, \ \lim\frac{y}{x^n} = 0.$$

Обѣ кривыя имѣютъ еще другую вѣтвь, для первой кривой съ асимптотою $x = 1$, а для второй съ асимптотою $x - y = 1$. Эти вѣтви затѣмъ опять распространяются до безконечности, причемъ обращены выпуклостью постоянно къ оси x-овъ, отъ которой минимальное ихъ разстояніе равно $2e$.

d) Когда двѣ различныя вѣтви встрѣчаются (подъ угломъ, не равнымъ нулю), въ одной точкѣ M и въ ней прекращаются, то получается такъ называемая угловая или выдающаяся точка (springender Punkt, point anguleux ou saillant). Въ точкѣ M кривыя касаются двухъ прямыхъ, какъ и въ двойной, но каждая вѣтвь лежитъ, какъ въ точкѣ возврата, лишь по одну сторону отъ соотвѣтствующей нормали. Угловую точку мы уже встрѣтили (§ 599, e) у кривой $y = \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$, а другой очень простой примѣръ мы имѣемъ (§ 282, b) при $x = 0$ у кривой $y = x \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$.

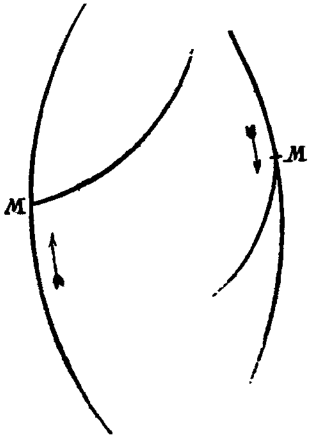

Рис. 70.

e) Далѣе, если изъ двухъ вѣтвей лишь одна прекращается въ общей точкѣ, то получается такъ называемая точка соединенія (Vereinigungspunkt)[1]. Здѣсь кривая представляетъ какъ бы развѣтвленіе дорогъ для точки, пробѣгающей кривую въ извѣстномъ направленіи. Чтобы составить примѣры такихъ точекъ, достаточно въ уравненіи кривой, имѣющей двойную точку, напримѣръ, $x^3+y^3-3axy=0$ прибавить къ y функцію $e^{-\frac{1}{x}}$ или $x \log x$ или $[x]$. Такимъ образомъ удается уничтожить или перемѣстить одну изъ четырехъ вѣтвей, выходящихъ изъ двойной точки. Очевидно, такой пріемъ позволяетъ уничтожить двѣ, три или всѣ четыре вѣтви и построить, слѣдовательно, кривыя съ угловыми точками или точками прекращенія или изолированными точками.

О касаніи плоскихъ кривыхъ.

613. Порядокъ касанія. Въ смежности съ обыкновенною точкою M, общею двумъ кривымъ, возьмемъ двѣ точки P и Q, одну на одной, другую на другой кривой. Представимъ себѣ, что P и Q одновременно приближаются къ M (оставаясь, конечно, каждая на своей кривой), и для опредѣленности допустимъ еще (хотя это и не необходимо), что при этомъ прямая PQ стремится къ нѣкоторому предѣльному положенію, которое образуетъ съ кривыми линіями, т. е. съ касательными къ нимъ въ точкѣ M, углы

---

[1]) Объ этихъ особенностяхъ, указанныхъ лѣтъ 30 тому назадъ бельгійскимъ физикомъ Плато (Plateau), см. статью Mansion'а въ „Mathesis" 1883 г., стр. 193.

α и β, отличные отъ нуля (и отъ π). Прежде всего, легко видѣть, что дуги MP и MQ будутъ безконечно малыми одного и того же порядка. Въ самомъ дѣлѣ, предѣлъ ихъ отношенія будетъ

$$\lim \frac{MP}{MQ} = \lim \frac{\sin MQP}{\sin MPQ} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \text{ *)},$$

т. е. число конечное и не равное нулю, на основаніи нашего предположенія. Если примемъ за главную безконечно малую MP или MQ и обозначимъ черезъ ω уголъ, подъ которымъ кривыя пересѣкаются въ M (т. е. уголъ между касательными къ кривымъ въ этой точкѣ), то

$$\lim \frac{PQ}{MQ} = \lim \frac{\sin PMQ}{\sin MPQ} = \frac{\sin \omega}{\sin \alpha},$$

и отсюда видно, что разстояніе PQ будетъ безконечно малымъ перваго или высшаго порядка, смотря по тому, будетъ ли $\sin \omega$ отлично отъ нуля или равно нулю, т. е. смотря по тому, пересѣкаются ли или касаются данныя кривыя въ точкѣ M. Итакъ, то обстоятельство, что PQ будетъ порядка выше перваго характеризуетъ касаніе кривыхъ. Естественно теперь принять за мѣрило болѣе или менѣе тѣснаго касанія, которое могутъ имѣть кривыя въ точкѣ M, именно порядокъ безконечно малой PQ. Сообразно этому мы будемъ говорить, что касаніе будетъ порядка n, если PQ будетъ безконечно малой порядка $n+1$ **). Однако, прежде чѣмъ принять такое опредѣленіе надо показать, что число n будетъ одно и то же для безчисленнаго множества различныхъ способовъ, которыми можно выбирать точки P и Q, стремящіяся къ совпаденію съ M. Положимъ, что точку Q, стремящуюся къ M, мы соединимъ не съ P, а съ другою точкою P', которая тоже стремится къ M такъ, что предѣльное положеніе $P'Q$ не совпадаетъ съ касательною въ точкѣ M къ даннымъ кривымъ. Когда P и P', двигаясь по данной кривой, стремятся къ совпаденію съ одною и тою же точкою M, то, какъ извѣстно (§ 348, c), прямая PP' стремится совпасть съ касательною въ точкѣ M къ данной кривой. Поэтому

$$\lim \frac{PQ}{P'Q} = \lim \frac{\sin PP'Q}{\sin P'PQ} = \frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha}$$

и $P'Q$ будетъ безконечно малою того же порядка, что и PQ.

---

*) Напоминаемъ читателю, что при вычисленіи предѣла отношенія дугъ всегда можно замѣнить отношеніе дугъ отношеніемъ соотвѣтственныхъ хордъ, такъ какъ отношеніе дуги къ стягивающей ее хордѣ стремится къ единицѣ (§§ 582, 549).

**) Такъ что касаніе нулевого порядка есть простое пересѣченіе.

614. Весьма легко найти аналитическія условія касанія n-го порядка двухъ кривыхъ, заданныхъ уравненіями $Y=\varphi(X)$ и $Y=\psi(X)$ въ Декартовыхъ координатахъ. Мы предположимъ, что кривыя имѣютъ въ точкѣ M общую касательную, не параллельную оси y-овъ, и пересѣчемъ эти кривыя въ смежности съ M прямою, параллельною этой оси; пусть P и Q будутъ точки пересѣченія этой прямой съ данными кривыми. Замѣтимъ, что если бы общая касательная была параллельна оси y-овъ, то достаточно перемѣнить оси, а, слѣдовательно, и координаты, одна на другую, чтобы имѣть возможность остаться при сдѣланномъ предположеніи. Если теперь x есть абсцисса точки M, а $x+h$ абсцисса (общая) точекъ P и Q, то ясно, что h будетъ безконечно малою того же порядка, какъ MP или MQ, т. е. перваго, потому что отношеніе h къ MP или MQ стремится къ величинѣ косинуса угла, образуемаго касательною въ точкѣ M съ осью x-овъ, а косинусъ этотъ, при нашемъ предположеніи, не равенъ нулю. По тому же предположенію и прямая PQ не стремится къ совпаденію съ касательною въ точкѣ M. Слѣдовательно, условія касанія n-го порядка заключаются всѣ въ одномъ: чтобы PQ было безконечно малою порядка $n+1$, а такъ какъ, полагая $\chi(x)=\varphi(x)-\psi(x)$, имѣемъ

$$PQ=\chi(x+h)=\chi(x)+h\chi'(x)+\frac{1}{2}h^2\chi''(x)+\cdots+\frac{1}{n!}h^n\chi^{(n)}(x)+$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}h^{n+1}\chi^{(n+1)}(x+\theta h)\text{*}),$$

гдѣ $0<\theta<1$, то и видно, что для выполненія вышеупомянутаго условія необходимо и достаточно, чтобы

$$\chi(x)=0,\quad \chi'(x)=0,\quad \ldots,\quad \chi^{(n)}(x)=0,\quad \chi^{(n+1)}(x)\gtrless 0. \tag{22}$$

Итакъ, чтобы данныя кривыя имѣли въ точкѣ M касаніе порядка n, необходимо и достаточно, чтобы

$$\varphi(x)=\psi(x),\quad \varphi'(x)=\psi'(x),\quad \ldots,\quad \varphi^{(n)}(x)=\psi^{(n)}(x),$$
$$\varphi^{(n+1)}(x)\gtrless\psi^{(n+1)}(x),$$

т. е., чтобы первыя n производныхъ ординаты, взятыя по абсциссѣ, имѣли въ точкѣ M одинаковыя, а $(n+1)$-ыя производныя — различныя значенія. Замѣтимъ, что первое изъ вышеприведенныхъ равенствъ выражаетъ, что кривыя въ точкѣ M встрѣчаются, а второе, что онѣ въ ней касаются.

---

*) Мы предполагаемъ здѣсь существованіе $n+1$ производныхъ отъ функцій φ и ψ въ окрестности точки x и непрерывность въ этой точкѣ $(n+1)$-ыхъ производныхъ. Остаточный членъ въ формулѣ Тэйлора мы беремъ въ формѣ Лагранжа.

615. Замѣтимъ, что въ случаѣ n нечетнаго найденныя условія совпадаютъ съ тѣми, которыя выражаютъ (§ 313), что функція $\chi(X)$ при $X = x$ имѣетъ maximum или minimum; а такъ какъ эта функція при $X = x$ равна нулю, то въ смежности съ M она будетъ сохранять постоянно одинъ и тотъ же знакъ $+$ или $-$, и, слѣдовательно, кривыя въ точкѣ M не пересѣкаются. Наоборотъ, если n число четное, то $\chi(X)$ при $X = x$ не будетъ ни максимумъ ни минимумъ, а потому $\varphi(X) > \psi(X)$ по одну сторону отъ M, и $\varphi(X) < \psi(X)$ — по другою, т. е. кривыя въ точкѣ M касаются и пересѣкаются. Уже одинъ тотъ фактъ, что кривыя, касаясь другъ друга, въ то же время пересѣкаются, заставляетъ заключить, что касаніе будетъ высшаго, по крайней мѣрѣ, второго порядка. Однако, это заключеніе подчинено необходимому предположенію, а именно, что функціи φ и ψ имѣютъ вполнѣ опредѣленныя, единственныя, послѣдовательныя производныя въ точкѣ M. Такъ напримѣръ, въ § 605 мы встрѣтили кривую, которая въ началѣ координатъ пересѣкаетъ свою касательную, хотя касаніе обѣихъ линій здѣсь простое, т. е. 1-го порядка. Аналогичный случай представляетъ кривая $y = \dfrac{x^2}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$, которая касается и пересѣкается съ параболою $y = \frac{1}{2}x^2$ въ началѣ координатъ (§ 599, f), хотя и здѣсь будетъ простое касаніе обѣихъ кривыхъ. Далѣе, надо еще замѣтить, что влѣво отъ начала координатъ эта кривая имѣетъ простое касаніе съ своею касательною, а справа — нельзя сказать, какъ высокъ будетъ порядокъ касанія.

616. Условія (22), разсматриваемыя съ алгебраической точки зрѣнія, выражаютъ, что уравненіе $\chi(X) = 0$ имѣетъ $(n+1)$ — кратный корень $X = x$, а такъ какъ это же уравненіе опредѣляетъ абсциссы точекъ пересѣченія данныхъ кривыхъ, то можно сказать, что въ точкѣ M соединены $n+1$ общихъ точекъ обѣихъ кривыхъ. Такое представленіе геометрически оправдывается слѣдующимъ соображеніемъ. Если черезъ точку M на кривой $y = f(X)$ проведемъ перемѣнную кривую $y = \varphi(X)$, уравненіе которой содержитъ болѣе n произвольныхъ параметровъ; если затѣмъ распорядимся этими параметрами такъ, чтобы вторая кривая прошла черезъ n другихъ точекъ M', M'', ... первой кривой, и наконецъ, заставимъ эти n точекъ стремиться къ совпаденію съ M такъ, чтобы при этомъ перемѣнная кривая стремилась къ опредѣленному предѣльному положенію, то въ этомъ предѣльномъ положеніи вторая кривая будетъ имѣть съ первою касаніе вообще порядка n. Положимъ, въ самомъ дѣлѣ, что $n+1$ параметровъ перемѣнной кривой опредѣлены такъ, что выполнены условія

$$\varphi(x) = f(x), \quad \varphi(x_1) = f(x_1), \quad \ldots, \quad \varphi(x_n) = f(x_n),$$

гдѣ x, x_1, x_2, ... абсциссы точекъ M, M', M'', ... Тогда, какъ извѣстно (§ 347), можно написать

$$\begin{aligned}\varphi(X) = f(x) + (X-x)f(x, x_1) + (X-x)(X-x_1)f(x, x_1, x_2) + \cdots \\ + (X-x)(X-x_1)\ldots(X-x_{n-1})f(x, x_1, \ldots, x_n) \\ + (X-x)(X-x_1)\ldots(X-x_n)\frac{\varphi^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},\end{aligned}$$

при чемъ ξ обозначаетъ число, лежащее между наименьшимъ и наибольшимъ изъ чиселъ X, x, x_1, ..., x_n. Намъ извѣстно также, что, когда x_1, x_2, ..., x_n одновременно стремятся къ x, то

$$\lim f(x, x_1, x_2, \ldots, x_\nu) = \frac{f^{(\nu)}(x)}{\nu!}.$$

Слѣдовательно, обозначая черезъ ξ число, среднее между X и x, будемъ имѣть

$$\begin{aligned}\varphi(X) = f(x) + (X-x)\frac{f'(x)}{1} + (X-x)^2\frac{f''(x)}{1\cdot 2} + \cdots \\ + (X-x)^n\frac{f^{(n)}(x)}{n!} + (X-x)^{n+1}\frac{\varphi^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

Съ другой стороны, если ξ_0 также нѣкоторое число между X и x, то

$$\begin{aligned}f(X) = f(x) + (X-x)\frac{f'(x)}{1} + (X-x)^2\frac{f''(x)}{1\cdot 2} + \cdots \\ + (X-x)^n\frac{f^{(n)}(x)}{n!} + (X-x)^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(\xi_0)}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

Поэтому

$$\lim_{X=x}\frac{f(X)-\varphi(X)}{(X-x)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(x)-\varphi^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}.$$

Итакъ, разность $f(X) - \varphi(X)$ будетъ безконечно малая порядка выше n, и обѣ кривыя имѣютъ въ точкѣ M касаніе порядка не ниже n. Порядокъ можно сдѣлать выше n, если еще другія точки пересѣченія кривыхъ, кромѣ разсмотрѣнныхъ выше, также совпадутъ съ M. Разумѣется здѣсь n всегда разсматривается, какъ цѣлое число, между тѣмъ какъ при опредѣленіи порядка касанія не исключается возможность дробнаго порядка касанія. Такой случай встрѣчается, между прочимъ, при касаніи кривой и ея касательной изгиба (въ точкѣ возврата), гдѣ порядокъ касанія вообще (§ 608) равенъ $\frac{1}{2}$.

617. Соприкасаніе (Oskulation). Положимъ, что требуется черезъ нѣкоторую точку (x, y) на данной кривой $f(X, Y) = 0$ провести другую кривую, имѣющую съ данною въ точкѣ (x, y) касаніе порядка n и принадлежащую къ семейству кривыхъ, опредѣляемому уравненіемъ вида $\varphi(X, Y) = 0$, содержащимъ болѣе n произвольныхъ параметровъ. Для этого нужно будетъ дифференцировать оба уравненія n разъ подъ рядъ такъ, какъ это дѣлаютъ съ цѣлью опредѣленія послѣдовательныхъ производныхъ отъ Y по X до порядка n включительно. Затѣмъ надо будетъ выразить, что въ обоихъ рядахъ полученныхъ уравненій эти производныя при $X=x$ и $Y=y$ имѣютъ одинаковыя значенія. Такимъ образомъ получимъ $n+1$ уравненій, причисляя къ нимъ и то, которое получается, когда въ уравненіи искомой кривой, положимъ $X=x$, $Y=y$ (выражая этимъ, что она проходитъ черезъ точку (x, y)). Эти уравненія послужатъ для опредѣленія $n+1$ параметровъ, и, вообще говоря, только при числѣ параметровъ, превосходящемъ n, можно получить касаніе n-го порядка. Если распорядимся всѣми параметрами такъ, чтобы получился наивысшій возможный порядокъ касанія, тогда говорятъ, что нашли соприкасающуюся къ данной кривой $f(X, Y) = 0$ въ данной точкѣ кривую даннаго вида $\varphi(X, Y) = 0$. При этомъ не исключается возможность того, что вслѣдствіе какой либо особенности, представляемой данною кривою, ожидаемый максимальный порядокъ касанія повысится. Тогда говорятъ, что въ данной точкѣ кривыя имѣютъ пересоприкасаніе (superoskulation). Чтобы опредѣлить, въ какихъ точкахъ оно возможно, надо еще разъ дифференцировать данныя уравненія и изъ нихъ исключить всѣ параметры. Получится уравненіе между x и y, которое и опредѣляетъ искомыя точки.

618. Примѣры. a) Къ данной кривой въ данной точкѣ требуется провести соприкасающуюся прямую. Такъ какъ въ уравненіи прямой $Y = mX + h$ два произвольныхъ параметра, то вообще можно достигнуть только простого касанія (перваго порядка). Примѣняя изложенную въ предыдущемъ § методу, получаемъ условія: $y = mx + h$, $y' = m$, при чемъ надо помнить, что x, y и y' относятся къ данной кривой. Отсюда для параметровъ получаются значенія $m = y'$, $h = y - xy'$, и мы находимъ уравненіе искомой прямой (см. § 586): $Y = Xy' + y - xy'$ или $Y - y = y'(X - x)$ (соприкасающаяся прямая есть касательная). Для повышенія порядка касанія необходимо условіе $y'' = 0$, и отъ данной кривой зависитъ можетъ ли такое повышеніе произойти. Мы видимъ, что только въ точкахъ изгиба можетъ произойти касаніе выше 1-го порядка. Оно будетъ вообще второго порядка, и касательная будетъ пересѣкать кривую; но, чтобы это дѣйствительно случилось, необходимо и достаточно, кромѣ условія $y'' = 0$, еще чтобы первая изъ послѣдовательныхъ производныхъ y''', y^{IV}, ... не обращающаяся въ нуль, была нечетнаго порядка. Геометрически можно сказать, что въ точкѣ изгиба соединены, по крайней мѣрѣ, три общія точки кривой и касательной, и что во всякомъ случаѣ число скопившихся въ M точекъ будетъ нечетнымъ или четнымъ, смотря по тому, пересѣкаетъ ли или не пересѣкаетъ касательная кривую.

b) Кругъ съ центромъ (ξ, η) и радіусомъ ϱ изображается уравненіемъ $(X-\xi)^2 + (Y-\eta)^2 = \varrho^2$. Дифференцируя и подставляя $X = x$, $Y = y$ и т. д., получаемъ

$$(23) \qquad (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = \varrho^2, \quad x - \xi + (y-\eta)y' = 0,$$
$$1 + y'^2 + (y-\eta)y'' = 0,$$

откуда послѣдовательно находимъ

$$y-\eta=-\frac{1+y'^2}{y''},\quad x-\xi=y'\frac{1+y'^2}{y''},\quad \varrho=\pm\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

Такимъ образомъ мы снова находимъ тотъ кругъ, который мы уже раньше назвали соприкасающимся, и видимъ, что порядокъ его касанія съ кривою будетъ, вообще, равенъ 2. Отсюда слѣдуетъ (см. § 592), что соприкасающійся кругъ въ той точкѣ, въ которой онъ касается кривой, ее и пересѣкаетъ. Основываясь на сказанномъ въ § 616, можно также сказать, что соприкасающійся кругъ проходитъ черезъ три смежныя точки кривой, и полезно припомнить, что именно такимъ образомъ соприкасающій кругъ и встрѣтился намъ въ первый разъ (§ 348, е).

c) Если желаютъ, чтобы кругъ съ данною кривою имѣлъ касаніе выше 2-го порядка, то нужно, чтобы еще удовлетворилось уравненіе, получаемое черезъ дифференцированіе послѣдняго изъ уравненій (23), т. е.

$$3y'y''+(y-\eta)y'''=0 \quad \text{или} \quad 3y'y''^2=(1+y'^2)y'''.$$

Будетъ ли это уравненіе удовлетворяться или нѣтъ, зависитъ отъ природы данной кривой въ той точкѣ (x, y), которую разсматриваемъ. Замѣтимъ, что производная отъ ϱ именно равна

$$\frac{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}}{y''^2}(3y'y''^2-(1+y'^2)y''').$$

Представляя себѣ, слѣдовательно, что точка $M(x, y)$ описываетъ данную кривую (см. § 592), мы видимъ, что соприкасающійся кругъ тамъ будетъ имѣть касаніе выше 2-го порядка съ данною кривою, гдѣ радіусъ кривизны будетъ maximum или minimum. Этимъ, однако, не исключается возможность того, что пересоприкасаніе будетъ и тамъ, гдѣ ϱ не будетъ ни maximum, ни minimnm.

Огибающія кривыя

(Enveloppen).

619. Опредѣленіе. Положимъ, что дано уравненіе семейства кривыхъ $f(x, y, a)=0$, при чемъ каждому значенію параметра a соотвѣтствуетъ опредѣленная кривая этого семейства. Мы предположимъ, что $f(x, y, a)$ непрерывна относительно a и имѣетъ непрерывныя первыя производныя по всѣмъ перемѣннымъ. Пусть M есть точка пересѣченія кривыхъ (a) и $(a+h)$, т. е. кривыхъ, соотвѣтствующихъ значеніямъ параметра a и $a+h$. Если, фиксируя a, станемъ приближать h къ нулю, то кривая $(a+h)$ будетъ постепенно приближаться къ кривой (a) и можетъ случиться, что точка M, передвигаясь по кривой (a), будетъ стремиться къ нѣкоторому предѣльному положенію A. Если кривыя (a) и $(a+h)$ не пересѣкаются, то, несмотря на это, можетъ случиться, что на кривой (a) существуютъ точки A, обладающія слѣдующимъ свойствомъ: если вторая кривая $(a+h)$ отсѣкаетъ на нормали къ первой (a) въ точкѣ M нѣкоторый отрѣзокъ, безконечно малый при h безконечно маломъ, то въ точкѣ A этотъ отрѣзокъ будетъ безконечно малымъ выше перваго порядка относительно h. Такія точки наисильнѣйшаго безконечнаго сближенія кривыхъ (a) и $(a+h)$ можно разсматривать также какъ точки, общія двумъ кривымъ, если пренебречь безконечно малыми высшаго порядка. Общее мѣсто точекъ A называютъ огибающею кривыхъ $f(x, y, a)=0$.

620. Уравненіе огибающей. Предположимъ, что A не кратная точка кривой (a); вслѣдствіе предположенной непрерывности первыхъ производныхъ функціи f, и въ смежности съ A — кратныхъ точекъ не будетъ. Поэтому, если возьмемъ на кривой (a) точку M достаточно близко къ A, то въ точкѣ M нормаль къ кривой (a) будетъ имѣть вполнѣ опредѣленное направленіе, и косинусы угловъ, образуемыхъ этимъ направленіемъ съ координатными осями, будутъ безконечно мало отличаться отъ соотвѣтствующихъ косинусовъ угловъ нормали въ точкѣ A. Обозначая черезъ α и β косинусы угловъ нормали въ точкѣ M съ осями, будемъ, слѣдовательно, имѣть

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{\Delta f}}\frac{\partial f}{\partial x} + \cdots, \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{\Delta f}}\frac{\partial f}{\partial y} + \cdots.$$

(x и y — координаты точки A). Обозначимъ, далѣе, черезъ ξ и η координаты точки M, стремящіяся къ x и y — координатамъ точки A, при безконечно маломъ h. Пусть также l обозначаетъ отрѣзокъ MM', отсѣкаемый кривою $(a+h)$ на нормали въ точкѣ M къ кривой (a). Если M есть точка пересѣченія кривыхъ, то l надо положить равнымъ нулю. Во всѣхъ случахъ координаты точки M' будутъ $\xi+l\alpha$, $\eta+l\beta$. Эти числа должны удовлетворять уравненію $f(x, y, a+h)=0$. Слѣдовательно,

$$f(\xi + l\alpha, \quad \eta + l\beta, \quad a + h) = 0.$$

Отсюда, принимая во вниманіе, что $f(\xi, \eta, a) = 0$, и отбрасывая безконечно малыя высшаго порядка относительно h, находимъ

$$l\left(\alpha\frac{\partial f}{\partial x} + \beta\frac{\partial f}{\partial y}\right) + h\frac{\partial f}{\partial a} = 0,$$

а потому $l = -\frac{h}{\sqrt{\Delta f}}\frac{\partial f}{\partial a}$. Такъ какъ кратныя точки исключены (т. е. Δf не равна 0), то, для того чтобы l было высшаго порядка, чѣмъ h, необходимо и достаточно, чтобы было $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$. Итакъ, уравненіе огибающей получается черезъ исключеніе a изъ уравненій

$$f(x, y, a) = 0, \quad f'_a(x, y, a) = 0\,^{*}). \tag{24}$$

---

*) Вообще, получаемое указаннымъ путемъ уравненіе будетъ изображать либо огибающую, либо общее мѣсто особенныхъ точекъ кривой. См. Гурса „Курсъ Математическаго Анализа". Москва 1911, стр. 460.

621. Характеристическое свойство огибающей. Можно сказать, что уравненіе даннаго семейства кривыхъ, т. е. первое изъ уравненій (24) и есть уравненіе огибающей, если въ этомъ уравненіи $f(x, y, a) = 0$ будемъ разсматривать a, какъ функцію отъ x и y, опредѣляемую уравненіемъ $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$. Дифференцируя первое изъ уравненій (24) при сдѣланномъ условіи, находимъ

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial a}\frac{da}{dx} = 0, \tag{25}$$

которое, въ силу второго изъ уравненій (24), приводится къ $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0$, т. е. къ уравненію, опредѣляющему значеніе y' для кривой (a). Слѣдовательно, огибающая касается каждой изъ кривыхъ даннаго семейства. Въ этомъ состоитъ характеристическое свойство огибающей. Дѣйствительно, какова бы ни была кривая, которая должна касаться всѣхъ кривыхъ даннаго семейства, всегда можно считать, что ея уравненіе есть уравненіе $f(x, y, a) = 0$, гдѣ a неизвѣстная функція, которую надо опредѣлить надлежащимъ образомъ, чтобы удовлетворить поставленному требованію. Это опредѣленіе должно быть сдѣлано такъ, чтобы уравненіе (25) давало то же самое значеніе y', которое получается для всякой кривой (a), каково бы a ни было. Поэтому необходимо должно быть $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$, и искомое уравненіе совпадаетъ съ тѣмъ, которое получается исключеніемъ a изъ уравненій (24).

622. Уравненіе $f(x, y, a) = 0$ распредѣляетъ точки плоскости по кривымъ, лежащимъ обыкновенно по одну сторону отъ огибающей, которая такимъ образомъ является границей области, заполненной кривыми даннаго семейства. Разсмотримъ теперь два уравненія

$$f(x, y, a, b) = 0, \quad g(x, y, a, b) = 0. \tag{26}$$

Эти уравненія, вообще говоря, устанавливаютъ нѣкоторое соотвѣтствіе между каждою парою значеній независимыхъ параметровъ и точками (x, y) на плоскости. Вопросъ объ опредѣленіи границъ той области, которая занята этими точками, приводитъ къ разысканію огибающей семейства кривыхъ, изображаемаго, напримѣръ, первымъ изъ уравненій (26), если въ немъ будемъ разсматривать a, какъ единственный произвольный параметръ, а b, какъ функцію отъ x, y и a, опредѣляемую вторымъ изъ уравненій (26). Поэтому будемъ имѣть $\frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial b}\frac{db}{da} = 0$, гдѣ $\frac{db}{da}$ опредѣляется изъ уравненія

$$\frac{\partial g}{\partial a} + \frac{\partial g}{\partial b}\frac{db}{da} = 0.$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$\frac{\partial(f,\, g)}{\partial(a,\, b)} = 0\,. \tag{27}$$

Исключая a и b изъ уравненій (26) и (27) мы и получимъ уравненіе искомой кривой. Одно изъ уравненій (26) можетъ и не содержать въ себѣ x и y, и тогда снова приходимъ къ случаю одного независимаго параметра, потому что другой надо разсматривать какъ функцію перваго. Но уравненіе (27) остается справедливымъ. Общнѣе, если имѣемъ m уравненій

$$f(x,\, y,\, a,\, b,\, c,\, \ldots) = 0, \quad g(x,\, y,\, a,\, b,\, c,\, \ldots) = 0,\, \ldots$$

съ n параметрами, связанными $n-m$ соотношеніями

$$\varphi(a,\, b,\, c,\, \ldots) = 0, \quad \psi(a,\, b,\, c,\, \ldots) = 0,\, \ldots,$$

то, дифференцируя всѣ данныя уравненія (т. е. первыя n и условныя $n-m$) относительно параметровъ, и исключая da, db, dc, ..., найдемъ, что функціональный опредѣлитель f, g, ..., φ, ψ, ... относительно a, b, c, ... долженъ быть равенъ нулю. Исключая n параметровъ изъ $n+1$ уравненій, мы и получимъ уравненіе огибающей.

623. Эволюты и эвольвенты. Эволютою плоской кривой называютъ огибающую ея нормалей. Всякая кривая называется эвольвентою своей эволюты. На основаніи сказаннаго въ § 593, можемъ тотчасъ сказать, что эволюта плоской кривой есть общее мѣсто ея центровъ кривизны. Эту теорему можно также доказать путемъ, указаннымъ въ концѣ § 620. Примѣняя указанный пріемъ къ уравненію нормали $X-x+y'(Y-y)=0$, получаемъ

$$-(1+y'^2)+(Y-y)y''=0.$$

Координаты точекъ касанія нормалей съ ихъ огибающей опредѣляются, слѣдовательно, формулами

$$X = x - y'\,\frac{1+y'^2}{y''}, \quad Y = y + \frac{1+y'^2}{y''}.$$

Съ другой стороны, какъ мы видѣли въ § 618, если ξ и η — координаты центра кривизны, то

$$x-\xi = y'\,\frac{1+y'^2}{y''}, \quad y-\eta = -\frac{1+y'^2}{y''}.$$

Итакъ, $X=\xi$, $Y=\eta$.

624. Если напишемъ координаты центра кривизны въ видѣ

$$\xi = x - \varrho\sin\varphi, \quad \eta = y + \varrho\cos\varphi,$$

то отсюда выведемъ

$$d\xi = dx - \varrho\cos\varphi \cdot d\varphi - \sin\varphi \cdot d\varrho, \quad d\eta = dy - \varrho\sin\varphi \cdot d\varphi + \cos\varphi \cdot d\varrho.$$

Припоминая теперь, что $dx = \cos\varphi \cdot ds$, $dy = \sin\varphi \cdot ds$ и $ds = \varrho\, d\varphi$, находимъ $d\xi = -\sin\varphi \cdot d\varrho$, $d\eta = \cos\varphi \cdot d\varrho$. Эти формулы показываютъ, что элементъ CC' дуги эволюты (рис. 71) можно разсматривать, какъ лежащій на нормали къ эвольвентѣ и имѣющій длину $d\sigma = d\varrho$. Отсюда опять слѣдуетъ, что касательныя къ эволютѣ — нормали къ эвольвентѣ. Кромѣ того, равенство $d(\sigma - \varrho) = 0$

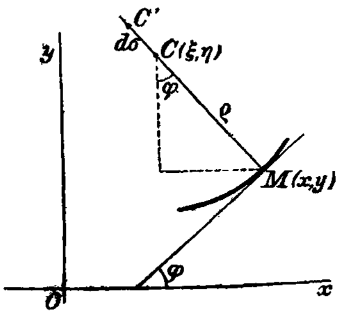

Рис. 71.

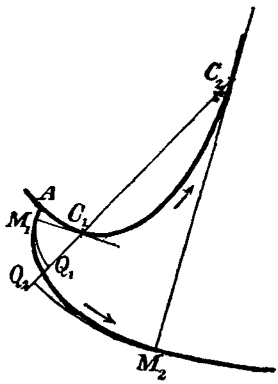

Рис. 72.

показываетъ, что $\sigma - \varrho = \text{const}$. Поэтому, если возьмемъ нѣкоторую дугу $C_1C_2 = \sigma_2 - \sigma_1$ на эволютѣ и положимъ, что радіусы кривизны данной эвольвенты въ концахъ дуги C_1C_2 имѣютъ значенія ϱ_1 и ϱ_2, то $\sigma_1 - \varrho_1 = \sigma_2 - \varrho_2$, т. е. $\sigma_2 - \sigma_1 = \varrho_2 - \varrho_1$. Иными словами

(28) Дуга $C_1C_2 = M_2C_2 - M_1C_1$ (рис. 72).

[**Примѣчаніе.** Изъ формулъ $d\xi = -\sin\varphi \cdot d\varrho$, $d\eta = \cos\varphi \cdot d\varrho$ получаемъ $d\xi^2 + d\eta^2 = d\sigma^2 = d\varrho^2$, откуда $d\sigma = \pm\, d\varrho$. Если при движеніи точки M отъ M_1 къ M_2 σ и ϱ одновременно возрастаютъ или убываютъ, то $d\sigma = d\varrho$; если же, при возрастаніи σ, ϱ убываетъ, то $d(\sigma + \varrho) = 0$, т. е. $\sigma + \varrho = \text{const}$. Заключеніе, что $\smile C_1C_2$ равна разности радіусовъ кривизны $\pm(M_2C_2 - M_1C_1)$, справедливо въ обоихъ случаяхъ. Если же, при движеніи M отъ M_1 къ M_2, $\dfrac{d\varrho}{d\sigma}$ мѣняетъ знакъ, то предыдущее равенство не справедливо. Въ этомъ случаѣ дугу M_1M_2 надо раздѣлить на части, въ которыхъ $\dfrac{d\varrho}{d\sigma}$ сохраняетъ знакъ, и примѣнить доказанное равенство, съ соотвѣтствующимъ знакомъ, къ каждой части отдѣльно. Напримѣръ, если на параболѣ точки M_1 и M_2 лежатъ по разныя стороны отъ вершины O, центръ кривизны въ которой есть точка C на оси, то

$\smile CC_2 = M_2C_2 - CO$, $\smile C_1C = M_1C_1 - CO$, $\smile C_1CC_2 = M_1C_1 + M_2C_2 - 2\,CO$.]

Укажемъ нѣкоторыя замѣчательныя слѣдствія этого свойства:

a) Если дуга M_1M_2 достаточно мала для того, чтобы ея кривизна измѣнялась отъ одного конца къ другому въ одномъ и томъ же направленіи (т. е. или постоянно возрастала или постоянно убывала), то окружности соприкасающихся круговъ въ точкахъ M_1 и M_2 не могутъ пересѣкаться, потому что онѣ отдѣляются одна отъ другой именно дугою M_1M_2 (см. § 592). Легко, впрочемъ, вычислить разстояніе между этими окружностями, равное разстоянію между точками Q_1 и Q_2, лежащими на линіи центровъ C_1C_2 между M_1 и M_2 (рис. 72). Мы имѣемъ

$$Q_1Q_2 = Q_2C_2 - (Q_1C_1 + C_1C_2) = M_2C_2 - M_1C_1 - C_1C_2$$

или $Q_1Q_2 =$ дуга $C_1C_2 -$ хорда $C_1C_2 > 0$. Слѣдовательно, ясно, что окружности двухъ достаточно близкихъ соприкасающихся круговъ пересѣкаться не могутъ. Но мы можемъ сказать еще болѣе, а именно, что эти окружности не могутъ имѣть (§ 585) и общей точки, и разстояніе между ними есть безконечно малая третьяго порядка относительно разстоянія между ихъ центрами.

b) Изъ формулы (28) вытекаетъ еще слѣдующее: представимъ себѣ, что на нѣкоторую плоскую кривую навита нерастяжимая нить; закрѣпивъ одинъ ея конецъ и удерживая нить всегда натянутою, будемъ свивать нить съ кривой въ ея плоскости, тогда всякая точка нити будетъ описывать эвольвенту данной кривой. Итакъ, всякая кривая имѣетъ безконечное множество эвольвентъ, представляющихъ систему параллельныхъ равноотстоящихъ одна отъ другой кривыхъ. Эвольвенты данной кривой можно также разсматривать, какъ рулетты, описываемыя точками прямой, катящейся безъ скольженія по данной кривой.

625. Для полнаго изученія эволюты данной кривой остается еще опредѣлить ея кривизну. Съ этою цѣлью замѣтимъ, что уголъ смежности для обѣихъ кривыхъ, очевидно, одинъ и тотъ же. Отсюда тотчасъ слѣдуетъ, что радіусъ кривизны эволюты равенъ $\varrho \dfrac{d\varrho}{ds}$ *). Поэтому, вообще каждой точкѣ эвольвенты, въ которой кривизна

*) Потому что радіусъ кривизны эволюты равенъ $\dfrac{d\sigma}{d\varphi}$, гдѣ $d\sigma = d\varrho$, $d\varphi = \dfrac{ds}{\varrho}$.

максимумъ или минимумъ, на эволютѣ соотвѣтствуетъ точка возврата, а точки возврата эвольвенты (по крайней мѣрѣ, перваго рода) сами принадлежатъ эволютѣ, потому что при $\varrho = 0$ точка M эвольвенты и точка C эволюты совпадаютъ съ одною и тою же точкою A. Кромѣ того, если a есть радіусъ кривизны эволюты въ точкѣ A, то изъ уравненія $\lim \varrho \frac{d\varrho}{ds} = a$, перенеся начало счета дугъ на эвольвентѣ въ точку A и примѣняя теорему Лопиталя, тотчасъ получимъ

$$\lim \frac{\varrho^2}{s} = 2a.$$

Слѣдовательно, въ смежности съ точкою A, эвольвента имѣетъ приблизительно форму кривой, натуральное уравненіе которой есть $\varrho^2 = 2as$, т. е. (см. § 595, о) форму эвольвенты круга радіуса a въ смежности съ ея точкою возврата.

626. Упражненія. a) Уравненіе $y = (x-a)^3$ изображаетъ семейство равныхъ между собою кубическихъ параболъ, огибаемыхъ осью x-овъ. Эта прямая касается всѣхъ параболъ въ точкахъ изгиба ихъ, а потому и не дѣлитъ плоскость на двѣ области — одну, въ которой находятся всѣ огибаемыя, и другую, въ которой ихъ вовсе нѣтъ, какъ это бываетъ въ большинствѣ случаевъ (см. § 622). Точно такъ же огибающая параболъ $y = a^2(x-a)^2$ состоитъ изъ оси x-овъ и кривой $16y = x^4$. Но эта кривая касается каждой изъ параболъ въ точкѣ $x = 2a$, и пересѣкаетъ каждую изъ нихъ въ двухъ другихъ $x = -2a \pm 2a\sqrt{2}$. Слѣдовательно, область, заполняемая данными параболами, ограничена только осью x-овъ.

b) Найдемъ огибающую подвижной прямой, которая движется по плоскости такъ, что двѣ ея точки постоянно находятся на сторонахъ даннаго прямого угла. Если обозначимъ черезъ l разстояніе между этими точками, то уравненіе прямой будетъ $\frac{x}{\cos\theta} + \frac{y}{\sin\theta} = l$, и θ можно разсматривать, какъ параметръ, каждому значенію котораго соотвѣтствуетъ опредѣленное положеніе прямой. Дифференцируя по θ, получимъ

$$\frac{x}{\cos^3\theta} = \frac{y}{\sin^3\theta} \text{ или } \frac{x/\cos\theta}{\cos^2\theta} = \frac{y/\sin\theta}{\sin^2\theta} = l,$$

слѣдовательно, $x = l\cos^3\theta$, $y = l\sin^3\theta$ и $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}$. Итакъ, огибающая подвижной прямой есть астроида (§ 595, g).

c) Астроида будетъ также огибающая всѣхъ эллипсовъ, описываемыхъ каждою другою точкою той же прямой (рис. 73). Дѣйствительно, если раздѣлимъ l на двѣ части a и b, такъ что $a + b = l$, то точка дѣленія опишетъ эллипсъ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Дифференцируя по параметрамъ a и b, и принимая во вниманіе, что $da + db = 0$, получимъ

$$\frac{x^2}{a^3} = \frac{y^2}{b^3} \text{ или } \frac{\frac{x^2}{a^2}}{a} = \frac{\frac{y^2}{b^2}}{b} = \frac{1}{l},$$

откуда послѣдовательно

$$x^2 = a^3/l, \quad y^2 = b^3/l, \quad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}.$$

Если же, вмѣсто этого, полуоси будутъ связаны условіемъ $a^2 + b^2 = l^2$, то подобнымъ же образомъ найдемъ, что огибающая будетъ состоять изъ че-

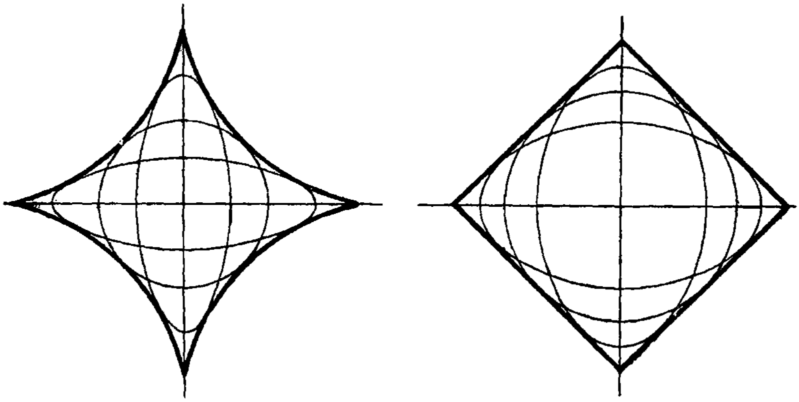

Рис. 73.

тырехъ прямыхъ $\pm x \pm y = l$, т. е. всѣ эллипсы, имѣющіе общія оси (по направленію) и общій кругъ Монжа, вписаны въ одинъ и тотъ же квадратъ (рис. 73).

d) Между эвольвентами цѣпной линіи особенно замѣчательна та, которая беретъ начало въ вершинѣ кривой и носитъ названіе *трактрисы* (рис. 74). Извѣстныя свойства цѣпной линіи (§ 595, I) приводятъ тотчасъ къ установленію нижеслѣдующихъ свойствъ трактрисы: отрѣзокъ, отсѣкаемый асимптотою на касательной, считаемый отъ соотвѣтствующей точки касанія — величина постоянная; центръ кривизны лежитъ на перпендикулярѣ, возставленномъ къ асимптотѣ изъ точки пересѣченія ея съ касательною.

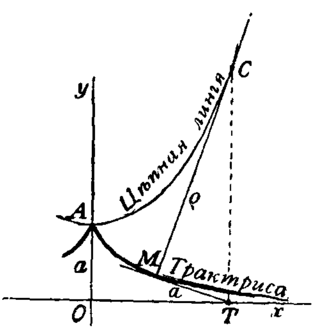

Рис. 74.

e) Какъ аналитически, такъ и геометрически легко доказать, что эволюта циклоиды равна своей эвольвентѣ (только сдвинутой съ мѣста), эволюта кардіоиды есть втрое меньшая кардіоида, эволюта астроиды вдвое бóльшая астроида и т. д. Общнѣе можно доказать, что за исключеніемъ эвольвенты круга, всѣ эпи- и гипоциклоиды подобны своимъ эволютамъ, и если m есть отношеніе радіуса подвижного круга къ радіусу неподвижнаго, то отношеніе подобія (постоянное отношеніе между пропорціональными длинами) эвольвенты и эволюты равно $1 + 2m$, т. е. равно соотвѣтственно 1, 3, $\frac{1}{2}$ и т. д. для циклоиды ($m = 0$), кардіоиды ($m = 1$), астроиды ($m = -\frac{1}{4}$) и т. д.

f) Будемъ искать огибающую семейства круговъ, зная кривую, на которой находятся центры всѣхъ круговъ, и законъ измѣненія радіуса вдоль этой кривой. Положимъ, что ξ, η и ϱ — координаты центра и радіусъ, заданные, какъ функціи дуги σ кривой — общаго мѣста центровъ, тогда надо будетъ дифференцировать уравненіе $(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=\varrho^2$ по σ, разсматривая при этомъ x и y, какъ постоянныя. Мы получаемъ

$$(x-\xi)\frac{d\xi}{d\sigma}+(y-\eta)\frac{d\eta}{d\sigma}+\varrho\frac{d\varrho}{d\sigma}=0, \tag{I}$$

и видимъ, что круги касаются огибающей въ точкахъ, лежащихъ на прямой, параллельной нормали къ линіи центровъ, проведенной на разстояніи $-\varrho\frac{d\varrho}{d\sigma}$ отъ центра. Чтобы огибающая была вещественною, необходимо и достаточно, чтобы $|d\varrho|$ была не больше $|d\sigma|$. Иными словами, огибающая только тогда вещественна, когда скорость, съ которою движется центръ, не меньше скорости, съ которою кругъ растягивается или сжимается. При $|d\varrho|<|d\sigma|$ огибающая состоитъ изъ двухъ вѣтвей, совпадающихъ въ одну, когда $d\varrho=\pm\,d\sigma$. Въ этомъ случаѣ касательная къ общему мѣсту центровъ будетъ нормальна къ огибающей, и кривая (ξ, η) есть не что иное, какъ эволюта кривой (x, y). Иными словами, условіе $d\varrho=\pm\,d\sigma$, необходимость котораго была установлена въ § 624, будетъ и достаточнымъ для того, чтобы круги нѣкотораго семейства были соприкасающимися кругами плоской прямой.

[**Примѣчаніе.** При $\left|\frac{d\varrho}{d\sigma}\right|>1$, $\left|\varrho\frac{d\varrho}{d\sigma}\right|>\varrho$ и прямая (I) не имѣетъ общихъ точекъ съ окружностью круга радіуса ϱ, слѣдовательно, нѣтъ и вещественной огибающей. При $\left|\frac{d\varrho}{d\sigma}\right|<1$, прямая (I) пересѣкаетъ окружность круга въ двухъ точкахъ: одна опишетъ при измѣненіи σ одну, другая другую вѣтвь огибающей. При $\left|\frac{d\varrho}{d\sigma}\right|=1$, прямая (I) касается окружности огибаемаго круга и точка касанія опишетъ единственную вѣтвь огибающей. Кромѣ того, касательная къ линіи центровъ будетъ перпендикулярна къ линіи (I), т. е будетъ нормалью къ огибаемой.]

627. Подэры и антиподэры. Мы уже сказали въ § 590, c, что подэрою данной кривой относительно точки Q называютъ общее мѣсто проекцій точки Q на касательной къ данной кривой. Если кривая (M) есть подэра кривой (M_1) (рис. 75), то кривая (M_1) называется антиподэрою кривой (M) относительно точки Q. Ясно, что антиподэру нѣкоторой кривой относительно точки Q можно разсматривать, какъ огибающую перпендикуляровъ MM_1, возставленныхъ къ различнымъ прямымъ, проходящимъ черезъ Q, въ точкахъ пересѣченія этихъ прямыхъ съ данною кривою (M). Это замѣчаніе и указываетъ путь для опредѣленія антиподэры данной кривой. Пусть M — нѣкоторая точка на данной кривой, а M_1 — соотвѣтствующая ей точка на искомой антиподэрѣ. Напишемъ уравненіе огибаемой прямой въ видѣ

$$x\cos\theta+y\sin\theta=r.$$

Дифференцируя его по θ, находимъ

$$-x \sin \theta + y \cos \theta = r'.$$

Это есть уравненіе прямой, перпендикулярной къ MM_1, проходящей черезъ конецъ N полярной поднормали данной кривой (§ 588). Координаты точки M_1 удовлетворяютъ обоимъ уравненіямъ, слѣдовательно, точка M_1 антиподэры данной кривой, соотвѣтствующая точкѣ M, есть проекція точки N на прямую MM_1. Изъ полученныхъ двухъ уравненій находимъ для координатъ точки M_1 выраженія

$$x = r \cos \theta - r' \sin \theta, \quad y = r \sin \theta + r' \cos \theta.$$

Исключая θ изъ этихъ двухъ уравненій, при чемъ r и r' будутъ извѣстныя функціи отъ θ, опредѣляемыя полярнымъ уравненіемъ данной кривой, мы и получимъ уравненіе антиподэры въ Декартовыхъ координатахъ. Если, обратно, дана будетъ кривая (M_1), то изъ опредѣленія ея подэры (M) извѣстно будетъ положеніе точки M, соотвѣтствующей точкѣ M_1, и вышеизложенныя соображенія даютъ возможность другимъ путемъ придти къ построенію касательной въ точкѣ M на подэрѣ (M). Въ самомъ дѣлѣ, эта касательная перпендикулярна къ нормали MN, а прямая MN получится, какъ прямая, проходящая черезъ M и середину QM_1. Далѣе, если желаемъ знать радіусъ кривизны кривой (M_1) въ точкѣ M_1 (на антиподэрѣ данной кривой (M), предполагая извѣстнымъ радіусъ кривизны послѣдней), то замѣчаемъ, что

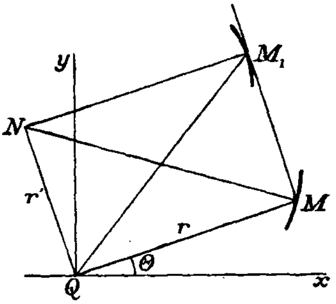

Рис. 75.

$$\frac{dx}{d\theta} = -(r + r'') \sin \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = (r + r'') \cos \theta.$$

Такъ какъ $d\theta$ есть уголъ смежности для кривой (M_1), то ея радіусъ кривизны $\varrho_1 = r + r''$ *). Итакъ, достаточно продолжить прямую M_1N на длину $NC_1 = r''$, чтобы получить въ точкѣ C_1 искомый центръ кривизны. Этотъ результатъ обыкновенно представляютъ въ другомъ видѣ, выражая ϱ_1 черезъ радіусъ векторъ $r_1 = QM_1$ и радіусъ

*) Въ самомъ дѣлѣ, $d\theta$ эквивалентенъ углу между двумя перпендикулярами къ двумъ безконечно близкимъ касательнымъ къ кривой (M_1), поэтому $d\theta = d\varphi$, $\varrho_1 = \dfrac{ds}{d\varphi} = \dfrac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{d\theta} = r + r''$.

кривизны ϱ данной кривой (M). Выраженіе ϱ получимъ по второй изъ формулъ (8), а именно

$$\varrho = \frac{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2+2r'^2-rr''} = \frac{r_1^3}{2r_1^2-r\varrho_1}.$$

Отсюда получается соотношеніе

$$\frac{r\varrho_1}{r_1^3} = \frac{2}{r_1} - \frac{1}{\varrho}, \tag{29}$$

которое и даетъ возможность построить C_1, когда извѣстно положеніе центра кривизны C данной кривой (M). (См. § 595, j).

628. Каустики (Kausticae). Представимъ себѣ, что изъ нѣкоторой точки Q выходятъ свѣтовые лучи, падаютъ на зеркало (M) и отъ него отражаются *) (рис. 76). Предѣльныя положенія точекъ пересѣченія каждыхъ двухъ безконечно близкихъ отраженныхъ лучей образуютъ свѣтящуюся линію, называемую каустикою по отраженію (катакаустикою). Каустика кривой (M) относительно полюса Q будетъ, слѣдовательно, огибающей лучей, выходящихъ изъ Q и отражающихся отъ (M) по извѣстному закону равенства угловъ паденія и отраженія. Лучъ, отраженный въ точкѣ M, пройдетъ черезъ точку L_1, симметрично расположенную съ Q относительно касательной въ точкѣ M $(ML_1 = QM$, $QM_1 = M_1L_1)$. Разсматривая еще кривую (L)—общее мѣсто точекъ L, симметричныхъ съ Q относительно точки M $(ML = MQ)$,—легко видѣть, что кривая (L_1) есть подэра кривой (L) относительно полюса Q. $[QL_1 \perp LL_1$, касательная къ (L) $LL_1 \parallel MM_1]$. Поэтому (§ 627) нормаль къ кривой (L_1) въ точкѣ L_1 пройдетъ черезъ середину QL, т. е. черезъ точку M. Слѣдовательно, всѣ отраженные лучи нормальны къ кривой (L_1), и огибающая ихъ есть эволюта этой кривой. Итакъ, каустика данной кривой есть эволюта подэры кривой, подобной данной, относительно свѣтящейся точки. Отсюда слѣдуетъ, что построеніе точекъ каустики приводится къ построенію центровъ кривизны (см. § 595, j) подэры кривой (L) относительно точки Q. При этомъ построеніи, какъ легко видѣть,

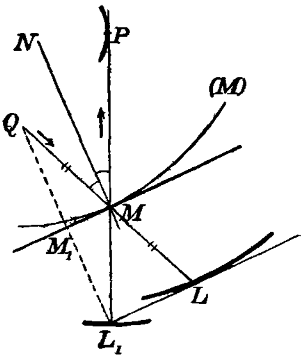

Рис. 76.

*) Точка Q, зеркало (M) и пучекъ падающихъ лучей предполагаются лежащими въ одной плоскости.

можно замѣнить кривую (L) данною кривою (M) *). Въ томъ случаѣ, когда свѣтовые лучи параллельны (свѣтящаяся точка въ безконечности) построеніе каустики особенно упрощается, потому что тогда имѣетъ мѣсто теорема: нормали къ каустикѣ, происходящей отъ пучка параллельныхъ лучей, дѣлятъ пополамъ радіусы кривизны зеркала въ соотвѣтствующихъ точкахъ.

[**Примѣчаніе.** Теорему эту нетрудно доказать аналитически. Направимъ ось y-овъ параллельно лучамъ, падающимъ на зеркало (M), и пусть $y = f(x)$ данное его уравненіе. Уголъ α, образуемый нормалью къ зеркалу въ точкѣ M съ падающимъ лучемъ, равенъ углу, образуемому касательною съ осью x-овъ, такъ что $\operatorname{tg}\alpha = y' = f'(x)$. Уголъ между падающимъ и отраженнымъ лучемъ будетъ равенъ 2α, а потому уголъ β, образуемый отраженнымъ лучемъ, будетъ равенъ $2\alpha + \frac{\pi}{2}$ (что прямо видно изъ чертежа); слѣдовательно,

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{2}\left(y' - \frac{1}{y'}\right)$$

и уравненіе отраженнаго луча будетъ

$$(1)\qquad Y - y = \frac{1}{2}\left(y' - \frac{1}{y'}\right)(X - x).$$

Если присоединимъ сюда уравненіе, полученное изъ (1) дифференцированіемъ по параметру x, и изъ полученныхъ двухъ уравненій исключимъ x, то получимъ уравненіе каустики. Это второе уравненіе будетъ $X - x = -\frac{y'}{y''}$, въ силу чего (1) даетъ $Y - y = -\frac{y'^2 - 1}{y''}$. Поэтому, обозначая черезъ (ξ, η) координаты точки P на каустикѣ, соотвѣтствующей точкѣ $M(x, y)$ на зеркалѣ, будемъ имѣть

$$(2)\qquad \xi = x - \frac{y'}{y''}, \quad \eta = y - \frac{y'^2 - 1}{y''}.$$

Нормаль къ каустикѣ въ точкѣ (ξ, η) перпендикулярна къ огибаемой (1), слѣдовательно, уравненіе этой нормали будетъ

$$(3)\qquad 2y'\left(X - x + \frac{y'}{y''}\right) = (1 - y'^2)\left(Y - y + \frac{y'^2 - 1}{y''}\right).$$

Самое простое вычисленіе покажетъ, что этому уравненію удовлетво-

---

*) Это утвержденіе не совсѣмъ точно. Точная формулировка полученнаго результата состоитъ въ слѣдующемъ: эволюта подэры данной кривой и ея каустики относительно одной и той же данной точки суть двѣ подобныя и подобнымъ образомъ расположенныя кривыя, при чемъ центръ подобія лежитъ въ данной точкѣ, а отношеніе подобія равно 1 : 2. (См. E. Weyr, „Ueber die Identität der Brennlinien mit den (Evolüten der) Fusspunktskurven". Zeitschrift für Math. und Physik, 1869, pag. 376).

ряютъ значенія $X=\frac{1}{2}(x_1+x)$, $Y=\frac{1}{2}(y_1+y)$, гдѣ $x_1=x-\frac{(1+y'^2)y'}{y''}$, $y_1=y+\frac{1+y'^2}{y''}$, координаты центра кривизны C зеркала въ точкѣ (x, y), что и доказываетъ теорему. Построеніе точки P сводится къ построенію перпендикуляра изъ середины CM къ отраженному отъ точки M лучу.]

Возвращаясь къ общему случаю точки Q на конечномъ разстояніи отъ зеркала и припоминая теорему о длинѣ дуги эволюты (§ 624), приходимъ къ слѣдующему заключенію: Если P и P' — точки каустики, соотвѣтствующія точкамъ M и M' зеркала, то $\smile PP'=\pm\left\{(QM+MP)-(QM'+M'P')\right\}$. Дѣйствительно, $QM+MP=L_1P$, т. е. радіусу кривизны кривой (L_1) въ точкѣ L_1, и аналогичное значеніе имѣетъ сумма $QM'+M'P'$, откуда и слѣдуетъ вышесказанное на основаніи § 624. Полученный результатъ можно формулировать такъ: длина дуги каустики равна разности между длинами путей, которые свѣтъ проходитъ отъ свѣтящейся точки до одного и другого конца дуги. Если, каковы бы ни были точки M и M' на зеркалѣ, $\smile PP'=0$, тогда

$$QM+MP=QM'+M'P,$$

и получается такое слѣдствіе: если хотимъ, чтобы лучи, выходящіе изъ точки Q, по отраженіи отъ зеркала M, сошлись въ одной точкѣ P, то необходимо, чтобы зеркало имѣло форму эллипса съ фокусами въ P и Q.

629. Упражненія. a) Возвращаясь къ вопросу объ антиподэрахъ, положимъ, что данная кривая есть улитка: $r=a\cos\theta+b$. Изъ этого уравненія вытекаетъ: $r+r''=b$, а этого достаточно, чтобы утверждать, что антиподэра есть кругъ радіуса b. Точно такъ же, если данная кривая — спираль Архимеда: $r=a\theta$, то $r'=a$, $r''=0$; точка N (рис. 75) есть центръ кривизны антиподэры (M_1), потому что $r''=0$, и всегда остается на окружности круга радіуса a, потому что $r'=a$. Итакъ, Архимедова спираль есть подэра эвольвенты круга. Это свойство, которое можно считать очевиднымъ (см. рис. 54), даетъ простой способъ построенія центра кривизны въ данной точкѣ M на Архимедовой спирали.

[**Примѣчаніе.** Отложивъ на перпендикулярѣ къ радіусу вектору MQ (рис. 75) длину $QN=a$, строимъ прямоугольникъ $MQNM_1$ и проводимъ его діагонали MN и M_1Q, проектируемъ N на QM_1 въ точку H и точку H на NM_1 въ точку L. Центръ кривизны C будетъ точка пересѣченія прямыхъ LQ и MN. Это прямо вытекаетъ изъ построенія центра кривизны подэры, указаннаго въ § 595, j. Полезно провѣрить это построеніе съ помощью второй формулы (8) для ρ, которая въ данномъ случаѣ даетъ

$$MC=\frac{(r^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2+2a^2}.]$$

b) Найдемъ антиподэру прямой линіи относительно данной точки Q (рис. 77). Примемъ данную прямую за ось y-овъ, а перпендикуляръ къ ней изъ точки Q за ось x-овъ. Тогда уравненіе прямой MM_1 будетъ $my=m^2x+\frac{1}{2}p$, гдѣ m обозначаетъ угловой коэффиціентъ (перемѣнный), а $\frac{1}{2}p$ — длину отрѣзка OQ (постоянную). Дифференцированіе по m даетъ $y=mx$, а исключеніе m даетъ далѣе $y^2=2px$. Слѣдовательно, антиподэра прямой относительно данной точки есть парабола съ фокусомъ въ данной точкѣ, касающаяся данной прямой въ вершинѣ. Этотъ результатъ, впрочемъ, можетъ быть выведенъ изъ построенія касательной, даннаго въ § 627. Въ самомъ дѣлѣ, это построеніе даетъ $\angle QM_1N = \angle NM_1H$, такъ что нормаль дѣлитъ уголъ QM_1H пополамъ; а съ другой стороны, на основаніи сказаннаго въ § 590, d вытекаетъ, что это свойство принадлежитъ исключительно параболѣ. Замѣтимъ еще, что въ настоящемъ случаѣ формула (29) обращается въ $r\varrho_1=2r_1^2$ ($\varrho=\infty$), такъ какъ въ прямоугольномъ треугольникѣ $LQM_1 - r_1^2 = r\cdot LM_1$, то точка L дѣлитъ радіусъ кривизны пополамъ. Такимъ образомъ снова получаемъ извѣстное уже построеніе (§ 595, k).

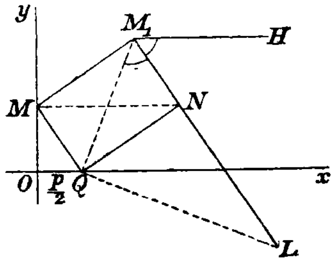

Рис. 77.

c) Когда свѣтовые лучи, выходящіе изъ Q, отражаются отъ кругового зеркала, то кривая (L) будетъ также кругъ, а слѣдовательно, кривая (L_1) — улитка (§ 590, c). Въ частности, если точка Q лежитъ на окружности даннаго круга, то она лежитъ и на окружности круга (L), и улитка будетъ кардіоидою, эволюта которой будетъ другою кардіоидою, втрое меньшею первой и обратно расположенною. Итакъ, каустика кругового зеркала, для пучка лучей, выходящихъ изъ нѣкоторой точки самого зеркала, есть кардіоида, касающаяся зеркала въ свѣтящей точкѣ Q; точка возврата этой кардіоиды дѣлитъ діаметръ, выходящій изъ Q, въ отношеніи 2:1. Если же лучи выходятъ изъ безконечности, то, какъ мы видѣли раньше, нормаль къ каустикѣ въ точкѣ P, соотвѣтствующей данной точкѣ M, на которую падаетъ лучъ, проходитъ черезъ середину N радіуса OM. Поэтому, когда построены окружности круга, проходящаго черезъ N съ центромъ въ O, и круга съ діаметромъ MN, то, какъ видимъ, кривую (P) можно разсматривать какъ рулетту, описываемую точкою P, когда второй кругъ безъ скольженія катится по первому. Итакъ, каустика кругового зеркала для пучка параллельныхъ лучей есть эпициклоида съ двумя точками возврата.

ПРИЛОЖЕНІЯ КЪ КРИВЫМЪ ДВОЯКОЙ КРИВИЗНЫ *).

Основныя формулы.

630. Касательная прямая и нормальная плоскость. Касательною въ данной точкѣ M какой угодно плоской или не плоской кривой называется прямая, съ которою стремится совпасть сѣкущая MM', когда, фиксируя точку M, заставимъ точку M'

*) Неплоская кривая называется кривою двоякой кривизны по причинѣ, которая выяснится впослѣдствіи (§ 638). На нѣмецкомъ языкѣ неплоскія кривыя называются витыми кривыми (gewundene Kurven), на французскомъ — косыми (courbes gauches). На русскомъ ни то, ни другое названіе не вошло въ употребленіе.

безпредѣльно приближаться къ M, оставаясь на данной кривой. Мы ограничимся здѣсь изученіемъ такихъ кривыхъ, для которыхъ имѣетъ мѣсто равенство:

$$\lim \frac{\smile MM'}{\text{хорда } MM'} = 1,$$

подобно тому, какъ это имѣло мѣсто для плоскихъ кривыхъ въ предыдущей главѣ. Такъ какъ направляющіе косинусы сѣкущей равны разностямъ δx, δy, δz между координатами точки M' и координатами (x, y, z) точки M, дѣленнымъ на длину отрѣзка MM', то, переходя къ предѣлу и замѣняя хорду MM' дугою $MM' = \delta s$, найдемъ, что направляющіе косинусы касательной въ точкѣ (x, y, z) опредѣляются формулами

$$(1) \qquad a = \frac{dx}{ds}, \quad b = \frac{dy}{ds}, \quad c = \frac{dz}{ds} \text{ *)}.$$

Формулы эти относятся къ положительному направленію касательной, которое всегда выбираемъ идущимъ въ сторону возрастающихъ дугъ s. Возвышая равенство (1) въ квадратъ и складывая, найдемъ

$$(2) \qquad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Если координаты x, y, z заданы, какъ функціи нѣкотораго параметра t, то сперва вычисляемъ ds по формулѣ

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

а затѣмъ по формуламъ (1) находимъ и направляющіе косинусы касательной. При этомъ беремъ положительное или отрицательное значенія корня квадратнаго, смотря по тому, будетъ ли s возрастать или убывать при возрастаніи t. Уравненія касательной будутъ

$$\frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy} = \frac{Z - z}{dz}.$$

Ихъ можно прямо писать, какъ уравненія прямой, проходящей черезъ точки (x, y, z) и $(x + dx, y + dy, z + dz)$. Полезно замѣтить еще другую форму уравненій касательной, примѣняемую съ удобствомъ въ томъ случаѣ, когда кривая задана двумя уравненіями вида:

$$\varphi(x, y, z) = 0, \quad \psi(x, y, z) = 0.$$

---

*) Для вывода этихъ формулъ можно воспользоваться разсужденіями, совершенно аналогичными тѣмъ, которыя приведены въ примѣчаніи къ § 591.

Такъ какъ $X-x$, $Y-y$, $Z-z$ пропорціональны дифференціаламъ dx, dy, dz, которыя связаны соотношеніями

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz=0$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi}{\partial y}dy+\frac{\partial\psi}{\partial z}dz=0,$$

то будемъ имѣть

$$(X-x)\frac{\partial\varphi}{\partial x}+(Y-y)\frac{\partial\varphi}{\partial y}+(Z-z)\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0,$$

$$(X-x)\frac{\partial\psi}{\partial x}+(Y-y)\frac{\partial\psi}{\partial y}+(Z-z)\frac{\partial\psi}{\partial z}=0.$$

Это и будетъ уравненіе касательной. Нормальною плоскостью въ точкѣ M называютъ общее мѣсто нормалей къ кривой въ этой точкѣ, т. е. перпендикуляровъ, возставленныхъ изъ M къ касательной. Уравненіе нормальной плоскости есть

$$(X-x)\,dx+(Y-y)\,dy+(Z-z)\,dz=0,$$

или, если кривая задана уравненіями $\varphi=0$, $\psi=0$, то

$$\begin{vmatrix} X-x & \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial x} \\ Y-y & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\psi}{\partial y} \\ Z-z & \frac{\partial\varphi}{\partial z} & \frac{\partial\psi}{\partial z} \end{vmatrix}=0.$$

631. Бинормаль и соприкасающаяся плоскость. Главная нормаль и спрямляющая плоскость. Когда точка M' стремится къ совпаденію съ M, то плоскость, проходящая черезъ касательную въ M и параллельная касательной въ M', можетъ и, вообще говоря, будетъ стремиться къ нѣкоторому предѣльному положенію. Это предѣльное положеніе опредѣляемой указаннымъ образомъ плоскости называютъ соприкасающеюся плоскостью (oskulierende Ebene) въ точкѣ M. Одна изъ безчисленнаго множества нормалей въ точкѣ M лежитъ въ этой плоскости и называется главною нормалью, другая перпендикулярна къ этой плоскости и называется бинормалью, потому что ее можно разсматривать, какъ перпендикуляръ къ двумъ безконечно близкимъ касательнымъ, т. е. какъ предѣльное положеніе общаго перпендикуляра къ касательнымъ въ точкахъ M и M'. Плоскость, проходящую черезъ касательную и бинормаль, называютъ спрямляющею плоскостью (rektifizierende Ebene).

[**Примѣчаніе.** На главной нормали и на бинормали, такъ же какъ на касательной, и вообще на всякой прямой, выбираютъ по произволу опредѣленное направленіе, которое называютъ положительнымъ, и когда говорятъ объ этихъ прямыхъ, то всегда подразумѣваютъ это направленіе, если не сказано противоположнаго. Вмѣстѣ съ тѣмъ различаютъ на нормальной, соприкасающейся, спрямляющей плоскости положительную и отрицательную сторону, при чемъ положительною называютъ ту, которая обращена въ ту же сторону, куда идетъ положительное направленіе перпендикуляра къ той или другой плоскости. То же самое относится и къ координатнымъ плоскостямъ.]

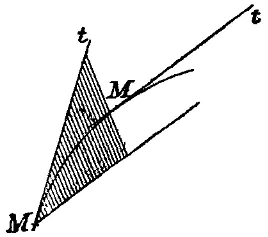

Рис. 78.

Рис. 79.

Три прямыя (касательная, бинормаль и главная нормаль) и три плоскости (нормальная, соприкасающаяся и спрямляющая) представляютъ собою соотвѣтственно ребра и грани трехграннаго угла, съ вершиною въ точкѣ M, который называется фундаментальнымъ или основнымъ тріэдромъ. Мы увидимъ впослѣдствіи, что для опредѣленія относительнаго положенія основныхъ тріэдровъ въ двухъ безконечно близкихъ точкахъ M и M' достаточно будетъ знать двѣ безконечно малыя величины ε и η, опредѣляемыя слѣдующимъ образомъ: ε есть дифференціалъ, эквивалентный углу между касательными въ точкахъ M и M', а η — дифференціалъ, эквивалентный углу между бинормалями въ этихъ точкахъ. Первый, ε называется угломъ смежности, второй η — угломъ крученія.

632. Теперь намъ нужно сдѣлать небольшое отступленіе. Положимъ, что дана нѣкоторая прямая, направляющіе косинусы (A, B, C) которой непрерывныя функціи независимой перемѣнной. Всегда можно найти дифференціалъ, эквивалентный безконечно малому углу между направленіями (A, B, C) и $(A+\delta A, B+\delta B,$

$C+\delta C$), т. е. направленіями, соотвѣтствующими значеніямъ t и $t+dt$ независимой перемѣнной. Для этого представимъ себѣ шаръ радіуса, равнаго 1, съ центромъ въ началѣ координатъ O, и проведемъ радіусы OP и OP', въ данныхъ направленіяхъ (A, B, C) и ($A+\delta A$, $B+\delta B$, $C+\delta C$). При измѣненіи t точка P опишетъ на поверхности шара нѣкоторую кривую. Уголъ между данными направленіями измѣряется дугою большого круга PP'. Ясно, что эта дуга эквивалентна хордѣ PP', которая въ свою очередь эквивалентна дугѣ PP' кривой линіи, описываемой точкой P; наконецъ, дуга PP' этой кривой эквивалентна дифференціалу дуги σ той же кривой, отсчитываемой отъ произвольно выбраннаго на кривой начала. Замѣчая теперь, что A, B, C будутъ, очевидно, равны координатамъ точки P (потому что $OP=1$), по формулѣ (2) найдемъ

$$d\sigma^2 = dA^2 + dB^2 + dC^2. \tag{3}$$

Къ другому замѣчательному выраженію $d\sigma$ придемъ, замѣтивъ, что $A^2+B^2+C^2=1$, $AdA+BdB+CdC=0$, вслѣдствіе чего (§ 30)

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ dA & dB & dC \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} \Sigma A^2 & \Sigma A\,dA \\ \Sigma A\,dA & \Sigma\,dA^2 \end{vmatrix} = d\sigma^2,$$

а потому

$$d\sigma^2 = (B\,dC - C\,dB)^2 + (Cd\,A - A\,dC)^2 + (A\,dB - Bd\,A)^2. \tag{4}$$

633. Обратимся теперь къ опредѣленію направленія главной нормали. Съ этой цѣлью замѣчаемъ слѣдующее: если направленіе (A, B, C) совпадаетъ съ направленіемъ касательной (a, b, c) къ данной кривой въ точкѣ M, то плоскость OPP' будетъ параллельна касательнымъ въ точкахъ M и M', и съ приближеніемъ M' къ M (при чемъ и P' стремится совпасть съ P, если a, b, c непрерывныя функціи отъ t), будетъ стремиться къ совпаденію съ соприкасающеюся плоскостью. Предѣльное положеніе прямой PP' будетъ касательная къ кривой (P) въ точкѣ P и потому перпендикулярно къ OP. Слѣдовательно, предѣльное положеніе прямой PP' будетъ параллельно не только соприкасающейся, но и нормальной плоскости, т. е. параллельно главной нормали. Примѣняя теперь формулы (1) къ кривой (P) (при чемъ $d\sigma=\varepsilon$, а x, y, z надо замѣнить черезъ a, b, c), находимъ для направляющихъ косинусовъ главной нормали формулы

$$\lambda = \frac{da}{\varepsilon}, \qquad \mu = \frac{db}{\varepsilon}, \qquad \nu = \frac{dc}{\varepsilon}. \tag{5}$$

634. Послѣ этого можно опредѣлить и направленіе бинормали. Оставляя пока положительное направленіе бинормали неопредѣленнымъ, обозначимъ направляющіе косинусы бинормали черезъ α, β, γ. Эти величины удовлетворяютъ условіямъ ортогональности относительно касательной и главной нормали

$$\Sigma\alpha a = \alpha a + \beta b + \gamma c = 0, \quad \Sigma\alpha\lambda = \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu = 0.$$

Присоединимъ къ этимъ двумъ уравненіямъ еще третье — условіе перпендикулярности касательной и главной нормали

$$\Sigma a\lambda = a\lambda + b\mu + c\nu = 0.$$

Эти три уравненія выражаютъ ортогональность опредѣлителя девяти основныхъ косинусовъ

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix}.$$

Значеніе этого опредѣлителя будетъ, слѣдовательно, равно ± 1. (§ 69). Но всегда можно*) выбрать положительное направленіе бинормали такъ, чтобы имѣло мѣсто равенство

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} = +1. \tag{6}$$

Геометрически такой выборъ положительнаго направленія бинормали сводится къ слѣдующему предположенію: Если мы совмѣстимъ основной тріэдръ съ тріэдромъ координатныхъ осей такимъ образомъ, что положительныя направленія касательной и главной нормали (выбираемыя по произволу) совпадутъ соотвѣтственно съ положительными направленіями осей x-овъ и z-овъ, то положительное направленіе бинормали совпадетъ съ положительнымъ направленіемъ оси y-овъ. Намъ извѣстно, что при вышеуказанномъ условіи (§ 70) каждый элементъ опредѣлителя (6) равенъ своему алгебраическому дополненію. Поэтому, пользуясь формулами (5), найдемъ, что направляющіе косинусы бинормали опредѣляются формулами

$$\frac{\alpha}{b\,dc - c\,db} = \frac{\beta}{c\,da - a\,dc} = \frac{\gamma}{a\,db - b\,da} = -\frac{1}{\varepsilon}. \tag{7}$$

Теперь мы можемъ написать и уравненіе соприкасающейся плоскости, а именно: $\Sigma(b\,dc - c\,db)(X - x) = 0$, или подробнѣе

$$(b\,dc - c\,db)(X - x) + (c\,da - a\,dc)(Y - y) + (a\,db - b\,da)(Z - z) = 0.$$

На основаніи формулъ (1) мы можемъ написать это уравненіе еще въ слѣдующемъ видѣ:

$$\begin{vmatrix} X - x & dx & d^2x \\ Y - y & dy & d^2y \\ Z - z & dz & d^2z \end{vmatrix} = 0.$$

*) Измѣняя, если понадобится, знаки чиселъ α, β, γ.

Отсюда видимъ, что соприкасающуюся плоскость въ точкѣ (x, y, z) можно разсматривать, какъ плоскость, проходяшую черезъ касательную въ этой точкѣ и черезъ точку

$$(x+dx+\tfrac{1}{2}d^2x,\quad y+dy+\tfrac{1}{2}d^2y,\quad z+dz+\tfrac{1}{2}d^2z).$$

[**Примѣчаніе.** Для того, чтобы уравненіе соприкасающейся плоскости могло быть представлено въ указанномъ видѣ, необходимо, во всякомъ случаѣ, предположить, что не всѣ коэффиціенты при $X-x$, $Y-y$, $Z-z$, т. е. не всѣ три минора, составленные изъ двухъ послѣднихъ столбцовъ, равны нулю. При этомъ предположеніи легко доказать существованіе соприкасающейся плоскости, которое мы выше допустили. Въ самомъ дѣлѣ, уравненіе плоскости, проходящей черезъ касательную въ точкѣ (x, y, z)

$$\text{(I)}\qquad \frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz}$$

и параллельной касательной въ точкѣ $(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z)$

$$\text{(II)}\qquad \frac{X-(x+\delta x)}{dx+\delta\, dx}=\frac{Y-(y+\delta y)}{dy+\delta\, dy}=\frac{Z-(z+\delta z)}{dz+\delta\, dz},$$

можетъ быть написана въ слѣдующемъ видѣ:

$$\text{(III)}\qquad \begin{vmatrix} X-x & dx & dx+\delta\, dx \\ Y-y & dy & dy+\delta\, dy \\ Z-z & dz & dz+\delta\, dz \end{vmatrix}=0 \text{ или } \begin{vmatrix} X-x & dx & \delta\, dx \\ Y-y & dy & \delta\, dy \\ Z-z & dz & \delta\, dz \end{vmatrix}=0.$$

Раздѣливъ послѣдній столбецъ на δs, переходя въ лѣвой части къ предѣлу при $\delta s=0$ и вновь умноживъ послѣдній столбецъ на $\delta s = ds$, мы и придемъ къ уравненію

$$\begin{vmatrix} X-x & dx & d^2x \\ Y-y & dy & d^2y \\ Z-z & dz & d^2z \end{vmatrix}=0.$$

Такъ какъ, по сдѣланному предположенію, это равенство, дѣйствительно, является уравненіемъ, то существованіе соприкасающейся плоскости доказано.]

635. Формулы (7) и (5) даютъ возможность вычислить направляющіе косинусы бинормали и главной нормали по даннымъ косинусамъ a, b, c, опредѣляющимъ направленіе касательной, такъ какъ уголъ смежности ε можетъ быть вычисленъ по одной изъ слѣдующихъ формулъ:

$$\varepsilon^2=da^2+db^2+dc^2,\quad \varepsilon^2=(b\,dc-c\,db)^2+(c\,da-a\,dc)^2+(a\,db-b\,da)^2.$$

При этомъ знакъ, съ которымъ беремъ отсюда ε, остается произвольнымъ, потому что измѣненіе этого знака въ формулѣ (7) и (5) влечетъ за собою измѣненіе знаковъ чиселъ α, β, γ и λ, μ, ν, такъ что значеніе опредѣлителя (6) не измѣняется. Если вмѣсто a, b, c были бы даны α, β, γ, то можно было бы вычислить уголъ крученія η по формуламъ

$$\eta^2 = d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2, \quad \eta^2 = (\beta d\gamma - \gamma d\beta)^2 + (\gamma d\alpha - \alpha d\gamma)^2 + (\alpha d\beta - \beta d\alpha)^2,$$

а затѣмъ, зная η, съ помощью формулъ, аналогичныхъ (7) и (5), опредѣлить направленіе двухъ другихъ реберъ основного тріэдра. Въ самомъ дѣлѣ, дифференцируя равенства $\Sigma a\alpha = 0$, $\Sigma \alpha^2 = 1$, при помощи (5) найдемъ

$$\Sigma a d\alpha = -\Sigma \alpha da = -\varepsilon \Sigma \alpha\lambda = 0, \quad \Sigma \alpha d\alpha = 0,$$

Слѣдовательно, $\frac{d\alpha}{\lambda} = \frac{d\beta}{\mu} = \frac{d\gamma}{\nu} = \pm\,\eta$, или, выбирая надлежащимъ образомъ знакъ у η,

$$\lambda = \frac{d\alpha}{\eta}, \quad \mu = \frac{d\beta}{\eta}, \quad \nu = \frac{d\gamma}{\eta}. \tag{8}$$

Далѣе, $\beta d\gamma - \gamma d\beta = (\beta\nu - \gamma\mu)\eta = a\eta$ и т. д., т. е.

$$\frac{a}{\beta d\gamma - \gamma d\beta} = \frac{b}{\gamma d\alpha - \alpha d\gamma} = \frac{c}{\alpha d\beta - \beta d\alpha} = \frac{1}{\eta}. \tag{9}$$

Замѣтимъ и здѣсь, что измѣненіе знака η или знаковъ α, β, γ въ (8) и (9) не нарушаетъ равенства (6).

[**Примѣчаніе**. Обращаемъ вниманіе читателя на одну особенность въ изложеніи Чезáро, отличающую его отъ принятаго въ большинствѣ руководствъ по Дифференціальной Геометріи. Разсматривая вмѣстѣ съ данною кривою (M) сферическую кривую (P), о которой здѣсь говорится въ §§ 632—633, или такъ называемую *сферическую указательницу*, ставятъ условіемъ, что дифференціалъ ея дуги $d\sigma$ берется съ тѣмъ же знакомъ, съ какимъ берется дифференціалъ ds дуги данной кривой, т. е. что σ и s одновременно возрастаютъ и убываютъ (см., напримѣръ, Гурса „Курсъ математическаго Анализа“, переводъ подъ ред. проф. Б. К. Млодзѣевскаго, т. I, стр. 506). Въ силу этого условія отношеніе $\frac{ds}{d\sigma}$ или $\frac{ds}{\varepsilon}$, такъ называемый *радіусъ первой кривизны* ϱ, оказывается всегда числомъ положительнымъ. Вмѣстѣ съ тѣмъ за положительное направленіе главной нормали берется положительное направленіе касательной къ сферической указательницѣ, которое не зависитъ отъ выбора положительнаго направленія на данной кривой (см. Гурса стр. 509). Чезáро этого условія не ставитъ и разсматриваетъ ϱ, какъ алгебраическое количество, которое можетъ быть какъ положительнымъ, такъ и отрицательнымъ, и оставляетъ выборъ положительнаго направленія главной нормали, равно какъ и положительнаго направленія касательной произвольнымъ, опредѣляя лишь положительное направленіе бинормали, при сдѣланномъ выборѣ первыхъ двухъ, условіемъ (6), которое можно назвать условіемъ конгруэнтности основного тріэдра Mt, Mb, Mn (рис. 79) съ тріэдромъ координатныхъ осей Ox, Oy, Oz. Подобная точка зрѣнія, конечно, допустима и ни къ какимъ противорѣчіямъ не ведетъ, но врядъ ли оправдывается какими нибудь особыми выгодами; нѣкоторыя изслѣдованія (какъ напримѣръ, изслѣдованія § 643) даже усложняются. Относительно условія (6) замѣтимъ еще слѣдующее. Когда положительныя направленія Mt, Mb, Mn совпадутъ съ положительными направленіями Ox, Oy, Oz (и точка M съ O), то $a=1$, $b=c=0$; $\beta=1$, $\alpha=\gamma=0$, $\nu=1$, $\lambda=\mu=0$ и опредѣлитель $(6)=+1$. Это значеніе онъ сохранитъ и при всякомъ другомъ положеніи основного тріэдра, потому что, будучи ортогональнымъ, онъ можетъ имѣть только значенія $+1$ или -1, а не обращаясь въ нуль и будучи непрерывною функціею отъ своихъ элементовъ, не можетъ мѣнять знака.]

636. Формулы Френѐ. Дифференцируя равенства $\Sigma a\lambda=0$, $\Sigma \alpha\lambda=0$ и $\Sigma\lambda^2=1$, принимая во вниманіе формулы (5) и (8), найдемъ

$$\Sigma a\,d\lambda=-\Sigma\lambda\,da=-\varepsilon\Sigma\lambda^2=-\varepsilon,$$

$$\Sigma \alpha\,d\lambda=-\Sigma\lambda\,d\alpha=-\eta\Sigma\lambda^2=-\eta$$

и $\Sigma\lambda d\lambda=0$. Слѣдовательно, $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ удовлетворяютъ системѣ уравненій

$$\left\{\begin{aligned} a\,d\lambda+b\,d\mu+c\,d\nu&=-\varepsilon\\ \alpha\,d\lambda+\beta\,d\mu+\gamma\,d\nu&=-\eta\\ \lambda\,d\lambda+\mu\,d\mu+\nu\,d\nu&=\ \ 0.\end{aligned}\right.$$

Опредѣлитель этой системы равенъ опредѣлителю (6); значеніе его равно 1 и каждый элементъ равенъ своему алгебраическому дополненію. Отсюда тотчасъ получаемъ формулы

$$d\lambda=-a\varepsilon-\alpha\eta,\quad d\mu=-b\varepsilon-\beta\eta,\quad d\nu=-c\varepsilon-\gamma\eta, \tag{10}$$

извѣстныя подъ названіемъ формулъ Френé. Въ совокупности съ формулами (5) и (8) онѣ показываютъ, что дифференціалы девяти фундаментальныхъ косинусовъ выражаются линейными функціями самыхъ косинусовъ; коэффиціенты въ этихъ выраженіяхъ зависятъ только отъ ε и η. Если обозначимъ еще черезъ ω дифференціалъ, эквивалентный углу между двумя безконечно близкими главными нормалями, то изъ формулъ (10) черезъ возвышеніе ихъ въ квадратъ и сложеніе получимъ $\omega^2=\varepsilon^2+\eta^2$. Свойство, выражаемое этимъ равенствомъ, легко получаемое также геометрически, извѣстно подъ именемъ теоремы Ланкре́ (Lancret).

637. Полезно замѣтить, что формулы, аналогичныя предыдущимъ, имѣютъ мѣсто для всякой системы трехъ ортогональныхъ направленій. Разсмотримъ сперва два произвольныя перемѣнныя направленія и назовемъ вращеніемъ перваго направленія относительно второго дифференціалъ ω, эквивалентный безконечно малому измѣненію направленія проэкціи перваго направленія на плоскость, параллельную обоимъ *) Предложимъ себѣ вычислить ω по даннымъ косинусамъ (A, B, C) и (A', B', C'), опредѣляющимъ первое и второе направленія. Проведемъ черезъ начало координатъ четыре прямыя, параллельныя и одинаково направленныя съ (A, B, C), (A', B', C'), $(A+\delta A, B+\delta B, C+\delta C)$ и проекціею послѣдняго направленія на плоскость, параллельную первымъ двумъ **). Пусть P, P', P'' будутъ точки пересѣченія первой, третьей и четвертой прямой съ поверхностью шара радіуса, равнаго единицѣ, съ центромъ въ началѣ координатъ. Тогда (A, B, C) будутъ координатами точки P, $(A+\delta A, B+\delta B, C+C\delta)$ координатами точки P', а потому δA, δB, δC будутъ, очевидно, проекціи элемента PP' на координатныхъ осяхъ. Элементъ PP'' эквивалентенъ дифференціалу ω, согласно опредѣленію послѣдняго. Этотъ элементъ можно разсматривать какъ проекцію элемента PP' на направленіе (l, m, n) элемента PP'', очевидно, перпендикулярное къ (A, B, C) ***). Поэтому, удерживая однѣ лишь дифференціальныя безконечно малыя, найдемъ

$$\omega=l\,dA+m\,dB+n\,dC.$$

Далѣе, если назовемъ черезъ φ уголъ между направленіями (A, B, C) и (A', B', C'), то, очевидно, будемъ имѣть

$$A'=A\cos\varphi+l\sin\varphi,\quad B'=B\cos\varphi+m\sin\varphi,\quad C'=C\cos\varphi+n\sin\varphi \text{ ****)}.$$

Умножая послѣднія равенства соотвѣтственно на dA, dB, dC и складывая, тотчасъ найдемъ

$$\omega\sin\varphi=A'dA+B'dB+C'dC.$$

Это и есть та формула, которая оказывается весьма полезною въ геометрическихъ и механическихъ приложеніяхъ. Если теперь напра-

---

*) Точнѣе говоря, безконечно малому углу между начальнымъ и измѣненнымъ направленіемъ этой проекціи.

**) Величины δA, δB, δC имѣютъ здѣсь то же значеніе, что и въ § 632.

***) PP'' есть проекція элемента PP' на направленіи элемента PP'', потому что $P'P''\perp$ плоскости OPP'', а слѣдовательно, и къ PP''.

****) Проектируемъ на оси Ox, Oy, Oz стороны прямоугольнаго треугольника, въ которомъ гипотенуза имѣетъ направленіе (A', B', C') и катеты направленія (A, B, C) и (l, m, n) и уголъ φ противолежитъ катету (l, m, n).

вленія (A', B', C') и (A'', B'', C'') образуютъ съ направленіемъ (A, B, C) ортогональную систему съ опредѣлителемъ, равнымъ единицѣ, то, обозначая черезъ ω' и ω'' соотвѣтственно вращенія направленія (A, B, C) относительно (A', B', C') и (A'', B'', C'') на основаніи вышеприведенной формулы будемъ имѣть

$$\Sigma A dA = 0, \quad \Sigma A' dA = \omega', \quad \Sigma A'' dA = \omega'',$$

откуда выводимъ

$$dA = A'\omega' + A''\omega'', \quad dB = B'\omega' + B''\omega'', \quad dC = C'\omega' + C''\omega''.$$

Далѣе, если обозначимъ черезъ ω дифференціалъ, эквивалентный абсолютному измѣненію направленія (A, B, C) въ пространствѣ, то съ помощью формулы (3) § 632 и предыдущихъ получимъ $\omega^2 = \omega'^2 + \omega''^2$. Въ частности, формулы (5) и (8) показываютъ, что абсолютное измѣненіе направленія касательной приводится къ вращенію ε относительно главной нормали, абсолютное измѣненіе направленія бинормали къ вращенію η около той же главной нормали. Формулы (10) показываютъ, напротивъ того, что абсолютное измѣненіе направленія главной нормали ω составляется изъ двухъ вращеній $-\varepsilon$ и $-\eta$ этой прямой относительно первыхъ двухъ.

О первой и второй кривизнѣ.

638. Какъ для плоскихъ, такъ и для неплоскихъ кривыхъ мѣрою первой кривизны или просто кривизны (Flexion) служитъ отношеніе $\frac{\varepsilon}{ds}$ или $\frac{d\sigma}{ds}$; аналогично этому отношеніе $\frac{\eta}{ds}$ принимается за мѣру второй кривизны или крученія (Torsion) данной кривой въ данной точкѣ. Она не встрѣчается при изученіи плоскихъ кривыхъ, потому что для нихъ она всегда равна нулю. Удерживая далѣе названіе радіуса кривизны для отношенія $\frac{ds}{\varepsilon}$, условились называть радіусомъ второй кривизны или крученія отношеніе $\tau = \frac{ds}{\eta}$. Введеніе опредѣленныхъ ϱ и τ во всѣ предыдущія формулы, вмѣсто безконечно малыхъ ε и η, дѣлается съ цѣлью придать этимъ формуламъ болѣе точную форму. Формулы (5), (8) и (10) принимаютъ видъ

$$(11)\qquad \begin{cases} \dfrac{da}{ds} = \dfrac{\lambda}{\varrho}, & \dfrac{d\alpha}{ds} = \dfrac{\lambda}{\tau}, \quad \dfrac{d\lambda}{ds} = -\dfrac{a}{\varrho} - \dfrac{\alpha}{\tau}, \\[2ex] \dfrac{db}{ds} = \dfrac{\mu}{\varrho}, & \dfrac{d\beta}{ds} = \dfrac{\mu}{\tau}, \quad \dfrac{d\mu}{ds} = -\dfrac{b}{\varrho} - \dfrac{\beta}{\tau}, \\[2ex] \dfrac{dc}{ds} = \dfrac{\nu}{\varrho}, & \dfrac{d\gamma}{ds} = \dfrac{\nu}{\tau}, \quad \dfrac{d\nu}{ds} = -\dfrac{c}{\varrho} - \dfrac{\gamma}{\tau}. \end{cases}$$

Принимая во вниманіе формулы (1), можно написать три формулы перваго столбца иначе, а именно:

$$(12)\qquad \lambda=\varrho\frac{d}{ds}\frac{dx}{ds},\quad \mu=\varrho\frac{d}{ds}\frac{dy}{ds},\quad \nu=\varrho\frac{d}{ds}\frac{dz}{ds},$$

или, если угодно, такъ:

$$(13)\quad \lambda=\varrho\left(\frac{d^2x}{ds^2}-\frac{dx}{ds}\frac{d^2s}{ds^2}\right),\ \mu=\varrho\left(\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{dy}{ds}\frac{d^2s}{ds^2}\right),\ \nu=\varrho\left(\frac{d^2z}{ds^2}-\frac{dz}{ds}\frac{d^2s}{ds^2}\right).$$

Точно такъ же, на основаніи формулъ (1), можно написать формулы (7) слѣдующимъ образомъ:

$$(14)\qquad \alpha=\varrho\left(\frac{dz}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{dy}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}\right),\quad \beta=\varrho\left(\frac{dx}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}-\frac{dz}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}\right),$$

$$\gamma=\varrho\left(\frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}-\frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}\right).$$

639. Вычисленіе первой кривизны. Формулы (1), (12) и (14) даютъ выраженія девяти фундаментальныхъ косинусовъ въ первыхъ и вторыхъ производныхъ отъ координатъ точки (x, y, z), считая извѣстнымъ значеніе ϱ. Это значеніе получится изъ тѣхъ же формулъ, потому что, возвышая въ квадратъ и складывая равенства (12), получаемъ

$$(15)\qquad \frac{1}{\varrho^2}=\left(\frac{d}{ds}\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{d}{ds}\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{d}{ds}\frac{dz}{ds}\right)^2,$$

или, если угодно, на основаніи (13),

$$\frac{1}{\varrho^2}=\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2-\left(\frac{d^2s}{ds^2}\right)^2.$$

Если примемъ s за независимую перемѣнную, то послѣдній членъ обратится въ нуль, и мы увидимъ, что и здѣсь, какъ и въ плоскихъ кривыхъ (§ 558, е), квадратъ кривизны равенъ суммѣ квадратовъ вторыхъ производныхъ отъ координатъ, взятыхъ по дугѣ. Если возвысимъ въ квадратъ равенства (14) и сложимъ, то получимъ другое выраженіе для ϱ:

$$(16)\quad \varrho=\frac{\pm(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(dy\,d^2z-dz\,d^2y)^2+(dz\,d^2x-dx\,d^2z)^2+(dx\,d^2y-dy\,d^2x)^2}}.$$

При постоянномъ z оно заключаетъ въ себѣ, какъ частный случай, извѣстное выраженіе для ϱ, чаще всего прилагаемое въ изслѣдованіи плоскихъ кривыхъ. Изъ формулъ (15) тотчасъ слѣдуетъ, что прямая есть единственная линія, имѣющая кривизну, равную нулю (во всѣхъ точкахъ). Въ самомъ дѣлѣ, $\frac{1}{\varrho}$ лишь тогда постоянно равно нулю, когда всѣ три вторыя производныя координатъ по s одновременно равны нулю. Тогда первыя производныя равны постояннымъ a, b, c, а отсюда, обозначая черезъ x_0, y_0, z_0 координаты точки, отъ которой считаютъ дуги s (т. е. такой, что при $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ и $s = 0$), найдемъ $x = as + x_0$, $y = bs + b_0$, $z = cs + c_0$. Исключая s, получаемъ

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c},$$

уравненія прямой, проходящей черезъ (x_0, y_0, z_0) въ направленіи (a, b, c).

640. Вычисленіе крученія. Изъ второго столбца формулъ (11), путемъ умноженія на λ, μ, ν и сложенія, получаемъ

$$\frac{1}{\tau} = \lambda \frac{d\alpha}{ds} + \mu \frac{d\beta}{ds} + \nu \frac{d\gamma}{ds}.$$

Съ другой стороны, дифференцируя формулу (14), имѣемъ

$$\frac{d\alpha}{ds} = \varrho \left(\frac{dz}{ds} \frac{d^3 y}{ds^3} - \frac{dy}{ds} \frac{d^3 z}{ds^3} \right) + \frac{\alpha}{\varrho} \frac{d\varrho}{ds} \quad \text{и т. д.}$$

Отсюда, принимая во вниманіе формулы (13), получаемъ

$$\frac{1}{\tau} = \varrho^2 \sum \frac{d^2 x}{ds^2} \left(\frac{dz}{ds} \frac{d^3 y}{ds^3} - \frac{dy}{ds} \frac{d^3 z}{ds^3} \right)$$

или

$$\frac{1}{\tau \varrho^2} = \begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{d^2 x}{ds^2} & \frac{d^3 x}{ds^3} \\ \frac{dy}{ds} & \frac{d^2 y}{ds^2} & \frac{d^3 y}{ds^3} \\ \frac{dz}{ds} & \frac{d^2 z}{ds^2} & \frac{d^3 z}{ds^3} \end{vmatrix}. \tag{17}$$

Эта важная формула даетъ величину крученія, когда извѣстна кривизна. Подставляя сюда выраженіе ϱ по формулѣ (16), можемъ также написать

$$\frac{1}{\tau} = \frac{(dy\, d^2 z - dz\, d^2 y)\, d^3 x + (dz\, d^2 x - dx\, d^2 z)\, d^3 y + (dx\, d^2 y - dy\, d^2 x)\, d^3 z}{(dy\, d^2 z - dz\, d^2 y)^2 + (dz\, d^2 x - dx\, d^2 z)^2 + (dx\, d^2 y - dy\, d^2 x)^2}.$$

Это и есть искомое выраженіе величины крученія. Изящнѣе можно представить его въ видѣ

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2 x & d^2 y & d^2 z \\ d^3 x & d^3 y & d^3 z \end{vmatrix}}{\begin{Vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2 x & d^2 y & d^2 z \end{Vmatrix}^2}.$$

Для плоскихъ кривыхъ, очевидно, крученіе постоянно равно нулю, если исключимъ прямую линію, для которой крученіе величина неопредѣленная, такъ какъ всякую плоскость, проходящую черезъ данную прямую, можно разсматривать какъ соприкасающуюся плоскость. Полезно замѣтить, что плоскія кривыя суть единственныя, для которыхъ крученіе постоянно равно нулю. Въ самомъ дѣлѣ, если крученіе постоянно равно нулю, то опредѣлитель въ правой части формулы (17) постоянно равенъ нулю, а отсюда (§ 375) слѣдуетъ, что при надлежащемъ выборѣ трехъ постоянныхъ α, β, γ, сумма $\Sigma \alpha dx = 0$, а потому $\Sigma \alpha x$, т. е. $\alpha x + \beta y + \gamma z = \text{const.}$, и кривая лежитъ въ плоскости. Это заключеніе, равно какъ и заключеніе, приведенное въ концѣ предыдущаго §, можно вывести также непосредственно изъ первыхъ двухъ столбцовъ формулъ (11) *).

641. Вычисленіе крученія можно вести также тѣмъ путемъ, какимъ было выведено выраженіе (15) для кривизны. Дѣйствительно, изъ формулъ (12) съ помощью дифференцированія получимъ

$$\lambda \frac{d}{ds}\frac{1}{\varrho} - \left(\frac{a}{\varrho} + \frac{a}{\tau}\right)\frac{1}{\varrho} = \frac{d}{ds}\frac{d}{ds}\frac{dx}{ds} \text{ и т. д.,}$$

а затѣмъ, возвышая въ квадратъ и складывая, найдемъ

$$\left(\frac{d}{ds}\frac{1}{\varrho}\right)^2 + \left(\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{\tau^2}\right)\frac{1}{\varrho^2} = \left(\frac{d}{ds}\frac{d}{ds}\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d}{ds}\frac{d}{ds}\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d}{ds}\frac{d}{ds}\frac{dz}{ds}\right)^2.$$

Къ этой формулѣ, которая также дастъ τ, когда ϱ извѣстно, можно также придти, возвышая въ квадратъ равенство (17), представивъ сперва правую часть въ болѣе общемъ видѣ

$$\begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{d}{ds}\frac{dx}{ds} & \frac{d}{ds}\frac{d}{ds}\frac{dx}{ds} \\ \frac{dy}{ds} & \frac{d}{ds}\frac{dy}{ds} & \frac{d}{ds}\frac{d}{ds}\frac{dy}{ds} \\ \frac{dz}{ds} & \frac{d}{ds}\frac{dz}{ds} & \frac{d}{ds}\frac{d}{ds}\frac{dz}{ds} \end{vmatrix},$$

что всегда возможно (§ 558, c).

Изслѣдованіе кривыхъ двоякой кривизны.

642. [**Примѣчаніе.** Въ дальнѣйшихъ изслѣдованіяхъ мы условимся разъ навсегда, что взаимное расположеніе координатныхъ осей характеризуется слѣдующимъ образомъ: Представимъ себѣ наблюдателя, стоящаго на плоскости Oxy по направленію положительной оси z-овъ и смотрящаго по направленію положительной

*) Этотъ выводъ имѣлъ бы то преимущество, что не нужна была бы ссылка на теорему Вронскаго [см. часть I, прим. XLIV (къ § 375) на стр. 428].

оси x-овъ; мы условимся, что для этого наблюдателя положительная ось y-овъ направлена вправо; иными словами, положительную ось y-овъ надо повернуть на уголъ въ 90° въ направленіи, противоположномъ движенію часовой стрѣлки, для того, чтобы она совпала съ положительною осью x-овъ. При этомъ условіи, согласно условію конгруентности (6) § 634, расположеніе реберъ основного тріэдра будетъ именно такое, какое изображено на рис. 79, а именно наблюдатель, стоящій на спрямляющей плоскости по положительному направленію главной нормали и смотрящій въ положительномъ направленіи касательной, увидитъ положительное направленіе бинормали вправо отъ себя. Такое соглашеніе дѣлается для того, чтобы можно было кратко и опредѣленно формулировать многіе изъ дальнѣйшихъ результатовъ.]

Когда извѣстны кривизна и крученіе въ данной точкѣ M на кривой, то опредѣлится и положеніе основного тріэдра въ точкѣ M', безконечно близкой къ M. Чтобы это показать, вычислимъ сперва разстояніе $\Sigma A\delta x$ отъ точки M' $(x+\delta x,\ y+\delta y,\ z+\delta z)$ до плоскости, проходящей черезъ M и перпендикулярной данному направленію $(A,\ B,\ C)$. При этомъ подъ разстояніемъ M' отъ этой плоскости понимается его алгебраическая величина, т. е. разстояніе, взятое съ $+$, для точекъ, лежащихъ съ одной стороны отъ плоскости и съ $-$, для точекъ съ другой стороны. Перемѣна знака этого разстоянія обозначаетъ переходъ точки M' съ одной стороны на другую. Разлагая δx, δy, δz по формулѣ Тэйлора (§ 564), всегда можно принять за независимую перемѣнную дугу s данной кривой; при такомъ предположеніи формулы (11) дадутъ

$$\frac{dx}{ds}=a,\quad \frac{d^2x}{ds^2}=\frac{\lambda}{\varrho},\quad \frac{d^3x}{ds^3}=\lambda\frac{d}{ds}\frac{1}{\varrho}-\left(\frac{a}{\varrho}+\frac{\alpha}{\tau}\right)\frac{1}{\varrho},\ \ldots,$$

а потому

$$\delta x=a\,ds+\frac{\lambda}{\varrho}\frac{ds^2}{2}+\left(\lambda\frac{d}{ds}\frac{1}{\varrho}-\left(\frac{a}{\varrho}+\frac{\alpha}{\tau}\right)\frac{1}{\varrho}\right)\frac{ds^3}{6}+\cdots$$

и окончательно

$$\Sigma A\delta x=\mathfrak{A}\,ds+\frac{\mathfrak{C}}{\varrho}\frac{ds^2}{2}+\left(\mathfrak{C}\frac{d}{ds}\frac{1}{\varrho}-\left(\frac{\mathfrak{A}}{\varrho}+\frac{\mathfrak{B}}{\tau}\right)\frac{1}{\varrho}\right)\frac{ds^3}{6}+\cdots,\tag{18}$$

гдѣ $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ обозначаютъ косинусы угловъ направленія $(A,\ B,\ C)$ съ ребрами основного тріэдра, т. е.

$$\mathfrak{A}=\Sigma Aa,\quad \mathfrak{B}=\Sigma A\alpha,\quad \mathfrak{C}=\Sigma A\lambda.$$

Только при $\mathfrak{A}=0$ правая часть формулы (18) есть безконечно малая второго порядка (относительно $MM'=ds$), и дѣлается безконечно малою выше второго порядка когда, кромѣ того, еще и $\mathfrak{C}=0$. Отсюда видимъ, что разстояніе точки M' отъ всякой плоскости, проходящей черезъ касательную въ точкѣ M, вообще безконечно малая второго порядка относительно дуги MM'; лишь одна изъ всѣхъ этихъ плоскостей отстоитъ отъ M' на безконечно маломъ разстояніи, по крайней мѣрѣ, третьяго порядка, а именно соприкасающаяся плоскость (при $\mathfrak{A}=0$, $\mathfrak{C}=0$, направленіе (A, B, C), очевидно, параллельно бинормали). Итакъ, можемъ сказать, что соприкасающаяся плоскость тѣснѣе всѣхъ другихъ плоскостей примыкаетъ къ кривой въ смежности съ точкою M.

643. Формулы (18) тотчасъ дадутъ выраженія координатъ u, v, w точки M' относительно основного тріэдра. Стоитъ только послѣдовательно совмѣщать направленіе (A, B, C) съ касательною ($\mathfrak{A}=1$, $\mathfrak{B}=\mathfrak{C}=0$), бинормалью ($\mathfrak{B}=1$, $\mathfrak{A}=\mathfrak{C}=0$) и главною нормалью ($\mathfrak{C}=1$, $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}=0$), чтобы получить, вѣрно до безконечно малыхъ третьяго порядка (относительно ds) включительно, координаты точки M' относительно нормальной, соприкасающейся и спрямляющей плоскости, а именно:

$$(19) \qquad u = ds - \frac{ds^3}{6\varrho^2}, \quad v = -\frac{ds^3}{6\varrho\tau}, \quad w = \frac{ds^2}{2\varrho} - \frac{ds^2\, d\varrho}{6\varrho^2}.$$

Эти формулы даютъ возможность изслѣдовать ходъ кривой въ смежности съ точкою M. Мы предположимъ, что въ этой точкѣ ни первая, ни вторая кривизна не равны нулю и замѣтимъ, что знаки чиселъ u, v, w при достаточно маломъ ds опредѣляются

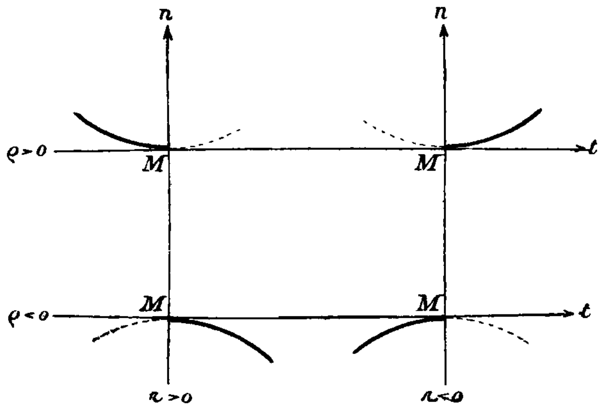

Рис. 80.

знакомъ члена наинизшей степени. Наблюдатель, идущій по кривой въ положительномъ направленіи касательной такъ, что положительное направленіе главной нормали проходитъ отъ ногъ къ головѣ, очевидно, увидитъ, что въ точкѣ M кривая поднимается или опускается, смотря по тому, будетъ ли $\varrho > 0$ или < 0 ($w > 0$ или < 0), и закручивается влѣво или вправо, смотря по тому, будутъ ли τ и ϱ одинаковыхъ или противоположныхъ знаковъ ($v < 0$ или $v > 0$). Кромѣ того, замѣчая, что замѣна ds на $-ds$ мѣняетъ знакъ v, не мѣняя ни знака w, ни знака разстоянія $\Sigma A\,\delta x$ вообще, если $\mathfrak{A} = 0$, а $\mathfrak{C}$ не $= 0$, мы видимъ, что всѣ точки достаточно малой дуги, въ смежности съ точкою M, лежатъ по одну сторону отъ всякой плоскости, проходящей черезъ касательную, за исключеніемъ соприкасающейся плоскости, которую кривая пересѣкаетъ. Четыре различныхъ вида, представляемыхъ кривою въ смежности съ точкою M, въ зависимости отъ знаковъ ϱ и τ, могутъ быть изображены такъ, какъ это сдѣлано на рис. 80, гдѣ пунктиромъ отмѣчены дуги, лежащія влѣво отъ нашего наблюдателя. Такимъ образомъ обнаруживается, что при $\tau < 0$, наблюдатель увидитъ кривую (при касаніи съ соприкасающеюся плоскостью), переходящею съ лѣвой ея стороны на правую поднимаясь или съ правой стороны на лѣвую опускаясь, такъ что въ обоихъ случаяхъ кривая будетъ вправо завитою или правою (dextrorsum). Это значитъ, что движеніе точки, удаляющейся по кривой въ положительномъ направленіи, представится глазу наблюдателя происходящимъ по направленію движенія часовой стрѣлки. При $\tau > 0$, наоборотъ, кривая будетъ влѣво завитою или лѣвою (sinistrorsum). Итакъ, въ смежности съ обыкновенною точкою (гдѣ ни $\frac{1}{\varrho}$, ни $\frac{1}{\tau}$ не равны 0), кривая будетъ правою при $\tau < 0$ и лѣвою при $\tau > 0$. Легко также убѣдиться, что тотъ или другой характеръ кривой не зависитъ отъ положенія наблюдателя въ пространствѣ. Примѣры кривыхъ съ положительнымъ или отрицательнымъ крученіемъ встрѣчаются въ природѣ[1]: хмѣль завивается влѣво, а виноградная лоза вправо.

[**Примѣчаніе.** Понятіе о правой и лѣвой кривой есть обобщеніе извѣстнаго понятія о правомъ и лѣвомъ винтѣ. Обыкновенная нарѣзка даетъ правую винтовую линію, моделью которой можетъ служить штопоръ. Нужно замѣтить, однако, что опредѣленія правой (dextrorsum) и лѣвой (sinistrorsum) кривой не установлены вполнѣ опредѣленно въ математической литературѣ: одни называютъ правою такую кривую, которая у другихъ называется лѣвою. Необходимо замѣтить, что установленное въ § 643 соотвѣтствіе между знакомъ крученія τ, опредѣляемаго формулою (17), и характеромъ (правымъ или лѣвымъ) кривой, измѣнится на противоположное (т. е. при $\tau > 0$ — правая, а при $\tau < 0$ — лѣвая), если измѣнимъ взаимное расположеніе координатныхъ осей или способъ совмѣщенія основного тріэдра съ координатнымъ тріэдромъ, т. е. условіе (6). (См., напр., Гурса „Курсъ" стр. 316). Замѣтимъ еще, что изслѣдованіе § 643 значительно упрощается, если условимся (какъ это обыкновенно и

[1]) Maxwell. „Lehrbuch der Electricität und des Magnetismus" (Bd. I. § 25).

дѣлается) направить положительную главную нормаль въ ту сторону отъ спрямляющей плоскости, съ которой лежатъ всѣ точки кривой, смежныхъ съ M. Тогда $w>0$, а слѣдовательно, и $\varrho>0$, и достаточно разсмотрѣть верхнюю часть рис. 80, и различать два случая $\tau<0$ и $\tau>0$, вмѣсто четырехъ. При $\tau=0$ кривая плоская и не выходитъ изъ соприкасающейся плоскости, т. е. плоскости самой кривой. При $\tau<0$ кривая пересѣкаетъ соприкасающуюся плоскость, переходя съ лѣвой стороны на правую для нашего наблюдателя (знакъ v переходитъ изъ $-$ въ $+$ при измѣненіи знака ds изъ $-$ въ $+$), при $\tau>0$ — наоборотъ.]

644. Съ помощью тѣхъ же формулъ (19) можно еще подробнѣе изслѣдовать кривую въ смежности съ данною точкою M. Для этого замѣтимъ сперва, что, помѣстивъ начало координатъ въ точку M, считая эту точку за начало счета дугъ, совмѣстивъ тріэдръ координатныхъ осей съ основнымъ тріэдромъ въ точкѣ M и пренебрегая безконечно малыми выше третьяго порядка, мы можемъ дугу данной кривой MM' разсматривать, какъ дугу кривой, изображаемой уравненіями

$$x=s-\frac{s^3}{6\varrho^2},\quad y=-\frac{s^3}{6\varrho\tau},\quad z=\frac{s^2}{2\varrho}-\frac{s^3}{6\varrho^2}\frac{d\varrho}{ds},$$

которыя получаются изъ (19) замѣною буквъ u, v, w буквами x, y, z и ds черезъ s. Значенія ϱ, τ и $\frac{d\varrho}{ds}$, входящія въ эти уравненія, конечно, обозначаютъ частныя значенія этихъ функцій при $s=0$, въ точкѣ M. Исключая перемѣнную s всѣми возможными способами, получимъ

$$y^2=\frac{2\varrho}{9\tau^2}z^3,\quad z=\frac{x^2}{2\varrho}-\frac{x^3}{6\varrho^2}\frac{d\varrho}{ds},\quad y=-\frac{x^3}{6\varrho\tau}.$$

Изъ этихъ уравненій видно, что проекція данной кривой на нормальную плоскость (Myz) имѣетъ въ M точку возврата, проекція на соприкасающуюся плоскость (Mxz) — обыкновенную точку, а проекція на спрямляющую плоскость (Myz) — точку изгиба. Далѣе, такъ какъ направляющіе косинусы касательной въ точкѣ M' равны производнымъ отъ x, y, z по s, а эти производныя, какъ легко видѣть, пропорціональны числамъ $x-\frac{2}{3}s$, y, $z-\frac{s^2}{6\varrho}$, то координаты любой точки (ξ, η, ς) на этой касательной можно изобразить формулами

$$\xi=kx+\frac{2}{3}(1-k)s,\quad \eta=ky,\quad \zeta=kz+(1-k)\frac{s^2}{6\varrho}.$$

Отсюда находимъ, что касательная въ точкѣ M' пересѣкаетъ соприкасающуюся въ точкѣ M плоскость (т. е. плоскость $\eta=0$)

въ точкѣ $\left(\frac{2}{3}s,\ \frac{s^2}{6\varrho}\right)$, лежащей съ той же стороны отъ спрямляющей плоскости, съ которой лежитъ M'. Спрямляющую плоскость ($\zeta=0$) эта касательная пересѣкаетъ въ разстояніи $-\frac{1}{2}y$ отъ соприкасающейся плоскости (изъ уравн. $\zeta=0$ получаемъ $k=-\frac{\frac{s^2}{6\varrho}}{z-\frac{s^2}{6\varrho}}=-\frac{1}{2}+\cdots$).

Отсюда слѣдуетъ, что касательныя въ двухъ безконечно близкихъ точкахъ не пересѣкаются и кратчайшее разстояніе между ними равно $\frac{ds^3}{12\varrho\mathfrak{r}}$. Эта теорема принадлежитъ Боннѐ (Bonnet).

645. Изъ предыдущихъ формулъ также выводимъ, что

$$\varrho z-\mathfrak{r}y\frac{d\varrho}{ds}=\frac{1}{2}s^2.$$

Если замѣнимъ здѣсь дугу $s\,(MM')$ хордою ея, т. е. s^2 черезъ $x^2+y^2+z^2$, то увидимъ, что эту дугу можно разсматривать, какъ дугу, лежащую на поверхности шара, изображаемаго уравненіемъ

$$x^2+\left(y+\mathfrak{r}\frac{d\varrho}{ds}\right)^2+(z-\varrho)^2=\mathfrak{R}^2,$$

гдѣ $\mathfrak{R}^2=\varrho^2+\left(\mathfrak{r}\frac{d\varrho}{ds}\right)^2$. Шаръ радіуса $\mathfrak{R}$ съ центромъ въ нормальной плоскости и въ разстоянія $-\mathfrak{r}\frac{d\varrho}{ds}$ и ϱ отъ соприкасающейся и спрямляющей плоскости называется соприкасающимся шаромъ къ данной кривой въ данной точкѣ M. Этотъ шаръ, по сравненію со всѣми другими шарами въ пространствѣ, тѣснѣе всего примыкаетъ къ данной кривой. Если бы мы отбросили и безконечно малыя 3-го порядка, то дугу MM' можно было бы разсматривать, какъ плоскую, лежащую въ соприкасающейся плоскости, а если отбросимъ и безконечно малыя 2-го порядка, то дугу MM' можно разсматривать просто, какъ прямолинейный отрѣзокъ на касательной. Поэтому въ изслѣдованіяхъ, въ которыхъ можно не обращать вниманія на безконечно малыя высшихъ порядковъ, позволительно разсматривать кривую, какъ ломанную $MM'M''M'''\ldots$ съ безконечно малыми сторонами, и разсматривать касательную, какъ прямую, на которой лежитъ одинъ элементъ MM', соприкасающуюся плоскость, какъ плоскость, опредѣляемую двумя послѣдовательными элементами MM' и $M'M''$, или тремя точками M, M', M'', и, наконецъ, соприкасающійся шаръ, какъ опредѣляемый четырьмя точками M, M', M'', M'''. Такая точка зрѣнія и такой способъ выраженія, хотя и не вполнѣ правильные, тѣмъ не менѣе могутъ быть полезны въ тѣхъ случаяхъ, когда хотятъ интерпретировать геометрически тѣ или другіе результаты Дифференціальнаго Исчисленія. Мы можемъ теперь легко констатировать, что для перехода отъ положенія фундаментальнаго тріэдра съ вершиною въ M къ смежному, съ вершиною въ M', надо сперва передвинуть вершину по касательной

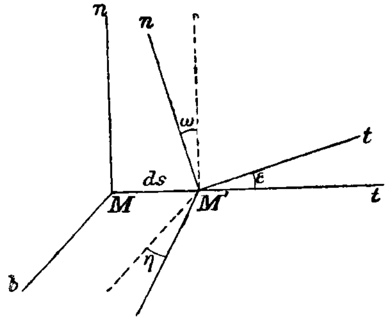

Рис. 81.

на величину ds, а затѣмъ дать ребрамъ его такія вращенія около вершины, чтобы косинусы ихъ направленій относительно первоначальныхъ t, b, n, получили бы слѣдующія значенія:

t' :	1	0	ε
b' :	0	1	η
n' :	$-\varepsilon$	$-\eta$	1

Это выводится изъ формулъ (5), (8) и (10), если положимъ въ нихъ $a=\beta=\nu=1$, $b=c=\gamma=\alpha=\lambda=\mu=0$, или еще строже съ помощью соображеній § 637.

[**Примѣчаніе.** Для поясненія сказаннаго разсмотримъ, напримѣръ, главную нормаль, направляющіе косинусы которой обозначены черезъ λ, μ, ν. Когда совмѣстимъ основной тріэдръ точки M съ координатнымъ тріэдромъ такъ, какъ сказано въ § 634, т. е. Mt съ Ox, Mb съ Oy, Mn съ Oz, то получимъ $a=1$, $b=c=0$; $\beta=1$, $\alpha=\gamma=0$; $\nu=1$, $\lambda=\mu=0$. При переходѣ отъ M къ M' λ, μ, ν обратятся въ $\lambda+d\lambda$, $\mu+d\mu$, $\nu+d\nu$, гдѣ $d\lambda$, $d\mu$ и $d\nu$ опредѣлятся по формуламъ (10), а λ, μ, ν имѣютъ указанныя выше начальныя значенія, слѣдовательно

$$\lambda+d\lambda=0-1.\varepsilon-0.\eta=-\varepsilon$$

$$\mu+d\mu=0-0.\varepsilon-1.\eta=-\eta$$

$$\nu+d\nu=1-0.\varepsilon-0.\eta=-1$$

Эти значенія и даны въ таблицѣ косинусовъ главной нормали n'. Такимъ же образомъ получаются значенія косинусовъ для t' и b' изъ формулъ (5) и (8).]

646. Особенности. Все, сказанное въ предыдущихъ §§, справедливо лишь въ томъ предположеніи, что разсматриваемая точка на кривой есть обыкновенная точка. Выведенныя заключенія теряютъ силу для точекъ, координаты которыхъ удовлетворяютъ условію

$$\begin{vmatrix} dx & d^2x & d^3x \\ dy & d^2y & d^3y \\ dz & d^2z & d^3z \end{vmatrix} = 0 \tag{20}$$

(см. § 604). Такія точки аналогичны точкамъ изгиба плоскихъ кривыхъ; въ нихъ, на основаніи формулы (17), по крайней мѣрѣ, одна изъ кривизнъ равна нулю, а потому координата v будетъ безконечно малою порядка, выше третьяго. Чтобы вычислить эту координату, надо продолжить вычисленіе, начатое въ § 642. Изъ выраженія $\frac{d^3x}{ds^3}$ и формулъ (11) найдемъ

$$\frac{d^4x}{ds^4} = -3\frac{a}{\varrho}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\varrho}\right) - a\varrho\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\tau\varrho^2}\right) + \lambda\left[\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{\varrho}\right) - \left(\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{\tau^2}\right)\frac{1}{\varrho}\right], \tag{21}$$

Отсюда, на основаніи условій

$$\Sigma a\alpha = 0, \quad \Sigma\lambda a = 0, \quad \Sigma a^2 = 1,$$

тотчасъ находимъ

$$v = \frac{1}{24}\Sigma a d^4x = -\frac{\varrho ds^3}{24} d\frac{1}{\tau\varrho^2},$$

вѣрно до безконечно малыхъ четвертаго порядка включительно. Слѣдовательно, если

$$\frac{1}{\varrho} = 0, \text{ но } d\left(\frac{1}{\varrho}\right) \gtreqless 0, \text{ то } v = -\frac{ds^3}{12\tau} d\left(\frac{1}{\varrho}\right).$$

а если

$$\frac{1}{\tau} = 0, \text{ но } d\left(\frac{1}{\tau}\right) \gtreqless 0, \text{ то } v = -\frac{ds^3}{24\varrho} d\left(\frac{1}{\tau}\right) {}^{*}).$$

Изъ этихъ формулъ вытекаетъ слѣдующее заключеніе: Точки кривой, смежныя съ точкою M, удовлетворяющею условію (20), лежатъ по одну сторону отъ соприкасающейся плоскости (v не мѣняетъ знака при замѣнѣ ds на $-ds$). При этомъ, всѣ эти точки лежатъ слѣва отъ соприкасающейся плоскости (для наблюдателя § 643), если та кривизна, которая равна нулю въ точкѣ M, принимаетъ затѣмъ знакъ, оди-

---

*) Выраженіе v можно написать и такъ:

$$v = -\frac{ds^4}{12\tau}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\varrho}\right) \text{ или } v = -\frac{ds^3}{24\varrho}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\tau}\right).$$

наковый со знакомъ другой кривизны въ точкѣ M, и справа, въ противномъ случаѣ ($v<0$, если $\frac{1}{\tau}$ и $\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\varrho}\right)$ въ точкѣ M одинаковыхъ знаковъ, $v>0$, въ противномъ случаѣ). Если въ точкѣ M обѣ кривизны равны нулю, то v будетъ безконечно малою не ниже пятаго порядка. Дѣйствительно, дифференцируя формулу (21), при сдѣланныхъ предположеніяхъ, легко найдемъ

$$v=\frac{1}{120}\Sigma\, a\, d^5x=-\frac{ds^3}{40}\, d\frac{1}{\varrho}\, d\frac{1}{\tau},$$

или

$$v=-\frac{ds^5}{40}\cdot\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\tau}\right).$$

Отсюда видимъ, что въ данномъ случаѣ соприкасающаяся плоскость въ точкѣ M пересѣкаетъ кривую, какъ въ обыкновенной точкѣ, и данная точка M будетъ точкою изгиба и для проекціи данной кривой на нормальную плоскость *). Изъ всѣхъ точекъ, для которыхъ имѣетъ мѣсто условіе (20), особенно замѣчательны тѣ, для которыхъ только первая кривизна $\frac{1}{\varrho}$ равна нулю. Въ нихъ происходитъ прямо противоположное тому, что имѣетъ мѣсто въ обыкновенныхъ точкахъ, а именно: кривая пересѣкаетъ всѣ плоскости, проходящія черезъ точку M, за исключеніемъ соприкасающейся. Это происходитъ отъ того, что въ то время, какъ v будетъ, какъ мы видѣли, безконечно малою четвертаго порядка, w будетъ третьяго порядка, и мѣняетъ вмѣстѣ съ u свой знакъ при замѣнѣ ds на $-ds$. Отсюда далѣе слѣдуетъ, что точка M будетъ точкою изгиба для проекціи кривой на соприкасающуюся, а не на спрямляющую плоскость. Такія точки дѣйствительно, въ силу этого обстоятельства, аналогичны точкамъ изгиба плоскихъ кривыхъ. Далѣе, точка M будетъ точкою возврата для проекціи кривой на нормальную плоскость, какъ въ случаѣ $\frac{1}{\varrho}=0$, такъ и въ случаѣ $\frac{1}{\tau}=0$ $\left(\text{при } \frac{1}{\varrho}\gtrless 0\right)$; но въ первомъ случаѣ это будетъ точка возврата перваго, а во второмъ—второго рода (§ 608). Труднѣе изслѣдованіе кривыхъ въ такихъ особенныхъ точкахъ, въ которыхъ ϱ и τ обращаются въ нуль, потому что тогда теряютъ смыслъ вышеприведенныя разложенія координатъ u, v, w, такъ какъ при выводѣ ихъ мы пользовались формулами, въ которыхъ существенную роль играетъ предположеніе, что обѣ кривизны числа конечныя.

---

*) Въ этомъ легко убѣдиться, составивъ уравненіе этой проэкціи подобно тому, какъ это было сдѣлано въ § 644.

[**Примѣчаніе.** Для поясненія изложеннаго положимъ, что въ точкѣ M $\frac{1}{\varrho}=0$, а $\frac{1}{\tau}>0$. Такъ какъ по условію $\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\varrho}\right)$ не равно нулю, то $\frac{1}{\varrho}$ непремѣнно измѣняетъ знакъ при переходѣ отъ точекъ, для которыхъ $ds<0$ къ тѣмъ, у которыхъ $ds>0$, т. е. при движеніи въ положительномъ направленіи по кривой. Если знакъ $\frac{1}{\varrho}$ переходитъ изъ $-$ въ $+$, т. е. принимаетъ знакъ, одинаковый съ $\frac{1}{\tau}$, то $\frac{1}{\varrho}$ возрастаетъ и $\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\varrho}\right)>0$, а тогда формула

$$v=-\frac{ds^4}{12\tau}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\varrho}\right)$$

даетъ $v<0$, каковъ бы ни былъ знакъ ds. Слѣдовательно, всѣ точки, смежныя съ M, будутъ съ лѣвой стороны отъ соприкасающейся плоскости (со стороны отрицательнаго направленія бинормали).]

Касаніе кривыхъ съ поверхностями.

647. Въ заключеніе сдѣлаемъ нѣкоторыя указанія по вопросу о касаніи кривой линіи съ поверхностью, отсылая читателя для подробнаго ознакомленія съ вопросами о касаніи кривой линіи съ поверхностью или съ другою кривою къ другимъ сочиненіямъ [1]. Чтобы развить по возможности быстро и наглядно теорію касаній, мы будемъ опираться на нѣкоторые результаты, полученные нами раньше (§ 616) при изученіи касанія плоскихъ кривыхъ. Мы будемъ сообразно этому говорить, что нѣкоторая поверхность имѣетъ съ данною кривою въ точкѣ M касаніе n-го порядка, если эту поверхность можно разсматривать, какъ предѣльное положеніе поверхности, проходящей черезъ точку M и n другихъ точекъ той же кривой, когда эти n точекъ (и никакія другія) стремятся къ совпаденію съ точкою M. Если эта поверхность принадлежитъ къ числу тѣхъ, которыя въ трехмѣрномъ пространствѣ опредѣляются $n+1$ точками, или, что сводится къ тому же, если эта поверхность принадлежитъ къ семейству, общее уравненіе котораго заключаетъ въ себѣ $n+1$ произвольныхъ параметровъ, то порядокъ касанія вообще не можетъ быть больше n. Когда этотъ порядокъ касанія достигнуть, то говорятъ, что разсматриваемая поверхность, есть с о п р и к а с а ю щ а я с я къ данной кривой въ данной точкѣ. Чтобы получить аналитическія условія соприкасанія поверхности съ данною кривою въ данной точкѣ, очевидно, достаточно продифференцировать уравненіе поверхности столько разъ, сколько нужно для полученія достаточнаго для

[1]) См., напр., Hermite „Cours d'Analyse" (p. 116).

опредѣленія параметровъ числа уравненій, и написать, что всѣ эти уравненія удовлетворяются координатами точки $M(x, y, z)$ и ихъ дифференціалами. Такимъ образомъ, дѣйствительно, пользуясь обыкновеннымъ условнымъ способомъ выраженія (§ 645), мы выражаемъ, что поверхность проходитъ черезъ точку M и n безконечно близкихъ къ ней точекъ M', M'' ... на кривой.

648. Соприкасающаяся плоскость. Общее уравненіе плоскости

$$AX+BY+CZ+D=0$$

содержитъ въ дѣйствительности три произвольныхъ параметра, а именно: отношенія трехъ коэффиціентовъ къ четвертому, не равному нулю. Выражая, что это уравненіе и два другихъ, полученныхъ дифференцированіемъ по дугѣ s данной кривой, удовлетворяются координатами x, y, z точки M на кривой, получаемъ

$$Ax+By+Cz+D=0,\quad Aa+Bb+Cc=0,\quad A\lambda+B\mu+C\nu=0. \tag{22}$$

гдѣ a, b, c, λ, μ, ν имѣютъ извѣстныя изъ предыдущихъ §§ значенія. Первое уравненіе требуетъ только того, чтобы плоскость проходила черезъ точку M, если присоединимъ второе, то плоскость будетъ уже проходитъ черезъ касательную въ точкѣ M. Поэтому всякую плоскость, проходящую черезъ эту касательную, можно назвать касательною плоскостью, какъ имѣющую съ кривою касаніе перваго порядка; разстояніе точки M', безконечно близкой къ M на кривой, отъ этой плоскости будетъ безконечно малою 2-го порядка относительно MM'. Если присоединимъ еще третье изъ уравненій (22). то разсматриваемая плоскость должна будетъ пройти и черезъ главную нормаль, т. е. совпасть съ тою, которую мы уже раньше назвали соприкасающеюся плоскостью. Порядокъ касанія съ кривой равенъ двумъ, но въ исключительныхъ точкахъ можетъ быть и выше. Тогда плоскость будетъ имѣть съ кривою пересоприкасаніе или, какъ иначе говорятъ, будетъ стаціонарною соприкасающеюся плоскостью *).

649. Стаціонарная соприкасающаяся плоскость получается, очевидно, въ тѣхъ особенныхъ точкахъ, которыя характеризуются условіемъ, получаемымъ черезъ исключеніе A, B, C изъ уравненій (22) съ присоединеніемъ къ нимъ того, которое найдемъ продифференцировавъ послѣднее изъ нихъ. Но, чтобы быть увѣреннымъ, что ни одинъ изъ возможныхъ случаевъ не будетъ пропущенъ, надо сперва замѣтить, что дифференцированіе второго изъ уравненій (22) даетъ, собственно говоря, слѣдующее уравненіе

$$(A\lambda+B\mu+C\nu)\frac{1}{\varrho}=0. \tag{23}$$

*) Гурса. „Курсъ математическаго Анализа“, стр. 491.

Поэтому слѣдующее дифференцированіе дастъ (принимая во вниманіе формулы (11) и второе изъ уравненій (22))

$$(24)\qquad (A\lambda + B\mu + C\nu)\frac{d}{ds}\frac{1}{\varrho} = (A\alpha + B\beta + C\gamma)\frac{1}{\varrho\tau}\cdot$$

Если $\frac{1}{\varrho}$ не равно 0, то $\Sigma A\lambda = 0$, а потому можно положить $A = a$, $B = \beta$, $C = \gamma$, и условіе (24) дастъ тогда $\frac{1}{\tau} = 0$. Въ противномъ случаѣ $\left(\frac{1}{\varrho} = 0\right)$ уравненіе (23) удовлетворится при произвольныхъ значеніяхъ A, B, C. Тогда всякая касательная плоскость будетъ имѣть касаніе 2-го порядка съ кривою. Изъ этихъ плоскостей соприкасающеюся будетъ та, для которой выполнено условіе (24). Такъ какъ это условіе вообще (т. е., если $\frac{d}{ds}\cdot\frac{1}{\varrho}$ не равно 0) принимаетъ опять видъ $\Sigma A\lambda = 0$, то получается опять соприкасающаяся плоскость, но касаніе будетъ, по крайней мѣрѣ, 3-го порядка. Всегда нужно при этомъ помнить, что всѣ примѣняемыя здѣсь формулы и выводимыя изъ нихъ заключенія только тогда справедливы, когда обѣ кривизны конечны. Итакъ, стаціонарныя соприкасающіяся плоскости получаются въ тѣхъ точкахъ кривой, въ которой, по крайней мѣрѣ, одна изъ кривизнъ равна нулю, т. е., когда выполняется условіе (20). Впрочемъ, если оставимъ въ сторонѣ вопросъ о различныхъ положеніяхъ кривой относительно пере-соприкасающейся плоскости, то можемъ быстрѣе получить условіе (20) при помощи дифференцированія, написать второе изъ уравненій (22) въ видѣ $\Sigma A dx = 0$ и исключая A, B, C изъ этого уравненія и слѣдующихъ двухъ: $\Sigma A d^2x = 0$, $\Sigma A d^3x = 0$.

650. Соприкасающійся шаръ. Исходя изъ общаго уравненія поверхности шара

$$(X-\xi)^2 + (Y-\eta)^2 + (Z-\zeta)^2 = \mathfrak{R}^2$$

(гдѣ ξ, η, ζ, $\mathfrak{R}$ параметры, которые надо надлежащимъ образомъ опредѣлить), дифференцируя по дугѣ s данной кривой и подставляя вмѣсто X, Y, Z координаты точки $M(x, y, z)$ на кривой, найдемъ, примѣняя извѣстныя обозначенія, слѣдующія уравненія

$$(25)\qquad \left\{\begin{aligned} &(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2 = \mathfrak{R}^2,\\ &a(x-\xi) + b(y-\eta) + c(z-\zeta) = 0,\\ &\lambda(x-\xi) + \mu(y-\eta) + \nu(z-\zeta) = -\varrho,\\ &\alpha(x-\xi) + \beta(y-\eta) + \gamma(z-\zeta) = \tau\frac{d\varrho}{ds}\cdot \end{aligned}\right.$$

Изъ трехъ послѣднихъ уравненій получаемъ, припоминая сказанное объ опредѣлителѣ (6),

$$(26)\qquad \begin{cases} x-\xi=-\lambda\varrho+\alpha\tau\dfrac{d\varrho}{ds}, \\[2ex] y-\eta=-\mu\varrho+\beta\tau\dfrac{d\varrho}{ds}, \\[2ex] z-\zeta=-\nu\varrho+\gamma\tau\dfrac{d\varrho}{ds}, \end{cases}$$

откуда и находимъ координаты ξ, η, ζ центра шара. Подставляя въ первое уравненіе, получимъ для величины радіуса формулу

$$(27)\qquad \mathfrak{R}^2=\varrho^2+\left(\tau\frac{d\varrho}{ds}\right)^2.$$

Опредѣленный такимъ образомъ шаръ и есть тотъ, который намъ встрѣтился въ началѣ § 645, это видно изъ того, что послѣднія три изъ уравненій (25) выражаютъ, что центръ шара лежитъ въ нормальной плоскости, въ разстояніи ϱ отъ бинормали и $-\tau\dfrac{d\varrho}{ds}$ отъ главной нормали. Этотъ шаръ есть предѣльное положеніе шара, проходящаго черезъ M, M', M'' и M''', когда послѣднія три точки стремятся къ совпаденію съ первою. Предѣльное положеніе круга $MM'M''$, очевидно, есть кругъ, лежащій на поверхности предѣльнаго шара, а такъ какъ плоскость этого круга стремится къ совпаденію съ соприкасающеюся плоскостью, то соприкасающійся кругъ есть пересѣченіе поверхности соприкасающагося шара съ соприкасающеюся плоскостью. Слѣдовательно, ϱ есть радіусъ соприкасающагося круга, и первая кривизна какой угодно кривой равна кривизнѣ соприкасающагося круга, какъ и для плоской кривой. Возвращаясь къ условіямъ (25), замѣтимъ, что первое заставляетъ шаръ пройти черезъ M, второе — касаться кривой въ точкѣ M, третье — проходить черезъ соприкасающійся кругъ. Четвертое же условіе изъ всѣхъ шаровъ, касающихся кривой въ точкѣ M и тамъ же ее пересѣкающихъ, выдѣляетъ одинъ, который кривую не пересѣкаетъ, такъ какъ имѣетъ съ нею касаніе вообще третьяго порядка; это и есть соприкасающійся шаръ.

651. Чтобы узнать, лежитъ ли кривая въ смежности съ точкою M внѣ или внутри соприкасающагося шара, вычислимъ разстояніе h точки M отъ его поверхности. Предполагая радіусъ $\mathfrak{R}$ конечнымъ, изъ равенства

$$(\mathfrak{R}+h)^2=(x-\xi+\delta x)^2+(y-\eta+\delta y)^2+(z-\zeta+\delta z)^2,$$

пренебрегая безконечно малыми выше 4-го порядка, выводимъ

$$\mathfrak{R}h=\Sigma(x-\xi)\,\delta x+\tfrac{1}{2}\Sigma\,\delta x^2.$$

Обозначая опять, какъ въ § 643, черезъ u, v, w координаты точки M' относительно фундаментальнаго тріэдра, имѣемъ

$$\delta x = a u + \alpha v + \lambda w, \quad \delta y = b u + \beta v + \mu w, \quad \delta z = c u + \gamma v + \nu w,$$

а принимая формулы (26) и условія ортогональности, найдемъ

$$\mathfrak{R} h = - w \varrho + v \tau \frac{d\varrho}{ds} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2).$$

Въ этой формулѣ, на основаніи (19), можно пренебречь числомъ v^2, ограничиться первымъ членомъ въ w^2, и вычислить u только до членовъ 3-го порядка; но въ w и v надо знать и члены 4-го порядка, а этого легко достигнуть съ помощью формулы (21). Мы найдемъ

$$v = \left(-1 + \frac{d\varrho}{2\varrho} + \frac{d\tau}{4\tau}\right)\frac{ds^3}{6\varrho\tau},$$

$$w = \frac{ds^2}{2\varrho} - \frac{ds^2\, d\varrho}{6\varrho^2} - \left(\varrho\frac{d^2\varrho}{ds^2} - 2\left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2 + 1 + \frac{\varrho^2}{\tau^2}\right)\frac{ds^4}{24\varrho^3}.$$

Полагая для сокращенія $\varkappa = \frac{\varrho}{\tau} + \frac{d}{ds}\left(\tau\frac{d\varrho}{ds}\right)$, легко находимъ

$$\mathfrak{R} h = \frac{\varkappa\, ds^4}{24\varrho\tau}, \tag{28}$$

а такъ какъ дифференцированіе формулы (27) даетъ еще

$$\mathfrak{R} d\mathfrak{R} = \varkappa\tau d\varrho, \tag{29}$$

то окончательно находимъ

$$h = \frac{ds^4\, d\mathfrak{R}}{24\varrho\tau^2 d\varrho}.$$

Итакъ, если исключимъ тѣ точки, въ которыхъ $d\varrho = 0$, то достаточно малая дуга кривой, взятая въ смежности съ M, будетъ вся внѣ или вся внутри соприкасающагося шара въ точкѣ M, смотря по тому, будутъ ли объемъ шара и площадь соприкасающагося круга одновременно возрастать или убывать или измѣняться въ различномъ смыслѣ.

652. Чтобы найти условіе, при которомъ происходитъ пересоприкасаніе шара съ кривой, т. е. при которомъ порядокъ касанія кривой съ ея соприкасающимся шаромъ будетъ выше третьяго, нужно только продифференцировать послѣднюю изъ формулъ (25), принимая во вниманіе и всѣ предыдущія. Но, чтобы не пропустить ни одного случая, надо сызнова выполнить всѣ дифференцированія, не мѣняя формы послѣдовательныхъ результатовъ (т. е. не сокращая въ нихъ общихъ множителей). Выполняя сказанное, получимъ послѣднія два условія (25) въ видѣ

$$(30) \qquad \frac{1}{\varrho}\Sigma\lambda(x-\xi)=-1, \quad \frac{1}{\varrho\tau}\Sigma a(x-\xi)=\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{ds}.$$

Дифференцированіе послѣдняго дастъ $\frac{\varkappa}{\varrho\tau}=0$. Къ тому же результату тотчасъ приходимъ, замѣчая, что найденное условіе содержитъ въ себѣ все то, что, на основаніи формулы (28), необходимо и достаточно для того, чтобы h было безконечно малою выше 4-го порядка. Такъ какъ предположеніе $\frac{1}{\varrho}=0$ исключено (потому что $\mathfrak{R}$ предполагается конечнымъ), а также и предположеніе $\frac{1}{\tau}=0$ при $d\varrho \gtrless 0$ (на томъ же основаніи), то мы придемъ къ слѣдующему заключенію. Кромѣ точекъ, для которыхъ $\varkappa=0$, пересоприкасаніе шара съ кривою можетъ произойти и въ другихъ точкахъ, характеризуемыхъ тѣмъ, что въ нихъ вторая кривизна равна нулю, хотя радіусъ соприкасающагося шара остается конечнымъ. Въ этихъ послѣднихъ точкахъ второе изъ условій (30) выполняется тождественно, и кривая имѣетъ касаніе 3-го порядка со всѣми шарами, проходящими черезъ соприкасающійся кругъ. Но лишь одинъ изъ этихъ шаровъ можетъ быть названъ соприкасающимся, а именно тотъ, который мы опредѣлили въ началѣ. Слѣдовательно, условіе $\varkappa=0$ достаточно, но не необходимо для пересоприкасанія; формула же (29) показываетъ, что во всѣхъ случаяхъ, если $d\varrho$ не равно нулю, $d\mathfrak{R}$ непремѣнно равно нулю. Отсюда въ частности такое слѣдствіе: Кривая пересѣкаетъ соприкасающійся шаръ въ томъ случаѣ, когда его радіусъ будетъ maximum или minimum, или когда этотъ шаръ пересѣкаетъ стаціонарную соприкасающуюся плоскость по окружности круга, радіусъ котораго будетъ maximum или minimum. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ происходитъ какъ разъ противоположное тому, что бываетъ въ обыкновенной точкѣ, а именно: кривая не пересѣкаетъ ни одного изъ другихъ шаровъ, проходящихъ черезъ соприкасающійся кругъ.

653. Разсмотримъ теперь какую нибудь сферическую кривую, т. е. линію, лежащую на поверхности шара радіуса R. Въ каждой точкѣ ея, очевидно, не можетъ быть иного соприкасающагося или даже пересоприкасающаго шара, кромѣ того, на поверхности котораго она находится. Поэтому, такъ какъ въ нашемъ случаѣ $\mathfrak{R}=R=$const., формула (29) дастъ либо $\varkappa=0$, либо $d\varrho=0$, а послѣднее требуетъ, какъ уже было замѣчено въ § 655, чтобы $\frac{1}{\tau}=0$ (иначе $\mathfrak{R}$ былъ бы безконечнымъ). Но при $d\varrho=0$ и $\frac{1}{\tau}=0$ необходимо и $\varkappa=0$. Слѣдовательно, условіе $\varkappa=0$ необходимо для того, чтобы кривая была сферическая. Оно будетъ и достаточнымъ. Чтобы въ этомъ убѣдиться продифференцируемъ уравненіе (26). Изъ перваго, пользуясь формулами Френé, получимъ

$$a - \frac{d\xi}{ds} = -\lambda\frac{d\varrho}{ds} + a\frac{d}{ds}\left(\tau\frac{d\varrho}{ds}\right) + \left(\frac{a}{\varrho} + \frac{a}{\tau}\right)\varrho + \lambda\frac{d\varrho}{ds},$$

слѣдовательно,

$$\frac{d\xi}{ds} = -\varkappa a, \quad \frac{d\eta}{ds} = -\varkappa\beta, \quad \frac{d\zeta}{ds} = -\varkappa\gamma. \tag{31}$$

Если $\varkappa = 0$ для всѣхъ точекъ кривой, то изъ формулы (29) видимъ, что $\mathfrak{R}$ равно нѣкоторому постоянному R, а изъ (31), что ξ, η, ζ также постоянныя, т. е. что всѣ точки кривой находятся въ одномъ и томъ же разстояніи R отъ неподвижной точки (ξ, η, ζ) — и кривая лежитъ на сферѣ радіуса R, съ центромъ въ (ξ, η, ζ). Итакъ, условіе, необходимое и достаточное для того, чтобы кривая была сферическою, состоитъ въ томъ, что

$$\frac{\varrho}{\tau} + \frac{d}{ds}\left(\tau\frac{d\varrho}{ds}\right) = 0.$$

654 *). Возвращаясь къ общему случаю, замѣчаемъ, что формулы (31) выражаютъ слѣдующую теорему: касательныя къ общему мѣсту центровъ соприкасающихся шаровъ параллельны бинормалямъ данной кривой, такъ какъ

$$\frac{d\xi}{a} = \frac{d\eta}{\beta} = \frac{d\zeta}{\gamma}.$$

Возвышая въ квадратъ формулы (31) и складывая, найдемъ $d\sigma^2 = \varkappa^2 ds^2$, если σ — дуга общаго мѣста центровъ соприкасающихся шаровъ. Отсюда $d\sigma = \pm\varkappa ds$; если возьмемъ

$$d\sigma = -\varkappa\, ds, \tag{32}$$

то формулы (31) дадутъ

$$\frac{d\xi}{d\sigma} = a, \quad \frac{d\eta}{d\sigma} = \beta, \quad \frac{d\zeta}{d\sigma} = \gamma,$$

т. е. при условіи (32) положительное направленіе касательной къ общему мѣсту центровъ соприкасающихся шаровъ совпадаетъ съ положительнымъ направленіемъ бинормали къ данной кривой. Разсмотримъ теперь зависимости между основными тріэдрами данной кривой, которую будемъ называть первою, и общаго мѣста центровъ

*) Въ подлинникѣ въ этомъ § есть нѣкоторыя неточности, а потому здѣсь онъ изложенъ въ другой редакціи.

соприкасающихся шаровъ, которое будемъ называть второю кривою. Удерживая прежнія обозначенія для первой кривой, обозначимъ соотвѣтствующіе элементы второй тѣми же буквами со значкомъ 1. Мы уже видѣли, что, при условіи (32), $a_1 = \alpha$, $b_1 = \beta$, $c_1 = \gamma$. Теперь замѣтимъ, что главныя нормали нашихъ двухъ кривыхъ въ соотвѣтствующихъ точкахъ параллельны между собою. Дѣйствительно, формулы (8) § 635 даютъ

$$\frac{\lambda}{d\alpha} = \frac{\mu}{d\beta} = \frac{\nu}{d\gamma},$$

а формулы (5) § 633, примѣненныя ко второй кривой, дадутъ въ силу вышеупомянутыхъ равенствъ,

$$\frac{\lambda_1}{d\alpha} = \frac{\mu_1}{d\beta} = \frac{\nu_1}{d\gamma},$$

откуда и слѣдуетъ сказанное. Какъ слѣдствіе, отсюда вытекаетъ, что касательныя къ первой кривой параллельны бинормалямъ второй. Итакъ, будемъ имѣть

$$\lambda_1 \pm = \lambda, \quad \mu_1 \pm = \mu, \quad \nu_1 = \pm \nu, \quad \text{и}$$
$$\alpha_1 = \pm a, \quad \beta_1 = \pm b, \quad \gamma_1 = \pm c.$$

Знаки въ этихъ формулахъ мы можемъ выбрать по произволу, но если поставимъ условіе, чтобы и для второй кривой имѣло мѣсто равенство

$$(6') \qquad \Delta' = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1 \\ \lambda_1, & \mu_1, & \nu_1 \end{vmatrix} = +1,$$

аналогичное (6), то, положивъ

$$\alpha_1 = a_1, \quad \beta_1 = b_1, \quad \gamma_1 = c_1,$$

должны взять

$$\lambda_1 = -\lambda, \quad \mu_1 = -\mu, \quad \nu_1 = -\nu,$$

т. е. взять положительное направленіе главной нормали второй кривой противоположнымъ положительному направленію главной нормали первой кривой. Тогда дѣйствительно,

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ a, & b, & c \\ -\lambda, & -\mu, & -\nu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a, & b, & c \\ \alpha, & \beta, & \gamma \\ \lambda, & \mu, & \nu \end{vmatrix} = +1.$$

При условіи (6′) можемъ примѣнить теперь формулы Френè (11) какъ къ первой, такъ и ко второй кривой. Тогда найдемъ

1) $$\frac{\lambda}{\varrho}=\frac{d\alpha}{ds}=-\varkappa\frac{d\alpha_1}{d\sigma}=-\varkappa\frac{\lambda_1}{\tau_1}=\varkappa\cdot\frac{\lambda}{\tau_1},$$

т. е. $\tau_1=\varkappa\varrho$.

2) $$\frac{\lambda_1}{\varrho_1}=\frac{d\alpha_1}{d\sigma}=-\frac{d\alpha}{\varkappa\,ds}=-\frac{\lambda}{\varkappa\tau}=\frac{\lambda_1}{\varkappa\tau},$$

т. е. $\varrho_1=\varkappa\tau$, и наконецъ

$$\varrho_1=\varrho+\tau\frac{d}{ds}\left(\tau\frac{d\varrho}{ds}\right),\quad \tau\tau_1=\varrho\varrho_1.$$

Особенно замѣчательны такъ называемые косые круги, т. е. кривыя съ постоянною первою кривизною и не равною нулю второю $\left(\varrho=R,\ \frac{1}{\tau}\gtrless 0\right)$. Для нихъ всѣ соприкасающіеся шары между собою равны ($\mathfrak{R}=\varrho$) и центры ихъ лежатъ на другомъ косомъ кругѣ ($\varrho_1=\varrho$). Косые круги — единственныя кривыя, съ которыми соприкасается безчисленное множество равныхъ между собою шаровъ, потому что по формулѣ (29) при ϱ непостоянномъ $\mathfrak{R}$ не можетъ быть постояннымъ, если $\varkappa$ не равно 0, а въ послѣднемъ случаѣ, какъ мы видѣли, всѣ соприкасающіеся шары совпадаютъ въ одинъ, на поверхности котораго и лежитъ данная кривая. Возвращаясь къ общему случаю, замѣтимъ въ заключеніе, что съ помощью формулъ (29) и (32) легко вычислить уголъ $d\vartheta$ между поверхностями двухъ безконечно близкихъ соприкасающихся шаровъ (т. е. между касательными къ нимъ плоскостями въ точкахъ M и M_1). Дѣйствительно, изъ очевидной формулы

$$d\sigma^2=d\mathfrak{R}^2+\mathfrak{R}^2 d\vartheta^2,$$

получаемъ

$$\frac{d\vartheta}{ds}=\frac{\varkappa\varrho}{\mathfrak{R}^2}=\frac{1}{\tau}\frac{d\log\mathfrak{R}}{d\log\varrho}.$$

Это отношеніе, которое Демартръ (Demartres) назвалъ сферическимъ крученіемъ, есть также полезный для изученія не плоскихъ кривыхъ элементъ.

Упражненія.

655. Винтовыя линіи. a) Разсмотримъ сперва обыкновенную или круговую винтовую линію, т. е. кривую линію, опредѣляемую свойствомъ пересѣкать всѣ образующія прямого кругового цилиндра радіуса r подъ постояннымъ угломъ φ. За ось z-овъ возьмемъ ось цилиндра, а ось x-овъ проведемъ перпендикулярно къ оси z-овъ черезъ нѣкоторую точку A на кривой. Пусть θ обозначаетъ уголъ, образуемый проекціею OM на плоскость xy съ осью x-овъ. Такъ какъ, по опредѣленію, $c\left(=\dfrac{dz}{ds}\right)$ число постоянное и равное $\cos\varphi$, то будемъ имѣть $z = s\cos\varphi$, если условимся отсчитывать дуги отъ точки A; уголъ φ предполагается острымъ и, слѣдовательно, s возрастаетъ вмѣстѣ съ z. Координаты точки M будутъ $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = s\cos\varphi$. Дифференцируя, получимъ

$$dx = -r\sin\theta\, d\theta, \qquad dy = r\cos\theta\, d\theta, \qquad dz = \cos\varphi\, ds,$$

а отсюда, возвышая въ квадратъ и складывая, находимъ $ds^2 = r^2 d\theta^2 + \cos^2\varphi\, ds^2$, и далѣе

$$ds = \frac{r\,d\theta}{\sin\varphi}, \qquad s = \frac{r\theta}{\sin\varphi}.$$

Соотношеніе $z = s\cos\varphi$ уже показываетъ, что если T есть пересѣченіе касательной MT съ плоскостью (xy), то длина MT какъ разъ равна $\smile AM$; теперь же мы видимъ, что если P есть проекція M на ту же плоскость, то $PT = s\sin\varphi = r\theta =$ дугѣ круга AP. Поэтому, когда M описываетъ винтовую линію, точка T опишетъ эвольвенту круга. Далѣе, направляющіе косинусы касательной будутъ

$$a = -\sin\varphi\sin\theta, \quad b = \sin\varphi\cos\theta, \quad c = \cos\varphi,$$

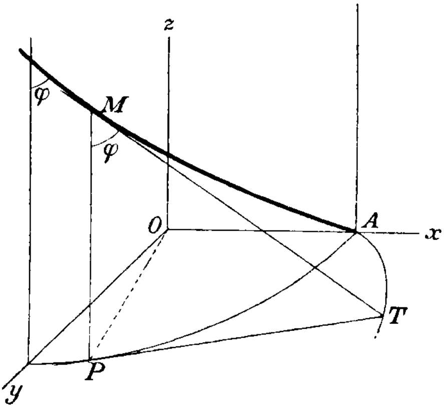

Рис. 82.

откуда, съ помощью дифференцированій, на основаніи перваго столбца формулъ (11), получимъ

$$\frac{\lambda}{\varrho} = -\frac{\sin^2\varphi\cos\theta}{r}, \quad \frac{\mu}{\varrho} = -\frac{\sin^2\varphi\sin\theta}{r}, \quad \nu = 0,$$

и далѣе

$$\varrho = \frac{r}{\sin^2\varphi}, \quad \lambda = -\cos\theta, \quad \mu = -\sin\theta, \quad \nu = 0.$$

Итакъ, главныя нормали винтовой линіи встрѣчаютъ ось цилиндра подъ прямымъ угломъ ($\nu=0$). Кромѣ того, замѣтимъ, что радіусъ первой кривизны число постоянное. Направляющіе косинусы бинормали будутъ

$$\alpha = c\mu = -\cos\varphi \sin\theta, \quad \beta = -c\lambda = \cos\varphi\cos\theta, \quad \gamma = b\lambda - a\mu = -\sin\varphi,$$

и достаточно продифференцировать α и β, или одинъ изъ косинусовъ главной нормали (припоминая остальныя формулы (11)), чтобы найти радіусъ крученія $\tau = \dfrac{r}{\sin\varphi\cos\varphi}\cdot$ Какъ видимъ, и радіусъ второй кривизны число постоянное. Въ данномъ случаѣ его величина число положительное, потому что (§ 643) разсматриваемая винтовая линія будетъ sinistrorsum. Впрочемъ, всѣ выведенныя формулы будутъ справедливы и для винтовой линіи dextrorsum, если въ нихъ положимъ $\sin 2\varphi < 0$.

b) Укажемъ теперь двѣ замѣчательныя поверхности, къ которымъ приводитъ изученіе круговой винтовой линіи. Первая есть общее мѣсто касательныхъ винтовой линіи, и называется развертывающимся геликоидомъ. Мы уже видѣли, что плоскія сѣченія этой поверхности, перпендикулярныя къ оси цилиндра, всѣ равны одной и той же эвольвентѣ круга радіуса r. Чтобы отдать себѣ отчетъ о видѣ поверхности, полезно знать также ея профиль, т. е. сѣченіе поверхности плоскостью, проходящею черезъ ось. Уравненія касательной будутъ

$$\frac{x - r\cos\theta}{-\sin\theta} = \frac{y - r\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{z - R\theta}{\cot\varphi},$$

если обозначимъ черезъ R постоянное число $r\,\mathrm{cotg}\,\varphi$. Полагая $y=0$, получимъ

$$x = \frac{r}{\cos\theta}, \quad z = R(\theta - \mathrm{tg}\,\theta).$$

Это уравненія, въ плоскости (xz), уже извѣстной кривой (§ 599, c). Главныя нормали винтовой линіи образуютъ другой геликоидъ, называемый косымъ, или геликоидомъ съ направляющею плоскостью, такъ какъ всѣ образующія его параллельны одной и той же плоскости. Уравненія главной нормали: $y = x\,\mathrm{tg}\,\theta$, $z = R\theta$; исключая θ, получаемъ уравненіе косого геликоида: $y = x\,\mathrm{tg}\dfrac{z}{R}\cdot$

c) Вычисленія перваго упражненія можно сбобщить на случай r, равнаго какой нибудь функціи отъ θ, т. е. на случай любой *цилиндрической* винтовой линіи, начерченной на поверхности какого угодно (не кругового) цилиндра и встрѣчающей всѣ образующія подъ постояннымъ угломъ φ. Вмѣсто того, чтобы повторять всѣ вычисленія, мы можемъ, идя болѣе краткимъ путемъ, вывести то, что нужно для раскрытія одного важнаго и характеристичнаго для этихъ кривыхъ свойства. Напомнимъ формулы

$$\frac{dc}{ds} = \frac{\nu}{\varrho}, \quad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\nu}{\tau}, \quad \frac{d\nu}{ds} = -\frac{c}{\varrho} - \frac{\gamma}{\tau}$$

и замѣтимъ, что при c постоянномъ получается изъ первой формулы $\nu = 0$, послѣ чего вторая дастъ $\gamma = \text{const}$. Такъ какъ всегда $c^2 + \gamma^2 + \nu^2 = 1$, то при $c = \cos\varphi$, можно положить

$$\gamma = \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\varphi,$$

Уголъ φ мы отсчитываемъ въ спрямляющей плоскости отъ касательной въ такомъ направленіи, которое для наблюдателя, находящагося на положительной главной нормали, совпадало бы съ направленіемъ, противоположнымъ движенію часовой стрѣлки. Условившись въ этомъ, изъ третьей изъ предыдущихъ формулъ, получаемъ $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\tau}{\varrho}$, и видимъ, что отношеніе двухъ кривизнъ число постоянное. Обратно, положимъ, что для нѣкоторой кривой отношеніе кривизнъ число постоянное. Проведемъ черезъ точку M въ спрямляющей плоскости прямую, опредѣляемую косинусами $l = a\cos\varphi - \alpha\sin\varphi$, $m = b\cos\varphi - \beta\sin\varphi$, $m = c\cos\varphi - \gamma\sin\varphi$, при чемъ постоянный уголъ φ опредѣляется формулою $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\tau}{\varrho}$. На основаніи формулъ (11) найдемъ тогда

$$\frac{dl}{ds}\Big/\lambda = \frac{dm}{ds}\Big/\mu = \frac{dn}{ds}\Big/\nu = \frac{\cos\varphi}{\varrho} - \frac{\sin\varphi}{\tau} = 0,$$

Слѣдовательно, l, m и n числа постоянныя, а кривая будетъ цилиндрическою винтовою линіею, потому что она начерчена на цилиндрѣ *) и встрѣчаетъ всѣ его образующія подъ постояннымъ угломъ φ. Итакъ, для того, чтобы кривая была цилиндрическою винтовою линіею, необходимо и достаточно, чтобы отношеніе ея двухъ кривизнъ было числомъ постояннымъ. Если далѣе каждая изъ кривизнъ число постоянное, то винтовая линія необходимо будетъ круговою: она будетъ лежать на круговомъ цилиндрѣ, радіусъ котораго равенъ $\frac{\varrho\tau^2}{\varrho^2+\tau^2}$. Мы предоставляемъ читателю трудъ доказать эту теорему, найденную Пюизэ (Puiseux).

d) *Коническою* винтовою линіею называютъ такую, которая пересѣкаетъ подъ постояннымъ (но не прямымъ) угломъ ψ всѣ образующія конуса. Если конусъ круговой, то винтовая линія пересѣкаетъ, очевидно, также подъ постояннымъ угломъ φ образующія цилиндра, проектирующаго ее параллельно оси (притомъ, если χ есть уголъ наклоненія образующихъ конуса къ оси, то $\cos\varphi = \cos\psi\cos\chi$). Поэтому винтовая линія будетъ въ то же время и цилиндрическою, а потому и называется цилиндро-коническою винтовою линіею. Это, можно сказать, логариѳмическая спираль пространства. Если возьмемъ вершину конуса за начала координатъ, а ось его за ось z-овъ, и обозначимъ черезъ R разстояніе точки M отъ вершины, то должны имѣть

$$\cos\psi = \frac{x}{R}\frac{dx}{ds} + \frac{y}{R}\frac{dy}{ds} + \frac{z}{R}\frac{dz}{ds},$$

или $\cos\psi = \frac{dR}{ds}$. Такъ какъ, по предположенію, $\cos\psi$ не равно 0 (иначе имѣли бы $R = \text{const.}$, и кривая лежала бы на поверхности шара), то $R = s\cos\psi$, если считать дуги s отъ вершины. Съ другой стороны $r = R\sin\chi$ *), слѣдовательно, $r = ms\sin\psi$, гдѣ для сокращенія положено $m = \sin\chi\operatorname{cotg}\psi$. Вмѣстѣ съ тѣмъ, координаты точки M будутъ $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = r\operatorname{cotg}\chi$; поэтому имѣемъ

$$dr^2 = m^2\sin^2\psi\,(dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2) = \cos^2\psi\,dr^2 + m^2 r^2 \sin^2\psi\,d\theta^2,$$

откуда $dr = mr\,d\theta$, $\log r = m\theta + \text{const.}$ Итакъ, прямое сѣченіе того ци-

---

*) Образующія цилиндра параллельны направленію (l, m, n), а косинусъ угла между касательною (a, b, c) и образующими (l, m, n) равенъ $al + bm + cn = \cos\varphi$.

**) r — разстояніе проекціи точки M на плоскость (xy) отъ начала координатъ (вершины конуса).

линдра, на которомъ данная линія есть винтовая, есть логариѳмическая спираль. Если теперь замѣтимъ, что

$$\frac{dr}{ds} = m \sin\psi, \quad \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{mr}\frac{dr}{ds} = \frac{\sin\psi}{r} = \frac{1}{ms},$$

то легко найдемъ направляющіе косинусы касательной:

$$a = (m\cos\theta - \sin\theta)\sin\psi, \quad b = (m\sin\theta + \cos\theta)\sin\psi, \quad c = \cos\varphi,$$

а, дифференцируя еще разъ, найдемъ и косинусы главной нормали

$$\lambda = -(\cos\theta + m\sin\theta)\frac{\varrho\sin\psi}{ms}, \quad \mu = -(\sin\theta - m\cos\theta)\frac{\varrho\sin\psi}{ms}, \quad \nu = 0.$$

Итакъ, главныя нормали перпендикулярны къ оси конуса, но ее не пересѣкаютъ: онѣ нормальны къ поверхности цилиндра, а не конуса. Возвышая въ квадратъ и складывая послѣднія формулы, и замѣчая еще, что $1 + m^2 = \frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\psi}$, получимъ значеніе ϱ, а изъ него тотчасъ и $\tau = \varrho \operatorname{tg}\varphi$, а именно:

$$\varrho = \frac{ms}{\sin\varphi}, \quad \tau = \frac{ms}{\cos\varphi}.$$

Слѣдовательно, радіусы первой и второй кривизны цилиндро-конической винтовой линіи пропорціональны дугѣ, отсчитываемой отъ вершины конуса. Можно доказать, что, обратно, имѣетъ мѣсто слѣдующая теорема: если для нѣкоторой кривой $\varrho = ks$, $\tau = k's$, гдѣ k и k' постоянныя, то эта кривая необходимо должна быть цилиндро-коническою винтовою линіею, лежащею на круговомъ конусѣ, въ которомъ уголъ χ между осью и образующими опредѣляется формулою

$$\operatorname{tg}\chi = k'^2 / \sqrt{k^2 + k'^2 + k^2 k'^2}.$$

656. Представимъ себѣ плоскость въ видѣ гибкой, но нерастяжимой матеріальной поверхности и дадимъ ей при помощи сгибанія, не мѣняющаго длины линій, на ней начерченныхъ, форму какой нибудь цилиндрической поверхности. Прямыя линіи нѣкотораго опредѣленнаго направленія обратятся тогда въ образующія цилиндра, всѣ другія въ цилиндрическія винтовыя линіи. Отрѣзокъ всякой такой линіи будетъ давать кратчайшее разстояніе между двумя достаточно близкими точками на поверхности цилиндра. Такъ же, какъ отрѣзокъ прямой, которая послѣ сгибанія обратилась въ винтовую, давалъ кратчайшее разстояніе между двумя точками на плоскости. Въ силу этого свойства цилиндрическую винтовую линію называютъ геодезическою линіею на поверхности цилиндра. Впослѣдствіи мы разсмотримъ геодезическія линіи съ другой точки зрѣнія и обобщимъ ихъ опредѣленіе для какой угодно поверхности. Но и теперь уже мы можемъ изслѣдовать геодезическія линіи на поверхности конуса, т. е. тѣ линіи, въ которыя обращаются прямыя линіи на плоскости, когда при помощи одного сгибанія мы дадимъ этой плоскости коническую форму. Замѣтимъ тотчасъ же, что коническія винтовыя линіи ни въ какомъ случаѣ не будутъ геодезическими, потому что, какъ мы уже знаемъ изъ предыдущаго онѣ происходятъ изъ логариѳмическихъ спиралей съ полюсомъ въ вершинѣ конуса. Ограничиваясь случаемъ прямого кругового конуса, положимъ, что A есть проекція вершины конуса O на ту прямую, которая при сгибаніи плоскости обращается въ геодезическую линію, l длина отрѣзка OA и R — разстояніе отъ точки O

до какой нибудь (перемѣнной) точки M по той же прямой. Тогда $R^2 = s^2 + l^2$, если условимся считать дугу геодезической кривой отъ точки A, потому что длина отрѣзка AM при сгибаніи не мѣняется. Далѣе, если обозначимъ черезъ φ уголъ OMA (въ пространствѣ это будетъ уголъ между образующей конуса, проходящей черезъ M, и касательной къ кривой въ точкѣ M), то, очевидно, будемъ имѣть

$$\frac{dR}{ds} = \frac{s}{R} = \cos\varphi, \quad \sin\varphi = \frac{l}{R}, \quad \frac{d\varphi}{ds} = -\frac{\sin\varphi}{R}.$$

Выбравъ теперь координатныя оси такъ же, какъ въ предыдущемъ § 655, d, получимъ для координатъ точки M выраженія $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = r\operatorname{cotg}\chi$, гдѣ χ уголъ между образующими конуса и его осью, r и θ полярныя координаты проекціи точки M на плоскости Oxy. При этомъ, очевидно, будемъ имѣть $r = R\sin\chi$. Дифференцируя выраженія x, y, z, найдемъ

$$dx = \cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta, \quad dy = \sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta, \quad dz = \operatorname{cotg}\chi\, dr \quad \text{и}$$
$$ds^2 = dR^2 + r^2 d\theta^2.$$

Откуда, далѣе, $\dfrac{d\theta}{ds} = \dfrac{\sin\varphi}{r}$, если s и θ одновременно возрастаютъ, что всегда можно предположить. Изъ тѣхъ же выраженій для dx, dy, dz легко найдемъ направляющіе косинусы касательной, а именно

$$a = -\sin\varphi\sin\theta + \cos\varphi\cos\theta\sin\chi, \quad b = \sin\varphi\cos\theta + \cos\varphi\sin\theta\sin\chi,$$
$$c = \cos\varphi\cos\chi.$$

Дифференцируя еще разъ, получимъ направляющіе косинусы главной нормали

$$\lambda = -\frac{\varrho}{R}\sin^2\varphi\cot\chi\cos\chi\cos\theta, \quad \mu = -\frac{\varrho}{R}\sin^2\varphi\cot\chi\cos\chi\sin\theta,$$
$$\nu = \frac{\varrho}{R}\sin^2\varphi\cos\chi$$

или

$$\lambda = -\cos\chi\cos\theta, \quad \mu = -\cos\chi\sin\theta, \quad \nu = \sin\chi,$$

если замѣтимъ (возвышая предыдущія формулы въ квадратъ и складывая), что

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\sin^2\varphi}{R}\cot\chi = \frac{l^2}{R^3}\cot\chi.$$

Главныя нормали, слѣдовательно, перпендикулярны къ образующимъ и пересѣкаютъ ось конуса: онѣ нормальны къ поверхности конуса*). Направляющіе косинусы бинормали будутъ

$$\alpha = -\cos\varphi\sin\theta - \sin\varphi\cos\theta\sin\chi, \quad \beta = \cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta\sin\chi,$$
$$\gamma = -\sin\varphi\cos\chi.$$

---

*) Мы увидимъ впослѣдствіи, что это есть характеристическое свойство геодезическихъ линій на всякой поверхности.

Достаточно продифференцировать послѣднее уравненіе, чтобы найти величину крученія

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{R}\cot\chi = \frac{ls}{R^3}\cot\chi.$$

Замѣтимъ соотношеніе $s\tau = l\varrho$. Можно доказать, что то же соотношеніе справедливо для геодезической линіи на любой конической поверхности и не справедливо для другихъ линій на той же поверхности. Итакъ, геодезическія линіи на поверхности конуса характеризуются тѣмъ, что отношеніе первой кривизны ко второй измѣняется обратно пропорціонально длинѣ дуги.

657. Изслѣдуемъ еще кривую, заданную уравненіями

$$x = \frac{R}{2}(e^\theta + e^{-\theta})\cos\theta, \quad y = \frac{R}{2}(e^\theta + e^{-\theta})\sin\theta, \quad z = R\,\theta.$$

Прежде всего замѣтимъ, что, въ силу равенствъ $y = x\operatorname{tg}\theta$, $z = R\theta$, кривая лежитъ на косомъ геликоидѣ (§ 655, b). Съ другой стороны, проекція кривой на плоскости (xy) есть спираль, изображаемая въ полярныхъ координатахъ уравненіемъ

$$r = \frac{R}{2}\left(e^\theta + e^{-\theta}\right),$$

а такъ какъ $z = R\theta$, то кривая лежитъ также на поверхности вращенія

$$r = \frac{R}{2}\left(e^{\frac{z}{R}} + e^{-\frac{z}{R}}\right).$$

Эта поверхность есть катеноидъ, образуемый вращеніемъ цѣпной линіи

$$x = \frac{R}{2}\left(e^{\frac{z}{R}} + e^{-\frac{z}{R}}\right)$$

около оси z-овъ (ея директрисы). Разсматриваемая кривая, слѣдовательно, есть пересѣченіе косого геликоида съ катеноидомъ. Дифференцируя выраженія координатъ, находимъ

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{R}{2}\left[(e^\theta - e^{-\theta})\cos\theta - (e^\theta + e^{-\theta})\sin\theta\right],$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{R}{2}\left[(e^\theta - e^{-\theta})\sin\theta + (e^\theta + e^{-\theta})\cos\theta\right], \qquad \frac{dz}{d\theta} = R,$$

отсюда

$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{R}{\sqrt{2}}(e^\theta + e^{-\theta}), \quad s = \frac{R}{\sqrt{2}}(e^\theta - e^{-\theta}),$$

полагая, что $s = 0$ при $\theta = 0$. Поэтому направляющіе косинусы **касательной** будутъ

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(k\cos\theta - \sin\theta), \quad b = \frac{1}{\sqrt{2}}(k\sin\theta + \cos\theta), \quad c = \frac{\sqrt{2}}{e^\theta + e^{-\theta}},$$

если обозначимъ для сокращенія $k = \dfrac{e^\theta - e^{-\theta}}{e^\theta + e^{-\theta}}$. Такъ какъ

$$-a\sin\theta + b\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

то находимъ, что кривая пересѣкаетъ параллели катеноида подъ угломъ въ 45^0. Замѣчая, далѣе, что $\frac{dk}{d\theta}=1-k^2$, и дифференцируя еще разъ, получимъ

$$\frac{da}{d\theta}=-\frac{k}{\sqrt{2}}(\sin\theta+k\cos\theta),\quad \frac{db}{d\theta}=\frac{k}{\sqrt{2}}(\cos\theta-k\sin\theta),$$

$$\frac{dc}{d\theta}=-\frac{k\sqrt{2}}{e^\theta+e^{-\theta}}.$$

Отсюда, возвышая въ квадратъ и складывая, получимъ $\varepsilon=kd\theta$, а потому

$$\varrho=\frac{1}{k}\frac{ds}{d\theta}=\frac{R}{\sqrt{2}}\frac{(e^\theta+e^{-\theta})^2}{e^\theta-e^{-\theta}}=s+\frac{2R^2}{s}$$

и

$$\lambda=-\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\theta+k\cos\theta),\quad \mu=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta-k\sin\theta),\quad \nu=-\frac{\sqrt{2}}{e^\theta+e^{-\theta}}.$$

Наконецъ, получимъ еще

$$\alpha=\frac{2\cos\theta}{e^\theta+e^{-\theta}},\quad \beta=\frac{2\sin\theta}{e^\theta+e^{-\theta}},\quad \gamma=-\frac{e^\theta-e^{-\theta}}{e^\theta+e^{-\theta}}.$$

Такъ какъ $\frac{\beta}{\alpha}=\operatorname{tg}\theta$, то бинормаль, очевидно, пересѣкаетъ ось z-овъ, и слѣдовательно, нормальна къ поверхности катеноида*). Для вычисленія второй кривизны достаточно теперь взять одну изъ формулъ (11), напримѣръ, $\frac{d\gamma}{ds}=\frac{\nu}{\tau}$, и изъ нея получить

$$\tau=\frac{R}{4}(e^\theta+e^{-\theta})^2=R+\frac{s^2}{2R}.$$

Легко показать, что τ равно отрѣзку бинормали между кривою и осью z-овъ. Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи извѣстныхъ свойствъ цѣпной линіи (§ 589, c), этотъ отрѣзокъ какъ разъ равенъ $\frac{\tau^2}{R}$ т. е. τ. Замѣтимъ, наконецъ, что отношеніе первой кривизны ко второй измѣняется прямо пропорціонально длинѣ дуги (обратное тому, что было сказано для геодезическихъ линій на конусѣ въ § 656).

658. Кривыя Бертрана. a) Предложимъ себѣ рѣшить вопросъ: могутъ ли главныя нормали одной кривой (M) быть въ то же время главными нормалями другой кривой (M_1)?**). Каждой точкѣ $M(x, y, z)$ данной кривой соотвѣтствуетъ точка M_1 на другой кривой, координаты которой будутъ

(I) $$x_1=x+\lambda p,\quad y_1=y+\mu p,\quad z_1=z+\nu p.$$

---

*) Это частный случай общаго свойства поверхностей вращенія: нормаль къ поверхности пересѣкаетъ ось вращенія.

**) Для плоскихъ кривыхъ, очевидно, нормали къ одной кривой будутъ нормалями ко всѣмъ кривымъ, ей параллельнымъ; для кривыхъ не плоскихъ, какъ увидимъ, данная кривая должна удовлетворять извѣстнымъ условіямъ, чтобы ея главныя нормали были общими съ другою кривою.

гдѣ p обозначаетъ разстояніе MM_1, а λ, μ, ν — направляющіе косинусы общей для двухъ кривыхъ главной нормали. Положительныя направленія касательной Mt въ точкѣ M къ кривой (M) и касательной $M_1 t_1$ въ точкѣ M_1 къ кривой (M_1) будутъ перпендикулярны къ направленію Mn — общей главной нормали, но, вообще говоря, не будутъ совпадать. Обозначимъ черезъ ψ уголъ, на который надо повернуть полупрямую $M_1 t_1$ около точки M_1, чтобы $M_1 t_1$ сдѣлалась параллельною Mt, при чемъ вращеніе происходитъ въ томъ же направленіи, въ которомъ надо повернуть Mt на уголъ въ 90°, чтобы Mt совпало съ положительнымъ направленіемъ бинормали Mb. При такомъ условіи о счетѣ угла ψ, какъ легко убѣдиться, направляюшіе косинусы касательной $M_1 t_1$ выразятся формулами

$$\text{(II)} \qquad a_1 = a\cos\psi - \alpha\sin\psi, \quad b_1 = b\cos\psi - \beta\sin\psi, \quad c_1 = c\cos\psi - \gamma\sin\psi,$$

Съ другой стороны, имѣемъ, по формуламъ (I) и (11) § 638,

$$\frac{dx_1}{ds} = a - \left(\frac{a}{\varrho} + \frac{\alpha}{\tau}\right)p + \lambda\frac{dp}{ds} \text{ и т. д.}$$

и $a_1 = \dfrac{dx_1}{ds_1}$, гдѣ s_1—дуга кривой (M_1). Отождествляя выраженіе $a_1 = \dfrac{dx_1}{ds}\cdot\dfrac{ds}{ds_1}$ съ тѣмъ, которое даютъ формулы (II), т. е. приравнивая коэффиціенты при a, при α, и независимые отъ a и α члены въ обоихъ выраженіяхъ, получимъ

$$\text{(33)} \qquad \frac{dp}{ds} = 0, \quad 1 - \frac{p}{\varrho} = \frac{ds_1}{ds}\cos\psi, \quad \frac{p}{\tau} = \frac{ds_1}{ds}\sin\psi,$$

такъ что

$$\text{(34)} \qquad p = \text{const.}, \quad \frac{1}{\varrho} + \frac{\cot\psi}{\tau} = \frac{1}{p}.$$

Полученныя формулы выражаютъ только то, что главныя нормали кривой (M) будутъ **нѣкоторыми** нормалями кривой (M_1); чтобы онѣ были именно **главными** нормалями и для второй кривой, необходимы еще условія

$$\frac{da_1}{ds_1} = \frac{\lambda}{\varrho_1}, \quad \frac{db_1}{ds_1} = \frac{\mu}{\varrho_1}, \quad \frac{dc_1}{ds_1} = \frac{\nu}{\varrho_1}.$$

Замѣчая, что

$$\frac{da_1}{ds} = \left(\frac{\cos\psi}{\varrho} - \frac{\sin\psi}{\tau}\right)\lambda - (a\sin\psi + \alpha\cos\psi)\frac{d\psi}{ds} \text{ и т. д.,}$$

находимъ

$$\text{(35)} \qquad \frac{d\psi}{ds} = 0, \quad \frac{1}{\varrho_1}\frac{ds_1}{ds} = \frac{\cos\psi}{\varrho} - \frac{\sin\psi}{\tau},$$

т. е. $\psi = \text{const.}$; а это показываетъ, что **основные тріэдры обѣихъ кривыхъ должны быть неподвижно связаны между собою** (т. е. относительныя положенія реберъ этихъ тріэдровъ не измѣняются при переходѣ отъ одной точки на кривой къ другой). Кромѣ того, на основаніи формулы (34), **между обѣими кривизнами данной кривой (M) должно существовать линейное соотношеніе съ постоянными коэффиціентами.** Мы видимъ, такимъ образомъ, что кривая (M) не произвольна: она должна быть **кривою Бертрана**: такъ называются кривыя, между кривизнами которыхъ существуетъ соотношеніе вида

$$\text{(36)} \qquad \frac{p}{\varrho} + \frac{q}{\tau} = 1,$$

гдѣ p и q — постоянныя.

b) Нужно замѣтить, что и обратно, если дана кривая Бертрана (M), то всѣ найденныя выше условія выполняются, такъ что существуетъ другая кривая (M_1), имѣющая съ данною общія главныя нормали въ соотвѣтствующихъ точкахъ. Эти двѣ кривыя опредѣляютъ на общихъ главныхъ нормаляхъ отрѣзки равной длины p, а касательныя въ концахъ каждаго отрѣзка образуютъ между собою постоянный уголъ $\psi = \operatorname{arctg} \frac{p}{q}$. Очевидно, вторая кривая будетъ также кривою Бертрана, удовлетворяющею уравненію, получаемому изъ (36) замѣною p на $-p$. Это обстоятельство позволяетъ весьма просто вычислить обѣ кривизны кривой (M_1), такъ какъ формула (33) даетъ $\frac{ds_1}{ds} = \frac{\sqrt{p^2+q^2}}{\tau}$, а также аналогично этому $\frac{ds}{ds_1} = \frac{\sqrt{p^2+q^2}}{\tau_1}$, откуда $\tau\tau_1 = p^2+q^2$, т. е. произведеніе вторыхъ кривизнъ въ соотвѣтствующихъ точкахъ обѣихъ кривыхъ — величина постоянная. Примѣняя далѣе формулу (36) къ кривой (M_1), получимъ

$$\frac{p}{\varrho_1} = \frac{q}{\tau_1} - 1 = \frac{q\tau}{p^2+q^2} - 1 = \frac{(p\tau+q\varrho)q}{(p^2+q^2)\varrho} - 1 = \frac{(q\tau-p\varrho)p}{(p^2+q^2)\varrho},$$

т. е.

$$(37) \qquad \frac{1}{\varrho_1} = \frac{q\tau - p\varrho}{(p^2+q^2)\varrho},$$

что можно также получить изъ второй формулы (35). Наконецъ, замѣтимъ, что отвѣтъ, полученный нами на поставленный вопросъ, теряетъ смыслъ при $p=0$, т. е. для кривыхъ съ постояннымъ (не равнымъ нулю) крученіемъ и перемѣнною первою кривизною. Въ этомъ случаѣ кривыя M и (M_1) совпадаютъ. Это заключеніе не распространяется на кривыя съ крученіемъ, равнымъ нулю (т. е. плоскія кривыя); въ этомъ случаѣ имѣемъ $\psi = 0$, и формулы (33) и (35) приводятся къ извѣстнымъ результатамъ:

$$p = \text{const.}, \qquad \frac{ds_1}{ds} = 1 - \frac{p}{\varrho}, \qquad \varrho_1 = \varrho - p,$$

относящимся къ системѣ параллельныхъ кривыхъ (§ 624, b). Полученный результатъ не имѣетъ мѣста и въ томъ случаѣ, когда обѣ кривизны постоянны, потому что тогда уравненіе (36) удовлетворяется безчисленнымъ множествомъ паръ значеній p и q. Это значитъ, что круговую винтовую линію можно безчисленнымъ множествомъ способовъ разсматривать, какъ кривую Бертрана. Мы видимъ, что круговыя винтовыя линіи, отъ всѣхъ другихъ линій двоякой кривизны, отличаются тѣмъ, что, подобно плоскимъ кривымъ, имѣютъ общія главныя нормали съ безчисленнымъ множествомъ другихъ кривыхъ. Эти другія кривыя, разумѣется, тоже круговыя винтовыя и между ними одна должна приводиться къ прямой. Она соотвѣтствуетъ тѣмъ значеніямъ p и q, которыя удовлетворяютъ уравненіямъ (36) и (37) при $\varrho_1 = \infty$, т. е.

$$p = \frac{\varrho\tau^2}{\varrho^2+\tau^2}, \qquad q = \frac{\tau\varrho^2}{\varrho^2+\tau^2},$$

и есть не что иное, какъ общая ось всѣхъ цилиндровъ, на которыхъ лежатъ круговыя винтовыя линіи.

ПРИЛОЖЕНІЯ КЪ ТЕОРІИ ПОВЕРХНОСТЕЙ.

Основныя понятія.

659. Касательная плоскость. Ко всѣмъ кривымъ, проходящимъ черезъ точку M на поверхности, проведемъ касательныя прямыя: онѣ называются касательными къ поверхности. Направленіе каждой изъ нихъ опредѣляется косинусами, которые (§ 630) пропорціональны дифференціаламъ координатъ x, y, z точки M, если представимъ себѣ, что эта точка передвигается по одной изъ кривыхъ на поверхности. Если поверхность задана уравненіемъ $f(X, Y, Z)=0$, то упомянутые дифференціалы связаны уравненіемъ

$$(1) \qquad \frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz=0.$$

Это уравненіе выражаетъ, что всякая касательная, къ какой бы кривой на поверхности черезъ точку M она ни была проведена, перпендикулярна къ прямой, направленіе которой опредѣляется косинусами

$$\mathfrak{L}=\frac{1}{\sqrt{\Delta f}}\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \mathfrak{M}=\frac{1}{\sqrt{\Delta f}}\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \mathfrak{N}=\frac{1}{\sqrt{\Delta f}}\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Слѣдовательно, всѣ касательныя въ точкѣ M лежатъ въ одной плоскости. Она называется касательной плоскостью къ поверхности въ точкѣ M, а прямая, къ ней перпендикулярная, возставленная изъ той же точки M — нормалью къ поверхности. Касательная плоскость изображается, слѣдовательно, уравненіемъ

$$(2) \qquad (X-x)\frac{\partial f}{\partial x}+(Y-y)\frac{\partial f}{\partial y}+(Z-z)\frac{\partial f}{\partial z}=0.$$

Если хотимъ ввести въ вычисленіе частныя производныя отъ z по x и по y, обозначаемыя буквами p и q, то косинусы направленія нормали выразятся формулами

$$\mathfrak{L}=\frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \mathfrak{M}=\frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \mathfrak{N}=\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\,{}^{*)},$$

а уравненіе касательной плоскости приметъ видъ

$$(3) \qquad Z-z=p(X-x)+q(Y-y).$$

---

*) вытекающими изъ уравненій $f'_x+pf'_z=0$, $f'_y+qf'_z=0$.

Сближая сказанное въ § 568 съ настоящими выводами, мы видимъ, что нормаль къ поверхности $f=0$ въ точкѣ M и есть та прямая, вдоль которой функція f стремится измѣняться всего быстрѣе, между тѣмъ, какъ вдоль касательныхъ эта функція стремится сохранить значеніе 0; дѣйствительно, въ точкахъ M', лежащихъ въ касательной плоскости, функція f имѣетъ значенія, безконечно малыя второго порядка относительно MM'.

660. Полезно имѣть также формулы для непосредственнаго вычисленія косинусовъ $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ въ томъ случаѣ, когда поверхность задана уравненіями

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v).$$

При этомъ параметры u и v измѣняются независимо одинъ отъ другого. Чтобы эти три уравненія изображали поверхность, необходимо, чтобы двѣ изъ функцій x, y, z были независимы, а слѣдодовательно (§ 578), чтобы въ матриссѣ

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

не всѣ миноры второго порядка равнялись нулю. Если теперь v остается постояннымъ, то данныя три уравненія изображаютъ кривую линію на поверхности; $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$ будутъ пропорціональны направляющимъ косинусамъ касательной къ этой кривой въ разсматриваемой точкѣ; точно такъ же $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ будутъ пропорціональны косинусамъ касательной къ другой кривой, которую получимъ, разсматривая u, какъ постоянное. Условія перпендикулярности нормали къ обѣимъ касательнымъ даютъ

$$\sum \mathfrak{L} \frac{\partial x}{\partial u} = 0, \qquad \sum \mathfrak{L} \frac{\partial x}{\partial v} = 0.$$

Изъ нихъ вытекаетъ, что $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ пропорціональны вышеупомянутымъ минорамъ, а такъ какъ сумма квадратовъ этихъ миноровъ равна квадрату матриссы, т. е. $ac - b^2$, гдѣ

$$a = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2, \quad b = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2, \quad c = \sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v},$$

то, очевидно, будемъ имѣть

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{\sqrt{ab - c^2}} \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \quad \mathfrak{M} = \frac{1}{\sqrt{ab - c^2}} \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \quad \mathfrak{N} = \frac{1}{\sqrt{ab - c^2}} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}.$$

661. Упражненія. Найдемъ уравненіе конуса, описаннаго около поверхности $f(X, Y, Z) = 0$ съ вершиною въ данной точкѣ $Q(\xi, \eta, \zeta)$, т. е. того конуса, образующія котораго будутъ касательными къ поверхности, проведенными изъ точки Q. Уравненія, выражающія, что точка $M(x, y, z)$ лежитъ на поверхности, и что касательная плоскость въ точкѣ M проходитъ черезъ Q, будутъ

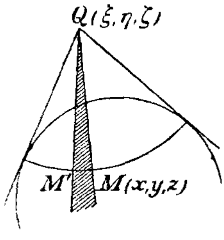

Рис. 83.

$$
(4) \qquad f(x, y, z) = 0,
$$
$$
(\xi - x)\frac{\partial f}{\partial x} + (\eta - y)\frac{\partial f}{\partial y} + (\zeta - z)\frac{\partial f}{\partial z} = 0.
$$

Если въ этихъ уравненіяхъ будемъ разсматривать x, y, z, какъ перемѣнныя (текущія) координаты, то эти уравненія изобразятъ кривую касанія конуса съ поверхностью. Такимъ образомъ въ приложеніяхъ опредѣляется, такъ называемый, видимый контуръ поверхности для наблюдателя, смотрящаго на нее изъ точки Q, т. е. кривую, отдѣляющую видимую изъ точки Q часть поверхности отъ невидимой или линію, отдѣляющую свѣтъ отъ тѣни на поверхности, погруженной въ пучекъ свѣтовыхъ лучей, исходящихъ изъ точки Q. Если хотимъ опредѣлить тѣнь, бросаемую данною поверхностью на другую, то должны къ уравненію этой поверхности присоединить уравненіе описаннаго конуса, чтобы получить контуръ. ограничивающій эту тѣнь. Уравненіе этого конуса получимъ, если исключимъ x, y, z изъ уравненій (4) и уравненій образующей QM конуса

$$
\frac{X-\xi}{x-\xi} = \frac{Y-\eta}{y-\eta} = \frac{Z-\zeta}{z-\zeta}.
$$

Въ частномъ случаѣ, когда Q находится на безконечности, черезъ исключеніе x, y, z изъ уравненій

$$
f(x, y, z) = 0, \quad A\frac{\partial f}{\partial x} + B\frac{\partial f}{\partial y} + C\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad \frac{X-x}{A} = \frac{Y-y}{B} = \frac{Z-z}{C}
$$

получимъ уравненіе цилиндра, описаннаго около поверхности съ образующими, параллельными направленію (A, B, C). Возвращаясь къ общему случаю (конуса), замѣтимъ, что исключеніе x, y, z можно произвести весьма просто, разсматривая функцію

$$
F(t) = f(\xi + t(X - \xi), \quad \eta + t(Y - \eta), \quad \zeta + t(Z - \zeta))
$$

и замѣчая, что второе изъ уравненій (4) обращается въ $F'(t) = 0$. Слѣдовательно, уравненіе описаннаго конуса получится черезъ исключеніе t изъ уравненій $F(t) = 0$ и $F'(t) = 0$.

662. Особенности. Во всемъ предыдущемъ подразумѣвалось, что въ точкѣ $M(x, y, z)$ не всѣ первыя производныя отъ f по x, y и z равны нулю. Иначе условіе (1) обращалось бы въ тождество и не давало бы никакой связи между dx, dy, dz. Если

$$
(5) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0,
$$

то M будетъ особенная точка, въ томъ отношеніи, что всѣ касательныя къ поверхности въ точкѣ M, вмѣсто того, чтобы лежать въ одной плоскости, образуютъ коническую поверхность. Это можно тотчасъ увидѣть, если напишемъ уравненіе поверхности для точекъ (X, Y, Z), безконечно близкихъ къ M, въ видѣ (§ 376)

$$(X-x)\frac{\partial f}{\partial x}+(Y-y)\frac{\partial f}{\partial y}+(Z-z)\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$+\frac{1}{2}\left[(X-x)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\cdots+2(X-x)(Y-y)\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}+\cdots\right]+\cdots=0$$

Если $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$, вычисленныя для точки M, не равны нулю одновременно, то, отбрасывая безконечно малыя высшаго порядка, видимъ, что въ смежности съ M поверхность уподобляется плоскости (2); такимъ путемъ можно прямо получить уравненіе касательной плоскости. Если же, наоборотъ, координаты точки M удовлетворяютъ уравненіямъ (5), то, пренебрегая безконечно малыми выше 2-го порядка, можно разсматривать точки поверхности, смежныя съ M, какъ лежащія на поверхности конуса второго порядка.

$$(X-x)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+(Y-y)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\cdots+2(X-x)(Y-y)\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}+\cdots=0$$

и т. д. Разысканіе особенныхъ точекъ поверхности (которыя называются также коническими, или двойными, тройными и т. д. точками) производится путемъ, аналогичнымъ тому, которому мы слѣдовали при изученіи плоскихъ кривыхъ (§ 607); характеръ особенной точки опредѣляется разсмотрѣніемъ плоскихъ сѣченій поверхности въ смежности съ разсматриваемой точкою. Надо замѣтить, что на поверхности особенныя точки могутъ примыкать одна къ другой непрерывно и образовать особенныя линіи. Если, напримѣръ, будемъ проектировать какую нибудь плоскую кривую изъ точки, нележащей въ ея плоскости, то получимъ коническую поверхность, на которой кратными линіями будутъ всѣ тѣ образующія, которыя проходятъ черезъ кратную точку разсматриваемой кривой; точно также кратными линіями поверхности вращенія будутъ всѣ параллели, образуемыя кратными точками меридіана и т. д. Другого рода особенности, аналогичныя точкамъ изгиба плоскихъ кривыхъ, вскорѣ намъ встрѣтятся.

663. Соприкасающіяся прямыя. Возвращаясь къ обыкновеннымъ точкамъ, изучимъ форму поверхности въ смежности съ такою точкою. Возьмемъ уравненіе касательной плоскости въ формѣ (3) и вычислимъ алгебраическое разстояніе h отъ этой плоскости до безконечно близкой къ M точки на поверхности. Это разстояніе выражается такъ

$$h = \frac{\delta z - p\,\delta x - q\,\delta y}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

(гдѣ δx, δy, δz разности между координатами M' и M). Мы имѣемъ, далѣе,

$$\delta z = p\,\delta x + q\,\delta y + \tfrac{1}{2}(r\,\delta x^2 + 2\,s\,\delta x\,\delta y + t\,\delta y^2) + \cdots,$$

гдѣ p, q, r, s, t имѣютъ извѣстныя (§ 563) значенія и вычисляются для точки M. Отбрасывая безконечно малыя выше 2-го порядка, имѣемъ, слѣдовательно,

$$h = \frac{r\,dx^2 + 2\,s\,dx\,dy + t\,dy^2}{2\sqrt{1 + p^2 + q^2}}. \tag{6}$$

Всякая пара значеній dx и dy, съ соотвѣтствующимъ ей значеніемъ $dz = p\,dx + q\,dy$ опредѣляетъ направленіе прямой — касательной къ одной изъ безчисленнаго множества кривыхъ, проходящихъ черезъ M по поверхности, и точку M' всегда можно предположить лежащею на одной изъ этихъ кривыхъ. Вращая касательную въ касательной плоскости въ точкѣ M, мы можемъ достигнуть того, чтобы точка M' приняла любое положеніе внутри нѣкоторой, достаточно малой части ς поверхности, составляющей окрестность точки M. Во время полнаго оборота касательной она два раза приметъ такое положеніе, при которомъ h сдѣлается безконечно малою выше второго порядка. Это будутъ тѣ направленія, для которыхъ числитель выраженія (6) обращается въ нуль. Такимъ образомъ, между безчисленнымъ множествомъ касательныхъ, проходящихъ черезъ точку M, можно отличить двѣ прямыя, которыя называются соприкасающимися прямыми, потому что изъ всѣхъ прямыхъ, проходящихъ черезъ M, онѣ тѣснѣе всего примыкаютъ къ поверхности въ смежности съ M. Эти прямыя будутъ мнимыми или вещественными, смотря по тому, будетъ ли $rt - s^2 > 0$ или < 0 *). Въ первомъ случаѣ точка M называется эллиптическою, во второмъ гиперболическою. При $rt - s^2 = 0$ соприкасающіяся прямыя совпадаютъ, и точка M называется параболическою. Если M эллиптическая точка, то h сохраняетъ опредѣленный знакъ для всѣхъ направленій, и вся часть ς поверхности лежитъ съ одной стороны отъ касательной плоскости. Можно поэтому сказать, что M изолированная точка для линіи пересѣченія поверхности съ касательною плоскостью. Если же M

---

*) Условія мнимости или вещественности тѣхъ значеній $\frac{dy}{dx}$, при которыхъ $r\,dx^2 + 2\,s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0$.

гиперболическая точка, то вещественныя соприкасающіяся прямыя опредѣляютъ на касательной плоскости такія двѣ области, что въ одной изъ нихъ $h > 0$, а въ другой $h < 0$; слѣдовательно, въ этомъ случаѣ касательная плоскость пересѣкаетъ ς. Далѣе, если M' лежитъ въ этой плоскости, или общнѣе, если она лежитъ на кривой, для которой касательная плоскость въ M будетъ соприкасающеюся плоскостью, то разстояніе h будетъ либо нуль, либо безконечно малою не ниже 3-го порядка, а потому числитель въ выраженіи (6) долженъ обратиться въ нуль. Отсюда вытекаетъ, что соприкасающіяся прямыя будутъ касательными къ тѣмъ кривымъ, для которыхъ соприкасающаяся плоскость совпадаетъ съ касательною плоскостью къ поверхности *). Въ частности, пересѣченіе поверхности съ касательною плоскостью имѣетъ двѣ вѣтви, проходящія черезъ M и касающіяся въ ней соприкасающихся прямыхъ. Слѣдовательно, M будетъ двойною точкою для этой кривой. Обратно, какъ только нѣкоторая кривая на поверхности касается въ точкѣ M соприкасающейся прямой, h дѣлается безконечно малою выше 2-го порядка, и касательная плоскость будетъ соприкасающеюся плоскостью для такой кривой, или (§ 646) первая кривизна кривой въ этой точкѣ равна 0. Наконецъ, замѣтимъ еще, что если функція $rt - s^2$ непрерывна, то эллиптическія и гиперболическія точки заполняютъ такія области на поверхности, которыя разграничиваются линіями, образованными параболическими точками. Эти линіи будутъ линіями пересѣченія данной поверхности съ поверхностью $rt - s^2 = 0$ (ср. съ § 604).

664. Указательница (индикатриса) Дюпена (Ch. Dupin). Чтобы ближе разсмотрѣть, что происходитъ въ окрестности съ точками двухъ различныхъ родовъ, помѣстимъ начало координатъ въ точку M, а ось z-овъ направимъ по нормали къ поверхности. Знакъ выраженія $rt - s^2$ при этомъ не измѣнится, потому что, какъ мы видѣли, этотъ знакъ характеризуетъ такія геометрическія свойства поверхности, которыя отъ выбора координатныхъ осей, очевидно, не зависятъ. При сдѣланномъ выборѣ мы будемъ имѣть $p = 0$ и $q = 0$ (§ 659) и въ смежности съ точкою M данная поверхность уподобляется параболоиду $z = \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2)$, эллиптическому при $rt - s^2 > 0$, гиперболическому при $rt - s^2 < 0$. Соприкасающіяся прямыя будутъ тѣ именно, мнимыя или вещественныя, прямолинейныя образующія параболоида, которыя лежатъ въ плоскости $z = 0$. Если $rt - s^2 = 0$, то M — параболическая точка и параболоидъ обращается въ параболическій цилиндръ. Пересѣчемъ теперь поверхность двумя плоскостями $z = \pm l$, параллельными касательной плоскости ($z = 0$) и безконечно къ ней близкими. Уравненія сѣченій будутъ

$$rx^2 + 2s\,xy + ty^2 = \pm 2\,l$$

---

*) См. дальше § 665.

и изображаютъ либо пару эллипсовъ (одинъ вещественный, другой мнимый), либо пару дополнительныхъ гиперболъ, смотря по тому, будетъ ли точка M эллиптическая или гиперболическая. Проектируемъ эти сѣченія на касательную плоскость и представимъ себѣ ихъ растянутыми по направленію изъ центра, такъ, чтобы ихъ уравненіе обратилось въ уравненіе $rx^2+2sxy+ty^2=\pm 1$. Вещественная часть этой пары коническихъ сѣченій называется указательницею или индикатрисою Дюпена *). Она пересѣкается каждымъ діаметромъ въ двухъ вещественныхъ точкахъ и ея асимптоты — вещественныя или мнимыя — совпадаютъ съ соприкасающимися прямыми къ поверхности.

665. Замѣчательныя кривыя на поверхности. Изъ всѣхъ линій, которыя можно провести на поверхности, особенно замѣчательны асимптотическія линіи. Это тѣ кривыя, которыя въ каждой свой точкѣ касаются соприкасающейся прямой, т. е. асимптотъ индикатрисы. Асимптотическую линію можно себѣ представить произведенною движеніемъ точки M, которая двигается по соприкасающейся прямой въ M до точки M', затѣмъ по соприкасающейся прямой въ M' до точки M'' и т. д. Если наша точка M, вмѣсто того, чтобы двигаться послѣдовательно по соприкасающимся прямымъ, т. е. постоянно тангенціально къ асимптотамъ индикатрисы, двигалась бы постоянно тангенціально къ осямъ индикатрисы, то описываемая ею линія была бы такъ называемая линія кривизны. Всякая поверхность, слѣдовательно, покрыта сѣтью двухъ системъ линій кривизны, которыя всегда вещественны. Черезъ каждую точку поверхности проходятъ одна линія одной и одна линія другой системы, пересѣкаясь притомъ ортогонально. Черезъ каждую точку поверхности проходятъ также двѣ асимптотическія линіи (вещественныя или мнимыя), одинаково наклоненныя къ обѣимъ линіямъ кривизны (какъ асимптоты гиперболы къ ея осямъ), и образуютъ между собою, вообще, не прямой уголъ. По сдѣланному въ § 663 замѣчанію соприкасающіяся плоскости асимптотической линіи будутъ касательными плоскостями поверхности, если только не постоянно $\frac{1}{\varrho}=0$; въ послѣднемъ случаѣ линія будетъ прямою (§ 639), относительно которой касательная плоскость всегда можетъ быть разсматриваема, какъ соприкасающаяся къ ней (§ 646). Слѣдовательно, для асимптотическихъ линій главная нормаль всегда лежитъ въ касательной плоскости къ поверхности. Съ другой стороны, черезъ каждую точку поверхности проходитъ безчисленное множество кривыхъ, такъ называемыхъ геодезическихъ линій, для которыхъ главная нормаль есть нормаль къ поверхности. Мы увидимъ впослѣдствіи, что кратчайшій путь по поверхности между двумя ея точками (если разстояніе между ними не превос-

*) Французскій геометръ, ученикъ знаменитаго Монжа.

ходитъ извѣстнаго предѣла) есть именно дуга геодезической линіи, черезъ нихъ проходящей. Очевидно, прямая линія есть и геодезическая и асимптотическая на всякой поверхности, потому что каждая ея нормаль можетъ быть разсматриваема, какъ главная.

Линейчатыя поверхности.

666. Когда прямая линія, двигаясь въ пространствѣ, послѣдовательно занимаетъ простую безконечность (∞^1) различныхъ положеній, то она образуетъ такъ называемую линейчатую поверхность.

[Мы говоримъ, что прямая занимаетъ ∞^1 положеній, когда коэффиціенты въ ея уравненіяхъ зависятъ лишь отъ одного независимаго параметра. Если бы эти коэффиціенты зависѣли отъ двухъ независимыхъ параметровъ, то мы сказали бы, что она занимаетъ ∞^2 различныхъ положеній и образуетъ конгруенцію прямыхъ, а не линейчатую поверхность.]

Фиксируя образующую прямую въ нѣкоторомъ положеніи $\mathfrak{g}$, разсмотримъ другое ея положеніе $\mathfrak{g}'$, безконечно близкое къ $\mathfrak{g}$. Общій перпендикуляръ къ прямымъ $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}'$ встрѣчаетъ прямую $\mathfrak{g}$ въ нѣкоторой точкѣ, которая передвигается при движеніи $\mathfrak{g}'$ и стремится къ нѣкоторому предѣльному положенію Q, съ которымъ и совпадетъ при совпаденіи прямой $\mathfrak{g}'$ съ $\mathfrak{g}$ (рис. 84). Эта точка Q

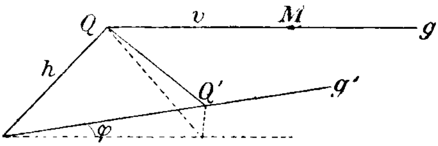

Рис. 84.

называется центральною точкою образующей. Если кратчайшее разстояніе h между двумя безконечно близкими образующими будетъ безконечно малою перваго порядка относительно дуги QQ' кривой (Q) — общаго мѣста центральныхъ точекъ, то поверхность называется косою (windschief) (это и будетъ въ общемъ случаѣ), а кривая (Q) — ея горловою или стрикціонною линіею (Striktionslinie). Если же, наоборотъ, h безконечно малая высшаго порядка, то поверхность называется развертывающеюся (abwickelbar), а кривая Q ея ребромъ возврата (Rückkehrkante).

667. Положимъ, что (a, b, c) обозначаютъ направляющіе, косинусы образующей, а (x, y, z) координаты какой нибудь точки на ней лежащей. Изъ Аналитической Геометріи извѣстно, что уголъ φ между прямыми g и g′ опредѣляется по формулѣ

$$\sin^2\varphi = \Sigma(b\delta c - c\delta b)^2 = (b\delta c - c\delta b)^2 + (c\delta a - a\delta c)^2 + (a\delta b - b\delta a)^2,$$

гдѣ символъ δ обозначаетъ приращенія входящихъ сюда величинъ при переходѣ отъ g къ g′. Но h есть проекція отрѣзка между точками (x, y, z) и $(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z)$ на общій къ прямымъ g и g′ перпендикуляръ, а направляющіе косинусы этого перпендикуляра пропорціональны числамъ $b\delta c - c\delta b$, $c\delta a - a\delta c$, $a\delta b - b\delta a$, поэтому h опредѣляется формулою

$$h = \sum \frac{b\delta c - c\delta b}{\sin\varphi}\,\delta x = \frac{1}{\sin\varphi}\begin{vmatrix} a & \delta a & \delta x \\ b & \delta b & \delta y \\ c & \delta c & \delta z \end{vmatrix}$$

или короче

$$h\sin\varphi = [a, \delta a, \delta x],$$

гдѣ

$$[a, \delta a, \delta x] = \begin{vmatrix} a & \delta a & \delta x \\ b & \delta b & \delta y \\ c & \delta c & \delta z \end{vmatrix}$$

Пренебрегая въ обѣихъ частяхъ равенства безконечно малыми выше третьяго порядка, получимъ

$$h\varphi = [a, da, dx] + \tfrac{1}{2}[a, da, d^2x] + \tfrac{1}{2}[a, d^2a, dx] + \cdots.$$

Для того, чтобы h было безконечно малою выше перваго порядка, необходимо и достаточно, чтобы $[a, da, dx] = 0$. Это равенство и выражаетъ условіе, необходимое и достаточное, чтобы поверхность, образуемая прямою

$$\frac{X-x}{a} = \frac{Y-y}{b} = \frac{Z-z}{c},$$

гдѣ (a, b, c) и (x, y, z) функціи отъ одной независимой перемѣнной, была развертывающеюся. Слѣдуетъ замѣтить, что это условіе не измѣнится, если замѣнимъ косинусы a, b, c какими угодно пропорціональными имъ числами. Замѣтимъ еще, что при выполненіи этого условія въ выраженіи $h\varphi$ пропадутъ и члены третьяго порядка, потому что

$$[a, da, d^2x] + [a, d^2a, dx] = d[a, da, dx].$$

Слѣдовательно, въ развертывающейся поверхности кратчайшее разстояніе между двумя безконечно близкими образующими есть безконечно малая не ниже третьяго порядка относительно дуги ребра возврата.

668. Теорія кривыхъ двоякой кривизны тотчасъ дастъ намъ примѣръ развертывающихся поверхностей. А именно, ясно, что общее мѣсто касательныхъ къ кривой двоякой кривизны есть развертывающаяся поверхность, для которой данная кривая служитъ ребромъ возврата, потому что если (x, y, z) есть точка на кривой, то элементы третьяго столбца въ опредѣлителѣ $[a, da, dx]$ пропорціональны элементамъ перваго (§ 630) и опредѣлитель равенъ нулю. Обратно, если опредѣлитель $[a, da, dx] = 0$, то всегда можно на поверхности, образуемой прямою

$$\frac{X-x}{a} = \frac{Y-y}{b} = \frac{Z-z}{c}$$

найти такую кривую, касательныя которой будутъ образующими поверхности. Дѣйствительно, координаты любой точки на образующей можно представить формулами

$$X = x + av, \quad Y = y + bv, \quad Z = z + cv,$$

гдѣ v алгебраическая длина отрѣзка между разсматриваемою точкою и точкою (x, y, z). Разсматривая v, какъ функцію отъ той же независимой перемѣнной, отъ которой зависятъ числа x, y, z, a, b, c, мы можемъ разсматривать X, Y, Z какъ координаты точекъ нѣкоторой кривой на данной поверхности. Направляющіе косинусы касательной въ этой кривой въ точкѣ (X, Y, Z) пропорціональны числамъ $dX = dx + v\,da + a\,dv$, $dY = dy + v\,db + b\,dv$, $dZ = dz + v\,dc + c\,dv$. Чтобы касательная совпала съ образующей, необходимо и достаточно, чтобы можно было опредѣлить v такъ, чтобы эти числа были пропорціональны числамъ a, b, c, т. е. чтобы было

$$\frac{dx + v\,da}{a} = \frac{dy + v\,db}{b} = \frac{dz + v\,dc}{c}.$$

А при условіи $[a, da, dx] = 0$ это всегда возможно, потому что оно есть не что иное, какъ условіе совмѣстности написанныхъ двухъ уравненій съ одною неизвѣстною v. Итакъ, всякую развертывающуюся поверхность можно разсматривать, какъ общее мѣсто касательныхъ къ кривой двоякой кривизны.

[**Примѣчаніе.** Въ частномъ случаѣ, эта кривая можетъ обратиться въ точку, черезъ которую тогда и проходятъ всѣ образующія, такъ что получается коническая поверхность; эта въ свою очередь превращается въ цилиндрическую, когда вершина конуса удаляется въ безконечность и образующія дѣлаются параллельными между собою.

Можно отдать себѣ отчетъ въ этомъ свойствѣ, замѣтивъ слѣдующее. Если мы проведемъ черезъ $\mathfrak{g}$ плоскость, параллельную $\mathfrak{g}'$, то разстояніе точки Q' отъ этой плоскости будетъ равно h, а такъ какъ h третьяго порядка, то, вообще говоря, проведенная нами плоскость совпадетъ съ соприкасающеюся плоскостью къ ребру возврата въ точкѣ Q (§ 642). Чтобы доказать, что $\mathfrak{g}$ — касательная къ ребру возврата достаточно показать, что разстояніе между $\mathfrak{g}$ и проекціею точки Q' на соприкасающуюся плоскость будетъ безконечно малою выше перваго порядка. А такъ какъ это разстояніе равно произведенію QQ' на безконечно малый уголъ, то теорема и доказана.

669. Положимъ теперь, что x, y, z обозначаютъ координаты центральной точки и поставимъ себѣ задачей опредѣлить касательную плоскость въ какой нибудь точкѣ M линейчатой поверхности. Образующая $\mathfrak{g}$ опредѣляется координатами x, y, z и направляющими косинусами a, b, c. Всѣ эти величины, какъ уже было сказано, будутъ функціями отъ одной независимой перемѣнной u, за которую можно принять дугу ребра возврата или стрикціонной линіи, отсчитываемую отъ произвольной начальной точки A на кривой. Точка M на данной образующей опредѣлится тогда ея разстояніемъ v отъ центральной точки. Слѣдовательно, координаты точки M выражаются въ двухъ параметрахъ u и v формулами

$$X = x + av, \quad Y = y + bv, \quad Z = z + cv.$$

Кромѣ того,

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \frac{dx}{du} + v\frac{da}{du}, \quad \frac{\partial Y}{\partial u} = \frac{dy}{du} + v\frac{dv}{du}, \quad \frac{\partial Z}{\partial u} = \frac{dz}{du} + v\frac{dc}{du}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial X}{\partial v} = a, \quad \frac{\partial Y}{\partial v} = b, \quad \frac{\partial Z}{\partial v} = c.$$

Если поверхность развертывающаяся, то $\frac{dx}{du} = a$, $\frac{da}{du} = \frac{\lambda}{\varrho}$ и т. д., а послѣднія формулы обращаются въ

$$\frac{\partial X}{\partial u} = a + \frac{v\lambda}{\varrho}, \quad \frac{\partial Y}{\partial u} = b + \frac{v\mu}{\varrho}, \quad \frac{\partial Z}{\partial u} = c + \frac{v\nu}{\varrho}.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ направляющіе косинусы $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ нормали къ поверхности (§ 660) будутъ пропорціональны опредѣлителямъ

$$\frac{\partial(Y, Z)}{\partial(u, v)}, \quad \frac{\partial(Z, X)}{\partial(u, v)}, \quad \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)},$$

которые сами пропорціональны опредѣлителямъ матриссы

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix},$$

т. е. косинусамъ α, β, γ бинормали. Какъ видимъ, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ не зависятъ отъ v. Слѣдовательно, касательная плоскость въ точкѣ развертывающейся поверхности касается поверхности вдоль всей образующей, проходящей черезъ эту точку, иными словами, во всѣхъ точкахъ данной образующей касательныя плоскости совпадаютъ въ одну.

670. Въ случаѣ косой линейчатой поверхности $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, на основаніи тѣхъ же формулъ § 660, будутъ пропорціональны числамъ

$$b(dz+v\,dc)-c(dy+v\,db)=(b\,dz-c\,dy)+v(b\,dc-c\,db) \text{ и т. д.}$$

Въ то же время, обозначая черезъ α, β, γ направляющіе косинусы общаго перпендикуляра къ $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}'$, имѣемъ

$$\frac{\alpha}{b\,dc-c\,db}=\frac{\beta}{c\,da-a\,dc}=\frac{\gamma}{a\,db-b\,da}=\frac{1}{\varphi},$$

и аналогично, обозначая черезъ λ, μ, ν направляющіе косинусы общаго перпендикуляра къ $\mathfrak{g}$ и QQ', также имѣемъ

$$\frac{\lambda}{b\,dz-c\,dy}=\frac{\mu}{c\,dx-a\,dz}=\frac{\nu}{a\,dy-b\,dx}=\frac{1}{h}.$$

Поэтому, положивъ $h=R\varphi$, находимъ, что $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ пропорціональны числамъ $\lambda+\frac{v}{R}\alpha$, $\mu+\frac{v}{R}\beta$, $\nu+\frac{v}{R}\gamma$ и совпадаютъ съ λ, μ, ν при $v=0$. На основаніи сказаннаго, нормали къ поверхности, соотвѣтствующія значеніямъ 0 и v параметра v, составляютъ между собою уголъ ψ, опредѣляемый формулами

$$\cos\psi=\mathfrak{L}\lambda+\mathfrak{M}\mu+\mathfrak{N}\nu,\quad \sin\psi=\mathfrak{L}\alpha+\mathfrak{M}\beta+\mathfrak{N}\gamma.$$

Изъ равенствъ

$$\frac{\mathfrak{L}}{\lambda+\frac{v}{R}\alpha}=\frac{\mathfrak{M}}{\mu+\frac{v}{R}\beta}=\frac{\mathfrak{N}}{\nu+\frac{v}{R}\gamma}=\frac{\mathfrak{L}\lambda+\mathfrak{M}\mu+\mathfrak{N}\nu}{1}=\cos\psi$$

(потому что $\lambda^2+\mu^2+\nu^2=1$, $\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma=0$), найдемъ

$$\mathfrak{L}=\left(\lambda+\frac{v}{R}\alpha\right)\cos\psi,\quad \mathfrak{M}=\left(\mu+\frac{v}{R}\beta\right)\cos\psi,\quad \mathfrak{N}=\left(\nu+\frac{v}{R}\gamma\right)\cos\psi,$$

а умножая на α, β, γ и складывая, получимъ

$$\sin\psi=\frac{v}{R}\cos\psi,$$

т. е.

$$\operatorname{tg}\psi=\frac{v}{R}.$$

Эта формула, найденная Шалемъ (Chasles) показываетъ нижеслѣдующее. Когда точка касанія, выйдя изъ начальнаго положенія на горловой линіи, описываетъ образующую косой линейчатой поверхности, то касательная плоскость поворачивается на уголъ, тангенсъ котораго пропорціоналенъ пройденному пути. Для опредѣленія положеній безчисленнаго множества касательныхъ плоскостей въ различныхъ точкахъ одной и той же образующей достаточно знать число R, которое поэтому и называется параметромъ распредѣленія касательныхъ плоскостей. Чтобы интерпретировать геометрическій характеръ теоремы Шаля, примемъ за ось x-овъ прямую $\mathfrak{g}$, за ось y-овъ предѣльное положеніе общаго перпендикуляра къ прямымъ $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}'$; тогда уравненія нормали въ точкѣ M примутъ видъ

$$X = v, \quad Y = Z \operatorname{tg} \psi$$

и формула Шаля дастъ $XZ = RY$. Слѣдовательно, нормали къ косой линейчатой поверхности вдоль одной и той же образующей лежатъ на поверхности гиперболическаго параболоида.

671. Обращаемся снова къ развертывающимся поверхностямъ и замѣтимъ слѣдующее. Если кривая (M), координаты точекъ которой X, Y, Z опредѣляются формулами

$$X = x + av, \quad Y = y + bv, \quad Z = z + cv,$$

пересѣкаетъ всѣ образующія подъ прямымъ угломъ, или, какъ говорятъ, будетъ ортогональною траекторіей образующихъ, то по условію ортогональности будемъ имѣть

$$a\,dX + b\,dY + c\,dZ = \Sigma a\,dX = 0.$$

Но по формуламъ (7), имѣемъ

$$dX = \left(a + \frac{\lambda v}{\varrho}\right) du + a\,dv \quad \text{и т. д.}$$

такъ что $\Sigma a\,dX = d(u + v)$ и условіе $\Sigma a dX = 0$ даетъ $u + v = \text{const.}$, т. е. $\smile AQ + QM = \text{const.}$ Отсюда слѣдуетъ, что всякая ортогональная траекторія отсѣкаетъ на любыхъ двухъ образующихъ отрѣзки, разность которыхъ равна длинѣ дуги ребра возврата между точками касанія этихъ образующихъ*). Поэтому, если имѣемъ гибкую нерастяжимую нить, закрѣпленную въ точкѣ A и натянутую по ребру возврата, и будемъ постепенно свивать эту нить, удерживая ее постоянно натянутою, то каждая ея точка будетъ описывать нѣкоторую ортогональную траекторію (M). На этомъ основаніи кривыя (M) называютъ эвольвентами (развертками) ребра возврата, которымъ можетъ быть какая угодно кривая.

672. Обратно, ребро возврата называется эволютою каждой изъ кривыхъ (M), потому что (какъ и въ плоскихъ кривыхъ) ея

---

*) $\smile AQ + QM = \smile AQ' + Q'M', \quad \smile QQ' = QM - Q'M'.$

касательныя будутъ нормали кривыхъ (M). Изслѣдуемъ теперь, относя все къ основному тріэдру одной изъ кривыхъ (M), какому условію должны удовлетворять нормали этой кривой, для того, чтобы онѣ могли образовать развертывающуюся поверхность. Разсматривая одну изъ этихъ нормалей, обозначимъ, черезъ φ уголъ, образуемый ею съ главною нормалью, тогда направляющіе косинусы разсматриваемой нормали опредѣлятся формулами

$$l = \alpha \sin\varphi + \lambda \cos\varphi, \quad m = \beta \sin\varphi + \mu \cos\varphi, \quad n = \gamma \sin\varphi + \nu \cos\varphi,$$

а формулы

$$l' = \alpha \cos\varphi - \lambda \sin\varphi, \quad m' = \beta \cos\varphi - \mu \sin\varphi, \quad n' = \gamma \cos\varphi - \nu \sin\varphi$$

опредѣлятъ косинусы другой нормали, которая вмѣстѣ съ первою и съ касательною образуетъ ортогональный тріэдръ, удовлетворяющій условію

$$\begin{vmatrix} a & l' & l \\ b & m' & m \\ c & n' & n \end{vmatrix} = 1.$$

Но мы уже видѣли (§ 667), что разсматриваемая нормаль, при передвиженіи точки M по кривой (M) образуетъ развертывающуюся поверхность тогда и только тогда, когда $[l, dl, a] = 0$. Замѣчая, что $dl = (\alpha \cos\varphi - \lambda \sin\varphi)\, d\varphi + \sin\varphi\, d\alpha + \cos\varphi\, d\lambda$ и пользуясь формулами Френе (§§ 635, 636) $d\alpha = \lambda\eta$, $d\lambda = -a\varepsilon - \alpha\eta$, найдемъ

$$dl = l'(d\varphi - \eta) - a\varepsilon \cos\varphi \text{ и т. д.}$$

Поэтому опредѣлитель $[l, dl, a]$ приведется къ $[l, l', a](d\varphi - \eta)$, т. е. къ $\eta - d\varphi$, такъ какъ $[l, l', a] = -1$. Вышеупомянутое условіе приведется, слѣдовательно, къ $\eta = d\varphi$ или

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\tau} \text{ *}). \tag{8}$$

Геометрическое значеніе этого условія можно обнаружить, введя въ разсмотрѣніе величину вращенія ω разсматриваемой нормали относительно главной. Согласно опредѣленію этой величины, данному въ § 637, мы имѣемъ

$$\omega \sin\varphi = \Sigma \lambda\, dl = (d\varphi - \eta) \Sigma \lambda l' = (\eta - d\varphi) \sin\varphi,$$

откуда $\omega = \eta - d\varphi$, что очевидно само по себѣ. Поэтому наше условіе требуетъ, чтобы ω было равно нулю, а это значитъ, что

---

*) Отсюда, между прочимъ, слѣдуетъ, что φ не равно постоянному, если кривая не плоская, а потому ни главныя нормали, ни бинормали не могутъ образовать развертывающейся поверхности.

въ то время, какъ нѣкоторая точка движется по кривой двоякой кривизны, развертывающіяся поверхности описываетъ всякая ея нормаль, двигающаяся въ нормальной плоскости (въ которой фиксирована главная нормаль) такъ, что въ пространствѣ она передвигается перпендикулярно къ этой плоскости.

673. Въ заключеніе докажемъ еще двѣ теоремы, непосредственно вытекающія изъ предыдущаго:

a) Изъ послѣдняго замѣчанія слѣдуетъ, что движеніе образующей происходитъ такимъ образомъ, что соприкасающаяся плоскость къ ребру возврата (Q) всегда остается перпендикулярною къ нормальной плоскости кривой (M) *). Иными словами, нормальная плоскость къ эвольвентѣ совпадаетъ со спрямляющею плоскостью эволюты.

b) Найдя одну функцію φ, удовлетворяющую условію (8), мы получимъ безчисленное множество другихъ, удовлетворяюшихъ тому же условію, прибавивъ къ найденной функціи произвольную постоянную. Отсюда вытекаетъ, что образующія развертывающейся поверхности не перестаютъ быть таковыми, если повернемъ ихъ всѣ на произвольный уголъ около одной изъ ихъ ортогональныхъ траекторій. Ребра возврата получаемыхъ такимъ образомъ развертывающихся поверхностей представляютъ безчисленное множество эволютъ данныхъ кривыхъ.

[**Примѣчаніе.** Аналитическую теорію эволютъ и эвольвентъ (развертывающихъ и развертокъ) читатель можетъ найти у Гурса „Курсъ математическаго анализа", стр. 520, § 231, т. I.].

Огибающія поверхности.

674. Разсмотримъ семейство поверхностей, изображаемое уравненіемъ $f(x, y, z, a) = 0$, гдѣ a независимый перемѣнный параметръ. Любая изъ поверхностей семейства, соотвѣтствующая данному значенію a, вообще говоря, пересѣкается съ другою, соотвѣтствующею значенію $a+h$ того же параметра, по нѣкоторой кривой. Эта кривая, съ приближеніемъ h къ нулю, можетъ стремиться къ нѣкоторому предѣльному положенію на первой поверхности. Въ этомъ предѣльномъ положеніи она называется характеристикою данной поверхности разсматриваемаго семейства. Общее мѣсто характеристикъ всѣхъ поверхностей даннаго семейства называется огибающею

*) Потому что соприкасающуюся плоскость къ кривой (Q) въ точкѣ Q можно разсматривать, какъ плоскость, проходящую черезъ образующую QM и безконечно близкую точку Q'.

(Enveloppe) всѣхъ этихъ поверхностей. Можетъ также случиться, что поверхности (a) и $(a+h)$ не пересѣкаются, какъ бы мало h ни было, но на поверхности (a) могутъ быть точки наибольшаго сближенія съ поверхностью $(a+h)$ (ср. съ § 619), т. е. точки, которыя можно разсматривать, пренебрегая безконечно малыми порядка, высшаго чѣмъ h, какъ точки, общія обѣимъ поверхностямъ. Въ этихъ случаѣ характеристика поверхности (a) есть предѣльное положеніе общаго мѣста этихъ точекъ при безконечно маломъ h. Съ помощью соображеній, аналогичныхъ тѣмъ, которыми мы пользовались при разысканіи огибающей плоскихъ кривыхъ, тотчасъ доказывается, что **уравненіе огибающей поверхности получается черезъ исключеніе параметра a изъ уравненій $f=0$ и $\frac{\partial f}{\partial a}=0$.** Легко также доказать, что **всякая поверхность семейства касается огибающей вдоль всей своей характеристики.** Для этого стоитъ только замѣтить, что уравненіе огибающей есть не что иное, какъ уравненіе самого семейства поверхностей $f(x, y, z, a)=0$, если въ немъ a разсматривается, какъ функція отъ координатъ, удовлетворяющая условію $\frac{\partial f}{\partial a}=0$. Первыя производныя лѣвой части уравненія огибающей будутъ, слѣдовательно,

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial z}$$

и приводятся къ $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$, какъ и въ случаѣ a постояннаго*).

675. Примѣры. Замѣчательный примѣръ огибающей даетъ семейство плоскостей. Характеристика плоскости, очевидно, прямая линія, слѣдовательно, огибающая будетъ линейчатою поверхностью, а на основаніи послѣдней теоремы, она касается каждой изъ плоскостей семейства вдоль всей образующей, а потому она будетъ развертывающеюся поверхностью. Обратно, на основаніи сказаннаго въ § 669, всякая развертывающаяся поверхность есть огибающая соприкасающихся плоскостей нѣкоторой кривой (ребра возврата). Исходя изъ этого, легко вывести важный аналитическій характеристическій признакъ развертывающихся поверхностей. Уравненіе касательной плоскости къ любой поверхности есть

$$Z=pX+qY+(z-px-qy).$$

Чтобы поверхность была развертывающеюся, необходимо и достаточно, чтобы p, q, $z-px-qy$ были функціями одного независимаго параметра. А для этого необходимо и достаточно (§ 578), чтобы Якобіева матрисса этихъ трехъ функцій имѣла всѣ миноры второго порядка, равные нулю. Такъ какъ

$$\frac{\partial p}{\partial x}=r, \quad \frac{\partial q}{\partial x}=s, \quad \frac{\partial}{\partial x}(z-px-qy)=-(rx+sy),$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}=s, \quad \frac{\partial q}{\partial y}=t, \quad \frac{\partial}{\partial y}(z-px-qy)=-(sx+ty),$$

*) Откуда и слѣдуетъ, что въ любой точкѣ характеристики касательныя плоскости къ огибающей и огибаемой совпадаютъ.

то эта матрисса приводится къ

$$\begin{vmatrix} r & s & rx+sy \\ s & t & sx+ty \end{vmatrix} \text{ и эквивалентна къ } \begin{vmatrix} r & s & 0 \\ s & t & 0 \end{vmatrix}.$$

Чтобы всѣ миноры второго порядка были нулями, необходимо и достаточно, чтобы $rt-s^2$ было равио 0. Итакъ, развертывающіяся поверхности характеризуются тѣмъ, что для нихъ $rt-s^2=0$. Иными словами, это единственныя поверхности, всѣ точки которыхъ параболическія (§ 663). Замѣтимъ, что для косыхъ линейчатыхъ поверхностей всегда $rt-s^2<0$, потому что черезъ каждую точку ихъ всегда проходитъ вещественная асимптотическая линія, а именно, прямолинейная образующая. На развертывающейся поверхности оба семейства асимптотическихъ линій совпадаютъ въ одно — семейство прямолинейныхъ образующихъ; но, кромѣ того, существуетъ еще одна изолированная асимптотическая линія - ребро возврата. Это не противорѣчить ранѣе сказанному, такъ какъ легко показать (см. § 693, b), что на ребрѣ возврата r, s и t обращаются въ безконечность.

676. Положимъ теперь, что разсматривается дважды безконечная система поверхностей, изображаемыхъ уравненіемъ $f(x, y, z, a, b)=0$ для всевозможныхъ паръ значеній независимыхъ параметровъ a и b. Фиксируемъ одну изъ этихъ поверхностей S, соотвѣтствующую данной парѣ значеній (a_0, b_0) параметровъ, и, выбравъ произвольно нѣкоторую функцію φ, положимъ

$$b=b_0+\varphi(a)-\varphi(a_0).$$

Такимъ образомъ разсматриваемый случай сведется къ разсмотрѣнному въ предыдущемъ §, и на поверхности S получится нѣкоторая характеристика, сооотвѣтствующая выбранной функціи φ. Безчисленному множеству функцій φ соотвѣтствуетъ безчисленное множество характеристикъ; всѣ эти характеристики проходятъ черезъ нѣкоторыя опредѣленныя точки на поверхности S. Дѣйствительно, характеристика, соотвѣтствующая нѣкоторой функціи φ, удовлетворяетъ условію

$$\frac{\partial f}{\partial a}+\frac{\partial f}{\partial b}\varphi'(a)=0,$$

и на ней лежатъ тѣ точки S, для которыхъ $\frac{\partial f}{\partial a}=0$, $\frac{\partial f}{\partial b}=0$. Эти точки, какъ видимъ, не зависятъ отъ выбора функцій φ. Въ нашемъ случаѣ, въ противоположность первому, на поверхности S не существуетъ линіи, образующей, при переходѣ отъ S къ другой поверхности системы, огибающую, и лишь отдѣльныя точки, общее мѣсто которыхъ при томъ же переходѣ и будетъ огибающею поверхностью данной системы *). Уравненіе этой огибающей получается черезъ исключеніе параметровъ a и b изъ уравненій

$$f=0, \quad \frac{\partial f}{\partial a}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial b}=0.$$

*) Ее называютъ огибающею второго рода.

И въ этомъ случаѣ огибающая касается всѣхъ огибаемыхъ. Въ частности каждую поверхность можно разсматривать, какъ огибающую ея касательныхъ плоскостей.

677. Иногда система поверхностей задается уравненіемъ $f(x, y, z, a, b, c, \ldots) = 0$, при чемъ между n параметрами $a, b, c, \ldots$ существуетъ ν соотношеній, гдѣ $\nu = n - 1$ или $n - 2$, смотря по тому, имѣемъ ли дѣло съ семействомъ поверхностей, зависящихъ отъ одного произвольнаго параметра, или съ системою, зависящею отъ двухъ такихъ параметровъ, или, какъ говорятъ, съ простою или двойною безконечностью поверхностей. Чтобы и здѣсь получить уравненіе огибающей, надо выразить, что въ матриссѣ

$$\left|\begin{array}{cccc} \frac{\partial f}{\partial a} & \frac{\partial f}{\partial b} & \frac{\partial f}{\partial c} & \ldots \\ \frac{\partial \varphi}{\partial a} & \frac{\partial \varphi}{\partial b} & \frac{\partial \varphi}{\partial c} & \ldots \\ \frac{\partial \psi}{\partial a} & \frac{\partial \psi}{\partial b} & \frac{\partial \psi}{\partial c} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right|$$

всѣ миноры порядка $\nu + 1$ равны нулю. Такимъ образомъ получаются $n - \nu$ уравненій и искомое уравненіе получится черезъ исключеніе n параметровъ изъ уравненія поверхности, данныхъ ν соотношеній между параметрами, и $n - \nu$ полученныхъ уравненій. Можетъ также случиться, что въ уравненіе системы или семейства поверхностей параметры и координаты входятъ неявно, т. е. что уравненіе это имѣетъ видъ $f(u, v, w, \ldots) = 0$, гдѣ $u, v, w, \ldots$ функціи отъ x, y, z и параметровъ; но въ этомъ случаѣ ясно, что частныя производныя по параметру a получатся по формуламъ

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial a} + \cdots \text{ и т. д.}$$

678. Упражненія. a) Найдемъ огибающую всѣхъ поверхностей, гомотетическихъ съ данною поверхностью $f(x, y, z) = 0$ относительно нѣкотораго центра Q. Для этого сперва замѣтимъ, что если ξ, η, ζ будутъ координаты точки Q, и положимъ

$$F(t) = f(\xi + t(x - \xi), \quad \eta + t(y - \eta), \quad \zeta + t(z - \zeta)),$$

то уравненіе $F(t) = 0$ при всякомъ t изображаетъ одну изъ разсматриваемыхъ поверхностей, и въ частности при $t = 1$ данную поверхность. Такъ какъ уравненіе искомой огибающей получается черезъ исключеніе t изъ уравненій $F(t) = 0$ и $F'(t) = 0$, то оказывается, что (§ 661) эта огибающая будетъ конусъ, описанный изъ данной точки около данной поверхности. Если данная поверхность будетъ, напримѣръ, поверхность эллипсоида, отнесенная къ его осямъ, то, полагая

$$f = -1 + \sum \frac{x^2}{a^2}, \quad f_0 = -1 + \sum \frac{\xi^2}{a^2}, \quad f_1 = -1 + \sum \frac{\xi x}{a^2},$$

находнмъ $F(t) = (f+f_0-2f_1)t^2-2(f_0-f_1)t+f_0$; достаточно приравнять нулю дискриминантъ $ff_0-f_1^2$ этого уравненія, чтобы получить уравненіе описаннаго около эллипсоида конуса

$$\left(\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}-1\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)=\left(\frac{\xi x}{a^2}+\frac{\eta y}{b^2}+\frac{\zeta z}{c^2}-1\right)^2.$$

b) Каналомъ называютъ поверхность, огибающую семейство шаровъ одного и того же радіуса, центры которыхъ находятся на данной кривой. Взявъ уравненіе поверхности шара

$$(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2=R^2,$$

въ которыхъ координаты центра x, y, z можно разсматривать, какъ функціи одного параметра, а именно длины дуги линіи центровъ, и, дифференцируя его по этому параметру, получимъ уравненіе

$$a(X-x)+b(Y-y)+c(Z-z)=0, \tag{9}$$

и видимъ, что характеристика лежитъ въ нормальной плоскости линіи центровъ. Отсюда слѣдуетъ, что каналъ можно разсматривать, какъ поверхность, образуемую окружностью постояннаго круга, двигающагося въ каждое мгновеніе по направленію, перпендикулярному къ плоскости этого круга. Уравненіе канала получимъ, исключая параметръ s изъ уравненія шара и уравненія (9), въ которыхъ x, y, z, a, b, c — функціи отъ s. Аналогичнымъ образомъ поступаютъ при разысканіи огибающей любого семейства шаровъ (т. е. системы шаровъ, въ уравненіи которыхъ всѣ коэффиціенты функціи одного независимаго параметра). Въ правой части уравненія (9) надо будетъ поставить вмѣсто нуля выраженіе $-R\frac{dR}{ds}$. Въ общемъ случаѣ характеристика уже не будетъ большимъ кругомъ шара и тогда только будетъ вещественною, когда абсолютная величина $\frac{dR}{ds}$ не >1 *). Иными словами, не существуетъ вещественной огибающей, когда увеличеніе или уменьшеніе объема шара идетъ быстрѣе, чѣмъ передвиженіе его центра. Въ частности, когда $R=s+\text{const.}$, $\left(\frac{dR}{ds}=1\right)$, огибающая обращается въ кривую линію — эвольвенту линіи центровъ (§ 671), и огибаемые шары будутъ аналогичны соприкасающимся кругамъ плоской кривой (срав. § 626, f). Напротивъ того, соприкасающіеся шары кривой двоякой кривизны всегда имѣютъ огибающую поверхность, а именно — общее мѣсто соприкасающихся круговъ данной кривой.

c) Предложимъ себѣ найти огибающую (2-го рода) плоскостей $\alpha x+\beta y+\gamma z=l$, предполагая, что разстояніе l отъ начала координатъ связано съ косинусами α, β, γ соотношеніемъ

$$\frac{\alpha^2}{l^2-a^2}+\frac{\beta^2}{l^2-b^2}+\frac{\gamma^2}{l^2-c^2}=0.$$

Здѣсь α, β, γ, l — параметры, удовлетворяющіе соотношенію (10) и слѣдую-

---

*) Изслѣдованіе здѣсь аналогично изслѣдованію въ § 626, f.

щему: $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$. Поэтому намъ нужно (§ 677) разсмотрѣть матриссу

$$\left|\begin{array}{cccc} \alpha & \beta & \gamma & 0 \\ x & y & z & 1 \\ \dfrac{\alpha}{l^2-a^2} & \dfrac{\beta}{l^2-b^2} & \dfrac{\gamma}{l^2-c^2} & \sigma \end{array}\right|,$$

гдѣ для сокращенія положено

$$\sigma=\frac{l\,\alpha^2}{(l^2-a^2)^2}+\frac{l\,\beta^2}{(l^2-b^2)^2}+\frac{l\,\gamma^2}{(l^2-c^2)^2}.$$

При помощи извѣстныхъ преобразованій эту матриссу можно представить въ видѣ

$$\left|\begin{array}{cccc} \dfrac{x}{\alpha}\sigma-\dfrac{1}{l^2-a^2} & \dfrac{y}{\beta}\sigma-\dfrac{1}{l^2-b^2} & \dfrac{z}{\gamma}\sigma-\dfrac{1}{l^2-c^2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ \dfrac{1}{l^2-a^2} & \dfrac{1}{l^2-b^2} & \dfrac{1}{l^2-c^2} & \sigma \end{array}\right|.$$

Для того, чтобы всѣ ея миноры 3-го порядка обратились въ нуль, мы должны имѣть

$$\frac{x}{\alpha}\sigma-\frac{1}{l^2-a^2}=\frac{y}{\beta}\sigma-\frac{1}{l^2-b^2}=\frac{z}{\gamma}\sigma-\frac{1}{l^2-c^2}.$$

Общую величину этихъ трехъ чиселъ получимъ, умножая первое на α^2, второе на β^2, третье на γ^2, и складывая. Принимая во вниманіе равенство (10) получимъ такимъ образомъ, что искомая величина есть $l\sigma$, такъ что

$$x=l\alpha+\frac{1}{l^2-a^2}\cdot\frac{\alpha}{\sigma},\quad y=l\beta+\frac{1}{l^2-b^2}\cdot\frac{\beta}{\sigma},\quad z=l\gamma+\frac{1}{l^2-c^2}\cdot\frac{\gamma}{\sigma}.$$

Возвышеніемъ въ квадратъ и сложеніемъ найдемъ еще

$$x^2+y^2+z^2=l^2+\frac{2l}{\sigma}\sum\frac{\alpha^2}{l^2-a^2}+\frac{1}{\sigma^2}\sum\frac{\alpha^2}{(l^2-a^2)^2}=l^2+\frac{1}{l\sigma}.$$

Поэтому можно написать

$$x=\frac{l\alpha}{l^2-a^2}\left(l^2-a^2+\frac{1}{l\sigma}\right)=\frac{l\alpha}{l^2-a^2}\,(x^2+y^2+z^2-a^2) \text{ и т. д.},$$

слѣдовательно,

$$\frac{x}{x^2+y^2+z^2-a^2}=\frac{l\alpha}{l^2-a^2},\quad \frac{y}{x^2+y^2+z^2-b^2}=\frac{l\beta}{l^2-b^2},$$

$$\frac{z}{x^2+y^2+z^2-c^2}=\frac{l\gamma}{l^2-c^2}.$$

Умножая еще на x, y, z и складывая, находимъ уравненіе

$$\sum\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2-a^2}=\sum\frac{l\alpha x}{l^2-a^2}=l^2\sum\frac{\alpha^2}{l^2-a^2}+\frac{1}{\sigma}\sum\frac{l\,\alpha^2}{(l^2-a^2)^2}=1,$$

которое легко приводится къ болѣе простому виду

$$\frac{a^2 x^2}{x^2+y^2+z^2-a^2}+\frac{b^2 y^2}{x^2+y^2+z^2-b^2}+\frac{c^2 z^2}{x^2+y^2+z^2-c^2}=0.$$

Искомая огибающая есть, слѣдовательно, поверхность волны (§ 384, d).

679 *). Мы получимъ полезное приложеніе изложенной выше теоріи, тѣмъ болѣе важное, что въ немъ заключается дополненіе къ теоріи кривыхъ, занявшись разысканіемъ поверхностей, огибающихъ грани основного тріэдра какой нибудь данной кривой. Возьмемъ три уравненія

$$\Sigma a(X-x)=0, \quad \Sigma \alpha(X-x)=0, \quad \Sigma \lambda(X-x)=0,$$

изображающія соотвѣтственно плоскости: нормальную, соприкасающуюся и спрямляющую. Величины $x, y, \ldots, \mu, \nu$, въ нихъ входящія, будутъ функціи дуги s, удовлетворяющія извѣстнымъ соотношеніямъ (§ 638)

$$\frac{dx}{ds}=a, \quad \frac{da}{ds}=\frac{\lambda}{\varrho}, \quad \frac{d\alpha}{ds}=\frac{\lambda}{\tau}, \quad \frac{d\lambda}{ds}=-\frac{a}{\varrho}-\frac{\alpha}{\tau} \quad \text{и т. д.}$$

Дифференцируя по s уравненія разсматриваемыхъ плоскостей, получимъ соотвѣтственно

$$(11) \qquad \Sigma \lambda(X-x)=\varrho, \quad \Sigma \lambda(X-x)=0, \quad \Sigma l'(X-x)=0,$$

гдѣ въ послѣднемъ уравненіи положено

$$(12) \qquad l'=a\sin\varphi+\alpha\cos\varphi, \quad m'=b\sin\varphi+\beta\cos\varphi, \quad n'=c\sin\varphi+\gamma\cos\varphi,$$

при чемъ $\operatorname{tg}\varphi=\frac{\tau}{\varrho}$. Разсматривая эти уравненія, приходимъ къ слѣдующимъ заключеніямъ:

a) Огибающая соприкасающихся плоскостей, какъ и слѣдовало ожидать, есть такъ называемая развертывающаяся касательныхъ, т. е. такая развертывающаяся поверхность, ребро возврата которой есть данная кривая. Дѣйствительно, уравненія образующей (характеристики) въ данномъ случаѣ будутъ:

$$\Sigma \alpha(X-x)=0, \quad \Sigma \lambda(X-x)=0.$$

Ихъ можно написать въ видѣ

$$\frac{X-x}{\beta\nu-\mu\gamma}=\frac{Y-y}{\gamma\lambda-\nu\alpha}=\frac{Z-z}{\alpha\mu-\lambda\beta},$$

или, по формуламъ

$$a=\beta\nu-\mu\gamma, \quad b=\gamma\lambda-\nu\alpha, \quad c=\alpha\mu-\lambda\beta,$$

---

*) Этотъ § изложенъ здѣсь подробнѣе, чѣмъ въ оригиналѣ.

вытекающимъ изъ формулы (6) § 634,

$$\frac{X-x}{a}=\frac{Y-y}{b}=\frac{Z-z}{c}.$$

Слѣдовательно, образующія будутъ касательными къ данной кривой, что и надо было показать

b) Огибающая нормальныхъ плоскостей называется **полярною поверхностью** (Polardeveloppable); ея образующія суть **оси соприкасающихся круговъ**, т. е. прямыя, проходящія черезъ центръ кривизны*) перпендикулярно къ соприкасающейся плоскости; ихъ называютъ также **полярными прямыми**. Дѣйствительно, въ данномъ случаѣ, уравненія образующей будутъ

$$\sum a\,(X-x)=0, \qquad \sum \lambda\,(X-x)=\varrho$$

и, очевидно, изображаютъ прямую, перпендикулярную къ касательной (a, b, c) и главной нормали (λ, μ, ν), т. е. къ соприкасающейся плоскости; кромѣ того, эта прямая проходитъ черезъ точку $x_1=x+\lambda\varrho$, $y_1=y+\mu\varrho$, $z_1=z+\nu\varrho$, т. е. черезъ центръ кривизны данной кривой въ точкѣ (x, y, z), такъ какъ оба уравненія ея удовлетворяются значеніями $X=x_1$, $Y=y_1$, $Z=z_1$. Мы видѣли (§ 673), что существуетъ безчисленное множество нормалей къ кривой, образующихъ развертывающіяся поверхности, у которыхъ ребрами возврата будутъ эволюты данной кривой. Нетрудно видѣть, что всякая такая нормаль можетъ касаться ребра возврата образуемой ею поверхности только на полярной прямой, а отсюда тотчасъ слѣдуетъ, что полярная поверхность будетъ также **общимъ мѣстомъ всѣхъ эволютъ данной кривой**. Дѣйствительно, точку касанія нормали къ эвольвентѣ можно разсматривать (пренебрегая безконечно малыми высшаго порядка), какъ точку пересѣченія двухъ безконечно близкихъ нормалей, очевидно, лежащую на прямой, по которой пересѣкаются двѣ безконечно близкія нормальныя плоскости, а предѣльное положеніе этой прямой и есть полярная прямая. Впрочемъ, это заключеніе можно провѣрить и вычисленіемъ.

[**Примѣчаніе.** Пусть $M(x, y, z)$ есть данная точка на данной кривой, MM' нормаль, образующая развертывающуюся поверхность и составляющая уголъ φ съ главною нормалью Mn, точка $M'(\xi, \eta, \zeta)$ точка касанія этой нормали съ эволютою и $M'P$ — перпендикуляръ къ Mn, проектирующій M' на главную нормаль. Ясно, что $M'P$ параллельна бинормали Mb, потому что лежитъ въ нормальной плоскости и перпендикулярна главной нормали. Надо показать, что $M'P$ есть полярная прямая, т. е., что P —

*) т. е. черезъ центръ соприкасающагося круга, представляющаго, какъ извѣстно (§ 650), пересѣченіе соприкасающагося шара съ соприкасающеюся плоскостью.

центръ кривизны, т. е., что отрѣзокъ $MP = \varrho$ *). Такъ какъ MM' есть касательная къ эволютѣ, то

$$\frac{d\xi}{\xi - x} = \frac{d\eta}{\eta - y} = \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

или

$$\text{(I)} \qquad d\xi = k(\xi - x), \quad d\eta = k(\eta - y), \quad d\zeta = k(\zeta - z).$$

Съ другой стороны, проектируя $MM'P$ на координатныя оси, найдемъ

$$\text{(II)} \qquad \begin{aligned} \xi &= x + h\lambda + h \operatorname{tg}\varphi\, \alpha \\ \eta &= y + h\mu + h \operatorname{tg}\varphi\, \beta \\ \zeta &= z + h\nu + h \operatorname{tg}\varphi\, \gamma \end{aligned}$$

Дифференцируя эти равенства, пользуясь формулами Френе (§ 638, (11)), и подставляя въ формулы (I), получимъ

$$a\left(1 - \frac{h}{\varrho}\right) ds + \lambda\left(dh + \frac{h \operatorname{tg}\varphi}{\tau} ds - kh\right) + \alpha\left(d(h \operatorname{tg}\varphi) - \frac{h}{\tau} ds - kh \operatorname{tg}\varphi\right) = 0$$

и два подобныхъ же уравненія, получаемыхъ отсюда замѣною a, λ, α на b, μ, β и c, ν, γ. Такъ какъ опредѣлитель этой системы уравненій

$$\begin{vmatrix} a & \lambda & \alpha \\ b & \mu & \beta \\ c & \nu & \gamma \end{vmatrix}$$

по условію (6) § 634 не равенъ нулю, то изъ этой системы получаемъ

$$1 - \frac{h}{\varrho} = 0, \quad dh + \frac{h \operatorname{tg}\varphi}{\tau} ds - kh = 0,$$

$$d(h \operatorname{tg}\varphi) - \frac{h}{\tau} ds - kh \operatorname{tg}\varphi = 0\,.$$

Первое уравненіе даетъ $h = \varrho$, что и требовалось показать. Исключая k изъ другихъ двухъ, легко найдемъ $\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\tau}$ — извѣстный уже раньше результатъ.]

Пользуясь замѣчаніемъ, сдѣланнымъ выше (§ 673, а), можемъ еще утверждать, что эволюты данной кривой будутъ **геодезическими линіями** полярной поверхности. Дѣйствительно, нормальная плоскость эвольвенты (данной кривой) совпадаетъ съ спрямляющею плоскостью эволюты, слѣдовательно, бинормаль послѣдней лежитъ въ нормальной плоскости данной кривой, а потому главная нормаль эволюты, перпендикулярная къ MM', перпендикулярна къ этой плоскости, т. е. къ плоскости, касательной къ полярной поверхности.

---

*) См. Гурса (русскій переводъ, стр. 521).

Иными словами, главная нормаль эволюты совпадаетъ съ нормалью къ полярной поверхности, что и требовалось показать. Составимъ, наконецъ, уравненія ребра возврата полярной поверхности. Для этого, какъ извѣстно, надо къ уравненіямъ образующей присоединить еще третье уравненіе, получаемое дифференцированіемъ второго. Въ этомъ состоитъ общій способъ вывода уравненій ребра возврата, вытекающій изъ самаго опредѣленія его, какъ кривой, къ которой всѣ образующія будутъ касательными. Мы получимъ, такимъ образомъ, уравненія

$$\Sigma a(X-x)=0, \quad \Sigma \lambda(X-x)=\varrho, \quad \Sigma a(X-x)=-\tau\frac{d\varrho}{ds}\cdot$$

которыя даютъ для X, Y, Z значенія (ξ, η, ζ) центра соприкасающагося шара (§ 650). Итакъ, ребро возврата полярной поверхности есть общее мѣсто центровъ соприкасающихся шаровъ.

c) Разсмотримъ, наконецъ, огибающую спрямляющихъ плоскостей. Данная кривая, очевидно, лежитъ на этой поверхности, потому что значенія $X=x$, $Y=y$, $Z=z$ удовлетворяютъ уравненіямъ образующихъ $\Sigma\lambda(X-x)=0$, $\Sigma l'(X-x)=0$. На этой поверхности данная кривая есть, очевидно, геодезическая линія, потому что ея главная нормаль перпендикулярна къ спрямляющей плоскости кривой, т. е. къ касательной плоскости разсматриваемой поверхности. Данная кривая пересѣкаетъ образующія подъ угломъ, вообще говоря, перемѣннымъ, но зависящимъ лишь отъ отношенія двухъ кривизнъ $\frac{\tau}{\varrho}$, которымъ опредѣляется уголъ φ. Если хотимъ опредѣлить ребро возврата этой огибающей поверхности, то можемъ это сдѣлать, опредѣли́въ алгебраическую величину отрѣзка t, отсѣкаемаго данною кривою на образующей, считая этотъ отрѣзокъ отъ точки на ребрѣ возврата. Для этого замѣтимъ сперва, что изъ уравненій образующей тотчасъ получаемъ направляющіе косинусы ея, представивъ ея уравненія въ видѣ

$$\frac{X-x}{l}=\frac{Y-y}{m}=\frac{Z-z}{n},$$

и получаемъ

$$l=a\cos\varphi-\alpha\sin\varphi, \quad m=b\cos\varphi-\beta\sin\varphi, \quad n=c\cos\varphi-\gamma\sin\varphi.$$

Уравненія ребра возврата будутъ

$$\text{(III)} \qquad \Sigma\lambda(X-x)=0, \quad \Sigma l'(X-x)=0, \quad \Sigma dl'(X-x)-\Sigma al'=0.$$

Изъ выраженій l', m', n' имѣемъ

$$dl'=l\,d\varphi+\sin\varphi\,da+\cos\varphi\,d\alpha=l\,d\varphi+\lambda\left[\frac{\sin\varphi}{\varrho}+\frac{\cos\varphi}{\tau}\right]ds.$$

$$dm' = m\,d\varphi + \mu\left[\frac{\sin\varphi}{\varrho} + \frac{\cos\varphi}{\tau}\right]ds,\quad dn' = n\,d\varphi + \nu\left[\frac{\sin\varphi}{\varrho} + \frac{\cos\varphi}{\tau}\right]ds,$$

а

$$\sum a\,l' = \sin\varphi.$$

Поэтому послѣднее изъ уравненій (III) даетъ

$$\frac{d\varphi}{ds}\sum l(X-x) = \sin\varphi,$$

или

$$t\cdot d\varphi = \sin\varphi\,ds.$$

Такъ какъ $al + bm + cn = \cos\varphi$, то $\varphi = \operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{\tau}{\varrho}$ и будетъ уголъ, подъ которымъ данная кривая пересѣкаетъ образующія. Изъ сказаннаго, между прочимъ, ясно, что только для цилиндрическихъ винтовыхъ линій (§ 655, c) огибающая спрямляющихъ плоскостей есть цилиндрическая поверхность. Дѣйствительно, для этихъ линій φ — постоянная, не равная нулю, l, m, n — также постоянныя, какъ было показано въ § 655, c, и образующія параллельны между собою, а ребро возврата будетъ точка въ безконечности. Обратно, чтобы $t = \infty$, необходимо, чтобы $\frac{d\varphi}{ds} = 0$, т. е. $\varphi = \text{const}$.

Кривизна.

680. Теорема Менье (Meusnier). Приступимъ теперь къ изученію кривизны линій на данной поверхности. Разсмотримъ кривую, проходящую черезъ данную точку M на поверхности; пусть (a, b, c) будутъ направляющіе косинусы касательной къ этой кривой, и φ — уголъ, образуемый ея главною нормалью съ нормалью къ поверхности. Возьмемъ точку M' на той же кривой, безконечно близкую къ M, и пусть P есть проекція M' на касательную плоскость въ точкѣ M, а Q — проекція M' на касательную прямую. Пренебрегая безконечно малыми выше 2-го порядка, мы можемъ разсматривать M', какъ лежащую въ соприкасающейся плоскости (§ 645), такъ что $M'Q$ будетъ параллельна главной нормали (рис. 85), а $M'P$, очевидно, параллельна нормали къ поверхности въ точкѣ M. Слѣдовательно, въ треугольникѣ $M'PQ$ уголъ при M' равенъ φ, сторона $M'P$ имѣетъ длину (§ 663)

$$h = \frac{r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2}{2\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

а сторона $M'Q$ равна $\frac{d\sigma^2}{2\varrho}$ (см. § 643, выраженіе w), если $d\sigma$ обозначаетъ дифференціалъ, эквивалентный дугѣ MM'. Подставляя эти величины въ соотношеніе $M'P = M'Q \cdot \cos\varphi$, получаемъ

$$\frac{\cos\varphi}{\varrho} = \frac{ra^2 + 2sab + tb^2}{\sqrt{1+p^2+q^2}}. \tag{13}$$

Разсмотримъ теперь всѣ кривыя на поверхности, имѣющія общую касательную въ точкѣ M, и между ними отличимъ ту, которая лежитъ въ плоскости, опредѣляемой общею касательною (a, b, c)

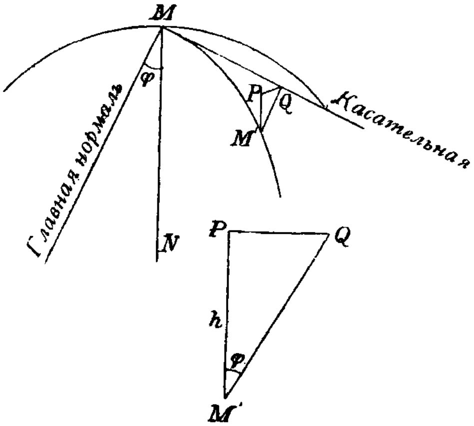

Рис. 85.

и нормалью къ поверхности. Эта кривая называется **нормальнымъ сѣченіемъ** поверхности въ данной точкѣ M. Для всѣхъ этихъ кривыхъ правая часть равенства (13) имѣетъ одно и то же значеніе, поэтому то же самое можно сказать и о лѣвой. Слѣдовательно, если ϱ_0 — радіусъ кривизны нормальнаго сѣченія ($\varphi = 0$), то будемъ имѣть

$$\frac{\cos\varphi}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_0}, \text{ т. е. } \varrho = \varrho_0 \cos\varphi,$$

предполагая ϱ_0 конечнымъ. Итакъ, центръ кривизны какой угодно кривой на поверхности въ данной точкѣ M есть проекція на соприкасающуюся плоскость этой кривой центра кривизны нормальнаго сѣченія поверхности, касающагося данной кривой въ точкѣ M.

681. Примѣры. a) На шарѣ нормальныя сѣченія большіе круги и общій ихъ центръ кривизны есть центръ шара. Отсюда, на основаніи теоремы Менье, слѣдуетъ, что центръ кривизны всякой сферической кривой въ данной точкѣ есть проекція центра шара на соприкасающуюся къ данной кривой плоскость въ данной точкѣ. Это слѣдуетъ также изъ того (§ 650), что для всякой кривой соприкасающійся кругъ есть пересѣченіе соприкасающагося шара съ соприкасающейся плоскостью.

b) На поверхности вращенія параллельные круги будутъ, вообще, наклонными (а не нормальными) сѣченіями. Центры ихъ кривизны лежатъ на оси вращенія, а такъ какъ ихъ плоскости перпендикулярны къ этой оси, то и центры кривизны нормальныхъ сѣченій, касающихся параллелей, будутъ также лежать на оси. Замѣчая, что сѣченіе поверхности плоскостью, проведенною черезъ данную на поверхности точку M перпендикулярно къ касательной къ меридіану въ точкѣ M, будетъ, очевидно, нормальнымъ сѣченіемъ, касающимся параллели въ точкѣ M, заключаемъ, что центръ кривизны плоскаго сѣченія поверхности вращенія, проведеннаго перпендикулярно къ меридіану черезъ точку M, соотвѣтствующій этой точкѣ, лежитъ на оси вращенія.

682. Для асимптотической кривой, равно какъ и для всякой кривой, касающейся ея въ точкѣ M, правая часть равенства (13) равна нулю, а потому и $\frac{\cos\varphi}{\varrho} = 0$. Это соотношеніе удовлетворяется въ каждой точкѣ асимптотической линіи, такъ какъ въ ней $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (главная нормаль кривой перпендикулярна нормали къ поверхности), а $\frac{1}{\varrho}$ вообще не равно нулю. Напротивъ того, для всякой кривой, касающейся въ точкѣ M съ соприкасающеюся прямою, но имѣющей соприкасающуюся плоскость, не совпадающую съ касательною плоскостью къ поверхности, φ, вообще говоря, не равно нулю, а потому $\frac{1}{\varrho}$ должно быть равно нулю, какъ мы это уже видѣли въ § 613, на основаніи другихъ соображеній. Такъ, напримѣръ, всякое сѣченіе поверхности плоскостью, проходящею черезъ одну лишь изъ соприкасающихся прямыхъ въ точкѣ M, будетъ имѣть въ этой точкѣ кривизну, равную нулю. Если же разсмотримъ, наоборотъ, сѣченіе поверхности касательною плоскостью въ точкѣ M (гиперболической), то окажется, что каждая вѣтвь этого сѣченія будетъ имѣть въ точкѣ M кривизну, равную $\frac{2}{3}$ кривизны асимптотической линіи, касающейся разсматриваемой вѣтви въ точкѣ M. Эту интересную теорему Бельтрами[1]) мы докажемъ въ § 704. Мы видимъ изъ сказаннаго, что теорема Менье не примѣнима къ кривымъ, касательнымъ къ соприкасающимся прямымъ, потому ли, что тогда вышеприведенное геометрическое построеніе оказывается не выполнимымъ, или потому, что безчисленное множество кривыхъ, взаимно касающихся и имѣющихъ соприкасающуюся плоскость, совпадающую въ данной точкѣ съ касательною плоскостью къ поверхности, имѣютъ различную кривизну*).

---

[1]) „Nouvelles Annales de Mathématiques“ 1865, стр. 258. См. также „Natürliche Geometrie“ E. Cesàro, стр. 223.

*) Теорема Бельтрами даетъ примѣръ такихъ кривыхъ, а именно плоской кривой, по которой поверхность пересѣкается касательною плоскостью въ гиперболической точкѣ M и асимптотической линіи, касающейся этой кривой въ той же точкѣ.

683. Нормальная кривизна и геодезическая кривизна. Величина $\frac{\cos\varphi}{\varrho}$, дающая кривизну нормальнаго сѣченія, касающагося данной кривой въ данной точкѣ, называется нормальною кривизною данной кривой въ данной точкѣ, а величина $\frac{\sin\varphi}{\varrho}$ ея геодезическою кривизною. Ось соприкасающагося круга (полярная прямая) пересѣкаетъ плоскость нормальнаго сѣченія въ нѣкоторой точкѣ C_0 (рис. 86), а касательную плоскость въ нѣкоторой точкѣ C_1. Кривизны, нормальная и геодезическая, очевидно, измѣряются обратными величинами отрѣзковъ MC_0 и MC_1. Точки C_0 и C_1 называются соотвѣтственно центрами, а прямыя MC_0 и MC_1 — радіусами нормальной и геодезической кривизны. Замѣтимъ, что геодезическая кривизна есть не что иное, какъ кривизна проекціи данной кривой на касательную плоскость. Дѣйствительно, по теоремѣ Менье, на цилиндрѣ, проектирующемъ данную кривую на касательной плоскости, кривизна нормальнаго сѣченія, касающагося данной кривой (равнаго проекціи данной кривой на касательную плоскость) равна именно $\frac{\sin\varphi}{\varrho}$, потому что нормаль къ поверхности этого цилиндра перпендикулярна къ образующимъ цилиндра, т. е. къ нормали данной поверхности. Къ понятію о нормальной и геодезической кривизнѣ всего естественнѣе приводитъ изученіе измѣненія направленія касательной. Величина ея вращенія (§ 637) относительно нормали къ поверхности равна

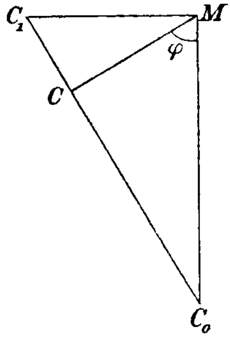

Рис. 86.

$$\omega = \Sigma \mathfrak{L}\, da = \varepsilon \Sigma \mathfrak{L}\, \lambda = \varepsilon \cos\varphi.$$

А величина вращенія касательной относительно перпендикуляра къ ней, лежащаго въ касательной плоскости и опредѣляемаго косинусами $\mathfrak{L}'$, $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{N}'$ будетъ

$$\omega' = \Sigma \mathfrak{L}'\, da = \varepsilon \Sigma \mathfrak{L}'\, \lambda = \varepsilon \sin\varphi.$$

Поэтому измѣненіе направленія касательной въ пространствѣ, т. е. ε, можно разсматривать, какъ равнодѣйствующую вращеній ω и ω', отношенія которыхъ къ ds:

$$\frac{\omega}{ds} = \frac{\cos\varphi}{\varrho}, \quad \frac{\omega'}{ds} = \frac{\sin\varphi}{\varrho},$$

и равны нормальной и геодезической кривизнѣ. Первая, слѣдовательно, служитъ мѣрою болѣе или менѣе сильнаго изгибанія кривой въ сторону отъ поверхности, а вторая — мѣрою ея изгибанія на поверхности. Важно замѣтить, что въ каждой точкѣ геодезической линіи ($\varphi = 0$) геодезическая кривизна равна нулю, а въ каждой точкѣ асимптотической $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$ то же самое можно сказать о нормальной кривизнѣ. Иными словами, когда точка движется по геодезической линіи, то можно сказать, что касательная передвигается всегда нормально къ поверхности, а когда точка движется по асимптотической линіи, то касательная движется тангенціально къ поверхности.

684. Кривизна нормальнаго сѣченія выражается формулою

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{r a^2 + 2 s a b + t b^2}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}. \tag{14}$$

Чтобы получить геометрическое представленіе объ измѣненіи ϱ, когда сѣченіе вращается около точки M, перенесемъ начало координатъ въ точку M и направимъ ось z-овъ по нормали къ поверхности; тогда $p = q = c = 0$. Если положимъ $a = \cos\theta$, а поэтому $b = \sin\theta$, то формула (14) приметъ видъ

$$\frac{1}{\varrho} = r \cos^2\theta + 2 s \cos\theta \sin\theta + t \sin^2\theta. \tag{15}$$

Отложимъ теперь на каждой касательной отъ точки M, отрѣзокъ, равный корню квадратному изъ абсолютной величины соотвѣтствующаго радіуса кривизны. Конецъ такого отрѣзка имѣетъ въ касательной плоскости координаты

$$x = \sqrt{\pm \varrho} \cdot \cos\theta, \qquad y = \sqrt{\pm \varrho} \cdot \sin\theta,$$

которыя, въ силу (15), удовлетворяютъ уравненію

$$r x^2 + 2 s x y + t y^2 = \pm 1.$$

Слѣдовательно (§ 664), въ каждой данной точкѣ, при переходѣ отъ одного нормальнаго сѣченія къ другому, кривизна измѣняется обратно пропорціонально квадрату соотвѣтственнаго діаметра индикатрисы Дюпена. Въ частности, она равна нулю для сѣченій, опредѣляемыхъ соприкасающимися прямыми, и достигаетъ наименьшаго или наибольшаго значенія для сѣченій, соотвѣтствующихъ осямъ индикатрисы. Эти послѣднія сѣченія называются главными; ихъ кривизны $\frac{1}{\varrho_1}$ и $\frac{1}{\varrho_2}$ — главными кривизнами.

685. Теорема Эйлера. Если примемъ за координатныя оси x-овъ и y-овъ оси индикатрисы, то въ уравненіи (15) пропадетъ членъ $\cos\theta \sin\theta$, а такъ какъ при $\theta = 0$ должно быть $\varrho = \varrho_1$, а для $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\varrho = \varrho_2$, то будемъ имѣть $\frac{1}{\varrho_1} = r$, $\frac{1}{\varrho_2} = t$ и, слѣдовательно,

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^2\theta}{\varrho_1} + \frac{\sin^2\theta}{\varrho_2}.$$

Въ этомъ состоитъ теорема Эйлера. Если напишемъ предыдущее уравненіе въ одномъ изъ слѣдующихъ видовъ

$$\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho_1}=\left(\frac{1}{\varrho_2}-\frac{1}{\varrho_1}\right)\sin^2\theta,\quad \frac{1}{\varrho_2}-\frac{1}{\varrho}=\left(\frac{1}{\varrho_2}-\frac{1}{\varrho_1}\right)\cos^2\theta$$

и допустимъ для опредѣленности, что $\frac{1}{\varrho_1}<\frac{1}{\varrho_2}$, то тотчасъ увидимъ, что всегда

$$\frac{1}{\varrho_1}\leqq\frac{1}{\varrho}\leqq\frac{1}{\varrho_2}.$$

Въ эллиптическихъ точкахъ ϱ_1 и ϱ_2 числа одинаковыхъ знаковъ, т. е. главные центры кривизны C_1 и C_2 лежатъ по одну сторону отъ касательной плоскости. А такъ какъ, въ силу вышеупомянутаго ограниченія ϱ всегда должно заключаться между ϱ_1 и ϱ_2, то оказывается, что центры кривизны всѣхъ нормальныхъ сѣченій лежатъ на отрѣзкѣ C_1C_2. Напротивъ того, въ гиперболической точкѣ касательная плоскость отдѣляетъ C_1 отъ C_2, и ϱ можетъ быть положительнымъ и отрицательнымъ. Въ первомъ случаѣ $\varrho\geqq\varrho_2>0$, во второмъ $\varrho\leqq\varrho_1<0$, такъ что центры кривизны всѣхъ нормальныхъ сѣченій лежатъ внѣ отрѣзка C_1C_2.

686. Теоремы Эйлера и Менье показываютъ, что достаточно знать обѣ главныя кривизны для того, чтобы опредѣлить кривизну въ точкѣ M для любой кривой, проведенной по данной поверхности черезъ эту точку, предполагая, что соприкасающаяся плоскость къ этой кривой не совпадаетъ съ касательною плоскостью къ поверхности въ точкѣ M. Поэтому весьма важно умѣть опредѣлить главные радіусы кривизны въ данной точкѣ на поверхности. На основаніи формулы (14) вопросъ приводится къ нахожденію минимума и максимума трехчлена $ra^2+2sab+tb^2$. При этомъ между перемѣнными a и b существуетъ соотношеніе

$$(1+p^2)a^2+2pq\,ab+(1+q^2)b^2=1, \tag{16}$$

получаемое черезъ исключеніе c изъ $a^2+b^2+c^2=1$ и изъ условія ортогональности $pa+qb-c=0$. Повторяя изложенное уже при болѣе общихъ условіяхъ вычисленіе (§ 384, c), мы видимъ, что надо положить

$$\left\{\begin{array}{l} ra+sb=k[(1+p^2)a+pqb],\\ sa+tb=k[pqa+(1+q^2)b]. \end{array}\right. \tag{17}$$

Исключая k, получаемъ еще одно уравненіе между a и b, которое вмѣстѣ съ (16), и служитъ для опредѣленія направленій осей индикатрисы, а слѣдовательно, и главныхъ сѣченій. Если, наоборотъ, исключимъ a и b, то получимъ уравненіе

$$\begin{vmatrix} r-k(1+p^2) & s-kpq \\ s-kpq & t-k(1+q^2) \end{vmatrix}=0,$$

т. е.

$$rt-s^2-[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t]k+(1+p^2+q^2)k^2=0. \tag{18}$$

Съ другой стороны, умножая первое изъ уравненій (17) на a, второе на b, и складывая получаемъ

$$ra^2+2sab+tb^2=k[(1+p^2)a^2+2pqab+(1+q^2)b^2]=k.$$

Итакъ, число k, раздѣленное на $\sqrt{1+p^2+q^2}$, и будетъ наименьшимъ или наибольшимъ значеніемъ кривизны $\frac{1}{\varrho}$; а такъ какъ корни k_1 и k_2 уравненія (18) связаны соотношеніями

$$k_1+k_2=\frac{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t}{1+p^2+q^2},\quad k_1k_2=\frac{rt-s^2}{1+p^2+q^2},$$

то будемъ имѣть

$$\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}=\frac{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},\quad \frac{1}{\varrho_1\varrho_2}=\frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}. \tag{19}$$

Это и будутъ формулы, служащія для опредѣленія главныхъ кривизнъ. Полагая

$$\mathfrak{L}=\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}};\quad \mathfrak{M}=\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

съ помощью легкаго вычисленія увидимъ, что формулы (19) можно писать и въ болѣе краткомъ видѣ

$$H=\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial y},\quad K=\frac{\partial(\mathfrak{L},\mathfrak{M})}{\partial(x,y)} \tag{20}$$

если обозначимъ, какъ это принято, черезъ H сумму, а черезъ K произведеніе главныхъ кривизнъ.

687. Остановимся на минуту на формулахъ (20) и замѣтимъ, что въ частныхъ производныхъ, входящихъ въ эти формулы, x и y считаются перемѣнными независимыми. Очевидно, число H, напримѣръ, можно представить также въ одной изъ слѣдующихъ формъ

$$\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial y}+\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial z},\quad \frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial z}+\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x}.$$

Но въ трехъ различныхъ видахъ выраженія H частныя производныя по одной и той же перемѣнной имѣютъ различныя значенія. Если, напримѣръ, вмѣсто того, чтобы разсматривать z, какъ функцію отъ x и y, хотимъ разсматривать y, какъ функцію отъ x и z, принимая послѣднія за независимыя, и отличая скобками производныя, взятыя въ этомъ предположеніи, то будемъ имѣть

$$\frac{\partial}{\partial x}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)+p\left(\frac{\partial}{\partial z}\right),\qquad \frac{\partial}{\partial y}=q\left(\frac{\partial}{\partial z}\right),$$

а поэтому

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x}+\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y}=\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x}\right)+p\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial z}\right)+q\left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial z}\right)=\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial z}\right).$$

Точно такъ же имѣемъ

$$\frac{\partial(\mathfrak{L},\mathfrak{N})}{\partial(x,y)}=q\,\frac{\partial((\mathfrak{L},\mathfrak{N}))}{\partial((x,z))}.$$

Исключая производныя отъ $\mathfrak{M}$ съ помощью соотношеній

$$p\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x}+q\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x}=\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial x},\qquad p\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial y}+q\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y}=\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial y},$$

найдемъ

$$\frac{\partial(\mathfrak{L},\mathfrak{M})}{\partial(x,y)}=\frac{1}{q}\,\frac{\partial(\mathfrak{L},\mathfrak{N})}{\partial(x,y)}=\frac{\partial((\mathfrak{L},\mathfrak{N}))}{\partial((x,z))}.$$

688. Средняя кривизна. Понятіемъ о средней кривизнѣ мы обязаны Софи Жерменъ (Sophie Germain). Среднею кривизною называется ариѳметическое среднее $\frac{1}{2}H$ главныхъ кривизнъ. Чтобы оправдать такое названіе, замѣтимъ сперва слѣдующее: если ϱ и ϱ' обозначаютъ радіусы кривизны какихъ нибудь двухъ взаимно перпендикулярныхъ нормальныхъ сѣченій, то формула Эйлера дастъ

$$\frac{1}{\varrho}=\frac{\cos^2\theta}{\varrho_1}+\frac{\sin^2\theta}{\varrho_2},\qquad \frac{1}{\varrho'}=\frac{\sin^2\theta}{\varrho_1}+\frac{\cos^2\theta}{\varrho_2},$$

откуда путемъ сложенія получаемъ

$$\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\varrho'}=H.$$

Разсмотримъ теперь $2n$ касательныхъ, равномѣрно распредѣленныхъ вокругъ точки M. Стоитъ только представить себѣ, что всѣ онѣ раздѣлены на n паръ взаимно перпендикулярныхъ касательныхъ, чтобы убѣдиться, что и при возрастаніи n до безконечности, ариѳметическое среднее нормальныхъ кривизнъ всегда остается равнымъ величинѣ $\frac{1}{2}H$ въ точкѣ M.

689. Поверхности съ постоянною среднею кривизною играютъ важную роль въ явленіяхъ капиллярности и были получены опытнымъ путемъ физикомъ Плато́ (Plateau)[1]). Особенно замѣчательны

[1]) См., напримѣръ, „Cours de Physique" Jamin (3-е изд., томъ I, стр. 225) или 4-ю главу „Leçons sur la capillarité" H. Poincaré. См. также E. Cesàro „Natürliche Geometrie", стр. 233.

поверхности, для которыхъ средняя кривизна равна нулю, т. е. поверхности, у которыхъ въ каждой точкѣ главные радіусы кривизны равны между собою по абсолютной величинѣ и противоположны по знаку. Это свойство равносильно тому, что индикатриса Дюпена приводится къ системѣ двухъ дополнительныхъ равностороннихъ гиперболъ, что влечетъ за собою нижеслѣдующее характеристическое свойство разсматриваемыхъ поверхностей: асимптотическія линіи въ каждой точкѣ пересѣкаются подъ прямымъ угломъ. Аналитически эти поверхности, на основаніи первой изъ формулъ (19), характеризуются слѣдующимъ дифференціальнымъ уравненіемъ

$$(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = 0.$$

Ихъ называютъ минимальными поверхностями вслѣдствіе того, что всякая сомкнутая кривая, проведенная по такой поверхности, выдѣляетъ часть поверхности, ме́ньшую чѣмъ та, которую та же кривая выдѣлитъ на другой поверхности, проходящей черезъ ту же кривую. Доказательство этого свойства относится къ варіаціонному исчисленію.

690. Примѣры. a) Примѣръ минимальной поверхности мы тотчасъ найдемъ между поверхностями вращенія. Мы очень скоро увидимъ, что на этихъ поверхностяхъ одно изъ главныхъ сѣченій есть меридіанъ, а другое касается параллели въ данной точкѣ M. Главными радіусами кривизны будутъ, слѣдовательно, радіусъ кривизны меридіана и (§ 681, b) отрѣзокъ, отсѣкаемый осью вращенія на нормали къ поверхности, считаемый отъ точки M. Для минимальной поверхности эти радіусы должны быть противоположны по направленію, а потому меридіанъ долженъ быть обращенъ выпуклостью къ оси вращенія. Кромѣ того, онъ долженъ обладать свойствомъ, что его центръ кривизны симметрично расположенъ относительно данной точки съ точкою пересѣченія нормали съ неподвижною прямою. Раньше мы видѣли (§ 595, l), что такимъ свойствомъ обладаетъ цѣпная линія, а впослѣдствіи мы увидимъ, что другія кривыя этимъ свойствомъ обладать не могутъ. Слѣдовательно, катеноидъ есть единственная минимальная поверхность вращенія.

b) Геликоидъ съ направляющею плоскостью (косой) (§ 655, b) также минимальная поверхность. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ образующія косого геликоида суть главныя нормали круговой винтовой линіи и безчисленнаго множества другихъ винтовыхъ линій, лежащихъ на концентрическихъ цилиндрахъ (§ 658, b), то ясно, что эти винтовыя линіи изображаютъ собою одну изъ системъ асимптотическихъ линій. Другая система изображается, какъ на всякой линейчатой поверхности, самими образующими. Убѣдившись, такимъ образомъ, въ ортогональности двухъ системъ асимптотическихъ линій, мы доказали этимъ самымъ, что косой геликоидъ минимальная поверхность. Обратно, на каждой минимальной линейчатой поверхности одна изъ системъ асимптотическихъ линій изображается ортогональными траекторіями образующихъ, и поэтому эти кривыя имѣютъ главныя нормали, совпадающія съ образующими поверхности. Отсюда слѣдуетъ (§ 658, b), что каждая изъ этихъ кривыхъ имѣетъ главныя нормали, общія съ безконечнымъ множествомъ другихъ кривыхъ, и потому будетъ круговою винтовою линіею. Слѣдовательно, поверхность (образуемая, какъ видимъ, главными нормалями круговой винтовой линіи) есть косой геликоидъ Такимъ образомъ получается теорема, найденная Каталаномъ: Косой геликоидъ есть единственная минимальная линейчатая поверхность.

691. Полная кривизна. Понятіемъ о полной кривизнѣ мы обязаны Гауссу. Полною кривизною называется произведеніе главныхъ кривизнъ

$$K = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}. \tag{21}$$

Аналогія между полною кривизною поверхности и кривизною плоскихъ кривыхъ обнаруживается, если возьмемъ уравненіе поверхности въ видѣ $f(x, y, z) = 0$ и выразимъ K черезъ частныя производныя отъ f. А именно, на основаніи извѣстныхъ формулъ (§ 574), находимъ

$$K = -\frac{1}{(\Delta f)^2} \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{vmatrix}. \tag{22}$$

Параболическія точки поверхности (§ 663) оказываются аналогичными точкамъ изгиба плоскихъ кривыхъ; различіе между эллиптическими и гиперболическими точками основывается исключительно на томъ, будетъ ли $K >$ или < 0. Слѣдуетъ упомянуть еще, что Казорати (Casorati) предложилъ еще третью мѣру кривизны поверхности

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1^2} + \frac{1}{\varrho_2^2}\right) = \frac{1}{2} H^2 - K,$$

которая какъ будто ближе передаетъ обыкновенное понятіе о кривизнѣ. Не слѣдуетъ, однако, придавать слишкомъ большого значенія разсужденіямъ о наиболѣе цѣлесообразномъ выборѣ выраженій для мѣры кривизны. Важно въ концѣ концовъ опредѣленіе главныхъ радіусовъ кривизны ϱ_1 и ϱ_2, или установленіе двухъ независимыхъ одна отъ другой функцій этихъ величинъ; и функціи (19), являющіяся аналитически наиболѣе простымъ и естественнымъ путемъ, встрѣчаются и въ важнѣйшихъ вопросахъ Геометріи и Механики. Допустимъ, напримѣръ, что дана нѣкоторая поверхность, на которую требуется наложить другую, безъ разрывовъ и складокъ, какъ весьма тонкую, гибкую, но не растяжимую ткань. Гауссъ доказалъ[1]) (въ знаменитомъ мемуарѣ „Disquisitiones generales circa superficias curvas"), что необходимое условіе для возможности такого наложенія состоитъ въ слѣдующемъ: въ соотвѣтствующихъ точкахъ двухъ поверхностей (т. е. въ такихъ, которыя при наложеніи должны

---

[1]) См., напримѣръ, „Calcul différentiel", Boussinesq (стр. 298).

совпасть) полная кривизна обѣихъ поверхностей должна быть одинакова. Слѣдовательно, полная кривизна поверхности въ каждой ея точкѣ представляетъ нѣчто такое, что остается неизмѣннымъ при деформированіи поверхности помощью одного сгибанія. Изъ теоремы Гаусса слѣдуетъ также, что единственныя поверхности, на которыхъ (какъ на плоскости или на шаровой поверхности) можно произвольную фигуру передвигать съ одного мѣста на другое, не измѣняя ея формы, суть поверхности съ постоянною полною кривизною. Эти поверхности называютъ кратко поверхностями постоянной кривизны. Предыдущее замѣчаніе имѣетъ огромное значеніе въ вопросѣ объ основныхъ аксіомахъ Геометріи.

692. Примѣры. a) Замѣчательные примѣры поверхностей постоянной кривизны даютъ нѣкоторыя поверхности вращенія. На шарѣ радіуса a кривизна вездѣ равна $\frac{1}{a^2}$. Но существуетъ безчисленное множество другихъ поверхностей вращенія, имѣющихъ постоянную (положительную или отрицательную) кривизну[1]) Псевдосфера, т. е. поверхность, образуемая вращеніемъ трактрисы (§ 626, d) около ея асимптоты, имѣетъ въ каждой точкѣ кривизну, равную $-\frac{1}{a^2}$, гдѣ a обозначаетъ постоянную длину отрѣзка касательной между точкою касанія и асимптотою. Въ самомъ дѣлѣ, мы знаемъ, что проекція центра кривизны C_1 на ось вращенія совпадаетъ съ точкою пересѣченія T касательной съ осью, между тѣмъ, какъ другой центръ кривизны C_2 лежитъ на самой оси. Но въ прямоугольномъ треугольникѣ TC_1C_2 имѣемъ

$$MC_1 \cdot MC_2 = MT^2, \text{ т. е. } \varrho_1\varrho_2 = -a^2.$$

b) Поверхности, которыя могутъ быть наложены на плоскость при помощи одного сгибанія, должны имѣть кривизну, равную нулю, т. е. для каждой точки ихъ должно быть $rt - s^2 = 0$. Эти поверхности суть, слѣдовательно, разсмотрѣнныя выше развертывающіяся поверхности (§ 675). По Казорати единственною поверхностью съ кривизною, равною нулю, была бы плоскость, а круговой цилиндръ имѣлъ бы кривизну, равную половинѣ кривизны поверхности шара того же радіуса. Возвратимся, однако, къ Гауссову опредѣленію кривизны и замѣтимъ, что очень важно, что геодезическія линіи, когда онѣ представляютъ кратчайшій путь между двумя точками на поверхности, остаются геодезическими и послѣ наложенія данной поверхности на другую. Слѣдовательно, при развертываніи поверхности на плоскость геодезическія линіи обращаются въ прямыя. Въ частности, всякая кривая обращается въ прямую линію при наложеніи ея спрямляющей развертывающейся поверхности (§ 679, c) на плоскость, иными словами, черезъ всякую кривую можно провести такую развертывающуюся поверхность, при наложеніи которой на плоскость кривая обратится въ прямую. Наоборотъ, эволюты кривой (§ 679, b) обращаются въ прямыя при наложеніи полярной развертывающейся поверхности на плоскость. Замѣтимъ здѣсь еще, что полярная поверхность плоской кривой всегда будетъ цилиндръ и, слѣдовательно, эволюты плоской кривой суть круговыя винтовыя линіи.

693. Упражненія. a) Для поверхности второго порядка съ центромъ, отнесенной къ ея осямъ, можно вычислить полную кривизну съ помощью формулы (22), положивъ

$$f = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right).$$

---

[1]) „Natürliche Geometrie“, стр. 229.

Сперва замѣтимъ, что уравненіе касательной плоскости будетъ $\sum \frac{Xx}{a^2} = 1$, а разстояніе h этой плоскости отъ центра поверхности опредѣляется изъ уравненія

$$\frac{1}{h^2} = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = \Delta f.$$

Формула (22) дастъ тогда

$$K = -\frac{h^4}{a^4 b^4 c^4} \begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & a^2 & 0 & 0 \\ y & 0 & b^2 & 0 \\ z & 0 & 0 & c^2 \end{vmatrix} = \frac{h^4}{a^2 b^2 c^2}.$$

Итакъ, имѣемъ слѣдующую теорему (срав. § 595, h): В ъ поверхностяхъ второго порядка съ центромъ полная кривизна измѣняется пропорціонально четвертой степени разстоянія отъ касательной плоскости до центра.

b) Предложимъ себѣ теперь вычислить главныя кривизны въ любой точкѣ M на развертывающейся поверхности. Координаты точки M можно изобразить формулами

$$X = x + av, \quad Y = y + bv, \quad Z = z + cv,$$

въ которыхъ a, b, c изображаютъ направляющіе косинусы образующей, а x, y, z координаты точки Q, въ которой образующая касается ребра возврата. Эти шесть величинъ зависятъ исключительно отъ длины дуги u ребра возврата, а v обозначаетъ длину отрѣзка QM. Какъ извѣстно (§ 669), направляющіе косинусы нормали къ поверхности совпадаютъ съ косинусами α, β, γ бинормали кривой (Q), поэтому тотчасъ находимъ, что $p = -\frac{\alpha}{\gamma}$, $q = -\frac{\beta}{\gamma}$, откуда слѣдуетъ

$$\frac{\partial p}{\partial v} = \frac{\partial q}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial u} = -\frac{b}{\tau\gamma^2}, \quad \frac{\partial q}{\partial u} = \frac{a}{\tau\gamma^2},$$

т. е.

$$ra + sb = sa + tb = 0, \quad r\lambda + s\mu = -\frac{\varrho b}{\tau v \gamma^2}, \quad s\lambda + t\mu = \frac{\varrho a}{\tau v \gamma^2},$$

а слѣдовательно,

$$r = -\frac{\varrho b^2}{\tau v \gamma^3}, \quad s = \frac{\varrho a b}{\tau v \gamma^3}, \quad t = -\frac{\varrho a^2}{\tau v \gamma^3}.$$

Формула (21) даетъ $K = 0$. Этого и слѣдовало ожидать, такъ какъ мы уже видѣли (§ 675), что въ каждой точкѣ развертывающейся поверхности $rt - s^2 = 0$. Къ тому же заключенію приводитъ также замѣчаніе, что совпаденіе обѣихъ системъ асимптотическихъ линій въ одну систему образующихъ показываетъ, что одно изъ главныхъ сѣченій, проходящихъ черезъ любую точку M есть образующая, проведенная черезъ эту точку, потому что касательныя къ этимъ сѣченіямъ должны вѣдь дѣлить пополамъ углы между соприкасающимися прямыми. Слѣдовательно, одна изъ главныхъ кривизнъ равна нулю. Другая дается первою изъ формулъ (19) и имѣетъ значеніе

$$\frac{1}{R} = -\left[(1-\beta^2)a^2 + 2\alpha\beta ab + (1-\alpha^2)b^2\right]\frac{\varrho}{\tau v \gamma^2} = -(1 - c^2 - \gamma^2)\frac{\varrho}{\tau v \gamma^2} = -\frac{\varrho}{\tau v}.$$

Отсюда видно, что $R = -v \operatorname{tg} \varphi$, гдѣ φ есть уголъ, на который касательная къ ребру возврата должна повернуться въ опредѣленномъ уже раньше направленіи (§ 679), чтобы совпасть съ образующею развертывающейся поверхности, огибающей спрямляющія плоскости. Такъ какъ длина R откладывается по положительному направленію бинормали, то мы видимъ, что центры нормальной кривизны всѣхъ ортогональныхъ траекторій образующихъ развертывающейся поверхности лежатъ на поверхности, огибающей спрямляющія плоскости ребра возврата. Къ тому же заключенію приводитъ и замѣчаніе, что образующая огибающей спрямляющія плоскости ребра возврата есть въ то же время (§§ 673, a; 679, b, c) ось соприкасающихся круговъ всѣхъ ортогональныхъ траекторій. Отсюда, принимая во вниманіе теорему Менье, мы видимъ, что упомянутая образующая встрѣчаетъ плоскости, перпендикулярныя къ образующимъ первой поверхности, въ центрахъ кривизны соотвѣтствующихъ сѣченій вдоль этихъ образующихъ.

694. Въ заключеніе мы обобщимъ формулы (19) такимъ образомъ, чтобы сдѣлать ихъ непосредственно примѣнимыми къ тому случаю, когда x, y, z даны въ видѣ функцій отъ двухъ независимыхъ перемѣнныхъ u и v. Напомнимъ, что въ концѣ § 660 были даны формулы

$$(23)\quad \mathfrak{L} = \frac{1}{\sqrt{ab-c^2}} \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \quad \mathfrak{M} = \frac{1}{\sqrt{ab-c^2}} \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \quad \mathfrak{N} = \frac{1}{\sqrt{ab-c^2}} \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)},$$

въ которыхъ

$$a = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2, \quad b = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2, \quad c = \sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}.$$

Такъ какъ

$$\frac{\partial(\mathfrak{L},\mathfrak{M})}{\partial(x,y)} = \frac{\partial(\mathfrak{L},\mathfrak{M})}{\partial(u,v)} \cdot \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{1}{\sqrt{ab-c^2}} \frac{1}{\mathfrak{N}} \frac{\partial(\mathfrak{L},\mathfrak{M})}{\partial(u,v)} \quad \text{и т. д.}$$

то по второй изъ формулъ (20) получимъ

$$\sqrt{ab-c^2} \cdot K = \frac{1}{\mathfrak{L}} \frac{\partial(\mathfrak{M},\mathfrak{N})}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\mathfrak{M}} \frac{\partial(\mathfrak{N},\mathfrak{L})}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\mathfrak{N}} \frac{\partial(\mathfrak{L},\mathfrak{M})}{\partial(u,v)}.$$

Умножая эти три выраженія соотвѣтственно на $\mathfrak{L}^2$, $\mathfrak{M}^2$, $\mathfrak{N}^2$ (сумма которыхъ равна 1) и складывая, получимъ

$$(24)\quad \sqrt{ab-c^2} \cdot K = \mathfrak{L} \frac{\partial(\mathfrak{M},\mathfrak{N})}{\partial(u,v)} + \mathfrak{M} \frac{\partial(\mathfrak{N},\mathfrak{L})}{\partial(u,v)} + \mathfrak{N} \frac{\partial(\mathfrak{L},\mathfrak{M})}{\partial(u,v)}$$

или

$$\sqrt{ab-c^2} \cdot K = \begin{vmatrix} \mathfrak{L} & \dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial u} & \dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial v} \\ \mathfrak{M} & \dfrac{\partial \mathfrak{M}}{\partial u} & \dfrac{\partial \mathfrak{M}}{\partial v} \\ \mathfrak{N} & \dfrac{\partial \mathfrak{N}}{\partial u} & \dfrac{\partial \mathfrak{N}}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Формулу (24) можно преобразовать еще такимъ образомъ, что въ выраженіе K войдутъ явно первыя и вторыя производныя отъ x, y, z по u и по v. Написавъ эту формулу въ видѣ

$$(ab-c^2)K=\sum\frac{\partial(y,\ z)}{\partial(u,\ v)}\,\frac{\partial(\mathfrak{M},\mathfrak{N})}{\partial(u,\ v)},$$

тотчасъ увидимъ (§ 29), что правая часть равна произведенію матриссъ

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial u} & \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial u} & \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial u} \\ \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial v} & \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial v} & \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Съ другой стороны, выполняя умноженіе и принимая во вниманіе уравненія, получаемыя дифференцированіемъ по u и по v условій ортогональности

$$\sum\mathfrak{L}\frac{\partial x}{\partial u}=0,\qquad \sum\mathfrak{L}\frac{\partial x}{\partial v}=0,$$

находимъ, что элементы опредѣлителя, равнаго произведенію упомянутыхъ матриссъ, будутъ

$$\sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial u}=-\sum\mathfrak{L}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}=-\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{ab-c^2}},$$

$$\sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial v}=-\sum\mathfrak{L}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}=-\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{ab-c^2}},$$

$$\sum\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial u}=-\sum\mathfrak{L}\frac{\partial^2 x}{\partial v\,\partial u}=-\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{ab-c^2}},$$

$$\sum\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial v}=-\sum\mathfrak{L}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}=-\frac{\mathfrak{B}}{\sqrt{ab-c^2}}.$$

При этомъ, для сокращенія, положено

$$\mathfrak{A}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \end{vmatrix}, \qquad \mathfrak{B}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \end{vmatrix}.$$

$$\mathfrak{C}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} \end{vmatrix}.$$

Слѣдовательно,

$$K = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{C}^2}{(ab - c^2)^2}. \tag{25}$$

695. Подобнымъ же образомъ поступимъ для вычисленія H, исходя изъ первой формулы (20), при чемъ измѣнимъ знаки правыхъ частей на противоположные для того, чтобы косинусы $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$ взяты были съ тѣми знаками, какіе для нихъ получаются изъ формулы (23) при $u = x$, $v = y$. Очевидно, имѣемъ

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial y} = \frac{\partial(\mathfrak{L}, y)}{\partial(x, y)} - \frac{\partial(\mathfrak{M}, x)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{\sqrt{ab - c^2}} \cdot \frac{1}{\mathfrak{N}} \left[\frac{\partial(\mathfrak{L}, y)}{\partial(u, v)} - \frac{\partial(\mathfrak{M}, x)}{\partial(u, v)}\right] \text{ и т. д.}$$

Слѣдовательно, $\sqrt{ab - c^2}$. H можетъ быть представлено каждою изъ трехъ разностей

$$\frac{\partial(\mathfrak{N}, y)}{\partial(u, v)} - \frac{\partial(\mathfrak{M}, z)}{\partial(u, v)}, \quad \frac{\partial(\mathfrak{L}, z)}{\partial(u, v)} - \frac{\partial(\mathfrak{N}, x)}{\partial(u, v)}, \quad \frac{\partial(\mathfrak{M}, x)}{\partial(u, v)} - \frac{\partial(\mathfrak{L}, y)}{\partial(u, v)},$$

дѣленныхъ соотвѣтственно на $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$; умножая ихъ соотвѣтственно на $\mathfrak{L}^2$, $\mathfrak{M}^2$, $\mathfrak{N}^2$ и складывая, получимъ

$$\sqrt{ab - c^2} \cdot H = \sum \mathfrak{L} \left[\frac{\partial(\mathfrak{N}, y)}{\partial(u, v)} - \frac{\partial(\mathfrak{M}, z)}{\partial(u, v)}\right]$$

или

$$\sqrt{ab - c^2} \,.\, H = \sum \left[\left(\mathfrak{M}\frac{\partial z}{\partial v} - \mathfrak{N}\frac{\partial y}{\partial v}\right)\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial u} - \left(\mathfrak{M}\frac{\partial z}{\partial u} - \mathfrak{N}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial v}\right].$$

Между тѣмъ, при помощи легкаго вычисленія найдемъ еще

$$\mathfrak{M}\frac{\partial z}{\partial v} - \mathfrak{N}\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{ab - c^2}}\left(c\frac{\partial x}{\partial v} - b\frac{\partial x}{\partial u}\right),$$

$$\mathfrak{M}\frac{\partial z}{\partial u} - \mathfrak{N}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{ab - c^2}}\left(a\frac{\partial x}{\partial v} - c\frac{\partial x}{\partial u}\right),$$

Слѣдовательно,

$$(ab - c^2)\, H = \sum \left[-b\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial u} - a\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial v} + c\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial u}\right)\right]$$

и, наконецъ,

$$H = \frac{\mathfrak{A}b + \mathfrak{B}a - 2\,\mathfrak{C}c}{(ab - c^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{26}$$

Легко провѣрить, что формулы (25) и (26) приводятся къ формуламъ (19), когда положимъ $u = x$, $v = y$, потому что при этихъ предположеніяхъ функціи $a, b, c, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ обращаются въ $1 + p^2$, $1 + q^2$, pq, r, t и s.

Опредѣленія и свойства замѣчательныхъ кривыхъ на поверхности.

696. Линіи кривизны и точки закругленія. Для опредѣленія линій кривизны (§ 665) на данной поверхности, мы имѣемъ слѣдующее уравненіе, получаемое черезъ исключеніе k изъ уравненій (17) § 686, съ замѣною a и b на dx и dy

$$(27) \qquad \frac{(1+p^2)\,dx+pq\,dy}{r\,dx+s\,dy}=\frac{pq\,dx+(1+q^2)\,dy}{s\,dx+t\,dy},$$

т. е.

$$(28) \qquad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{r}{1+p^2}-\frac{s}{pq}\right)\frac{dx^2}{1+q^2}-\left(\frac{t}{1+q^2}-\frac{r}{1+p^2}\right)\frac{dx\,dy}{pq}\\ &\qquad+\left(\frac{s}{pq}-\frac{t}{1+q^2}\right)\frac{dy^2}{1+p^2}=0,\end{aligned}\right.$$

потому что въ уравненіяхъ (17) a и b обозначаютъ косинусы угловъ осей индикатрисы съ координатными осями x и y, а оси индикатрисы въ каждой точкѣ касаются линіи кривизны. Представляя себѣ, что p, q, r, s, t выражены въ независимыхъ перемѣнныхъ x и y, получаемъ изъ уравненій (28) два уравненія

$$(29) \qquad \frac{dy}{dx}=\varphi(x,y), \qquad \frac{dy}{dx}=\psi(x,y).$$

Изъ этихъ уравненій, разсматриваемыхъ одно отдѣльно отъ другого, при помощи пріема, который будетъ разъясненъ въ концѣ этого учебника, приходимъ къ уравненіямъ двухъ системъ цилиндрическихъ поверхностей, параллельныхъ оси z-овъ, пересѣкающихъ поверхность по линіямъ кривизны. Замѣтимъ, что уравненія (28) удовлетворяются тождественно тогда и только тогда, когда координаты x, y, z точки M на поверхности удовлетворяютъ еще двумъ нижеслѣдующимъ уравненіямъ

$$(30) \qquad \frac{r}{1+p^2}=\frac{s}{pq}=\frac{t}{1+q^2}.$$

Черезъ такую точку M проходитъ, слѣдовательно, безчисленное множество линій кривизны. Такія точки называются **точками закругленія** (Nabelpunkte, ombilics). Число ихъ, вообще говоря, конечно. Но возможны случаи, когда онѣ заполняютъ цѣлую линію на поверхности; это будетъ тогда, когда два уравненія (30) приводятся къ одному. Неопредѣленность направленій касательныхъ къ линіямъ кривизны въ точкѣ закругленія можетъ проистекать только изъ неопредѣленности направленій осей индикатрисы Дюпена, т. е. изъ того, что эта индикатриса будетъ кругъ. Отсюда слѣдуетъ

(§ 664), что поверхность въ смежности съ точкою закругленія уподобляется шару, потому что, если передвинемъ безконечно мало касательную плоскость въ такой точкѣ такимъ образомъ, чтобы эта плоскость осталась перпендикулярною къ нормали, то на поверхности опредѣлится безконечно малое круглое сѣченіе. Это обстоятельство позволяетъ тотчасъ заключить, что на эллипсоидѣ, напримѣръ, находятся четыре вещественныхъ точки закругленія. Эти точки будутъ именно точки пересѣченія поверхности съ діаметрами, сопряженными съ двумя системами круговыхъ сѣченій эллипсоида. Впрочемъ, можно непосредственно провѣрить, что условія (30) равносильны условію $\varrho_1 = \varrho_2$. Дѣйствительно, изъ уравненій (19), съ помощью простого вычисленія, получаемъ

$$\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}\right)^2$$

$$= \frac{(1+p^2)(1+q^2)}{(1+p^2+q^2)^3}\left[(1+p^2+q^2)\left(\frac{r}{1+p^2} - \frac{t}{1+q^2}\right)^2 + p^2q^2\left(\frac{r}{1+p^2} + \frac{t}{1+q^2} - \frac{2s}{pq}\right)^2\right],$$

откуда и видимъ, что дли существованія равенства $\varrho_1 = \varrho_2$ условія (30) необходимы и достаточны.

697. Нормали къ поверхности, проведенныя черезъ различныя точки нѣкоторой кривой, лежащей на этой поверхности, или, какъ говорятъ, нормали вдоль нѣкоторой кривой, вообще, образуютъ косую линейчатую поверхность, носящую названіе нормальной поверхности или нормаліи (normalie). Спрашивается, нѣтъ ли между безчисленнымъ множествомъ нормалій, проходящихъ черезъ данную точку на поверхности, развертывающихся поверхностей? Условіе, необходимое и достаточное для того, чтобы нормаль въ точкѣ M образовала развертывающуюся поверхность при движеніи точки M на поверхности (§ 667) есть

$$\begin{vmatrix} p & dp & dx \\ q & dq & dy \\ -1 & 0 & dz \end{vmatrix} = 0.$$

Этотъ опредѣлитель равенъ

$$\begin{vmatrix} p & dp & dx+p\,dz \\ q & dq & dy+q\,dz \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} dx+p\,dz & dp \\ dy+q\,dz & dq \end{vmatrix}.$$

Слѣдовательно, должно существовать уравненіе

$$\frac{dx+p\,dz}{dp} = \frac{dy+q\,dz}{dq}; \tag{31}$$

но это уравненіе совпадаетъ съ уравненіемъ (27), въ чемъ тотчасъ убѣждаемся, замѣчая, что

$$dz = p\,dx + q\,dy, \quad dp = r\,dx + s\,dy, \quad dq = s\,dx + t\,dy.$$

Итакъ, черезъ каждую точку поверхности проходятъ двѣ развертывающіяся нормаліи, слѣды которыхъ на данной поверхности будутъ не что иное, какъ ея линіи кривизны. Ребра возврата всѣхъ этихъ нормалій образуютъ поверхность съ двумя полáми, которую можно разсматривать, какъ общее мѣсто всѣхъ главныхъ центровъ кривизны. Эта вторая поверхность представляетъ относительно первой до нѣкоторой степени аналогію съ тѣмъ, что представляетъ эволюта кривой относительно самой кривой [1]). Общее мѣсто главныхъ центровъ кривизны называется эволютою данной поверхности и состоитъ изъ двухъ полъ: одна образуется однимъ, другая другимъ главнымъ центромъ кривизны. Данная поверхность, по отношенію къ своей эволютѣ, называется эвольвентою, по аналогіи съ кривыми линіями. Указанное выше характеристическое свойство линіи кривизны можно формулировать слѣдующимъ образомъ: Всякая линія кривизны есть ортогональная траекторія образующихъ развертывающейся поверхности, состоящей изъ нормалей къ поверхности, и этимъ свойствомъ не обладаетъ никакая другая кривая на поверхности. Отсюда не трудно вывести, если припомнимъ одну раньше доказанную теорему (§ 673, b), слѣдующее предложеніе: Если нѣкоторая линія есть линія кривизны на нѣкоторой поверхности, то она сохранитъ тотъ же характеръ на всѣхъ поверхностяхъ, пересѣкающихъ первую поверхность подъ постояннымъ угломъ вдоль всей данной линіи. Отсюда въ частности слѣдуетъ, что если нѣкоторая плоскость пересѣкаетъ данную поверхность подъ постояннымъ угломъ, то линія пересѣченія непремѣнно будетъ линіею кривизны; и обратно, если линія кривизны — линія плоская, то ея плоскость пересѣкаетъ поверхность подъ постояннымъ угломъ. То же самое можно общнѣе утверждать о сферическихъ кривыхъ, потому что на сферѣ всякая линія есть линія кривизны.

698. Формулы Родрига. Условіе, необходимое и достаточное для того, чтобы нѣкоторая точка (x, y, z) данной поверхности описывала линію кривизны, можно прямо написать, выражая, что нормальная плоскость разсматриваемой кривой совпадаетъ со спрямляющею плоскостью эволюты этой кривой (§ 673, a), касательныя которой будутъ нормали къ поверхности. Слѣдовательно, мы должны имѣть

$$\frac{dx}{d\mathfrak{L}} = \frac{dy}{d\mathfrak{M}} = \frac{dz}{d\mathfrak{N}}. \tag{32}$$

---

[1]) О свойствахъ эволютъ поверхностей см. „Natürliche Geometrie“, стр. 217.

Эти формулы называются формулами Родрига. Два уравненія, ими выражаемыя, приводятся къ одному, если примемъ во вниманіе условіе ортогональности

$$\mathfrak{L}\,dx+\mathfrak{M}\,dy+\mathfrak{N}\,dz=0.$$

Обратно, если условія (32) выполнены, то

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{L} & d\mathfrak{L} & dx \\ \mathfrak{M} & d\mathfrak{M} & dy \\ \mathfrak{N} & d\mathfrak{N} & dz \end{vmatrix}=0,$$

т. е. (§ 667) нормаль къ поверхности образуетъ развертывающуюся поверхность, и точка (x, y, z) описываетъ, слѣдовательно, линію кривизны. Можно, впрочемъ, вывести также формулы (32) изъ послѣдняго условія, потому что вызвышая предыдущее уравненіе въ квадратъ, легко приведемъ его къ виду

$$(d\mathfrak{N}\,dy-d\mathfrak{M}\,dz)^2+(d\mathfrak{L}\,dz-d\mathfrak{N}\,dx)^2+(d\mathfrak{M}\,dx-d\mathfrak{L}\,dy)^2=0,$$

а послѣднее равенство, очевидно, разбивается на два равенства (32). Далѣе, легко видѣть, что общая величина отношеній (32) равна, независимо отъ знака, длинѣ соотвѣтствующаго главнаго радіуса кривизны. Наконецъ, отъ формулъ Родрига можно придти и къ формулѣ (31), дифференцируя равенства $\mathfrak{L}=-\mathfrak{N}p$, $\mathfrak{M}=-\mathfrak{N}q$, и замѣчая, что $d\mathfrak{L}+p\,d\mathfrak{N}$, $d\mathfrak{M}+q\,d\mathfrak{N}$, а слѣдовательно, и $dx+p\,dz$ и $dy+q\,dz$ пропорціональны dp и dq.

699. **Примѣры**. a) На поверхностяхъ вращенія линіями кривизны будутъ меридіаны и параллели. Дѣйствительно, нормали къ поверхности вдоль меридіана лежатъ въ плоскости меридіана, а нормали вдоль параллели пересѣкаются всѣ на оси вращенія и образуютъ коническую поверхность. Еще проще убѣдимся въ сказанномъ, замѣчая, что плоскости каждаго меридіана и каждой параллели пересѣкаютъ поверхность подъ постояннымъ угломъ. Впрочемъ, найдя одну изъ системъ линій кривизны, можно опредѣлить другую изъ условія ортогональности обѣихъ системъ. Двѣ системы линій кривизны соотвѣтствуютъ двумъ поламъ эволюты поверхности. Одна изъ нихъ образуется вращеніемъ эволюты меридіана около оси поверхности, другая сводится (§ 681, b) къ самой оси. Напримѣръ, катеноидъ въ совокупности съ осью вращенія образуетъ эволюту псевдосферы.

b) На развертывающейся поверхности каждая образующая есть линія кривизны, потому что нормали къ поверхности вдоль образующей лежатъ въ одной плоскости. Если повернемъ образующія на прямой уголъ около одной изъ ихъ ортогональныхъ траекторій, то онѣ сдѣлаются нормалями къ поверхности, а съ другой стороны остаются образующими развертывающейся поверхности (§ 673, b). Такимъ образомъ прямо получаемъ, что ортогональныя траекторіи образующихъ представляютъ вторую систему линій кривизны. Эволюта поверхности имѣетъ одну полу на безконечности, а другая (§ 693, b) есть спрямляющая развертывающаяся поверхность ребра возврата.

c) На огибающей семейства шаровъ (т. е. системы шаровъ, въ уравненіяхъ которыхъ коэффиціенты — функціи одного независимаго параметра) линіями кривизны будутъ характеристики, потому что (§ 674) вдоль каждой изъ нихъ нормали къ поверхности будутъ радіусы огибаемыхъ шаровъ, пересѣкающіеся въ центрѣ C_1. Отсюда слѣдуетъ, что одинъ изъ главныхъ центровъ кривизны есть точка C_1 (рис. 87). Второй главный центръ кривизны, для того случая, когда имѣемъ дѣло съ поверхностью канала (§ 678, b), опредѣлится изъ того замѣчанія, что онъ находится на ребрѣ возврата развертывающейся поверхности, образуемой нормалью къ линіи центровъ, и слѣдовательно, долженъ находится (§ 679, b) на оси соприкасающагося круга этой кривой. Поэтому главные радіусы кривизны будутъ

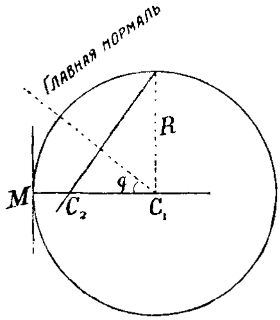

Рис. 87.

$$\varrho_1 = R, \quad \varrho_2 = R - \frac{\varrho}{\cos\varphi},$$

что, впрочемъ, легко получить и при помощи вычисленія, пользуясь формулами (19) и полагая $\Sigma\lambda(X - x) = \cos\varphi$, или еще проще, положивъ $u = s$, $v = \varphi$, и примѣняя формулы (25) и (26). Замѣтимъ, наконецъ, что эволюта канала состоитъ изъ полярной поверхности линіи центровъ и самой этой кривой.

700. Геодезическое крученіе. Найденное въ § 697 характеристическое свойство линіи кривизны находится въ тѣсной связи съ понятіемъ о геодезическомъ крученіи. Это понятіе введено было Бертраномъ съ цѣлью дать мѣру вращательной составляющей

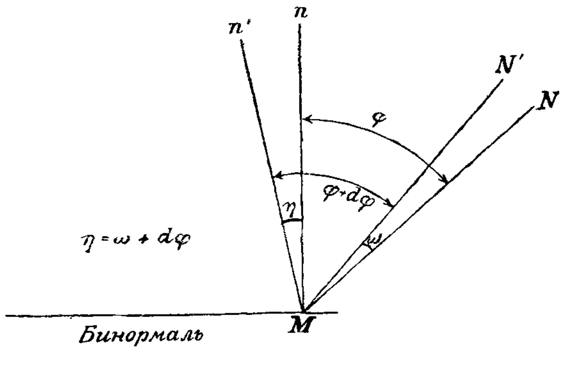

Рис. 88.

въ движеніи касательной плоскости, при перемѣщеніи точки касанія по направленію касательной. Естественно принять за мѣру этого вращенія отношеніе угла, на который повернется проекція нормали къ поверхности на нормальную плоскость, къ $d\sigma$ (дифференціалу дуги кривой). Мы уже видѣли (въ § 672), что этотъ уголъ равенъ $\eta - d\varphi$. Вышеупомянутое отношеніе

$$t = \frac{1}{\tau} - \frac{d\varphi}{ds}$$

и называется геодезическимъ крученіемъ. Ясно, что характеристическое свойство линій кривизны, о которомъ идетъ рѣчь, можетъ быть выражено тѣмъ, что для линіи кривизны геодезическое крученіе во всякой ея точкѣ равно нулю (см. § 672). Слѣдовательно, геодезическое крученіе имѣетъ для линій кривизны то же значеніе, какое нормальная кривизна (§ 683) имѣетъ для асимптотическихъ линій, при этомъ, какъ нормальная кривизна, такъ и геодезическое крученіе будутъ имѣтъ одинаковое значеніе въ данной точкѣ на всѣхъ кривыхъ, имѣющихъ общую касательную, между тѣмъ какъ геодезическая кривизна для такихъ кривыхъ мѣняется при измѣненіи соприкасающейся плоскости. Мы увидимъ также далѣе, что существуютъ извѣстныя аналогіи между законами измѣненія нормальной кривизны и геодезическаго крученія при переходѣ отъ одной изъ безчисленнаго множества кривыхъ, проводимыхъ по поверхности черезъ данную точку въ различныхъ направленіяхъ, къ другой. А именно, и то и другое выражаются однородными квадратичными функціями отъ косинусовъ, опредѣляющихъ эти направленія.

701. Положимъ, что $(a,\ b,\ c)$ обозначаютъ направляющіе косинусы данной касательной къ поверхности въ данной точкѣ M, $(a',\ b',\ c')$ — направляющіе косинусы другой, перпендикулярной къ первой. Нормаль $(\mathfrak{L},\ \mathfrak{M},\ \mathfrak{N})$ къ поверхности въ точкѣ M и прямая $(a',\ b',\ c')$, очевидно, будутъ лежать въ нормальной плоскости къ кривой, имѣющей касательную $(a,\ b,\ c)$, такъ какъ въ этой плоскости лежатъ всѣ перпендикуляры къ $(a,\ b,\ c)$. Поэтому, разсматривая прямоугольный треугольникъ, у котораго гипотенуза равна единицѣ и направлена по нормали къ поверхности въ точкѣ M, а катеты по главной нормали $Mn\ (\lambda,\ \mu,\ \nu)$ и бинормали $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ къ данной кривой, и проектируя стороны этого треугольника на координатныя оси, получимъ

$$\mathfrak{L} = \alpha \sin\varphi + \lambda\cos\varphi,\quad \mathfrak{M} = \beta\sin\varphi + \mu\cos\varphi,\quad \mathfrak{N} = \gamma\sin\varphi + \nu\cos\varphi$$

(φ — обозначаетъ, какъ и выше, уголъ между нормалью къ поверхности и главною нормалью кривой, т. е. уголъ нашего треугольника, прилегающій къ главной нормали). Точно также, замѣнивъ направленіе $(\mathfrak{L},\ \mathfrak{M},\ \mathfrak{N})$ направленіемъ $(a',\ b',\ c')$, очевидно, ему перпендикулярнымъ, получимъ

$$a' = \alpha\cos\varphi - \lambda\sin\varphi,\quad b' = \beta\cos\varphi - \mu\sin\varphi,\quad c' = \gamma\cos\varphi - \nu\sin\varphi.$$

Дифференцируя эти формулы по σ, пользуясь формулами (11) и выраженіемъ τ, тотчасъ получимъ

$$(33)\quad \frac{d\mathfrak{L}}{d\sigma} = -\frac{a}{\varrho}\cos\varphi - a'\tau,\quad \frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial\sigma} = -\frac{b}{\varrho}\cos\varphi - b'\tau,\quad \frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial\sigma} = -\frac{c}{\varrho}\cos\varphi - c'\tau.$$

Это, такъ сказать, формулы Френе для ортогональной системы трехъ направленій, опредѣляемыхъ ортогональнымъ опредѣлителемъ

$$\Omega = \begin{vmatrix} a & a' & \mathfrak{L} \\ b & b' & \mathfrak{M} \\ c & c' & \mathfrak{N} \end{vmatrix} = 1.$$

Умножая формулы (33) сперва на a, b, c, затѣмъ на a', b', c', получимъ путемъ сложенія

$$\frac{\cos\varphi}{\varrho} = -\sum a\frac{d\mathfrak{L}}{d\sigma}, \quad \tau = -\sum a'\frac{d\mathfrak{L}}{d\sigma}.$$

А такъ какъ $\mathfrak{L} = -\mathfrak{N}p$, $\mathfrak{M} = -\mathfrak{N}q$, то, принимая во вниманіе условія ортогональности $pa + qb - c = 0$ и $pa' + qb' - c' = 0$, получимъ изъ предыдущихъ формулъ слѣдующія:

$$\frac{\cos\varphi}{\varrho} = a\left(p\frac{d\mathfrak{N}}{d\sigma} + \mathfrak{N}\frac{dp}{d\sigma}\right) + b\left(q\frac{d\mathfrak{N}}{d\sigma} + \mathfrak{N}\frac{dq}{d\sigma}\right) - c\frac{d\mathfrak{N}}{d\sigma} = \mathfrak{N}\left(a\frac{dp}{d\sigma} + b\frac{dq}{d\sigma}\right),$$

$$\tau = a'\left(p\frac{d\mathfrak{N}}{d\sigma} + \mathfrak{N}\frac{dp}{d\sigma}\right) + b'\left(q\frac{d\mathfrak{N}}{d\sigma} + \mathfrak{N}\frac{dq}{d\sigma}\right) - c'\frac{d\mathfrak{N}}{d\sigma} = \mathfrak{N}\left(a'\frac{dp}{d\sigma} + b'\frac{dq}{d\sigma}\right).$$

Первая формула есть не что иное, какъ извѣстная уже формула (13), для которой, слѣдовательно, мы получили здѣсь новое доказательство, потому что $\frac{dp}{d\sigma} = \frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{dx}{d\sigma} + \frac{\partial p}{\partial y}\cdot\frac{dy}{d\sigma} = ar + bs$ и т. д., вторая даетъ

$$\tau = \frac{raa' + s(ab' + ba') + tbb'}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}. \tag{34}$$

Это равенство можно привести къ формѣ, аналогичной формулѣ (13), замѣчая, что по свойству опредѣлителя Ω, имѣемъ

$$a' = \mathfrak{M}c - \mathfrak{N}b = -\mathfrak{N}(b + qc) = -\mathfrak{N}[pqa + (1 + q^2)b],$$
$$b' = \mathfrak{N}a - \mathfrak{L}c = \mathfrak{N}(a + pc) = \mathfrak{N}[(1 + p^2)a + pqb].$$

Отсюда получаемъ

$$\tau = \frac{-(ra + sb)[pqa + (1 + q^2)b] + (sa + tb)[(1 + p^2)a + pqb]}{1 + p^2 + q^2},$$

и снова находимъ характеристичное для линій кривизны условіе (27), приравнивая τ нулю.

702. Если желаемъ изучить свойства геодезическаго крученія, то удобнѣе всего будетъ пользоваться выраженіемъ (34).

a) Первое свойство получается тотчасъ при помощи слѣдующаго замѣчанія. Замѣняя направленіе (a, b, c) направленіемъ (a', b', c'), мы должны послѣднее замѣнить на $(-a, -b, -c)$ для того, чтобы Ω не измѣнило своего значенія, а тогда τ измѣнитъ лишь свой знакъ. Слѣдовательно, двѣ кривыя, пересѣкающіяся подъ прямымъ угломъ, имѣютъ геодезическія крученія, равныя по абсолютной величинѣ, но противоположныя по знаку.

b) Если (a_1, b_1, c_1) и (a_2, b_2, c_2) будутъ направленія линій кривизны, то, вслѣдствіе ихъ ортогональности, всегда можно положить

$$a = a_1 \cos\theta + a_2 \sin\theta, \quad a' = -a_1 \sin\theta + a_2 \cos\theta,$$
$$b = b_1 \cos\theta + b_2 \sin\theta, \quad b' = -b_1 \sin\theta + b_2 \cos\theta.$$

Замѣчая еще, что

$$r a_1 a_2 + s(a_1 b_2 + a_2 b_1) + t b_1 b_2 = 0$$

(изъ формулы (34) при $\tau = 0$), и подставляя вышенаписанныя выраженія въ (34), получимъ формулу

$$\tau = \left(\frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho_1}\right) \sin\theta \cos\theta, \tag{35}$$

гдѣ ϱ_1 и ϱ_2 главные радіусы кривизны, ясно показывающую, какъ измѣняется τ при вращеніи кривой около данной точки.

c) Обозначимъ теперь черезъ $\frac{1}{\varrho}$ и $\frac{1}{\varrho'}$ кривизны нормальныхъ сѣченій, касающихся прямыхъ (a, b, c) и (a', b', c'), т. е. нормальныя кривизны первой и второй разсматриваемыхъ нами кривыхъ. Величины $\frac{1}{\varrho}$ и $\frac{1}{\varrho'}$ выразятся, какъ извѣстно, формулами

$$\frac{1}{\varrho} = (r a^2 + 2 s a b + t b^2)\,\mathfrak{N}^2,$$
$$\frac{1}{\varrho'} = (r a'^2 + 2 s a' b' + t b'^2)\,\mathfrak{N}^2.$$

Замѣтимъ еще, что $ab' - a'b$, очевидно, равно $\mathfrak{N}$, потому что $ab' - a'b$ есть косинусъ угла, образуемаго перпендикуляромъ къ (a, b, c) и (a', b', c'), т. е. нормалью къ поверхности, съ осью z-овъ, и, какъ легко провѣрить,

$$(r a^2 + 2 s a b + t b^2)(r a'^2 + 2 s a' b' + t b'^2) - (r a a' + s(a b' + b a') + t b b')^2$$

тождественно равно $(rt - s^2)(ab' - a'b)$, т. е. $(rt - s^2)\,\mathfrak{N}^2$. Тогда найдемъ слѣдующую важную формулу

$$\frac{1}{\varrho\varrho'} - \tau^2 = K = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}. \tag{36}$$

Эту формулу можно вывести также изъ выраженія (35) для τ и формулы Эйлера. Дѣйствительно, написавъ послѣднюю въ тѣхъ двухъ видахъ, которые указаны были въ § 685, путемъ умноженія тотчасъ найдемъ

$$\tau^2 = \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_1}\right)\left(\frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho}\right) = -\frac{1}{\varrho^2} + \frac{H}{\varrho} - K = \frac{1}{\varrho\varrho'} - K,$$

такъ какъ $H = \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'}$.

703. Асимптотическія линіи. Теорема Эннепера. Разысканіе асимптотическихъ линій основывается на уравненіи

$$r\,dx^2 + 2\,s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0. \tag{37}$$

Оно выражаетъ, что нормальная кривизна этихъ линій въ каждой ихъ точкѣ равна нулю. Уравненіе (37) выражаетъ также перпендикулярность главной нормали кривой и нормали къ поверхности, потому что лѣвая его часть тождественно равна выраженію $-p\,d^2x - q\,d^2y + d^2z$. Уравненіе (37) можно поэтому написать и въ слѣдующемъ болѣе общемъ видѣ

$$\mathfrak{L}\,d^2x + \mathfrak{M}\,d^2y + \mathfrak{N}\,d^2z = 0.$$

Если x, y, z заданы, какъ функціи двухъ независимыхъ перемѣнныхъ u, v, и замѣтимъ, что

$$d^2x = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\,du^2 + 2\,\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\,du\,dv + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\,dv^2 \text{ и т. д.,}$$

то послѣднее уравненіе приметъ видъ

$$\mathfrak{A}\,du^2 + 2\,\mathfrak{C}\,du\,dv + \mathfrak{B}\,dv^2 = 0 \tag{38}$$

гдѣ $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ имѣютъ установленныя въ концѣ § 694 значенія. Впослѣдствіи мы увидимъ, что уравненіе (37), какъ и (28), имѣющее тотъ же видъ, характеризуетъ два семейства (съ однимъ независимымъ параметромъ) поверхностей, пересѣкающихъ данную поверхность по асимптотическимъ линіямъ. Впрочемъ, для изученія асимптотическихъ линій на данной поверхности не неизбѣжно знать ихъ уравненія. А именно, если извѣстны главныя кривизны, то можно, съ помощью нѣкоторыхъ формулъ найти и кривизны асимптотическихъ линій. Не выходя за предѣлы, поставленные для настоящаго учебника, мы не можемъ дать здѣсь доказательство одной формулы Бонне [1]), выражающей первую кривизну асимптотическихъ линій черезъ ϱ_1 и ϱ_2. Относительно же крученія легко доказать слѣдующую теорему Эннепера: Крученіе асимптотическихъ линій равно корню квадратному изъ полной кривизны, взятой съ обратнымъ знакомъ. Дѣйствительно, для асимтотическихъ

[1]) „Nouvelles Annales de Mathématiques" 1865, стр. 268.

линій, какъ и вообще для всѣхъ кривыхъ, главныя нормали которыхъ вездѣ одинаково наклонены къ нормали поверхности, т. е. для которыхъ $\varphi = \text{const.}$ (что имѣетъ мѣсто и для геодезическихъ линій) геодезическое крученіе равно абсолютному крученію. Поэтому, такъ какъ $\frac{1}{\tau} = \tau$, а $\frac{1}{\varrho} = 0$, то формула (36) и даетъ $\tau = \pm\sqrt{-\varrho_1\varrho_2}$.

704. Теорема Бельтрами. Въ заключеніе докажемъ теорему Бельтрами, упомянутую въ § 682. Помѣстимъ начало координатъ въ любой точкѣ M на поверхности; затѣмъ въ касательной плоскости примемъ за ось x-овъ касательную къ асимптотической линіи, за ось y-овъ ея главную нормаль, а ось z-овъ (нормаль къ поверхности) направимъ въ отрицательную сторону по бинормали. Выведенныя въ § 643 формулы (19) примѣнимы ко всякой кривой, которая касается асимптотической линіи и для которой соприкасающаяся плоскость въ точкѣ M совпадаетъ съ касательною плоскостью на поверхности. Слѣдовательно, если (x, y, z) будутъ координаты $(u, w, -v)$ точки M', безконечно близкой къ M, на разсматриваемой кривой, то

$$\lim\frac{y}{x^2} = \frac{1}{2\varrho}, \quad \lim\frac{z}{x^3} = \frac{1}{6\varrho\tau}.$$

Въ частности, эти формулы справедливы для асимптотической линіи, если въ нихъ замѣнимъ ϱ и τ соотвѣтствующими значеніями ϱ_0 и τ_0, въ точкѣ M на асимптотической линіи. Съ другой стороны, уравненіе поверхности въ смежности съ точкою M можно написать въ видѣ (до членовъ 3-го порядка включительно)

$$z = \tfrac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + kx^3 + \cdots.$$

Такъ какъ, по предположенію, одна изъ соприкасающихся прямыхъ есть ось x-овъ, то $r = 0$. Кромѣ того, формула (34) даетъ $s = \frac{1}{\tau_0}$ [1]). Слѣдовательно, при безпредѣльномъ приближеніи M' къ M получимъ

$$k = \lim\frac{z}{x^3} - \frac{1}{\tau_0}\lim\frac{y}{x^2} = \frac{1}{2\varrho}\left(\frac{1}{3\tau} - \frac{1}{\tau_0}\right).$$

Въ частности, когда M' приближается къ M по асимптотической линіи, находимъ $k = -\frac{1}{3\varrho_0\tau_0}$. Изъ сравненія двухъ выраженій k находимъ интересную формулу Бонне

$$2\frac{\varrho}{\varrho_0} + \frac{\tau_0}{\tau} = 3,$$

которая заключаетъ въ себѣ, какъ частный случай (при $\tau = \infty$), теорему Бельтрами.

---

[1]) Эти значенія r и s даютъ новое доказательство теоремы Эннепера, потому что $K = rt - s^2 = -1/\tau_0^2$.

705. Геодезическія линіи; формулы Вейнгартена. Опредѣленіе геодезическихъ линій на поверхности (главная нормаль совпадаетъ съ нормалью къ поверхности) (§ 665) выражается уравненіями

$$(39) \qquad \frac{d}{ds}\frac{dx}{ds} : \mathfrak{L} = \frac{d}{ds}\frac{dy}{ds} : \mathfrak{M} = \frac{d}{ds}\frac{dz}{ds} : \mathfrak{N},$$

гдѣ s обозначаетъ длину дуги кривой. Надо замѣтить, что эти уравненія, въ сущности, приводятся къ одному, потому что

$$\sum \frac{dx}{ds}\frac{d}{ds}\frac{dx}{ds} = 0, \quad \sum \mathfrak{L}\frac{dx}{ds} = 0,$$

откуда

$$\frac{\frac{d}{ds}\frac{dx}{ds}}{\mathfrak{L}} = \frac{\frac{d}{ds}\frac{dy}{ds}}{\mathfrak{M}} = \frac{\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d}{ds}\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds}\cdot\frac{d}{ds}\frac{dy}{ds}}{\mathfrak{L}\frac{dx}{ds} + \mathfrak{M}\frac{dy}{ds}}$$

$$= \frac{-\frac{dz}{ds}\cdot\frac{d}{ds}\frac{dz}{ds}}{-\frac{dz}{ds}\mathfrak{N}} = \frac{\frac{d}{ds}\frac{dz}{ds}}{\mathfrak{N}},$$

такъ что второе уравненіе есть слѣдствіе перваго. Впрочемъ, можно прямо придти къ одному единственному уравненію, если, вмѣсто того, чтобы выражать, что главная нормаль совпадаетъ съ нормалью къ поверхности, выразимъ, что бинормаль лежитъ въ касательной плоскости, т. е. перпендикулярна нормали къ поверхности, что прямо даетъ уравненіе

$$\Sigma \mathfrak{L}(dy\, d^2z - dz\, d^2y) = 0.$$

Въ очень рѣдкихъ случаяхъ удается перейти отъ дифференціальныхъ уравненій (39) къ уравненіямъ между x, y, z и двумя произвольными постоянными (см. интегрированіе дифференціальныхъ уравненій), которыя вмѣстѣ съ уравненіемъ поверхности изображаютъ дважды безконечную систему геодезическихъ линій. Несмотря на это, можно изучать геодезическія линіи, не зная ихъ уравненій въ конечномъ видѣ. Для приложеній особенно важно знать ходъ геодезическихъ линій въ весьма малой части поверхности. Помѣстимъ начало координатъ въ точку M и направимъ оси x-овъ и y-овъ по касательнымъ къ линіямъ кривизны, проходящимъ черезъ M. Ось z-овъ будетъ направлена по нормали къ поверхности, совпадающей съ главною нормалью геодезической линіи, а плоскости zMx и zMy совпадутъ съ главными нормальными сѣченіями поверхности въ точкѣ M. Разсмотримъ затѣмъ (рис. 89) дугу $MM' = \sigma$ геодезической линіи, опредѣляемую угломъ θ, образуемымъ касательною къ ней въ точкѣ M съ осью Mx. Если, кромѣ того, проведемъ нормальное сѣченіе, проходящее черезъ M и точку M', то получится еще дуга другой кривой $MM' = \sigma + \delta$. Плоскость этого нормальнаго сѣченія на практикѣ принимаютъ за соприкасающуюся плоскость геодезической линіи въ точкѣ M, хотя, конечно, для того, чтобы эта плоскость дѣйствительно была таковою (т. е. совпала съ плоскостью, проходящею черезъ Mn и касательную къ геодезической линіи), ее нужно повернуть на нѣкоторый уголъ ε. Отсчитывая этотъ уголъ въ направленіи движенія часовой стрѣлки для наблюдателя, стоящаго по оси z-овъ (главной нормали) легко найдемъ его величину, замѣтивъ, что $\operatorname{tg}\varepsilon = -\frac{v}{u}$, гдѣ u и v (§ 643) обозначаютъ разстоянія точки M' отъ нормальной и отъ соприкасающейся плоскости. Прилагая формулы (19) § 643, съ замѣною въ нихъ ds на σ, тотчасъ найдемъ $\varepsilon = \frac{\sigma^2}{6\varrho\mathfrak{r}}$, т. е. уголъ вращенія ε безконечно малая второго порядка относительно σ. Это заключеніе, столь простое, которое, впрочемъ, можно было предвидѣть, составляетъ тѣмъ не менѣе, одну изъ основныхъ теоремъ Геодезіи. Въ практикѣ

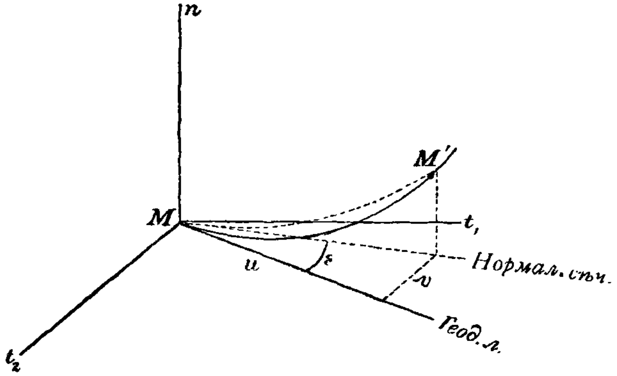

Рис. 89.

принято также, и съ еще бóльшимъ правомъ, пренебрегать числомъ δ, т. е. считать дугу MM' нормальнаго сѣченія за дугу геодезической линіи. Это оправдывается доказательствомъ того, что $\delta = \frac{2}{5}\sigma\varepsilon^2$, такъ что разность между обѣими дугами оказывается безконечно малою пятаго порядка относительно σ. Этотъ и другіе важные результаты могутъ быть выведены изъ формулъ Вейнгартена, выражающихъ координаты x, y, z точки M' въ зависимости отъ σ и θ. По вышеупомянутымъ формуламъ (19) § 643 мы имѣемъ для координатъ этой точки M' относительно реберъ основного тріэдра выраженія

$$u = \sigma - \frac{\sigma^3}{6\varrho^2} + \cdots, \quad v = -\frac{\sigma^3}{6\varrho\mathfrak{r}} + \cdots, \quad w = \frac{\sigma^2}{2\varrho} + \frac{\sigma^3}{6}\frac{d}{ds}\frac{1}{\varrho} + \cdots,$$

а отсюда тотчасъ получаемъ $z = w$, и

$$x = u\cos\theta - v\sin\theta = \sigma\cos\theta - \frac{\sigma^3}{6\varrho}\left(\frac{\cos\theta}{\varrho} - \frac{\sin\theta}{\tau}\right) + \cdots,$$

$$y = u\sin\theta + v\cos\theta = \sigma\sin\theta - \frac{\sigma^3}{6\varrho}\left(\frac{\sin\theta}{\varrho} + \frac{\cos\theta}{\tau}\right) + \cdots.$$

Съ другой стороны, замѣчая, что для геодезической линіи $\varphi = 0$, слѣдовательно, геодезическое крученіе τ равно $\frac{1}{\tau}$, а $\frac{1}{\varrho}$ равно кривизнѣ нормальнаго сѣченія, касающагося геодезической линіи въ точкѣ M, съ помощью формулы (35) и теоремы Эйлера (§ 685)

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^2\theta}{\varrho_1} + \frac{\sin^2\theta}{\varrho_2}$$

тотчасъ находимъ

$$\frac{\cos\theta}{\varrho} - \frac{\sin\theta}{\tau} = \frac{\cos\theta}{\varrho_1}, \quad \frac{\sin\theta}{\varrho} + \frac{\cos\theta}{\tau} = \frac{\sin\theta}{\varrho_2}.$$

Слѣдовательно, получимъ

$$x = \left(\sigma - \frac{\sigma^3}{6\varrho\varrho_1} + \cdots\right)\cos\theta, \quad y = \left(\sigma - \frac{\sigma^3}{6\varrho\varrho_2} + \cdots\right)\sin\theta, \quad z = \frac{\sigma^2}{2\varrho} + \cdots$$

— формулы Вейнгартена *).

706. Приложеніе къ поверхностямъ вращенія. a) Чтобы найти асимптотическія линіи, выберемъ ось вращенія за ось z-овъ и пусть $z = f(x)$ есть уравненіе меридіана въ плоскости (xz). Уравненіе поверхности будетъ тогда $z = f(R)$, гдѣ $R = \sqrt{x^2 + y^2}$. Отсюда находимъ

$$p = \frac{x}{R} f'(R) = x\varphi(R). \qquad q = \frac{y}{R} f'(R) = y\varphi(R);$$

далѣе

$$r = \varphi(R) + \frac{x^2}{R}\varphi'(R), \quad s = \frac{xy}{R}\varphi'(R), \quad t = \varphi(R) + \frac{y^2}{R}\varphi'(R).$$

Уравненіе (37) въ настоящемъ случаѣ дастъ

$$(dx^2 + dy^2)\varphi(R) + (x\,dx + y\,dy)^2 \frac{\varphi'(R)}{R} = 0$$

или, вводя въ плоскости (xy) полярныя координаты,

$$(dR^2 + R^2 d\theta^2)\varphi(R) + R\varphi'(R)\,dR^2 = 0,$$

а потому

(40) $$\pm \frac{d\theta}{dR} = \sqrt{-\frac{f''(R)}{Rf'(R)}}.$$

---

*) Статью Вейнгартена, въ которой даны эти формулы и различныя слѣдствія, выводимыя изъ нихъ, можно найти въ сочиненіи Jordan'a „Handbuch der Vermessungskunde“ II Theil, § 76 (изд. 1878 г.).

Проще еще получимъ это уравненіе изъ (38), такъ какъ, полагая $u = R$, $v = \theta$, легко найдемъ

$$\mathfrak{A} = Rf''(R), \quad \mathfrak{B} = R^2 f'(R), \quad \mathfrak{C} = 0.$$

Въ интегральномъ исчисленіи узнаемъ, что изъ уравненія (40) получается уравненіе въ конечномъ видѣ

$$\pm (\theta - \theta_0) = F(R),$$

изображающее два семейства кривыхъ, а именно проекціи асимптотическихъ линій на плоскость (xy). Всѣ эти кривыя могутъ быть получены изъ одной $\theta = F(R)$ при помощи зеркальнаго изображенія относительно полярной оси и вращенія около полюса.

b) Лишь въ совершенно исключительныхъ случаяхъ возможно полное опредѣленіе геодезическихъ линій. Тѣмъ не менѣе въ самомъ общемъ случаѣ изъ уравненій (39) можно вывести замѣчательную теорему, значительно облегчающую разысканіе геодезическихъ линій на поверхности вращенія и позволяющую прослѣдить ихъ ходъ. Дѣйствительно, для этихъ линій должны имѣть мѣсто равенства

$$\frac{d}{ds}\frac{dx}{ds} : x = \frac{d}{ds}\frac{dy}{ds} : y \quad \text{или} \quad x\frac{d}{ds}\frac{dy}{ds} - y\frac{d}{ds}\frac{dx}{ds} = 0,$$

слѣдовательно,

$$\frac{d}{ds}\left(x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds}\right) = 0, \qquad x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds} = c,$$

гдѣ c произвольная постоянная. Пусть теперь ψ обозначаетъ уголъ, образуемый геодезическою линіею съ меридіаномъ, и замѣтимъ, что $-\sin\theta$, $\cos\theta$, 0 будутъ направляющіе косинусы касательной къ параллели, а $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ направляющіе косинусы касательной геодезической линіи. Тогда будемъ имѣть

$$\sin\psi = -\sin\theta \cdot \frac{dx}{ds} + \cos\theta \cdot \frac{dy}{ds} = \frac{1}{R}\left(x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds}\right),$$

т. е. $R\sin\psi = c$. Геодезическія линіи на поверхности вращенія пересѣкаютъ меридіаны подъ угломъ, синусъ котораго измѣняется пропорціонально кривизнѣ параллели. Эта теорема, найденная Клеро, весьма полезна въ Геодезіи. Она устанавливаетъ границы для тѣхъ областей, которыя могутъ быть заполнены геодезическими линіями, соотвѣтствующими данному (не равному нулю) значенію c. Дѣйствительно, R не можетъ быть меньше c по абсолютной величинѣ. Поэтому, если будемъ передвигаться по геодезической линіи въ томъ направленіи, въ которомъ параллельные круги становятся все меньше и меньше, то геодезическая линія будетъ все болѣе и болѣе уклоняться отъ меридіана и приближаться къ параллели, чтобы въ концѣ концовъ сдѣлаться касательною къ параллели радіуса c и не имѣть возможности за нее перейти.

707. Упражненія. a) Асимптотическія линіи косого геликоида (§ 690, b) намъ уже извѣстны, но мы укажемъ здѣсь другой способъ ихъ опредѣленія, а именно способъ, основанный на пріемѣ, изложенномъ въ § 703.

Уравненіе поверхности есть $z = a\theta$, гдѣ $\theta = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$, сложенному съ произвольнымъ кратнымъ числа π. Отсюда слѣдуетъ, что

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{ay}{x^2+y^2}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{ax}{x^2+y^2}. \tag{41}$$

Взявъ еще разъ производныя, найдемъ, что r, s, t пропорціональны соотвѣтственно числамъ $-2xy$, x^2-y^2, $2xy$, такъ что уравненіе (37) приводится къ

$$-xy\,dx^2 + (x^2-y^2)\,dx\,dy + xy\,dy^2 = 0.$$

Оно разбивается на два слѣдующихъ:

$$y\,dx - x\,dy = 0, \quad x\,dx + y\,dy = 0.$$

Первое даетъ образующія ($y = kx$), а второе даетъ $x^2+y^2 = \text{const}$. Двѣ системы асимптотическихъ линій, слѣдовательно, ортогональны, и поэтому разсматриваемая поверхность принадлежитъ къ числу минимальныхъ, какъ мы уже и раньше видѣли. Можно быстрѣе придти къ цѣли, положивъ $u = R$, $v = \theta$, и примѣняя уравненіе (38), которое приведется къ $dR\,d\theta = 0$, потому что $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B} = 0$, $\mathfrak{C} = -a$. Слѣдовательно, асимтотическія линіи будутъ $R = \text{const}$, (винтовыя линіи) и $\theta = \text{const}$. (образующія).

b) Предложимъ себѣ найти линіи кривизны на той же поверхности. Онѣ, очевидно, пересѣкаютъ образующія подъ угломъ въ 45^0. Чтобы опредѣлить ихъ аналитически, подставляемъ значенія (41) или

$$p = -\frac{a}{R}\sin\theta, \quad q = \frac{a}{R}\cos\theta$$

въ уравненіе (31). Оно приводится къ

$$\frac{\frac{dR}{R}\cos\theta - \left(1+\frac{a^2}{R^2}\right)\sin\theta\,d\theta}{\frac{dR}{R}\sin\theta - \cos\theta\,d\theta} + \frac{\frac{dR}{R}\sin\theta + \left(1+\frac{a^2}{R^2}\right)\cos\theta\,d\theta}{\frac{dR}{R}\cos\theta + \sin\theta\,d\theta} = 0,$$

и даетъ

$$\pm\frac{d\theta}{dR} = \frac{1}{\sqrt{R^2+a^2}} \quad \text{или} \quad \mp\,d\theta = \frac{d\psi}{\sin\psi},$$

если положимъ $R = a\,\text{cotg}\,\psi$. Правая часть есть дифференціалъ отъ $\log \text{tg}\,\frac{\psi}{2}$ (§ 292, b). Слѣдовательно, получимъ

$$e^{\pm(\theta-\theta_0)} = \text{tg}\,\frac{\psi}{2}, \quad R = \frac{a}{2}\left(e^{\pm(\theta-\theta_0)} - e^{\mp(\theta-\theta_0)}\right).$$

Всѣ эти кривыя, проекціи линій кривизны на направляющую плоскость, можно получить, вращая спираль $R = \frac{a}{2}(e^{\theta} - e^{-\theta})$ около полюса. Эта спираль выходитъ изъ полюса, какъ Архимедова спираль, и имѣетъ стремленіе обратиться на безконечности въ двѣ логариѳмическія спирали, встрѣчающія радіусы векторы подъ угломъ въ 45^0.

c) Для опредѣленія асимптотическихъ линій катеноида, воспользуемся формулою (40) и замѣтимъ, что функція $z = f(R)$ въ данномъ случаѣ неявно опредѣляется уравненіемъ меридіана $R=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{z}{a}}+e^{-\frac{z}{a}}\right)$. Изъ него, взявъ два раза производныя по R, получаемъ

$$\frac{1}{f'(R)}=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{z}{a}}-e^{-\frac{z}{a}}\right), \quad -\frac{f''(R)}{f'^3(R)}=\frac{1}{2a}\left(e^{\frac{z}{a}}+e^{-\frac{z}{a}}\right)=\frac{R}{a^2},$$

такъ что формула (40) переходитъ въ

$$\pm\frac{d\theta}{dR}=\frac{f'(R)}{a}, \text{ откуда } \pm a(\theta-\theta_0)=f(R).$$

Отсюда видимъ, что проекціи асимптотическихъ линій на плоскость горлового круга (Kehlkreis), въ полярныхъ координатахъ, изображаются уравненіемъ, получаемымъ путемъ замѣны z черезъ $\pm a(\theta-\theta_0)$ въ уравненіи меридіана

$$R=\frac{a}{2}\left(e^{\pm(\theta-\theta_0)}+e^{\mp(\theta-\theta_0)}\right).$$

Всѣ эти кривыя получаются вращеніемъ спирали

$$R=\frac{a}{2}\left(e^{\theta}+e^{-\theta}\right),$$

около полюса. Слѣдовательно, достаточно знать одну асимптотическую линію, чтобы знать всѣ. Уравненія

$$x=\frac{a}{2}\left(e^{\theta}+e^{-\theta}\right)\cos\theta, \qquad y=\frac{a}{2}\left(e^{\theta}+e^{-\theta}\right)\sin\theta, \qquad z=a\theta,$$

изображаютъ одну изъ асимптотическихъ линій, и мы ее уже изслѣдовали въ § 657. Свойство этой кривой, состоящее въ томъ, что оно встрѣчаетъ параллели катеноида подъ угломъ въ 45°, становится теперь очевиднымъ Дѣйствительно, такъ какъ катеноидъ минимальная поверхность (§ 690, a), то его асимптотическія линіи должны встрѣчать его линіи кривизны, т. е. меридіаны и параллели подъ угломъ въ 45°. Другое свойство нашей кривой, относящееся къ ея радіусу крученія, есть непосредственное слѣдствіе теоремы Эннепера. Въ самомъ дѣлѣ, если обозначимъ черезъ n отрѣзокъ нормали къ поверхности между точкою на поверхности и пересѣченіемъ нормали съ осью вращенія, то главные радіусы кривизны будутъ $\varrho_1=n$, $\varrho_2=-n$. Формула, данная въ концѣ § 703, тотчасъ и дастъ $\tau=\pm n$.

d) Слѣдуетъ замѣтить еще асимптотическія линіи псевдосферы (§ 693, a). Обозначимъ черезъ ψ уголъ между касательною и осью вращенія, такъ что будемъ имѣть $R=a\sin\psi$, $f'(R)=-\operatorname{cotg}\psi$, а потому $f''(R)=\frac{1}{a\cos\psi\sin^2\psi}$. Формула (40) дастъ $\pm d\theta=\frac{d\psi}{\sin\psi}$, откуда

$$\pm(\theta-\theta_0)=\log\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}$$

и, слѣдовательно,

$$R=\frac{2a}{e^{\pm(\theta-\theta_0)}+e^{\mp(\theta-\theta_0)}}.$$

Это уравненіе изображаетъ безчисленное множество положеній, принимаемыхъ *спиралью Пуансо* (Poinsot) $R=2a/(e^{\theta}+e^{-\theta})$ при вращеніи около полюса. И здѣсь, для изученія всѣхъ асимптотическихъ линій псевдосферы достаточно изслѣдовать одну изъ нихъ. Разсмотримъ ту, которая соотвѣтствуетъ уравненію $-\theta = \log \operatorname{tg} \frac{\psi}{2}$, и замѣтимъ, что

$$\frac{dz}{d\psi} = a \frac{dx}{dR} \cos\psi = -a \frac{\cos^2\psi}{\sin\psi} = -\frac{a}{\sin\psi} + a \sin\psi .$$

Отсюда, $z = -a\left(\log \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} + \cos\psi\right)$. Асимптотическая линія, которую мы желаемъ разсмотрѣть, изобразится уравненіемъ

$$x = \frac{2a\cos\theta}{e^\theta + e^{-\theta}}, \quad y = \frac{2a\sin\theta}{e^\theta + e^{-\theta}}, \quad z = a\left(\theta - \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{e^\theta + e^{-\theta}}\right).$$

Поступая такъ, какъ въ § 657, легко найдемъ $s = a\theta$. Итакъ, всякая (не слишкомъ большая) дуга асимптотической линіи равна дугѣ, отсѣкаемой меридіанами въ крайнихъ точкахъ на наибольшей параллели. Обозначимъ теперь черезъ l, m, n направляющіе косинусы оси вращенія относительно фундаментальнаго тріэдра кривой. Дифференцируя z, получимъ

$$l = \frac{dz}{ds} = -\frac{\sin\psi}{a} \frac{dz}{d\psi} \cos^2\psi .$$

Съ другой стороны (§ 638), имѣемъ

$$\frac{dl}{ds} = \frac{n}{\varrho}, \quad \frac{dm}{ds} = \frac{n}{\tau}, \tag{42}$$

а значенія m и τ намъ уже извѣстны. Дѣйствительно, $m = -\sin\psi$ есть косинусъ угла, образуемаго бинормалью (нормалью къ поверхности) съ осью z-овъ. Кромѣ того, изъ теоремы Эннепера имѣемъ тотчасъ $\tau = \pm a$. Положимъ $\tau = a$ (влѣво завитая асимптотическая линія) и замѣтимъ, что изъ второй формулы (42) вытекаетъ

$$n = a\frac{dm}{ds} = \frac{dm}{d\theta} = \cos\psi \sin\psi .$$

Отсюда, подставляя въ первую формулу (42), находимъ

$$\varrho = \frac{a}{2\sin\psi} = \frac{a}{4}\left(e^\theta + e^{-\theta}\right) = \frac{a}{4}\left(e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}}\right).$$

Замѣтимъ, что въ точкѣ касанія асимптотической линіи съ наибольшею параллелью радіусъ кривизны равенъ $\frac{1}{2}a$, между тѣмъ, какъ по теоремѣ Бельтрами, онъ долженъ былъ бы быть равнымъ $\frac{2}{3}a$. Это несогласіе объясняется тѣмъ, что вышеупомянутая параллель (общее мѣсто точекъ возврата меридіана) есть особенная линія поверхности *).

---

*) Для болѣе подробнаго изученія теоріи поверхностей можно указать на русскомъ языкѣ переводъ Дифференціальнаго исчисленія Ж. Бертрана, книга III, а на нѣмецкомъ переводъ сочиненія Bianchi. Differential. Geometrie. 1911 годъ.

КНИГА СЕДЬМАЯ

КНИГА СЕДЬМАЯ.

Интегральное Исчисленіе.

ИНТЕГРИРОВАНІЕ.

Основныя понятія.

708. Всякая функція, дифференціалъ которой равенъ $f(x)\,dx$, называется интеграломъ отъ $f(x)\,dx$ и обозначается символомъ $\int f(x)\,dx$. Иными словами, когда пишутъ $\int f(x)dx = F(x)$, то этимъ утверждаютъ, что $dF(x) = f(x)\,dx$. Такъ какъ изъ этихъ двухъ равенствъ, исключая тотъ или другой изъ символовъ f или F, получаемъ

$$f(x)\,dx = d\int f(x)\,dx, \qquad \int dF(x) = F(x),$$

то видимъ, что знаки d и $\int$ взаимно уничтожаются. Поэтому, называя интегрированіемъ операцію, изображаемую знакомъ $\int$ и дающую F по данному f, можемъ сказать, что интегрированіе есть операція, обратная дифференцированію. Намъ уже извѣстно (§ 307, b), что если $F(x)$ есть нѣкоторая функція, имѣющая дифференціалъ, равный $f(x)dx$, то всѣ другія функціи, имѣющія тотъ же дифференціалъ изобразятся формулою $F(x) + C$, гдѣ C произвольная постоянная. Если же составимъ разность значеній, принимаемыхъ на границахъ нѣкотораго интервала $(a,\ b)$ интеграломъ $\int f(x)\,dx$, соотвѣтствующимъ какому угодно данному значенію C, то получимъ вполнѣ опредѣленное число, потому что при составленіи этой разности C сокращается. Эту разность (въ которой уменьшаемое соотвѣтствуетъ верхней границѣ b, а вычитаемое нижней a) обозначаютъ символомъ $\int_a^b f(x)\,dx$ и называютъ опредѣленнымъ интеграломъ (взятымъ въ предѣлахъ a и b), въ отличіе отъ неопредѣленнаго интеграла $\int f(x)\,dx$. Итакъ, имѣемъ

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \qquad \int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Эти опредѣленія, однако, неудовлетворительны, потому что ничего не говорятъ ни о существованіи интеграла, ни о способахъ его вычисленія. Ихъ можно разсматривать лишь, какъ объясненія символовъ, а потому мы постараемся преобразовать ихъ въ другія, служащія опредѣленіемъ самой операціи, изображаемой этими символами.

708ª. Чтобы избѣжать въ дальнѣйшихъ разсужденіяхъ различныхъ отступленій, сдѣлаемъ сперва нѣкоторыя замѣчанія о такъ называемомъ разложеніи интервала (a, b) на безконечно большое число безконечно малыхъ частей, съ которыми намъ придется имѣть дѣло. Положимъ, для опредѣленности, что $a < b$, и разложимъ интервалъ (a, b) на частные интервалы

(1) $$(a, x_1),\ (x_1, x_2),\ (x_2, x_3),\ \ldots,\ (x_{n-1}, b)$$

гдѣ числа $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ подчинены единственному условію

$$a < x_1 < x_2 < x_3 \ldots < x_{n-1} < b.$$

Числа $h_1 = x_1 - a$, $h_2 = x_2 - x_1$, $\ldots$, $h_n = b - x_{n-1}$, положительныя при сдѣланномъ условіи, называются длинами интерваловъ (1). Сумма ихъ, каково бы ни было число n, всегда равна $b - a$, т. е. длинѣ даннаго интервала (a, b). Мы будемъ говорить, что намъ дано разложеніе

(I) $$(a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, b) \text{ или } (h_1, h_2, \ldots, h_n)$$

интервала (a, b) на частные интервалы $h_1, h_2, \ldots, h_n$. Замѣняя рядъ чиселъ $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ какимъ нибудь другимъ рядомъ чиселъ $x_1', x_2', \ldots, x'_{n'-1}$, также расположенныхъ по порядку ихъ величинъ, получимъ другое разложеніе того же интервала (a, b)

(II) $$(a, x_1', x_2', \ldots, x'_{n'-1}, b) \text{ или } h_1', h_2', \ldots, h_{n'}'$$

на частные интервалы $h_1', h_2', \ldots, h_{n'}'$, гдѣ $h_i' = x_i' - x_{i-1}'$ при $i = 1, 2, \ldots, n'$ $(x_0' = a,\ x_{n'}' = b)$. Продолжая такимъ образомъ, мы получимъ нѣкоторую послѣдовательность

$$(I),\ (II),\ (III),\ \ldots$$

разложеній интервала (a, b). Мы будемъ разсматривать лишь такія послѣдовательности разложеній, въ которыхъ длины всѣхъ частныхъ интерваловъ, или, какъ будемъ говорить для сокращенія рѣчи, всѣ частные интервалы безпредѣльно убываютъ, т. е. стремятся къ нулю, при чемъ, очевидно, число ихъ должно возрастать безпредѣльно, потому что сумма ихъ всегда остается равною $b-a$. Переходъ отъ одного разложенія такой послѣдовательности къ другому, отъ него къ третьему и т. д. и называютъ разложеніемъ интервала (a, b) на безконечно большое число безконечно малыхъ частей. Ясно, что существуетъ безчисленное множество различныхъ послѣдовательностей, удовлетворяющихъ поставленному условію; это и выражаютъ, когда говорятъ, что интервалъ (a, b) можно разложить на безконечно большое число безконечно малыхъ частей безчисленнымъ множествомъ способовъ. Разсматривая числа a и b, какъ абсциссы начала и конца нѣкотораго прямолинейнаго отрѣзка AB, мы видимъ, что $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ будутъ абсциссами точекъ, лежащихъ между A и B. Каждому разложенію интервала (a, b) на частные интервалы соотвѣтствуетъ раздѣленіе отрѣзка AB на частные отрѣзки. Числа $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ мы будемъ называть, для краткости, точками дѣленія интервала или отрѣзка. Разсматривая два послѣдовательныхъ разложенія, мы будемъ говорить, что второе разложеніе есть продолженіе перваго, если всѣ точки дѣленія перваго разложенія входятъ въ составъ второго, иными словами, если второе разложеніе получается черезъ подраздѣленіе интерваловъ (отрѣзковъ) перваго на болѣе мелкія части. Когда даны какія нибудь два разложенія

$$(a, x_1', x_2', \ldots, x'_{n'-1}, b) \text{ и } (a, x_1'', x_2'', \ldots, x''_{n''-1}, b),$$

то изъ нихъ всегда можно составить такое третье

$$(a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, b),$$

которое будетъ продолженіемъ какъ перваго, такъ и второго, подраздѣливъ интервалы (отрѣзки) перваго точками дѣленія второго, или интервалы второго точками дѣленія перваго, при чемъ, очевидно, получается одно и то же разложеніе. Числа

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$$

будутъ не что иное, какъ числа

$$x_1', x_2', \ldots, x'_{n'-1}, \quad x_1'', x_2'', \ldots, x''_{n''-1},$$

расположенныя по порядку ихъ величинъ, при чемъ, конечно, если $x_i' = x_k''$, то эти два числа дадутъ только одно число x_e. Ясно, что всякій интервалъ перваго разложенія h_i' равенъ либо одному изъ интерваловъ h_e, либо суммѣ нѣсколькихъ интерваловъ третьяго разложенія, и то же самое можно сказать и о каждомъ интервалѣ второго разложенія.

709. Перейдемъ теперь къ выясненію понятія объ опредѣленномъ интегралѣ $\int_a^b f(x)\,dx$, который, по опредѣленію, данному въ

§ 708, есть разность $F(b)-F(a)$, если $F'(x)=f(x)$. Возьмемъ какое нибудь разложеніе интервала (a, b) на n частныхъ интерваловъ $h_1, h_2, \ldots, h_n$, гдѣ $h_i=x_i-x_{i-1}$, $i=1, 2, \ldots, n$, $x_0=a$, $x_n=b$, примѣнимъ къ каждому изъ нихъ теорему Лагранжа (§ 306). Обозначая черезъ α_i нѣкоторое опредѣленное число, лежащее въ интервалѣ (x_{i-1}, x_i), получимъ (принимая во вниманіе, что $F'(x)=f(x)$)

$$F(x_1)-F(a)=h_1 f(\alpha_1),\ F(x_2)-F(x_1)=h_2 f(\alpha_2),\ \ldots,\ F(b)-F(x_{n-1})=h_n f(\alpha_n);$$

складывая эти равенства и полагая

$$\sigma=h_1 f(\alpha_1)+h_2 f(\alpha_2)+\cdots+h_n f(\alpha_n)=\sum_1^n h_i f(\alpha_i),$$

получимъ

$$F(b)-F(a)=\sigma.$$

Формула эта еще не даетъ, сама по себѣ, способа для вычисленія разности $F(b)-F(a)$, потому что числа α_i намъ неизвѣстны. Но съ ея помощью, мы получимъ весьма важный результатъ. Сравнимъ сумму σ съ другою суммою

$$\tau=h_1 f(\beta_1)+h_2 f(\beta_2)+\cdots+h_n f(\beta_n)=\sum_1^n h_i f(\beta_i),$$

гдѣ β_i обозначаетъ любое число въ интервалѣ (x_{i-1}, x_i), и можетъ быть выбираемо нами по произволу. Предположимъ теперь, что функція $f(x)$ непрерывна въ интервалѣ (a, b). На основаніи теоремы Кантора (§ 279) извѣстно, что всякому, сколько угодно малому, положительному числу ε соотвѣтствуетъ другое положительное число η, такое, что когда всѣ $h_1, h_2, \ldots, h_n$ будутъ меньше η, то $|f(\beta_i)-f(\alpha_i)|$ будетъ меньше ε для $i=1, 2, \ldots, n$. Поэтому

$$|\tau-\sigma|\leqq\sum_1^n h_i\,|f(\beta_i)-f(\alpha_i)|<\varepsilon\cdot\sum_1^n h_i=(b-a)\,\varepsilon.$$

Замѣчая, что число $\varepsilon(b-a)$ можно сдѣлать меньшимъ любого положительнаго числа ε', взявъ $\varepsilon<\frac{\varepsilon'}{b-a}$, приходимъ къ слѣдующему заключенію: Послѣдовательность значеній суммы τ

$$\tau_1,\ \tau_2,\ \ldots,\ \tau_m,\ \ldots,$$

соотвѣтствующихъ любой послѣдовательности разложеній интервала (a, b) на частные интервалы, стремящіеся одновременно къ нулю, стремится къ предѣлу, равному σ, т. е. опредѣленному интегралу

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Этотъ результатъ можно формулировать болѣе кратко, не опасаясь недоразумѣнія, послѣ всего сказаннаго выше, а именно такъ: сумма $\tau = \sum_1^n h_i f(\beta_i)$ стремится къ предѣлу, равному $\int_a^b f(x)\,dx$, когда всѣ интервалы h_i стремятся къ нулю, и записать этотъ результатъ въ слѣдующемъ видѣ

$$\lim_{h_i=0} \sum_1^n h_i f(\beta_i) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Всѣ наши разсужденія основаны были на томъ: 1) что существуетъ первообразная функція $F(x)$ отъ $f(x)$ и 2) что $f(x)$ непрерывна въ интервалѣ. Теперь мы отрѣшимся отъ этихъ предположеній и ограничимъ функцію $f(x)$ только условіемъ конечности ея въ интервалѣ (a, b).

710. Опредѣленіе интеграла. Руководствуясь вышеизложенными соображеніями, мы можемъ теперь установить нижеслѣдующее опредѣленіе интеграла: „Разложимъ интервалъ (a, b) какимъ угодно способомъ на частные интервалы $h_1, h_2, \ldots, h_n$, стремящіеся одновременно къ нулю, при чемъ число ихъ безпредѣльно возрастаетъ; обозначимъ черезъ $f_1, f_2, \ldots, f_n$ какія угодно числа, лежащія между нижнею и верхнею границами функціи $f(x)$ въ соотвѣтствующихъ интервалахъ (или совпадающія съ этими границами), и составимъ сумму

$$\tau = h_1 f_1 + h_2 f_2 + \cdots + h_n f_n = \sum_1^n h_i f_i.$$

Если эта сумма всегда стремится къ одному и тому же предѣлу, то этотъ предѣлъ называютъ опредѣленнымъ интеграломъ отъ $f(x)\,dx$, взятымъ отъ a до b, и обозначаютъ знакомъ $\int_a^b f(x)\,dx$".

Число a называютъ нижнимъ, а b верхнимъ предѣломъ интеграла. Разсматривая затѣмъ верхній предѣлъ b, какъ число перемѣнное, и обозначая его буквою x, получимъ опредѣленіе неопредѣленнаго интеграла $F(x)$ *). Какъ въ томъ, такъ и въ другомъ случаѣ $f(x)\,dx$ называютъ элементомъ интеграла и говорятъ, что интегралъ есть сумма безконечно большого числа безконечно малыхъ элементовъ.

[**Примѣчаніе.** Точный смыслъ установленнаго здѣсь опредѣленія $\int_a^b f(x)\,dx$, какъ видно изъ разъясненій, сдѣланныхъ въ

---

*) Такая терминологія не всѣми принята; неопредѣленнымъ интеграломъ отъ $f(x)\,dx$ называютъ обыкновенно общее выраженіе $F(x) + C$ всѣхъ функцій, дифференціалъ которыхъ есть $f(x)\,dx$.

§§ 708a и 709, состоитъ въ слѣдующемъ: Если всѣ послѣдовательности

(τ) $$\tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3,\ \ldots$$

значеній суммы τ, соотвѣтствующія всевозможнымъ послѣдовательностямъ разложеній интервала $(a,\ b)$, для которыхъ всѣ h_i стремятся къ нулю, имѣютъ одинъ и тотъ же предѣлъ, независимо отъ выбора чиселъ f_i въ указанныхъ границахъ, то этотъ предѣлъ и будетъ, по опредѣленію, $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Если существуетъ упомянутый предѣлъ, то говорятъ, что функція $f(x)$ интегрируема въ интервалѣ $(a,\ b)$. При выводѣ условій интегрируемости (§ 714) и нужно имѣть въ виду вышеприведенное толкованіе опредѣленія интеграла.]

711. Прежде чѣмъ перейдемъ къ выводу условій интегрируемости функціи $f(x)$, замѣтимъ теперь же нѣкоторыя свойства интеграла, вытекающія непосредственно изъ его опредѣленія, а именно:

$$\int\limits_a^b kf(x)\,dx = k\int\limits_a^b f(x)\,dx \text{ при } k \text{ постоянномъ},$$

$$\int\limits_a^b (u+v+\cdots)\,dx = \int\limits_a^b u\,dx + \int\limits_a^b v\,dx + \cdots;$$

послѣднее равенство, очевидно, справедливо при любомъ, но конечномъ, числѣ функцій $u,\ v,\ \ldots$. Для доказательства стоитъ только перейти къ предѣламъ въ равенствахъ

$$\sum_1^n kh_if_i = k\sum_1^n h_if_i,\quad \sum_1^n h_i(u_i+v_i+\cdots) = \sum_1^n h_iu_i + \sum_1^n h_iv_i + \cdots,$$

предполагая, конечно, что интегралы отъ $f\,dx,\ u\,dx,\ v\,dx,\ \ldots$ существуютъ. Далѣе, умѣстно будетъ избавиться отъ нѣкоторыхъ ограниченій, заключающихся въ установленномъ выше понятіи объ интегралѣ.

a) Чтобы избавиться отъ необходимости считать $a<b$, условимся полагать

(1) $$\int\limits_a^b = -\int\limits_b^a.$$

Это условіе вполнѣ естественно, потому что, если считать интервалъ $b-a$ числомъ отрицательнымъ, то и всѣ интервалы $h_1,\ h_2,\ \ldots,\ h_n$ надо считать отрицательными, между тѣмъ какъ числа $f_1, f_2, \ldots, f_n$ остаются безъ измѣненія. Иными словами, каждый элементъ $f(x)\,dx$

имѣетъ знакъ, одинаковый съ $f(x)$, или противоположный, смотря по тому, будетъ ли dx положительнымъ или отрицательнымъ при измѣненіи x отъ нижняго предѣла a до верхняго b. Теперь легко показать, что всегда будемъ имѣть

(2) $$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b .$$

Это свойство, очевидно, когда c лежитъ между a и b *); въ противномъ же случаѣ, если, напримѣръ, $a < b < c$, тотчасъ найдемъ, пользуясь равенствомъ (1),

$$\int_a^b = \int_a^c - \int_b^c = \int_a^c + \int_c^b .$$

b) Опредѣленіе $\int_a^b f(x)\,dx$ требуетъ, чтобы $f(x)$ оставалась конечною въ интервалѣ (a, b). Но это ограниченіе отпадаетъ въ случаѣ, если $f(x) = \infty$ при $x = c$, съ помощью соглашенія

$$\int_a^b = \lim_{\varepsilon=0} \int_a^{c-\varepsilon} + \lim_{\eta=0} \int_{c+\eta}^b .$$

c) Часто приходится также разсматривать интегралы, распространенные на безконечные интервалы; но ихъ надо разсматривать, какъ предѣлы другихъ, распространенныхъ на конечные интервалы. А именно, въ видѣ опредѣленій полагаютъ

$$\int_a^{\pm\infty} = \lim_{x=\pm\infty} \int_a^x , \qquad \int_{\pm\infty}^a = \lim_{x=\pm\infty} \int_x^a ,$$

и, кромѣ того,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} = \int_{-\infty}^a + \int_a^\infty .$$

Легко убѣдиться, что вышеизложенныя свойства интеграловъ при конечномъ интервалѣ распространяются и на случай безконечнаго интервала.

---

*) Въ самомъ дѣлѣ, если интегралъ существуетъ, то мы можемъ выбирать точки дѣленія интервала (a, b) по нашему произволу, а поэтому можемъ сперва разложить его на два интервала (a, c) и (c, b) и затѣмъ разлагать далѣе каждый изъ нихъ.

d) На основаніи предыдущихъ опредѣленій, нельзя, вообще говоря, разсматривать интегралъ, распространенный на безконечный интервалъ, какъ предѣлъ, къ которому стремится сумма безконечнаго ряда

$$h_1 f_1 + h_2 f_2 + h_3 f_3 + \cdots,$$

когда всѣ h_i стремятся къ нулю. Но мы укажемъ здѣсь же одинъ весьма общій случай, когда такое разсмотрѣніе законно. Положимъ, что интервалъ (a, ∞) разбитъ на безконечное число частныхъ интерваловъ $h_1, h_2, h_3, \ldots$, стремящихся одновременно къ нулю, и для каждаго интервала h_i выбрано значеніе f_i, лежащее между нижнею и верхнею границами функціи $f(x)$ въ этомъ интервалѣ. Положимъ, что рядъ

$$h_1 f_1 + h_2 f_2 + h_3 f_3 + \cdots$$

сходящійся и сумма его стремится къ опредѣленному предѣлу, когда всѣ h_i стремятся къ нулю; обозначимъ этотъ предѣлъ черезъ $\varrho(a)$, такъ что

$$\varrho(a) = \lim \{ h_1 f_1 + h_2 f_2 + h_3 f_3 + \cdots \}.$$

Если $\varrho(x)$, составленная по тому же закону, стремится къ нулю при возрастаніи x до ∞, то можно утверждать, что

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \varrho(a).$$

Дѣйствительно, полагая $h_1 = x_1 - a$, $h_2 = x_2 - x_1$, $\ldots$, $h_i = x - x_{i-1}$ и т. д., мы можемъ написать, что

$$\varrho(a) = \lim \{ (x_1 - a) f_1 + (x_2 - x_1) f_2 + \cdots + (x - x_{i-1}) f_i \}$$
$$+ \lim \{ (x_{i+1} - x) f_{i+1} + (x_{i+2} - x_{i+1}) f_{i+2} + \cdots \}$$

$$\text{т. е. } \varrho(a) = \int_a^x f(x)\,dx + \varrho(x).$$

Увеличивая x до ∞, и замѣчая, что $\lim\limits_{x=\infty} \varrho(x) = 0$ по условію, находимъ

$$\varrho(a) = \int_a^\infty f(x)\,dx.$$

(см. примѣръ e) въ § 721).

712. Изъ безчисленнаго множества способовъ разложенія интервала (a, b) на безконечно малые интервалы $h_1, h_2, h_3, \ldots$, самымъ простымъ, безъ сомнѣнія, будетъ разложеніе на равныя между собою части; въ такомъ случаѣ будемъ имѣть

$$\tau_n = h(f_1 + f_2 + \cdots + f_n) = (b - a)\frac{f_1 + f_2 + \cdots + f_n}{n}$$

и, слѣдовательно, такъ какъ $\lim h_i = \lim \frac{b-a}{n} = 0$,

$$\lim_{n=\infty} \frac{f_1 + f_2 + \cdots + f_n}{n} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx.$$

На этомъ основаніи правую часть равенства называютъ среднимъ значеніемъ функціи $f(x)$ въ интервалѣ (a, b). Такъ какъ всѣ числа f_i лежатъ между нижнею границею λ и верхнею границею μ функціи $f(x)$ въ интервалѣ (a, b), то въ тѣхъ же границахъ лежитъ среднее ариѳметическое этихъ чиселъ, а потому и среднее значеніе $f(x)$ въ интервалѣ (a, b) лежитъ между λ и μ. Разсмотримъ теперь функцію

$$F(x) = \int_a^x f(x)\, dx,$$

дадимъ верхнему предѣлу x приращеніе h и, припоминая свойство (2), получимъ

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(x)\, dx = h f_0,$$

гдѣ f_0 есть среднее значеніе $f(x)$ въ $(x, x+h)$, остающееся конечнымъ при приближеніи h къ нулю. Отсюда видимъ, что

$$\lim_{h=0} F(x+h) = F(x),$$

т. е. *функція $F(x)$ непрерывна.*

713. Если интегрируемая функція $f(x)$ непрерывна, то можно сказать еше больше, потому что тогда λ и μ будутъ частными значеніями функціи $f(x)$ въ интервалѣ (a, b) (§ 278), и функція $f(x)$ при переходѣ отъ одного къ другому, по крайней мѣрѣ, одинъ разъ сдѣлается равною своему среднему значенію въ (a, b) (§ 276). Поэтому, для нѣкотораго, надлежащимъ образомъ выбраннаго, числа ξ между a и b, будемъ имѣть

$$\int_a^b f(x)\, dx = (b-a) f(\xi). \tag{3}$$

Теперь легко понять, что данное въ § 710 опредѣленіе интеграла совпадаетъ съ первоначально высказаннымъ въ § 708, а именно, что производная отъ $F(x)$ есть $f(x)$. Дѣйствительно, примѣняя формулу (3) къ интервалу $(x, x+h)$, получимъ $F(x+h) - F(x) = hf(\xi)$, гдѣ ξ лежитъ между x и $x+h$, а поэтому стремится къ предѣлу x, когда h стремится къ нулю. Отсюда вытекаетъ

$$F'(x) = \lim \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim f(\xi) = f(x).$$

Изъ вышеизложеннаго ясно, что формула (3) есть не что иное, какъ формула Лагранжа, примѣненная къ опредѣленному интегралу. Только въ томъ случаѣ, когда $f(x)$ разрывна, прежнее и новое опредѣленіе интеграла могутъ быть не равносильными, и дѣйствительно, можно доказать [1]), что существуютъ случаи, когда $f(x)$ имѣетъ первообразную функцію, а интеграла отъ $f(x)\,dx$, какъ предѣла суммы, не существуетъ, т. е. функція не интегрируема въ смыслѣ § 710. И наоборотъ, легко построить функцію, имѣющую интегралъ по новому опредѣленію, и не имѣющую первообразной функціи (для этого достаточно, напримѣръ, измѣнить значенія непрерывной функціи въ конечномъ числѣ точекъ). Во всякомъ случаѣ, изъ § 709 ясно, что если существуютъ интегралы, согласно обоимъ опредѣленіямъ, то они совпадаютъ, такъ что опредѣленія не противорѣчивы.

Интегрируемость.

714. Условіе интегрируемости функціи дается слѣдующею теоремою:

Теорема. Для существованія $\int_a^b f(x)\,dx$ необходимо и достаточно, чтобы существовала такая послѣдовательность разложеній интервала (a, b) на безконечно малые интервалы $h_1, h_2, \ldots, h_n$, для которой сумма

$$\omega_n = h_1\Theta_1 + h_2\Theta_2 + \cdots + h_n\Theta_n,$$

гдѣ Θ_i обозначаетъ колебаніе *) функціи $f(x)$ въ интервалѣ h_i, стремится къ нулю, когда всѣ h_i стремятся къ нулю, а число ихъ возрастаетъ безпредѣльно.

Доказательство. а) Если интегралъ существуетъ, то это значитъ, что сумма $\tau = \sum_1^n h_i f_i$ стремится къ одному и тому же предѣлу, независимо отъ выбора чиселъ f_i въ соотвѣтствующихъ

---

[1]) Volterra (Giornale di Mathematiche, 1881, стр. 334).

*) Напомнимъ, что колебаніемъ функціи въ нѣкоторомъ интервалѣ называется разность между верхнею и нижнею границами функціи въ этомъ интервалѣ. Число b можно считать большимъ a, т. е. всѣ $h_i > 0$.

интервалахъ. Полагая одинъ разъ f_i равными верхнимъ, а другой разъ нижнимъ границамъ функціи f въ соотвѣтствующихъ интервалахъ, и вычитая второе изъ полученныхъ выраженій τ изъ перваго, получимъ (переходя къ предѣламъ) $\lim \omega = 0$, какова бы ни была послѣдовательность разложеній интервала (a, b) на безконечно малые элементы. Слѣдовательно, условіе, высказанное въ теоремѣ, необходимо. Достаточность его будетъ вытекать изъ слѣдующихъ трехъ вспомогательныхъ теоремъ.

b) Если $\lim \omega = 0$ для любой послѣдовательности разложеній (a, b) на безконечно малые элементы (а не для одной только, какъ того требуетъ теорема), то суммы

$$\tau' = \sum_1^{n'} h_i' f_i' \quad \text{и} \quad \tau'' = \sum_1^{n''} h_i'' f_i'',$$

соотвѣтствующія двумъ различнымъ послѣдовательностямъ разложеній интервала (a, b), не могутъ стремиться къ различнымъ предѣламъ. Дѣйствительно, возьмемъ какое нибудь разложеніе $(h_1', h_2', \ldots, h'_{n'})$ изъ первой послѣдовательности и какое нибудь разложеніе $(h_1'', h_2'', \ldots, h_{n''}'')$ изъ второй, и составимъ изъ нихъ третье $(h_1, h_2, \ldots, h_n)$, указаннымъ въ § 708a 'путемъ, такъ что третье разложеніе будетъ продолженіемъ какъ перваго, такъ и второго. Всякій интервалъ h_i' будетъ состоять изъ одного или нѣсколькихъ интерваловъ h_i; то же самое можно сказать о каждомъ интервалѣ h_i''. Положимъ, напримѣръ, что $h_i' = h_{r+1} + h_{r+2} + \cdots + h_s$. Выберемъ для каждаго новаго интервала h_i любое значеніе f_i между нижнею и верхнею границею функціи $f(x)$ въ этомъ интервалѣ. Мы можемъ тогда написать выраженіе $h_i' f_i'$ въ видѣ

$$h_i' f_i' = h_{r+1} f_{r+1} + h_{r+2} f_{r+2} + \cdots + h_s f_s$$
$$+ h_{r+1}(f_i' - f_{r+1}) + h_{r+2}(f_i' - f_{r+2}) + \cdots + h_s (f_i' - f_s).$$

Вторая часть этой суммы (написанная во второй строкѣ) не превзойдетъ произведенія Θ_i' на $h_{r+1} + h_{r+2} + \cdots + h_s$, т. е. числа $h_i' \Theta_i'$. Складывая всѣ такія равенства, соотвѣтствующія значеніямъ $i = 1, 2, \ldots, n'$, обозначая $\sum_1^n h_i f_i$ черезъ τ, и замѣчая, что все сказанное выше примѣнимо и къ интерваламъ h_i'', получимъ

$$\tau' = \tau + \varrho', \qquad \tau'' = \tau + \varrho'',$$

гдѣ

$$|\varrho'| \leqq \omega', \qquad |\varrho''| \leqq \omega'',$$

а ω' и ω'' значенія ω для первой и второй послѣдовательности. Отсюда слѣдуетъ, что

$$\tau' - \tau'' = \varrho' - \varrho'', \qquad |\tau' - \tau''| \leqq \omega' + \omega''.$$

По условію ω' и ω'' стремятся къ нулю, когда всѣ h_i' и h_i'' стремятся къ нулю, поэтому тогда и $|\tau' - \tau''|$ стремится къ нулю, а потому τ' не можетъ стремиться къ какому нибудь предѣлу, если τ'' не стремится къ тому же предѣлу.

c) Разсмотримъ теперь какую нибудь опредѣленную послѣдовательность разложеній и соотвѣтствующія ей послѣдовательности значеній τ

$$(\tau) \qquad \tau_1, \ \tau_2, \ \ldots, \ \tau_m, \ \ldots$$

и значеній ω

$$(\omega) \qquad \omega_1, \ \omega_2, \ \ldots, \ \omega_m, \ \ldots.$$

Мы докажемъ, что, если послѣдовательность (ω) имѣетъ предѣломъ нуль, т. е. $\lim\limits_{m=\infty} \omega_m = 0$, то послѣдовательность (τ) имѣетъ опредѣленный и конечный предѣлъ. Для этого намъ достаточно (§ 139) показать, что, каково бы ни было напередъ заданное положительное число ε, существуетъ такое число k, что

$$|\tau_{m'} - \tau_{m''}| < \varepsilon,$$

если $\tau_{m'}$ и $\tau_{m''}$ — любые два члена послѣдовательности (τ), для которыхъ указатели m' и m'' оба больше k. Предполагая, что ε дано, мы возьмемъ такое число k, чтобы для всякаго $m > k$ выполнялось неравенство

$$\omega_m < \frac{\varepsilon}{2};$$

это сдѣлать можно въ виду допущенія, что $\lim\limits_{m=\infty} \omega_m = 0$. Возьмемъ теперь два произвольныхъ цѣлыхъ числа m' и m'', большихъ k. Ясно, что къ суммамъ $\tau_{m'}$ и $\tau_{m''}$ можно примѣнить все сказанное въ пунктѣ b) о суммахъ τ' и τ'', такъ что мы получаемъ

$$|\tau_{m'} - \tau_{m''}| \leqq \omega_{m'} + \omega_{m''} < \varepsilon \quad [m', \ m'' > k],$$

что и надо было доказать.

d) Для доказательства основной теоремы этого параграфа остается еще доказать, что, если ω **стремится къ нулю при какой нибудь одной послѣдовательности разложеній интервала** (a, b) **на безконечно малыя части, то оно будетъ стремиться къ нулю и при всякой другой послѣдовательности.** Положимъ, что дана нѣкоторая послѣдовательность разложеній, для которой $\lim \omega = 0$, и пусть $h_1', h_2', \ldots, h_{n'}'$, система интерваловъ въ одномъ изъ разложеній этой послѣдовательности. Каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, можно считать, что ω', т. е. значеніе ω, соотвѣтствующее этой системѣ, уже меньше ε. Далѣе, относительно интерваловъ $h_1'', h_2'', \ldots, h_{n''}''$ какого нибудь разложенія, принадлежащаго другой послѣдовательности, можно предположить, что всѣ h_i'' уже меньше $\frac{\eta}{n'}$, гдѣ η—другое, сколь угодно малое, положительное число, потому что $\lim h_i''$ также равенъ нулю. Замѣтивъ это, разсмотримъ опять, какъ въ пунктѣ b), разложеніе съ интервалами $h_1, h_2, \ldots, h_n$, составляющее продолженіе какъ перваго, такъ и второго разложенія. Подобно тому, что было получено въ пунктѣ b), здѣсь будемъ имѣть

$$h_i' \Theta_i' = h_{r+1}\Theta_{r+1} + h_{r+2}\Theta_{r+2} + h_{r+3}\Theta_{r+3} + \cdots + h_s\Theta_s$$
$$+ h_{r+1}(\Theta_i' - \Theta_{r+1}) + h_{r+2}(\Theta_i' - \Theta_{r+2}) + \cdots + h_s(\Theta_i' - \Theta_s)$$

или, замѣчая, что $\Theta_{r+1}, \Theta_{r+2}, \ldots, \Theta_s$ не превосходятъ Θ_i', находимъ

$$h_i'\Theta_i' \geqq h_{r+1}\Theta_{r+1} + h_{r+2}\Theta_{r+2} + \cdots + h_s\Theta_s,$$

а суммируя по значку i, получимъ, что $\omega' \geqq \omega$. Разсмотримъ, съ другой стороны, число ω'', соотвѣтствующее разложенію на интервалы $h_1'', h_2'', \ldots, h_{n''}''$. Въ выраженіе этого ω'' входятъ всѣ тѣ члены суммы ω (соотвѣтствующей разложенію на $h_1, h_2, \ldots, h_n$), которые относятся къ такимъ интерваламъ h_i'', внутри которыхъ нѣтъ точекъ дѣленія перваго разложенія на $h_1', h_2', \ldots, h_{n'}'$ (потому что такіе интервалы h_i'' будутъ въ то же время интервалами h_i); кромѣ этихъ членовъ, въ ω'' входятъ и другіе, число которыхъ навѣрно меньше n', потому что они относятся къ тѣмъ изъ интерваловъ h_i'', внутри которыхъ находится, по крайней мѣрѣ, одна изъ точекъ перваго разложенія, а число всѣхъ такихъ точекъ равно $n'-1$. Замѣчая, что каждый изъ этихъ послѣднихъ членовъ меньше, чѣмъ произведеніе $\frac{\eta}{n'}$ на колебаніе функціи, навѣрно не превышающее полнаго колебанія Θ въ цѣломъ интервалѣ (a, b), мы видимъ, что сумма всѣхъ этихъ членовъ меньше $\eta\Theta$. Слѣдовательно,

$$\omega'' < \omega + \eta\Theta, \quad \text{а такъ какъ } \omega' \geqq \omega, \text{ то } \omega'' < \omega' + \eta\Theta < \varepsilon + \eta\Theta.$$

При дальнѣйшемъ уменьшеніи интерваловъ h_i'' послѣднее неравенство сохраняетъ свою силу, и ω'' остается меньше числа $\varepsilon + \eta\Theta$, которое можно сдѣлать сколь угодно малымъ, распоряжаясь числами ε и η. Иначе говоря, $\lim \omega'' = 0$, и теорема доказана.

715. Изъ доказаннаго критеріума интегрируемости мы выведемъ нѣкоторыя полезныя слѣдствія.

a) Если существуетъ интегралъ отъ $f(x)\,dx$, то существуетъ и интегралъ отъ $|f(x)|\,dx$. Въ самомъ дѣлѣ, если функція $f(x)$ не мѣняетъ знака въ интервалѣ, то колебаніе Θ_i' функціи $|f(x)|$, очевидно, равно колебанію Θ_i функціи $f(x)$ въ томъ же интервалѣ, а если $f(x)$ мѣняетъ знакъ, то $\Theta_i' < \Theta_i$. Отсюда всегда $\Theta_i' \leqq \Theta_i$, слѣдовательно, $\omega' \leqq \omega$, и если $\lim \omega = 0$, то и $\lim \omega' = 0$. Замѣтимъ, кромѣ того, что вслѣдствіе неравенства

$$\left|\sum_1^n h_i f_i\right| \leqq \sum_1^n |h_i f_i| ,$$

въ предѣлѣ получаемъ

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

b) Сумма двухъ и вообще конечнаго числа интегрируемыхъ функцій интегрируема. Эта теорема, которую мы выше указали (§ 711), какъ непосредственное слѣдствіе опредѣленія интеграла, можетъ быть также выведена изъ условія интегрируемости. Нужно только замѣтить, что колебаніе суммы нѣсколькихъ функцій въ данномъ интервалѣ не больше суммы колебаній слагаемыхъ въ томъ же интервалѣ. Дѣйствительно, если λ' и μ' — границы функціи u, λ'' и μ'' — границы функціи v, то $\lambda' + \lambda'' \leqq u + v \leqq \mu' + \mu''$. Слѣдовательно, нижняя граница λ функціи $u+v$ не меньше $\lambda' + \lambda''$, а верхняя μ не больше $\mu' + \mu''$, такъ что колебаніе Θ функціи $(u+v)$ удовлетворяетъ неравенству $\Theta = \mu - \lambda \leqq \Theta' + \Theta''$. Примѣняя это неравенство къ каждому интервалу h_i и складывая, получимъ $\omega \leqq \omega' + \omega''$, откуда $\lim \omega = 0$, если $\lim \omega' = \lim \omega'' = 0$.

c) Произведеніе двухъ или нѣсколькихъ интегрируемыхъ функцій (при конечномъ числѣ сомножителей) интегрируемо. Въ самомъ дѣлѣ *), обозначая черезъ c число, не ме́ньшее, чѣмъ наибольшее изъ чиселъ 0, $-\lambda'$, $-\lambda''$, имѣемъ

$$(\lambda' + c)(\lambda'' + c) \leqq (u + c)(v + c) \leqq (\mu' + c)(\mu'' + c),$$

откуда,

$$\lambda'\lambda'' - c(\Theta' + \Theta'') \leqq uv \leqq \mu'\mu'' + c(\Theta' + \Theta''),$$

а потому

$$\Theta \leqq \mu'\mu'' - \lambda'\lambda'' + 2c(\Theta' + \Theta'') = \mu'\Theta'' + \lambda''\Theta' + 2c(\Theta' + \Theta''),$$

и наконецъ, $\Theta < k(\Theta' + \Theta'')$, гдѣ k обозначаетъ число, бо́льшее $\mu' + 2c$ и $\lambda'' + 2c$. Это заключеніе распространяется на всякій интервалъ h_i, при чемъ значенія c и k остаются неизмѣнными, такъ какъ $\lambda' \leqq \lambda'_i$, $\lambda'' \leqq \lambda''_i$; $\mu' \geqq \mu'_i$, $\mu'' \geqq \mu''_i$. Отсюда выводится $\Theta_i < k(\Theta'_i + \Theta''_i)$, далѣе, $\omega < k(\omega' + \omega'')$, и потому $\lim \omega = 0$, если $\lim \omega' = 0$ и $\lim \omega'' = 0$.

---

*) Читатель пойметъ, безъ дальнѣйшихъ объясненій, смыслъ вводимыхъ здѣсь и дальше обозначеній.

d) Если $f(x)$ интегрируема, то и $\frac{1}{f(x)}$ интегрируема, при условіи, что $\frac{1}{f(x)}$ остается конечною въ разсматриваемомъ интервалѣ. Если, напримѣръ, $f(x)$ остается постоянно бо́льшею, чѣмъ данное положительное число, то ея нижняя граница $\lambda > 0$, и границы $\frac{1}{f(x)}$ будутъ $\lambda' = \frac{1}{\mu}$, $\mu' = \frac{1}{\lambda}$. Отсюда слѣдуетъ, что

$$\Theta' = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu} = \frac{\Theta}{\lambda\mu} \leqq \frac{\Theta}{\lambda^2}.$$

Итакъ, въ каждомъ интервалѣ h_i будемъ имѣть $\Theta_i' \leqq \frac{\Theta_i}{\lambda^2}$, поэтому и $\omega' \leqq \frac{\omega}{\lambda^2}$ и, наконецъ, $\lim \omega' = 0$, если $\lim \omega = 0$.

e) Частное отъ дѣленія одной интегрируемой функціи на другую такую же есть интегрируемая функція, при условіи, что она остается конечной въ интервалѣ интегрированія. Дѣйствительно, если функціи u и v, по предположенію конечныя, интегрируемы, то и $\frac{1}{v}$, то же конечная, по условію, интегрируема. Слѣдовательно и функція $\frac{u}{v}$, какъ произведеніе u на $\frac{1}{v}$, интегрируема.

f) Укажемъ здѣсь еще одно непосредственное слѣдствіе условія интегрируемости, чтобы имѣть возможность вскорѣ на него сослаться, а именно, что всякая конечная монотонная, т. е. измѣняющаяся постоянно въ одномъ направленіи функція — интегрируема. При этомъ не исключаются и функціи съ разрывами непрерывности (по необходимости обыкновенными) въ предѣлахъ интегрированія. Для такихъ функцій колебанія $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_n$ равны абсолютнымъ величинамъ разностей

$$f(x_1) - f(a),\ f(x_2) - f(x_1),\ \ldots,\ f(b) - f(x_{n-1}),$$

которые всѣ имѣютъ одинъ и тотъ же знакъ. Сумма ихъ поэтому равна полному колебанію Θ функціи $f(x)$ въ интервалѣ (a, b), т. е. абсолютной величинѣ разности $f(b) - f(a)$. Поэтому, если $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ дѣлятъ интервалъ (a, b) на равныя части, то

$$\omega = \sum_1^n h_i \Theta_i = h\,\Theta, \quad \lim \omega = 0.$$

Отсюда слѣдуетъ также интегрируемость всякой конечной функціи съ конечнымъ числомъ максимумовъ и минимумовъ въ интервалѣ интегрированія; стоитъ только разбить интервалъ на такія части, въ которыхъ функція монотонна, чтобы убѣдиться въ сказанномъ.

716. Остановимся здѣсь на минуту, чтобы доказать двѣ теоремы, весьма полезныя при изслѣдованіи опредѣленныхъ интеграловъ.

a) Понятіе о среднемъ значеніи (§ 712) интегрируемой функціи можно обобщить, снабжая интервалъ (a, b) въ каждой его точкѣ x плотностью $\varphi(x)$, которая по условію будетъ всегда положительнымъ числомъ, или замѣняя dx черезъ $\varphi(x)\,dx$, т. е. считая, что величина каждаго частнаго интервала равна не h_i, а $h_i\varphi_i$. Такъ какъ $\lambda \leqq f_i \leqq \mu$, то будемъ имѣть

$$\lambda\sum_1^n h_i\varphi_i \leqq \sum_1^n h_i f_i \varphi_i \leqq \mu\sum_1^n h_i\varphi_i\,,$$

потому что $\varphi_i > 0$. Поэтому, предполагая, что $\varphi(x)$ интегрируема, откуда (§ 715, c) слѣдуетъ и интегрируемость $f(x)\varphi(x)$, будемъ имѣть

$$\lambda\int_a^b \varphi(x)\,dx \leqq \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx \leqq \mu\int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

или

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f_0\int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

гдѣ f_0 число, среднее между λ и μ. Полученный результатъ извѣстенъ подъ именемъ первой теоремы о среднемъ значеніи.

b) Далѣе, положимъ, что $f(x)$ монотонная, а $\varphi(x)$ — какая угодно интегрируемая функція. Мы можемъ написать, что

$$\sum_1^n h_i f_i \varphi_i = (f_1 - f_2)\,h_1\varphi_1 + (f_2 - f_3)(h_1\varphi_1 + h_2\varphi_2) + \cdots$$
$$+ (f_{n-1} - f_n)(h_1\varphi_1 + \cdots + h_{n-1}\varphi_{n-1}) + f_n(h_1\varphi_1 + \cdots + h_n\varphi_n).$$

Такъ какъ разности $f_1 - f_2$, $f_2 - f_3$, ... всѣ одного знака, то можно далѣе написать

$$\sum_1^n h_i f_i \varphi_i = \varkappa(f_1 - f_n) + f_n\sum_1^n h_i\varphi_i\,,$$

гдѣ $\varkappa$ число, среднее между суммами

$$h_1\varphi_1,\quad h_1\varphi_1 + h_2\varphi_2,\ \ldots,\ h_1\varphi_1 + h_2\varphi_2 + \cdots + h_{n-1}\varphi_{n-1}\,.$$

Замѣчая (§ 715, f, c), что функція $f(x)\varphi(x)$ интегрируема, видимъ, что, при безпредѣльномъ одновременномъ убываніи всѣхъ h_i,

$\varkappa$ должно стремиться къ нѣкоторому предѣлу k, такъ что предыдущее равенство обращается въ слѣдующее:

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = k\,[f(a)-f(b)] + f(b)\int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Число k, очевидно, имѣетъ значеніе, лежащее между значеніями, принимаемыми интеграломъ $\int_a^x \varphi(x)\,dx$ при измѣненіи x отъ a до b. А такъ какъ этотъ интегралъ непрерывная функція отъ x (§ 712), то въ интервалѣ $(a,\ b)$ найдется такое число ξ, что $k=\int_a^\xi \varphi(x)\,dx$. Съ другой стороны, въ силу свойства (2) можно написать

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = k + \int_\xi^b \varphi(x)\,dx.$$

Слѣдовательно,

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(a)\int_a^\xi \varphi(x)\,dx + f(b)\int_\xi^b \varphi(x)\,dx.$$

[**Примѣчаніе.** То обстоятельство, что число k содержится между нижней границей l и верхней границей m значеній интеграла $\int_a^x \varphi(x)\,dx$, нуждается еще въ доказательствѣ. Если обозначимъ черезъ λ_i, μ_i соотвѣтственно нижную и верхнюю границы значеній $\varphi(x)$ въ интервалѣ $(x_{i-1},\ x_i)$ съ длиною h_i, то — при $\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n$ —

$$\text{(I)}\qquad \sum_1^\nu h_i\lambda_i \leqq \sum_1^\nu h_i\varphi_i \leqq \sum_1^\nu h_i\mu_i.$$

Въ силу же § 712

$$h_i\lambda_i \leqq \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi(x)\,dx \leqq h_i\mu_i,$$

откуда, суммируя по значку i отъ 1 до ν, получаемъ

$$\text{(II)}\qquad \sum_1^\nu h_i\lambda_i \leqq \int_a^{x_\nu} \varphi(x)\,dx \leqq \sum_1^\nu h_i\mu_i.$$

Изъ соотношеній (I) и (II) заключаемъ, что — при $\nu=1,2,\ldots,n$ —

$$\left|\sum_1^\nu h_i\varphi_i - \int_a^{x_\nu}\varphi(x)\,dx\right| \leqq \sum_1^\nu h_i(\mu_i-\lambda_i) = \sum_1^\nu h_i\Theta_i \leqq \omega,$$

гдѣ $\omega = \sum_1^n h_i \Theta_i$. Отсюда

$$\int_a^{x_\nu} \varphi(x)\,dx - \omega \leqq \sum_1^\nu h_i \varphi_i \leqq \int_a^{x_\nu} \varphi(x)\,dx + \omega$$

и a fortiori

$$l - \omega \leqq \sum_1^\nu h_i \varphi_i \leqq m + \omega \quad [\nu = 1,\ 2, \ldots, n].$$

Эти же соотношенія должны быть справедливы и для средняго значенія $\varkappa$:

$$l - \omega \leqq \varkappa \leqq m + \omega;$$

переходя къ предѣлу и имѣя въ виду, что $\lim \omega = 0$, получаемъ окончательно

$$l \leqq k \leqq m.]$$

Это **вторая** теорема о среднемъ значеніи, данная Бонне́. Замѣтимъ, что если $f(x)$ была бы разрывною на границахъ a и b, то надо было бы вмѣсто $f(a)$ и $f(b)$ писать соотвѣтственно $f(a+0)$ и $f(b-0)$, потому что послѣднія два числа и будутъ предѣлами f_1 и f_n.

717. Приложенія. a) Чтобы узнать, существуетъ ли интегралъ отъ $f(x)\,dx$, распространенный на интервалъ $(a,\ b)$, когда $f(x)$ обращается въ безконечность въ нѣкоторой точкѣ c, лежащей между a и b, надо изслѣдовать (§ 711, b), стремятся ли интегралы

$$\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx, \qquad \int_{c+\eta}^{b} f(x)\,dx$$

къ опредѣленнымъ предѣламъ съ приближеніемъ ε и η къ нулю. Для опредѣленности разсмотримъ первый изъ этихъ интеграловъ *). Чтобы этотъ интегралъ стремился къ опредѣленному предѣлу, необходимо и достаточно (§ 264), чтобы

$$\int_a^{c-\alpha} f(x)\,dx - \int_a^{c-\beta} f(x)\,dx = \int_{c-\beta}^{c-\alpha} f(x)\,dx$$

стремился къ нулю, когда α и β, одно независимо отъ другого, стремятся къ нулю. Чтобы узнать, выполнено ли это условіе, можно воспользоваться первою теоремою о среднемъ значеніи. Положимъ, напримѣръ, что $f(x)$ обращается въ ∞ такимъ образомъ, что $g(x) = (c-x)^r f(x)$ стремится къ конечному предѣлу $k \gtrless 0$, съ приближеніемъ x къ c, т. е., какъ говорятъ, что $f(x)$ обращается въ ∞ порядка r при $x = c$. Тогда

$$\int_{c-\beta}^{c-\alpha} f(x)\,dx = \int_{c-\beta}^{c-\alpha} (c-x)^{-r} g(x)\,dx = g_0 \int_{c-\beta}^{c-\alpha} (c-x)^{-r}\,dx,$$

---

*) Заключеніе, къ которому придемъ, не измѣнится и при разсмотрѣніи второго.

потому что $(c-x)^{-r}$ слѣва отъ c знака не мѣняетъ, и функція $g(x)$, стремящаяся къ предѣлу k, и интегрируемая (какъ произведеніе двухъ интегрируемыхъ функцій), навѣрно имѣетъ среднее значеніе g_0, стремящееся къ тому же предѣлу k, когда α и β стремятся къ 0. Замѣчаемъ теперь, что при $r \gtrless 1$ функція $(c-x)^{-r}$ имѣетъ первообразную функцію $F(x)=\frac{(c-x)^{1-r}}{r-1}$, а при $r=1$ первообразная функція отъ $(c-x)^{-1}$ будетъ $-\log(c-x)$. Поэтому

$$\int_{c-\beta}^{c-\alpha}(c-x)^{-r}\,dx=\frac{\alpha^{1-r}-\beta^{1-r}}{r-1},\ \text{при } r\gtrless 1$$

$$=\log\frac{\beta}{\alpha},\ \text{при } r=1.$$

Вопросъ сводится къ тому, чтобы узнать, при какомъ r $\alpha^{1-r}-\beta^{1-r}$ стремится къ 0, когда α и β стремятся къ 0; это, очевидно, будетъ при $r<1$; при $r=1$, $\log\frac{\beta}{\alpha}$ ни къ какому предѣлу не стремится. Итакъ, рассматриваемый интегралъ имѣетъ смыслъ лишь тогда, когда $f(x)$ обращается въ ∞ порядка, меньшаго единицы.

b) Поставимъ аналогичный вопросъ, когда интегралъ отъ $f(x)\,dx$, распространенный на безконечный интервалъ (§ 711, c), имѣетъ смыслъ? Чтобы существовалъ предѣлъ $\int_a^b f(x)\,dx$ при b безконечномъ, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_a^\alpha f(x)\,dx-\int_a^\beta f(x)\,dx=\int_\beta^\alpha f(x)\,dx$$

стремился къ нулю, когда α и β, одно независимо отъ другого, стремятся къ ∞. Допустимъ, что при безпредѣльномъ возрастаніи x, $\lim\limits_{x=\infty} x^r f(x)=k\gtrless 0$. Тогда

$$\int_\beta^\alpha f(x)\,dx=\int_\beta^\alpha x^{-r}g(x)\,dx=g_0\int_\beta^\alpha x^{-r}\,dx,$$

гдѣ g_0 имѣетъ предѣломъ k. Слѣдовательно, $\alpha^{1-r}-\beta^{1-r}$ должно стремиться къ 0 при безпредѣльномъ возрастаніи α и β, а для этого должно быть $r>1$. Поэтому интегралъ $\int_a^\infty f(x)\,dx$ только тогда имѣетъ смыслъ, когда $f(x)$ при x безконечномъ будетъ безконечно малымъ порядка, большаго единицы.

[**Примѣчаніе**. Надо замѣтить, что въ пунктахъ a) и b) разсмотрѣны только такіе случаи, когда существуютъ $\lim\limits_{x=c}(c-x)^r f(x)$ и $\lim\limits_{x=\infty} x^r f(x)$, а потому и заключенія относятся только къ такимъ случаямъ.]

c) Интегралъ отъ $f(x)\,dx$, распространенный на безконечный интервалъ не имѣетъ смысла, если функція $g(x)=xf(x)$ стремится къ предѣлу, отличному отъ нуля, при x безконечномъ, но интегралъ этотъ можетъ существовать въ иныхъ случаяхъ, когда $g(x)$ ни къ какому предѣлу не стремится, и даже навѣрно существуетъ, если интегралъ отъ этой функціи $g(x)$, распространенный на любой интервалъ (т. е. взятый отъ нижней до верхней границы любого конечнаго интервала) будетъ по абсолютной величинѣ меньше нѣкотораго числа k. Дѣйствительно, примѣняя вторую теорему о среднемъ значеніи, имѣемъ

$$\int_a^\beta f(x)\,dx = \frac{1}{\alpha}\int_a^\xi g(x)\,dx + \frac{1}{\beta}\int_\xi^\beta g(x)\,dx,$$

а слѣдовательно,

$$\left|\int_a^\beta f(x)\,dx\right| < k\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right), \qquad \lim \int_a^\beta f(x)\,dx = 0,$$

при безпредѣльномъ возрастаніи α и β.

718. Критеріумъ Риманна. Риманнъ указалъ весьма простое средство для испытанія интегрируемости функціи $f(x)$, на основаніи теоремы, доказанной въ § 714, доказавъ, что „для интегрируемости функціи необходимо и достаточно, чтобы для каждой пары сколь угодно малыхъ положительныхъ чиселъ ε и η можно было указать такое разложеніе интервала интегрированія на частные интервалы, въ которыхъ сумма тѣхъ интерваловъ, гдѣ колебаніе функціи больше или равно ε, была бы меньше η" *). Прежде всего замѣтимъ, что условіе, установленное въ § 714, очевидно, равносильно слѣдующему: Каково бы ни было данное, сколь угодно малое положительное число α, всегда найдется такое разложеніе интервала (a, b) на частные интервалы, для котораго ω будетъ меньше α. Дѣйствительно, взявъ произвольную послѣдовательность безпредѣльно убывающихъ положительныхъ чиселъ

$$\alpha_1, \ \alpha_2, \ \alpha_3, \ \ldots$$

и опредѣляя соотвѣтствующую ей послѣдовательность разложеній интервала (a, b) на частные интервалы, мы и получимъ такую последовательность разложеній, для которой $\lim \omega = 0$. Замѣтивъ это, обозначимъ черезъ l сумму тѣхъ интерваловъ въ нѣкоторомъ разложеніи $(h_1, h_2, \ldots, h_n)$, для которыхъ $\Theta_i \geqq \varepsilon$. Тогда, очевидно, для этого разложенія будемъ имѣть

$$\omega = h_1\Theta_1 + h_2\Theta_2 + \cdots + h_n\Theta_n \geqq l\varepsilon. \tag{1}$$

Отсюда прямо вытекаетъ необходимость доказываемаго условія. Въ самомъ дѣлѣ, если интегралъ существуетъ, то мы можемъ взять $\omega < \eta\varepsilon$, каковы бы ни были числа ε и η, а тогда изъ (1) найдемъ $l < \eta$. Достаточность этого условія получится изъ другого

---

*) Cp. Tannery, Introduction à la théorie des fonctions d'une variable (2-me édition (1910), t. 2, p. 10).

неравенства, которое вытекаетъ изъ слѣдующаго разсужденія: Такъ какъ ни одно изъ чиселъ Θ_i не превосходитъ Θ (полнаго колебанія функціи f въ интервалѣ (a, b)), а сумма интерваловъ, въ которыхъ колебаніе меньше ε, равна $b-a-l$, то

$$\omega \leqq \Theta l + (b-a-l)\,\varepsilon \leqq \Theta l + (b-a)\,\varepsilon. \tag{2}$$

Поэтому, если для разсматриваемаго разложенія $l < \eta$, то для того же разложенія $\omega \leqq \Theta\eta + (b-a)\,\varepsilon$, гдѣ вторая часть, вслѣдствіе произвольности чиселъ η и ε можетъ быть сдѣлана меньше любого положительнаго числа α. Слѣдовательно, существуетъ такое разложеніе интервала (a, b), для котораго $\omega < \alpha$, а этого и достаточно для существованія интеграла.

719. Если, напримѣръ, $f(x)$ непрерывна, то по теоремѣ Кантора (§ 279), при данномъ ε можно взять интервалы $h_1, h_2, \ldots, h_n$ достаточно малыми, чтобы колебаніе функціи $f(x)$ въ каждомъ изъ нихъ было меньше ε. Слѣдовательно, здѣсь $l = 0$, а потому всякая непрерывная функція интегрируема. Однако, въ то же время ясно, и намъ уже извѣстно (§ 715, f), что и разрывныя функціи могутъ быть интегрируемы. Таковы, напримѣръ, конечныя функціи, съ конечнымъ числомъ разрывовъ (§ 272, a), потому что ихъ точки разрыва, являющіяся въ конечномъ числѣ, могутъ быть заключены въ сколь угодно малые промежутки. Интегрируемы также конечныя функціи съ безконечнымъ числомъ точекъ разрыва, если только число точекъ, въ смежности съ которыми находится безконечное множество разрывовъ, будетъ конечнымъ. Изолируя сперва эти точки сколь угодно малыми интервалами, мы получимъ въ остальной части даннаго интервала лишь конечное число точекъ разрыва, которыя въ свою очередь могутъ быть заключены въ сколь угодно малые интервалы, и сумма l всѣхъ этихъ интерваловъ, первыхъ и вторыхъ (единственныхъ, которые могутъ войти въ составъ l), будетъ сколь угодно мала. Во многихъ другихъ случаяхъ [1]) функціи могутъ быть интегрируемы, несмотря на безчисленное множество разрывовъ въ интервалѣ интегрированія; и легко доказать [1]), что только вполнѣ разрывныя функціи (§ 272, c) никогда не бываютъ интегрируемы. Во всякомъ случаѣ, мы видимъ, что непрерывность функціи достаточное, но не необходимое условіе ея интегрируемости. Напротивъ того, какъ мы уже знаемъ (§ 282, e, f), непрерывность функціи есть необходимое, но не достаточное условіе для существованія ея производной. Совокупность интегрируемыхъ функцій заключаетъ въ себѣ поэтому всѣ функціи, имѣющія производныя, но гораздо обширнѣе совокупности послѣднихъ. Тѣмъ не менѣе практически операція интегрированія гораздо труднѣе дифференци-

---

[1]) Dini. „Fondamenti etc.", стр. 245—249.

рованія, и въ то время какъ мы имѣемъ общія правила дифференцированія, для интегрированія мы имѣетъ лишь нѣсколько вспомогательныхъ средствъ. Эти средства, впрочемъ, достаточны для выполненія интегрированій, съ которыми встрѣчаемся на практикѣ, да и въ высшей Математикѣ искусное ихъ примѣненіе ведетъ къ весьма важнымъ результатамъ.

Правила интегрированія.

720. Прямое интегрированіе (суммированіе). Первое правило, которое представляется для вычисленій интеграловъ, вытекаетъ непосредственно изъ опредѣленія интеграла, какъ предѣла суммы; самый естественный способъ его примѣненія состоитъ въ томъ, что интервалъ интегрированія разлагается на n частей, равныхъ h (такъ что $nh = b - a$), и въ каждомъ интервалѣ берется значеніе функціи на одной изъ его границъ

$$(4) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{h=0} h\,\{f(a+h) + f(a+2h) + \cdots + f(a+nh)\}.$$

Но возможно прибѣгать и къ другимъ способамъ раздѣленія $b-a$ на части, иной разъ болѣе выгоднымъ. Если, напримѣръ, $a > 0$, то можно положить $b = aq^n$ *), гдѣ $q > 1$ и стремится къ предѣлу 1 при безконечномъ n; тогда будемъ имѣть

$$(5) \quad \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{q=1} a\,(q-1)\,\{f(a) + qf(aq) + q^2 f(aq^2) + \cdots + q^{n-1} f(aq^{n-1})\}.$$

По тому же закону можно дѣлить интервалъ интегрированія и въ томъ случаѣ, когда одна изъ границъ интервала лежитъ въ точкѣ 0; тогда надо начинать съ другой границы, но надо помнить, что этотъ пріемъ (срав. съ § 711, d) не строгъ. Обозначая черезъ q число, стремящееся къ 1, постоянно возрастая, находимъ

$$(6) \quad \int_0^a f(x)\,dx = \lim_{q=1} a\,(1-q)\,\{f(a) + qf(aq) + q^2 f(aq^2) + q^3 f(aq^3) + \cdots\}.$$

---

*) И вообще $h_i = aq^i - aq^{i-1} = aq^{i-1}(q-1)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

721. Примѣры. a) Если $f(x)=e^x$, то по формулѣ (4) получимъ

$$\int_0^x e^x\,dx = \lim_{h=0} h\,(e^h + e^{2h} + \cdots + e^{nh}) = (e^x - 1)\lim_{h=0}\frac{h}{e^h-1} = e^x - 1.$$

Неопредѣленный интегралъ $\int e^x\,dx = e^x + C$.

b) Теперь возьмемъ примѣръ, гдѣ полезнѣе будетъ формула (5)

$$\int_a^x \frac{dx}{x} = \lim_{q=1} n\,(q-1) = \lim_{n=\infty} n\left(\sqrt[n]{\frac{x}{a}} - 1\right) = \log\frac{x}{a}\,.$$

Аналогично этому найдемъ

$$\int_a^x \log x\,dx = \lim_{q=1}\sum_1^n (a q^i - a q^{i-1})\log(a q^i)$$

$$= x\log x - a\log a - (x-a)\lim_{q=1}\frac{\log q}{q-1} = x(\log x - 1) - a(\log a - 1).$$

Въ неопредѣленномъ видѣ

$$\int\frac{dx}{x} = \log x + C, \qquad \int \log x\,dx = x(\log x - 1) + C.$$

Нужно, однако, замѣтить, что во всѣхъ этихъ результатахъ подразумѣвается условіе $a > 0$, потому что въ области вещественныхъ чиселъ функція $\log x$ для $x \leqq 0$ не существуетъ. Такъ, напримѣръ, первообразная функція отъ $\frac{1}{x}$ при $x<0$ будетъ $\log(-x)$, а не $\log x$.

c) Вышеприведенное вычисленіе не примѣнимо, когда $a=0$. Но изъ полученнаго результата, припоминая, что интегралъ необходимо непрерывная функція, тотчасъ найдемъ

$$\int_0^x \log x\,dx = x(\log x - 1) - \lim_{a=0} a(\log a - 1) = x(\log x - 1).$$

Къ тому же результату легко придти съ помощью формулы (6)

$$\int_0^x \log x\,dx = x\lim_{q=1}\left(\log x + \frac{q\log q}{q-1}\right) = x(\log x - 1)$$

или болѣе строгимъ путемъ, прилагая одну изъ выведенныхъ раньше (§ 335, c) формулъ

$$\int_0^x \log x\,dx = \lim_{h=0} h\log(n!\,h^n)$$

$$= \lim_{n=\infty}\frac{x}{n}\left(n\log n - n + \cdots + n\log\frac{x}{n}\right) = x(\log x - 1).$$

d) Очень легко вычислить $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx$, если (§ 459) извѣстна формула

$$\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{2\pi}{2n}\sin\frac{3\pi}{2n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, положивъ $nh=\frac{\pi}{2}$, тотчасъ найдемъ

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x\,dx=\lim_{h=0} h\log\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}=\frac{\pi}{2}\lim_{n=\infty}\log\frac{n^{\frac{1}{2n}}}{2^{1-\frac{1}{n}}}=-\frac{\pi}{2}\cdot\log 2.$$

e) Для вычисленiя интеграла Пуассона*) $\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$, разложимъ интервалъ (x,∞) на равные интервалы, величину которыхъ обозначимъ черезъ h, и станемъ искать предѣлъ $\varrho(x)$ суммы

$$h\left(e^{-(x+h)^2}+e^{-(x+2h)^2}+e^{-(x+3h)^2}+\cdots\right)$$

при убыванiи h до нуля. Полагая $e^{-h^2}=q$, легко найдемъ $\varrho(0)$, съ помощью формулы (§ 342, c)

$$\lim_{q=1}(q+q^4+q^9+\cdots)\sqrt{1-q}=\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Дѣйствительно, мы имѣемъ

$$\varrho(0)=\lim_{h=0} h\,(q+q^4+q^9+\cdots)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\lim_{h=0}\frac{h}{\sqrt{1-e^{-h^2}}}=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Такъ какъ $e^{-(x+a)^2}<e^{-x^2}\cdot e^{-a^2}$ то, очевидно,

$$0<\varrho(x)<\varrho(0)\,e^{-x^2},\quad \lim_{x=\infty}\varrho(x)=0;$$

и на основанiи замѣчанiя, сдѣланнаго въ § 711, d, можно утверждать, что

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx=\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

f) Точно такъ же, чтобы вычислить интегралъ Дирихле $\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$, достаточно знать, что

$$\sin h+\tfrac{1}{2}\sin 2h+\tfrac{1}{3}\sin 3h+\cdots=\tfrac{1}{2}(\pi-h),$$

---

*) Пуассону принадлежитъ одинъ изъ выводовъ значенiя этого интеграла, но другимъ путемъ онъ уже былъ найденъ Эйлеромъ.

при условіи $0 < h < 2\pi$. Отсюда тотчасъ слѣдуетъ

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{h=0} \frac{\pi - h}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Къ тому же результату пришелъ Фурье[1]) подобнымъ же пріемомъ, однако, совершенно не строгимъ, исходя изъ формулы

$$\sin h + \frac{1}{3}\sin 3h + \frac{1}{5}\sin 5h + \cdots = \frac{\pi}{4}(-1)^{\left[\frac{h}{\pi}\right]},$$

вытекающей непосредственно изъ вышеприведенной. Раздѣляя интервалъ $(0, \infty)$ на безконечное число интерваловъ, изъ которыхъ первый равенъ h, а всѣ другіе вдвое больше, найдемъ, что разсматриваемый интегралъ равенъ

$$\lim_{h=0}\left(\sin h + \frac{2}{3}\sin 3h + \frac{2}{5}\sin 5h + \cdots\right) = \frac{\pi}{2} - \lim_{h=0}\sin h = \frac{\pi}{2}.$$

Замѣтимъ, что такимъ же образомъ

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \lim_{h=0}\frac{1}{h}(\sin^2 h + \tfrac{1}{4}\sin^2 2h + \tfrac{1}{9}\sin^2 3h + \cdots)$$
$$= \lim_{h=0}(\sin 2h + \tfrac{1}{2}\sin 4h + \tfrac{1}{3}\sin 6h + \cdots),$$

а слѣдовательно,

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \lim_{h=0}\frac{\pi - 2h}{2} = \frac{\pi}{2},$$

такъ что оба интеграла

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx \quad \text{и} \quad \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$$

имѣютъ одну и ту же величину $\frac{\pi}{2}$, хотя элементы второго интеграла меньше соотвѣтствующихъ элементовъ перваго. Это объясняется тѣмъ, что всѣ элементы второго интеграла положительны, между тѣмъ, какъ элементы перваго по очереди положительны и отрицательны въ интервалахъ $(0, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$, $(2\pi, 3\pi)$ и т. д.

g) Вычисляя $\int_0^1 \log(-\log x)\,dx$ по формулѣ (6), приходимъ къ разысканію предѣла

$$(1-q)\{\log(-\log q) + q\log(-2\log q) + q^2\log(-3\log q) + \cdots\}$$
$$= \log(-\log q) + \sum_1^\infty q^n \log\frac{n+1}{n} = \log\frac{\log q}{q-1} - \sum_1^\infty q^n\left(\frac{1}{n} - \log\frac{n+1}{n}\right)$$

---

[1]) „Oeuvres“. T. I, стр. 402.

съ приближеніемъ $q < 1$ къ единицѣ. На основаніи теоремы Абеля (§ 340) будемъ имѣть

$$\lim_{q=1-0} \sum_1^\infty q^n \left(\frac{1}{n} - \log \frac{n+1}{n}\right) = \sum_1^\infty \left(\frac{1}{n} - \log \frac{n+1}{n}\right) = \lim_{n=\infty} (H_n - \log n).$$

Мы знаемъ (§ 183), что предѣлъ этотъ существуетъ и равенъ Эйлеровой постоянной. Такимъ путемъ находимъ полученное Маскерони значеніе

$$\int_0^1 \log(-\log x)\, dx = -0.577215664\ldots$$

h) Предложимъ себѣ теперь найти значеніе весьма важнаго интеграла

$$\int_0^\infty x^{\mu-1} \cdot e^{-x}\, dx, \quad (\mu > 0)$$

носящаго названіе Эйлерова интеграла второго вида. Его значеніе равно предѣлу суммы

$$h^\mu (1^{\mu-1} e^{-h} + 2^{\mu-1} e^{-2h} + 3^{\mu-1} e^{-3h} + \cdots)$$

при безконечно маломъ h; полагая $e^{-h} = q$ и припоминая одинъ изъ ранѣе найденныхъ результатовъ (§ 342, f), находимъ, что искомый предѣлъ равенъ

$$\lim_{q=1} h^\mu (1^{\mu-1} q + 2^{\mu-1} q^2 + 3^{\mu-1} q^3 + \cdots) = \Gamma(\mu) \lim_{h=0} \left(\frac{h}{1-e^{-h}}\right)^\mu = \Gamma(\mu).$$

Слѣдовательно,

$$\int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-x}\, dx = \Gamma(\mu).$$

i) На основаніи извѣстнаго свойства (§ 464, e) $\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$, припоминая еще выведенную въ § 459 формулу, получимъ

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{\sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n} \cdots \sin \frac{(n-1)\pi}{n}}} = \frac{(\sqrt{2\pi})^{n-1}}{\sqrt{n}},$$

что, впрочемъ, легко получить и изъ самаго опредѣленія функціи Γ. Замѣтивъ вышесказанное, будемъ имѣть

$$\lim_{h=0} h \log \Gamma(h)\, \Gamma(2h) \ldots \Gamma(nh) = \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \left\{ (n-1) \log \sqrt{2\pi} - \log \sqrt{n} \right\}$$

и отсюда

$$\int_0^1 \log \Gamma(x)\, dx = \log \sqrt{2\pi}.$$

Теперь можно еще, слѣдуя Лершу (Lerch), найти общнѣе значеніе того же интеграла въ предѣлахъ отъ μ до $\mu+1$, при всякомъ $\mu>0$. Обозначая искомое значеніе черезъ $f(\mu)$ и замѣчая, что

$$f(\mu)=\int\limits_0^{\mu+1}-\int\limits_0^{\mu}, \quad f'(\mu)=\log\Gamma(\mu+1)-\log\Gamma(\mu)=\log\mu,$$

найдемъ съ помощью выведеннаго раньше результата

$$f(\mu)=\mu(\log\mu-1)+f(0),$$

и придемъ къ формулѣ Раабе

$$\int\limits_{\mu}^{\mu+1}\log\Gamma(x)\,dx=\mu\log\mu-\mu+\log\sqrt{2\pi}.$$

722. Непосредственное интегрированіе. Изложенная и развитая въ предыдущихъ параграфахъ метода въ большинствѣ случаевъ практически не выполнима, такъ какъ мы наталкиваемся при этомъ на трудности (вычисленіе предѣловъ суммъ), для преодолѣнія которыхъ нужно (§ 357) знать первообразную функцію F отъ интегрируемой функціи f. Выгоды, какъ будто представляемыя двойнымъ произволомъ въ выборѣ закона раздѣленія интервала интегрированія на части и въ выборѣ значеній функціи въ каждомъ интервалѣ — въ сущности ничего не даютъ. Каковъ бы ни былъ законъ подраздѣленія даннаго интервала на части, наилучшій выборъ значеній f, очевидно, состоялъ бы въ томъ, чтобы въ каждомъ интервалѣ было взято такое значеніе f, произведеніе котораго на величину интервала равнялось бы приращенію функціи F при переходѣ отъ одного конца интервала къ другому*). Дѣйствительно, въ такомъ случаѣ сумма, предѣлъ которой мы ищемъ, была бы непосредственно равна (§ 709) значенію интеграла. Отсюда и видно, что изложенная метода, при всей своей огромной общности, не даетъ намъ вѣрнаго средства для преодолѣнія трудности, происходящей отъ неизвѣстности первообразной функціи. Поэтому предпочтительнѣе будетъ избрать другой путь, а именно воспользоваться тѣми результатами, которые намъ дало разысканіе производныхъ извѣстныхъ функцій (§§ 288—291) и, на основаніи доказанной въ § 713 теоремы, непосредственно написать нижеслѣдующія основныя формулы

$$\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C,\qquad \int\frac{dx}{x}=\log|x|+C,\qquad \int a^x\,dx=\frac{a^x}{\log a}+C,$$

$$\int\cos x\,dx=\sin x+C,\qquad \int\sin x\,dx=-\cos x+C,\qquad \int\frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg}x+C,$$

$$\int\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arc\,tg}x+C,\qquad \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C.$$

*) Для этого требовалось бы знать число ξ, среднее между значеніями x на границахъ интервала, входящее въ формулу Лагранжа, а опредѣлить это число никакихъ средствъ мы не имѣемъ.

Эти формулы надо удержать въ памяти и стараться прилично выбираемыми искусственными пріемами сводить къ нимъ по возможности всѣ другіе интегралы, съ которыми приходится встрѣчаться на практикѣ.

723. Примѣры. a) Часто встрѣчаются интегралы вида

$$\int \frac{du}{u} = \log|u| + C.$$

Напримѣръ, имѣемъ

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\log|\cos x| + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{1}{2}dx}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{d\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \log\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C,$$

$$\int \frac{dx}{e^x+1} = \int\left(1 - \frac{e^x}{e^x+1}\right)dx = x - \log(e^x+1) + C,$$

$$\int \frac{e^x-1}{e^x+1}dx = \int \frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}dx = 2\int \frac{d\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)}{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}$$

$$= 2\log\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right) + C = \log(e^x + e^{-x} + 2) + C,$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{tg} x+1} = \int \frac{\cos x\, dx}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{2}\int \frac{\cos x + \sin x}{\sin x + \cos x}dx + \frac{1}{2}\int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\{x + \log|\sin x + \cos x|\} + C.$$

b) Вычисленіе интеграла $\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x}$ легко производится, если положимъ

$$\frac{a}{\cos\alpha} = \frac{b}{\sin\alpha} = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Тогда интегралъ обращается въ

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int \frac{dx}{\sin(x+\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\log|\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(x+\alpha)| + C.$$

Замѣнивъ α его значеніемъ $\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}$, найдемъ

$$\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\log\left|\frac{b\sin x - a\cos x + \sqrt{a^2+b^2}}{a\sin x + b\cos x}\right| + C.$$

c) Весьма часто также встрѣчаются интегралы вида

$$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C.$$

Напримѣръ —

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + C.$$

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx = \int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

Такимъ же образомъ получимъ, замѣчая, что $\int u\,du = \frac{u^2}{2} + C$, непосредственно слѣдующіе интегралы

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}(\arcsin x)^2 + C, \qquad \int \frac{\operatorname{acr\,tg} x}{1+x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}(\operatorname{arc\,tg} x)^2 + C.$$

d) Еще примѣры для упражненія

$$\int \operatorname{tg}^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \operatorname{con}^2 x}\,dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{cot} x + C,$$

$$\int \cos^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}\int (1+\cos 2x)\,dx = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}\int \cos 2x\,dx = \tfrac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + C.$$

Общнѣе, можно вычислить всякій интегралъ вида $\int \cos \alpha x . \cos \beta x . \cos \gamma x \ldots dx$, основываясь на извѣстной формулѣ Тригонометріи

$$\cos mx \cos nx = \tfrac{1}{2}[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x].$$

Если, напримѣръ, предложено найти интегралъ отъ $\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x \cdot dx$, то пишемъ сперва

$$\cos x \cos 2x = \tfrac{1}{2}(\cos x + \cos 3x),$$

далѣе

$$\cos x \cos 2x \cos 3x = \tfrac{1}{4}(1 + \cos 2x + \cos x4 + \cos 6x)$$

и, наконецъ,

$$\int \cos x \cos 2x \cos 3x \cdot dx = \tfrac{1}{4}(x + \tfrac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{4}\sin 4x + \tfrac{1}{6}\sin 6x) + C.$$

e) Другіе интегралы приводятся къ виду

$$\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C.$$

Положимъ, напримѣръ, что требуется найти интегралъ, предложенный Эрмитомъ [1])

$$\int \frac{x^2\,dx}{(x \cos x - \sin x)^2}.$$

---

[1]) C. Hermite „Cours d'Analyse de l'Ecole polytechnique", стр. 260.

Слѣдуя весьма простому пути, указанному W. W. Beman'омъ, замѣчаемъ сперва, что

$$x\cos x - \sin x = x\sin x\left(\cot x - \frac{1}{x}\right) = \cos x\,(x - \operatorname{tg} x)$$

и разлагаемъ подъинтегральную функцію на слагаемыя

$$\frac{\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}}{\left(\cot x - \dfrac{1}{x}\right)^2} + \frac{\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1}{(x - \operatorname{tg} x)^2}.$$

Такъ какъ имѣемъ

$$d\left(\cot x - \frac{1}{x}\right) = \left(-\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{x^2}\right)dx, \qquad d\,(x - \operatorname{tg} x) = \left(1 - \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx,$$

то первообразная функція будетъ

$$\frac{1}{\cot x - \dfrac{1}{x}} + \frac{1}{x - \operatorname{tg} x} = \frac{x\sin x + \cos x}{x\cos x - \sin x} = \frac{\operatorname{tg} x + \dfrac{1}{x}}{1 - \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}},$$

и окончательно

$$\int \frac{x^2\,dx}{(x\cos x - \sin x)^2} = \operatorname{tg}\left(x + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}\right) + C.$$

724. Интегрированіе путемъ подстановки. Для вычисленія интеграла $u = \int f(x)\,dx$ часто бываетъ полезно ввести новую перемѣнную $t = \varphi(x)$. Если изъ этого уравненія получается выраженіе $x = \psi(t)$, такъ что $dx = \psi'(t)\,dt$, то, очевидно будемъ имѣть

$$du = f(x)\,dx = f(\psi(t))\,\psi'(t)\,dt,$$

такъ что

$$u = \int f(x)\,dx = \int f(\psi(t))\,\psi'(t)\,dt$$

и можетъ случиться, что въ новой формѣ вычисленіе интеграла легче произвести; а тогда стоитъ лишь подставить вмѣсто t функцію $\varphi(x)$, чтобы получить выраженіе искомаго интеграла u черезъ перемѣнную x. Если первое интегрированіе производится между предѣлами a и b, то второе, очевидно, надо произвести въ предѣлахъ отъ $\varphi(a)$ до $\varphi(b)$, предполагая, что въ этихъ предѣлахъ перемѣнная t измѣняется постоянно въ одномъ направленіи*) и притомъ непрерывна. Въ этомъ случаѣ можемъ писать

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t)\,dt, \tag{7}$$

*) Иначе перемѣнная x не была бы однозначною функціею отъ t.

гдѣ $g(t)$ для краткости обозначаетъ функцію $f(\psi(t))\psi'(t)$. Если же, напротивъ того, при измѣненіи x въ одномъ и томъ же направленіи отъ a до b, перемѣнная t сперва измѣняется въ одномъ направленіи до $x=c_1$, потомъ въ другомъ до $x=c_2$ и т. д., то второй интегралъ надо разбить на два или на нѣсколько другихъ, удовлетворяющихъ условію, что между предѣлами каждаго изъ нихъ t измѣняется постоянно въ одномъ направленіи; въ этомъ случаѣ будемъ имѣть

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(c_1)} g_1(t)\,dt + \int_{\varphi(c_1)}^{\varphi(c_2)} g_2(t)\,dt + \ldots;$$

здѣсь $g_1(t)$ обозначаетъ выраженіе $g'(t)$, вычисленное на основаніи выраженія $\psi_1(t)$ перемѣнной x въ интервалѣ (a, c_1), $g_2(t)$ выраженіе $g(t)$, вычисленное для $x=\psi_2(t)$ въ интервалы (c_1, c_2) и т. д. (Въ разныхъ интервалахъ выраженіе $x=\psi(t)$ можетъ быть различно). Если, напримѣръ, при измѣненіи x отъ a до b, перемѣнная t, исходя изъ значенія $\alpha=\varphi(a)$, снова возвращается къ тому же значенію $\alpha=\varphi(b)$, переходя черезъ максимумъ или минимумъ $\beta=\varphi(c)$, то ясно, что значенія x въ интервалѣ (a, c) изображаются нѣкоторой функціею $\psi_1(t)$, а въ интервалѣ (c, b) — другою $\psi_2(t)$, такъ какъ каждому значенію t, лежащему между α и β должны соотвѣтствовать два различныхъ значенія x. Отсюда слѣдуетъ, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta g_1(t)\,dt + \int_\beta^\alpha g_2(t)\,dt = \int_\alpha^\beta \{g_1(t) - g_2(t)\}\,dt.$$

Если бы мы не приняли во вниманіе этого замѣчанія, то впали бы въ грубую ошибку, заключивъ, что нашъ интегралъ равенъ нулю, потому что $\int_\alpha^\alpha = 0$. Все это показываетъ, что при установленіи предѣловъ интегрированія по новой перемѣнной, необходимо обращать вниманіе на то, какимъ образомъ измѣняется эта перемѣнная. Если далѣе, эта перемѣнная разрывна и имѣетъ, напримѣръ, обыкновенный разрывъ при $x=c$, то, очевидно, надо было бы писать

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(c-0)} g(t)\,dt + \int_{\varphi(c+0)}^{\varphi(b)} g(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t)\,dt - \int_{\varphi(c-0)}^{\varphi(c+0)} g(t)\,dt.$$

То же самое случится, если $\varphi(x)$ при $x=c$ обращается въ безконечность и мѣняетъ знакъ; въ этомъ случаѣ имѣемъ

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\pm\infty} g(t)\,dt + \int_{\mp\infty}^{\varphi(b)} g(t)\,dt.$$

Такимъ образомъ получается, вообще, значеніе интеграла, отличное отъ того, которое получилось бы при грубомъ приложеніи формулы (7), а именно значеніе, отличающееся отъ него на величину $G(\pm\infty) - G(\mp\infty)$, гдѣ $G(t)$ есть первообразная функція отъ $g(t)dt$.

725. Примѣры. a) Подставляя по очереди $x=at$, $x=\frac{a}{t}$, $x=a(1-t)$, найдемъ

$$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg} t+C=\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}+C,$$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}=\mp\frac{1}{a}\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\pm\frac{1}{a}\arccos t+C=\pm\frac{1}{a}\arccos\frac{a}{x}+C,$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}=\mp\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\pm\arccos t+C=\pm\arccos\frac{a-x}{a}+C.$$

Въ послѣднемъ примѣрѣ надо взять верхній знакъ при $a>0$, а нижній при $a<0$. Точно такъ же въ предпослѣднемъ примѣрѣ надо взять верхній или нижній знакъ, смотря по тому, на положительныя или отрицательныя значенія x желаютъ распространить интегрированіе; отъ одного случая къ другому, впрочемъ, можно перейти, замѣчая, что

$$\arccos(-x)=\pi-\arccos x.$$

Двойной знакъ получается отъ того, что подъ знакомъ интеграла находится корень квадратный, который по предположенію всегда берется со знакомъ $+$, такъ что имѣемъ

$$\sqrt{cx^2}=|x|\sqrt{c},\ \text{а не}\ \sqrt{cx^2}=x\sqrt{c}.$$

b) Съ помощью подстановки $x=\cos\theta$ вычисляютъ слѣдующіе другіе интегралы

$$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx=-2\int\sin^2\frac{\theta}{2}\,d\theta=-(\theta-\sin\theta)+C=\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C'.$$

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx=-\int\sin^2\theta\,d\theta=-\tfrac{1}{2}(\theta-\sin\theta\cos\theta)+C$$
$$=\tfrac{1}{2}\left(\arcsin x+x\sqrt{1-x^2}\right)+C',$$

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=-\int\cos^2\theta\,d\theta=-\tfrac{1}{2}(\theta+\sin\theta\cos\theta)+C$$
$$=\tfrac{1}{2}\left(\arcsin x-x\sqrt{1-x^2}\right)+C'.$$

Если же хотимъ вычислить $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$, то лучше будетъ положить $x=\operatorname{cotg}\theta$, при условіи $\sin\theta>0$, чѣмъ не ограничивается измѣняемость x. Данный интегралъ обращается въ

$$-\int\frac{d\theta}{\sin\theta}=\log\cot\frac{\theta}{2}+C=\log\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}+C.$$

Поэтому

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C.$$

c) Предложимъ себѣ вычислить

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}.$$

Умножая числителя и знаменателя на $\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}$, приводимъ данный интегралъ къ слѣдующему

$$\frac{1}{2}\int\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\right)\frac{dx}{x^2}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Изъ этихъ четырехъ интеграловъ первый и второй преобразуются помощью подстановки $x=\frac{1}{t}$ въ слѣдующіе

$$-\int\frac{t\,dt}{\sqrt{t^2+1}}=-\sqrt{t^2+1}+c', \qquad -\int\frac{t\,dt}{\sqrt{t^2-1}}=-\sqrt{t^2-1}+c''.$$

Третій вычисленъ уже раньше, а четвертый равенъ $\arcsin x+c'''$. Итакъ

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}$$

$$=-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+\frac{1}{2}\arcsin x+C.$$

d) Для вычисленія $\int\frac{dx}{x^2+px+q}$ сперва предположимъ $q>\frac{p^2}{4}$ и положимъ $x+\frac{p}{2}=t\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$, такъ что $dx=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\,dt$ и

$$x^2+px+q=(x+\tfrac{1}{2}p)^2+(q-\tfrac{1}{4}p^2)=(q-\tfrac{1}{4}p^2)(1+t^2)$$

Тотчасъ получаемъ

$$\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\frac{1}{\sqrt{q-\frac{1}{4}p^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+\frac{1}{2}p}{\sqrt{q-\frac{1}{4}p^2}}+C.$$

Если, напротивъ того, $q<\frac{p^2}{4}$, то полагаемъ $x+\frac{p}{2}=t\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$. Данный интегралъ преобразуется въ

$$\int\frac{dt}{t^2-1}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t-1}-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t+1}=\frac{1}{2}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C,$$

дѣленный на $\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}$. Поэтому будемъ имѣть

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}} \log \left| \frac{x+\frac{1}{2}p-\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}}{x+\frac{1}{2}p+\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}} \right| + C.$$

Впрочемъ, обѣ формулы эквивалентны, въ силу соотношеній

$$\operatorname{arc\,tg} x = \frac{1}{2i} \log \frac{1+ix}{1-ix}, \qquad \log x = 2i \operatorname{arc\,tg} \left(i \frac{1-x}{1+x} \right),$$

легко получаемыхъ изъ извѣстной формулы Эйлера (§§ 406, 411).

e) Безъ всякаго, такъ сказать, вычисленія находимъ значеніе интеграловъ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx$$

если замѣтимъ, что одинъ преобразуется въ другой подстановкою $\frac{\pi}{2} - x$ на мѣсто x, и что сумма ихъ равна $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$. Общая величина данныхъ интеграловъ равна, слѣдовательно, $\frac{\pi}{4}$. Точно такъ же, замѣняя x на $\pi - x$, найдемъ

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x) \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(\operatorname{arc\,tg} \cos x \right)_{\pi}^{0} = \frac{\pi^2}{4}.$$

f) Совершенно аналогичнымъ путемъ, найдемъ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\, dx$, вычисленный уже раньше иначе (§ 721, d). Мы имѣемъ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos x\, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log (\sin x \cos x)\, dx,$$

т. е., замѣняя въ послѣднемъ интегралѣ x черезъ $\frac{1}{2} x$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\, dx = \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \log \left(\frac{1}{2} \sin x \right) dx = -\frac{\pi}{4} \log 2 + \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \log \sin x\, dx.$$

Если, далѣе, замѣнимъ x черезъ $\pi - x$ и замѣтимъ, что

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \log \sin x \, dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx,$$

то можемъ также написать

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx = -\frac{\pi}{4} \log 2 + \frac{1}{2} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx,$$

откуда и получаемъ

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx = -\frac{\pi}{2} \log 2.$$

g) Подобнымъ же образомъ, замѣною x на $1 - x$, найдемъ

$$\int_{0}^{1} \log \Gamma(x) \, dx = \int_{0}^{1} \log \Gamma(1 - x) \, dx = \frac{1}{2} \int_{0}^{1} \log \frac{\pi}{\sin \pi x} \, dx$$

$$= \tfrac{1}{2} \log \pi - \tfrac{1}{2} \int_{0}^{1} \log \sin \pi x \, dx.$$

Послѣдній интегралъ подстановкою $\pi x = \theta$ обращается въ

$$\frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \log \sin \theta \, d\theta = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \log \sin \theta \, d\theta = -\log 2.$$

Слѣдовательно (срав. съ § 721, i),

$$\int_{0}^{1} \log \Gamma(x) \, dx = \log \sqrt{2\pi}.$$

h) Положимъ, что предложено вычислить $\int_{0}^{\infty} e^{-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)} dx$. При $a = 0$ этотъ интегралъ приводится къ интегралу Пуассона (§ 721, e). Положимъ теперь $a = 0$ и замѣнимъ x на $\frac{a}{x}$; данный интегралъ преобразуется въ

$$-\int_0^\infty e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)} d\left(\frac{a}{x}\right),$$ и будетъ, слѣдовательно, равенъ

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)} d\left(x-\frac{a}{x}\right)=\frac{1}{2}\,e^{-2a}\int_0^\infty e^{-\left(x-\frac{a}{x}\right)^2} d\left(x-\frac{a}{x}\right).$$

Полагая $x-\frac{a}{x}=t$, замѣчаемъ, что при измѣненіи x отъ 0 до ∞, t постоянно возрастаетъ отъ $-\infty$ до $+\infty$, когда x возрастаетъ отъ 0 до ∞, замѣняя букву t опять буквою x, найдемъ

$$\int_0^\infty e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)} dx=\frac{1}{2}\,e^{-2a}\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2e^{2a}}.$$

i) Чтобы вычислить $\int_0^\pi \frac{\sin^2 x\,dx}{1-k\cos x}$, гдѣ $|k|\leqq 1$, разобьемъ интервалъ интегрированія на двѣ равныя части и въ правой половинѣ замѣнимъ x на $\pi-x$. Интегралъ преобразуется въ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x\,dx}{1-k\cos x}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x\,dx}{1+k\cos x}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x\,dx}{1-k^2\cos^2 x}.$$

Полагая, $\operatorname{tg} x=t$, преобразуемъ полученный интегралъ въ

$$\int_0^\infty\frac{t^2\,dt}{(1-k^2+t^2)(1+t^2)}=\frac{1}{k^2}\int_0^\infty\left(\frac{1}{1+t^2}-\frac{1-k^2}{1-k^2+t^2}\right)dt$$

$$=\frac{1}{k^2}\left(\operatorname{arc\,tg} t-\sqrt{1-k^2}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{\sqrt{1-k^2}}\right)_0^\infty=\frac{\pi}{2k^2}\left(1-\sqrt{1-k^2}\right),$$

такъ что

$$\int_0^\pi\frac{\sin^2 x\,dx}{1-k\cos x}=\frac{\pi}{1+\sqrt{1-k^2}}.$$

j) Чтобы показать на примѣрѣ, какъ осторожно нужно поступать при опредѣленіи предѣловъ новой перемѣнной, вводимой взамѣнъ прежней, замѣтимъ слѣдующее. Если будемъ обращать вниманіе только на начальное и крайнее значенія новой перемѣнной, то можемъ подвергаться опасности получить нелѣпые результаты, въ родѣ слѣдующаго

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-1}^{+1}\frac{d\,\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}=-\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{1+x^2}=0.$$

Между тѣмъ ясно, что интегралъ равенъ $\operatorname{arc}\operatorname{tg}(+1) - \operatorname{arc}\operatorname{tg}(-1) = \frac{\pi}{2}$. Ошибка произошла отъ того, что интервалъ $(-1, +1)$ при замѣнѣ x на $\frac{1}{x}$ преобразовывается не самъ въ себя, а въ сумму интерваловъ $(-1, -\infty) + (\infty, 1)$, а потому имѣемъ

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \int\limits_{-1}^{-\infty} \frac{d\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} + \int\limits_{\infty}^{1} \frac{d\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}},$$

а замѣнивъ въ первомъ изъ этихъ интеграловъ x на $-x$, получимъ

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = 2\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

k) Если встрѣтится интегралъ вида

$$\int\limits_{a}^{b} \frac{\varphi'(x)\,dx}{1+\varphi^2(x)}, \tag{8}$$

то естественно приходимъ къ тому, чтобы взять за новую перемѣнную $t = \varphi(x)$. Такимъ образомъ, при условіи, что $\varphi(x)$ остается конечною и непрерывною въ интервалѣ (a, b), тотчасъ получаемъ значеніе интеграла

$$\int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arc}\operatorname{tg}\varphi(b) - \operatorname{arc}\operatorname{tg}\varphi(a).$$

Но если $\varphi(x)$ претерпѣваетъ разрывы въ интервалѣ (a, b), то надо припомнить замѣчанія, сдѣланныя въ концѣ предыдущаго параграфа. Если, напримѣръ $\varphi(x)$ только въ одной точкѣ c между a и b мѣняетъ знакъ, обращаясь въ безконечность, то предложенный интегралъ разбивается на два и будетъ равенъ

$$\int\limits_{\varphi(a)}^{\pm\infty} d\operatorname{arc}\operatorname{tg} t + \int\limits_{\mp\infty}^{\varphi(b)} d\operatorname{arc}\operatorname{tg} t = \left(\pm\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc}\operatorname{tg}\varphi(a)\right) + \left(\operatorname{arc}\operatorname{tg}\varphi(b) \pm \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= \operatorname{arc}\operatorname{tg}\varphi(b) - \operatorname{arc}\operatorname{tg}\varphi(a) \pm \pi.$$

Общнѣе, если при непрерывномъ измѣненіи x отъ a до b функція $\varphi(x)$ k разъ обращается въ безконечность, переходя отъ $+$ къ $-$, и k'-разъ, переходя отъ $-$ къ $+$, то получимъ

$$\int\limits_{a}^{b} \frac{\varphi'(x)\,dx}{1+\varphi^2(x)} = \operatorname{arc}\operatorname{tg}\varphi(b) - \operatorname{arc}\operatorname{tg}\varphi(a) + (k-k')\pi.$$

l) Къ тому же типу (8) можно причислить интегралъ $\int_0^x \frac{dx}{1+(x-[x])^2}$, потому что функція $x-[x]$ имѣетъ производную 1, для нецѣлыхъ значеній x и справа отъ цѣлыхъ значеній x, слѣва же отъ нихъ претерпѣваетъ разрывы. Вслѣдствіе этихъ разрывовъ и оказывается, что для $x \geqq 1$ значеніе интеграла не равно $\operatorname{arc\,tg}(x-[x])$. Въ этомъ легко убѣдиться, написавъ

$$\int_0^x \frac{dx}{1+(x-[x])^2} = \sum_{\nu=0}^{\nu=[x]-1} \int_\nu^{\nu+1} \frac{dx}{1+(x-\nu)^2} + \int_{[x]}^x \frac{dx}{1+(x-[x])^2}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\nu=[x]-1} \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{x-[x]} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg}(x-[x]) + \frac{1}{4}\pi[x].$$

Общнѣе имѣемъ

$$\int_0^x f(x-[x])\,dx = [x]\int_0^1 f(x)\,dx + \int_0^{x-[x]} f(x)\,dx.$$

m) Интегралъ $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}}$ непосредственно вычисляется, съ помощью подстановки $x^2 = a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta$, которая преобразовываетъ его къ $\int d\theta$, такъ что

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}} = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{x^2-a^2}{b^2-x^2}} + C.$$

Точно такъ же, чтобы вычислить $\int \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\,x\,dx$, положимъ

$$x = a\cos^2\frac{\theta}{2} + b\sin^2\frac{\theta}{2},$$

откуда слѣдуетъ

$$x-a = (b-a)\sin^2\frac{\theta}{2}, \quad b-x = (b-a)\cos^2\frac{\theta}{2}, \quad dx = \frac{1}{2}(b-a)\sin\theta\,d\theta.$$

Предложенный интегралъ обращается въ

$$\frac{b-a}{8}\int (a+3b-4b\cos\theta + (b-a)\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{b-a}{8}((a+3b)\theta - 4b\sin\theta + (b-a)\sin\theta\cos\theta) + C,$$

слѣдовательно,

$$\int \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\,x\,dx = \frac{1}{4}(b-a)(a+3b)\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}$$
$$+ \tfrac{1}{4}(a-3b-2x)\sqrt{(x-a)(b-x)} + C.$$

Въ частности,

$$\int_a^b \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\, x\, dx = \frac{\pi}{8}(b-a)(a+3b).$$

n) Ту же подстановку можно приложить къ вычисленію интеграла

$$\mathfrak{J} = \int_a^b [(x-a)(b-x)]^{-\frac{3}{2}} e^{-\left(\frac{\alpha^2}{x-a}+\frac{\beta^2}{b-x}\right)} dx,$$

который встрѣтился Бельтрами въ одномъ вопросѣ о распространеніи тепла [1]) Но здѣсь мы изберемъ другой путь, указанный самимъ Бельтрами, взявъ за новую перемѣнную

$$t = \frac{1}{2}\log\left(\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{x-a}{b-x}\right)$$

при положительныхъ α и β. Такъ какъ

$$\frac{x-a}{\alpha e^t} = \frac{b-x}{\beta e^{-t}} = \frac{b-a}{\alpha e^t + \beta e^{-t}},$$

то тотчасъ находимъ

$$2\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{b-x} = \frac{(\alpha e^t + \beta e^{-t})^2}{\alpha\beta(b-a)},$$

откуда

$$\mathfrak{J} = \frac{2}{\sqrt{\alpha\beta}}(b-a)^{-2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta(e^{2t}+e^{-2t})}{b-a}}\cdot(\alpha e^t + \beta e^{-t})dt,$$

Стоитъ только замѣнить t на $-t$ и взять ариѳметическое среднее обоихъ выраженій, чтобы найти

$$\mathfrak{J} = \frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}(b-a)^{-2} e^{-\frac{(\alpha+\beta)^2}{b-a}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\alpha\beta}{b-a}(e^t-e^{-t})^2} d(e^t - e^{-t}).$$

Теперь естественно взять за новую перемѣнную $\theta = \sqrt{\frac{\alpha\beta}{b-a}}(e^t - e^{-t})$, которая измѣняется отъ $-\infty$ до $+\infty$, постоянно возрастая; тогда, припоминая значеніе интеграла Пуассона (§ 721, е), мы и найдемъ

$$\mathfrak{J} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}(b-a)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{(\alpha+\beta)^2}{b-a}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\theta^2} d\theta = \sqrt{\pi}\,\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}(b-a)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{(\alpha+\beta)^2}{b-a}}$$

---

[1]) Memorie dell' Academia di Bologna (4e serie, t. VIII).

o) Весьма легко представить Кронеккерову функцію sgn (§ 254, e) **въ** видѣ опредѣленнаго интеграла. Если въ интегралѣ Дирихле (§ 721, f) **замѣнимъ** x на $\pm kx$, смотря по тому, будетъ ли $k > 0$ или < 0, то получимъ

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \pm \int_0^\infty \frac{\sin kx}{x}\, dx,$$

а такъ какъ при $k = 0$ второй интегралъ равенъ нулю, то мы и видимъ, что

$$\operatorname{sgn} k = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin kx}{x}\, dx. \tag{9}$$

Аналогичнымъ образомъ можно доказать, что

$$|\, k \,| = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin^2 kx}{x^2}\, dx. \tag{10}$$

Изъ этихъ результатовъ легко получаются другіе, нѣсколько болѣе общіе. Предложимъ себѣ, напримѣръ, вычислить интегралы

$$\int_0^\infty \sin \alpha x \cdot \cos \beta x \cdot \frac{dx}{x}, \quad \int_0^\infty \sin \alpha x \cdot \sin \beta x \cdot \frac{dx}{x^2}, \tag{11}$$

которые соотвѣтственно при $\beta = 0$ и при $\beta = \alpha$ приводятся къ (9) и (10). Первый тотчасъ разбивается на два

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\sin(\alpha+\beta)x}{x}\, dx + \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\sin(\alpha-\beta)x}{x}\, dx,$$

и по формулѣ (9) получается

$$\int_0^\infty \sin \alpha x \cdot \cos \beta x \cdot \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{4} \{ \operatorname{sgn}(\alpha+\beta) + \operatorname{sgn}(\alpha-\beta) \}.$$

Иными словами, разсматриваемый интегралъ равенъ соотвѣтственно $\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \alpha$, $\frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} \alpha$, 0, смотря по тому, будетъ ли $|\,\beta\,|$ меньше, равно, или больше $|\,\alpha\,|$. Такъ же второй интегралъ (11) разбивается на

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 \frac{\alpha+\beta}{2} x}{x^2}\, dx - \int_0^\infty \frac{\sin^2 \frac{\alpha-\beta}{2} x}{x^2}\, dx$$

и по формулѣ (10) имѣетъ значеніе $\frac{\pi}{4}(|\alpha+\beta|-|\alpha-\beta|)$. Иными словами, если α есть наименьшее по абсолютной величинѣ изъ чиселъ α, β, то

$$\int_0^\infty \sin\alpha x\cdot\sin\beta x\cdot\frac{dx}{x^2}=\frac{1}{2}\pi\alpha\,\mathrm{sgn}\,\beta.$$

Съ помощью формулъ Тригонометріи изъ найденныхъ здѣсь интеграловъ можно вывести безчисленное множество другихъ. Напримѣръ, если возвысимъ (§ 407) въ n-ую степень $2i\sin x=e^{ix}-e^{-ix}$, то при нечетномъ n получимъ

$$\sin^n x=\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^{n-1}}\left\{\sin nx-\frac{n}{1}\sin(n-2)x+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\sin(n-4)x-\cdots\pm\cdots\sin x\right\}.$$

Умножая обѣ части равенства на $\sin x\frac{dx}{x^2}$, интегрируя въ предѣлахъ отъ 0 до ∞, и пользуясь при этомъ выведеннымъ въ концѣ § 332 тождествомъ

$$1-\frac{n}{1}+\frac{n(n-1)}{2}-\cdots\pm\frac{n(n-1)\cdots(n-\nu+1)}{1\cdot 2\cdots\nu}=\pm\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-\nu)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\nu}.$$

получимъ, замѣнивъ еще n на $2n-1$ и x на $\frac{1}{x}$,

$$\int_0^\infty\left(\sin\frac{1}{x}\right)^{2n}dx=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

При возрастаніи n до ∞ интегралъ стремится къ 0, и притомъ асимптотически съ $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$.

726. Интегрированіе по частямъ. Пусть u и v двѣ функціи отъ x. Изъ формулы $d(uv)=u\,dv+v\,du$ интегрированіемъ выводимъ

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du. \tag{12}$$

Эта формула позволяетъ найти $\int u\,dv$, если извѣстенъ $\int v\,du$ *). Такое вычисленіе называютъ интегрированіемъ по частямъ. Когда предложено найти нѣкоторый интегралъ, то подъинтегральную функцію $f(x)$ можно безчисленнымъ множествомъ способовъ пред-

*) Примѣнительно къ опредѣленнымъ интеграламъ эта формула принимаетъ видъ

$$\int_a^b u\,dv=(uv)_a^b-\int_a^b v\,du.$$

ставить въ видѣ $f(x)=\varphi(x)\psi(x)$, и притомъ такъ, что $\psi(x)\,dx$ будетъ дифференціаломъ извѣстной функціи v, но при выборѣ функціи $\psi(x)$ надо руководиться тѣмъ, чтобы интегрированіе $v\varphi'(x)\,dx$ было проще, чѣмъ интегрированіе $f(x)\,dx$. Мы видимъ, слѣдовательно, что интегрированіе по частямъ, такъ же какъ и съ помощью подстановки, есть не болѣе, какъ пріемъ, имѣющій цѣлью облегчить интегрированіе, подготовляя его къ непосредственному. Нерѣдко встрѣчается и такой случай, когда интегралъ, предложенный для вычисленія, самъ появляется въ правой части формулы (12) съ коэффиціентомъ, не равнымъ единицѣ; въ этихъ случаяхъ интегрированіе по частямъ дѣлается настоящею методой интегрированія, потому что формула (12) дастъ тогда безъ новыхъ вычисленій значеніе искомаго интеграла.

727. Примѣры. a) Значеніе $\int\sqrt{1-x^2}\cdot dx$ тотчасъ получимъ, написавъ

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx = x\sqrt{1-x^2}+\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

второй интегралъ разбивается на

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-\int\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x-\int\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Слѣдовательно (срав. съ § 725, b),

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x\right)+C.$$

b) Чтобы найти интегралы отъ $\sin\log x\,dx$ и $\cos\log x\,dx$, замѣчаемъ, что интегрированіе по частямъ, примѣненное къ обоимъ, даетъ

$$\int\sin\log x\cdot dx = x\sin\log x-\int\cos\log x\cdot dx,$$

$$\int\cos\log x\cdot dx = x\cos\log x+\int\sin\log x\cdot dx.$$

Отсюда выходитъ, что

$$\int\sin\log x\cdot dx = \frac{x}{2}(\sin\log x-\cos\log x)+C,$$

$$\int\cos\log x\cdot dx = \frac{x}{2}(\sin\log x+\cos\log x)+C.$$

Такимъ же образомъ, примѣняя интегрированіе по частямъ къ $e^x\sin x\,dx$ и $e^x\cos x\,dx$, находимъ

$$\int e^x\sin x\,dx = -e^x\cos x+\int e^x\cos x\,dx,$$

$$\int e^x\cos x\,dx = e^x\sin x-\int e^x\sin x\,dx,$$

откуда

$$\int e^x \sin x\, dx = \tfrac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C,$$

$$\int e^x \cos x\, dx = \tfrac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C.$$

Впрочемъ, эти интегралы не отличаются существенно отъ предыдущихъ, къ которымъ они и приводятся подстановкою $x = \log t$.

c) Аналогично будемъ имѣть

$$\int \cos^2 x\, dx = \int \cos x\, d\sin x = \sin x \cos x + x - \int \cos^2 x\, dx = \tfrac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + C,$$

$$\int x \cos x\, dx = \int x\, d\sin x = x \sin x - \int \sin x\, dx = x \sin x + \cos x + C,$$

$$\int x^2 \sin x\, dx = \int x^2 d(-\cos x) = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x\, dx$$

$$= 2x \sin x + (2 - x^2)\cos x + C,$$

$$\int x^n \cos x\, dx = x^n \sin x - n\int x^{n-1} \sin x\, dx$$

$$= x^n \sin x + n x^{n-1} \cos x - n(n-1)\int x^{n-2} \cos x\, dx$$

$$= (x^n - n(n-1)x^{n-2} + \cdots)\sin x + (n x^{n-1} - n(n-1)(n-2)x^{n-3} + \cdots)\cos x + C,$$

$$\int \operatorname{arc\,tg} x\, dx = x \operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{x\, dx}{1+x^2} = x \operatorname{arc\,tg} x - \log\sqrt{1+x^2} + C,$$

$$\int \log(x + \sqrt{1+x^2})\, dx = x \log(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C,$$

$$\int \log(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})\, dx = x \log(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) + \tfrac{1}{2}(\arcsin x - x) + C,$$

$$\int \frac{e^{2x}\, dx}{\sqrt{e^x - 1}} = 2\int e^x\, d\sqrt{e^x - 1} = 2e^x\sqrt{e^x - 1} - 2\int e^x \sqrt{e^x - 1}\, dx$$

$$= 2e^x\sqrt{e^x - 1} - 2\int \frac{e^{2x}\, dx}{\sqrt{e^x - 1}} + 2\int \frac{e^x\, dx}{\sqrt{e^x - 1}} = \frac{2}{3}(e^x + 2)\sqrt{e^x - 1} + C.$$

$$\int \frac{x\, dx}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{1}{4}\int x\, d\,\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{x\,\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} - \log(e^x + e^{-x})\right\} + C.$$

Отсюда, въ частности,

$$\int_0^\infty \frac{x\, dx}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{1}{4}\log 2.$$

Наконецъ, подстановкою $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x} = \theta$, откуда $x = \operatorname{cotg}\theta$, и интегрированіемъ по частямъ получимъ

$$\int_0^\infty \left[\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{x}\right)\right]^2 dx = \lim_{\theta=0} \theta^2 \operatorname{cotg}\theta + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta \operatorname{cotg}\theta\, d\theta,$$

а слѣдовательно (§ 725, f),

$$\int_0^\infty \left[\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{x}\right)\right]^2 dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta d \log\sin\theta = -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin\theta\, d\theta = \pi\log 2$$

(Послѣдніе два примѣра взяты изъ итальянскаго изданія 1905 года).

d) Чтобы взять интегралъ отъ $\frac{1+\sin x}{1+\cos x} e^x dx$ [1]) примѣняемъ интегрированіе по частямъ

$$\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x} e^x\, dx = \frac{1+\sin x}{1+\cos x} e^x - \int \frac{1+\cos x+\sin x}{(1+\cos x)^2} e^x\, dx,$$

и пишемъ послѣдній дифференціалъ въ видѣ

$$\frac{e^x\, dx}{1+\cos x} + \frac{e^x \sin x\, dx}{(1+\cos x)^2} = \frac{d e^x}{1+\cos x} + e^x d\frac{1}{1+\cos x} = d\frac{e^x}{1+\cos x}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x} e^x\, dx = e^x \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C.$$

Можно было бы избѣжать интегрированія по частямъ, умножая числителя и знаменателя на $1-\cos x$ и разбивая полученный дифференціалъ слѣдующимъ образомъ

$$\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right) e^x\, dx + \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin^2 x}\right) e^x\, dx = -\,d\,(e^x \cot x) + d\frac{e^x}{\sin x}.$$

e) Если требуется найти интегралъ отъ $x^m \log^n x\, dx$, при $m > -1$ и n — цѣломъ положительномъ, то съ помощью интегрированія по частямъ, и повторнаго приложенія перваго получаемаго результата, найдемъ

$$\int x^m \log^n x \cdot dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\log^n x - \frac{n}{m+1}\int x^m \log^{n-1} x \cdot dx$$

$$= \frac{x^{m+1}}{m+1}\left(\log^n x - \frac{n}{m+1}\log^{n-1} x + \frac{n(n-1)}{(m+1)^2}\log^{n-2} x - \cdots \pm \frac{n!}{(m+1)^n}\right) + C.$$

---

[1]) Этотъ примѣръ заимствованъ изъ „Glasgow University Calendar" (1901—02), гдѣ читатель найдетъ много другихъ полезныхъ примѣровъ.

Такъ какъ при всякомъ $\nu > 0$ и $m > -1$, функція $x^{m+1}\log^{\nu} x$, равная нулю при $x = 1$, стремится къ нулю справа отъ 0 (§ 312, а), то въ частности будемъ имѣть

(13)
$$\int_0^1 x^m \log^n x \cdot dx = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(m+1)^{n+1}}.$$

Аналогично этому находимъ

$$\int x^n e^{-x}\, dx = -x^n e^{-x} + n\int x^{n-1} e^{-x}\, dx$$
$$= -(x^n + n x^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} + \cdots + n!)\, e^{-x} + C,$$

и въ частности, замѣчая, что, при всякомъ $\nu > 0$, $(x^{\nu} e^{-x})_0^{\infty} = 0$ *),

(14)
$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x}\, dx = n!\,(e^{-x})_{\infty}^{0} = n!$$

Если этотъ результатъ извѣстенъ, то можно легко имъ воспользоваться чтобы изъ него вывести (13): стоитъ только сдѣлать подстановку $x = e^{-\frac{t}{m+1}}$. Дѣйствительно, тогда

$$\int_0^1 x^m \log^n x\, dx = \frac{(-1)^n}{(m+1)^{n+1}}\int_0^{\infty} t^n e^{-t}\, dt = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(m+1)^{n+1}}.$$

Впрочемъ, формула (14) есть частный случай другой раньше доказанной (§ 721, h), потому что $n!$ есть значеніе $\Gamma(n+1)$ для цѣлаго n.

f) Интегрированіе по частямъ, примѣненное къ интеграламъ

$$a_n = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} \cos x\, dx, \qquad b_n = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} \sin x\, dx,$$

даетъ

$$a_n = (x^n e^{-x} \sin x)_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (n x^{n-1} - x^n)\, e^{-x} \sin x\, dx,$$

$$b_n = (x^n e^{-x} \cos x)_{\infty}^{0} + \int_0^{\infty} (n x^{n-1} - x^n)\, e^{-x} \cos x\, dx,$$

т. е.

$$a_n = b_n - n b_{n-1}, \qquad b_n = -a_n + n a_{n-1}.$$

Эти соотношенія можно соединить въ одно: $c_n = \frac{1}{2}(1+i)\, n c_{n-1}$, положивъ

*) Символъ $\big(f(x)\big)_a^b$ обозначаетъ разность $f(b) - f(a)$.

$c_n = a_n + i b_n$, при $i^2 = -1$. Замѣчая, что $c_0 = \frac{1}{2}(1+i)$, выводимъ отсюда

$$c_n = n!\left(\frac{1+i}{2}\right)^{n+1} = n!\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right)^{n+1} = \frac{n!}{2^{\frac{n+1}{2}}}\, e^{(n+1)\frac{i\pi}{4}}.$$

Слѣдовательно,

$$a_n = \frac{n!}{2^{\frac{n+1}{2}}} \cos(n+1)\frac{\pi}{4}, \qquad b_n = \frac{n!}{2^{\frac{n+1}{2}}} \sin(n+1)\frac{\pi}{4}.$$

Общнѣе, при $\cos\alpha > 0$, имѣемъ

$$\int_0^\infty x^n e^{-x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha)\,dx = n!\cos(n+1)\alpha,$$

$$\int_0^\infty x^n e^{-x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha)\,dx = n!\sin(n+1)\alpha.$$

Изъ этихъ формулъ получаются предыдущія при $\alpha = \frac{\pi}{4}$ и замѣнѣ x на $x\sqrt{2}$.

g) Вычислимъ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ при n цѣломъ положительномъ. Интегрированіе по частямъ даетъ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x\cdot d(-\cos x) = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\cos^2 x\,dx$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\cdot dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx,$$

откуда

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,dx = \frac{(n-1)(n-3)}{n(n-2)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-4} x\,dx = \cdots,$$

такъ что, въ концѣ концовъ, приходимъ къ одному изъ двухъ интеграловъ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = 1,$$

смотря по тому, будетъ ли n четное или нечетное. Итакъ,

$$(15)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \left|\begin{array}{ll} \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots n}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & \text{при } n \text{ четномъ,} \\ \dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(n-1)}{3\cdot 5\cdot 7\cdots n}, & \text{при } n \text{ нечетномъ.} \end{array}\right.$$

Отсюда легко вывести формулу Валлиса (§ 464, a), исходя изъ неравенствъ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\cdot dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\cdot dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x\cdot dx,$$

которыя теперь обращаются въ слѣдующія

$$\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)} < \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot\frac{\pi}{2} < \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}.$$

Отсюда слѣдуетъ

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n-1}.$$

Поэтому, замѣчая, что отношеніе $\dfrac{2n}{2n+1}$ стремится къ предѣлу 1 при n безконечномъ, мы и находимъ

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdots$$

Отсюда же легко заключить (§ 337, c), что, при возрастаніи n, оба выраженія (15) стремятся принять форму $\sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$, такъ что

$$\lim_{n=\infty}\sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\cdot dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

h) Интегралъ $\mathfrak{I}_n = \int_0^{\infty} x^n e^{-x^2}\,dx$ при $n=0$ намъ уже извѣстенъ (§ 721, e), а при $n=1$ легко вычисляется, потому что

$$\mathfrak{I}_1 = \tfrac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,d(x^2) = \tfrac{1}{2}\left(e^{-x^2}\right)_{\infty}^{0} = \tfrac{1}{2}.$$

Впрочемъ, замѣна x на $\sqrt{x}$ даетъ, при всякомъ n, $\mathfrak{I}_n = \dfrac{1}{2}\,\Gamma\!\left(\dfrac{n+1}{2}\right)$. Но положимъ, что это соотношеніе неизвѣстно; тогда при всякомъ цѣломъ положительномъ n интегралъ $\mathfrak{J}_n$ вычисляется съ помощью интегрированія по частямъ слѣдующимъ образомъ:

$$\mathfrak{J}_n = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty x^{n-1}\, d(-e^{-x^2}) = \frac{1}{2}(x^{n-1}e^{-x^2})_\infty^0 + \frac{n-1}{2}\int\limits_0^\infty x^{n-2}e^{-x^2}\,dx = \frac{n-1}{2}\mathfrak{J}_{n-2},$$

$$(16)\qquad \mathfrak{J}_n = \begin{cases} \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-1)}{2^{\frac{n}{2}}}\mathfrak{J}_0, & \text{при } n \text{ четномъ} \\[2ex] \dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(n-1)}{2^{\frac{n+1}{2}}} & \text{при } n \text{ нечетномъ} \end{cases}$$

Чтобы вычислить теперь и $\mathfrak{J}_0$, замѣтимъ [1]), что выраженіе

$$\mathfrak{J}_{n+1} + 2a\mathfrak{J}_n + a^2\mathfrak{J}_{n-1} = \int\limits_0^\infty x^{n-1}(x+a)^2 e^{-x^2}\,dx$$

для всѣхъ вещественныхъ значеній a положительно, и что для этого необходимо $\mathfrak{J}_{n-1}\mathfrak{J}_{n+1} > \mathfrak{J}_n^2$, т. е.

$$\frac{\mathfrak{J}_{n-1}}{\mathfrak{J}_n} > \frac{\mathfrak{J}_n}{\mathfrak{J}_{n+1}}, \text{ между тѣмъ, какъ } \frac{\mathfrak{J}_n}{\mathfrak{J}_{n-1}}\frac{1}{} = \frac{\mathfrak{J}_{n-1}}{\mathfrak{J}_n}\cdot\frac{\mathfrak{J}_n}{\mathfrak{J}_{n+1}} = \frac{2}{n}.$$

Слѣдовательно,

$$\frac{\mathfrak{J}_{n-1}}{\mathfrak{J}_n} > \sqrt{\frac{2}{n}} > \frac{\mathfrak{J}_n}{\mathfrak{J}_{n+1}},$$

а поэтому послѣдовательно

$$\sqrt{\frac{2}{n}} > \frac{\mathfrak{J}_n}{\mathfrak{J}_{n+1}} > \sqrt{\frac{2}{n+1}},\quad \lim_{n=\infty}\frac{\mathfrak{J}_n\sqrt{n}}{\mathfrak{J}_{n+1}} = \sqrt{2},\quad \lim_{n=\infty}\frac{\mathfrak{J}_{2n}\sqrt{n}}{\mathfrak{J}_{2n+1}} = 1.$$

Остается подставить выраженія (16) въ послѣднее равенство, чтобы получить (§ 337, c)

$$\mathfrak{J}_0 = \frac{1}{2}\lim\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Далѣе легко установить, что выраженія (16) при безпредѣльномъ возрастаніи n стремятся принять асимптотическую форму

$$\mathfrak{J}_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{n}{2e}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

---

[1]) Stieltjes. „Nouvelles Annales de Mathématiques" (1890, стр. 479).

i) Предложимъ себѣ вычислить

$$\mathfrak{J} = \int_0^\infty \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{x} \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{x}\, dx$$

при a и b положительныхъ, слѣдуя пути, указанному Лерщемъ (Lerch, Giornale di Mathematiche, мартъ 1903 г.). Значеніе этого интеграла при $a = b = 1$ уже извѣстно (см. § 727, c) и мы вскорѣ снова найдемъ, что это значеніе $k = \pi \log 2$. Затѣмъ, при $a = b$, интегралъ равенъ ka, что прямо получается замѣною x на ax. Отсюда слѣдуетъ, что

$$2\mathfrak{J} + k(a+b) = \int_0^\infty \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{a}{x} + \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{x}\right)^2 dx.$$

Замѣчая теперь, что (§ 254, d)

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{a}{x} + \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{x} = \operatorname{arc\,tg} \frac{(a+b)x}{x^2 - ab} + \left| \begin{array}{l} \pi \text{ при } x < \sqrt{ab} \\ 0 \text{ при } x > \sqrt{ab} \end{array} \right.$$

получимъ

$$2\mathfrak{J} + k(a+b) = \int_0^{\sqrt{ab}} \left(\pi - \operatorname{arc\,tg} \frac{(a+b)x}{ab - x^2}\right)^2 dx + \int_{\sqrt{ab}}^\infty \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{(a+b)x}{x^2 - ab}\right)^2 dx$$

$$= \pi^2 \sqrt{ab} - 2\pi \int_0^{\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,tg} \frac{(a+b)x}{ab - x^2}\, dx + \int_0^\infty \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{(a+b)x}{x^2 - ab}\right)^2 dx.$$

Для вычисленія послѣдняго интеграла, замѣнимъ x на $\frac{ab}{x}$ и замѣтимъ, что

$$\int_0^\infty \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{(a+b)x}{x^2 - ab}\right)^2 dx = -\int_0^\infty \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{(a+b)x}{x^2 - ab}\right)^2 d\,\frac{ab}{x}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{(a+b)x}{x^2 - ab}\right)^2 d\left(x - \frac{ab}{x}\right),$$

а замѣняя теперь $x - \frac{ab}{x}$ черезъ x, найдемъ, что искомый интегралъ приводится къ

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{a+b}{x}\right)^2 dx = \int_0^\infty \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{(a+b)}{x}\right)^2 dx = k(a+b).$$

Слѣдовательно,

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{2}\pi^2\sqrt{ab} - \pi\int\limits_0^{\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,tg}\frac{(a+b)x}{ab-x^2}\,dx.$$

Теперь можно было бы прямо примѣнить интегрированіе по частямъ, но проще разбить интегралъ во второй части на два

$$\int\limits_0^{\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}\,dx + \int\limits_0^{\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{b}\,dx$$

и интегрированіемъ по частямъ получимъ

$$\int\limits_0^{\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}\,dx = \sqrt{ab}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{b}{a}} - \frac{a}{2}\log\frac{a+b}{a},$$

откуда

$$\int\limits_0^{\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,tg}\frac{(a+b)x}{ab-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\pi\sqrt{ab} - \frac{1}{2}\log\frac{(a+b)^{a+b}}{a^a b^b}$$

и окончательно

$$\mathfrak{J} = \frac{\pi}{2}\log\frac{(a+b)^{a+b}}{a^a b^b}.$$

[Этотъ примѣръ взятъ изъ итальянскаго изданія 1905 г.].

j) Въ заключеніе покажемъ, что второй интегралъ въ формулахъ (11) получается изъ перваго интегрированіемъ по частямъ. Такъ какъ

$$\left(\frac{\sin\alpha x\cdot\sin\beta x}{x}\right)_\infty^0 = \lim_{x=0}\frac{\sin\alpha x}{x}\sin\beta x - \alpha\lim_{x=0}\sin\beta x = 0,$$

то

$$\int\limits_0^\infty \sin\alpha x\cdot\sin\beta x\frac{dx}{x^2} = \int\limits_0^\infty \sin\alpha x\cdot\sin\beta x\cdot d\left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$= \int\limits_0^\infty (\beta\sin\alpha x\cos\beta x + \alpha\sin\beta x\cos\alpha x)\frac{dx}{x}$$

$$= \tfrac{1}{4}\pi\beta\{\operatorname{sgn}(\alpha+\beta)+\operatorname{sgn}(\alpha-\beta)\} + \tfrac{1}{4}\pi\alpha\{\operatorname{sgn}(\beta+\alpha)+\operatorname{sgn}(\beta-\alpha)\}$$

$$= \tfrac{1}{4}\pi(\alpha+\beta)\operatorname{sgn}(\alpha+\beta) - \tfrac{1}{4}\pi(\alpha-\beta)\operatorname{sgn}(\alpha-\beta) = \tfrac{1}{4}\pi\{|\alpha+\beta| - |\alpha-\beta|\}.$$

728. Интегрированіе при помощи рядовъ. Если въ нѣкоторомъ интервалѣ (a, b) рядъ

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \cdots,$$

члены котораго непрерывныя функціи, равномѣрно сходящійся, то будемъ имѣть

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u_1(x)\,dx + \int_a^b u_2(x)\,dx + \int_a^b u_3(x)\,dx + \cdots.$$

Въ самомъ дѣлѣ, мы знаемъ, что (§ 322) при данныхъ условіяхъ $f(x)$, такъ же, какъ и $u_i(x)$, непрерывная, а потому и интегрируемая (§ 719) функція. Слѣдовательно, если $\varphi_n(x)$ обозначаетъ остатокъ даннаго ряда, то можно написать

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u_1(x)\,dx + \int_a^b u_2(x)\,dx + \cdots + \int_a^b u_n(x)\,dx + \int_a^b \varphi_n(x)\,dx.$$

Если теперь ε по произволу заданное сколь угодно малое положительное число, то, какъ мы знаемъ, можно указать такое число, что для всѣхъ значеній n бóльшихъ этого числа, и для любого значенія x въ интервалѣ (a, b), будемъ имѣть $|\varphi_n(x)| < \varepsilon$. Поэтому

$$\left|\int_a^b \varphi_n(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |\varphi_n(x)|\,dx < (b-a)\,\varepsilon,$$

а потому

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b \varphi_n(x)\,dx = 0, \quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u_1(x)\,dx + \int_a^b u_2(x)\,dx + \cdots.$$

Замѣтимъ, что, въ частности, всякій степенной рядъ допускаетъ почленное интегрированіе.

729. Примѣры. a) Интегрированіе при помощи рядовъ можетъ служить для разложенія функціи въ степенной рядъ, если извѣстно разложеніе производной. Такъ, напримѣръ (§ 233, e).

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \cdots.$$

$$\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \cdots,$$

при условіи, что въ правой части x^2 не >1. На основаніи извѣстныхъ формулъ, приведенныхъ выше (§ 725, d) оба разложенія эквивалентны, потому что

$$\arcsin ix = \operatorname{arc\,tg}\frac{ix}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2i}\log\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}+x} = i\log(x+\sqrt{1+x^2}).$$

b) *Интегрированіе при помощи рядовъ часто полезно для вычисленія* нѣкоторыхъ опредѣленныхъ интеграловъ. Такъ напримѣръ, весьма быстро вычисляется интегралъ отъ $x^x\,dx$ въ предѣлахъ 0 и 1 при помощи разложенія

$$x^x = e^{x\log x} = 1 + \frac{x\log x}{1} + \frac{x^2\log^2 x}{1\cdot 2} + \frac{x^3\log^3 x}{1\cdot 2} + \dots.$$

Дѣйствительно, интегрируя и припоминая формулу (13), тотчасъ находимъ

$$\int_0^1 x^x\,dx = \sum_0^\infty \frac{1}{n!}\int_0^1 x^n\log^n x\,dx = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}},$$

т. е.

$$\int_0^1 x^x\,dx = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \dots = 0{,}783\dots$$

Общнѣе имѣемъ

$$\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 x^{\alpha x+\beta}\log^n x\,dx = \frac{1}{(\beta+1)^{n+1}} - \frac{(n+1)\alpha}{1!\,(\beta+2)^{n+2}} + \frac{(n+1)(n+2)\alpha^2}{2!\,(\beta+3)^{n+3}} - \dots.$$

Въ частности, замѣтимъ, что

$$-\int_0^1 x^x\log x\,dx = \int_0^1 x^x\,dx.$$

c) Точно такъ же для вычисленія интеграла отъ $\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2\cdot\frac{dx}{x}$ въ предѣлахъ 0 и ∞ можно воспользоваться разложеніемъ подъинтегральной функціи въ степенной рядъ. Но необходимо замѣтить, что въ интервалѣ отъ 0 до 1 ее надо разложить по восходящимъ степенямъ x, а въ интервалѣ отъ 1 до ∞ по восходящимъ степенямъ $\frac{1}{x}$. Однако, можно избѣжать этого второго разложенія, ограничивъ интегрированіе интерваломъ отъ 0 до 1. Достаточно разбить данный интегралъ на два

$$2\int_0^1 \log\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{dx}{x} + 2\int_1^\infty \log\frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{dx}{x}$$

и замѣтить, что второй интегралъ при подстановкѣ $\frac{1}{x}$ на мѣсто x, обратится въ

$$\int_1^0 \log \frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-1} \cdot x\, d\,\frac{1}{x} = \int_0^1 \log \frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{dx}{x}.$$

Поэтому данный интегралъ имѣетъ значеніе, равное (§ 219)

$$4\int_0^1 \log \frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{dx}{x} = 8\int_0^1 \left(1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \cdots\right) dx,$$

т. е. равенъ суммѣ ряда (§ 365, a)

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \sum_1^\infty \frac{1}{n^2} - \sum_1^\infty \frac{1}{4n^2} = \frac{3}{4}\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{1}{8}\pi^2,$$

умноженной на 8, такъ что

$$\int_0^\infty \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 \frac{dx}{x} = \pi^2.$$

d) Обратно, можно воспользоваться интегрированіемъ съ помощью рядовъ для суммированія нѣкоторыхъ рядовъ, изображая члены этихъ рядовъ опредѣленными интегралами. Такъ, напримѣръ, чтобы найти сумму ряда $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots$, достаточно замѣтить, что ея значеніе равно опредѣленному интегралу (§ 725, d)

$$\int_0^1 (1 + x - x^3 - x^4 + x^6 - \cdots)\, dx = \int_0^1 \frac{dx}{1 - x + x^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arc\,tg} \frac{1-2x}{\sqrt{3}}\right)_1^0 = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Слѣдовательно,

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \cdots = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Точно такъ же сумма ряда $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \cdots$ равна интегралу

$$\int_0^1 (x - x^2 + x^4 - x^5 + \cdots)\, dx = \int_0^1 \frac{x\, dx}{1 + x + x^2}$$

$$= \left(\log \sqrt{1 + x + x^2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{1+2x}{\sqrt{3}}\right)_0^1,$$

а потому имѣемъ

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}+\cdots=\log\sqrt{3}-\frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$

e) Первый изъ полученныхъ въ пунктѣ d) результатовъ заключается, какъ частный случай, при $\alpha=\frac{\pi}{3}$, въ извѣстной формулѣ (§ 363)

$$(17)\qquad \sin\alpha+\frac{1}{2}\sin 2\alpha+\frac{1}{3}\sin 3\alpha+\cdots=\frac{\pi-\alpha}{2}+\left[\frac{\alpha}{2\pi}\right]\pi,$$

которая сама можетъ быть получена такимъ же путемъ, т. е. при помощи интегрированія ряда

$$\sin\alpha+x\sin 2\alpha+x^2\sin 3\alpha+x^3\sin 4\alpha+\cdots$$

между предѣлами 0 и 1. Такъ какъ $\sin(n-1)\alpha+\sin(n+1)\alpha=2\sin n\alpha\cos\alpha$, то имѣемъ тождественно

$$(1+x^2)\sum_1^\infty x^{n-1}\sin n\alpha=\sin\alpha+2x\cos\alpha\sum_1^\infty x^{n-1}\sin n\alpha,$$

откуда вытекаетъ

$$(18)\qquad \sum_1^\infty x^{n-1}\sin n\alpha=\frac{\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}.$$

Поэтому сумма ряда (17), при условіи, что исключаются тѣ значенія, при которыхъ $\sin\alpha=0$, можетъ быть выражена такъ

$$\int_0^1\frac{\sin\alpha\,dx}{1-2x\cos\alpha+x^2}=\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)_0^1=\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)+\operatorname{arc\,tg}(\cot\alpha).$$

Слѣдовательно, искомая сумма (§ 254, d) равна $\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\right)$, потому что $\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}<1$. Полученное выраженіе равно выраженію (17) и изображаетъ сумму ряда и при α, равномъ нечетному кратному отъ π. Но оно теряетъ смыслъ при α, равномъ четному кратному отъ π, когда, какъ мы знаемъ, и формула (17) не имѣетъ мѣста.

f) Къ другимъ замѣчательнымъ результатамъ приводимъ интегрированіе выраженія (18) по α въ предѣлахъ отъ 0 до какого нибудь α, при чемъ x остается постояннымъ и лежащимъ между 0 и 1. При этомъ предположеніи, какъ извѣстно (§ 320, b), рядъ (18) равномѣрно сходящійся. Съ помощью интегрированія тотчасъ находимъ

$$\sum_1^\infty\frac{x^n}{n}(1-\cos n\alpha)=\int_0^\alpha\frac{d(-x\cos\alpha)}{1-2x\cos\alpha+x^2}=\frac{1}{2}\log\frac{1-2x\cos\alpha+x^2}{(1-x)^2},$$

т. е., замѣняя α на 2α,

$$x \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} x^2 \sin^2 2\alpha + \frac{1}{3} x^3 \sin^2 3\alpha + \cdots = \frac{1}{4} \log \frac{1-2x\cos 2\alpha + x^2}{(1-x)^2}.$$

Замѣчая далѣе, что $\sin\alpha \sin\beta = \sin^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$, получаемъ еще

$$x \sin\alpha \sin\beta + \tfrac{1}{2} x^2 \sin 2\alpha \sin 2\beta + \tfrac{1}{3} x^3 \sin 3\alpha \sin 3\beta + \cdots$$
$$= \frac{1}{4} \log \frac{1-2x\cos(\alpha+\beta)+x^2}{1-2x\cos(\alpha-\beta)+x^2}.$$

Отсюда, на основаніи теоремы Абеля (§ 340), слѣдуетъ

$$\sin\alpha \sin\beta + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \sin 2\beta + \frac{1}{3} \sin 3\alpha \sin 3\beta + \cdots = \frac{1}{2} \log \left| \frac{\sin \frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin \frac{\alpha-\beta}{2}} \right|.$$

Эта формула даетъ намъ возможность вычислить еще другой интегралъ, аналогичный интегралу (11). Съ помощью не вполнѣ строгаго пріема, уже примѣненнаго раньше (§ 721, e, f, h), легко найдемъ

$$\int_0^\infty \sin\alpha x \sin\beta x \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \log \left| \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} \right|.$$

g) Вычислимъ, наконецъ, еще интегралъ Дирихле (§ 721, f), собирая всѣ элементы, соотвѣтствующіе одной и той же абсолютной величинѣ $\sin x$. При этомъ, когда x имѣетъ значеніе, лежащее между 0 и $\frac{\pi}{2}$, дуги x, $\pi-x$, $2\pi+x$, $3\pi-x$, $4\pi+x$ и т. д. будутъ имѣть одно и то же значеніе синуса, а дуги $\pi+x$, $2\pi-x$, $3\pi+x$, $4\pi-x$ и т. д. — то же значеніе съ обратнымъ знакомъ. Отсюда слѣдуетъ, что $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ можетъ быть представленъ слѣдующимъ образомъ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\pi-x} - \frac{1}{\pi+x} - \frac{1}{2\pi-x} - \frac{1}{2\pi+x} + \frac{1}{3\pi-x} - \cdots \right) \sin x \, dx.$$

Между тѣмъ (§ 464, c) рядъ въ скобкахъ имѣетъ значеніе

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x-n\pi} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x-2n\pi} - \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x-(2n+1)\pi}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\frac{1}{2}x - n\pi} + \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\frac{1}{2}(\pi-x) - n\pi} = \frac{1}{2} \left(\cot\frac{x}{2} + \operatorname{tg}\frac{x}{2} \right) = \frac{1}{\sin x}.$$

Слѣдовательно,

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{1}{2}\pi.$$

Это вычисленіе легко сдѣлать совершенно строгимъ [1]).

Кратные интегралы.

730. Неопредѣленное интегрированіе. Изъ предыдущихъ изслѣдованій ясно, что задача простого интегрированія въ сущности состоитъ въ разысканіи функціи y, когда извѣстна ея производная $\frac{dy}{dx} = f(x)$. Не будетъ существенно новою задачею вопросъ о разысканіи неизвѣстной функціи отъ нѣсколькихъ перемѣнныхъ по данной частной ея производной, взятой по одной изъ перемѣнныхъ. Напримѣръ, если требуется найти функціи z отъ x и y, когда дана $\frac{dz}{dx} = f(x, y)$, при составленіи которой y разсматривается, какъ постоянная, то такъ же на нее надо смотрѣть при интегрированіи, такъ что $z = \int f(x, y)\,dx$. Но такъ какъ при этомъ y считается постояннымъ, то подъ произвольной постоянной, являющейся при этомъ интегрированіи, надо понимать независящую отъ x величину. Она можетъ зависѣть отъ y и будетъ въ сущности произвольной функціей отъ y. Точно такъ же не новыми, по существу дѣла, будутъ вопросы о нахожденіи функціи y по данной $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$, или z по данной $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f(x, y)$, и вообще по данной производной какого угодно порядка, но взятой по одной лишь перемѣнной. Нѣсколько послѣдовательныхъ интегрированій по этой перемѣнной, при чемъ другая разсматривается, какъ постоянная, всегда приведутъ къ цѣли, не требуя какихъ либо добавленій къ сказанному раньше. Новый вопросъ является лишь тогда, когда требуется найти функцію z, удовлетворяющую уравненію

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f(x, y), \tag{19}$$

гдѣ f данная функція отъ независимыхъ перемѣнныхъ x и y. Допуская a priori существованіе такой функціи z, замѣчаемъ, что

[1]) См. „Calcolo integrale" Arcais (стр. 198).

лѣвая часть равенства (19) есть частная производная отъ $\frac{\partial z}{\partial y}$, взятая по x, при составленіи которой y разсматривается, какъ постоянная, поэтому

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \int f(x, y)\, dx.$$

Интегрируя теперь по y, въ предположеніи, что x остается постояннымъ, получимъ

$$z = \int \left\{ \int f(x, y)\, dx \right\} dy,$$

или, какъ иначе пишутъ,

$$z = \int dy \int f(x, y)\, dx.$$

Ясно, что можно разсматривать лѣвую часть равенства (19), наоборотъ, какъ производную отъ $\frac{\partial z}{\partial x}$, взятую по y, и тогда аналогичнымъ путемъ найдемъ

$$z = \int dx \int f(x, y)\, dy.$$

Общій результатъ двухъ послѣдовательныхъ интегрированій (если онъ существуетъ), по различнымъ, одна отъ другой независимымъ перемѣннымъ называется двойнымъ интеграломъ и изображается слѣдующимъ образомъ

$$z = \int \int f(x, y)\, dx\, dy. \tag{20}$$

Надо замѣтить, что если существуетъ одна функція $z = F(x, y)$, удовлетворяющая уравненію (19), то существуетъ и безчисленное множество функцій, ему удовлетворяющихъ, и общее ихъ выраженіе будетъ

$$z = F(x, y) + \varphi(x) + \psi(y),$$

гдѣ $\varphi(x)$ произвольная функція одного x, а $\psi(y)$ произвольная функція одного y. Къ этому результату можно придти, выписывая при послѣдовательныхъ интегрированіяхъ произвольныя постоянныя (которыя въ данномъ случаѣ будутъ произвольными функціями отъ той перемѣнной, которая разсматривается, какъ постоянная при интегрированіи), но еще проще сдѣлать повѣрку предыдущаго равенства, которая дастъ

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} + \varphi'(x) \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y};$$

$$\text{т. е.} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f(x, y), \text{ по условію.}$$

731. Опредѣленный двойной интегралъ. Когда мы ищемъ простой опредѣленный интегралъ отъ $f(x)\,dx$ въ интервалѣ $(a,\ b)$, гдѣ $a<b$, то ограниченіе, налагаемое нами на перемѣнную x, можно выразить неравенствомъ $(x-a)(x-b)\leqq 0$, такъ какъ этому неравенству удовлетворяютъ всѣ значенія x, лежащія въ интервалѣ $(a,\ b)$ и только эти значенія. Общнѣе, всякое неравенство $L(x)\leqq 0$ изображаетъ одинъ или нѣсколько интерваловъ, совокупность которыхъ составляетъ *область интегрированія*. Обращаясь къ двойному интегралу (20), положимъ, что перемѣнныя x и y, оставаясь одна отъ другой независимыми, должны удовлетворятъ нѣкоторому неравенству

$$L(x,\, y) \leqq 0. \tag{21}$$

Допустимъ еще, чтобы имѣть дѣло съ опредѣленнымъ случаемъ, что изъ этого неравенства, при данномъ значеніи x, вытекаютъ неравенства

$$a(x) \leqq y \leqq b(x), \tag{21a}$$

гдѣ $a(x)$ и $b(x)$ нѣкоторыя функціи отъ x, и что значенія y, такимъ образомъ ограниченныя, существуютъ для всѣхъ значеній x, ограниченныхъ неравенствами

$$\alpha \leqq x \leqq \beta, \tag{21b}$$

гдѣ α и β — постоянныя; обыкновенно эти числа будутъ корнями уравненія $a(x)=b(x)$. Интегрируя функцію $f(x,\ y)$ по y въ предѣлахъ отъ $y=a(x)$ до $y=b(x)$, разсматривая, конечно, при этомъ x, какъ постоянную, получимъ результатъ, зависящій, вообще говоря, отъ x

$$\varphi(x)=\int\limits_{a(x)}^{b(x)} f(x,\, y)\,dy.$$

Теперь возьмемъ интегралъ отъ $\varphi(x)\,dx$ въ предѣлахъ отъ α до β. Полученное при этомъ число

$$z=\int\limits_{\alpha}^{\beta} d\,x \int\limits_{a(x)}^{b(x)} f(x,\, y)\,dx, \tag{22}$$

называется *опредѣленнымъ двойнымъ интеграломъ*, распространеннымъ на область, опредѣляемую неравенствомъ (21), или равносильными ему неравенствами (21a) и (21b). Если $F(x,\, y)$, при x постоянномъ, есть первообразная функція отъ $f(x,\, y)$, то формула (22) дастъ для z значеніе

$$z=\int\limits_{\alpha}^{\beta} [F(x,\, b(x)) - F(x,\, a(x))]\,dx.$$

[**Примѣчаніе.** Если изъ того же неравенства (21) вытекаютъ неравенства

(21c) $$c(y) \leq x \leq d(y),$$

ограничивающія значенія x при данномъ y для всѣхъ значеній y, удовлетворяющихъ неравенствамъ

(21d) $$\gamma \leq y \leq \delta,$$

то двойной интегралъ

(22 bis) $$z = \int_{\gamma}^{\delta} dy \int_{c(y)}^{d(y)} f(x, y)\, dx,$$

отличающійся отъ (22) порядкомъ интегрированій и предѣлами для перемѣнныхъ, также называется двойнымъ интеграломъ, распространеннымъ на ту же область (21). Изложенныя до сихъ поръ соображенія не даютъ возможности доказать, что формулы (22) и (22 bis) даютъ для z одно и то же число, т. е. что значеніе двойного интеграла отъ $f(x, y)\, dx\, dy$ вполнѣ опредѣляется, когда дана область интегрированія; результатъ этотъ вытекаетъ непосредственно изъ новаго опредѣленія опредѣленнаго интеграла, которое будетъ дано ниже (§ 735). Если будемъ разсматривать x и y, какъ Декартовы координаты точки на плоскости, то область, опредѣляемую неравенствомъ (21), можно разсматривать, какъ часть плоскости, всѣ точки которой удовлетворяютъ неравенству

$$L(x, y) \leq 0.$$

Наше предположеніе, состоящее въ томъ, что неравенство (21) равносильно неравенствамъ $a(x) \leq y \leqq b(x)$ и $\alpha \leq x \leqq \beta$, обозначаетъ, что часть плоскости ограничена двумя кривыми

$$y = a(x), \quad y = b(x).$$

и двумя прямыми, параллельными оси y-овъ: $x = \alpha$, $x = \beta$, при чемъ $a(x) < b(x)$, $\alpha < \beta$. Предположеніе, что неравенство $L(x, y) \leqq 0$ равносильно также неравенствамъ

$$c(y) \leq x \leq d(y), \quad \gamma \leq y \leq \delta$$

обозначаетъ, что ту же часть плоскости можно разсматривать, какъ ограниченную двумя кривыми

$$x = c(y), \quad x = d(y),$$

и двумя прямыми, параллельными оси x-овъ: $y = \gamma$, $y = \delta$, при чемъ $c(y) < d(y)$, $\gamma < \delta$. Если та часть плоскости, на которую распространяется интегрированіе, ограничена сомкнутою кривою линіею, $L(x, y) = 0$, которая пересѣкается прямыми линіями, параллельными осямъ, не болѣе, какъ въ двухъ точкахъ, то рѣшая уравненіе

$L(x, y) = 0$ относительно y, найдемъ два значенія при данномъ x: $y = a(x)$, $y = b(x)$; α и β — предѣлы для x — будутъ абсциссы точекъ касанія кривой съ прямыми, параллельными оси y-овъ, такъ какъ эти абсциссы и будутъ наименьшимъ и наибольшимъ значеніями x въ данной области. Рѣшая то же уравненіе относительно x, получимъ $x = c(y)$, $x = d(y)$, а числа γ и δ — предѣлы для y — будутъ ординаты точекъ касанія кривой съ прямыми, параллельными оси x-овъ. Въ разсматриваемомъ случаѣ, какъ видимъ, неравенство $L(x, y) \leqq 0$ равносильно какъ неравенствамъ (21a) и (21b), такъ и неравенствамъ (21c) и (21d), и двойной интегралъ, распространенный на данную область, можно представлять въ формѣ (22) или въ формѣ (22 bis). Наконецъ, замѣтимъ, что если разсматриваемая область интегрированія, выражаемая неравенствомъ $L(x, y) \leqq 0$, не можетъ быть выражена неравенствами вида (21a) и (21b), то мы разбиваемъ ее на части, для каждой изъ которыхъ это требованіе выполняется, и подъ интеграломъ, распространеннымъ на всю область, понимаемъ сумму интеграловъ, распространенныхъ на каждую часть отдѣльно.]

732. Примѣры. Если область интегрированія задана неравенствомъ $x^2 + y^2 \leqq 2x$, то изъ него вытекаетъ

$$-\sqrt{2x - x^2} \leqq y \leqq +\sqrt{2x - x^2},$$

и y будетъ вещественнымъ только при $0 \leqq x \leqq 2$. Слѣдовательно, двойной интегралъ, распространенный на эту область, выразится формулою

$$z = \int_0^2 dx \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{+\sqrt{2x-x^2}} f(x, y)\, dy.$$

Но изъ даннаго неравенства, также вытекаетъ, что

$$1 - \sqrt{1 - y^2} \leqq x \leqq 1 + \sqrt{1 - y^2}$$
$$-1 \leqq y \leqq +1,$$

поэтому интегралъ, распространенный на данную область, можно представить и такъ:

$$z = \int_{-1}^{+1} dy \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\, dx,$$

перемѣнивъ порядокъ интегрированій. Отсюда вытекаетъ, что если $\varphi(x, y)$ есть первообразная функція отъ $f(x, y)$ при x постоянномъ, а $\psi(x, y)$ первообразная функція отъ $f(x, y)$ при y постоянномъ, то двойной интегралъ $\int\int f(x, y)\, dx\, dy$, распространенный на данную область, можетъ быть представленъ въ одномъ изъ слѣдующихъ двухъ видовъ

$$\int_0^2 [\varphi(t, \sqrt{2t-t^2}) - \varphi(t, -\sqrt{2t-t^2})]\, dt,$$

$$\int_{-1}^1 [\psi(1+\sqrt{1-t^2}, t) - \psi(1-\sqrt{1-t^2}, t)]\, dt$$

[Такъ какъ тождественность этихъ выраженій пока вообще не доказана, то мы можемъ здѣсь лишь провѣрить ее на частномъ примѣрѣ. Положивъ, напримѣръ, $f(x, y) = xy$, легко найдемъ для того и другого интеграла значеніе, равное нулю.]

733. Двойной интегралъ разсматривался нами, какъ результатъ интегрированія простого интеграла. Является вопросъ, какъ производится дифференцированіе простого интеграла по перемѣнной, независящей отъ перемѣнной интегрированія, или, какъ говорятъ, по параметру, отъ котораго зависитъ подъинтегральная функція, и который при интегрированіи разсматривается, какъ постоянная. Разсмотримъ функцію

$$\varphi(x) = \int_a^b f(x, y)\, dy, \quad (a < b)$$

и положимъ сперва, что a и b отъ x независятъ. [Докажемъ слѣдующую теорему: Если функція $f(x, y)$ непрерывна относительно x и y для всѣхъ значеній x и y, удовлетворяющихъ неравенствамъ $a \leqq y \leqq b$, $c \leqq x \leqq \partial$, то функція $\varphi(x)$ будетъ непрерывна въ интервалѣ (c, ∂). Возьмемъ произвольное значеніе $x = \alpha$ въ интервалѣ (c, ∂) и покажемъ, что $\varphi(x)$ непрерывна для этого значенія. Мы имѣемъ

(A) $$|\varphi(x) - \varphi(\alpha)| \leqq \int_a^b |f(x, y) - f(\alpha, y)|\, dy,$$

(см. § 715, a). Вслѣдствіе непрерывности функціи $f(x, y)$, каждому данному положительному числу ε соотвѣтствуетъ такое число δ, что

$$|f(x, y) - f(\alpha, y)| < \varepsilon,$$

если $|x - \alpha| < \delta$, а потому изъ предыдущаго неравенства получаемъ $|\varphi(x) - \varphi(\alpha)| < (b-a)\varepsilon$, а положивъ $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon'}{b-a}$, гдѣ ε' сколь угодно малое положительное число, мы находимъ, что при $|x - \alpha| < \delta$, $|\varphi(x) - \varphi(\alpha)| < \varepsilon'$, что и доказываетъ непрерывность $\varphi(x)$ при $x = \alpha$, а слѣдовательно, и во всемъ интервалѣ (c, ∂), потому что значеніе $x = \alpha$ выбрано было по произволу.

Полученный результатъ можно обобщить на тотъ случай, когда $f(x, y)$, оставаясь лишь конечною имѣетъ конечное число разрывовъ для нѣкоторыхъ или даже для всѣхъ значеній x въ интервалѣ (c, ∂) и различныхъ y въ интервалѣ (a, b).] *).

Перейдемъ теперь въ разысканію производной отъ $\varphi(x)$. Мы имѣемъ

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} = \int_a^b \frac{f(x+h, y)-f(x, y)}{h} dx$$

$$= \int_a^b f'_x(x+\theta h, y)\, dy, \text{ гдѣ } 0 < \theta < 1.$$

Положимъ, что каждому, сколь угодно малому, положительному числу ε, соотвѣтствуетъ такое положительное числи δ, что, при $|h| < \delta$, всегда будемъ имѣть при $|h| < \delta$,

$$|f'_x(x+h, y) - f'_x(x, y)| < \varepsilon,$$

каково бы ни было значеніе y въ интервалѣ (a, b). Тогда ясно, что будемъ имѣть

$$\left|\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} - \int_a^b f'_x(x, y)\, dy\right|$$

$$= \left|\int_a^b [f'_x(x+\theta h, y) - f'_x(x, y)]\, dy\right| < (b-a)\,\varepsilon,$$

а отсюда

$$\varphi'(x) = \lim_{h=0} \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} = \int_a^b f'_x(x, y)\, dy \text{ **)}.$$

Полезно замѣтить, что поставленное выше условіе относительно f'_x всегда выполняется, если производная f''_{xx} отъ f'_x существуетъ и конечна. Дѣйствительно, если $|f''_{xx}|$ будетъ при $c \leq x \leq \partial$, $a \leq y \leq b$ всегда меньше нѣкотораго даннаго числа l, то достаточно взять $|h| < \frac{\varepsilon}{l}$, чтобы имѣть

$$|f'_x(x+h, y) - f'_x(x, y)| < \frac{\varepsilon}{l}\, |f''_{xx}(x+\theta h, y)| < \varepsilon \text{ ***)}.$$

---

*) См. Poussin, de la Vallée, Cours d'Analyse infinitésimale, т. II, 2-е изд. 1912, стр. 4.

**) Формула эта выражаетъ такъ называемое правило Лейбница.

***) Очевидно, также, что для выполненія упомянутаго условія достаточно, чтобы $f'_x(x, y)$ была непрерывною въ данной области, какъ функція отъ двухъ перемѣнныхъ.

Итакъ, производная интеграла, взятая по параметру, при предѣлахъ, отъ него независящихъ, равна интегралу отъ производной подъинтегральной функціи, взятой по этому параметру. На этомъ основаніи формула

$$\varphi'(x) = \int_a^b f'_x(x, y)\, dy$$

называется также формулою дифференцированія подъ знакомъ интеграла *). Если a и b не постоянныя, а функціи отъ x, то производную $\varphi'(x)$ получимъ, разсматривая $\varphi(x)$, какъ сложную функцію (§ 369), и припоминая, что производная интеграла по одному изъ его предѣловъ равна значенію подъинтегральной функціи (§ 713) на этомъ предѣлѣ, взятому со знакомъ $+$ или $-$ (§ 711, a), смотря по тому, будетъ ли эта производная по верхнему или по нижнему предѣлу **). Примѣняя сказанное, получимъ

$$\varphi'(x) = f(x, b)\, b' - f(x, a)\, a' + \int_a^b f'_x(x, y)\, dy.$$

734. Возвратимся теперь къ интегрированію интеграла и будемъ опять считать a и b постоянными. Предложимъ себѣ интегрировать интегралъ $\varphi(x) = \int_a^b f(x, y)\, dy$ въ предѣлахъ отъ α до β. Если положимъ

$$\psi(x, y) = \int_\alpha^x f(x, y)\, dx, \qquad F(x) = \int_a^b \psi(x, y)\, dy,$$

то, очевидно, будемъ имѣть

$$F'(x) = \int_a^b \psi'_x(x, y)\, dy = \int_a^b f(x, y)\, dy = \varphi(x),$$

а слѣдовательно,

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x)\, dx = F(\beta) - F(\alpha) = \int_a^b \psi(\beta, y)\, dy = \int_a^b dy \int_\alpha^\beta f(x, y)\, dx.$$

---

*) Правило это выведено только для случая конечныхъ предѣловъ интеграловъ. Дальше встрѣчаются, однако, приложенія его въ случаѣ безконечныхъ предѣловъ. Объ условіяхъ, когда такое распространеніе законно, можно прочесть, напр., у Гурса „Курсъ математическаго Анализа" (т. I, стр. 395).

**) Примѣняя это правило § 713, мы должны предположить непрерывность подъинтегральной функціи по y, по крайней мѣрѣ, при $y = a$ и $y = b$.

Итакъ, чтобы интегрировать интегралъ по параметру (т. е. по перемѣнной, независящей отъ перемѣнной интегрированія въ данномъ интегралѣ), достаточно интегрировать по этому параметру подъинтегральную функцію. Иными словами, подставляя вмѣсто $\varphi(x)$ ея выраженіе, получимъ

$$\int_a^\beta dx \int_a^b f(x, y)\,dy = \int_a^b dy \int_a^\beta f(x, y)\,dx.$$

[**Примѣчаніе.** Эта формула показываетъ, что значеніе двойного интеграла, когда предѣлы интегрированія по обѣимъ перемѣннымъ постоянны, не зависитъ отъ порядка интегрированій. Формула эта выведена при помощи формулы дифференцированія и можетъ считаться доказанною только въ случаѣ конечныхъ предѣловъ и непрерывности подъинтегральной функціи. Дѣйствительно, въ этомъ предположеніи, $f(x, y)$ будетъ интегрируема и по x, и по y. Далѣе (см. § 733), функціи $\varphi(x)$ и $\psi(x, y)$ будутъ непрерывны (а слѣдовательно, и интегрируемы), первая по x, вторая по y. Кромѣ того, изъ непрерывности $f(x, y)$) по x вытекаетъ (§ 713), что $\psi'_x(x, y) = f(x, y)$, а непрерывность $f(x, y)$ по обѣимъ перемѣннымъ даетъ право (см. примѣчаніе ***) на стр. 298) примѣнить къ интегралу $\int_a^b \psi(x, y)\,dy$ правило, изложенное въ § 733. О распространеніи формулы на безконечные предѣлы см. Гурса́, I, с.]

Случай, когда предѣлы a и b не постоянныя числа, а функціи отъ x, можетъ быть сведенъ къ случаю постоянныхъ предѣловъ помощью введенія новой перемѣнной. Достаточно, при интегрированіи по y, положить $y = a + (b - a)t$; тогда t будетъ измѣняться отъ 0 до 1, при измѣненіи y отъ a до b.

735. Новое опредѣленіе двойного интеграла. Приведенное выше опредѣленіе двойного интеграла страдаетъ тѣми же недостатками, какъ данное въ началѣ этой книгѣ опредѣленіе простого интеграла. Поэтому нужно его видоизмѣнить такъ, чтобы оно давало возможность установить условія существованія интеграла и, кромѣ того, указывало путь для вычисленія его значенія (не предполагая извѣстными, ни даже существующими первообразныя функціи φ и ψ, о которыхъ говорилось въ § 732). Мы предположимъ, что область интегрированія конечна, т. е. что можно указать два конечныхъ интервала (α, β) и (γ, δ), въ которыхъ должны заключаться соотвѣтственно значенія перемѣнныхъ x и y, удовлетворяющихъ неравенству $L(x, y) \leqq 0$, опредѣляющему область интегрированія. Функцію $f(x, y)$ мы предположимъ конечною въ области интегрированія и условимся, что $f(x, y)$ равно нулю для всѣхъ значеній x и y, лежащихъ внѣ области интегрированія.

[**Примѣчаніе.** Подъ α и β понимаются наименьшее и наибольшее значеніе x въ области интегрированія, подъ γ и δ — наименьшее и наибольшее значеніе y въ той же области. Пользуясь геометрической интерпретаціей, можемъ сказать, что та часть плоскости, которая изображаетъ область интегрированія, лежитъ вся внутри прямоугольника, ограниченнаго прямыми $x = \alpha$, $x = \beta$, $y = \gamma$, $y = \delta$.]

Разложимъ интервалъ (α, β) на частные интервалы $h_1, h_2, \ldots, h_n$, а (γ, δ) на интервалы $k_1, k_2, \ldots, k_m$. Положимъ, что какъ тѣ, такъ и другіе, стремятся къ нулю (при чемъ, конечно, числа m и n должны безпредѣльно возрастать), не будучи связаны никакою зависимостью. Когда x и y измѣняются соотвѣтственно въ интервалахъ h_i и k_j, независимо одно отъ другого, значенія функціи $f(x, y)$ остаются между нѣкоторою нижнею и нѣкоторою верхнею границами; выберемъ по произволу число f_{ij}, содержащееся между этими границами, и разсмотримъ двойную сумму

$$\sum_{ij} h_i k_j f_{ij} = h_1 k_1 f_{11} + h_1 k_2 f_{12} + h_2 k_1 f_{21} + \cdots + h_n k_m f_{nm}.$$

Если эта сумма всегда стремится къ одному и тому же предѣлу, когда всѣ h_i и всѣ k_j стремятся къ 0, при чемъ m и n безпредѣльно возрастаютъ, независимо отъ закона разложенія интерваловъ (α, β) и (γ, δ) на части, и независимо отъ выбора чиселъ f_{ij} въ соотвѣтствующихъ границахъ, то этотъ предѣлъ и называется **опредѣленнымъ двойнымъ интеграломъ** отъ $f(x, y)$ въ данной области, и обозначается знакомъ

$$\int\int f(x, y)\, dx\, dy.$$

Выраженіе $f(x, y)\, dx\, dy$ называется элементомъ интеграла, а интегралъ есть сумма безконечно большого числа безконечно малыхъ элементовъ. Это опредѣленіе вполнѣ аналогично опредѣленію простого интеграла, данному въ § 710. Положивъ его въ основаніе, можно изъ него вывести слѣдствія, аналогичныя тѣмъ, которыя были выведены изъ опредѣленія простого интеграла, и въ частности изъ него можно вывести необходимое и достаточное условіе существованія интеграла или, иначе говоря, условіе интегрируемости функціи $f(x, y)$ въ данной области (вполнѣ аналогичное условію интегрируемости функціи отъ одной перемѣнной въ данной области). Здѣсь мы ограничимся формулировкою опредѣленія и для всего прочаго отсылаемъ читателя къ подробнымъ курсамъ интегральнаго исчисленія *).

---

*) См., напримѣръ, Гурса. „Курсъ математическаго анализа". Вопросъ объ интегрируемости функцій отъ одной или отъ двухъ независимыхъ перемѣнныхъ трактуется у Гурса и въ большинствѣ французскихъ руководствъ съ нѣсколько иной точки зрѣнія, съ которою полезно ознакомиться.

736. Намъ остается только показать, что если интегралъ (по новому опредѣленію) существуетъ, то значеніе его получается изложеннымъ въ § 731 способомъ, т. е. получается при помощи двухъ простыхъ интегрированій. Предположимъ, какъ и въ § 731, что область интегрированія, опредѣляемая неравенствомъ $L(x, y) \leqq 0$, совпадаетъ съ областью, опредѣляемою неравенствами

$$a(x) \leqq y \leqq b(x), \quad \alpha \leqq x \leqq \beta.$$

Если интегралъ, какъ предѣлъ суммы, существуетъ, то мы можемъ распоряжаться послѣдовательностями разложеній по произволу, напримѣръ, сперва взять опредѣленное разложеніе интервала (α, β) на частные интервалы $(h_1, h_2, \ldots, h_n)$, т. е. считать всѣ h_i и число n постояннымъ, и измѣнять разложеніе интервала (γ, δ) на частные, безпредѣльно убывающіе интервалы $(k_1, k_2, \ldots, k_m)$, при чемъ m будетъ безпредѣльно возрастать; число f_{ij} между нижнею и верхнею границами значеній, которыя принимаетъ $f(x, y)$, когда x остается неподвижнымъ въ начальной точкѣ элемента h_i, а y измѣняется въ интервалѣ k_j, можемъ выбирать также по произволу. Тогда вышенаписанная двойная сумма разложится на n простыхъ суммъ, изъ которыхъ одна, соотвѣтствующая данному i, будетъ

$$\text{(A)} \qquad h_i \left\{ k_1 f_{i1} + k_2 f_{i2} + \cdots + k_m f_{im} \right\}.$$

Прилично выбирая числа f_{ij}, мы можемъ сказать, что эта сумма равна

$$h_i \int_\gamma^\delta f(x, y)\, dy.$$

Дѣйствительно, разлагая интервалъ (γ, δ) на интервалы $k_1, k_2, \ldots, k_m$ мы можемъ представить интегралъ въ видѣ

$$\int_\gamma^\delta f(x, y)\, dy = \sum_{j=1}^{j=m} \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x, y)\, dy$$
$$= \sum_{(j)} k_j f_j, \quad (y_j - y_{j-1} = k_j),$$

гдѣ f_j есть нѣкоторое опредѣленное число, лежащее между границами функціи f въ интервалѣ k_j. Взявъ въ суммѣ (A) числа f_{ij} равными этимъ f_j, что мы въ правѣ сдѣлать, мы убѣдимся въ справедливости сказаннаго. Далѣе, такъ какъ, по условію, $f(x, y)$ равна нулю внѣ области интегрированія, то можемъ написать, что

$$\int_\gamma^\delta f(x, y)\, dy = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, y)\, dy.$$

потому что интервалы $(\gamma, a(x))$ и $(b(x), \delta)$ лежатъ внѣ области интегрированія. Полагая

$$F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, y)\, dy$$

и обозначая черезъ F_i значеніе $F(x)$ для x, лежащаго въ началѣ интервала h_i, находимъ, что наша двойная сумма равна

$$h_1 F_1 + h_2 F_2 + \cdots + h_n F_n;$$

а предѣлъ ея, когда всѣ h_i стремятся къ 0, а n возрастаетъ безпредѣльно, равенъ

$$\int_{a}^{\beta} F(x)\, dx = \int_{a}^{\beta} dx \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, y)\, dy,$$

т. е. выраженію (22) въ § 731.

[**Примѣчаніе.** Если та же самая область интегрированія $L(x, y) \leqq 0$ можетъ быть изображена неравенствами

$$c(y) \leqq x \leqq d(y), \quad \gamma \leqq y \leqq \delta,$$

то совершенно такъ же убѣдимся, измѣнивъ порядокъ суммированія, что двойной интегралъ, т. е. предѣлъ двойной суммы, распространенный на область $L(x, y) \leqq 0$, будетъ равенъ

(22 bis)
$$\int_{\gamma}^{\delta} dy \int_{c(y)}^{d(y)} f(x, y)\, dx.$$

Отсюда и видно, что

$$\int_{a}^{\beta} dx \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, y)\, dy = \int_{\gamma}^{\delta} dy \int_{c(y)}^{d(y)} f(x, y)\, dx,$$

если неравенства

$$\left\{ \begin{array}{c} a(x) \leqq y \leqq b(x) \\ a \leqq x \leqq \beta \end{array} \right\} \text{ и } \left\{ \begin{array}{c} c(y) \leqq x \leqq d(y) \\ \gamma \leqq y \leqq \delta \end{array} \right\}$$

опредѣляютъ одну и ту же область интегрированія $L(x, y) \leqq 0$, потому что эти интегралы равны одному и тому же опредѣленному числу, а именно двойному интегралу

$$\iint f(x, y)\, dx\, dy,$$

распространенному на эту область. Если область интегрированія опредѣлена неравенствами

$$a \leqq x \leqq \beta, \quad \gamma \leqq y \leqq \delta,$$

гдѣ α, β, γ, δ числа постоянныя (т. е. изображается прямоугольникомъ съ вершинами (α, γ), (α, δ), (β, γ) и (β, δ)), то найдемъ, что $\int\int f(x, y)\,dx\,dy$, распространенный на эту область, можетъ быть представленъ въ слѣдующихъ двухъ видахъ

$$\int\int f(x, y)\,dx\,dy = \int_\alpha^\beta dx \int_\gamma^\delta f(x, y)\,dy = \int_\gamma^\delta dy \int_\alpha^\beta f(x, y)\,dx,$$

такъ что снова получается формула § 734, выражающая теорему объ измѣненіи порядка интегрированій. Необходимо только замѣтить, что выводъ ея, сдѣланный здѣсь, нельзя считать строгимъ, потому что онъ основанъ на предположеніи о существованіи двойного интеграла

$$\int\int f(x, y)\,dx\,dy,$$

а условія этого существованія не были разсмотрѣны. На основаніи § 734, мы въ правѣ лишь утверждать, что теорема эта вѣрна, когда $f(x, y)$ непрерывна].

Перемѣна порядка интегрированій, какъ мы увидимъ дальше, есть весьма цѣнное средство для разныхъ изслѣдованій. Не нужно только забывать, что примѣненіе его можетъ иногда вести къ невѣрнымъ результатамъ, вслѣдствіе несоблюденія функціею $f(x, y)$ ограничивающихъ ее условій, напримѣръ, когда эта функція разрывна въ области интегрированія, или когда эта область безконечна.

736а. Подъ двойнымъ интеграломъ, распространеннымъ на безконечную область, напримѣръ, на всю полу-плоскость, лежащую со стороны положительныхъ ординатъ, опредѣляемую неравенствомъ $0 \leqq y < +\infty$, $-\infty < x < +\infty$, понимаютъ предѣлъ, къ которому стремится интегралъ, распространенный на конечную область, когда ея граница удаляется въ безконечность, если такой предѣлъ существуетъ. Напримѣръ, для вышеупомянутой области вычисляютъ интегралъ, распространенный на площадь прямоугольника, ограниченнаго прямыми $y = 0$, $y = \delta$, $x = -a$, $x = a$ и затѣмъ ищутъ его предѣлъ при возрастаніи δ и a до ∞. Разсматривая функцію отъ трехъ независимыхъ перемѣнныхъ $f(x, y, z)$, можно установить понятіе о тройномъ опредѣленномъ интегралѣ, аналогичномъ понятію о двойномъ, а затѣмъ и о n — кратномъ интегралѣ функціи отъ n перемѣнныхъ независимыхъ. Отсылая читателя для подробностей къ подробнымъ курсамъ интегральнаго исчисленія, цитированнымъ выше, мы ограничимся здѣсь нѣсколькими замѣчаніями о тройныхъ интегралахъ. Для наглядности мы воспользуемся геометрическими соображеніями, разсматривая x, y, z, какъ прямоугольныя координаты точки въ пространствѣ. Мы предположимъ, что точка (x, y, z) должна всегда оставаться внутри или на границѣ нѣкотораго объема, который весь заключается внутри параллелепипеда, ограниченнаго тремя парами плоскостей, соотвѣтственно параллельныхъ координатнымъ плоскостямъ

(1) $x = x_0, \; x = X > x_0; \quad y = y_0, \; y = Y > y_0; \quad z = z_0, \; z = Z > z_0.$

Представимъ себѣ затѣмъ, что мы разбили этотъ параллелепипедъ на элементарные параллелепипеды тремя системами плоскостей, соотвѣтственно параллельныхъ координатнымъ плоскостямъ. Мы предположимъ затѣмъ, что разстоянія между каждыми двумя смежными плоскостями каждой изъ трехъ системъ стремятся къ нулю, такъ что всѣ три ребра каждаго элементарнаго параллелепипеда стремятся къ нулю. Обозначая черезъ h_i, k_j, l_g ребра одного изъ элементарныхъ параллелепипедовъ, а черезъ f_{ijg} произвольно выбранное число, лежащее между границами значеній функціи f, соотвѣтствующими точкамъ внутри или на границахъ того же параллелепипеда, разсмотримъ тройную сумму

(2) $$\sum_{(i,j,g)} f_{ijg} h_i k_j l_g,$$

распространенную на всѣ комбинаціи значковъ i, j, g, соотвѣтствующія всѣмъ элементарнымъ параллелепипедамъ, на которые разложенъ данный параллелепипедъ, ограниченный плоскостями (1). Условимся, наконецъ, считать функцію $f(x, y, z)$ равною нулю во всѣхъ точкахъ внѣ данной области. Предѣлъ, къ которому стремится сумма (2), когда всѣ h_i, k_j, l_g стремятся къ нулю, при чемъ число ихъ, конечно, возрастаетъ безпредѣльно (если такой предѣлъ существуетъ)—называется тройнымъ интеграломъ отъ $f(x, y, z)$, распространеннымъ по данному объему или по данной области, и обозначается знакомъ

$$\int\int\int f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Символы dx, dy, dz обозначаютъ длины реберъ элементарныхъ параллелепипедовъ, и, какъ таковыя, всегда будутъ безконечно малыми положительными числами. Затѣмъ легко показать (аналогично тому, что было показано для двойного интеграла), что вычисленіе тройного интеграла приводится къ тремъ простымъ интегрированіямъ. Какова бы ни была область интегрированія, мы можемъ ее разбить на нѣсколько частей, ограниченныхъ слѣдующимъ образомъ: двумя плоскостями, параллельными плоскости zy, $x = x_0$, $x = X > x_0$; двумя цилиндрическими поверхностями, съ образующими, параллельными оси z-овъ, $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x) > \varphi(x)$; и двумя поверхностями $z = F(x, y)$ и $z = \Phi(x, y) > F(x, y)$. При этомъ послѣднія двѣ поверхности таковы, что прямыя, параллельныя оси z-овъ, встрѣчаютъ каждую изъ нихъ только въ одной точкѣ, а кривыя $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$ въ плоскости xy таковы, что каждая изъ нихъ встрѣчается съ прямою, параллельною оси y-овъ, только въ одной точкѣ.

Тогда легко показать, что тройной интегралъ, распространенный на объемъ, ограниченный такимъ образомъ, вычислится по формулѣ

$$\int\int\int f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_{x_0}^{X} dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \int_{F(x,y)}^{\Phi(x,y)} f(x, y, z)\, dz,$$

гдѣ послѣдовательныя интегрированія надо вести по порядку отъ правой руки къ лѣвой.

737. Введеніе новыхъ перемѣнныхъ. Положимъ, что въ интегралѣ $\int\int f(x, y)\, dx\, dy$ дѣлается подстановка $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, гдѣ u и v новыя (независимыя) перемѣнныя интегрированія. Независимость функцій x и y требуетъ (§ 579), чтобы опредѣлитель

$$\mathfrak{D} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

не былъ равенъ нулю. Предполагая это условіе выполненнымъ, положимъ, что $g(u, v)$ есть та функція отъ u и v, которая получится, когда въ $f(x, y)$ замѣнимъ x и y ихъ выраженіями въ новыхъ перемѣнныхъ, и напишемъ данный интегралъ въ видѣ $\int dy \int f(x, y)\, dx$. Кромѣ того, чтобы имѣть дѣло съ опредѣленнымъ случаемъ, предположимъ, что при отдѣльныхъ интегрированіяхъ соотвѣтствующая перемѣнная постоянно возрастаетъ, такъ что дифференціалы перемѣнныхъ всегда разсматриваются, какъ положительныя числа. Сначала перейдемъ отъ перемѣнныхъ x и y къ перемѣннымъ u и y; при этомъ мы подъ v разумѣемъ ту функцію отъ y и u, которая, при условіи (§ 572) $\frac{\partial y}{\partial v} \gtrless 0$, опредѣляется изъ уравненія $y = \psi(u, v)$. При интегрированіи по x, y должно оставаться постояннымъ, т. е. должно быть

$$\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv = 0,$$

а слѣдовательно,

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv = \left(\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\frac{\partial y}{\partial u}}{\frac{\partial y}{\partial v}} \right) du = \frac{\mathfrak{D}}{\frac{\partial y}{\partial v}} du.$$

Поэтому интегралъ обращается въ

$$\int dy \int g(u, v) \left| \frac{\mathfrak{D}}{\frac{\partial y}{\partial v}} \right| du = \int du \int g(u, v) \left| \frac{\mathfrak{D}}{\frac{\partial y}{\partial v}} \right| dy.$$

(при чемъ, если понадобится, предѣлы интегрированія по u переставимъ *)). Теперь перейдемъ отъ перемѣнныхъ u и y къ перемѣннымъ u и v. При интегрированіи по y, u должно оставаться постояннымъ, поэтому

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u}\, du + \frac{\partial y}{\partial v}\, dv - \frac{\partial y}{\partial v}\, dv.$$

Послѣдній интегралъ обращается въ $\int du \int g(u, v) \,|\, \mathfrak{D} \,|\, dv$ (при чемъ опять, если понадобится, переставимъ предѣлы интегрированія по v). Итакъ, будемъ имѣть

$$\int\int f(x, y)\, dx\, dy = \int\int g(u, v) \,|\, \mathfrak{D} \,|\, du\, dv. \tag{23}$$

Общнѣе можно доказать, что

$$\int \cdots \int f(x, y, z, \ldots)\, dx\, dy\, dz \cdots = \int \cdots \int g(u, v, w, \ldots) \left| \frac{\partial (x, y, z, \ldots)}{\partial (u, v, w, \ldots)} \right| du\, dv\, dw \ldots$$

738. Если будемъ разсматривать x и y, какъ Декартовы координаты точки на плоскости, то переходъ къ новымъ перемѣннымъ можно геометрически интерпретировать, какъ переходъ къ криволинейнымъ координатамъ (§ 413), при чемъ область интегрированія инымъ манеромъ разбивается на безконечно малые элементы кривыми u и кривыми v. Въ самомъ дѣлѣ, формула (23) показываетъ, что вмѣсто того, чтобы разбивать область интегрированія на прямоугольники $dx\,dy$, какъ того требуетъ опредѣленіе, можно ту же область разбить вышеупомянутыми кривыми на другіе элементы. Каждый изъ этихъ элементовъ (если пренебрежемъ безконечно малыми высшаго порядка) можно разсматривать, какъ параллелограммъ со сторонами $d\sigma$ и $d\tau$, составляющими между собою уголъ ω, синусъ котораго, по извѣстной формулѣ (§ 571, d), равенъ частному отъ дѣленія $\mathfrak{D}$ на $\frac{d\sigma}{du} \cdot \frac{d\tau}{dv}$; площадь такого параллелограмма равна, слѣдовательно, абсолютной величинѣ выраженія $\sin\omega \cdot d\sigma\, d\tau = \mathfrak{D}\, du\, dv$. Итакъ, формула (23) выражаетъ интегралъ, какъ сумму безконечно большого числа безконечно малыхъ элементовъ, равныхъ произведеніямъ площади каждаго параллелограмма на число g, среднее между значеніями интегрируемой функціи для различныхъ точекъ этого параллелограмма. Такимъ образомъ получается обобщеніе опредѣленія, даннаго въ § 735.

---

*) Съ тою цѣлью, чтобы du было больше 0.

739. Примѣры. a) Геометрическое изображеніе области интегрированія значительно облегчаетъ разысканіе предѣловъ, въ которыхъ надо производить отдѣльныя простыя интегрированія, какъ при перемѣнѣ порядка интегрированія, такъ и при введеніи новыхъ перемѣнныхъ. Такъ, въ примѣрѣ § 732 все становится очевиднымъ, если замѣтимъ, что область интегрированія есть кругъ радіуса, равнаго единицѣ, касающійся оси Oy въ началѣ координатъ. Для другого примѣра положимъ, что надо вычислить интегралъ отъ $f\,dx\,dy$, распространенный на площадь треугольника, ограниченнаго прямыми $x=1$, $y=\alpha x$, $y=\beta x$. Тотчасъ же видимъ, что

$$\int_0^1 dx \int_{\alpha x}^{\beta x} f(x, y)\,dy = \int_0^{\alpha} dy \int_{\frac{y}{\beta}}^{\frac{y}{\alpha}} f(x, y)\,dx + \int_{\alpha}^{\beta} dy \int_{\frac{y}{\beta}}^{1} f(x, y)\,dx.$$

Точно такъ же имѣемъ

$$\int_0^{\infty} dx \int_0^{x} f(x, y)\,dy = \int_0^{\infty} dy \int_y^{\infty} f(x, y)\,dx.$$

b) Геометрическая интерпретація формулы (23) во многихъ случаяхъ избавляетъ отъ необходимости вычислять опредѣлитель $\mathfrak{D}$. Напримѣръ, при переходѣ отъ Декартовыхъ координатъ на плоскости къ полярнымъ, имѣемъ $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, и

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

Поэтому

$$\int\int f(x, y)\,dx\,dy = \int\int f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta. \tag{24}$$

Къ тому же результату приходимъ геометрически, замѣчая, что линіи r и линіи θ дѣлятъ плоскость на безконечно малые элементы, которые можно разсматривать какъ прямоугольники; стороны этихъ прямоугольниковъ будутъ: отрѣзокъ dr, отсѣкаемый кругами радіусовъ r и $r+dr$ на всякой прямой, проходящей черезъ начало координатъ, и дуга $r\,d\theta$, отсѣкаемая прямыми, образующими углы θ и $\theta+d\theta$ съ полярною осью, на окружности круга радіуса r. Площадь этого прямоугольника равна, слѣдовательно, $r\,d\theta\cdot dr$.

c) Подобно этому, въ пространствѣ, обозначая черезъ φ долготу, а черезъ ψ широту, будемъ имѣть

$$x=r\cos\varphi\cos\psi,\quad y=r\sin\varphi\cos\psi,\quad z=r\sin\psi,$$

а отсюда

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \psi)} = r^2 \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\psi & \sin\varphi\cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\varphi\cos\psi & \cos\varphi\cos\psi & 0 \\ -\cos\varphi\sin\psi & -\sin\varphi\sin\psi & \cos\psi \end{vmatrix} = r^2\cos\psi.$$

Слѣдовательно,

$$\int\int\int f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\int\int f(r\cos\varphi\cos\psi, r\sin\varphi\cos\psi, r\sin\psi)\,r^2\,|\cos\psi|\,dr\,d\varphi\,d\psi.$$

Къ тому же результату приходимъ съ помощью слѣдующаго замѣчанія: Если одно r измѣнится безконечно мало, то точка $M(x, y, z)$ опишетъ прямолинейный элементъ $MM' = dr$; если одно φ возрастетъ безконечно мало, то точка M опишетъ элементарную дугу круга $MM'' = r \mid \cos\psi \mid d\varphi$, въ плоскости, перпендикулярной къ Oz; наконецъ, если одно ψ возрастаетъ на $d\psi$, то точка M опишетъ дугу круга $MM''' = r\,d\psi$, въ плоскости, опредѣляемой угломъ φ. Эти три элемента можно разсматривать, какъ ребра прямоугольнаго параллелепипеда $MM'M''M'''$, эквивалентнаго тому тѣлу, которое ограничено поверхностями шаровъ съ радіусами r и $r + dr$, плоскостями φ и $\varphi + d\varphi$ и конусами ψ и $\psi + d\psi$. Объемъ этого тѣла, если пренебрежемъ безконечно малыми высшаго порядка, будетъ, слѣдовательно, равенъ $r \mid \cos\psi \mid d\varphi \cdot r\,d\psi \cdot dr$.

740. Упражненія. a) Чтобы видѣть, какимъ образомъ перемѣна порядка интегрированій можетъ вліять на результатъ, вычислимъ слѣдующіе интегралы

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^2} = \frac{1}{2}, \quad \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx = -\int_0^1 \frac{dy}{(1+y)^2} = -\frac{1}{2};$$

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}, \quad \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx = -\int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = -\frac{\pi}{4}.$$

Замѣтимъ, что въ обоихъ случаяхъ подъинтегральная функція обращается въ безконечность въ точкѣ $(0, 0)$. Несмотря на это, неопредѣленные интегралы существуютъ, а именно

$$\frac{1}{2}\,\frac{x-y}{x+y} + \varphi(x) + \psi(y), \qquad \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y} + \varphi(x) + \psi(y),$$

но въ точкѣ $(0, 0)$ они разрывны, потому что въ смежности съ нею могутъ принимать любое значеніе.

b) Если оказывается удобнымъ при вычисленіи интеграла ввести вмѣсто y, напримѣръ, новую перемѣнную $z = xy$, то для примѣненія формулы (23) надо замѣтить, что

$$\frac{\partial(x, z)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial z}{\partial y} = x, \qquad \mathfrak{D} = \frac{1}{x}.$$

Напримѣръ,

$$\int_0^1\int_0^1 (xy)^{xy}\,dx\,dy = \int_0^1 z^z\,dz \int_z^1 \frac{dx}{x} = -\int_0^1 z^z \log z\,dz = \int_0^1 z^z dz = 0{,}783\ldots$$

Это преобразованіе сводится къ тому, чтобы разбить плоскость равносторонними гиперболами, $xy = \text{const.}$, на полосы безконечно малой ширины.

c) Можетъ случиться, что кривыя u и кривыя v составятъ одно семейство кривыхъ. Положимъ, напримѣръ, что разсматривается часть плоскости, лежащая между осью Ox и равнодѣлящею угла yOx. Для изображенія точекъ этой области можно приравнять x и y ариѳметическому и геометрическому среднему новыхъ перемѣнныхъ u и v, т. е. положить $x = \frac{1}{2}(u+v)$, $y = \sqrt{uv}$. Тогда будемъ имѣть

$$\mathfrak{D} = \frac{u-v}{4\sqrt{uv}}.$$

Чтобы одна изъ новыхъ перемѣнныхъ оставалась равною нѣкоторому постоянному a, между x и y необходимо должно существовать нѣкоторое соотношеніе, которое и получимъ, исключая другую перемѣнную изъ выраженій x и y черезъ u и v. Это соотношеніе будетъ, слѣдовательно: $y^2 = 2ax - a^2$. Оно и изображаетъ единственное семейство кривыхъ u и кривыхъ v, и состоитъ, какъ мы видимъ, изъ всѣхъ параболъ, имѣющихъ осью Ox, а директрисою Oy. Значенія u и v въ каждой точкѣ даются формулою $x \pm \sqrt{x^2-y^2}$. Если условимся положить $u = x + \sqrt{x^2-y^2}$, а слѣдовательно, $v = x - \sqrt{x^2-y^2}$, то на параболѣ съ параметромъ a будемъ имѣть

$$u = x + |x-a|, \qquad v = x - |x-a|,$$

откуда $u = a$ при $x \leqq a$ и $v = a$ при $x \geqq a$. Поэтому, если раздѣлимъ въ данномъ углѣ между Ox и прямою $y = x$ параболу на конечную дугу между вершиною и точкою касанія съ прямою $y = x$, и на другую безконечную, отъ послѣдней точки до безконечности, то на первой дугѣ u равно постоянному, а $v = 2x - a$ измѣняется отъ 0 до a; на второй v остается постояннымъ, а $u = 2x - a$ измѣняетя отъ a до ∞. Если положимъ, напримѣръ, что область интегрированія ограничена осью Ox и параболами съ параметрами a и b, то интегралъ отъ $\int dx\,dy$ можетъ быть представленъ одною изъ слѣдующихъ двухъ формулъ

$$\int_0^{\sqrt{ab}} dy \int_{\frac{y^2+a^2}{2a}}^{\frac{y^2+b^2}{2b}} f(x,y)\,dx = \int_{\frac{1}{2}a}^{\frac{1}{2}b} dx \int_0^{\sqrt{2ax-a^2}} f(x,y)\,dx + \int_{\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}(a+b)} dx \int_{\sqrt{2bx-b^2}}^{\sqrt{2ax-a^2}} f(x,y)\,dy$$

Если же примемъ u и v за перемѣнныя интегрированія, то онъ представится проще, а именно такъ:

$$\int_a^b \int_0^a f\left(\tfrac{1}{2}(u+v),\ \sqrt{uv}\right)(u-v)\,d\sqrt{u}\,d\sqrt{v}.$$

d) При помощи весьма обыкновеннаго пріема, не вполнѣ строгаго, но который можно сдѣлать строгимъ [1]), можно вычислить интегралъ Дирихле (§ 729, g), замѣчая, что при $x > 0$

$$\frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-xy}\,dy,$$

---

[1]) См., напримѣръ, „Calculo integral" Gomez-Teixeira (1-я часть, стр. 94) или „Traité d'Analyse" E. Picard (т. I, стр. 34).

а слѣдовательно,

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-xy}\sin x\,dx\,dy = \int_0^\infty dy\int_0^\infty e^{-xy}\sin x\,dx.$$

Такъ какъ при $y > 0$

$$(e^{-xy}\cos x)_0^\infty = -1, \qquad (e^{-xy}\sin x)_0^\infty = 0,$$

то интегрированіе по частямъ даетъ

$$\int_0^\infty e^{-xy}\sin x\,dx = 1 - y\int_0^\infty e^{-xy}\cos x\,dx = 1 - y^2\int_0^\infty e^{-xy}\sin x\,dx,$$

откуда

$$(1+y^2)\int_0^\infty e^{-xy}\sin x\,dx = 1.$$

Поэтому

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2} = (\operatorname{arc\,tg} y)_0^\infty = \frac{\pi}{2}.$$

e) Подобнымъ же образомъ для вычисленія интеграла

$$\mathfrak{J} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \log\sin x\,dx$$

можно написать

$$\mathfrak{J} = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx\int_x^{\frac{\pi}{2}} \cot y\,dy = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cot y\,dy\int_0^y \sin x\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg}\frac{y}{2} - \sin y\right)dy = \left(\cos y - \log\cos^2\frac{y}{2}\right)_0^{\frac{\pi}{2}} = -1 + \log 2.$$

Впрочемъ, предложенный интегралъ легко вычислить и въ неопредѣленномъ видѣ съ помощью интегрированія по частямъ

$$\int \sin x \cdot \log\sin x\,dx = -\cos x\log\sin x + \log\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \cos x + C.$$

Отсюда слѣдуетъ (§ 312, b)

$$\mathfrak{J} = -1 + \lim_{x=0}\left(\cos x\cdot\log\sin x - \log\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) = -1 + \log 2.$$

f) Чтобы вычислить интегралъ Пуассона $\mathfrak{J}$ (§ 721, e), разсмотримъ двойной интегралъ

$$(25)\qquad \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy=\int_0^\infty \mathfrak{J}\,e^{-x^2}dx=\mathfrak{J}^2,$$

и постараемся вычислить его иначе. Напишемъ

$$\mathfrak{J}^2=\int_0^\infty e^{-x^2}dx\int_0^\infty e^{-y^2}dy,$$

и замѣнимъ при первомъ интегрированіи (по y) y новою перемѣнною t, опредѣляемою равенствомъ $y=tx$. Тогда получимъ

$$\mathfrak{J}^2=\int_0^\infty e^{-x^2}x\,dx\int_0^\infty e^{-t^2x^2}dt=\int_0^\infty dt\int_0^\infty e^{-(1+t^2)x^2}\cdot x\,dx.$$

Теперь тотчасъ найдемъ

$$\int e^{-(1+t^2)x^2}\cdot x\,dx=-\frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{2(1+t^2)}+C,\qquad \int_0^\infty e^{-(1+t^2)x^2}\cdot x\,dx=\frac{1}{2(1+t^2)}.$$

Замѣчая, что $\mathfrak{J}$ должно быть больше 0, окончательно получимъ

$$\mathfrak{J}^2=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{4},\qquad \mathfrak{J}=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

g) Къ тому же результату можно придти, преобразовавъ сперва интегралъ (25) по формулѣ (24), а потомъ уже вычисляя его. Принимая во вниманіе, что r измѣняется отъ 0 до ∞, а θ отъ 0 до $\frac{\pi}{2}$, когда x и y независимо одно отъ другого принимаютъ всѣ положительныя значенія, тотчасъ находимъ

$$\mathfrak{J}^2=\int_0^\infty\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-r^2}r\,dr\,d\theta=\frac{\pi}{2}\int_0^\infty e^{-r^2}r\,dr=\frac{\pi}{4}\left(-e^{-r^2}\right)_0^\infty=\frac{\pi}{4},\ \mathfrak{J}=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Впрочемъ, этотъ не строгій пріемъ[1]) не отличается существенно отъ предыдущаго, что сейчасъ увидимъ, замѣтивъ, что $t=\operatorname{tg}\theta$. И въ томъ и другомъ необходимо еще доказать существованіе $\mathfrak{J}$, а это получается тотчасъ (§ 717, b) изъ того обстоятельства, что функція $x^n e^{-x^2}$ стремится къ 0 при x безконечномъ, каково бы ни было n.

---

[1]) Этотъ пріемъ данъ былъ Пуассономъ и исправленъ Кейли (Cayley) „Quarterly Journal of Mathematics" (1872, стр. 120). См. „Mélanges mathématiques" Mansion (стр. 15) и „Traité d'Analyse" Picard (т. I, стр. 103).

h) Дифференцированіе (§ 733) по перемѣнной, не зависящей отъ перемѣнной интегрированія (по параметру, какъ говорятъ), часто бываетъ полезно при вычисленіи опредѣленныхъ интеграловъ. Такъ, напримѣръ, изъ второго интеграла (11) тотчасъ получается первый черезъ дифференцированіе по β, если принять во вниманіе, что производная отъ $|x|$ равна $\operatorname{sgn} x$. Точно такъ же изъ опредѣленнаго интеграла $\Gamma(a)$ дифференцированіемъ по a тотчасъ получимъ (314, j)

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} \log x \, dx = \left(-\mathbf{C} + 1 - \frac{1}{a} + \frac{1}{2} - \frac{1}{a+1} + \cdots\right) \Gamma(a).$$

Въ частности, будемъ имѣть

$$\int_0^\infty e^{-x} \log x \, dx = -\mathbf{C}, \qquad \int_0^\infty e^{-x^2} \log x \, dx = -\tfrac{1}{4}\sqrt{\pi}\,(\mathbf{C} + \log 4).$$

Если въ первомъ интегралѣ замѣнимъ x на $-\log x$, то снова найдемъ интегралъ Маскерони (§ 721, g). Дифференцируя еще разъ и полагая затѣмъ $a = 1$, $a = \frac{1}{2}$ и т. д., найдемъ

$$\int_0^\infty e^{-x} \log^2 x \, dx = \mathbf{C}^2 + \tfrac{1}{6}\pi^2, \quad \int_0^\infty e^{-x^2} \log^2 x \, dx = \tfrac{1}{8}\sqrt{\pi}\left\{(\mathbf{C} - \log 4)^2 + \tfrac{1}{2}\pi^2\right\} \text{ и т. д.}$$

i) Интегралъ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} = \frac{\pi}{2ab} \tag{26}$$

весьма легко вычисляется съ помощью подстановки $\operatorname{tg} x = \frac{b}{a} t$, если условимся подъ a и b понимать положительные квадратные корни изъ a^2 и b^2. Дифференцируя одинъ разъ по a, другой по b, получимъ интегралы

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x \, dx}{(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)^2} = \frac{\pi}{4a^3 b}, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x \, dx}{(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)^2} = \frac{\pi}{4ab^3},$$

сумма которыхъ равна

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)^2} = \pi \frac{a^2 + b^2}{4a^3 b^3}.$$

Продолжая такимъ же образомъ и обозначая для сокращенія

$$k_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n},$$

найдемъ въ концѣ концовъ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)^{n+1}}$$

$$= \pi \frac{k_n a^{2n} + k_1 k_{n-1} a^{2n-2} b^2 + k_2 k_{n-2} a^{2n-4} b^4 + \cdots + k_n b^{2n}}{2 (ab)^{2n+1}}$$

Обратнымъ путемъ (т. е. интегрированіемъ) можно вывести изъ интеграла (26) безчисленное множество другихъ. Сперва замѣтимъ, что тождество $(a^2 - b^2) \sin^2 x = (a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x) - b^2$ даетъ

$$(a^2 - b^2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x \, dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi b}{2a},$$

откуда получается

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a \sin^2 x \, dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} = \frac{\pi}{a+b}.$$

Отсюда интегрированіемъ по a въ предѣлахъ b и a, и замѣною a на $b\sqrt{1-k^2}$ получаемъ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} \, dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \log \frac{1 + \sqrt{1-k^2}}{2}.$$

Для провѣрки замѣтимъ, что послѣдній интегралъ при $k = 0$ обращается въ 0, а при $k = 1$ равенъ $-\frac{1}{2} \pi \log 2$, что уже раньше было найдено другимъ путемъ (§ 725, f).

j) Интегрированіемъ по частямъ интегралы

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx \cdot dx, \quad \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx \cdot dx \qquad (a > 0)$$

приводятся одинъ къ другому. Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ

$$b \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx \cdot dx = (e^{-ax} \sin bx)_0^{\infty} + a \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx \cdot dx = a \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx \cdot dx,$$

$$b \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx \cdot dx = (e^{-ax} \cos bx)_{\infty}^{0} - a \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx \cdot dx = 1 - a \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx \cdot dx,$$

откуда

$$(27)\qquad \int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\cdot dx=\frac{a}{a^2+b^2},\qquad \int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\cdot dx=\frac{b}{a^2+b^2}.$$

Интегрируя первый по b въ предѣлахъ 0 и b, или второй по a въ предѣлахъ отъ a до ∞, получимъ

$$\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin bx}{x}\,dx=\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}.$$

Съ приближеніемъ a къ нулю, въ предѣлѣ получаемъ опять формулу (9), такъ какъ предѣлъ правой части равенъ $\frac{1}{2}\pi\operatorname{sgn}b$.

k) Съ цѣлью провѣрки нѣкоторыхъ полученныхъ раньше результатовъ, укажемъ еще иной путь для нахожденія интеграла Дирихле. Сперва, однако, нужно доказать непосредственно существованіе этого интеграла. Этого мы весьма быстро достигнемъ, опираясь на одинъ изъ прежде добытыхъ результатовъ (§ 717, с) и замѣчая, что

$$\left|\int_\alpha^\beta \sin x\,dx\right|=|\cos\alpha-\cos\beta|\leqq 2.$$

Но, для упражненія, мы пойдемъ здѣсь другимъ путемъ. Очевидно, существуетъ интегралъ

$$\mathfrak{J}_n=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\frac{|\sin x|}{x}\,dx=\int_0^\pi\frac{\sin x\,dx}{x+(n-1)\pi},$$

и значеніе его лежитъ между $\frac{2}{n\pi}$ и $\frac{2}{(n-1)\pi}$, потому что $\int_0^\pi \sin x\,dx=2$.

Отсюда слѣдуетъ

$$\mathfrak{J}_n>\frac{2}{n\pi}>\mathfrak{J}_{n+1},\qquad \lim_{n=\infty}\mathfrak{J}_n=0,$$

а потому (§ 195) рядъ $\mathfrak{J}_1-\mathfrak{J}_2+\mathfrak{J}_3-\cdots$ сходящійся. Въ то же время, если n наибольшее цѣлое число, не превышающее $\frac{a}{\pi}$, то будемъ имѣть

$$\int_0^a\frac{\sin x}{x}\,dx=\mathfrak{J}_1-\mathfrak{J}_2+\mathfrak{J}_3-\cdots\pm\mathfrak{J}_n\mp\vartheta\mathfrak{J}_{n+1},$$

гдѣ ϑ лежитъ между 0 и 1. Итакъ, если будемъ увеличивать a, а слѣдовательно, и n безпредѣльно, то будетъ существовать

$$\mathfrak{J}=\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}\,dx=\mathfrak{J}_1-\mathfrak{J}_2+\mathfrak{J}_3-\cdots>0.$$

Установивъ вышесказанное, находимъ (§ 729, f, c)

$$\mathfrak{J}^2 = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx \int_0^\infty \frac{\sin y}{y}\,dy = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx \int_0^\infty \frac{\sin tx}{t}\,dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{dt}{t} \int_0^\infty \sin x \sin tx \frac{dx}{x} = \frac{1}{4}\int_0^\infty \log\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^2 \frac{dt}{t} = \frac{1}{4}\pi^2$$

и, такъ какъ $\mathfrak{J} > 0$, $\mathfrak{J} = \frac{1}{2}\pi$.

l) Положимъ, что требуется вычислить интегралъ $\mathfrak{J} = \int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2ax \cdot dx$, приводящійся при $a = 0$ къ интегралу Пуассона $\mathfrak{J}_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Дифференцируемъ по a и интегрируемъ по частямъ полученный результатъ, тогда найдемъ

$$\mathfrak{J}' = \int_0^\infty \sin 2ax \cdot d(e^{-x^2}) = -2a\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2ax \cdot dx = -2a\mathfrak{J}.$$

Отсюда слѣдуетъ $\log \mathfrak{J} = -a^2 + \log \mathfrak{J}_0$, откуда $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_0 e^{-a^2}$, т. е.

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2ax\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,e^{-a^2}.$$

l⁰) Вычислимъ еще, слѣдуя De la Valleé-Poussain, интегралъ, предложенный Mesanger'омъ въ Intermédiaire des mathématiceus, 1903, стр. 207, 293:

$$\mathfrak{J} = \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-x^2} \log\left|1 - \frac{k}{x}\right| dx$$

при $|k| \leqq 1$. Положимъ для удобства письма $k = \frac{1}{a}$ и замѣнивъ подъ интеграломъ x на kx, увидимъ, что интегралъ приведется къ $k^2 f(a)$, гдѣ

$$f(a) = \int_{-a}^{+a} \sqrt{a^2 - x^2} \log\left|1 - \frac{1}{x}\right| dx = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \log\left|1 - \frac{1}{x^2}\right| dx.$$

Замѣчаемъ теперь, что

$$f'(a) = a\int_0^a \log\left|1 - \frac{1}{x^2}\right| \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a\int_0^1 \log\left|1 - \frac{k^2}{x^2}\right| \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

или

$$f'(a) = a\,\{\varphi(k) - \varphi(0)\},$$

гдѣ

$$\varphi(k) = \int_0^1 \log|x^2 - k^2|\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Положивъ $x = \sin\theta$, $k = \sin\omega$, находимъ

$$\varphi(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log|\sin^2\theta - \sin^2\omega|\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log|\sin(\theta+\omega)|\,d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log|\sin(\theta-\omega)|\,d\theta$$

$$\int_\omega^{\frac{\pi}{2}+\omega} \log|\sin\theta|\,d\theta + \int_\omega^{\frac{\pi}{2}-\omega} \log|\sin\theta|\,d\theta = \int_\omega^{\omega+\frac{\pi}{2}} \log|\sin\theta|\,d\theta - \int_\omega^{\omega-\frac{\pi}{2}} \log|\sin\theta|\,d\theta$$

или

$$\varphi(k) = \int_{\omega-\frac{\pi}{2}}^{\omega+\frac{\pi}{2}} \log|\sin\theta|\,d\theta.$$

Производная этой функціи отъ ω (§ 733) равна

$$\log\left|\sin\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right)\right| - \log\left|\sin\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)\right|$$

$$= \log|\cos\omega| - \log|-\cos\omega| = 0.$$

Откуда послѣдовательно получимъ

$$\varphi'(k) = 0, \quad \varphi(k) = \varphi(0), \quad f'(a) = 0, \quad f(a) = f(1).$$

Но, полагая $x = \sin\theta$ или $x = \cos\theta$, получимъ для $f(1)$ то или другое изъ выраженій

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \log\operatorname{cotg}\theta\,d\theta, \qquad 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \log\operatorname{tg}\theta\,d\theta,$$

изъ которыхъ, при помощи сложенія и интегрированія по частямъ, найдемъ

$$f(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\theta \log\operatorname{cogt}\theta\,d\theta$$

$$= -\tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta\,d\log\operatorname{cotg}\theta = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Слѣдовательно,

$$\mathfrak{J} = \tfrac{1}{2}\pi k^2.$$

m) Вычислимъ еще интегралъ $\int\limits_0^\infty \frac{\cos ax}{1+x^2}\,dx$ [1]), разсматривая его, какъ производную функціи

$$f(a) = \int\limits_0^\infty \frac{\sin ax}{x(1+x^2)}\,dx,$$

и замѣчая, что

$$f(a) - f''(a) = \int\limits_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\,dx = \frac{1}{2}\pi \operatorname{sgn} a.$$

Такъ какъ $-e^{-a}(f-f'')$ есть производная функціи $e^{-a}(f+f')$, приводящейся при $a=0$ къ $f'(0) = \operatorname{arc\,tg}\infty = \frac{\pi}{2}$, то будемъ имѣть

$$e^{-a}(f+f') - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}\int\limits_0^a e^{-a}\operatorname{sgn} a\,da = \frac{\pi}{2}(e^{-a}-1)\operatorname{sgn} a,$$

откуда получается

$$f(a) + f'(a) = \frac{\pi}{2}e^a + \frac{\pi}{2}(1-e^a)\operatorname{sgn} a,$$

а замѣняя a на $-a$

$$-f(a) + f'(a) = \frac{\pi}{2}e^{-a} - \frac{\pi}{2}(1-e^{-a})\operatorname{sgn} a.$$

Складывая эти равенства, находимъ

$$f'(a) = \frac{\pi}{4}\{(1-\operatorname{sgn} a)e^a + (1+\operatorname{sgn} a)e^{-a}\}.$$

Выраженіе въ скобкахъ приводится при $a>0$ къ $2e^{-a}$, при $a<0$ къ $2e^a$, и къ 2 при $a=0$, такъ что оно всегда равно $2e^{-|a|}$. Итакъ,

$$\int\limits_0^\infty \frac{\cos ax}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\pi e^{-|a|}$$

n) Послѣдній результатъ вмѣстѣ съ безчисленнымъ множествомъ другихъ, заключается, какъ частный случай, въ одной важной формулѣ

---

1) Этотъ примѣръ заимствованъ изъ „Trattato di Calcolo" Todhunter'a, который цитируетъ „Transactions of the Royal Irish Academy" (т. XIX, стр. 227).

Фурье[1]), позволяющей всякую дифференцируемую[2]) (т. е. имѣющую производную) функцію $f(\alpha)$, стремящуюся къ нулю при $\alpha=\pm\infty$, изобразить въ видѣ опредѣленнаго интеграла. Сперва замѣтимъ, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(\theta)\,\mathrm{sgn}\,(\alpha-\theta)\,d\theta=\int_{-\infty}^{\alpha} f'(\theta)\,d\theta-\int_{\alpha}^{\infty} f'(\theta)\,d\theta=2f(\alpha).$$

Отсюда, по формулѣ (9)

$$f(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f'(\theta)\,d\theta\int_{0}^{\infty}\frac{\sin(\alpha-\theta)\,x}{x}\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{x}\int_{-\infty}^{\infty} f'(\theta)\sin(\alpha-\theta)\,x\cdot d\theta.$$

Интегрированіе по частямъ даетъ

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(\theta)\sin(\alpha-\theta)\,x\cdot d\theta=x\int_{-\infty}^{\infty} f(\theta)\cos(\alpha-\theta)\,x\cdot dx.$$

Слѣдовательно,

$$f(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} dx\int_{-\infty}^{\infty} f(\theta)\cos(\alpha-\theta)\,x\cdot d\theta.$$

Если теперь положимъ

(28) $$\varphi(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\theta)\cos\theta x\cdot d\theta,\qquad \psi(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\theta)\sin\theta x\cdot d\theta,$$

то получимъ

(29) $$f(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\{\varphi(x)\cos\alpha x+\psi(x)\sin\alpha x\}\,dx.$$

Это и есть формула Фурье. Въ томъ случаѣ, когда $f(-\alpha)=f(\alpha)$, формулы (28) дадутъ

$$\varphi(x)=2\int_{0}^{\infty} f(\theta)\cos\theta x\cdot d\theta,\qquad \psi(x)=0,$$

и потому формула (29) дастъ

$$f(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\varphi(x)\cos\alpha x\cdot dx.$$

Въ частности, для $f(\alpha)=e^{-|\alpha|}$, припоминая первый интегралъ (27), имѣемъ $\varphi(x)=\dfrac{2}{1+x^2}$ и приходимъ къ результату предыдущаго упражненія[3]).

---

[1]) „Théorie analytique de la chaleur“, т. 1, стр. 408.

[2]) Это условіе слишкомъ узко. См., напримѣръ, Poincaré „Théorie analytique de la propagatiln de la chaleur“ (стр. 102).

[3]) Fourier, l. c. стр. 395.

Замѣтимъ, наконецъ, что вышеприведенное доказательство формулы Фурье не измѣнится, если въ формулахъ (28) предѣлами интегрированія будутъ два корня функціи $f(\theta)$. Тогда правая часть формулы (29) будетъ изображать $f(\alpha)$ для значеній α, лежащихъ между этими корнями, и приводится къ 0 въ противномъ случаѣ. Такимъ образомъ, для $f(\theta) = \cos\theta$, обозная черезъ β корень этой функціи, найдемъ, что интегралъ

$$\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x\cdot\cos\beta x}{1-x^2}\,dx$$

(который, очевидно, не имѣетъ смысла, когда $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ оба отличны отъ нуля) равенъ $\frac{\pi}{2}\cos\alpha\,|\sin\beta|$ или $\frac{\pi}{4}\cos\beta\,|\sin\beta|$ или 0, смотря по тому, будетъ ли $|\alpha| <, =$ или $> |\beta|$. Къ тому же результату, впрочемъ, прилемъ, приводя этотъ интегралъ (при помощи весьма простого преобразованія) къ первому изъ интеграловъ (11).

[**Примѣчаніе.** Преобразованіе интеграла

$$\mathfrak{J} = \int_0^\infty \frac{\cos\alpha x\cos\beta x}{1-x^2}\,dx$$

къ первому изъ интеграловъ (11) § 725, о получается слѣдующимъ путемъ. Замѣчая, что

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right),$$

имѣемъ

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{2}\left(\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x\cos\beta x}{x+1}\,dx - \int_0^\infty \frac{\cos\alpha x\cos\beta x}{x-1}\,dx\right)$$

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{2}\left(\int_1^\infty \frac{\cos\alpha(\xi-1)\cos\beta(\xi-1)}{\xi}\,d\xi - \int_{-1}^\infty \frac{\cos\alpha(\xi+1)\cos\beta(\xi+1)}{\xi}\,d\xi\right).$$

Разбивая интервалъ $(1, \infty)$ на $(0, \infty)-(0, 1)$, а $(-1, \infty)$ на $(-1, 0)+(0, \infty)$, тотчасъ увидимъ, что интегралы, распространенные на интервалы $(0, 1)$ и $(-1, 0)$ сохранятся и потому

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\cos\alpha(\xi-1)\cos\beta(\xi-1) - \cos\alpha(\xi+1)\cos\beta(\xi+1)}{\xi}\,d\xi.$$

Замѣчая, что по условію $\cos\beta = 0$, имѣемъ

$$\cos\beta(\xi-1) = \sin\beta\xi\sin\alpha, \qquad \cos\beta(\xi+1) = -\sin\beta\xi\sin\beta,$$

тотчасъ найдемъ

$$\mathfrak{J} + \cos\alpha \sin\beta \int_0^\infty \frac{\sin\beta\xi \cos\alpha\xi}{\xi}\, d\xi$$

и, подставляя значенія интеграла, указанныя въ § 725, о (перемѣстивъ буквы α и β), мы и получимъ данныя выше значенія $\mathfrak{J}$.]

741. Интегрированіе полныхъ дифференціаловъ. Задача кратнаго интегрированія является естественнымъ распространеніемъ указанной въ началѣ (§ 708) задачи, когда поставимъ вопросъ о разысканіи функціи отъ нѣсколькихъ перемѣнныхъ независимыхъ по данному ея полному дифференціалу. Разсмотримъ сперва простѣйшій случай, когда лано дифференціальное выраженіе вида

$$u(x, y)\, dx + v(x, y)\, dy,$$

и спрашивается будетъ ли оно, какъ говорятъ, точнымъ дифференціаломъ, т. е. существуетъ ли такая функція z отъ двухъ независимыхъ перемѣнныхъ x и y, полный дифференціалъ которой равенъ данному выраженію? Вопросъ сводится къ другому — существуетъ ли функція z, для которой

$$(30)\qquad \frac{\partial z}{\partial x} = u(x, y), \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = v(x, y).$$

Мы видимъ тотчасъ, что для существованія такой функціи необходимо условіе:

$$(31)\qquad \frac{\partial}{\partial y} u(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} v(x, y),$$

(§ 368), по крайней мѣрѣ для того случая, которымъ мы и ограничимся, когда функціи u и v и ихъ первыя производныя непрерывны. При дѣйствительномъ разысканіи функціи z необходимость этого условія сама собою обнаружится, но мы въ то же время увидимъ, что оно и достаточно для существованія z. Интегрируя (§ 730) второе изъ уравненій (30), получаемъ $z = \int v\,dy + \varphi(x)$. Взявъ производную по x и принимая во вниманіе первое уравненіе (30), найдемъ, что, кромѣ того, должно быть

$$\varphi'(x) = u(x, y) - \int \frac{\partial v}{\partial x}\, dy.$$

Чтобы правая часть этого равенства не зависѣла отъ y, какъ не зависитъ отъ него лѣвая, необходимо, чтобы производная

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(u - \int \frac{\partial v}{\partial x}\, dy\right) = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}$$

обращалась въ нуль, т. е. чтобы $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial v}{\partial x}$ изображались одною и тою же функціею $f(x, y)$. Если это условіе выполнено, то будемъ имѣть

$$z = \int v\,dy + \int\left(u - \int\frac{\partial v}{\partial x}\,dy\right)dx = \int u\,dx + \int v\,dy - \int\int f\,dx\,dy,$$

результатъ, который легко приводится къ виду (20). Итакъ, имѣемъ теорему: *Для того, чтобы $u\,dx + v\,dy$ было точнымъ дифференціаломъ, необходимо и достаточно, чтобы* $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$. Точно такъ же для существованія функціи Φ отъ трехъ независимыхъ перемѣнныхъ, имѣющей полный дифференціалъ

$$d\Phi = u\,dx + v\,dy + w\,dz$$

необходимы и достаточны условія

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{32}$$

Въ самомъ дѣлѣ, исходя изъ равенства $\frac{\partial \Phi}{\partial z} = w$, интегрированіемъ его (при x и y постоянныхъ) получимъ

$$\Phi = \int w\,dz + \varphi(x, y).$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ будемъ имѣть

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = u - \int\frac{\partial w}{\partial x}\,dz, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = v - \int\frac{\partial w}{\partial y}\,dz.$$

Такъ какъ $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ независимы отъ z, то видимъ тотчасъ же, что должно быть

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(u - \int\frac{\partial w}{\partial x}\,dz\right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(v - \int\frac{\partial w}{\partial y}\,dz\right) = 0,$$

такъ что первыя два условія (32) должны быть выполнены. Далѣе, чтобы существовала функція $\varphi(x, y)$, на основаніи того, что мы видѣли въ случаѣ двухъ перемѣнныхъ, должно выполняться условіе

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(u - \int\frac{\partial w}{\partial x}\,dz\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(v - \int\frac{\partial w}{\partial y}\,dz\right),$$

т. е. какъ разъ третье условіе (31). Аналогичнымъ путемъ доказывается слѣдующая общая теорема: *Если даны n функцій*

$u_1, u_2, \ldots, u_n$ отъ n независимыхъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ то $n(n-1)$ условій

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

необходимы и достаточны для того, чтобы $u_1 dx_1 + u_2 dx_2 + \cdots + u_n dx_n$ было точнымъ дифференціаломъ.

ПРИЛОЖЕНІЕ ИЗЛОЖЕННЫХЪ ПРІЕМОВЪ КЪ НАХОЖДЕНІЮ НѢКОТОРЫХЪ ЗАМѢЧАТЕЛЬНЫХЪ КЛАССОВЪ ИНТЕГРАЛОВЪ.

Интегрированіе раціональныхъ дифференціаловъ.

742. Если подъинтегральная функція раціональна, то она всегда можетъ быть приведена къ виду $\frac{f(x)}{g(x)}$, гдѣ $f(x)$ и $g(x)$ цѣлыя функціи, не имѣющія общаго дѣлителя. Если $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ обозначаютъ корни функціи $g(x)$, $r, s, t, \ldots$ соотвѣтственно показатели кратности ихъ, $\varphi(x)$ цѣлая функція, называемая частнымъ отъ дѣленія $f(x)$ на $g(x)$, то, какъ извѣстно (§ 460), дробь $\frac{f(x)}{g(x)}$ разлагается слѣдующимъ образомъ на частныя дроби

$$\varphi(x) + \frac{a_1}{x-\alpha} + \frac{a_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{a_r}{(x-\alpha)^r} + \frac{b_1}{x-\beta} + \cdots + \frac{b_s}{(x-\beta)^s} + \cdots.$$

Слѣдовательно,

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} dx = \int \varphi(x) dx + a_1 \log|x-\alpha| + b_1 \log|x-\beta| + c_1 \log|x-\gamma| + \cdots$$
$$- \frac{a_2}{x-\alpha} - \frac{a_3}{2(x-\alpha)^2} - \cdots - \frac{b_2}{x-\beta} - \frac{b_3}{2(x-\beta)^2} - \cdots,$$

и первый интегралъ въ правой части разлагается тотчасъ на другіе, которые умѣемъ вычислять. Итакъ, интегралы отъ раціональныхъ дифференціаловъ всегда выражаются въ алгебраически-логариѳмическомъ видѣ, т. е. черезъ конечное число знаковъ алгебраическихъ и логариѳмическихъ функцій.

743. Если не всѣ корни вещественны, то правая часть представляется въ мнимомъ видѣ, хотя она и вещественна, если коэффиціенты даннаго дифференціала вещественны. Можно было бы перейти отъ мнимой формы къ вещественной, примѣняя извѣстныя соотношенія (§ 725, d) между arc tg и log; но предпочитаютъ совсѣмъ обойтись безъ мнимыхъ членовъ, припоминая, что (§ 461) соотвѣтствующіе парѣ мнимыхъ корней $g(x)$ члены даютъ въ разложеніи $\frac{f(x)}{g(x)}$ сумму слѣдующаго вида:

$$\frac{a_1 x + b_1}{x^2 + px + q} + \frac{a_2 x + b_2}{(x^2 + px + q)^2} + \cdots + \frac{a_r x + b_r}{(x^2 + px + q)_r}.$$

Дѣло сводится къ вычисленію интеграла

$$\int \frac{ax + b}{(x^2 + px + q)^n} dx.$$

При $n = 1$ его значеніе извѣстно, потому что тогда онъ разлагается на

$$a \int \frac{(x + \frac{1}{2}p)\,dx}{x^2 + px + q} + \left(b - \frac{1}{2}ap\right) \int \frac{dx}{x^2 + px + q},$$

такъ что (§ 725, d) будемъ имѣть

$$\int \frac{(ax + b)\,dx}{x^2 + px + q} = a \log \sqrt{x^2 + px + q} + \frac{b - \frac{1}{2}ap}{\sqrt{q - \frac{1}{4}p^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x - \frac{1}{2}p}{\sqrt{q - \frac{1}{4}p^2}} + C.$$

При $n > 1$ можно аналогично написать

$$\int \frac{(ax + b)\,dx}{(x^2 + px + q)^n} = -\frac{a}{2(n - 1)(x^2 + px + q)^{n-1}} + \left(b - \frac{1}{2}ap\right) \mathfrak{J}_n,$$

такъ что остается вычислить интегралъ

$$\mathfrak{J}_n = \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^n}.$$

Примѣняя интегрированіе по частямъ къ $\mathfrak{J}_{n-1}$, получимъ

$$\mathfrak{J}_{n-1} = \int \frac{d(x + \frac{1}{2}p)}{(x^2 + px + q)^{n-1}}$$
$$= \frac{x + \frac{1}{2}p}{(x^2 + px + q)^{n-1}} + 2(n-1)\{\mathfrak{J}_{n-1} - (q - \tfrac{1}{4}p^2)\mathfrak{J}_n\},$$

принявъ во вниманіе тождество

$$(x + \tfrac{1}{2}p)^2 = x^2 + px + q - (q - \tfrac{1}{4}p^2).$$

Отсюда слѣдуетъ

$$\mathfrak{J}_n = \frac{1}{2(n-1)(q - \frac{1}{4}p^2)} \left\{ (2n - 3)\mathfrak{J}_{n-1} + \frac{x + \frac{1}{2}p}{(x^2 + px + q)^{n-1}} \right\}.$$

Такимъ образомъ изъ $\mathfrak{J}_1$ получается $\mathfrak{J}_2$, оттуда $\mathfrak{J}_3$ и т. д.

744. Упражненія. a) Чтобы вычислить интегралъ отъ $\frac{dx}{x^3+1}$, полагаемъ

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{c}{x+1}+\frac{ax+b}{x^2-x+1},$$

такъ что тождественно должно быть $c(x^2-x+1)+(ax+b)(x+1)=1$. Достаточно положить $x=-1$, чтобы получить $c=\frac{1}{3}$. Замѣнивъ c его значеніемъ, получимъ $ax+b=-\frac{1}{3}(x-2)$. Слѣдовательно, предложенный интегралъ разложится такъ

$$\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{6}\int\frac{(2x-1)\,dx}{x^2-x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-x+1},$$

и мы найдемъ

$$\int\frac{dx}{x^3+1}=\frac{1}{3}\log\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2-x+1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

b) Интегралъ отъ $\frac{x^5\,dx}{x^4-1}$ тотчасъ разлагается на $\int x\,dx+\int\frac{x\,dx}{x^4-1}$; первый равенъ $\frac{1}{2}x^2+C$; во второмъ удобно положить $x^2=t$. Тогда

$$\int\frac{x\,dx}{x^4-1}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2-1}=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\frac{1}{4}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C.$$

Слѣдовательно,

$$\int\frac{x^5\,dx}{x^4-1}=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}\log\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2+C.$$

c) Весьма легко вычисляется интегралъ

$$\int\frac{x^2-x+1}{(x^2+x+1)^2}\,dx=\int\frac{dx}{x^2+x+1}+\int\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}-\int\frac{(2x+1)\,dx}{(x^2+x+1)^2}.$$

Третій интегралъ правой части прямо берется; второй приводится къ первому интегрированіемъ послѣдняго по частямъ

$$\int\frac{dx}{x^2+x+1}=\frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}+2\int\frac{(x+\frac{1}{2})^2}{(x^2+x+1)^2}\,dx.$$

$$=\frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}+2\int\frac{dx}{x^2+x+1}-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}.$$

Отсюда получается

$$\int\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}=\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x^2+x+1},$$

и предложенный интегралъ дѣлается равнымъ

$$\frac{2(x+2)}{3(x^2+x+1)}+\frac{5}{3}\int\frac{dx}{x^2+x+1},$$

и окончательно

$$\int \frac{x^2 - x + 1}{(x^2 + x + 1)^2}\, dx = \frac{2(x+2)}{3(x^2 + x + 1)} + \frac{10}{3\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Къ полученному результату можно придти быстрѣе, производя упомянутое интегрированіе по частямъ слѣдующимъ образомъ:

$$\int \frac{dx}{x^2 + x + 1} = \frac{x + c}{x^2 + x + 1} + \int \frac{(x+c)(2x+1)}{(x^2 + x + 1)^2}\, dx.$$

Теперь опредѣлимъ c такъ, чтобы для прилично выбранныхъ a и b имѣть:

$$(x + c)(2x + 1) = a(x^2 + x + 1) + b(x^2 - x + 1).$$

Оказывается, что надо взять $2 = c = a + b$, $2c + 1 = a - b$, т. е. $c = 2$ $a = \frac{7}{2}$, $b = -\frac{3}{2}$. Поэтому будемъ имѣть

$$\int \frac{dx}{x^2 + x + 1} = \frac{x+2}{x^2 + x + 1} + \frac{7}{2} \int \frac{dx}{x^2 + x + 1} - \frac{3}{2} \int \frac{x^2 - x + 1}{(x^2 + x + 1)^2}\, dx,$$

откуда и получается вышеприведенное значеніе интеграла.

d) Для вычисленія интеграла отъ $\frac{dx}{(x+1)(x^2+1)^2}$ нужно прежде всего опредѣлить постоянныя c, a, b, a', b' такъ, чтобы

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)^2} = \frac{c}{x+1} + \frac{ax + b}{x^2 + 1} + \frac{a'x + b'}{(x^2+1)^2},$$

т. е. $c(x^2+1)^2 + (ax + b)(x^2 + 1)(x + 1) + (a'x + b')(x + 1) = 1.$

При $x^2 = -1$ находимъ

$$a'x + b' = \frac{1}{x+1} = \frac{x-1}{x^2-1} = -\frac{1}{2}(x - 1),$$

и равенство между первымъ и послѣднимъ членами, справедливое при мнимомъ x, должно быть справедливо при всякомъ x, потому что a' и b' — вещественны. Вслѣдствіе этого вышенаписанное тождество обращается въ

$$c(x^2 + 1) + (ax + b)(x + 1) = \tfrac{1}{2},$$

а при $x^2 = -1$ даетъ $ax + b = \frac{1}{2}(a'x + b')$. Поэтому получимъ $c = \frac{1}{4}$, что, впрочемъ, слѣдуетъ и изъ первоначальнаго тождества, если положимъ $x = -1$. Послѣ этого тотчасъ видимъ, что предложенный интегралъ имѣетъ то же значеніе, что и

$$\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{4}\int \frac{x-1}{x^2+1}\, dx - \frac{1}{2}\int \frac{x-1}{(x^2+1)^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x^2+1} + \log \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} + \operatorname{arc\,tg} x\right) + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ имѣемъ

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1} + \int \frac{2x^2}{(x^2+1)^2}dx = \frac{x}{x^2+1} + 2\int \frac{dx}{x^2+1} - 2\int \frac{dx}{(x^2+1)^2},$$

откуда слѣдуетъ

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^2+1}\right).$$

Итакъ,

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{x+1}{x^2+1} + \log\frac{\mid x+1\mid}{\sqrt{x^2+1}} + 2\operatorname{arc\,tg} x\right) + C.$$

e) Чтобы вычислить интегралъ отъ $\frac{dx}{x^4+1}$ прежде всего замѣчаемъ, что

$$x^4+1 = (x^2+1)^2 - (x\sqrt{2})^2 = (x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1),$$

и полагаемъ

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{ax+b}{x^2+x\sqrt{2}+1} + \frac{a'x+b'}{x^2-x\sqrt{2}+1}.$$

Такъ какъ замѣна x на $-x$ не мѣняетъ лѣвой части, а въ правой замѣняетъ знаменатель одной дроби знаменателемъ другой, то то же самое должно произойти и съ числителями, потому что разложеніе дроби на частныя единственное. Отсюда слѣдуетъ: $-ax+b = a'x+b'$, такъ что должно быть тождественно

$$1 = (ax+b)(x^2-x\sqrt{2}+1) - (ax-b)(x^2+x\sqrt{2}+1) = 2(b-a\sqrt{2})x^2+2b,$$

откуда $b = a\sqrt{2} = \frac{1}{2}$. Слѣдовательно,

$$\int \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{(x+\sqrt{2})\,dx}{x^2+x\sqrt{2}+1} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{(x-\sqrt{2})\,dx}{x^2-x\sqrt{2}+1}.$$

Полагая $p = \pm\sqrt{2}$, видимъ, что достаточно вычислить одинъ интегралъ

$$\int \frac{(x+p)\,dx}{x^2+px+1} = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+p)\,dx}{x^2+px+1} + \frac{1}{2}p\int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2}p)^2+\frac{1}{2}}$$

$$= \log\sqrt{x^2+px+1} - \frac{p}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\left(x\sqrt{2}+\frac{p}{\sqrt{2}}\right) + C,$$

и замѣтить, что (§ 254, d)

$$\operatorname{arc\,tg}(x\sqrt{2}+1) + \operatorname{arc\,tg}(x\sqrt{2}-1) = -\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1} + C,$$

чтобы получить окончательно

$$\int \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\log\sqrt{\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}} - \operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}\right) + C.$$

f) Еще легче вычисленіе интеграла

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-x\sqrt{2}+1}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x\sqrt{2}}{x^2-1} + C.$$

Если интегрированіе производится отъ 0 до 1, то, такъ какъ

$$\lim_{x=1-0} \operatorname{arc\,tg} \frac{x\sqrt{2}}{x^2-1} = -\frac{1}{2}\pi,$$

для значенія опредѣленнаго интеграла получается $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. Разлагая подъинтегральную функцію въ степенной рядъ, получаемъ такимъ путемъ формулу

$$1+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{11}-\cdots = \frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

которую можно также вывести изъ формулы (17) предыдущей главы (§ 729, e) при $a = \frac{\pi}{4}$.

g) Если предложено вычислить интегралъ отъ $\frac{x^4+1}{x^6+1}dx$, то можно начать съ замѣчанія, что

$$\frac{x^2+1}{x^3+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{x+1} + \frac{x+1}{x^2-x+1}\right).$$

Если замѣнимъ x на x^2 и замѣтимъ, что

$$x^4-x^2+1 = (x^2+1)^2-(x\sqrt{3})^2 = (x^2+x\sqrt{3}+1)(x^2-x\sqrt{3}+1),$$

то найдемъ

$$\frac{x^4+1}{x^6+1} = \frac{2}{3(x^2+1)} + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{x^2+x\sqrt{3}+1} + \frac{1}{x^2-x\sqrt{3}+1}\right).$$

Въ то же время при $p = \pm\sqrt{3}$ имѣемъ

$$\int \frac{dx}{x^2+px+1} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{1}{4}} = 2 \operatorname{arc\,tg}(2x+p) + C.$$

Слѣдовательно, предложенный интегралъ равенъ

$$\tfrac{2}{3}\operatorname{arc\,tg} x + \tfrac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}(2x+\sqrt{3}) + \tfrac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}(2x-\sqrt{3}) + C$$

или окончательно

$$\int \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx = -\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{3x(x^2-1)}{x^4-4x^2+1} + C.$$

Разложеніе подъинтегральной функціи въ степенной рядъ показываетъ, что опредѣленный интегралъ въ предѣлахъ 0 и 1 равенъ суммѣ ряда

$$1+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}-\tfrac{1}{11}+\cdots,$$

которую, съ другой стороны, мы можемъ вывести изъ цитированной въ предыдущемъ примѣрѣ формулы. Дѣйствительно, упомянутая формула при $a=\frac{\pi}{6}$ даетъ

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\cdots\right)+\frac{1}{4}\sqrt{3}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots\right)+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots\right)=\frac{5}{12}\pi,$$

откуда выводимъ (§ 729, d)

$$1+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}-\cdots=\frac{5\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}-\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{1}{3}\pi.$$

Между тѣмъ кажется, какъ будто, вышенайденное выраженіе опредѣленнаго интеграла дастъ для опредѣленнаго интеграла между 0 и 1 значеніе, равное 0 (нелѣпый результатъ); но надо принять во вниманіе (§ 725, k), что въ интервалѣ (0, 1) функція $\frac{3x(x^2-1)}{x^4-4x^2+1}$ обращается въ ∞ при $x=c=\sqrt{2-\sqrt{3}}$, и слѣва отъ c будетъ <0, а справа >0. Поэтому

$$\int_0^1\frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx=-\frac{1}{3}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{3x(x^2-1)}{x^4-4x^2+1}\right)_0^{c-0}-\frac{1}{3}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{3x(x^2-1)}{x^4-4x^2+1}\right)_{c+0}^1$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{3x(x^2-1)}{x^4-4x^2+1}\right)_{c-0}^{c+0}=\frac{1}{3}\pi.$$

Точно такъ же, если интегралъ взяли бы въ предѣлахъ отъ 0 до ∞, то надо было бы обратить вниманіе на другой положительный корень $c'=\sqrt{2+\sqrt{3}}$ функціи x^4-4x^2+1. Для значенія интеграла нашли бы

$$\frac{1}{3}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{3x(x^2-1)}{x^4-4x^2+1}\right)_{c-0}^{c+0}+\frac{1}{3}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{3x(x^2-1)}{x^4-4x^2+1}\right)_{c'-0}^{c'+0}=\frac{2}{3}\pi.$$

Съ цѣлью провѣрки замѣтимъ слѣдующее: если разложимъ интервалъ $(0,\infty)$ на $(0, 1)+(1,\infty)$, и замѣнимъ въ интегралѣ, распространенномъ на интервалъ $(1,\infty)$, x на $\frac{1}{x}$, то прямо получимъ

$$\int_0^\infty\frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx=2\int_0^1\frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx=\frac{2}{3}\pi.$$

Интегрированіе ирраціональныхъ дифференціаловъ.

745. Если ирраціональность подъинтегральнаго дифференціала происходитъ исключительно отъ присутствія въ немъ степеней перемѣнной интегрированія x съ дробными показателями, то эту ирраціональность можно тотчасъ устранить подстановкою $x = t^m$, гдѣ m наименьшее кратное знаменателей показателей, и интегралъ вычисляется затѣмъ въ новомъ видѣ такъ, какъ было показано. Въ случаѣ ирраціональностей болѣе сложнаго характера въ большинствѣ случаевъ интегрированіе практически не выполнимо въ томъ смыслѣ, что не существуетъ такой комбинаціи конечнаго числа алгебраическихъ и логариѳмическихъ функцій, которая изображала бы данный интегралъ. Но существуютъ нѣкоторые классы интеграловъ, составляющіе исключеніе, и вычисляемые при помощи простыхъ искусственныхъ пріемовъ. Разсмотримъ здѣсь важнѣйшіе случаи этого рода.

a) Для вычисленія интеграла отъ $\frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}$ приравняемъ радикалъ выраженію $t-x$, тогда будемъ имѣть

$$(1)\qquad x = \frac{t^2-q}{2t+p}, \qquad t-x = \frac{t^2+pt+q}{2t+p}, \qquad dx = 2\frac{t^2+pt+q}{(2t+p)^2}\,dt.$$

Интегралъ приводится къ

$$\int \frac{dt}{t+\frac{p}{2}} = \log\left|t+\frac{p}{2}\right| + C,$$

и слѣдовательно,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}} = \log\left|x+\frac{p}{2}+\sqrt{x^2+px+q}\right| + C.$$

b) Чтобы вычислить интегралъ $\frac{dx}{\sqrt{-x^2+px+q}}$, замѣчаемъ, что

$$-x^2+px+q = -\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + q + \frac{1}{4}p^2$$

(гдѣ $q+\frac{1}{4}p^2$ должно быть положительнымъ, если желаемъ оставаться въ области вещественныхъ чиселъ), и полагаемъ

$$x-\frac{p}{2} = t\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}, \quad \text{такъ что} \quad -x^2+px+q = \left(q+\frac{1}{4}p^2\right)(1-t^2).$$

Предложенный интегралъ приводится къ $\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, поэтому имѣемъ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+px-q}} = \arc\sin \frac{x-\frac{p}{2}}{\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}} + C.$$

c) Интегрированіе по частямъ даетъ (сравн. § 727, a)

$$\int \sqrt{\pm x^2+px+q}\,dx = \left(x \pm \frac{1}{2}p\right)\sqrt{\pm x^2+px+q} - \int \frac{\left(x \pm \frac{p}{2}\right)^2 dx}{\sqrt{\pm x^2+px+q}}.$$

Правая часть, въ силу тождества

$$\pm \left(x \pm \frac{p}{2}\right)^2 = \pm x^2+px+q-\left(q \mp \frac{1}{4}p^2\right)$$

преобразовывается въ

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)\sqrt{\pm x^2+px+q} - \int \sqrt{\pm x^2+px+q}\,dx + \left(q \mp \frac{1}{4}p^2\right)\int \frac{dx}{\sqrt{\pm x^2+px+q}}.$$

Слѣдовательно,

$$2\int \sqrt{\pm x^2+px+q}\,dx = \left(x \pm \frac{p}{2}\right)\sqrt{\pm x^2+px+q} + \left(q \mp \frac{1}{4}p^2\right)\int \frac{dx}{\sqrt{\pm x^2+px+q}},$$

а потому

$$\int \sqrt{x^2+px+q}\,dx = \frac{1}{2}\left(x+\frac{p}{2}\right)\sqrt{x^2+px+q}$$
$$+\frac{1}{2}\left(q-\frac{1}{4}p^2\right)\log\left|x+\frac{p}{2}+\sqrt{x^2+px+q}\right|+C,$$

$$\int \sqrt{-x^2+px+q}\,dx = \frac{1}{2}\left(x-\frac{p}{2}\right)\sqrt{-x^2+px+q}$$
$$+\frac{1}{2}\left(q+\frac{1}{4}p^2\right)\arc\sin\frac{x-\frac{p}{2}}{\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}}+C.$$

746. Положимъ, переходя къ болѣе общему случаю, что $f(x,y)$ есть раціональная функція отъ x и y, и разсмотримъ интегралъ отъ $f(x, \sqrt{\pm x^2+px+q})\,dx$. Какъ бы сложно ни было подъинтегральное выраженіе, легко можно показать, что оно можетъ быть приведено къ раціональному виду прилично выбранною подстановкою, и поэтому такой интегралъ всегда выражается въ алгебраически-логариѳмическомъ видѣ. Дѣйствительно, стоитъ только ввести новую перемѣнную $t=x+\sqrt{x^2+px+q}$, чтобы на основаніи формулы (1) уничтожить ирраціональность въ $f(x, y)\,dx$, когда $y=\sqrt{x^2+px+q}$. Это не справедливо при $y=\sqrt{-x^2+px+q}$, но въ этомъ случаѣ можно примѣнить другую подстановку, пригодную и въ первомъ случаѣ, если корни функціи x^2+px+q вещественны; во второмъ случаѣ эти корни навѣрно вещественны, иначе y былъ бы мнимымъ при всякомъ значеніи x. Обозначая черезъ α и β эти корни, положимъ

(2)
$$x = \frac{\beta \mp \alpha t^2}{1 \mp t^2},$$

и тогда найдемъ (выбравъ t съ приличнымъ знакомъ)

$$y = \sqrt{\pm(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{(\beta-\alpha)t}{1 \mp t^2}, \quad dx = \pm\frac{2(\beta-\alpha)t\,dt}{(1 \mp t^2)^2},$$

откуда и видно, что $f(x, y)\,dx$ принимаетъ видъ $\varphi(t)\,dt$, гдѣ $\varphi(t)$ раціональна и вещественна.

747. Впрочемъ, вышеупомянутыя подстановки служатъ главнымъ образомъ для того, чтобы показать возможность привести, въ разсматриваемомъ исключительномъ случаѣ, ирраціональный дифференціалъ къ раціональному виду. На практикѣ всегда лучше будетъ предварительно извѣстнымъ образомъ упростить выраженіе $f(x, y)$. Раціональную отъ x и y функцію f всегда можно представить въ видѣ отношенія двухъ цѣлыхъ функцій. Расположивъ эти функціи по степенямъ y и замѣнивъ y^{2n} черезъ $(\pm x^2 + px + q)^n$, а y^{2n+1} черезъ $(\pm x^2 + px + q)^n y$, приведемъ данное выраженіе къ виду

$$f(x, y) = \frac{\varphi_1(x) + y\,\psi_1(x)}{\varphi_2(x) + y\,\psi_2(x)},$$

гдѣ φ_1, φ_2, ψ_1, ψ_2 — цѣлыя функціи отъ x. Умножая числителя и знаменателя на $\varphi_2 - y\psi_2$ и снова подставляя

$$y^2 = \pm x^2 + px + q, \quad y = \frac{\pm x^2 + px + q}{y},$$

находимъ

$$f(x, y) = \varphi(x) + \frac{\psi(x)}{y},$$

гдѣ φ и ψ — раціональныя функціи отъ x. Разлагая затѣмъ $\psi(x)$ на частныя дроби (сравн. § 742), увидимъ, что помимо интеграловъ отъ раціональныхъ дифференціаловъ, вычисленіе даннаго интеграла приводится къ вычисленію одного или нѣсколькихъ интеграловъ слѣдующихъ типовъ:

$$\int\frac{x^n\,dx}{\sqrt{\pm x^2 + px + q}}, \qquad \int\frac{dx}{(x-a)^n\sqrt{\pm x^2 + px + q}},$$

гдѣ n цѣлое положительное число, и a вещественная или мнимая постоянная. Подстановкою $x = a + \frac{1}{z}$ интегралы второго типа приводятся къ интеграламъ перваго типа, а эти послѣдніе, какъ легко видѣть, приводятся къ единственному $\int \frac{dx}{y}$, который вычисленъ въ § 745. Дѣйствительно,

$$\int x^n \frac{dx}{y} = \mp \int x^{n-1} \left(\pm x + \frac{p}{2}\right) \frac{dx}{y} + \frac{p}{2} \int x^{n-1} \frac{dx}{y},$$

а такъ какъ $y\,dy = \left(\mp x + \frac{p}{2}\right) dx$, то

$$\int x^{n-1} \left(\mp x + \frac{p}{2}\right) \frac{dx}{y} = \int x^{n-1}\, dy$$

$$= x^{n-1} y - (n-1) \int x^{n-2} (\pm x^2 + px + q) \frac{dx}{y},$$

а потому, подставляя въ предыдущее уравненіе, получимъ

$$n \int x^n \frac{dx}{y} = \pm x^{n-1} y \pm \left(n - \frac{1}{2}\right) p \int x^{n-1} \frac{dx}{y} \mp (n-1) q \int x^{n-2} \frac{dx}{y}.$$

Изъ этой формулы приведенія послѣдовательно находимъ при $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\int x \frac{dx}{y} = \mp y \pm \frac{p}{2} \int \frac{dx}{y}, \quad \int x^2 \frac{dx}{y} = \frac{1}{2}\left(\pm x - \frac{3}{2} p\right) y \mp \frac{1}{2}\left(q + \frac{3}{4} p^2\right) \int \frac{dx}{y},$$

$$\int x^3 \frac{dx}{y} = \frac{1}{3} y^3 - \left(\frac{3}{4} px \pm q \mp \frac{5}{8} p^2\right) y + \frac{p}{4}\left(3q \mp \frac{5}{4} p^2\right) \int \frac{dx}{y}, \ldots$$

748. Аналогичнымъ пріемомъ можно упростить интегрированіе дифференціала $f(x, y)\, dx$, иррацiональность котораго зависитъ исключительно отъ присутствія корня квадратнаго

$$y = \sqrt{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \cdots + a_m}.$$

Замѣтимъ сперва, что при m — четномъ можно свести степень подкоренного полинома къ $m - 1$; этого достигнемъ съ помощью подстановки $x = a + \frac{1}{z}$, гдѣ a корень этого полинома. Возвращаясь, напримѣръ, къ случаю $y = \sqrt{\pm x^2 + px + q}$ и обозначая черезъ β другой корень подкоренного полинома, получимъ $yz = \sqrt{\mp (\beta - a) z \pm 1}$. Принимая новый радикалъ за новую перемѣнную интегрированія, мы и придемъ къ подстановкѣ (2). Точно такъ же случай $m = 4$ сводится къ случаю $m = 3$; но тщетно было бы пытаться свести послѣдній къ случаю $m = 2$. А именно, болѣе глубокое изученіе этихъ интеграловъ (при $m = 4$ и $m = 3$), называемыхъ эллиптическими, дастъ возможность доказать, что ихъ нельзя, вообще говоря, выразить въ конечномъ видѣ алгебраически-логариѳмическими функціями, и что попытка привести ихъ къ интеграламъ отъ раціональныхъ дифференціаловъ можетъ быть сравниваема съ попыткою придать поверхности кольца сферическую форму путемъ непрерывной деформаціи[1]). При помощи вычисленія, подобнаго изложенному въ предыдущемъ §, удается лишь доказать, что эллиптическіе интегралы приводятся къ слѣдующимъ:

$$\int \frac{dx}{y}, \quad \int \frac{x\,dx}{y}, \quad \int \frac{dx}{(x-a)y},$$

которые называются интегралами перваго, второго и третьяго вида; далѣе при помощи извѣстныхъ подстановокъ приходимъ къ тому, чтобы принять интегралы

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad \int \frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

за типы интеграловъ перваго и второго вида. Первый изъ этихъ интеграловъ, взятый въ предѣлахъ отъ 0 до φ, обозначаютъ обыкновенно черезъ $F(k, \varphi)$, а второй, взятый въ тѣхъ же предѣлахъ, можно написать такъ

$$\frac{1}{k^2}\int_0^{\varphi} \frac{1-(1-k^2\sin^2\varphi)}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi = \frac{1}{k^2}\{F(k, \varphi) - E(k, \varphi)\},$$

условившись обозначать черезъ $E(k, \varphi)$ интегралъ

$$\int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi.$$

Значеніе φ на верхнемъ предѣлѣ называютъ амплитудою, а число k модулемъ интеграловъ. Въ механическихъ и геометрическихъ приложеніяхъ особенно важны значенія интеграловъ F и E при амплитудѣ $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Ихъ называютъ полными эллиптическими интегралами и обозначаютъ такъ

$$F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \qquad E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi.$$

---

[1]) См., для $m > 4$, „Cours d'Analyse de l'École polytechnique" par. C. Hermite (стр. 291—297).

749. Займемся теперь тѣми подстановками, о которыхъ упомянули въ предыдущемъ §, и постараемся составить ихъ такъ, чтобы избѣжать введенія мнимыхъ чиселъ. Сперва предположимъ вещественными корни α, β, γ функціи $y=\sqrt{\pm x^3+ax^2+bx+c}$. Пусть α означаетъ наименьшій изъ нихъ, когда при x^3 стоитъ знакъ $+$, и наибольшій въ противномъ случаѣ, β — пусть будетъ средній изъ корней; черезъ k^2 обозначимъ отношеніе $\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}$, всегда лежащее между 0 и 1. Подстановки $x=\alpha+(\beta-\alpha)\sin^2\varphi$ дастъ

$$\pm x^3+ax^2+bx+c=(\gamma-\alpha)(\beta-\alpha)^2(1-k^2\sin^2\varphi)\sin^2\varphi\cos^2\varphi;$$

поэтому, независимо отъ вещественнаго постояннаго множителя, радикалъ y преобразуется въ произведеніе $\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$ на $\sin\varphi\cos\varphi$ и поэтому

$$\frac{dx}{y} \text{ будетъ пропорціонально } \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Къ тому же результату приходимъ, когда не всѣ корни вещественны. При этомъ предположеніи, считая всегда коэффиціенты вещественными, можно представить y^2 въ видѣ $\pm(x-\alpha)(x^2+px+q)$ съ вещественными α, p и q. Положимъ

$$x=\alpha\pm\sqrt{\alpha^2+p\alpha+q}\,\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}.$$

Простое вычисленіе дастъ

$$\pm(x-\alpha)(x^2+px+q)=(\alpha^2+p\alpha+q)^{\frac{3}{2}}(1-k^2\sin^2\varphi)\frac{\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}{\cos^4\frac{\varphi}{2}},$$

гдѣ число

$$k^2=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\alpha+\frac{p}{2}}{\sqrt{\alpha^2+p\alpha+q}}\right)$$

всегда лежитъ между 0 и 1, потому что

$$\alpha^2+p\alpha+q=\left(\alpha+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{1}{4}p^2\right)>\left(\alpha+\frac{p}{2}\right)^2.$$

Итакъ, въ обоихъ случаяхъ $\int\frac{dx}{y}$ преобразуется въ $F(k,\varphi)$; что же касается интеграла $\int\frac{x\,dx}{y}$, то онъ приведется къ тому или другому изъ интеграловъ

$$\int \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad \int \frac{\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\, d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

смотря по тому, будутъ ли всѣ корни y вещественны или нѣтъ. Мы уже видѣли, что первый выражается черезъ интегралы F и E. Чтобы показать, что то же самое имѣетъ мѣсто и для второго, замѣтимъ, что

$$d\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\cdot\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\right)=\left(\frac{1}{2}\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\right)-k^2\sin^2\varphi\right)\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

откуда, интегрируя, получимъ

$$\int_0^\varphi \frac{\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\, d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = F(k,\varphi)-2E(k,\varphi)+2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\cdot\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}.$$

Далѣе, если y^2 полиномъ 4-ой степени, то, какъ уже сказано, подстановкою $x=a+\frac{1}{z}$, гдѣ a одинъ изъ корней этого полинома, сведемъ этотъ случай къ предыдущему. Но, если этотъ полиномъ не имѣетъ вещественнаго корня, то, не желая вводить мнимыхъ чиселъ, прибѣгаемъ къ другой подстановкѣ, которую мы здѣсь только укажемъ, не останавливаясь на ведущемъ къ ней изслѣдованіи [1]). Положимъ, что $y^2=(x^2+px+q)(x^2+p'x+q')$ и предположимъ, что каждый множитель правой части остается всегда положительнымъ. Полагая

$$(p-p')\lambda = q-q'-\sqrt{(q-q')^2+(p-p')(pq'-qp')},$$
$$(p-p')\mu = q-q'+\sqrt{(q-q')^2+(p-p')(pq'-qp')},$$

находимъ искомую подстановку въ видѣ

$$x=\frac{\lambda+\mu m\operatorname{tg}\varphi}{1+m\operatorname{tg}\varphi},$$

гдѣ m наименьшее изъ двухъ чиселъ

$$\sqrt{\frac{\lambda^2-p\lambda+q}{\mu^2-p\mu+q}}, \quad \sqrt{\frac{\lambda^2-p'\lambda+q'}{\mu^2-p'\mu+q'}}.$$

---

[1]) См. Schloemilch. „Compendium der höheren Analysis" 3-е изд., т. II, стр. 290 и слѣд.

750. Возможность выразить интегралъ отъ $f(x, y)\,dx$ при $y^2 = \pm x^2 + px + q$ въ алгебраически-логариѳмическомъ видѣ объясняется тѣмъ, что предыдущее уравненіе есть уравненіе коническаго сѣченія, т. е. уникурсальной кривой (§ 611) или кривой нулевого рода. Если, въ болѣе общемъ случаѣ, предположимъ, что въ $f(x, y)$ перемѣнная y связана съ x уравненіемъ $F(x, y) = 0$ какой нибудь уникурсальной кривой, то $f(x, y)\,dx$, очевидно, можно привести къ раціональному виду, принявъ за новую перемѣнную тотъ параметръ t, въ которомъ x и y могутъ быть въ данномъ случаѣ раціонально выражены. Такимъ образомъ и оказывается, что безчисленное множество дифференціаловъ, несравненно болѣе сложной формы, чѣмъ эллиптическіе, приводятся къ раціональному виду и интегрируются въ алгебраически-логариѳмическихъ функціяхъ. Гораздо труднѣе доказать обратную теорему: Если $F(x, y) = 0$ не уникурсальна, то $\int f(x, y)\,dx$ не выражается въ конечномъ видѣ въ алгебраическихъ и логариѳмическихъ функціяхъ.

[**Примѣчаніе.** Это теорема справедлива лишь въ томъ смыслѣ, что если $F = 0$ не уникурсальная кривая, то $\int f(x, y)\,dx$ при всякой раціональной функціи f отъ x и y не выражается въ упомянутой формѣ (см. И. Пташицкій „Общія предложенія объ интегрированіи въ конечномъ видѣ абелевыхъ дифференціаловъ", Матем. Сборникъ Т. XXI). Но нельзя сказать, что никакой интегралъ вида $\int f(x, y)\,dx$ не выражается въ этой формѣ, если $F = 0$ не уникурсальна (см. Е. Золотаревъ, „Теорія цѣлыхъ комплексныхъ чиселъ" (СПБ. 1874), стр. 107.]

Это выясняетъ истинную причину невозможности, вообще говоря, выразить въ такой формѣ эллиптическій интегралъ, потому что кривая 3-го порядка

$$y^2 = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3,$$

не имѣющая, вообще говоря, двойной точки, будетъ рода 1; она тогда лишь уникурсальна, когда она имѣетъ двойную точку, для чего необходимо, чтобы одинъ изъ трехъ корней функціи y былъ двойнымъ ($\alpha = \beta$), и тогда достаточно положить $x = \gamma + t^2$, чтобы сдѣлать подъинтегральный дифференціалъ раціональнымъ. Нѣсколько болѣе общій результатъ заключается въ слѣдующемъ: Всякій разъ, когда x и y связаны уравненіемъ вида

$$a y^n + b x y^{n-1} + c x^2 y^{n-2} + \cdots = a' y^{n-1} + b' x y^{n-2} + c' x^2 y^{n-3} + \cdots$$

стоитъ только положить $y = tz$, чтобы получить

$$x = \frac{a' t^{n-1} + b' t^{n-2} + \cdots}{a t^n + b t^{n-1} + \cdots}, \quad y = \frac{a' t^n + b' t^{n-1} + \cdots}{a t^n + b t^{n-1} + \cdots}$$

и такимъ образомъ преобразовать $f(x, y)\,dx$ въ $\varphi(t)\,dt$, гдѣ $\varphi(t)$ — раціональная функція отъ t.

751. Биноміальные дифференціалы. Подъ этимъ названіемъ понимаютъ дифференціалы вида $x^p(a+bx^m)^q dx$. Мы обозначимъ интегралъ отъ даннаго дифференціала черезъ $\mathfrak{J}(p, q)$ и замѣтимъ, что подстановка $a+bx^m=t$ приводитъ его къ виду

$$\mathfrak{J}(p, q)=\frac{1}{mb}\int\left(\frac{t-a}{b}\right)^{\frac{p-1}{m}-1} t^q dt.$$

Интегралъ выражается въ конечномъ видѣ, если $\frac{p+1}{m}$ цѣлое число. Интегрированіе выполняется непосредственно, если это число цѣлое и положительное; въ противномъ случаѣ достаточно сдѣлать подстановку $t=\theta^n$ и выбрать цѣлое число n такъ, чтобы и nq было цѣлымъ, благодаря чему данный дифференціалъ приводится къ раціональному виду. Далѣе, если напишемъ $x^p(a+bx^m)^q$ въ видѣ $x^{p+mq}(b+ax^{-m})^q$, то, примѣняя къ новому выраженію предыдущее условіе, видимъ, что интегрированіе выполняется тотчасъ же (при помощи подстановки $b+ax^{-m}=t$), если число $\frac{p+mq+1}{m}$ — цѣлое. Итакъ, данный интегралъ приводится къ интегралу отъ раціональнаго дифференціала тогда, когда одно изъ чиселъ

$$\frac{p+1}{m},\quad \frac{p+1}{m}+q,$$

цѣлое или нуль. Эти условія называются условіями интегрируемости биноміальныхъ дифференціаловъ. Замѣтимъ еще, что числа p, m, q предполагаются всегда раціональными, иначе дифференціалъ былъ бы трансцендентнымъ. Чебышевъ [1]) доказалъ, что упомянутые случаи единственные, въ которыхъ интегралъ отъ биноміальнаго дифференціала выражается въ конечномъ видѣ (черезъ алгебраически-логариѳмическія функціи). Здѣсь, конечно, подразумѣвается, что дифференціалъ самъ по себѣ не раціоналенъ (и, слѣдовательно, p, q, m не всѣ равны цѣлымъ числамъ), и еще, что онъ не приводится къ раціональному виду подстановкою $x=t^n$, что имѣло бы мѣсто при p и m — дробныхъ и q цѣломъ. За исключеніемъ этихъ случаевъ, слѣдовательно, предполагается, что p и m — цѣлыя, а q — дробное; кромѣ того, можно предположить $m>0$, потому что подстановкою $x=\frac{1}{t}$ тотчасъ сведемъ къ этому случаю случай $m<0$.

752. Для вычисленія или упрощенія интеграла отъ биноміальнаго дифференціала стараются выразить его черезъ другіе, подобные ему, болѣе простые интегралы. При этомъ прежде всего замѣтимъ,

---

[1]) „Journal de Liouville" (1853, стр. 108).

что q всегда можно считать лежащимъ между 0 и 1. Въ самомъ дѣлѣ, предполагая $p+1 \gtreqless 0$, интегрированіе по частямъ даетъ

$$\mathfrak{J}(p, q) = \int (a+bx^m)^q d\frac{x^{p+1}}{p+1} = \frac{x^{p+1}}{p+1}(a+bx^m)^q - \frac{mqb}{p+1}\mathfrak{J}(p+m, q-1).$$

Съ другой стороны имѣемъ тождество

$$b\mathfrak{J}(p+m, q-1) = \mathfrak{J}(p, q) - a\mathfrak{J}(p, q-1).$$

Слѣдовательно,

$$(3) \qquad (p+mq+1)\mathfrak{J}(p, q) = x^{p+1}(a+bx^m)^q + mqa\mathfrak{J}(p, q-1).$$

Изъ этой формулы беремъ $\mathfrak{J}(p, q)$ или $\mathfrak{J}(p, q-1)$, смотря по тому, будетъ ли $q>0$ или <0. Повторнымъ примѣненіемъ этого преобразованія можно отъ $q>0$ отнять, или къ $q<0$ прибавить сколько угодно единицъ. Замѣтимъ при этомъ, что какъ только одинъ изъ коэффиціентовъ при $\mathfrak{J}(p, q)$ или при $\mathfrak{J}(p, q-1)$ окажется нулемъ, такъ будемъ имѣть дѣло съ однимъ изъ случаевъ интегрируемости (въ конечномъ видѣ), и формула (3) сама дастъ значеніе $\mathfrak{J}(p, q-1)$ или $\mathfrak{J}(p, q)$. Точно такъ же можно достигнуть того, что p будетъ заключаться между 0 и m. Дѣйствительно, интегрированіе по частямъ, произведенное при $q+1 \gtreqless 0$, дастъ

$$\mathfrak{J}(p, q) = \int x^{p-m+1} d\frac{(a+bx^m)^{q+1}}{(q+1)mb}$$

$$= x^{p-m+1}\frac{(a+bx^m)^{q+1}}{(q+1)mb} - \frac{p-m+1}{(q+1)mb}\mathfrak{J}(p-m, q+1).$$

Съ другой стороны, имѣемъ

$$\mathfrak{J}(p-m, q+1) = a\mathfrak{J}(p-m, q) + b\mathfrak{J}(p, q),$$

слѣдовательно,

$$(4) \quad (p+mq+1)b\mathfrak{J}(p, q) = x^{p-m+1}(a+bx^m)^{q+1} - (p-m+1)a\mathfrak{J}(p-m, q).$$

Изъ этого соотношенія беремъ $\mathfrak{J}(p, q)$ или $\mathfrak{J}(p-m, q)$, смотря по тому, будетъ ли $p>0$ или <0. Итакъ, мы видимъ, что съ помощью формулъ (3) и (4) вычисленіе интеграла отъ всякаго биноміальнаго дифференціала всегда приводится къ случаямъ, въ которыхъ

$$p \text{ и } m \text{ — цѣлыя}, \quad m>0, \quad 0<q<1, \quad 0<p<m.$$

753. Примѣры. a) Для вычисленія $\int \sqrt{x^2+2x-1}\,\frac{dx}{x}$, полагаемъ $\sqrt{x^2+2x-1} = t-x$, откуда

$$x = \frac{t^2+1}{2(t+1)}, \quad \sqrt{x^2+2x-1} = t-x = \frac{t^2+2t-1}{2(t+1)}, \quad dx = \frac{t^2+2t-1}{2(t+1)^2}dt.$$

Предложенный интегралъ преобразуется въ

$$\frac{1}{2}\int\frac{(t^2+2t-1)^2\,dt}{(t+1)^2(t^2+1)}=\int\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{t+1}+\frac{1}{(t+1)^2}-\frac{2}{t^2+1}\right)dt.$$

Легкое вычисленіе дастъ окончательно для значенія интеграла выраженіе

$$\sqrt{x^2+2x-1}+\log\left(x+1+\sqrt{x^2+2x-1}\right)-2\operatorname{arc\,tg}\left(x+\sqrt{x^2+2x-1}\right)+C.$$

Быстрѣе мы достигли бы цѣли, разложивъ интегралъ на

$$\int\frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{x^2+2x-1}}+\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x-1}}-\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}},$$

и замѣтивъ, что

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}}=\mp\int\frac{d\frac{1}{x}}{\sqrt{2-\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}}=\mp\arcsin\frac{x-1}{x\sqrt{2}}+C',$$

гдѣ (сравн. съ § 725, а) надо взять верхній или нижній знакъ, смотря по тому, будетъ ли $x>0$ или <0. Первоначально полученное выраженіе потому и предпочтительнѣе, что въ немъ нѣтъ двойственности знака. Эквивалентность обѣихъ формъ вытекаетъ изъ тождества

$$\pm\arcsin\frac{x-1}{x\sqrt{2}}=2\operatorname{arc\,tg}\left(x+\sqrt{x^2+2x-1}\right)-(1\pm2)\frac{\pi}{4}.$$

b) Аналогичнымъ путемъ вычисляется $\int\sqrt{x^2-1}\,\frac{dx}{x}$. Но можно этотъ интегралъ разсматривать, какъ интегралъ отъ биноміальнаго дифференціала, въ которомъ $p=-1$, $m=2$, $q=\frac{1}{2}$. Слѣдовательно, $\frac{p+1}{m}=0$ и первое условіе интегрируемости выполнено (что всегда имѣемъ мѣсто при $p=-1$, каково бы ни было $m\gtrless0$). Поэтому полагаемъ $x^2-1=t^2$ и получаемъ

$$\int\sqrt{x^2-1}\,\frac{dx}{x}=\int\frac{t^2\,dt}{t^2+1}=t-\operatorname{arc\,tg}t+C=\sqrt{x^2-1}+\arcsin\frac{1}{x}+C'.$$

c) Если желаемъ вычислить интегралъ отъ $\frac{dx}{x^3\sqrt{x-1}}$, разсматривая это выраженіе, какъ биноміальный дифференціалъ, то замѣтимъ сперва, что $p=-3$, $m=1$, $q=-\frac{1}{2}$, первое условіе интегрируемости выполнено (какъ это всегда бываетъ при $m=\pm1$ и p цѣломъ), и достаточно положить $x-1=t^2$, чтобы сдѣлать дифференціалъ раціональнымъ и съ помощью весьма легкаго интегрированія найти

$$\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x-1}}=\frac{3}{4}\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{3x+2}{4x^2}\sqrt{x-1}+C.$$

d) Въ интегралѣ отъ $\dfrac{x^4\,dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$ имѣемъ $p=4$, $m=2$, $q=-\frac{3}{2}$; второе условіе интегрируемости выполнено, такъ какъ $\dfrac{p+1}{m}+q=1$. Слѣдовательно, надо положить $x^{-2}-1=t^{-2}$, т. е.

$$x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\quad dx=\frac{dt}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Но въ данномъ случаѣ скорѣе придемъ къ цѣли, если сперва произведемъ интегрированіе по частямъ

$$\int\frac{x^4\,dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\int x^3\,d(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}-3\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{3x-x^3}{2\sqrt{1-x^2}}-\frac{3}{2}\arcsin x+C.$$

Это сводится къ примѣненію формулы (4).

e) Въ интегралѣ отъ $\dfrac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ имѣемъ $p=-\frac{1}{2}$, $m=\frac{1}{4}$, $q=\frac{1}{3}$; $\dfrac{p+1}{m}=2$ — первое условіе интегрируемости выполнено. Поэтому можно быть увѣреннымъ, что подстановка $t=1+\sqrt[4]{x}$ приведетъ къ цѣли. Мы получимъ

$$4\int(t-1)\,t^{\frac{1}{3}}\,dt=\tfrac{3}{7}(4t-7)\,t^{\frac{4}{3}}+C,$$

слѣдовательно,

$$\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx=\frac{3}{7}\left(4\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}-3\right)\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}+C.$$

f) Если требуется вычислить

$$\int\frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

то, замѣчая, что

$$\frac{p+1}{m}=\frac{n+1}{2},\quad\frac{p+1}{m}-q=\frac{n}{2},$$

мы видимъ, что приведеніе къ интегралу отъ раціональной функціи возможно лишь при n — цѣломъ. Смотря по тому, будетъ ли n нечетное или четное, интегралъ приведется къ

$$-\int(1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}\,dt,\quad\int\frac{t^n\,dt}{(1+t^2)^{\frac{n}{2}+1}}$$

подстановкою $x = \sqrt{1-t^2}$ или $x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$. Впрочемъ, интегрированіе по частямъ даетъ формулу

$$\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{n-1}}{n}\sqrt{1-x^2} + \frac{n-1}{n}\int \frac{x^{n-2}\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

которая позволяетъ свести данный интегралъ къ

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + C, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C,$$

смотря по тому, будетъ ли n нечетное или четное. Если интегралъ берется отъ 0 до 1, то приходимъ къ извѣстнымъ уже результатамъ (§ 727, g), что легко видѣть, положивъ $x = \sin\theta$.

g) Если желаемъ вычислить интегралъ [1])

$$\int \left(\sqrt[3]{x^3 - \sqrt{x^3+x^6}} + \sqrt[3]{x^3 - \sqrt{x^3+x^6}}\right) dx,$$

то стоитъ только замѣтить, что коэффиціентъ при dx, на основаніи формулы Тарталіа (§ 528), есть корень уравненія $y^3 + 3xy - 2x^3 = 0$; припоминая замѣчаніе, сдѣланное въ концѣ § 750, тотчасъ приходимъ къ подстановкѣ $x = \frac{3t}{2-t^3}$, которая приводитъ данный интегралъ къ $18\int \frac{(1+t^3)\,t^2\,dt}{(2-t^3)^3}$, а полагая еще $2 - t^3 = 3\theta$, къ

$$2\int \frac{\theta - 1}{\theta^3}\,d\theta = \frac{1-2\theta}{\theta^2} + C = \frac{x^2}{y^2}(x^2 - 2y) + C.$$

Въ то же время имѣемъ $xy^3 - 2y^2 = 2x^4 - 3x^2y - 2y^2 = (x^2 - 2y)(2x^2 + y)$. Поэтому предложенный интегралъ равенъ

$$\frac{x^3\left(\sqrt[3]{x^3 + \sqrt{x^3+x^6}} + \sqrt[3]{x^3 - \sqrt{x^3+x^6}}\right) - 2x^2}{\left(\sqrt[3]{x^3 + \sqrt{x^3+x^6}} + \sqrt[3]{x^3 - \sqrt{x^3+x^6}}\right) + 2x^2} + C.$$

Предыдущее вычисленіе можно нѣсколько сократить, если замѣтимъ, что $x^2\,dt = x\,dy - y\,dx$, откуда слѣдуетъ

$$\begin{aligned}\int y\,dx &= \int x\,dy - \int x^2\,dt = xy - \int y\,dx - \int x^2\,dt\\ &= \frac{1}{2}\left(xy - \int x^2\,dt\right) = \frac{1}{2}\left(xy + \int \frac{d\theta}{\theta^2}\right)\\ &= \frac{x}{2y}(y^2 - x) + C = x^2\frac{xy-2}{y+2x^2} + C \quad \text{и т. д.}\end{aligned}$$

---

1) Hermite. „Cours d'Analyse", стр 242.

Интегрированіе трансцендентныхъ дифференціаловъ.

754. Случаи интегрируемости въ конечномъ видѣ трансцендентныхъ дифференціаловъ, т. е. случаи, когда эти интегралы выражаются въ извѣстныхъ элементарныхъ функціяхъ, весьма рѣдки. Въ простѣйшихъ случаяхъ, когда такое выраженіе возможно, обыкновенно примѣняютъ болѣе или менѣе искусственные пріемы, а не какіе нибудь общія правила. Нѣкоторыя изъ этихъ общихъ правилъ надо, однако, замѣтить. Если f есть символъ раціональной функціи, то интегралы

$$\int f(e^x)\,dx, \quad \int f(\operatorname{tg} x)\,dx, \quad \int f(\sin x, \cos x)\,dx$$

всегда могутъ быть найдены съ помощью соотвѣтственныхъ подстановокъ $t = e^x$, $t = \operatorname{tg} x$, $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ гдѣ t — новая перемѣнная интегрированія. Такимъ образомъ получаютъ

$$\int f(e^x)\,dx = \int f(t)\,\frac{dt}{t}, \qquad \int f(\operatorname{tg} x)\,dx = \int \frac{f(t)\,dt}{1+t^2},$$

$$\int f(\sin x, \cos x)\,dx = \int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2\,dt}{1+t^2},$$

и преобразованные интегралы вычисляются, какъ интегралы отъ раціональныхъ дифференціаловъ. Тѣ же подстановки бываютъ часто полезны и тогда, когда f не раціональная функція.

755. Упражненія. a) Интегралъ отъ $\frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ берется съ помощью подстановки $t = e^x$, и получается

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arc\,tg} t + C = \operatorname{arc\,tg} e^x + C$$

b) Чтобы найти интегралъ отъ $\frac{dx}{a + b\cos x}$, возьмемъ за новую перемѣнную $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Получаемъ, смотря по тому, будетъ ли a^2 больше или меньше b^2,

$$\int \frac{dx}{a + b\cos x} = \pm \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C$$

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \log \left. \frac{b + a\cos x + \sqrt{b^2 - a^2}\cdot\sin x}{a + b\cos x}\right| + C,$$

гдѣ $\div$ означаетъ $\operatorname{sng}(a+b)$. Отъ одного выраженія къ другому легко перейти на основаніи соотношенія между arc tg и log.

c) Точно такъ же вычисленіе $\int \operatorname{tg}^n x\,dx$ приводится къ вычисленію $\int \frac{t^n\,dt}{1+t^2}$ при помощи подстановки $t = \operatorname{tg} x$. Но при n — цѣломъ положительномъ можно иначе поступить, повторно примѣняя слѣдующую формулу

$$\int \operatorname{tg}^n x\,dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) \operatorname{tg}^{n-2} x\,dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x\,dx.$$

Такимъ образомъ въ концѣ концовъ придемъ къ одному изъ интеграловъ

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\log|\cos x| + C, \quad \int dx = x + C,$$

смотря по тому, будетъ ли n — нечетное или четное. Можно такъ же поступать при n — отрицательномъ, но въ этомъ случаѣ удобнѣе замѣтить, что

$$\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^n x} = \int \cot^n x\,dx = -\frac{\cot^{n-1} x}{n-1} - \int \cot^{n-2} x\,dx$$

и т. д.

d) Чтобы вычислить интегралъ отъ $\frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$, положимъ $\operatorname{tg} x = t^2$; интегралъ приведется къ $2\int \frac{dt}{1+t^4}$ — интегралу, который мы уже вычисляли (§ 744, c). Мы получимъ окончательно

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \log|\sin x + \cos x + \sqrt{\sin 2x}| + \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin(\sin x - \cos x) + C.$$

e) При вычисленіи интеграла вида $\int f(\sin x, \cos x)\,dx$ часто можно обойтись безъ примѣненія указанной въ § 754 подстановки $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, примѣняя интегрированіе по частямъ и различные искусственные пріемы, къ которымъ (сравн. съ § 723, d) принадлежитъ умноженіе дифференціала на $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Напримѣръ, съ помощью упомянутой подстановки можно найти

$$\int \frac{dx}{\sin^5 x} = -\frac{\cot x}{4}\left(\frac{1}{\sin^3 x} + \frac{3}{2\sin x}\right) + \frac{3}{8}\log\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Но удобнѣе свести данный интегралъ (ср. съ § 723, a) къ одному изъ слѣдующихъ

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C, \qquad \int \frac{dx}{\sin x} = \log\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

что всегда возможно, когда дѣло идетъ объ интегралѣ $\int \frac{dx}{\sin^n x}$ при n цѣломъ положительномъ. Дѣйствительно, мы имѣемъ

$$\int \frac{dx}{\sin^n x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^n x}\, dx = \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x} - \frac{1}{n-1} \int \cos x\, d \frac{1}{\sin^{n-1} x},$$

а слѣдовательно, съ помощью интегрированія по частямъ

$$\int \frac{dx}{\sin^n x} = \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x} - \frac{1}{n-1} \frac{\cos x}{\sin^{n-1} x}.$$

Аналогично этому трактуется $\int \frac{dx}{\cos^n x}$.

f) Подстановка $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ даетъ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} = \sqrt{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t(1+t^2)}}.$$

Слѣдовательно, мы имѣемъ передъ собою эллиптическій интегралъ, который можно разсматривать и какъ интегралъ отъ биноміальнаго дифференціала, въ которомъ

$$p = q = -\frac{1}{2}, \quad m = 2, \quad \frac{p+1}{m} = \frac{1}{4}, \quad \frac{p+1}{m} + q = -\frac{1}{4}.$$

Поэтому (§§ 749, 751) тщетно надѣяться какимъ либо путемъ выразить этотъ интегралъ въ конечномъ видѣ.

g) Для вычисленія интеграловъ въ родѣ $\int \sin^3 x\, dx$, $\int \cos^4 x\, dx$ и т. д. также нѣтъ надобности прибѣгать къ подстановкѣ. Тригонометрія (сравн. съ § 725, o) даетъ соотношенія

$$\sin^3 x = \tfrac{3}{4} \sin x - \tfrac{1}{4} \sin 3x, \qquad \cos^4 x = \tfrac{1}{8} \cos 4x + \tfrac{1}{2} \cos 2x + \tfrac{3}{8},$$

откуда тотчасъ получаемъ

$$\int \sin^3 x\, dx = -\tfrac{3}{4} \cos x + \tfrac{1}{12} \cos 3x + C,$$

$$\int \cos^4 x\, dx = \tfrac{1}{32} \sin 4x + \tfrac{1}{4} \sin 2x + \tfrac{3}{8} x + C.$$

Точно такъ же, для вычисленія $\int \sin^3 x \cos^4 x\, dx$ можемъ взять тѣ же два соотношенія и, перемножая ихъ, вывести (ср. съ § 723, d) слѣдующее

$$32 \sin^3 x \cos^4 x = \tfrac{1}{2} (3 \sin x + 3 \sin 3x - \sin 5x - \sin 7x),$$

откуда интегрированіемъ получимъ

$$\int \sin^3 x \cos^4 x\, dx = \tfrac{1}{64} \left(-3 \cos x - \cos 3x + \tfrac{1}{5} \cos 5x + \tfrac{1}{7} \cos 7x \right) + C.$$

Аналогичнымъ способомъ вычисляютъ всѣ интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$. Но можно также воспользоваться формулою приведенія, которая получается интегрированіемъ по частямъ, а именно

$$(m+n)\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \sin^{m+1} x \cos^{n-1} x + (n-1)\int \sin^m x \cos^{n-2} x\, dx \text{ и т. д.}$$

h) Иногда одного интегрированія по частямъ достаточно, чтобы избавиться отъ нѣкоторыхъ трансцендентныхъ функцій подъ знакомъ интеграла. Такъ, напримѣръ, для всякой пары раціональныхъ функцій f и g имѣемъ

$$\int g'(x) \log f(x)\, dx = g(x) \log f(x) - \int \frac{f'(x)}{f(x)} g(x)\, dx,$$

и послѣдній интегралъ выражается въ извѣстныхъ функціяхъ. Напримѣръ, (ср. съ § 744, b)

$$\int x \log (x^4 - 1)\, dx = \frac{1}{2} x^2 \log (x^4 - 1) - 2\int \frac{x^5\, dx}{x^4 - 1}$$

$$= (x^2 - 1) \log \sqrt{x^2 - 1} + (x^2 + 1) \log \sqrt{x^2 + 1} - x^2 + C.$$

Замѣчательные опредѣленные интегралы.

756. Эллиптическіе интегралы. Полный эллиптическій интегралъ (§ 748) перваго вида $F(k)$ легко вычисляется съ помощью ряда, такъ какъ (§ 233, e) имѣемъ

$$F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \varphi + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 \sin^4 \varphi + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} k^6 \sin^6 \varphi + \cdots \right) d\varphi.$$

Отсюда, пользуясь формулою (15) § 727, найдемъ

$$(5)\qquad F(k) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2} k\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^2\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} k^3\right)^2 + \cdots \right\}.$$

Легко прослѣдить, какъ измѣняется $F(k)$ при возрастаніи k отъ 0 до 1. Ясно, что $F(k)$ постоянно возрастаетъ отъ $F(0) = \frac{\pi}{2}$ до

$$F(1) = \lim_{\psi = \frac{\pi}{2}} \int_0^{\psi} \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \lim_{\psi = \frac{\pi}{2}} \log \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{\psi}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\psi}{2}} = \infty.$$

Справа отъ $k=0$ функція F возрастаетъ медленно, такъ какъ изображающая ее кривая уподобляется здѣсь параболѣ $y=\frac{\pi}{8}x^2$ въ смежности съ ея вершиною; а подъ конецъ она возрастаетъ весьма быстро, такъ что кривая становится асимптотическою къ прямой $k=1$ (рис. 90). Чтобы увидать, какъ измѣняется функція $F(k)$ въ смежности съ $k=1$, замѣтимъ, что коэффиціентъ при k^{2n} въ разложеніи этой функціи асимптотиченъ къ $\frac{1}{2n}$ (§ 337, c), откуда слѣдуетъ, что (§ 339) слѣва отъ $k=1$ имѣетъ мѣсто асимптотическое равенство

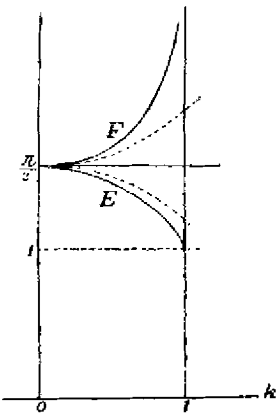

Рис. 90.

$$(6)\qquad F(k)=\log\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}.$$

757. Такимъ же образомъ вычисляется полный эллиптическій интегралъ второго вида $E(k)$, для котораго имѣетъ

$$E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{1}{2}k^2\sin^2\varphi-\frac{1}{2\cdot 4}k^4\sin^4\varphi-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}k^6\sin^6\varphi-\cdots\right)d\varphi;$$

интегрируя почленно, получимъ

$$(7)\quad E(k)=\frac{\pi}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}k\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^2\right)^2-\frac{1}{5}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}k^3\right)^2-\cdots\right\}.$$

При возрастаніи k отъ 0 до 1, $E(k)$ постоянно убываетъ отъ $\frac{\pi}{2}$ до

$$E(1)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,d\varphi=1.$$

Справа отъ $k=0$ кривая, изображающая функцію, уподобляется параболѣ $y=-\frac{1}{8}\pi x^2$ и при $k=1$ кривая касается прямой $k=1$ (рис. 90). Чтобы въ этомъ убѣдиться, стоитъ только вычислить производную

$$E'(k)=-\frac{\pi}{k}\left\{\left(\frac{1}{2}k\right)^2+\frac{2}{3}\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^2\right)^2+\frac{3}{5}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}k^3\right)^2+\cdots\right\}.$$

и замѣтить, что

$$k\,E'(k)=E(k)-F(k),$$

откуда и слѣдуетъ, что $\lim\limits_{k=1-0} E'(k) = -\infty$. Чтобы ближе изслѣдовать ходъ функціи слѣва отъ $k=1$, замѣтимъ, что для k, стремящагося къ предѣлу 1, теорема Лопиталя дастъ

$$\lim \frac{1-E(k)}{(1-k^2)\log \sqrt{1-k^2}} = \frac{1}{2}\lim \frac{E'(k)}{\log \sqrt{1-k^2}} = -\frac{1}{2}\lim \frac{F'(k)}{\log \sqrt{1-k^2}} = \frac{1}{2}.$$

Слѣдовательно, имѣемъ асимптотическое равенство

$$E(k) = 1 + \frac{1-k^2}{2}\log \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}. \tag{8}$$

758. Ряды (5) и (7) весьма полезны для вычисленія значеній $F(k)$ и $E(k)$ при весьма малыхъ значеніяхъ k, но при k недостаточно маломъ они становятся непригодными вслѣдствіе крайне медленной сходимости. Если k близко къ единицѣ, то асимптотическія выраженія (6) и (8) даютъ понятіе объ общемъ ходѣ этихъ функцій, но если мы хотимъ дѣйствительно вычислить значенія функцій, то надо эти формулы дополнить, чтобы получить сколько нибудь достаточное приближеніе. Мы ограничимся здѣсь тѣмъ, что покажемъ какимъ образомъ вычисленіе интеграловъ F и E можетъ быть приведено къ вычисленію подобныхъ же интеграловъ, но съ модулемъ, сколь угодно малымъ. Этой цѣли можно достигнуть съ помощью такъ называемаго преобразованія Ландена (Landen)

$$\sin\varphi = \frac{(1+\mu)\sin\psi}{1+\mu\sin^2\psi}, \tag{9}$$

гдѣ постоянная μ (лежащая между 0 и 1) опредѣляется уравненіемъ $k = \frac{2\sqrt{\mu}}{1+\mu}$. Легкое вычисленіе даетъ

$$\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = \frac{1-\mu\sin^2\psi}{1+\mu\sin^2\psi}, \qquad \cos\varphi = \frac{\sqrt{1-\mu^2\sin^2\psi}}{1+\mu\sin^2\psi}\cos\psi.$$

Изъ (9) дифференцированіемъ получаемъ теперь

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{(1+\mu)\,d\psi}{\sqrt{1-\mu^2\sin^2\psi}}$$

и, наконецъ,

$$F(k) = (1+\mu)F(\mu), \tag{10}$$

если примемъ во вниманіе, что при постоянномъ возрастаніи ψ отъ 0 до $\frac{\pi}{2}$ первоначальная перемѣнная дѣлаетъ то же самое. Аналогичное вычисленіе, которое мы, для сокращенія, здѣсь опускаемъ, даетъ вторую важную формулу, а именно

$$E(k) = \frac{2}{1+\mu}E(\mu) - (1-\mu)F(\mu). \tag{11}$$

Ясно, что обѣ выше приведенныя формулы остаются справедливыми и для неполныхъ интеграловъ; амплитуды φ и ψ имѣютъ тогда различныя значенія, связанныя формулою (9). Уравненіе (11) раскрываетъ слѣдующее важное обстоятельство: Всякій эллиптическій интегралъ перваго вида можетъ быть выраженъ черезъ два интеграла второго вида.

759. Возвратимся къ полнымъ интеграламъ и покажемъ, какимъ образомъ можно воспользоваться формулою (10), чтобы вычислить $F(k)$ при k близкомъ къ 1. Начиная съ k, составимъ такой рядъ чиселъ $k, k_1, k_2, \ldots$, чтобы

$$k=\frac{2\sqrt{k_1}}{1+k_1},\quad k_1=\frac{2\sqrt{k_2}}{1+k_2},\quad k_2=\frac{2\sqrt{k_3}}{1+k_3},\quad \ldots.$$

Тогда будемъ имѣть вообще

$$k_{n+1}=\frac{1-\sqrt{1-k_n^2}}{1+\sqrt{1-k_n^2}}<\frac{1-(1-k_n)}{1+(1-k_n)}<k_n.$$

Числа k_n — положительныя и постоянно убывающія при возрастаніи n, должны стремиться къ нѣкоторому предѣлу l. Этотъ предѣлъ долженъ удовлетворять уравненію $l=\frac{2\sqrt{l}}{1+l}$. Освободивъ это уравненіе отъ корня $l=0$ и отбросивъ недопустимый корень $l=1$, приведемъ его къ $2+\sqrt{l}+l=0$, которое не имѣетъ вещественныхъ корней. Поэтому $l=0$. Повторное примѣненіе формулы (10) даетъ

$$F(k)=(1+k_1)(1+k_2)(1+k_3)\cdots(1+k_n)\,F(k_n),$$

гдѣ k_n будетъ сколь угодно мало. При безконечно большомъ n можно, такимъ образомъ, съ помощью (5) вычислить $F(k_n)$, а затѣмъ и $F(k)$. При возрастаніи n до ∞ имѣемъ

$$\lim F(k_n)=F(0)=\frac{\pi}{2},$$

а слѣдовательно,

$$F(k)=\tfrac{1}{2}\pi(1+k_1)(1+k_2)(1+k_3)\cdots.$$

Построивъ таблицу значеній F, съ помощью формулы (11) аналогичнымъ образомъ можно вычислить и значенія E. Такія, весьма полезныя для приложеній, таблицы составлены Лежандромъ (и для неполныхъ интеграловъ) и называются эллиптическими таблицами[1]. Приведемъ изъ нихъ здѣсь нѣсколько чиселъ

$$F\left(\frac{1}{3}\right)=1{,}617\ldots,\ F\left(\frac{1}{2}\right)=1{,}685\ldots,\ F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=1{,}854\ldots,\ F\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2{,}156\ldots,$$

$$E\left(\frac{1}{3}\right)=1{,}526\ldots,\ E\left(\frac{1}{2}\right)=1{,}467\ldots,\ E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=1{,}350\ldots,\ E\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1{,}211\ldots,$$

---

[1]) Legendre. „Traité des fonctions elliptiques", т. II.

760. Упражненія. a) При вычисленіи интеграла отъ $\frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$, которое мы предприняли въ § 755, f съ помощью подстановки $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, предпочтительнѣе примѣнить болѣе простую подстановку $\sin x = t$. Тогда съ помощью дальнѣйшей подстановки $t = \cos^2\varphi$ (на которую наводятъ соображенія § 749), приходимъ къ слѣдующему нормальному виду даннаго интеграла

$$-2\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}} = -\sqrt{2}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}.$$

Въ частности, получимъ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt{\sin x}} = \sqrt{2}\,F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2{,}622\ldots.$$

b) Подобнымъ же образомъ вычислимъ интегралы

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \quad и \quad \int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}},$$

положивъ $x = \cos\varphi$. Они преобразуются соотвѣтственно въ

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}} - \sqrt{2}\int\sqrt{1-\tfrac{1}{2}\sin^2\varphi}\,d\varphi.$$

Въ частности, будемъ имѣть

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1{,}311\ldots.$$

$$\int_0^1\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \sqrt{2}\,E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0{,}599\ldots.$$

c) Нѣсколько сложнѣе будетъ вычисленіе интеграловъ

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}, \quad \int\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}.$$

Примѣняя къ первому подстановку $x = -1 + \sqrt{3}\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}$, получимъ

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2\sin^2\varphi}}.$$

Ко второму, на основаніи сказаннаго въ концѣ § 749, надо примѣнить подстановку

$$x = \frac{\operatorname{tg}\varphi - (1+\sqrt{2})}{\operatorname{tg}\varphi + (1+\sqrt{2})}.$$

Тогда онъ преобразуется въ

$$\int \frac{(2+\sqrt{2})\,d\varphi}{\sqrt{\sin^4\varphi + 6(3+2\sqrt{2})\sin^2\varphi\cos^2\varphi + (3+2\sqrt{2})^2\cos^4\varphi}}.$$

Выраженіе подъ знакомъ корня получается отъ умноженія

$$\sin^2\varphi + (3+2\sqrt{2})^2\cos^2\varphi = (3+2\sqrt{2})^2\left(1 - \frac{4\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}\sin^2\varphi\right)$$

на $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$. Поэтому

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \int \frac{(2-\sqrt{2})\,d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{4\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}\sin^2\varphi}}.$$

Принимая, далѣе, во вниманіе, что

$$\text{при } k^2 = \frac{4\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}, \qquad \mu = \frac{1-\sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

получимъ, примѣняя формулу (10),

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) F\left(\frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2} F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0{,}927\ldots.$$

d) Когда предложено найти интегралъ

$$\int_0^\pi \frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k\cos\varphi}},$$

который напоминаетъ другой, уже вычисленный въ § 725, i, то можно начать съ интегрированія по частямъ, которое дастъ

$$\int_0^\pi \frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k\cos\varphi}} = \frac{2}{k}\int_0^\pi \sin\varphi\,d\sqrt{1-k\cos\varphi} = -\frac{2}{k}\int_0^\pi \sqrt{1-k\cos\varphi}\cdot\cos\varphi\,d\varphi$$

$$= \frac{2}{k}\int_0^\pi \frac{k-\cos\varphi}{\sqrt{1-k\cos\varphi}}\,d\varphi - 2\int_0^\pi \frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k\cos\varphi}} = \frac{2}{3k}\int_0^\pi \frac{k-\cos\varphi}{\sqrt{1-k\cos\varphi}}\,d\varphi.$$

Послѣдній интегралъ при замѣнѣ φ на $\pi - 2\varphi$ приметъ видъ

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k+\cos 2\varphi}{\sqrt{1+k\cos 2\varphi}}\, d\varphi = \frac{2}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+k\cos 2\varphi}\, d\varphi - \frac{2}{k}(1-k^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1+k\cos 2\varphi}}$$

или, если еще напишемъ $1+k-2k\sin^2\varphi$ вмѣсто $1+k\cos 2\varphi$,

$$\frac{2}{k}\sqrt{1+k}\left\{E\left(\sqrt{\frac{2k}{1+k}}\right) - (1-k)F\left(\sqrt{\frac{2k}{1+k}}\right)\right\}.$$

Слѣдовательно,

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-k\cos\varphi}} = \frac{4\sqrt{1-k}}{3k^2}\left\{E\left(\sqrt{\frac{2k}{1+k}}\right) - (1-k)F\left(\sqrt{\frac{2k}{1+k}}\right)\right\}.$$

e) Могутъ встрѣтиться эллиптическіе интегралы съ модулемъ $k > 1$, но ихъ всегда можно привести къ другимъ съ модулемъ, лежащимъ между 0 и 1. Разсмотримъ, напримѣръ, интегралы

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad \int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi,$$

въ которыхъ верхній предѣлъ φ не достигаетъ значенія $\frac{\pi}{2}$, а можетъ достигать лишь максимальнаго значенія α, опредѣляемаго уравненіемъ $\sin\alpha = \frac{1}{k}$. Когда φ измѣняется отъ 0 до α, то перемѣнная ψ, связанная съ φ уравненіемъ $\sin\psi = k\sin\varphi$ измѣняется отъ 0 до $\frac{\pi}{2}$, а такъ какъ

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{d\psi}{\sqrt{k^2-\sin^2\psi}},$$

то будемъ имѣть

$$\int_0^{\alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{k}\, F\left(\frac{1}{k}\right),$$

$$\int_0^{\alpha} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = \frac{1}{k}\, F\left(\frac{1}{k}\right) + k\left\{E\left(\frac{1}{k}\right) - F\left(\frac{1}{k}\right)\right\}.$$

Напримѣръ,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-2\sin^2\varphi}} = 1{,}311\ldots, \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1-2\sin^2\varphi}\, d\varphi = 0{,}599\ldots$$

f) Въ Механикѣ доказывается, что время полнаго колебанія простого маятника, съ длиною l и амплитудою колебанія 2α, измѣряется величиною интеграла

$$T = \sqrt{\frac{2l}{g}} \int_0^{\alpha} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}},$$

гдѣ g обозначаетъ ускореніе силы тяжести въ мѣстѣ наблюденія. Этою важною формулою пользуются для опредѣленія g въ различныхъ мѣстахъ земной поверхности, съ тѣмъ, чтобы изъ результатовъ многихъ наблюденій составить себѣ понятіе о формѣ этой поверхности. Если положимъ $k = \sin\frac{\alpha}{2}$ и $\sin\frac{\theta}{2} = k\sin\varphi$, то получимъ

$$\cos\theta - \cos\alpha = 2\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right) = 2k^2\cos^2\varphi.$$

Принимая далѣе во вниманіе, что при измѣненіи θ отъ 0 до α, φ постоянно возрастаетъ отъ 0 до $\frac{\pi}{2}$, найдемъ

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\,F(k) = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2} + \frac{9}{64}\sin^4\frac{\alpha}{2} + \frac{25}{256}\sin^6\frac{\alpha}{2} + \cdots\right).$$

Если α очень мало, то можно ограничиться въ выраженіи T первымъ членомъ, который отъ α не зависитъ, и такимъ образомъ получить доказательство изохронизма малыхъ колебаній. Если хотимъ достигнуть бо́льшей точности, то удерживаемъ еще одинъ членъ въ разложеніи. Можно также примѣнить формулу (10), замѣтивъ, что въ данномъ случаѣ $\mu = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{4}\right)$, и написать

$$T = \frac{\pi}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{4}\right)}\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

g) Другой замѣчательный интегралъ, встрѣчающійся въ теоріи движенія волчка, изображается такъ

$$\Phi = \frac{ab}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos\theta}}.$$

Сведемъ сперва интервалъ интегрированія къ $(0, \pi)$, замѣчая, что интегралъ, распространенный на другую часть $(\pi, 2\pi)$, приводится къ первому замѣною θ на $2\pi - \theta$. Далѣе можно считать, что $ab > 0$, потому что при $ab < 0$ замѣною θ на $\pi - \theta$ сведемъ этотъ случай къ первому. Съ другой стороны, замѣтимъ, что

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos\theta = (a+b)^2 + c^2 - 4ab\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{4ab}{k^2}\left(1 - k^2\cos^2\frac{\theta}{2}\right).$$

если положимъ

$$k^2 = \frac{4\,a\,b}{(a+b)^2 + c^2}\,.$$

Поэтому, принимая за перемѣнную интегрированія $\varphi = \frac{1}{2}(\pi - \vartheta)$, получимъ

$$\Phi = \frac{k}{2\pi}\sqrt{a\,b}\int\limits_0^{\pi}\frac{\cos\vartheta\,d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2\cos^2\frac{\vartheta}{2}}} = -\frac{k}{\pi}\sqrt{a\,b}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}\,.$$

Написавъ еще $1 - 2\sin^2\varphi$ вмѣсто $\cos 2\varphi$, находимъ

$$(12)\qquad -\frac{\pi}{\sqrt{a\,b}}\,\Phi = k\,F(k) + \frac{2}{k}\,\{E(k) - F(k)\}\,.$$

Затѣмъ формулы (5) и (7) дадутъ разложеніе Φ по степенямъ k:

$$\Phi = \frac{\sqrt{a\,b}}{16}\left(k^3 + \frac{3}{4}\,k^5 + \cdots\right).$$

Болѣе простое выраженіе получимъ, если отъ модуля k перейдемъ къ модулю

$$\mu = \frac{1 - \sqrt{1 - k^2}}{1 + \sqrt{1 - k^2}} = \frac{\sqrt{(a+b)^2 + c^2} - \sqrt{(a-b)^2 + c^2}}{\sqrt{(a+b)^2 + c^2} + \sqrt{(a-b)^2 + c^2}}\,,$$

пользуясь формулами (10) и (11). Въ самомъ дѣлѣ, принимая во вниманіе, что

$$\frac{2}{k(1+\mu)} = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\,,\qquad \frac{1}{2}\,k(1+\mu) - \frac{2}{k} = \sqrt{\mu} - \left(\sqrt{\mu} + \frac{1}{\sqrt{\mu}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{\mu}}\,,$$

преобразуемъ (12) въ

$$(13)\qquad -\frac{\pi}{\sqrt{a\,b}}\,\Phi = \frac{2}{\sqrt{\mu}}\,\{E(\mu) - F(\mu)\}\,.$$

Иными словами, предложенный интегралъ приводится къ типическому эллиптическому интегралу второго вида (§ 748):

$$\Phi = \frac{2\,\mu}{\pi}\sqrt{\mu\,a\,b}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1 - \mu^2\sin^2\varphi}}\,.$$

Разлагая правую часть формулы (13) въ рядъ, получимъ

$$\Phi = \tfrac{1}{2}\sqrt{\mu\,a\,b}\,(\mu + \tfrac{3}{8}\,\mu^3 + \tfrac{15}{64}\,\mu^5 + \cdots).$$

Если k весьма мало, то послѣднее разложеніе цѣлесообразнѣе разложенія, выведеннаго изъ формулы (12); если же k близко къ 1, то лучше прямо примѣнить асимптотическую формулу (6) къ выраженію (12).

h) При помощи довольно длиннаго, но не представляющаго существенныхъ затрудненій, вычисленія[1]), приходимъ къ формулѣ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log \sin \varphi \, d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = -\frac{1}{2} F(k) \log k - \frac{1}{4} \pi F(k'),$$

гдѣ $k' = \sqrt{1-k^2}$, и отсюда получаются при k весьма близкомъ къ 1 тѣ формулы, на которыя мы указывали въ началѣ § 758. Мы ограничимся здѣсь слѣдующимъ замѣчаніемъ. Напишемъ правую часть предыдущей формулы въ слѣдующемъ видѣ:

$$-\frac{1}{2}\left\{F(k) - \frac{\pi}{2}\right\} \log k - \frac{\pi}{4}\{F(k') + \log k\},$$

припомнимъ, что (§ 721, d)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin \varphi \, d\varphi = -\frac{\pi}{2} \log 2,$$

и что

$$\lim_{k=0} \left\{ \left[F(k) - \frac{\pi}{2} \right] \log k \right\} = 0,$$

какъ то слѣдуетъ изъ разложенія $F(k)$ въ рядъ по степенямъ k (§ 756, (5)) и перейдемъ къ предѣлу при $k = 0^0$; тогда, замѣнивъ еще k на k' и обратно, получимъ

$$\lim_{k=1} \left\{ F(k) + \log \sqrt{1-k^2} \right\} = \log 4.$$

Эта формула не только заключаетъ въ себѣ формулу (6), но позволяетъ внести въ эту формулу и въ формулу (8) еще маленькую поправку, состоящую въ томъ, что разность между лѣвою и правою частью формулы (6) будетъ не нуль, а $\log 4$:

$$F(k) = \log \frac{4}{\sqrt{1-k^2}}, \qquad E(k) = 1 + \frac{1-k^2}{2} \log \frac{4}{\sqrt{1-k^2}}.$$

i) Чтобы дать читателямъ понятіе о болѣе трудныхъ вопросахъ, которые могутъ быть рѣшены при помощи эллиптическихъ интеграловъ, мы приведемъ здѣсь двѣ интересныя формулы съ тѣмъ, чтобы вывести изъ нихъ нѣкоторыя заключенія. Когда k измѣняется отъ 0 до 1, то интегралы $F(k)$ и $F(k')$ измѣняются такъ, что отношеніе второго къ первому измѣняется отъ 0 до ∞ и притомъ постоянно возрастаетъ. Поэтому, если x

---

[1]) Schlömilch. „Compend. der höheren Analysis", т. 2, стр. 322, и въ „Bulletin de Darboux" (1897, стр. 109).

будетъ какое нибудь данное число, лежащее между 0 и 1, то будетъ существовать одно и только одно значеніе k, для котораго

$$\frac{1}{\pi}\log\frac{1}{x}=\frac{F(k')}{F(k)}.$$

Въ то же время можно доказать, что

$$1+2x+2x^4+2x^9+2x^{16}+\cdots=\sqrt{\frac{2}{\pi}F(k)},$$

гдѣ k функція отъ x, опредѣляемая предыдущимъ уравненіемъ *). Въ частности, когда x безпредѣльно приближается къ 1, будемъ имѣть все съ большимъ и большимъ приближеніемъ $F(k)=\dfrac{\pi^2}{2\log\frac{1}{x}}$, и потому сумма ряда будетъ стремиться (сравн. § 342, c) совпасть съ

$$\sqrt{\frac{\pi}{\log\frac{1}{x}}}\quad\text{или}\quad\sqrt{\frac{\pi}{1-x}}.$$

Точно такъ же имѣемъ

$$1-2x+2x^4-2x^9+2x^{16}-\cdots=\sqrt{\frac{2}{\pi}k'F(k)},$$

а поэтому (сравн. § 342, d), припоминая формулу (6), получимъ

$$\lim_{x=1}(x-x^4+x^9-x^{16}+\cdots)=\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{k'=0}\sqrt{k'\log\frac{1}{k'}}=\frac{1}{2}.$$

Напротивъ того, при $k=\frac{1}{\sqrt{2}}$, когда и $k'=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x=e^{-\pi}$, откуда

$$1+2e^{-\pi}+2e^{-4\pi}+2e^{-9\pi}+\cdots=\sqrt{\frac{2}{\pi}F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=1{,}086\ldots,$$

$$1-2e^{-\pi}+2e^{-4\pi}-2e^{-9\pi}+\cdots=\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\pi}F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=0{,}913\ldots,$$

Если хотимъ теперь переставить k и k', то надо будетъ замѣнить x другимъ числомъ x', связаннымъ съ x соотношеніемъ $\log\frac{1}{x}\log\frac{1}{x'}=\pi^2$, а такъ какъ съ другой стороны имѣемъ

$$(1+2x+2x^4+2x^9+\cdots)\left(\log\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{\frac{4}{\pi}F(k)F(k')},$$

---

*) Это извѣстная формула изъ теоріи эллиптическихъ функцій. См., напримѣръ, Schlömilch „Compendium der höheren Analysis". 2-й томъ второго изданія 1874 г., стр. 439, формула (105).

то видимъ, что лѣвая часть, какъ и правая, не измѣняется отъ замѣны x на x' и обратно. Такимъ образомъ получается доказательство одного раннѣе даннаго соотношенія (§ 342, с). Наконецъ, замѣтимъ, что переходя, при помощи преобразованія Ландена, отъ модуля k къ модулю $\varkappa = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}$, съ помощью того же преобразованія, примѣненнаго въ обратномъ смыслѣ, переходимъ отъ k' къ $\varkappa' = \sqrt{1-\varkappa^2}$. На основаніи формулы (10) будемъ поэтому имѣть

$$F(\varkappa) = (1+k)\,F(k), \quad F(\varkappa') = \tfrac{1}{2}(1+k)\,F(k'),$$

при чемъ значеніе ξ перемѣнной x, соотвѣтствующее модулю $\varkappa$, будетъ таково, что

$$\frac{1}{\pi}\log\frac{1}{\xi} = \frac{F(\varkappa')}{F(\varkappa)} = \frac{1}{2}\,\frac{F(k')}{F(k)} = \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{x},$$

т. е. $\xi = \sqrt{x}$. Поэтому имѣемъ

$$1 + 2\sqrt{x} + 2\sqrt{x^4} + 2\sqrt{x^9} + \cdots = \sqrt{\frac{2}{\pi}\,(1+k)\,F(k)}\,,$$

$$1 - 2\sqrt{x} + 2\sqrt{x^4} - 2\sqrt{x^9} + \cdots = \sqrt{\frac{2}{\pi}\,(1-k)\,F(k)}\,.$$

Переходя опять отъ k къ $\varkappa$, получимъ

$$1 + 2\sqrt[4]{x} + 2\sqrt[4]{x^4} + 2\sqrt[4]{x^9} + \cdots = (1+\sqrt{k})\sqrt{\frac{2}{\pi}\,F(k)}\,,$$

$$1 - 2\sqrt[4]{x} + 2\sqrt[4]{x^4} - 2\sqrt[4]{x^9} + \cdots = (1-\sqrt{k})\sqrt{\frac{2}{\pi}\,F(k)}\,,$$

откуда получается

$$\frac{2\sqrt[4]{x} + 2\sqrt[4]{x^9} + 2\sqrt[4]{x^{25}} + \cdots}{1 + 2x + 2x^4 + 2x^9 + \cdots} = \sqrt{k}.$$

Съ другой стороны,

$$\frac{1 - 2x + 2x^4 - 2x^9 + \cdots}{1 + 2x + 2x^4 + 2x^9 + \cdots} = \sqrt{k'}.$$

Возвышая оба равенства въ 4-ую степень и складывая, находимъ тождество

$$\left(2\sqrt[4]{x} + 2\sqrt[4]{x^9} + 2\sqrt[4]{x^{25}} + \cdots\right)^4 + (1 - 2x + 2x^4 - 2x^9 + \cdots)^4$$
$$= (1 + 2x + 2x^4 + 2x^9 + \cdots)^4.$$

Изъ него, путемъ сравненія коэффиціентовъ при одинаковыхъ степеняхъ x въ лѣвой и правой части, получается слѣдующая ариѳметическая теорема: Число всевозможныхъ разложеній нечетнаго числа на четыре квадрата въ восемь разъ больше числа всевозможныхъ разложеній учетвереннаго числа на четыре квадрата нечетныхъ чиселъ.

761. Эйлеровы интегралы. Подъ этимъ названіемъ понимаютъ интегралы

$$\int_0^1 x^{\mu-1}(1-x)^{\nu-1}\,dx, \qquad \int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-x}\,dx.$$

Первый называется Эйлеровымъ интеграломъ первaго вида. Это функція отъ двухъ положительныхъ перемѣнныхъ μ и ν, и притомъ симметрическая (что тотчасъ обнаруживается при замѣнѣ x на $1-x$). Второй интегралъ — функція отъ одной положительной перемѣнной μ, называется Эйлеровымъ интеграломъ второго вида. Мы уже видѣли, что второй интегралъ равенъ $\Gamma(\mu)$; этотъ результатъ мы снова подтвердимъ, вычисляя первый при цѣломъ положительномъ ν. Предполагая еще $\nu > 1$, при помощи интегрированія по частямъ находимъ

$$\int_0^1 x^{\mu-1}(1-x)^{\nu-1}\,dx = \frac{\nu-1}{\mu}\int_0^1 x^{\mu}(1-x)^{\nu-2}\,dx$$

$$= \frac{\nu-1}{\mu}\int_0^1 x^{\mu-1}(1-x)^{\nu-2}\,dx - \frac{\nu-1}{\mu}\int_0^1 x^{\mu-1}(1-x)^{\nu-1}\,dx,$$

откуда получаемъ

$$\int_0^1 x^{\mu-1}(1-x)^{\nu-1}\,dx = \frac{\nu-1}{\mu+\nu-1}\int_0^1 x^{\mu-1}(1-x)^{\nu-2}\,dx,$$

а повторнымъ примѣненіемъ этой формулы найдемъ

$$\int_0^1 x^{\mu-1}(1-x)^{\nu-1}dx = \frac{\nu-1}{\mu+\nu-1}\cdot\frac{\nu-2}{\mu+\nu-2}\cdots\frac{1}{\mu+1}\int_0^1 x^{\mu-1}dx = \frac{(\nu-1)!}{\mu(\mu+1)\cdots(\mu+\nu-1)}.$$

Замѣнивъ x на $\frac{x}{\nu}$, получимъ

$$\int_0^\nu x^{\mu-1}\left(1-\frac{x}{\nu}\right)^{\nu-1}dx = \frac{\nu!\,\nu^{\mu-1}}{\mu(\mu+1)(\mu+2)\cdots(\mu+\nu-1)},$$

а увеличивая ν до безконечности и припоминая опредѣленіе функціи Γ (§ 252, c), находимъ

$$\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-x}\,dx = \Gamma(\mu).$$

Замѣтимъ еще формулу, получаемую отсюда замѣною x на nx

$$(14) \qquad \int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-nx}\,dx = \frac{\Gamma(\mu)}{n^\mu},$$

важную по ея многочисленнымъ приложеніямъ.

762. Докажемъ теперь, что интегралы перваго вида выражаются черезъ функцію Γ. Подстановка $x = \frac{y}{1+y}$ даетъ

$$\int_0^1 x^{\mu-1}(1-x)^{\nu-1}\,dx = \int_0^\infty \frac{y^{\mu-1}\,dy}{(1+y)^{\mu+\nu}}.$$

Второй части можно придать видъ двойного интеграла, пользуясь формулою (14), послѣ замѣны въ ней μ на $\mu+\nu$, и n на $1+y$

$$\frac{1}{\Gamma(\mu+\nu)}\int_0^\infty y^{\mu-1}dy\int_0^\infty x^{\mu+\nu-1}e^{-(1+y)x}dx = \frac{1}{\Gamma(\mu+\nu)}\int_0^\infty x^{\mu+\nu-1}e^{-x}dx\int_0^\infty y^{\mu-1}e^{-xy}dy$$

Но на основаніи той же формулы (14) имѣемъ

$$(15) \qquad \int_0^\infty y^{\mu-1}e^{-xy}\,dy = \frac{\Gamma(\mu)}{x^\mu}.$$

Слѣдовательно,

$$\int_0^\infty x^{\mu+\nu-1}e^{-x}\,dx\int_0^\infty y^{\mu-1}e^{-xy}\,dy = \Gamma(\mu)\int_0^\infty x^{\nu-1}e^{-x}\,dx = \Gamma(\mu)\,\Gamma(\nu).$$

Итакъ,

$$(16) \qquad \int_0^1 x^{\mu-1}(1-x)^{\nu-1}\,dx = \frac{\Gamma(\mu)\,\Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu+\nu)}.$$

Такимъ образомъ можно вычислить всякій интегралъ перваго вида съ помощью таблицъ для $\log\Gamma(x)$ (съ 20 десятичными знаками), составленныхъ по настоянію Гаусса [1]).

---

[1]) Gauss Werke, т. III. См. также упомянутый уже „Traité“ Legendre, т. II.

763. Формулу (16), весьма полезную въ приложеніяхъ, часто пишутъ въ видѣ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\mu-1}\theta\cdot\cos^{2\nu-1}\theta\cdot d\theta = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma(\mu)\,\Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu+\nu)}, \tag{17}$$

который она принимаетъ, когда положимъ $x=\sin^2\theta$. Между прочимъ, изъ нея можно получить, при $\mu=\nu$, доказательство формулы Лежандра (§ 252, d), если припомнимъ, что $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$. Дѣйствительно, мы имѣемъ

$$\frac{\Gamma^2(\mu)}{\Gamma(2\mu)} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta\cos\theta)^{2\mu-1}\,d\theta = \frac{1}{2^{2\mu-2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2\mu-1}2\theta\cdot d\theta$$

$$= \frac{1}{2^{2\mu-1}}\int_0^{\pi}\sin^{2\mu-1}\theta\cdot d\theta = \frac{1}{2^{2\mu-2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2\mu-1}\theta\cdot d\theta = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\mu-1}}\,\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})},$$

откуда получается

$$\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\mu-1}}\,\frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\mu)}.$$

На этомъ основаніи, при всякомъ $\mu>0$, получаемъ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2\mu-1}\theta\cdot d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2\mu-1}\theta\cdot d\theta = 2^{2\mu-2}\,\frac{\Gamma^2(\mu)}{\Gamma(2\mu)},$$

а это есть обобщеніе одного изъ прежде полученныхъ результатовъ (§ 727, g).

764. Упражненія. a) Интегралъ отъ $\operatorname{tg}^n x\,dx$ въ предѣлахъ отъ 0 до $\frac{\pi}{2}$ можетъ быть вычисленъ съ помощью (17), если положимъ $2\mu-1=n$, $2\nu-1=-n$; тогда, вслѣдствіе того, что $\mu+\nu=1$, найдемъ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cos^{-n}x\,dx = \frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1+n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-n}{2}\right).$$

Пользуясь формулою (§ 464, e)

$$\Gamma(\mu)\,\Gamma(1-\mu)=\frac{\pi}{\sin\mu\pi},\tag{19}$$

видимъ, что при $|n|<1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{tg}^n x\,dx=\frac{\pi}{2\cos\frac{n\pi}{2}}.\tag{20}$$

Въ частности, получимъ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg}x}}=\frac{\pi}{\sqrt{2}},$$

что можно получить и изъ ранѣе сдѣланнаго примѣра (§ 755, d). Ограниченіе $|n|<1$ получается, независимо отъ границъ приложимости формулы (17), также и изъ прежнихъ замѣчаній (§ 717, a), потому что $\operatorname{tg}^n x$ обращается въ ∞ порядка $|n|$ при $x=\frac{\pi}{2}$ или при $x=0$, смотря по тому, будетъ ли $n>$ или <0. Слѣдовательно, a priori можно было утверждать, что интегралъ не существуетъ при $|n|\geq 1$.

b) Чтобы вычислить

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}},$$

замѣнимъ x на $x^{\frac{1}{n}}$. Интегралъ приведется къ

$$\frac{1}{n}\int_0^1 x^{\frac{1}{n}-1}(1-x)^{-\frac{1}{n}}\,dx=\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

Отсюда слѣдуетъ по формулѣ (19)

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}=\frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}},$$

при условіи $n>1$. Впрочемъ, и неопредѣленный интегралъ можно найти въ алгебраически-логариѳмическихъ функціяхъ, потому что подъинтегральное выраженіе есть биноміальный дифференціалъ, въ которомъ выполнено второе условіе интегрируемости (§ 751). Для приведенія этого дифференціала къ раціональному виду стоитъ только положить $x=\frac{1}{\sqrt[n]{1+t^n}}$.

c) Для вычисленія $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$ примѣняемъ формулу (18), которая тотчасъ даетъ

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} = \frac{\Gamma^2(\frac{1}{4})}{2\sqrt{2\pi}}.$$

Сравненіе этого результата съ полученнымъ въ § 760, даетъ нижеслѣдующее выраженіе одного Эйлерова интеграла черезъ эллиптическій:

$$\Gamma(\tfrac{1}{4}) = 2\sqrt{\sqrt{\pi}\, F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = 3{,}625\ldots.$$

Далѣе, изъ (19) слѣдуетъ

$$\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{\Gamma(\frac{1}{4})} = 1{,}225\ldots.$$

d) Интегралъ отъ $\frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$ въ предѣлахъ отъ 0 до 1 также легко приводится къ Эйлерову интегралу 1-го вида. Стоитъ только взять за новую перемѣнную $t = x^4$, чтобы получить, на основаніи формулы (16)

$$\int\limits_0^1 \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{4}\int\limits_0^1 t^{\frac{n-3}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\,dt = \frac{1}{4}\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+3}{4}\right)},$$

или, по формулѣ Лежандра,

$$\int\limits_0^1 \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = 2^{\frac{n-5}{2}}\,\frac{\Gamma^2\left(\frac{n+1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}.$$

Напримѣръ,

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right); \quad \int\limits_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}\,F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}.$$

Сравненіе послѣдняго результата съ прежде полученнымъ (§ 760, b) даетъ слѣдующее сооотношеніе между значеніями F и E съ модулемъ $\frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\,F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\pi}{4F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}.$$

e) Другой интегралъ, легко приводящійся къ функціямъ Γ, есть слѣдующій

$$\mathfrak{J} = \int_0^\pi \frac{\sin^{n-1}\varphi\, d\varphi}{(1-k\cos\varphi)^n}.$$

Всегда можно предположить $k \geqq 0$, потому что случай $k<0$ сводится къ первому замѣною φ на $\pi-\varphi$. Замѣтимъ, далѣе, что при $n \leqq 0$ подъинтегральная функція обращается на предѣлахъ интеграла въ безконечность порядка $1-n \geqq 1$. Отсюда слѣдуетъ, что интегралъ можетъ существовать только при $n>0$ (§ 717, a); и онъ дѣйствительно существуетъ, если еще $k<1$, потому что тогда подъинтегральная функція конечна и непрерывна въ интервалѣ интегрированія. При $k=1$, напротивъ того, интегралъ не существуетъ, потому что тогда подъинтегральная функція на верхнемъ предѣлѣ обращается въ безконечность порядка $n+1>1$. Если $k>1$, то подъинтегральная функція обращается въ безконечность порядка n при $\varphi=\alpha$, гдѣ $\cos\alpha=\frac{1}{k}$. Слѣдовательно, интегралъ существуетъ и при $k>1$, если при этомъ $n<1$. Чтобы вычислить его въ первомъ случаѣ, когда $0 \leqq k<1$, $n>0$, стоитъ только примѣнить подстановку

$$\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} = \sqrt{\frac{1-k}{1+k}}\cdot\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2},$$

которою часто пользуются въ Астрономіи, такъ какъ она примѣняется во многихъ вопросахъ, касающихся эллипса. Къ этой подстановкѣ приходимъ всего естественнѣе, если хотимъ перейти отъ эксцентрической аномаліи φ, опредѣляющей положеніе точки на эллипсѣ, къ полярнымъ координатамъ r и ϑ, принимая одинъ фокусъ за полюсъ и направляя полярную ось къ другому фокусу. Очевидно, r будетъ гипотенуза прямоугольнаго треугольника, катеты котораго равны $ka+a\cos\varphi$ и $b\sin\varphi$, такъ что

$$r^2 = a^2\{(k+\cos\varphi)^2+(1-k^2)\sin^2\varphi\} = a^2(1+k\cos\varphi)^2,$$

т. е. $r=a(1+k\cos\varphi)$, слѣдовательно,

$$\sin\vartheta = \frac{\sqrt{1-k^2}\cdot\sin\varphi}{1+k\cos\varphi}, \qquad \cos\vartheta = \frac{k+\cos\varphi}{1+k\cos\varphi},$$

откуда, дифференцируя, получимъ

$$d\vartheta = \frac{\sqrt{1-k^2}\,d\varphi}{1+k\cos\varphi}, \quad \text{т. е.} \quad r\,d\vartheta = b\,d\varphi.$$

Изъ тѣхъ же уравненій, кромѣ того, выводимъ

$$\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} = \frac{\sin\vartheta}{1+\cos\vartheta} = \frac{\sqrt{1-k^2}\sin\varphi}{(1+k)(1+\cos\varphi)} = \sqrt{\frac{1-k}{1+k}}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}.$$

Такъ какъ ϑ возрастаетъ отъ 0 до π когда φ возрастаетъ отъ 0 до π, то, очевидно, будемъ имѣть

$$(1-k^2)^{\frac{n}{2}}\int_0^\pi\left(\frac{\sin\varphi}{1+k\cos\varphi}\right)^{n-1}\frac{d\varphi}{1+k\cos\varphi} = \int_0^\pi \sin^{n-1}\vartheta\,d\vartheta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}\vartheta\,d\vartheta,$$

или, по формулѣ (18)

$$\mathfrak{J} = \frac{2^{n-1}\,\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}{(1-k^2)^{\frac{n}{2}}\,\Gamma(n)}.$$

Переходя ко второму случаю ($k > 1$, $0 < n < 1$), возьмемъ за интервалъ интегрированія только часть $(0, \alpha)$, чтобы подъинтегральная функція не могла сдѣлаться мнимою. Примѣняя подстановку $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ и замѣчая, что θ возрастаетъ отъ 0 до $\frac{\pi}{2}$, когда φ измѣняется отъ 0 до α, при помощи вычисленія, совершенно аналогичнаго предыдущему, получимъ

$$\int_0^{\alpha}\frac{\sin^{n-1}\varphi\,d\varphi}{(1+k\cos\varphi)^n} = \frac{1}{(k^2-1)^{\frac{n}{2}}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}\theta\cos^{-n}\theta\,d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-n}{2}\right)}{2\sqrt{\pi}\,(k^2-1)^{\frac{n}{2}}}.$$

f) Покажемъ здѣсь еще пріемъ, уже примѣненный нами въ одномъ спеціальномъ случаѣ (§ 740, d), для вычисленія интеграловъ

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{x^{\mu}}\,dx,\qquad \int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x^{\mu}}\,dx,$$

при чемъ μ обозначаетъ положительное число, меньшее 1 въ первомъ и меньшее 2 во второмъ интегралѣ. Что интегралы наши не существуютъ при другихъ значеніяхъ μ, видно, на основаніи замѣчанія § 717, a, изъ того, что при $x = 0$ подъинтегральная функція обращается въ безконечность порядка μ въ первомъ, и порядка $\mu - 1$ во второмъ интегралѣ. Установивъ сказанное, преобразуемъ наши интегралы въ двойные, съ помощью формулы (15), тогда получимъ

$$\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} y^{\mu-1}\,e^{-xy}\cos x\,dx\,dy,\qquad \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} y^{\mu-1}\,e^{-xy}\sin x\,dx\,dy.$$

Припоминая значенія интеграловъ

$$\int_0^{\infty} e^{-xy}\cos x\,dx = \frac{y}{1+y^2},\qquad \int_0^{\infty} e^{-xy}\sin x\,dx = \frac{1}{1+y^2},$$

найденныхъ въ одномъ изъ предыдущихъ упражненій (§ 740, j), приводимъ вышенаписанные двойные интегралы къ

$$\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^{\infty}\frac{y^{\mu}\,dy}{1+y^2},\qquad \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^{\infty}\frac{y^{\mu-1}\,dy}{1+y^2}.$$

Между тѣмъ, принимая во вниманіе формулу (20), съ помощью подстановки $y = \operatorname{tg}\theta$, находимъ

$$\int_0^\infty \frac{y^\mu\, dy}{1+y^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^\mu \theta\, d\theta = \frac{\pi}{2\cos\frac{\mu\pi}{2}}, \quad (-1 < \mu < 1).$$

Слѣдовательно,

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^\mu}\, dx = \frac{\pi}{2\,\Gamma(\mu)\cos\frac{\mu\pi}{2}}, \qquad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\mu}\, dx = \frac{\pi}{2\,\Gamma(\mu)\sin\frac{\mu\pi}{2}}.$$

Въ частности,

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \qquad \int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

765. Въ заключеніе докажемъ одну весьма важную формулу, дозволяющую вычислить съ большою точностью значеніе $\Gamma(x)$ при x весьма большомъ. За исходную точку возьмемъ формулу, опредѣляющую функцію Γ (§ 252, а)

$$\Gamma(x-1) = \prod_1^\infty \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}},$$

и напишемъ, логариѳмируя обѣ части равенства:

$$\log\Gamma(x) = -\log x + \sum_1^\infty \{ x\log(n+1) - (x-1)\log n - \log(x+n) \}.$$

Избавимся отъ логариѳмовъ въ правой части съ помощью формулы:

$$\log x = \int_1^x \frac{dx}{x} = \int_1^x dx \int_0^\infty e^{-xt}\, dt = \int_0^\infty (e^{-t} - e^{-xt}) \frac{dt}{t}.$$

Легкое вычисленіе дастъ тогда

$$\log\Gamma(x) = \int_0^\infty \left\{ (x-1)e^{-t} - \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{1-e^{-t}} \right\} \frac{dt}{t}. \tag{21}$$

Интегрируя затѣмъ по x въ предѣлахъ отъ x до $x+1$ и примѣняя формулу Раабе (§ 721, i) находимъ

$$x\log x - x + \log\sqrt{2\pi} = \int_0^\infty \left\{\left(x - \frac{1}{2} - \frac{1}{1-e^{-t}}\right)e^{-t} + \frac{e^{-xt}}{t}\right\}\frac{dt}{t}.$$

Правую часть можно разложить на

$$\int_0^\infty \left\{\left(x-1-\frac{1}{1-e^{-t}}\right)e^{-t} + \left(\frac{1}{t}-\frac{1}{2}\right)e^{-xt}\right\}\frac{dt}{t} + \frac{1}{2}\int_0^\infty (e^{-t} - e^{-xt})\frac{dt}{t}.$$

Слѣдовательно,

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)\log x - x + \log\sqrt{2\pi} = \int_0^\infty \left\{\left(x-1-\frac{1}{1-e^{-t}}\right)e^{-t} + \left(\frac{1}{t}+\frac{1}{2}\right)e^{-xt}\right\}\frac{dt}{t}$$

Формула (21) приметъ тогда видъ

$$\log\Gamma(x) = \left(x-\frac{1}{2}\right)\log x - x + \log\sqrt{2\pi} + \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2}\right)e^{-xt}\frac{dt}{t}.$$

*) Докажемъ теперь слѣдующія неравенства:

(22) $$0 < \frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2} < \frac{t}{12}.$$

Разсмотримъ функцію

$$f(x) = \frac{1}{2x}\log\frac{1+x}{1-x} = 1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-2}}{2n-1} + \cdots$$

и составимъ произведеніе $f^2(x)$ по правилу умноженія рядовъ. Общій членъ въ этомъ произведеніи будетъ $S_n x^{2n-2}$, гдѣ

$$S_n = \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2n-3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2n-5} + \cdots + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2n-3} + \frac{1}{2n-1}$$

$$\text{и}\quad f^2(x) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} S_n x^{2n-2}.$$

---

*) Конецъ этого § изложенъ на основаніи замѣчанія бывшаго ученика Чезàро, Г. Эскамара, въ итальянскомъ изданіи „Elementi“ 1905, стр. 526. Въ нѣмецкомъ и итальянскомъ оригиналахъ въ выводѣ результата была ошибка.

Легко показать, что $S_n > \frac{3}{2n-1}$. Дѣйствительно, замѣчая, что

$$\frac{1}{1(2n-1)} = \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2n-1}\right)$$

$$\frac{1}{3(2n-3)} = \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2n-3}\right)$$

$$\frac{1}{5(2n-5)} = \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{2n-5}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{(2n-1)1} = \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{1}\right).$$

Путемъ сложенія получимъ

$$S_n = \frac{1}{n}\left\{1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right\} > \frac{1}{n}\left(1-\frac{n-1}{2n-1}\right) = \frac{3}{2n+1}.$$

Поэтому

$$f^2(x) > 1 + \sum_{2}^{\infty} \frac{3}{2n+1} x^{2n-2} = 1 + \frac{3}{5}x^2 + \frac{3}{7}x^4 + \cdots.$$

Съ другой стороны,

$$\frac{f(x)-1}{x^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{7}x^4 + \cdots.$$

Слѣдовательно,

(23) $$f^2(x) > \frac{3}{x^2}(f(x)-1).$$

Положивъ

$$x = \frac{1-e^{-t}}{1+e^{-t}}, \text{ получимъ } \frac{1+x}{1-x} = e^t,$$

$$f(x) = \frac{t}{2x}, \quad t > 2x,$$

и неравенство (23) вмѣстѣ съ этимъ дастъ

$$1 < \frac{t}{2x} < 1 + \frac{t^2}{12},$$

откуда

$$\frac{1}{t} < \frac{1}{2}\,\frac{1+e^{-t}}{1-e^{-t}} < \frac{1}{t} + \frac{t}{12}$$

и, наконецъ,

$$0 < \frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2} < \frac{t}{12},$$

что и требовалось доказать. Поэтому можно написать

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2}\right) e^{-xt} \frac{dt}{t} = \frac{\theta}{12} \int_0^\infty e^{-xt}\, dt = \frac{\theta}{12x},$$

гдѣ $0 < \theta < 1$. Слѣдовательно,

$$\log \Gamma(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) \log x - x + \log \sqrt{2\pi} + \frac{\theta}{12x}.$$

Переходя отъ логариѳмовъ къ числамъ, окончательно получимъ

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi}\,.\, x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x+\frac{\theta}{12x}}.$$

Отсюда, въ частности, получается формула Стирлинга (§ 221), когда x равно цѣлому числу n, такъ какъ $n! = n\Gamma(n)$.

ПРИЛОЖЕНІЯ КЪ ГЕОМЕТРИЧЕСКИМЪ ИЗМѢРЕНІЯМЪ.

Длины дугъ.

766. Такъ какъ мы умѣемъ найти дифференціалъ, а слѣдовательно, и производную, длины дуги s данной кривой по нѣкоторой перемѣнной t (§§ 583, 630), то мы можемъ теперь вычислить и длину самой дуги, какъ функцію отъ t:

$$s = \int \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \cdot dt.$$

Въ частности, для плоскихъ кривыхъ, заданныхъ въ Декартовыхъ или полярныхъ координатахъ, можно принять соотвѣтственно x или θ за перемѣнную интегрированія, и написать

$$s = \int \sqrt{1+y'^2}\, dx \quad \text{или} \quad s = \int \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\theta.$$

767. Примѣры. а) Для астроиды, заданной уравненіемъ $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, имѣемъ $y' = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt{1+y'^2} = \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$. Если начало дуги помѣщено въ точкѣ $(0, a)$, то

$$s = a^{\frac{1}{3}} \int_0^x x^{-\frac{1}{3}}\, dx = \tfrac{3}{2} a^{\frac{1}{3}} x^{\frac{2}{3}}.$$

Въ частности, $\frac{3}{2}a$ будетъ длина дуги, заключенной въ углѣ положительныхъ x и y, а потому длина всей астроиды есть $6a$.

b) Логариѳмическую кривую $y = ae^{\frac{x}{a}}$ можно изобразить уравненіями $x = a\log\operatorname{tg}\varphi$, $y = a\operatorname{tg}\varphi$. Отсюда получимъ (интегрированіемъ по частямъ или съ помощью умноженія на $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$)

$$s = a\int\frac{d\operatorname{tg}\varphi}{\sin\varphi} = \frac{a}{\cos\varphi} + a\int\frac{d\varphi}{\sin\varphi} = a\left(\sec\varphi + \log\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right) + \text{const.};$$

отсчитывая дугу s, напримѣръ, отъ вершины или точки наибольшей кривизны ($y = a/\sqrt{2}$), получимъ

$$s = a\left(\sec\varphi - \sqrt{\frac{3}{2}} + \log\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}\right).$$

c) Для цѣпной линіи равнаго сопротивленія, изображаемой уравненіемъ $y = -a\log\cos\frac{x}{a}$, имѣемъ $y' = \operatorname{tg}\frac{x}{a}$, слѣдовательно,

$$s = \int_0^x \frac{dx}{\cos\frac{x}{a}} = a\log\cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2a}\right).$$

Теперь мы можемъ найти и натуральное уравненіе кривой (§ 595, m). Стоитъ только сложить уравненія

$$e^{\frac{s}{a}} = \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2a}\right), \qquad e^{-\frac{s}{a}} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2a}\right)$$

и припомнить, что $\rho\cos\frac{x}{a} = a$.

d) Длина дуги параболы $y^2 = 2ax$, раздѣляемой вершиной пополамъ, равна (§ 745, c)

$$s = \frac{2}{a}\int_0^y \sqrt{y^2 + a^2}\,dy = \frac{y}{a}\sqrt{y^2 + a^2} + a\log\frac{y + \sqrt{y^2 + a^2}}{a}.$$

Напримѣръ, дуга, хорда которой дѣлится пополамъ въ фокусѣ, имѣетъ длину $= 1{,}147\ldots$ длины хорды.

e) Длина лемнискаты (сравн. съ §§ 589, m; 760, a) $r = \sqrt{\sin 2\theta}$ равна

$$4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\theta}{\sqrt{\sin 2\theta}} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{\sin\theta}} = 2\sqrt{2}\,F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 5{,}244\ldots.$$

Точно такъ же находимъ длину дуги синусоиды между двумя послѣдовательными точками перегиба

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos^2 x}\, dx = 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}\, dx = 2\sqrt{2}\,E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 3{,}820\ldots.$$

f) Вся длина эллипса съ полуосями a и $b = a\sqrt{1-k^2}$ или съ большою полуосью a и эксцентриситетомъ k выражается формулою

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = 4aE(k).$$

Если обозначимъ черезъ R радіусъ круга, у котораго длина окружности равна всей длинѣ эллипса, то будемъ имѣть

$$R = \frac{2a}{\pi}E(k) = a\left(1 - \frac{k^2}{4} - \frac{3k^4}{64} - \frac{5k^6}{256} - \frac{175k^8}{16384} - \frac{567k^{10}}{65536} - \ldots\right).$$

Извѣстны различныя приближенныя выраженія R; но простѣйшія составляются при помощи чиселъ

$$a' = \tfrac{1}{2}(a+b),\quad b' = \sqrt{ab},\quad a'' = \tfrac{1}{2}(a'+b'),\quad b'' = \sqrt{a'b'}$$

и т. д. Если k очень мало, то, пренебрегая всѣми степенями k выше второй, можно ограничиться значеніемъ $R = a'$; но это значеніе не достаточно близко къ истинному. Если удержимъ въ разложеніи R всѣ степени k до 6 ой, то придемъ къ значеніямъ $R = 3b'' - 2b'$ или $R = \frac{1}{2}(3a' - b')$, которыя уже потому предпочтительнѣе a', что одно изъ нихъ больше, а другое меньше истиннаго. Впрочемъ, первое можно замѣнить ариѳметическимъ среднимъ обоихъ, т. е. взять $R = \frac{1}{4}(3a' - 5b' + 6b'')$, разложеніе котораго по степенямъ k совпадаетъ до 10-хъ степеней съ R и т. д. Такъ, напримѣръ, при $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$, получимъ

$$a' = \frac{3}{4},\quad b' = \frac{1}{\sqrt{2}},\quad b'' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\sqrt{2}}},\quad \frac{1}{4}(3a' - 5b' + 6b'') = 0{,}7709\ldots.$$

Эллиптическія таблицы (§ 759) даютъ $R = \frac{2}{\pi}E\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0{,}7709\ldots.$

g) Вся длина (§ 589, k) улитки $r = a\cos\vartheta + b$ равна

$$2\int_0^{\pi} \sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\vartheta}\, d\vartheta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(a+b)^2 - 4ab\sin^2\varphi}\, d\varphi$$

$$= 4(a+b)\,E\left(\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\right).$$

Если c обозначаетъ наибольшее, а μc наименьшее изъ чиселъ a и b, то формула (11) § 758 даетъ возможность написать послѣднее выраженіе такъ:

$$8c\{E(\mu) - \tfrac{1}{2}(1-\mu^2)F(\mu)\}.$$

Напримѣръ, длина улитки съ двумя совпадающими точками изгиба ($b = 2a$) равна отрѣзку, отсѣкаемому кривою на оси симметріи, умноженному на 3,341 . . . .

h) Требуется вычислить длину дуги гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ между вершиною $(a, 0)$ и какою нибудь точкою (x, y) съ положительными координатами. Замѣчая, что

$$dx = \frac{a^2 y}{b^2 x}dy = \frac{a y\, dy}{\sqrt{y^2+b^2}},\quad ds = \sqrt{\frac{(a^2+b^2)y^2+b^4}{b^2(y^2+b^2)}}\,dy,$$

приходимъ къ тому, чтобы положить $y = \frac{b^2 \operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и находимъ

$$s = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

гдѣ $k = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, т. е. эксцентриситетъ равенъ $\frac{1}{k}$. Умножая предыдущій интегралъ на $1 - k^2 = (1 - k^2\sin^2\varphi) - k^2\cos^2\varphi$, разобьемъ его на два другихъ

$$(1-k^2)\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} - k^2F(k,\varphi).$$

Между тѣмъ интегрированіе по частямъ даетъ

$$(1)\quad \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \operatorname{tg}\varphi\cdot\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} + F(k,\varphi) - E(k,\varphi).$$

Слѣдовательно,

$$s = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}F(k,\varphi) - \sqrt{a^2+b^2}\,E(k,\varphi) + \operatorname{tg}\varphi\cdot\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2}.$$

Вычисленіе s въ каждомъ частномъ случаѣ требуетъ употребленія таблицъ Лежандра (съ двойнымъ входомъ). Замѣтимъ, что возрастаніе s до безконечности съ приближеніемъ φ къ $\frac{\pi}{2}$, зависитъ исключительно отъ третьяго члена, который изображаетъ **разстояніе отъ центра до нормали въ концѣ дуги**.

i) Разсмотримъ **логоциклику** (§ 602, b) изображаемую уравненіемъ

$$(2)\qquad (x+y)(x^2+y^2) = 2axy,$$

или въ полярныхъ координатахъ уравненіемъ $r = \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$, если примемъ ось симметріи за полярную ось. Длина любой дуги, считаемой отъ вершины, равна

$$s = \frac{a}{\sqrt{2}} \int_0^\theta \sqrt{\cos^2 2\theta + 2\sin^2 2\theta} \cdot \frac{d\theta}{\cos^2\theta},$$

а потому вся длина петли, образуемой кривой, будетъ

$$a\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos^2 2\theta + 2\sin^2 2\theta} \cdot \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = 2a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}}{1 + \sin\varphi}\, d\varphi$$

$$= 2a \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin\varphi) \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}\, \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}.$$

Между тѣмъ изъ (1) получаемъ

$$\int_0^\varphi \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}\, \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \operatorname{tg}\varphi \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi} + F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \varphi\right) - E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \varphi\right),$$

а интегрированіе по частямъ даетъ

$$\int_0^\varphi \sin\varphi \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}\, \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \left(\frac{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}}{\cos\varphi}\right)_0^\varphi - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\varphi \frac{d\cos\varphi}{\sqrt{1 + \cos^2\varphi}}$$

$$= \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}}{\cos\varphi} - 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \log \frac{\cos\varphi + \sqrt{1 + \cos^2\varphi}}{1 + \sqrt{2}}.$$

Слѣдовательно,

$$\int_0^\varphi (1 - \sin\varphi) \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}\, \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = 1 - \frac{1 - \sin\varphi}{\cos\varphi} \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}} \log \frac{\cos\varphi + \sqrt{1 + \cos^2\varphi}}{1 + \sqrt{2}} + F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \varphi\right) - E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \varphi\right).$$

Полагая, наконецъ, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, находимъ, что вся длина петли логоциклики равна

$$2a \left\{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \log(\sqrt{2} - 1) - F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\};$$

эта величина въ 2,489... разъ больше длины отрѣзка, отсѣкаемаго кривою на ея оси симметріи. Свойство имѣть дуги, длины которыхъ выражаются эллиптическими интегралами первыхъ двухъ видовъ, т. е. дугами коническихъ сѣченій, принадлежитъ безчисленному множеству уникурсальныхъ кривыхъ 3-го порядка. Онѣ, вмѣстѣ съ логоцикликою, образуютъ такъ называемый классъ циркулярныхъ кривыхъ 3-го порядка[1]. Всѣ эти кривыя могутъ быть изображены уравненіемъ (2), къ правой части котораго надо прибавить членъ вида $(x+y)(px+py)$; $a/\sqrt{2}$ какъ и прежде обозначаетъ разстояніе двойной точки отъ асимптоты.

j) Разсмотримъ еще кривую Виві ани (Viviani), т. е. пересѣченіе шара съ цилиндромъ, основаніе котораго есть кругъ, построенный на радіусѣ шара, какъ на діаметрѣ. Изъ уравненій кривой

$$x^2+y^2+z^2=a^2, \quad x^2+y^2=ax$$

получаемъ

$$y^2=x(a-x), \quad z^2=a(a-x),$$

и полагаемъ $x=a\cos^2\varphi$. Ограничиваясь тою четвертью кривой, которая лежитъ въ углѣ положительныхъ координатъ, будемъ имѣть $y=a\sin\varphi\cos\varphi$, $z=a\sin\varphi$. Послѣднее уравненіе показываетъ, что φ есть широта точки (x, y, z), а изъ выраженія x вытекаетъ, что φ есть и долгота той же точки. Слѣдовательно, кривую Вивіани можно опредѣлить, какъ сферическую кривую, въ каждой точкѣ которой широта равна долготѣ. Замѣтивъ это, будемъ далѣе имѣть

$$dx=-a\sin 2\varphi\, d\varphi, \quad dy=a\cos 2\varphi\, d\varphi, \quad dz=a\cos\varphi\, d\varphi,$$

откуда, возвышая въ квадратъ и складывая, получимъ $ds^2=a^2(1+\cos^2\varphi)\,d\varphi^2$. Итакъ, вся длина кривой равна

$$4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^2\varphi}\,d\varphi=4a\sqrt{2}\cdot E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Иными словами, длина кривой Вивіани на шарѣ радіуса a равна длинѣ эллипса съ полуосями a и $a\sqrt{2}$, т. е. равна длинѣ окружности большого круга, умноженной на 1,216.... Къ тому же результату можно еще проще придти на основаніи слѣдующаго замѣчанія: если развернемъ цилиндръ на плоскости, то кривая превратится въ двѣ полныя дуги синусоиды. Обратно, чтобы построить кривую Вивіани, надо начертить пару синусоидъ $y=\mp a\sin\frac{x}{a}$ и вырѣзать изъ бумаги тотъ кусокъ, который лежитъ между двумя дугами, ограниченными однѣми и тѣми же точками перегиба. Если согнемъ этотъ кусокъ такъ, чтобы общая хорда обѣихъ дугъ сдѣлалась окружностью круга, то край бумаги превратится въ кривую Вивіани, принадлежащую шару радіуса a.

---

[1] Salmon-Fiedler, Analytische-Geometrie der höheren ebenen Kurven, стр. 221 и слѣд.

Площади плоскихъ кривыхъ.

768. Чтобы вычислить площадь, ограниченную кривою $y=f(x)$, осью x-овъ и двумя ординатами, соотвѣтствующими абсциссамъ a и b, раздѣлимъ (a, b) на интервалы $h_1, h_2, \ldots, h_n$ и замѣтимъ слѣдующее: полоса, ограниченная ординатами, соотвѣтствующими концамъ интервала h_i, можетъ быть замѣнена прямоугольникомъ съ основаніемъ h_i и высотою y_i, заключающеюся между наименьшимъ и наибольшимъ изъ значеній y въ интервалѣ h_i. Искомая площадь A, слѣдовательно, всегда будетъ изображаться суммою $\sum\limits_1^n h_i y_i$, причемъ интервалы h_i будутъ стремиться къ нулю, а число n увеличиваться безпредѣльно; а такъ какъ при этихъ условіяхъ упомянутая сумма стремится къ предѣлу, равному интегралу отъ $y\,dx$, взятому отъ a до b, то необходимо $A=\int\limits_a^b y\,dx$. Подобнымъ же образомъ доказывается, что площадь, ограниченная кривою $r=f(\theta)$ и двумя радіусами векторами, выражается формулою $A=\frac{1}{2}\int\limits_a^b r^2\,d\theta$, гдѣ a и b — крайнія значенія θ. Если, далѣе, дѣло идетъ о вычисленіи площади, ограниченной сомкнутою кривою и, въ простѣйшемъ случаѣ, пересѣкающеюся съ прямыми параллельными оси y-овъ, или прямыми, выходящими изъ полюса, не болѣе, какъ въ двухъ точкахъ, то будемъ имѣть

$$(3)\qquad A=\int\limits_a^b(\beta-\alpha)\,dx.\quad A=\frac{1}{2}\int\limits_a^b(\beta^2-\alpha^2)\,d\theta.$$

При этомъ α и β обозначаютъ наименьшее и наибольшее изъ двухъ значеній y (или r во второй формулѣ), соотвѣтствущихъ одному и тому же x (или θ), а a и b крайнія значенія перемѣнной интегрированія (обыкновенно корни уравненія $\beta-\alpha=0$). Къ этимъ формуламъ мы пришли, разлагая площадь на безконечно малые элементы п е р в а г о порядка. Но мы можемъ ее разбивать и на безконечно малые элементы в т о р о г о порядка. Въ случаѣ Декартовыхъ координатъ такими элементами будутъ прямоугольники, построенные на сторонахъ dx и dy; въ случаѣ полярныхъ координатъ прямоугольники со сторонами dr и $r\,d\theta$. Тогда, на основаніи опредѣленія двойного интеграла, получается та или другая изъ формулъ

$$A=\int\int dx\,dy\quad\text{или}\quad A=\int\int r\,dr\,d\theta.$$

Послѣднія формулы заключаютъ въ себѣ формулы (3), что дѣлается очевиднымъ, если напишемъ

$$A = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} dy, \quad A = \int_a^b d\theta \int_{\alpha(\theta)}^{\beta(\theta)} r\,dr.$$

Онѣ общнѣе первыхъ, потому что могутъ служить для вычисленія площадей, ограниченныхъ какою угодно кривой. Впрочемъ, для системы какихъ угодно криволинейныхъ координатъ (§ 738) имѣемъ формулы

(4) $$A = \int \left| \frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} \right| du\,dv,$$

при чемъ интегрированіе надо распространить на всю измѣряемую площадь и условиться выполнять отдѣльныя интегрированія въ томъ направленіи, въ которомъ соотвѣтствующія перемѣнныя возрастаютъ *).

769. Другія формулы полезны особенно въ томъ случаѣ, когда координаты x и y точекъ ограничивающей кривой заданы какъ

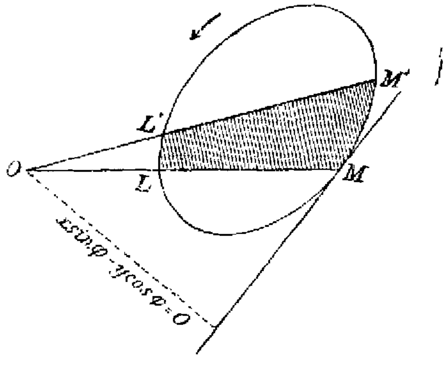

Рис. 91.

функціи одного параметра t. Мы будемъ измѣнять этотъ параметръ такимъ образомъ, чтобы при этомъ соотвѣтствующая точка, описывая кривую, оставляла влѣво отъ себя ограниченную площадь (рис. 91). За элементъ площади возьмемъ четырехугольникъ $MM'LL'$, лежащій между двумя безконечно близкими прямыми, выходящими изъ начала координатъ. Замѣчая, что

$$MM'L'L = OMM' - OLL' = OMM' + OL'L,$$

*) Т. е. такъ, чтобы du и dv всегда обозначали положительныя числа.

мы можемъ принять за положительный или отрицательный элементъ треугольникъ OMM', взятый съ принадлежащимъ ему знакомъ (ср. съ § 348, d):

$$OMM' = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & x+dx \\ 0 & y & y+dy \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx).$$

Это значеніе мы получимъ также, взявъ половину произведенія основанія ds на высоту $x\sin\varphi - y\cos\varphi$. Подразумѣвая подъ x и y всегда ихъ выраженія, какъ функцій отъ независимой перемѣнной t, получимъ

(5) $$A = \tfrac{1}{2}\int(x\,dy - y\,dx).$$

Замѣчая еще, что значеніе интеграла отъ $x\,dy + y\,dx$, распространеннаго на какую угодно дугу кривой, равно, очевидно, разности значеній xy въ концахъ дуги, видимъ, что $\int(x\,dy + y\,dx) = 0$, если интегрированіе распространено на всю кривую. Отсюда слѣдуетъ, что A можно представить также въ одной изъ слѣдующихъ формъ:

(6) $$A = \int x\,dy, \quad A = -\int y\,dx.$$

Въ томъ же самомъ, впрочемъ, можно также убѣдиться, производя надлежащимъ образомъ интегрированія въ выраженіи $\int\int dx\,dy$. Наконецъ, если въ формулѣ (5) за перемѣнную интегрированія примемъ $t = \frac{y}{x}$, то получимъ

(7) $$A = \tfrac{1}{2}\int x^2\,dt.$$

Эту формулу надо предпочесть формуламъ (6), потому что она не требуетъ, какъ тѣ, дифференцированія x и y по t, и, подобно (5), примѣнима ко всякой площади, ограниченной двумя радіусами векторами. Что же касается формулъ (6), то, чтобы примѣнить ихъ къ случаю какой угодно дуги, надо прибавить къ A или отнять отъ него разность значеній $\frac{1}{2}xy$ въ концахъ дуги. Такимъ образомъ мы снова придемъ къ той формулѣ, которую указали въ началѣ для площади между дугою кривой, прямою (осью) и перпендикулярами, опущенными изъ концовъ дуги на эту ось. Впрочемъ, формула (7) не отличается существенно отъ формулы (3), въ которую она и переходитъ, если сдѣлаемъ подстановку $t = \operatorname{tg}\theta$.

770. Примѣры. a) Вся площадь, ограниченная лемнискатою $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ равна

$$A = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta \, d\theta = a^2.$$

Она равна площади треугольника, составленнаго касательною въ вершинѣ и двумя касательными въ двойной точкѣ. Подобно этому найдемъ для улитки $r = a\cos\theta + b$

$$A = \int_0^{\pi} r^2 d\theta = \int_0^{\pi} (\tfrac{1}{2}a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta + \tfrac{1}{2}a^2\cos 2\theta)\, d\theta = \pi(\tfrac{1}{2}a^2 + b^2).$$

Этотъ результатъ справедливъ при $b \geq a$, и, въ частности, для кардіоиды $A = \frac{3}{2}\pi a^2$. При $b < a$ найденное выраженіе изображаетъ сумму двухъ площадей, ограниченныхъ двумя петлями, внѣшнею и внутреннею; величины каждой изъ этихъ площадей выражаются формулами

$$\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}a^2 + b^2\right) \pm \left\{\frac{3}{2} b\sqrt{a^2 - b^2} + \left(\frac{1}{2}a^2 + b^2\right)\arcsin\frac{b}{a}\right\}.$$

b) Для параболы $y^2 = 2ax$ имѣемъ

$$A = \int_0^x y\,dx = \frac{1}{a}\int_0^y y^2\,dy = \frac{y^3}{3a} = \frac{2}{3}xy.$$

Поэтому площадь параболическаго сегмента OMP равна $\frac{2}{3}$ площади треугольника TMP (рис. 92). Отсюда легко вывести, что площадь, лежащая между дугою параболы и ея хордою, равна $\frac{2}{3}$ площади треугольника, ограниченнаго хордою и касательными въ концахъ дуги. Впрочемъ, къ этому результату можно и прямо придти, повторяя приведенное въ началѣ вычисленіе, принявъ за ось y-овъ касательную, параллельную хордѣ, а за начало координатъ точку касанія. За элементъ площади можно тогда принять произведеніе $y\,dx$ на синусъ угла между координатными осями.

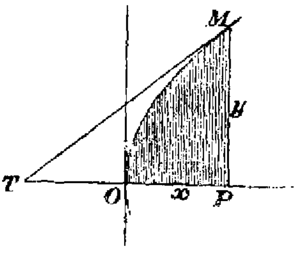

Рис. 92.

c) Для цѣпной линіи (§ 589, c) съ параметромъ a площадь, заключающаяся между дугою кривой, директрисою и двумя крайними ординатами, равна площади прямоугольника, стороны котораго равны a и длинѣ дуги. Въ самомъ дѣлѣ, если начало дуги въ вершинѣ, то

$$A = \frac{1}{2}a\int_0^x \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) dx = a^2 y' = as.$$

Слѣдовательно, для любой дуги MM'

$$A = a(s' - s) = a \cdot \text{дуга } MM'.$$

d) Положимъ, что движущаяся точка описываетъ логариѳмическую спираль (§ 589, e) и возвращается на тотъ же радіусъ векторъ, съ котораго она начала двигаться. Этотъ радіусъ векторъ и описанная точкою дуга ограничиваютъ площадь, величину которой легко выразить въ функціи отъ разстояній a и b отъ полюса до концовъ дуги. Дѣйствительно, если положимъ $b = ae^{2m\pi}$, то уравненіе спирали будетъ $r = ae^{m\theta}$ и

$$A = \frac{1}{2} a^2 \int_0^{2\pi} e^{2m\theta} \, d\theta = \frac{a^2}{4m}(e^{4m\pi} - 1) = \pi \frac{b^2 - a^2}{\log \frac{b^2}{a^2}}.$$

Если перпендикуляръ, возставленный къ хордѣ изъ ея середины, встрѣчаетъ касательныя въ концахъ дуги въ точкахъ P и Q, то площадь (равнобедреннаго) треугольника OPQ какъ разъ равна A. Полагая, что m стремится къ нулю, а b, слѣдовательно, къ a, найдемъ величину площади круга радіуса a:

$$A = \lim \frac{b+a}{2} \cdot \frac{b-a}{2m} = a^2 \lim \frac{e^{2m\pi} - 1}{2m} = \pi a^2.$$

Замѣтимъ еще, что длина PQ имѣетъ предѣломъ длину окружности этого круга.

e) Предложимъ себѣ вычислить площадь, лежащую между цѣлою дугою циклоиды (§ 595, n) и ея хордою (рис. 93). Помѣстимъ начало коор-

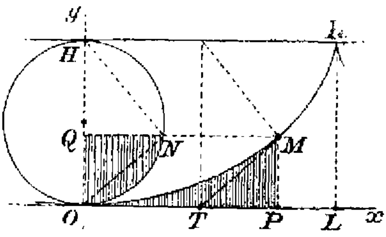

Рис. 93.

динатъ въ вершину и примемъ касательную въ ней за ось x-овъ. Пусть L и H будутъ проекціи точки возврата R на координатныя оси, а P и Q проекціи любой точки M циклоиды на тѣ же оси. Кругъ, построенный на OH, какъ на діаметрѣ, встрѣтитъ отрѣзокъ MQ въ нѣкоторой точкѣ N. Извѣстно, что касательная къ циклоидѣ въ точкѣ M параллельна ON, такъ что $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} NOx = \frac{y}{NQ}$. Слѣдовательно, площадь $OPM = \int_0^x y\,dx = \int_0^y NQ \cdot dy$, т. е. площади половины кругового сегмента ONQ. Изъ этого уже легко видѣть, что половина искомой площади получится, если отнимемъ $\frac{1}{2}\pi a^2$ отъ площади прямоугольника $OLRH$; послѣдняя равна $OL \cdot OH = \pi a \cdot 2a = 2\pi a^2$. Слѣдовательно,

$$A = 2(2\pi a^2 - \tfrac{1}{2}\pi a^2) = 3\pi a^2,$$

т. е. искомая площадь равна тремъ площадямъ образующаго круга.

f) Вычислимъ площадь, ограниченную осью x-овъ и дугою квадратрисы $y = x \cot \frac{x}{a}$, заключающеюся между двумя ближайшими къ началу

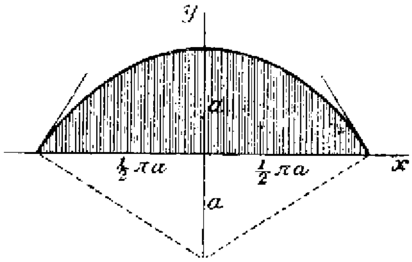

Рис. 94.

координатъ точками пересѣченія кривой съ осью x-овъ (рис. 94). Мы будемъ имѣть, очевидно,

$$A = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi a} x \cot \frac{x}{a}\, dx = 2a^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \theta \cot \theta\, d\theta$$

$$= 2a^2 (\theta \log \sin \theta)_0^{\frac{1}{2}\pi} - 2a^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log \sin \theta\, d\theta.$$

На основаніи теоремы Лопиталя, съ приближеніемъ θ къ 0,

$$\lim (\theta \log \sin \theta) = -\lim \frac{\theta^2}{\sin \theta} = 0.$$

Слѣдовательно, (§ 721, d)

$$A = -2a^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log \sin \theta\, d\theta = \pi a^2 \log 2.$$

g) Вся площадь эллипса, съ полуосями a и b, равна

$$A = 4b \int_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\, dx = 4ab \int_0^1 \sqrt{1 - t^2}\, dt.$$

Вычисленіе этого интеграла очень просто (§ 727, a), но мы и его можемъ избѣжать, замѣтивъ, что при $b = a$ должно быть $A = \pi a^2$. Слѣдовательно,

$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt = \tfrac{1}{4}\pi, \quad A = \pi a b.$$

Нѣсколько сложнѣе будетъ вычисленіе съ полярными координатами, когда полюсъ помѣщенъ въ одномъ изъ фокусовъ. Уравненіе эллипса при этомъ предположеніи будетъ

$$r = \frac{b^2}{a(1-k\cos\theta)}.$$

Но мы быстро достигнемъ цѣли, если припомнимъ (§ 764, e), что въ силу соотношенія между r, θ и эксцентрической аномаліей φ, имѣемъ $r\,d\theta = b\,d\varphi$, $r = a(1+k\cos\varphi)$. Отсюда

$$A = \int_0^{\pi} r^2\,d\theta = ab\int_0^{\pi}(1+k\cos\varphi)\,d\varphi = \pi a b.$$

h) Положимъ, что эллипсъ заданъ общимъ уравненіемъ

$$a x^2 + b y^2 + c + 2fy + 2gx + 2hxy = 0,$$

въ которомъ всегда можно предположить, что a и b положительны и, кромѣ того,

$$ab - h^2 > 0, \quad D = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} < 0.$$

Если напишемъ данное уравненіе въ видѣ

$$by^2 + 2(hx+f)y + ax^2 + 2gx + c = 0,$$

то замѣтимъ, что каждому значенію x соотвѣтствуетъ два значенія для y, которыя совпадаютъ въ одно при значеніяхъ $x = \alpha$ и $x = \beta > \alpha$, удовлетворяющихъ уравненію $b(ax^2 + 2gx + c) - (hx+f)^2 = 0$. Это уравненіе можно написать въ видѣ $c'x^2 - 2g'x + a' = 0$, если обозначимъ черезъ a', b', c', ..., h' алгебраическія дополненія элементовъ $a, b, c, \ldots, h$ въ D. Разность между двумя упомянутыми значеніями y будетъ равна

$$\frac{2}{b}\sqrt{-c'x^2 + 2g'x - a'} = \frac{2\sqrt{c'}}{b}\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}.$$

Слѣдовательно, если положимъ $x = \alpha + (\beta-\alpha)t$, то первая изъ формулъ (3) дастъ

$$A = \frac{2\sqrt{c'}}{b}(\beta-\alpha)^2\int_0^1 \sqrt{t(1-t)}\,dt.$$

Значеніе послѣдняго интеграла тотчасъ получимъ, безъ всякаго вычисленія, замѣтивъ, что онъ изображаетъ половину площади круга $y^2 = x(1-x)$;

величина его, слѣдовательно, равна $\frac{1}{2}\pi$. Съ другой стороны, $\beta=\frac{2}{c'}\sqrt{g'^2-a'c'}$, а $a'c'-g'^2$, какъ извѣстно (§ 38), есть алгебраическое дополненіе элемента b' въ опредѣлителѣ, взаимномъ съ D, и потому $a'c'-g'^2=bD$. Итакъ,

$$A=\frac{-\pi D}{(ab-h^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot$$

Легко, впрочемъ, убѣдиться (§ 384, c), что множитель при π въ этомъ выраженіи A равенъ произведенію полуосей эллипса.

i) Площадь, ограниченную днурогомъ (§ 610, e) тотчасъ найдемъ примѣняя первую изъ формулъ (3):

$$A=2\int_0^a\left(\frac{a^2-x^2}{2a-\sqrt{a^2-x^2}}-\frac{a^2-x^2}{2a+\sqrt{a^2-x^2}}\right)dx=4\int_0^a\frac{a^2-x^2}{3a^2+x^2}\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

Послѣдній интегралъ разлагается на слѣдующія слагаемыя

$$-4a^2\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}-\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx+16a^4\int_0^a\frac{dx}{(3a^2+x^2)\sqrt{a^2-x^2}};$$

вычисляя интегралъ

$$\int\frac{dx}{(3a^2+x^2)\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{2a^2\sqrt{3}}\arcsin\frac{2x}{\sqrt{3a^2+x^2}}+C,$$

найдемъ окончательно $A=(16-9\sqrt{3})\frac{\pi a^2}{\sqrt{3}}\cdot$ Итакъ, площадь A равна площади наибольшаго вписаннаго круга, умноженной на 2,13843 ....

j) Площадь, ограниченная астроидою $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$, равна

$$A=4\int_0^a\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}dx=6a^2\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{3}{2}}\,dt.$$

Замѣняя t на $1-t$, находимъ

$$\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{3}{2}}\,dt=\int_0^1 t^{\frac{3}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}\,dt=\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{t(1-t)}\,dt=\frac{\pi}{16}\cdot$$

Слѣдовательно, $A=\frac{3}{8}\pi a^2$. Впрочемъ, можно общнѣе вычислить площадь между кривою $x^n+y^n=a^n$ и положительными осями координатъ, при помощи функціи Γ:

$$A=\int\limits_0^a (a^n-x^n)^{\frac{1}{n}}\,dx=\frac{a^2}{n}\int\limits_0^1 t^{\frac{1}{n}-1}(1-t)^{\frac{1}{n}}\,dt=\frac{a^2\,\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{2\,n\,\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}.$$

Всякій разъ, когда положительное число n равно дроби съ четнымъ числителемъ и нечетнымъ знаменателемъ, кривая будетъ сомкнутая (аналогичная астроидѣ или кругу, смотря по тому, будетъ ли $n<1$ или >1). Она ограничиваетъ площадь, вчетверо большую предыдущей. Въ частности, при $n=2$ и $n=\frac{2}{3}$ получаемъ $A=\pi a^2$ и $A=\frac{3}{8}\pi a^2$.

k) Чтобы вычислить площадь, ограниченную одною изъ петель кривой $x^4=(x^2-y^2)y$ (§ 610, b), примѣнимъ формулу (7). Мы тотчасъ найдемъ

$$A=\tfrac{1}{2}\int\limits_0^1 (t-t^3)^2\,dt=\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{2}{5}+\tfrac{1}{7}\right)=\tfrac{4}{105}.$$

Точно такъ же площадь петли Декартова листа $x^3+y^3-3\,axy=0$. равна

$$A=9\,a^2\int\limits_0^1\frac{t^2\,dt}{(1+t^3)^2}=3\,a^2\left(\frac{1}{1+t^3}\right)_1^0=\frac{3}{2}\,a^2.$$

Отсюда видно, что Декартовъ листъ дѣлитъ на двѣ равновеликія части треугольникъ, образуемый касательными въ вершинѣ и въ двойной точкѣ. Общнѣе найдемъ для кривой

$$x^{2n+1}+y^{2n+1}=(2\,n+1)\,a\,x^n\,y^n,\ \text{что}\ A=(n+\tfrac{1}{2})\,a^2.$$

l) Для вычисленія площадей, ограниченныхъ обѣими петлями кривой $(x^2+y^2-ay)^2=2\,a^2xy$ удобнѣе прилагается вторая формула (3). Она требуетъ, чтобы уравненіе кривой было написано въ полярныхъ координатахъ $r=a(\sin\theta\pm\sqrt{\sin 2\theta})$. Всякому значенію θ между 0 и $\alpha=\operatorname{arc\,tg} 2=63^0 26'\ldots$ соотвѣтствуютъ двѣ точки. Одна изъ нихъ описываетъ цѣлую петлю въ области отрицательныхъ x и y (и притомъ наименьшую), а другая описываетъ только нѣкоторую дугу наибольшей петли. Эта дуга дополняется другою $\left(\text{когда } \theta \text{ измѣняется отъ } \alpha \text{ до } \frac{\pi}{2}\right)$, которая касается оси y-овъ въ точкѣ a, и прямой $y=2x$ въ началѣ координатъ. Отсюда слѣдуетъ, что площадь, ограниченная этою (большею) петлею, равна

$$A=\tfrac{1}{2}\,a^2\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi}(\sin\theta+\sqrt{\sin 2\theta})^2\,d\theta-\tfrac{1}{2}\,a^2\int\limits_\alpha^{\frac{1}{2}\pi}(\sin\theta-\sqrt{\sin 2\theta})^2\,d\theta,$$

а площадь другой петли равна

$$A'=\tfrac{1}{2}\,a^2\int\limits_0^\alpha(\sin\theta-\sqrt{\sin 2\theta})^2\,d\theta.$$

Поэтому

$$A - A' = 2a^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin\theta \sqrt{\sin 2\theta}\, d\theta = \tfrac{1}{2}\pi a^2.$$

Далѣе,

$$A + A' = a^2 \int_0^{\alpha} (\sin^2\theta + \sin 2\theta)\, d\theta + 2a^2 \int_{\alpha}^{\frac{1}{2}\pi} \sin\theta \sqrt{\sin 2\theta}\, d\theta.$$

Первый интегралъ берется безъ затрудненія. Чтобы вычислить второй, беремъ за новую перемѣнную интегрированія $t = \operatorname{tg}\theta$. Такимъ образомъ найдемъ

$$A' = \tfrac{1}{2} a^2 (1 - \tfrac{1}{4}\log 5 - \operatorname{arc\,tg} \tfrac{1}{2}) = a^2 \cdot 0{,}06682 \ldots.$$

и затѣмъ $A = A' + \frac{1}{2}\pi a^2 = a^2 \cdot 1{,}63762 \cdots > 24\, A'$.

m) Разсмотримъ тѣ изъ кривыхъ (§ 602, b)

(8) $$(x + y)(x^2 - 2kxy + y^2) = 2(1 + k)\, a\, xy,$$

которыя имѣютъ только одну асимптоту ($k^2 < 1$), и предложимъ себѣ вычислить площадь, ограниченную петлею каждой изъ нихъ. Поступая такъ же, какъ въ случаѣ Декартова листа ($k = \frac{1}{2}$), получимъ

$$A = 4(1 + k)^2 a^2 \int_0^1 \frac{t^2\, dt}{(1 + t)^2 (1 - 2kt + t^2)^2}.$$

За новую перемѣнную удобно будетъ принять $z = \dfrac{1 - t}{1 + t}$ и написать

$$A = \frac{1}{2}(1 + k)^2 a^2 \int_0^1 \frac{(1 - z^2)^2\, dz}{(1 - k + (1 + k) z^2)^2}.$$

Замѣняя z на $\dfrac{z}{\sqrt{m}}$, гдѣ $m = \dfrac{1 + k}{1 - k}$, найдемъ

$$A = \frac{a^2}{2\sqrt{m}} \int_0^{\sqrt{m}} \left(\frac{m - z^2}{1 + z^2}\right)^2 dz$$

$$= \frac{a^2}{2\sqrt{m}} \left\{ \sqrt{m} - 2(m + 1) \int_0^{\sqrt{m}} \frac{dz}{1 + z^2} + (m + 1)^2 \int_0^{\sqrt{m}} \frac{dz}{(1 + z^2)^2} \right\}.$$

Замѣчая, наконецъ, что

$$\int_0^{\sqrt{m}} \frac{dz}{1 + z^2} = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{m}, \qquad \int_0^{\sqrt{m}} \frac{dz}{(1 + z^2)^2} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arc\,tg}\sqrt{m} + \frac{\sqrt{m}}{m + 1}\right),$$

получаемъ

$$A = \left\{ m + 3 + \frac{(m+1)(m-3)}{\sqrt{m}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{m} \right\} \frac{a^2}{4} \cdot$$

Въ частности, въ случаѣ Декартова листа ($m=3$) и логоциклики ($m=1$), имѣемъ

$$A = \tfrac{3}{2} a^2, \quad A = (1 - \tfrac{1}{4}\pi)\, a^2.$$

n) Къ полученному результату можно придти и съ помощью первой формулы, выведенной въ § 768, если сперва повернемъ координатныя оси на уголъ $\frac{\pi}{4}$ около начала координатъ. Уравненіе (8) приметъ простой видъ:

$$y = \pm x \sqrt{\frac{a - \frac{x\sqrt{2}}{m}}{a + x\sqrt{2}}},$$

и легкое вычисленіе дастъ (§ 725, m)

$$\int^{x} \sqrt{\frac{a - \frac{x\sqrt{2}}{m}}{a + x\sqrt{2}}}\, x\, dx = -\frac{1}{4}\left((m+3)\frac{a}{2} - x\sqrt{2}\right)\sqrt{(a + x\sqrt{2})\left(a - \frac{x\sqrt{2}}{m}\right)}$$

$$+ \left\{ m + 3 + \frac{(m+1)(m-3)}{\sqrt{m}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x\sqrt{\frac{2}{m}}}{a + \sqrt{(a + x\sqrt{2})\left(a - \frac{x\sqrt{2}}{m}\right)}} \right\} \frac{a^2}{8}.$$

Стоитъ только положить $x = \frac{m\,a}{\sqrt{2}}$, чтобы найти вышеприведенное выраженіе для A. Если же положимъ $x = -a\sqrt{2}$, то получимъ величину площади A' между кривою и ея асимптотою:

$$A' = A - \frac{(m+1)(m-3)}{8\sqrt{m}}\, \pi\, a^2.$$

Для $m=3$, $A' = A$, т. е. площадь петли Декартова листа равна площади между кривою и асимптотою ея: послѣдняя дѣлится на три равныя части касательными въ двойной точкѣ. При $m=1$ получаемъ $A' = (1 + \frac{1}{4}\pi)\, a^2$, откуда $A + A' = 2a^2$, т. е. вся площадь, ограниченная логоцикликою и ея асимптотою равна учетверенной площади треугольника, образуемаго асимптотою и касательными въ двойной точкѣ. Наконецъ, при безконечномъ m имѣемъ слѣдующее: $\lim A = \infty$, $\lim A' = \frac{1}{3} a^2$. Петля стремится развернуться въ параболическую форму, т. е. стремится разложиться на двѣ безконечныя вѣтви, асимптотически расположенныя относительно параболы $y^2 = \frac{1}{2} a\,(x\sqrt{2} - a)$. Площадь, лежащая между кривою и ея прямолинейною асимптотою, наоборотъ, остается конечною.

o) Предложимъ себѣ вычислить часть площади эллипса, заключающуюся между двумя вѣтвями однофокусной съ нимъ равносторонней гиперболы. Уравненіе

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}=1 \tag{9}$$

изображаетъ безконечное множество однофокусныхъ коническихъ сѣченій. Между ними содержится и данный эллипсъ (при $\lambda=0$). При $\lambda<b^2$ уравненіе (9) изображаетъ безчисленное множество эллипсовъ, лежащихъ внутри или внѣ даннаго, смотря по тому, будетъ ли $\lambda>0$ или <0. При $\lambda>b^2$ то же уравненіе изображаетъ безчисленное множество гиперболъ, стремящихся совпасть съ осью y-овъ съ приближеніемъ λ къ a^2. Одна изъ этихъ гиперболъ равносторонняя: она соотвѣтствуетъ значенію $\lambda=\frac{1}{2}(a^2+b^2)$. Мы обозначимъ черезъ μ тѣ значенія λ, при которыхъ уравненіе (9) изображаетъ гиперболу. Черезъ каждую точку (x, y) разсматриваемой площади проходятъ два коническихъ сѣченія (9), а именно, одинъ эллипсъ и одна гипербола Первый характеризуется нѣкоторымъ значеніемъ λ между 0 и b^2, другая нѣкоторымъ значеніемъ μ между $\frac{1}{2}(a^2+b^2)$ и a^2. Оба эти значенія будутъ корнями уравненія (9) (при данныхъ x и y), т. е. уравненія

$$(\lambda-a^2)(\lambda-b^2)+(\lambda-b^2)x^2+(\lambda-a^2)y^2=0,$$

Поэтому для этихъ значеній λ и μ имѣемъ

$$\lambda+\mu=a^2+b^2-x^2-y^2, \quad \lambda\mu=a^2b^2-a^2y^2-b^2x^2,$$

откуда слѣдуетъ

$$x^2=\frac{(a^2-\lambda)(a^2-\mu)}{a^2-b^2}, \quad y^2=-\frac{(b^2-\lambda)(b^2-\mu)}{a^2-b^2},$$

и далѣе

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\lambda,\mu)}\right|=\frac{\frac{1}{4}(\mu-\lambda)}{\sqrt{-(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)(a^2-\mu)(b^2-\mu)}}.$$

Слѣдовательно, примѣняя формулу (4), получимъ

$$A=\int_0^{b^2}\frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)}}\int_{\frac{1}{2}(a^2+b^2)}^{a^2}\frac{(\mu-\lambda)\,d\mu}{\sqrt{-(a^2-\mu)(b^2-\mu)}}.$$

Чтобы выполнить первое интегрированіе, положимъ $\mu=a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta$, при чемъ θ измѣняется отъ $\frac{\pi}{4}$ до 0. Тогда тотчасъ найдемъ значеніе этого интеграла:

$$2\int_0^{\frac{1}{4}\pi}(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta-\lambda)\,d\theta=\tfrac{1}{2}\pi\left\{\tfrac{1}{2}(a^2+b^2)-\lambda\right\}+\tfrac{1}{2}(a^2-b^2),$$

вслѣдствіе чего

$$A=\frac{1}{2}\pi\int_0^{b^2}\frac{\frac{1}{2}(a^2+b^2)-\lambda}{\sqrt{(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)}}\,d\lambda+\frac{1}{2}(a^2-b^2)\int_0^{b^2}\frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)}}$$

и наконецъ (§ 723, с; § 745, а)

$$A = \frac{1}{2}\pi a b + \frac{1}{2}(a^2 - b^2)\log\frac{a+b}{a-b}.$$

Поверхности и объемы тѣлъ вращенія.

771. Положимъ, что въ плоскости дана нѣкоторая дуга кривой; заставимъ эту дугу вращаться около прямой, лежащей въ той же плоскости. За элементъ образуемой при этомъ поверхности можно принять полосу, заключающуюся между нѣкоторымъ параллельнымъ кругомъ радіуса R и другимъ параллельнымъ кругомъ радіуса $R + dR$. Эту полосу можно разсматривать, какъ поверхность усѣченнаго конуса, образуемаго прямолинейнымъ элементомъ ds (элементомъ дуги данной кривой). Эта элементарная поверхность измѣряется произведеніемъ образующей ds на среднее ариѳметическое окружностей основаній усѣченнаго конуса, т. е. на $2\pi(R + \frac{1}{2}dR)$ или просто на $2\pi R$ (отбрасывая безконечно малое слагаемое πdR). Слѣдовательно, отбрасывая безконечно малыя высшаго порядка въ выраженіи элемента, что не измѣняетъ значенія интеграла, мы видимъ, что поверхность тѣла вращенія равна $A = 2\pi\int R\,ds$, гдѣ знакъ R всегда надо брать одинаковымъ со знакомъ ds. Точно такъ же, принимая за элементъ объема слой, лежащій между плоскостями тѣхъ же двухъ параллелей и элементомъ поверхности, можемъ его разсматривать, какъ цилиндръ съ основаніемъ πR^2 и высотою dz (проекціею ds на ось вращенія). Поэтому объемъ тѣла вращенія, ограниченнаго образуемою поверхностью и плоскостями двухъ крайнихъ параллелей будетъ равенъ $V = \pi\int R^2 dz$. При опредѣленіи предѣловъ интегрированій надо принимать во вниманіе характеръ измѣненія перемѣнной интегрированія вдоль образующей дуги PQ (рис. 95) и на знакъ дифференціала. При вычисленіи A перемѣнная s по существу своему постоянно возрастаетъ (могла бы, если угодно, постоянно убывать) отъ одного конца дуги P до другого Q; но если потребуется для выполненія интегрированія ввести новую перемѣнную, то можетъ случиться, что интегралъ надо будетъ разбить на нѣсколько другихъ, согласно замѣчаніямъ, которыя были сдѣланы раннѣе объ измѣненіи перемѣнной интегрированія (§ 724). Положимъ, напримѣръ, что PQ есть часть нѣкоторой сомкнутой кривой, и что перемѣнная z (которую вводимъ вмѣсто s) сперва возрастаетъ отъ a до c, а потомъ убываетъ

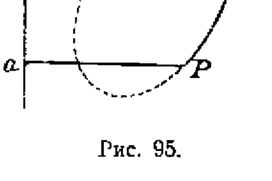

Рис. 95.

отъ c до b. Если примемъ z за новую перемѣнную интегрированія, то интегралъ $2\pi\int R\,ds$, взятый въ предѣлахъ отъ a до b перемѣнной z $\left(\text{т. е. } 2\pi\int\limits_a^b R\frac{ds}{dz}\cdot dz\right)$, далъ бы только часть поверхности вращенія, соотвѣтствующую дугѣ PH, части дуги PQ, а искомая поверхность равна

$$A = 2\pi\int\limits_a^c R\frac{ds}{dz}\cdot dz + 2\pi\int\limits_c^b R\frac{ds}{dz}\,dz$$

(гдѣ R подъ знакомъ перваго и R подъ знакомъ второго интеграла имѣютъ различныя значенія). Первое слагаемое даетъ величину поверхности, образуемой дугою PL, второе — величину поверхности, образуемой дугою LQ; оба слагаемыя положительныя. Точно такъ же для объема V будемъ имѣть

$$V = \pi\int\limits_a^c R^2\,dz + \pi\int\limits_c^b R^2\,dz,$$

но здѣсь второе слагаемое отрицательно, какъ и должно быть, потому что объемъ тѣла, образуемаго вращеніемъ дуги LQ надо вычесть изъ объема, образуемаго дугою PL, чтобы получить объемъ тѣла, образуемаго всею дугою PLQ.

772. Примѣры. a) Поверхность, образуемая вращеніемъ астроиды около одной изъ ея касательныхъ въ точкахъ перегиба, равна

$$A = 4\pi\int\limits_{x=0}^{x=a} x\,ds - 4\pi a^{\frac{1}{3}}\int\limits_0^a x^{\frac{2}{3}}\,dx = \frac{12}{5}\pi a^2,$$

т. е. вся поверхность равна $\frac{3}{5}$ поверхности описаннаго шара. Объемъ того же тѣла вращенія (§ 762)

$$V = 2\pi\int\limits_0^a x^2dy - 3\pi a^3\int\limits_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^3\,dt = 3\pi a^3\,\frac{3!\,2^4}{9\cdot 7\cdot 5\cdot 3} = \frac{32\pi a^3}{105}.$$

b) Поверхность катеноида, между горловымъ кругомъ и произвольною параллелью радіуса y (припоминая равенство $y\,dx = a\,ds$) равна

$$A = 2\pi\int y\,ds = \frac{2\pi}{a}\int\limits_0^x y^2dx = \frac{1}{2}\pi a\int\limits_0^x\left(e^{\frac{2x}{a}} + e^{-\frac{2x}{a}} - 2\right)dx = \pi a\,(x + yy').$$

Слѣдовательно, она пропорціональна отрѣзку на оси вращенія между нормалью и плоскостью горлового круга Отсюда слѣдуетъ, что нормальные къ катеноиду конусы, вершины которыхъ лежатъ въ концахъ какого угодно отрѣзка длины b на оси, отграничиваютъ на поверхности полосу, площадь которой $A = \pi a b$. Объемъ тѣла, ограниченнаго этою полосою и плоскостями крайнихъ параллелей, равенъ

$$V = \pi \int y^2\, dx = \tfrac{1}{2} a A = \tfrac{1}{2} \pi a^2 b.$$

c) При рѣшеніи вопросовъ, относящихся къ циклоидѣ, полезно припомнить слѣдующее (§ 770, e): если за координатныя оси возьмемъ касательную и нормаль въ вершинѣ, то угловой коэффиціентъ касательной въ данной точкѣ (x, y) будетъ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{\sqrt{y(2a-y)}}$, откуда

$$\frac{dx}{\sqrt{2a-y}} = \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{ds}{\sqrt{2a}}.$$

Если, напримѣръ, цѣлая дуга циклоиды вращается около касательной въ вершинѣ, то величина образуемой поверхности будетъ

$$A = 4\pi \int_0^{4a} y\, ds = 4\pi \sqrt{2a} \int_0^{2a} \sqrt{y}\, dy = \frac{32}{3} \pi a^2,$$

т. е. приблизительно въ 11 разъ больше площади образующаго (циклоиду) круга. Объемъ тѣла, ограниченнаго этою поверхностью и плоскостями крайнихъ параллелей, равенъ (ср. съ § 770, j)

$$V = 2\pi \int_0^{\pi a} y^2\, dx = 2\pi \int_0^{2a} y^{\frac{3}{2}} (2a-y)^{\frac{1}{2}}\, dy = 16\pi a^3 \int_0^1 t^{\frac{3}{2}} (1-t)^{\frac{1}{2}}\, dt = \pi^2 a^3.$$

Если же дуга циклоиды вращается около директрисы (основанія), то получимъ вдвое большую поверхность

$$A = 4\pi \int_0^{4a} (2a-y)\, ds = 32\pi a^2 - 4\pi \int_0^{4a} y\, ds = \frac{64}{3} \pi a^2,$$

а объемъ V будетъ въ 5 разъ больше предыдущаго. Дѣйствительно, припоминая результаты

$$\int_0^{\pi a} y\, dx = \tfrac{1}{2} \pi a^2, \qquad \int_0^{\pi a} y^2\, dx = \tfrac{1}{2} \pi a^3,$$

тотчасъ находимъ

$$V = 2\pi \int_0^{\pi a} (2a-y)^2\, dx = 5\pi^2 a^3.$$

Если, наконецъ, дуга вращается около нормали въ вершинѣ, то прежде всего замѣтимъ, что длина всякой дуги, одинъ конецъ которой находится въ вершинѣ, равна

$$s = \sqrt{2a}\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{y}} = 2\sqrt{2ay}.$$

Такъ какъ, далѣе, въ точкѣ возврата $s = 4a$, $x = \pi a$, то интегрированіемъ по частямъ находимъ

$$\int_0^{4a} x\,ds = 4\pi a^2 - \int_0^{\pi a} s\,dx = 4\pi a^2 - 2\sqrt{2a}\int_0^{2a}\sqrt{2a-y}\cdot dy = 4a^2(\pi - \tfrac{4}{3}).$$

Слѣдовательно, величина образуемой поверхности равна $8\pi a^2(\pi - \frac{4}{3})$.

d) Найдемъ теперь всю поверхность сфероида (эллипсоида вращенія). Изъ уравненія меридіана имѣемъ

$$x = \frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}, \qquad ds = \sqrt{\frac{b^4 + (a^2-b^2)y^2}{b^2(b^2-y^2)}}\cdot dy,$$

поэтому

$$A = \frac{4\pi a}{b^2}\int_0^b \sqrt{b^4 + (a^2-b^2)y^2}\,dy.$$

Если сфероидъ сжатый ($a > b$), то, положивъ $y = \frac{b^2 t}{\sqrt{a^2-b^2}}$, получаемъ

$$A = \frac{4\pi a b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\int_0^{\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}} \sqrt{1+t^2}\,dt = 2\pi a^2 + \frac{2\pi a b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\log\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}.$$

Если эксцентриситетъ меридіана малъ (какъ это имѣетъ мѣсто, напримѣръ, для земли), то приближенно можно взять $A = 4\pi a^2(1 - \frac{1}{3}k^2)$. Въ случаѣ растянутаго сфероида, послѣ того какъ замѣнимъ a на b и наоборотъ, чтобы опять обозначить черезъ $2a$ фокальную ось, найдемъ

$$A = \frac{4\pi b}{a^2}\int_0^a \sqrt{a^4 - (a^2-b^2)y^2}\,dy,$$

и, полагая $y = \frac{a^2 t}{\sqrt{a^2-b^2}}$, получимъ

$$A = \frac{4\pi a^2 b}{\sqrt{a^2-b^2}}\int_0^{\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}} \sqrt{1-t^2}\,dt = 2\pi b^2 + \frac{2\pi a^2 b}{\sqrt{a^2-b^2}}\arc\cos\frac{b}{a}.$$

При маломъ эксцентриситетѣ получимъ приблизительно $A = 4\pi b^2(1 + \frac{1}{3}k^2)$. Итакъ, поверхность слабо эксцентричнаго сфероида приблизительно равна **поверхности шара, касающагося сфероида вдоль экватора**, умноженной на $1 \mp \frac{1}{3}k^2$, смотря по тому, будетъ ли сфероидъ сжатый или растянутый.

e) Вычислимъ теперь поверхность и объемъ **тора**, т. е. кольца, образуемаго вращеніемъ круга около прямой, лежащей въ его плоскости. Если b есть разстояніе отъ центра круга до оси вращенія, и радіусъ круга $a < b$, то радіусъ параллели $R = b + a\cos\theta$ *) и $ds = a\,d\theta$, слѣдовательно,

$$A = 4\pi a\int_0^{\pi}(b + a\cos\theta)\,d\theta = 4\pi^2 a b.$$

Поверхность имѣетъ двѣ **особенныя** касательныя плоскости, которыя касаются поверхности вдоль параллелей и раздѣляютъ ее на внутреннюю и внѣшнюю часть. Чтобы опредѣлить поверхности каждой изъ этихъ частей, достаточно знать ихъ разность:

$$A' - A'' = 8\pi a^2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos\theta\,d\theta = 8\pi a^2.$$

Точно такъ же, цилиндръ, опредѣляемый упомянутыми двумя параллелями раздѣляетъ кольцо на двѣ части, объемы которыхъ будутъ

$$V' = 2\pi a\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(b + a\cos\theta)^2\cos\theta\,d\theta - 2\pi a b^2,$$

$$V'' = 2\pi a\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi}(b + a\cos\theta)^2\cos\theta\,d\theta + 2\pi a b^2,$$

такъ что объемъ всего кольца будетъ

$$V = 2\pi a\int_0^{\pi}(b + a\cos\theta)^2\cos\theta\,d\theta = 4\pi a^2 b\int_0^{\pi}\cos^2\theta\,d\theta = 2\pi^2 a^2 b.$$

Кромѣ того, имѣемъ

$$V' - V'' = 4\pi a\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(b^2 + a^2\cos^2\theta)\cos\theta\,d\theta - 4\pi a b^2 = 4\pi a^3\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^3\theta\,d\theta = \tfrac{8}{3}\pi a^3.$$

Замѣтимъ, что половины разностей $A' - A''$ и $V' - V''$ равны соотвѣтственно поверхности и объему шара радіуса a, поэтому онѣ не измѣняются, когда кольцо будетъ постоянно расширяться, оставаясь всегда заключеннымъ между особенными касательными плоскостями, предполагая послѣднія непо-

---

*) θ — уголъ, образуемый радіусомъ круга, проведеннымъ черезъ какую нибудь точку M на окружности, съ перпендикуляромъ къ оси вращенія.

движными. Объясненіе этого факта вскорѣ (§ 774) будетъ дано. Если, наконецъ, $b < a$, то кругъ пересѣкаетъ ось вращенія и видимая поверхность будетъ

$$A = 4\pi a \int_0^{\arccos\left(-\frac{b}{a}\right)} (b + a\cos\theta)\, d\theta = 4\pi a b \arccos\left(-\frac{b}{a}\right) + 4\pi a\sqrt{a^2 - b^2},$$

а объемъ ограничиваемаго ею тѣла

$$V = 2\pi a \int_0^{\arccos\left(-\frac{b}{a}\right)} (b + a\cos\theta)^2 \cos\theta\, d\theta = 2\pi a^2 b \arccos\left(-\frac{b}{a}\right) + \frac{2}{3}\pi(2a^2 + b^2)\sqrt{a^2 - b^2}.$$

Въ частномъ случаѣ, при $b = 0$, получаемъ шаръ и $A = 4\pi a^2$, $V = \frac{4}{3}\pi a^3$.

f) Положимъ, что кардіоида $r = 2a\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ вращается около своей оси симметріи. Радіусъ параллели, соотвѣтствующей данному значенію θ, будетъ $R = r\sin\theta$, элементъ дуги кардіоиды $ds = 2a\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta$, поэтому, такъ какъ θ измѣняется вдоль кривой постоянно въ одномъ направленіи, получимъ

$$A = 16\pi a^2 \int_0^{\pi} \cos^4\frac{\theta}{2} \sin\frac{\theta}{2}\, d\theta = \frac{32}{5}\pi a^2.$$

Чтобы вычислить весь объемъ тѣла, ограниченнаго данною поверхностью, удобно принять r за перемѣнную интегрированія, такъ какъ r постоянно возрастаетъ при движеніи отъ точки возврата кривой до вершины. Такъ какъ

$$\cos\theta = \frac{r - a}{a}, \quad R = r\sin\theta = \frac{r}{a}\sqrt{2ar - r^2},$$

то тотчасъ получимъ

$$V = \frac{\pi}{a^3}\int_0^{2a} r^3(2a - r)(2r - a)\, dr = \frac{8}{3}\pi a^3.$$

Для провѣрки полезно сравнить эти результаты съ тѣми, которые получаются если разсмотримъ, напримѣръ, наименьшій описанный шаръ. Чтобы опредѣлить радіусъ R наименьшаго изъ круговъ, съ центромъ на оси симметріи, касающихся кардіоиды, достаточно замѣтить, что по условію минимума должно быть $R\, dR = 0$, а потому хорда касанія должна быть нормальна къ кардіоидѣ. Отсюда слѣдуетъ, что радіусъ параллели касанія, совпадающій съ радіусомъ R искомаго круга, равенъ максимуму $r\sin\theta$. Это будетъ при $\theta = \frac{\pi}{3}$, такъ что $r = \frac{3}{2}a$, и искомый радіусъ $R = \frac{3}{4}a\sqrt{3}$. Теперь легко констатировать, что шаръ радіуса R будетъ имѣть объемъ, нѣсколько большій объема разсматриваемаго тѣла, и то же самое справедливо и для поверхностей, хотя a priori въ этомъ нельзя было быть увѣреннымъ. Читатель можетъ подобнымъ же образомъ вычислить объемъ тѣла, образуемаго любою улиткою $r = a\cos\theta + b$ безъ двойной точки ($b > a$), при вращеніи кривой около оси симметріи. Онъ найдетъ $V = \frac{4}{3}\pi b(a^2 + b^2)$. Въ случаѣ $b < a$ это число изображаетъ величину объема, заключеннаго между поверхностями, образуемыми двумя петлями кривой; но каждая изъ этихъ петель, внутренняя и внѣшняя, ограничиваетъ тѣла, объемы которыхъ равны соотвѣтственно

$$\frac{\pi}{6a}(a-b)^4 \quad \text{и} \quad \frac{\pi}{6a}(a+b)^4.$$

Къ этимъ результатамъ приходимъ почти безъ вычисленія съ помощью другой формулы, которая будетъ выведена въ концѣ § 779.

Центры тяжести.

773. Разсмотримъ въ пространствѣ ансамбль точекъ, состоящій изъ точекъ куска s нѣкоторой линіи, поверхности или самого трехмѣрнаго пространства. Центромъ тяжести такого куска s называютъ точку G, координаты которой равны среднимъ значеніямъ (§ 712) координатъ точекъ самого s. Если, чтобы имѣть дѣло съ опредѣленнымъ случаемъ, s обозначаетъ дугу нѣкоторой линіи, то координаты ξ, η, ζ точки G опредѣляются слѣдующими уравненіями

$$\xi s = \int x\,ds, \qquad \eta s = \int y\,ds, \qquad \zeta s = \int z\,ds.$$

Такъ какъ всякое линейное преобразованіе, произведенное надъ координатами x, y, z точекъ s, повторится тождественно и надъ ξ, η, ζ, то ясно, что положеніе центра тяжести отъ выбора координатныхъ осей не зависитъ. Замѣтимъ здѣсь же, что если нѣкоторая фигура имѣетъ плоскость симметріи, то центръ тяжести ея будетъ лежать въ этой плоскости. Дѣйствительно, если примемъ эту плоскость за плоскость Oxy, то каждый элементъ $z\,ds$ интеграла, выражающаго ξ, уничтожиться съ другимъ элементомъ $-z\,ds$, и ξ будетъ равно 0. Въ частности замѣтимъ, что центръ тяжести всякой плоской фигуры лежитъ въ плоскости самой фигуры и что центръ тяжести фигуры, имѣющей центръ симметріи, непремѣнно совпадаетъ съ этимъ центромъ. Наконецъ замѣтимъ еще слѣдующее: если фигура состоитъ изъ двухъ частей s_1 и s_2, центры тяжести которыхъ G_1 и G_2 извѣстны, то центръ тяжести всей фигуры дѣлитъ отрѣзокъ прямой G_1G_2 въ отношеніи, обратномъ отношенію s_1 къ s_2. Это вытекаетъ тотчасъ изъ очевидныхъ равенствъ

$$\xi s = \xi_1 s_1 + \xi_2 s_2, \; \ldots .$$

774. Теорема Гульдена. Возьмемъ снова формулы, выведенныя въ § 771, для поверхности или объема, образуемыхъ вращеніемъ плоской дуги s или площади σ около прямой, лежащей въ ихъ плоскости. Если эту прямую приметъ за ось x-овъ, то упомянутыя формулы можно будетъ написать такъ:

$$A = 2\pi \int y\, ds = 2\pi\eta \cdot s, \quad V = \pi \int y^2 dx = 2\pi \int\int y\, dx\, dy = 2\pi\eta \cdot \sigma.$$

Слѣдовательно, поверхность и объемъ разсматриваемаго тѣла получимъ, если умножимъ соотвѣтственно длину или площадь образующей фигуры на окружность круга, описываемаго ихъ центромъ тяжести. Если желаемъ получить не всю поверхность или весь объемъ, а только ту часть ихъ, которая лежитъ между двумя меридіанальными плоскостями, то, очевидно, надо будетъ вмѣсто всей окружности круга взять только ту ея дугу, которая на ней ограничивается упомянутыми плоскостями. Установивъ вышесказанное, разсмотримъ теперь общнѣе дугу s или площадь σ въ плоскости, движущейся въ пространствѣ такъ, что она остается постоянно нормальною къ траекторіямъ ея точекъ. При этихъ условіяхъ, очевидно, можно разсматривать безконечно малое перемѣщеніе, плоскости, какъ вращеніе ея около ея характеристики (§ 674). Поэтому можно и элементарную поверхность или элементарный объемъ, образуемый дугой s или, соотвѣтственно, площадью σ, пренебрегая безконечно малыми высшихъ порядковъ, изобразить произведеніями длины s или площади σ на перемѣщеніи dl ихъ центра тяжести. Для конечнаго движенія такого рода будемъ поэтому имѣть

$$A = \int s\, dl = s \int dl, \quad V = \int \sigma\, dl = \sigma \int dl,$$

т. е. поверхность и объемъ тѣла, образуемаго разсматриваемою фигурою, получимъ, умножая s или σ на длину пути, пройденнаго соотвѣтствующимъ центромъ тяжести. Эти теоремы полезны при вычисленіи нѣкоторыхъ поверхностей и объемовъ, но могутъ быть приложены также и къ нахожденію положенія центровъ тяжести извѣстныхъ фигуръ.

775 Примѣры. a) Центръ тяжести дуги цѣпной линіи, симметричной относительно нормали въ вершинѣ, лежитъ на этой нормали; разстояніе его η отъ директрисы вычисляется (ср. § 772, b) изъ равенства $2\pi\eta \,.\, 2s = 2\pi ab$; слѣдовательно, $\eta = \frac{ab}{2s} = \frac{1}{2} b \operatorname{cotg} \varphi$. Итакъ, центръ тяжести G лежитъ въ серединѣ отрѣзка, образуемаго крайними нормалями на нормали въ вершинѣ, считаемаго отъ директрисы. Для опредѣленія центра тяжести G' площади, ограниченной кривою, директрисою и крайними нормалями, имѣемъ формулу $2\pi\eta \,.\, 2as = \pi a^2 b$. Поэтому $\eta = \frac{1}{4} b \operatorname{cotg} \varphi$, такъ что G' лежитъ въ серединѣ OG.

b) Центръ тяжести полной дуги циклоиды лежитъ на нормали въ вершинѣ, въ разстояніи отъ этой вершины, равномъ

$$\eta = \frac{1}{4a}\int y\,ds = \frac{1}{2\sqrt{2a}}\int\limits_0^{2a} \sqrt{y}\,dy = \frac{2}{3}a$$

Слѣдовательно, (ср. съ § 772, с) величина поверхности, образуемой вращеніемъ дуги около основанія, равна $\frac{4}{3}\pi a \,.\, 8a = \frac{32}{3}\pi a^2$. Слѣдуя обратному пути, и считая извѣстнымъ, что объемъ тѣла, образуемаго вращеніемъ площади, лежащей между кривою и ея основаніемъ, равенъ $5\pi^2 a^3$, найдемъ положеніе центра тяжести этой площади слѣдующимъ образомъ: центръ тяжести лежитъ, очевидно, на нормали въ вершинѣ въ разстояніи η отъ основанія, которое получимъ, приравнивая $5\pi^2 a^3$ произведенію $2\pi\eta$ на $3\pi a^2$. Находимъ $\eta = \frac{5}{6}a$.

c) На окружности круга радіуса a возьмемъ нѣкоторую дугу LM; обозначимъ черезъ r и θ координаты центра тяжести G дуги LM, принимая центръ круга O за полюсъ и прямую OL за полярную ось. По сдѣланному въ § 773 замѣчанію мы знаемъ, что G лежитъ на прямой, дѣлящей уголъ LOM пополамъ. Далѣе, изъ опредѣленія центра тяжести находимъ

$$2a\theta\,.\,r = 2\int\limits_0^{\theta} a\cos\varphi\,.\,a\,d\varphi = 2a^2\sin\theta, \text{ т. е. } r = a\,\frac{\sin\theta}{\theta}\,.$$

Отсюда видно, что (§ 589, b) **общее мѣсто центровъ тяжести дугъ круга, имѣющихъ общее начало въ точкѣ L, будетъ кохлеоида, вершины которой въ L, а полюсъ въ центрѣ круга.** Этимъ свойствомъ кохлеоиды пользуются при черченіи построеній сводовъ (въ Архитектурѣ) *). Принимая во вниманіе то, какимъ образомъ передвигается G, когда M описываетъ окружность круга, двигаясь постоянно въ одномъ направленіи можно отдать себѣ отчетъ въ свойствахъ кохлеоиды. Далѣе, для опредѣленія центра тяжести G' кругового сектора LOM, имѣемъ

$$a^2\theta\,.\,r = 2\int\limits_0^{a}\int\limits_0^{\theta} l\cos\varphi\; l\,dl\,d\varphi = \frac{2}{3}a^2\sin\theta, \text{ т. е. } r = \frac{2}{3}a\frac{\sin\theta}{\theta};$$

Слѣдовательно, G' дѣлитъ отрѣзокъ OG въ отношеніи 2 къ 1.

d) Чтобы быстро найти центръ тяжести **полуокружности** круга радіуса a, стоитъ только замѣтить слѣдующее. Центръ тяжести, очевидно, лежитъ на радіусѣ, перпендикулярномъ къ хордѣ полуокружности. Разстояніе его η отъ центра круга получимъ, замѣчая, что произведеніе $2\pi\eta$ на πa (длину полуокружности) должно быть равно $4\pi a^2$ (поверхности шара радіуса a). Отсюда $\eta = \frac{2a}{\pi}$. Подобнымъ же образомъ опредѣлимъ центръ тяжести **площади полукруга**, приравнивая объемъ $V = \frac{4}{3}\pi a^3$ произведенію $2\pi\eta$ и $\frac{1}{2}\pi a^2$ (величину площади полукруга), мы получимъ $\eta = \frac{4a}{3\pi}$. Общнѣе, можно такимъ же путемъ найти результаты предыдущаго примѣра, если припомнимъ изъ элементарной Геометріи выраженія поверхности шарового пояса,

---

*) См. напр. „Cours de Construction" N. de Vos (т. 1, стр 276).

и объема шарового сектора, образуемыхъ вращеніемъ дуги LM и площади LOM около OL, а именно $2\pi a h$ и $\frac{2}{3}\pi a^2 h$, гдѣ h обозначаеть высоту $a(1-\cos 2\theta)$.

e) Величина поверхности тора (ср. съ § 772, e), опредѣляемаго радіусомъ a образующаго круга и разстояніемъ $b(>a)$ центра круга отъ оси вращенія, равна $2\pi a . 2\pi b = 4\pi^2 a b$; объемъ равенъ $\pi a^2 . 2\pi b = 2\pi^2 a^2 b$. Общнѣе, величина поверхности и объемъ канала (Tubus) (§ 678,b) между двумя плоскостями, перпендикулярными къ линіи центровъ, равны $2\omega a l$ и $\pi a^2 l$, гдѣ l—длина дуги линіи центровъ между упомянутыми плоскостями. Еще общнѣе, величина боковой поверхности и объемъ первоначально цилиндрическаго стержня, деформируемаго (измѣненіемъ кривизны и крученія линій центровъ тяжести) такъ, что площадь поперечнаго сѣченія сохраняется, остаются неизмѣнными при всѣхъ формахъ, принимаемыхъ стержнемъ, до тѣхъ поръ, пока онъ не приметъ, напр., форму кольца при совмѣщеніи основаній.

f) Разсмотримъ въ заключеніе клотоиду, интересную кривую, придуманную для изученія явленій диффракціи[1]) (рис. 96). Координаты точки на этой кривой изображаются интегралами Френеля

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}}\int_0^{\varphi}\frac{\cos\varphi}{\sqrt{\varphi}}d\varphi,\quad y = \frac{a}{\sqrt{2}}\int_0^{\varphi}\frac{\sin\varphi}{\sqrt{\varphi}}d\varphi,$$

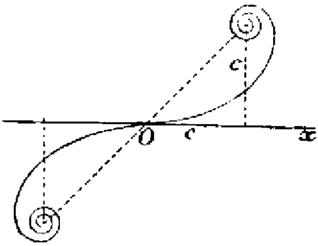

Рис. 96.

значенія которыхъ не выражаются въ конечномъ видѣ при произвольномъ φ, но извѣстны намъ при $\varphi = \infty$, а именно $x = y = c = \frac{1}{2}a\sqrt{\pi}$. Тотчасъ видимъ, что $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\varphi$, такъ что φ обозначаетъ уголъ наклоненія касательной къ оси x-овъ. Поэтому, когда φ измѣняется отъ 0 до ∞, то кривая выходитъ изъ начала координатъ, касаясь въ немъ оси x-овъ, чтобы затѣмъ асимптотически обвиваться около точки (c, c). При этомъ кривизна ея возрастаетъ пропорціонально длинѣ дуги.

$$s = a\int_0^{\varphi}\frac{a\,d\varphi}{\sqrt{2\varphi}} = a\sqrt{2\varphi},\quad \frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{s}{a^2}.$$

Форма кривой ясно показываетъ, что x и y стремятся къ предѣлу c, постоянно колеблясь около него. Но для того, чтобы видѣть расположеніе точекъ клотоиды относительно асимптотической точки Q, необходимо нужно вычислять приближенно интегралы Френеля[2]). Такъ, напр., если раздѣлить дугу OQ на безконечное число дугъ OP_1, P_1P_2, P_2P_3, ... общая длина

[1]) Cornu „Journal de Physique" (1874, стр. 9).

[2]) Таблица значеній этихъ интеграловъ помѣщена въ „Oeuvres Complètes" Fresnel'я (т. 1, стр. 319). См. также мемуары Abria о диффраціи свѣта въ „Journal de Liouville" (1849, стр. 248). Что касается различныхъ методовъ вычисленія этихъ интеграловъ, то читатель можетъ объ этомъ прочесть въ „Leçon d'Optique physique" Verdet (т. 1, стр. 328).

которыхъ равна $2c$, то, принявъ c за единицу, для координатъ точекъ P_1, P_2, P_3, ... найдемъ числа:

$$x = 1{,}560\ldots,\ 0{,}977\ldots,\ 1{,}212\ldots,\ 0{,}997\ldots$$

$$y = 0{,}875\ldots,\ 0{,}686\ldots,\ 0{,}991\ldots,\ 0{,}840\ldots.$$

Замѣтимъ, что P_1 есть наиболѣе удаленная отъ оси y-овъ точка, что P_2 на дугѣ P_1Q наиближе къ Ox лежащая точка и т. д.

Займемся теперь опредѣленіемъ центра тяжести дуги OM клотоиды. Координаты искомаго центра тяжести, по опредѣленію, будутъ

$$\xi = \frac{1}{2}\varrho\int\limits_0^{\varphi}\frac{d\theta}{\sqrt{\theta}}\int\limits_0^{\theta}\frac{\cos\psi}{\sqrt{\psi}}\,d\psi,\quad \eta = \frac{1}{2}\varrho\int\limits_0^{\varphi}\frac{d\theta}{\sqrt{\theta}}\int\limits_0^{\theta}\frac{\sin\psi}{\sqrt{\psi}}\,d\psi.$$

Понимая подъ f любой изъ двухъ символовъ $\sin$ или $\cos$, полагая $\psi = t\theta$ и выполнивъ интегрированіе по θ, найдемъ

$$\frac{1}{2}\varrho\int\limits_0^{\varphi}\frac{d\theta}{\sqrt{\theta}}\int\limits_0^{\theta}\frac{f(\psi)}{\sqrt{\psi}}\,d\psi = \frac{1}{2}\varrho\int\limits_0^{\varphi}d\theta\int\limits_0^{1}\frac{f'(t\theta)}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{2}\varrho\int\limits_0^{1}\frac{f'(0)-f'(t\varphi)}{t\sqrt{t}}\,dt.$$

Принимая далѣе $t\varphi$ за перемѣнную интегрированія и интегрируя по частямъ, получимъ

$$\frac{a}{2\sqrt{2}}\int\limits_0^{\varphi}\frac{f'(0)-f'(\varphi)}{\varphi\sqrt{\varphi}}\,d\varphi = -a\frac{f'(0)-f'(\varphi)}{\sqrt{2\varphi}}+\frac{a}{\sqrt{2}}\int\limits_0^{\varphi}\frac{f(\varphi)}{\sqrt{\varphi}}\,d\varphi.$$

Подставляя, наконецъ, вмѣсто f по очереди $\cos$ и $\sin$, находимъ

$$\xi = x - \varrho\sin\varphi,\quad \eta = y - \varrho(1-\cos\varphi)$$

Итакъ, центръ тяжести дуги OM лежитъ на соприкасающемся кругѣ въ M, и притомъ на нижнемъ концѣ діаметра, перпендикулярнаго къ касательной въ O. Положимъ теперь, что G_1 и G_2 центры тяжести дугъ OM_1 и OM_2 и замѣтимъ, что на основаніи замѣчанія, сдѣланнаго въ концѣ § 773, центръ тяжести G дуги M_1M_2 находится въ такой точкѣ на прямой G_1G_2, для которой имѣетъ мѣсто пропорція

$$\frac{G_1G_2}{G_2G} = \frac{s_2-s_1}{s_1}\ \text{или}\ \frac{GG_1}{GG_2} = \frac{s_2}{s_1} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2}$$

Итакъ, **центръ тяжести какой угодно дуги клотоиды есть прямой центръ подобія соприкасающихся круговъ въ концахъ дуги.** Въ заключеніе сдѣлаемъ слѣдующее замѣчаніе: если концы дуги соотвѣтствуютъ значеніямъ φ, кратнымъ отъ 2π, то **центръ тяжести дуги будетъ находиться на ея хордѣ** и въ частности, если одинъ изъ концовъ дуги есть начало координатъ, то центръ тяжести совпадетъ съ другимъ концомъ.

Поверхности и объемы какихъ угодно тѣлъ.

776. Поверхности. Ограничиваясь обыкновенными (встрѣчающимися на практикѣ) поверхностями, мы примемъ за очевидное, что всякая безконечно малая часть поверхности можетъ быть разсматриваема, какъ лежащая въ касательной плоскости къ поверхности въ одной изъ точекъ разсматриваемой части. Всякій элементъ $dxdy$ въ плоскости Oxy будетъ тогда ортогональною проекціею безконечно малой части поверхности, принимаемой за элементъ поверхности. Этотъ элементъ измѣряется, слѣдовательно, отношеніемъ $dxdy$ къ косинусу угла, образуемаго касательною плоскостью въ точкѣ (x,y) съ плоскостью Oxy. Поэтому величина конечной части поверхности будетъ (§ 659)

$$(10) \qquad A=\int\int\sqrt{1+p^2-q^2}\,dxdy.$$

Интегрированіе распространяется на всѣ пары значеній x и y, принадлежащія координатамъ точекъ измѣряемой части поверхности. Въ этой формулѣ заключается, какъ частный случай, выведенная въ § 771 формула для поверхностей вращенія. Дѣйствительно, въ этомъ случаѣ, полагая $\sqrt{x^2+y^2}=R$, $z=f(R)$, имѣемъ

$$p=\frac{x}{R}f'(R),\quad q=\frac{y}{R}f'(R),\quad p^2+q^2=f'^2(R).$$

Переходя (въ плоскости Oxy) отъ Декартовыхъ координатъ къ полярнымъ получимъ

$$A=\int\int\sqrt{1+f'^2(R)}\,.\,Rd\theta\,dR=\int\int Rd\theta ds=2\pi\int Rds.$$

Однако, если хотимъ имѣть часть поверхности, ограниченную нѣкоторою сомкнутою кривою, то надо остаться при формулѣ $A=\int\int Rd\theta ds$; это значитъ, что за элементъ въ A мы беремъ величину той части поверхности, которая ограничена меридіанами θ и $\theta+d\theta$ и параллелями R и $R+dR$. Этотъ элементъ поверхности можетъ быть разсматриваемъ, какъ прямоугольникъ, сторонами котораго будутъ элементы ds и $Rd\theta$ меридіана и параллели, откуда и слѣдуетъ написанная выше формула.

777. Примѣры. а) Для вычисленія величины части поверхности шара $x^2+y^2+z^2=a^2$, по формулѣ (10) получимъ $A=\int\int\frac{a}{z}\,dxdy$, гдѣ остается еще опредѣлить предѣлы интегрированій по даннымъ границамъ вычисляемой части поверхности. Если хотимъ получить всю поверхность шара, то замѣчая, что въ углѣ положительныхъ x и y заключается восьмая ея часть, найдемъ

$$A = 8a\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\frac{dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} = 4\pi a\int_0^a dx = 4\pi a^2.$$

Въ дѣйствительности, въ приложеніи къ шару предпочтительнѣе послѣдняя формула предыдущаго §, которая здѣсь приводится къ

$$A = a^2\int\int\cos\psi\, d\varphi\, d\psi.$$

Ее можно вывести также прямо изъ формулы, данной въ началѣ, пользуясь выраженіями

$$x = a\cos\varphi\cos\psi,\quad y = a\sin\varphi\cos\psi,\quad z = a\sin\psi,$$

въ силу которыхъ получимъ

$$A = \int\int\frac{a}{z}\, dx\, dy = \int\int\frac{\partial(x,y)}{\partial(\varphi,\psi)}\,\frac{d\varphi\, d\psi}{\sin\psi} = a^2\int\int\cos\psi\, d\varphi\, d\psi;$$

необходимо только имѣть въ виду, что элементъ интеграла долженъ быть всегда положительнымъ. Напримѣръ, при вычисленіи всей поверхности шара, надо мѣнять перемѣнную ψ только въ предѣлахъ отъ 0 до $\frac{\pi}{2}$ и писать

$$A = 2a^2\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos\psi\, d\psi = 2a^2\int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi a^2.$$

Если бы мы пожелали измѣнять ψ отъ 0 до π, то достаточно было бы измѣнять φ отъ 0 до π, и написать

$$A = 2a^2\int_0^{\pi} d\varphi\int_0^{\pi}|\cos\psi|\, d\psi = 4a^2\int_0^{\pi} d\varphi = 4\pi a^2.$$

b) Предложимъ себѣ теперь измѣрить величину части поверхности того же шара, лежащей внутри кривой Вивіани (§ 767, j). Эта часть поверхности проектируется на плоскость Oxy по кругу $y^2 = x(a-x)$ и симметрична относительно плоскости Oxz; слѣдовательно

$$A = 2a\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{x(a-x)}}\frac{dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} = 2a\int_0^a \arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}\, dx.$$

Обозначая черезъ θ тотъ arcus, который находится подъ знакомъ интеграла, имѣемъ $x = a\,\mathrm{tg}^2\,\theta$ и интегрированіе по частямъ (§ 723, d) дастъ

$$\int \theta\, dx = \theta x - a\int \mathrm{tg}^2\,\theta\, d\theta = \frac{a}{\cos^2\theta}\,(\theta - \sin\theta\cos\theta).$$

Такъ какъ θ измѣняется отъ 0 до $\frac{\pi}{4}$, когда x измѣняется отъ 0 до a, то получится $A = (\pi - 2)\,a^2$. Гораздо скорѣе придемъ къ этому результату, примѣняя полярныя координаты

$$A = 2\,a^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi \int_\varphi^{\frac{1}{2}\pi} \cos\psi\, d\psi = 2\,a^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (1 - \sin\varphi)\, d\varphi = (\pi - 2)\,a^2.$$

c) Попытаемся вычислить величину всей поверхности эллипсоида. Изъ уравненія $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, находимъ

$$p = -\frac{c^2 x}{a^2 z}, \quad q = -\frac{c^2 y}{b^2 z}, \quad 1 + p^2 + q^2 = \frac{c^2}{z^2}\left(1 - \frac{\varepsilon^2 x^2}{a^2} - \frac{\eta^2 y^2}{b^2}\right),$$

гдѣ ε и η обозначаютъ эксцентриситеты сѣченій поверхности эллипсоида плоскостями Oxz и Oyz. Формула (10) дастъ

$$A = 8\int\int \sqrt{\frac{1 - \frac{\varepsilon^2 x^2}{a^2} - \frac{\eta^2 y^2}{b^2}}{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}\, dx\, dy,$$

гдѣ интегрированіе распространяется на всѣ пары значеній x и y, удовлетворяющія неравенству $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$. Обозначая черезъ t стоящій подъ знакомъ интеграла радикалъ, легко находимъ

$$(t^2 - \varepsilon^2)\frac{x^2}{a^2} + (t^2 - \eta^2)\frac{y^2}{b^2} = t^2 - 1,$$

что наводитъ на мысль положить

$$\frac{x}{a} = \sqrt{\frac{t^2 - 1}{t^2 - \varepsilon^2}}\cos\theta, \qquad \frac{y}{b} = \sqrt{\frac{t^2 - 1}{t^2 - \eta^2}}\sin\theta,$$

гдѣ θ измѣняется отъ 0 до $\frac{\pi}{2}$, а t отъ 1 до ∞. Принимая θ и t за новыя перемѣнныя интегрированія, преобразуемъ предыдущій интегралъ (§ 737) въ слѣдующій

$$\int_1^\infty \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(t, \theta)}\right| t\, dt\, d\theta.$$

Въ то же время замѣтимъ, что если $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ обозначаютъ радикалы, входящіе въ выраженія x и y, то

$$\frac{\partial x}{\partial t} = a\,\varphi'(t)\cos\theta, \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = b\,\psi'(t)\sin\theta,$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = -\,a\,\varphi(t)\sin\theta, \qquad \frac{\partial y}{\partial \theta} = b\,\psi(t)\cos\theta.$$

Поэтому

$$A = 8\,ab\int\limits_1^\infty\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi}\{\varphi'(t)\,\psi(t)\cos^2\theta + \varphi(t)\,\psi'(t)\sin^2\theta\}\,t\,dt\,d\theta,$$

если замѣтимъ, что $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ функціи возрастающія, а потому имѣютъ положительныя производныя. Такъ какъ интегралы отъ $\cos^2\theta\,d\theta$ и $\sin^2\theta\,d\theta$ въ предѣлахъ 0 и $\frac{\pi}{2}$ равны $\frac{\pi}{4}$ (§725, e), то будемъ имѣть

$$A = 2\pi ab\int\limits_1^\infty\{\varphi'(t)\,\psi(t) + \varphi(t)\,\psi'(t)\}\,t\,dt,$$

и наконецъ

$$A = 2\pi ab\left\{\int\limits_1^\infty\frac{(1-\varepsilon^2)\,t^2\,dt}{(t^2-\varepsilon^2)\sqrt{(t^2-\varepsilon^2)(t^2-\eta^2)}} + \int\limits_1^\infty\frac{(1-\eta^2)\,t^2\,dt}{(t^2-\eta^2)\sqrt{(t^2-\varepsilon^2)(t^2-\eta^2)}}\right\}.$$

Дальше въ общемъ случаѣ мы идти не можемъ, потому что имѣемъ здѣсь эллиптическіе интегралы. Но, при $\varepsilon = \eta$, и при $\eta = 0$, мы пришли бы снова къ формуламъ (§ 772, d), относящимся къ сжатому и растянутому сфероиду. Наконецъ, если эксцентриситеты ε и η очень малы, то разложеніе въ рядъ даетъ

$$A = 4\pi ab\{1 - \tfrac{1}{6}(\varepsilon^2 + \eta^2) + \cdots\},$$

и такъ какъ $c^2 = ab(1 - \frac{1}{2}(\varepsilon^2 + \eta^2) + \ldots)$, то получается[1]) приближенная формула

$$A = 4\pi ab\left(\frac{c^2}{ab}\right)^{\frac{1}{3}} = 4\pi\left(\sqrt[3]{abc}\right)^2.$$

d) Чтобы вычислить величину поверхности эллипсоида съ достаточною точностью, надо пользоваться таблицами Лежандра (съ двойнымъ входомъ), а для этого надо сперва выразить A въ типическихъ интегралахъ F и E. Если положимъ $\varepsilon = \sin\alpha$, $\eta = k\sin\alpha$, такъ что

$$k = \frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}} < 1, \qquad \alpha = \arccos\frac{c}{a},$$

---

[1]) О приближенномъ вычисленіи поверхности эллипсоида см. „Calcul intégral" Boussinesq'a (стр. 78) и замѣтку Peano въ „Rendiconti dei Lincei" (1890, стр. 317).

то подстановкою $t = \frac{\varepsilon}{\sin\varphi}$ преобразуемъ полученное выше выраженіе A въ слѣдующее

$$A = \frac{2\pi a b}{\sin\alpha}\left\{\cos^2\alpha\int_0^\alpha\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}+\right.$$

$$\left.+(1-k^2\sin^2\alpha)\int_0^\alpha\frac{d\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\right\}.$$

Мы уже имѣемъ (§ 767, h) значеніе перваго интеграла

$$\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = F(k,\varphi) - \frac{E(k,\varphi)-\operatorname{tg}\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{1-k^2}.$$

Интегрированіе по частямъ даетъ слѣдующеее выраженіе того же интеграла:

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}+F(k,\varphi)-\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

откуда выводимъ

$$\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{E(k,\varphi)}{1-k^2} - \frac{k^2\sin\varphi\cos\varphi}{(1-k^2)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Слѣдовательно,

$$A = \frac{2\pi a b}{\sin\alpha}\left\{\cos^2\alpha\cdot F(k,\alpha)+\sin^2\alpha\cdot E(k,\alpha)+\sin\alpha\cos\alpha\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}\right\}.$$

Подставляя, наконецъ, вмѣсто k и α ихъ выраженія въ a, b, c, мы и придемъ къ формулѣ Лежандра

$$A = 2\pi c^2+\frac{2\pi b}{\sqrt{a^2-c^2}}\left\{c^2F\left(\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}},\ \arccos\frac{c}{a}\right)+\right.$$

$$\left.+(a^2-c^2)E\left(\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}},\ \arccos\frac{c}{a}\right)\right\}.$$

Предлагаемъ читателю, для упражненія, доказать, что при $a^2 = b^2 + c^2$, величина поверхности измѣряется числомъ $\pi a^2 + \pi b^2 E + \pi c^2 F$, гдѣ E и F полные эллиптическіе интегралы съ модулемъ $\sqrt{1-\left(\frac{c}{b}\right)^4}$. Такъ, напримѣръ, при $a^2 : b^2 : c^2 = 3 : 2 : 1$, найдемъ $A = \pi a^2 \cdot 2{,}52620923\ldots$.

e) Формулою (10) можно воспользоваться, чтобы доказать[1]), что для поверхностей имѣетъ мѣсто нѣчто подобное тому, что мы замѣтили у плоскихъ кривыхъ въ § 591. А именно, если выдѣлимъ около нѣкоторой точки M на поверхности нѣкоторую часть ς, то полная кривизна K въ точкѣ M есть предѣлъ отношенія величины тѣлеснаго угла ω, образуемаго нормалями къ поверхности, проведенными въ точкахъ границы ς, къ величинѣ A поверхности самой ς, когда эта послѣдняя стремится обратиться въ точку M. Положимъ, что кривизна, предполагаемая непрерывною, будетъ положительна (чтобы имѣть дѣло съ опредѣленнымъ случаемъ), и выберемъ ς *столь малою*, чтобы и *во всѣхъ* ея точкахъ K было больше нуля. Перемѣнныя x и y въ формулѣ (10) можно замѣнить перемѣнными p и q, которыя независимы, потому что (§§ 579, 691)

$$\frac{\partial(p, q)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} r & s \\ s & t \end{vmatrix} = (1 + p^2 + q^2)^2 K > 0.$$

Замѣтивъ это, находимъ, что формула (10) дастъ (§ 737)

$$A = \int\int \frac{dp\,dq}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}} K} = \frac{1}{\varkappa}\int\int \frac{dp\,dq}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}},$$

гдѣ $\varkappa$ обозначаетъ число, среднее между значеніями K въ точкахъ ς. Съ другой стороны, построимъ конусъ, производящія котораго параллельны нормалямъ къ поверхности, проведеннымъ вдоль границы ς. По опредѣленію, тѣлесный уголъ, заключенный между этими нормалями, измѣряется величиною поверхности ω, которую этотъ конусъ выдѣляетъ на шарѣ радіуса 1, съ центромъ въ вершинѣ конуса; а такъ какъ кривизна поверхности этого шара вездѣ равна 1, то предыдущая формула, примѣненная къ шару, дастъ

$$\omega = \int\int \frac{dp\,dq}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}},$$

при тѣхъ же предѣлахъ интегрированія. Отсюда и слѣдуетъ, что $A = \frac{\omega}{\varkappa}$. Поэтому, когда ς стремится совпасть съ точкою M, то для этой точки получимъ

$$K = \lim \varkappa = \lim \frac{\omega}{A}.$$

778. Объемы. Если требуется вычислить объемъ тѣла, ограниченнаго частью данной поверхности, прямымъ цилиндромъ, проектирующимъ границу этой части на плоскость Oxy, и самою этою плоскостью, то можно (ср. съ § 768) принять за элементъ объема V подобный же объемъ, соотвѣтствующій элементу данной поверхности. Такой элементъ объема измѣряется произведеніемъ основанія $dx\,dy$ на высоту z. Слѣдовательно, будемъ имѣть

(11) $$V = \int\int z\,dx\,dy,$$

[1]) См. также „Natürliche Geometrie“ автора, стр. 214.

гдѣ z функція отъ x и y, опредѣляемая уравненіемъ данной поверхности. Общнѣе: можно разбить какое угодно тѣло на элементы третьяго порядка $dx\,dy\,dz$ и, опираясь на опредѣленіе тройного интеграла, написать

$$V = \int\int\int dx\,dy\,dz. \tag{12}$$

При этомъ предѣлы послѣдовательныхъ интегрированій опредѣляются въ каждомъ случаѣ на основаніи формы разсматриваемаго тѣла. Если, напримѣръ, тѣло имѣетъ описанную въ началѣ этого § форму, то можно сперва при постоянномъ x и y выполнить интегрированіе dz, откуда и получается значеніе z на данной поверхности и приходимъ снова къ формулѣ (11). Можетъ также случиться, что при постоянномъ z извѣстенъ будетъ результатъ $\sigma(z)$ интегрированія $dx\,dy$, т. е. что извѣстна площадь сѣченія, произведеннаго въ разсматриваемомъ тѣлѣ плоскостью, параллельною плоскости Oxy въ разстояніи z отъ нея. Въ этомъ случаѣ вычисленіе V сводится къ простому интегрированію

$$V = \int \sigma(z)\,dz. \tag{13}$$

Такое вычисленіе сводится къ раздѣленію тѣла на элементы перваго порядка, такъ какъ $\sigma(z)\,dz$ изображаетъ объемъ слоя даннаго тѣла, лежащаго между плоскостями z и $z+dz$. Такъ мы и дѣлали въ частномъ случаѣ тѣлъ вращенія, въ которомъ $\sigma(z) = \pi R^2$. Существуетъ безчисленное множество другихъ способовъ разбиванія тѣла на безконечно малые элементы третьяго порядка. Изъ нихъ особенно надо замѣтить тотъ (§ 739, b), который получается при примѣненіи полярныхъ координатъ. Поверхности шаровъ, опредѣляемыхъ радіусами r и $r+dr$, плоскости, опредѣляемыя долготами φ и $\varphi+d\varphi$, и поверхности конусовъ, опредѣляемыя широтами ψ и $\psi+d\psi$, ограничиваютъ безконечно малое тѣло, которое можно разсматривать, какъ прямоугольный параллелепипедъ съ ребрами dr, $r\,|\cos\psi|\,d\varphi$ и $r\,d\psi$, пренебрегая безконечно малыми высшихъ порядковъ. Такимъ образомъ приходимъ къ формулѣ

$$V = \int\int\int r^2\,|\cos\psi|\,dr\,d\varphi\,d\psi, \tag{14}$$

которую можно вывести и аналитически изъ формулы (12) (§ 737).

779. Къ другому разложенію тѣлъ на элементы второго порядка (ср. съ § 769) приходимъ, когда дѣло идетъ о вычисленіи объема тѣла, ограниченнаго частью данной поверхности и конусомъ, образующія котораго соединяютъ точки границы этой части поверхности съ данной точкой. Если помѣстимъ начало координатъ въ вершину конуса, то естественно взять за элементъ объема объемъ того конуса, основаніемъ котораго служитъ элементъ поверхности $\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy$ (§ 776). Такъ какъ объемъ этого конуса равенъ одной трети произведенія площади основанія на высоту, равную разстоянію начала координатъ отъ касательной плоскости, то мы получимъ

(15) $$V=\tfrac{1}{3}\int\int(z-px-qy)\,dx\,dy,$$

при чемъ, если понадобится, измѣняютъ знакъ элемента. Если, напримѣръ, требуется вычислить объемъ тѣла между поверхностью вращенія и конусами, проектирующими два параллельныхъ круга изъ точки, лежащей на оси вращенія, то получится (§ 776) формула $V=\frac{2}{3}\pi\int R(R\,dz-z\,dR)$. Эта формула приметъ особенно простой видъ въ полярныхъ координатахъ, если полярная ось направлена по оси вращенія, а именно $V=\frac{2}{3}\pi\int r^3\,d\cos\theta$, которую можно вывести и изъ формулы (14). Впрочемъ, эта формула не отличается существенно отъ выведенной въ § 771 и сводится къ послѣдней, если къ обѣимъ ея частямъ прибавимъ объемъ конуса, основаніемъ котораго служитъ перемѣнный параллельный кругъ радіуса R, а вершиною — полюсъ:

$$\tfrac{1}{3}\pi R^2 z=\tfrac{1}{3}\pi\int R(R\,dz+2z\,dR),$$

$$V+\tfrac{1}{3}\pi R^2 z=\pi\int R^2\,dz.$$

780 Примѣры. a) Весь объемъ эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

равенъ

$$V=8\int\int z\,dx\,dy=8c\int\int\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy,$$

т. е. если выпишемъ предѣлы отдѣльныхъ интегрированій

$$V=8c\int_0^a dx\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy.$$

Полагая $y=\frac{b}{a}t\sqrt{a^2-x^2}$, приведемъ внутренній интегралъ въ правой части къ

$$b\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt=\frac{1}{4}\pi b\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\cdot$$

Слѣдовательно,

$$V = 2\pi b c \int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{4}{3}\cdot \pi a b c.$$

Къ этому результату приводитъ и формула (15)

$$V = \frac{8}{3} c \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} = \frac{4}{3}\pi b c \int_0^a dx = \frac{4}{3}\pi a b c.$$

Тѣмъ или другимъ путемъ, а также (ср. съ § 770, j) вычисляя сперва $\sigma(z)$, и примѣняя затѣмъ формулу (13), при всякомъ положительномъ числѣ n, равномъ отношенію четнаго числа къ нечетному, общнѣе найдемъ, что объемъ тѣла, ограниченнаго поверхностью

$$\frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} + \frac{z^n}{c^n} = 1,$$

равенъ

$$V = 2\int_0^c \sigma(z)\, dz = \frac{4abc}{n^2} \cdot \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)} \int_0^1 t^{\frac{1}{n}-1}(1-t)^{\frac{2}{n}} dt = \frac{8abc}{3n^2} \cdot \frac{\Gamma^3\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}.$$

Въ частности, для объема, ограниченнаго тѣлесною астроидою

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

значеніе $V = \frac{4\pi}{35} a^3$, т. е. немного больше $\frac{1}{12}$ части объема описаннаго шара.

h) Когда эллипсоидъ заданъ общимъ уравненіемъ

$$a x^2 + b y^2 + c z^2 + 2 f y z + 2 g z x + 2 h x y = 1,$$

то удобнѣе прилагается формула (13), потому что плоское сѣченіе, параллельное плоскости Oxy на разстояніи z отъ нея, имѣетъ уравненіе вида

$$a'x^2 + b'y^2 + c' + 2f'y + 2g'x + 2h'xy = 0$$

и площадь его, какъ мы знаемъ (§ 770. h) равна $\sigma(z) = -\pi D' / (a'b' - h'^2)^{\frac{3}{2}}$. При постоянномъ z, изъ сравненія уравненія кривой съ уравненіемъ поверхности получается

$$a' = a, \quad b' = b, \quad h' = h, \quad f' = fz, \quad g' = gz, \quad c' = cz^2 - 1.$$

Слѣдовательно,

$$D' = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c - \dfrac{1}{z^2} \end{vmatrix} z^2 = z^2 D - (ab - h^2)$$

и потому

$$\sigma(z) = \frac{\pi}{\sqrt{ab - h^2}}\left(1 - \frac{z^2 D}{ab - h^2}\right), \quad \int\limits_0^z \sigma(z)\, dz = \frac{2\pi z}{3\sqrt{ab - h^2}} + \frac{1}{3} z\sigma(z).$$

Предѣлы интегрированія въ V равны, очевидно, корнямъ уравненія $\sigma(z) = 0$ т. е. $\pm\sqrt{\dfrac{ab - h^2}{D}}$. Итакъ, $V = \dfrac{4\pi}{3\sqrt{D}}$.

c) Предложимъ себѣ вычислить **объемъ общей части двухъ круговыхъ цилиндровъ**, оси которыхъ взаимно перпендикулярны. Пусть a будетъ радіусъ наибольшаго изъ двухъ цилиндровъ, ka — радіусъ другого. За оси y-овъ и z-овъ возьмемъ оси обоихъ цилиндровъ. Уравненія цилиндровъ будутъ $x^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = k^2 a^2$. Искомый объемъ будетъ

$$V = 8\int\limits_0^{ka}\int\limits_0^{\sqrt{k^2a^2 - x^2}} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx\, dy = 8\int\limits_0^{ka} \sqrt{(a^2 - x^2)(k^2a^2 - x^2)}\, dx,$$

или, полагая $x = ka\sin\varphi$,

$$V = 8k^2a^3 \int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi} \cdot \cos^2\varphi\, d\varphi.$$

Интегрированіе по частямъ даетъ

$$\int \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi} \cdot \cos^2\varphi\, d\varphi =$$

$$\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi} \cdot \cos\varphi \sin\varphi + \int\left(\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi} + \frac{k^2\cos^2\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}\right)\sin^2\varphi\, d\varphi.$$

Выраженіе подъ знакомъ послѣдняго интеграла легко преобразуется въ

$$-2\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi} \cdot \cos^2\varphi + \frac{1 + k^2}{k^2}\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi} - \frac{1 - k^2}{k^2\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}.$$

Слѣдовательно,

$$3k^2 \int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi} \cdot \cos^2\varphi\, d\varphi =$$

$$(1 + k^2)\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi - (1 - k^2)\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}$$

и наконецъ
$$V = \tfrac{8}{3}a^3\{(1+k^2)E(k) - (1-k^2)F(k)\}.$$

Въ частности, когда цилиндры равны между собой, получимъ $V = \tfrac{2}{3}(2a)^3$. Въ общемъ случаѣ (§§ 756, 757) имѣемъ
$$V = 2\pi k^2 a^3\left(1 - \frac{k^2}{8} - \frac{7k^4}{48} - \cdots\right).$$

Поэтому, когда k стремится къ нулю, V (какъ и слѣдовало ожидать) съ возрастающимъ приближеніемъ будетъ измѣряться произведеніемъ площади сѣченія $\pi k^2 a^2$ меньшаго цилиндра на длину $2a$ отрѣзка, отсѣкаемаго другимъ цилиндромъ на его оси. Наоборотъ, при k, близкомъ къ 1, объемъ V приблизительно равенъ $\tfrac{2}{3}k(2a)^3$.

d) Даны двѣ взаимно перпендикулярныя, но не пересѣкающіяся прямыя; разсмотримъ движеніе отрѣзка постоянной длины, опирающагося своими концами на данныя прямыя. Обозначимъ черезъ $2a$ разстояніе между данными прямыми, а черезъ α уголъ (постоянный) между двигающимся отрѣзкомъ и общимъ перпендикуляромъ къ даннымъ прямымъ; тогда длина отрѣзка будетъ $\dfrac{2a}{\cos\alpha}$. Помѣстимъ начало координатъ на общій перпендикуляръ къ даннымъ прямымъ въ одинаковомъ отъ нихъ разстояніи, а оси x-овъ и y-овъ возьмемъ соотвѣтственно параллельными этимъ прямымъ. При такомъ выборѣ осей уравненіе поверхности, образуемой движущимся отрѣзкомъ будетъ
$$\frac{x^2}{(a-z)^2} + \frac{y^2}{(a+z)^2} = \operatorname{tg}^2\alpha.$$

Поэтому сѣченіе плоскостью, перпендикулярною къ оси z-овъ, будетъ эллипсъ, который при $z = 0$ обращается въ кругъ, а при $z = \pm a$ стремится обратиться въ прямолинейный отрѣзокъ, лежащій на той или другой изъ данныхъ прямыхъ. Концы обоихъ отрѣзковъ — особенныя точки поверхности. При данномъ между $-a$ и $+a$ значеніи z соотвѣтствующій эллипсъ имѣетъ полуоси $(a-z)\operatorname{tg}\alpha$ и $(a+z)\operatorname{tg}\alpha$. Такъ какъ сумма ихъ величина постоянная, то (§ 626, c) изъ этого слѣдуетъ, что огибающая проекцій всѣхъ эллипсовъ, соотвѣтствующихъ различнымъ значеніямъ z, на плоскость Oxy будетъ астроида. Иными словами, образуемая подвижнымъ отрѣзкомъ поверхность будетъ вся заключаться въ цилиндрѣ съ высотою $2a$, прямое сѣченіе котораго есть астроида. Четыре дуги, по которымъ эта поверхность касается боковой поверхности цилиндра, вмѣстѣ съ прямолинейными отрѣзками на данныхъ прямыхъ, образуютъ нѣчто въ родѣ тетраэдра, схематически изображающаго форму образуемаго тѣла. Такъ какъ площадь эллипса (§ 770, g), соотвѣтствующаго данному z, равна $\sigma(z) = \pi(a^2 - z^2)\operatorname{tg}^2\alpha$, то для объема названнаго тѣла получимъ
$$V = 2\pi\operatorname{tg}^2\alpha\int_0^a (a^2 - z^2)\,dz = \tfrac{4}{3}\pi a^3\operatorname{tg}^2\alpha,$$

т. е. $\tfrac{4}{9}$ объема цилиндра, потому что этотъ послѣдній измѣряется произведеніемъ высоты $2a$ на площадь (§ 770, j) прямого сѣченія $\tfrac{3}{8}\pi(2a\operatorname{tg}\alpha)^2$, равнымъ $3\pi a^3\operatorname{tg}^2\alpha$.]

e) Разсмотримъ общее мѣсто точекъ, для которыхъ сумма обратныхъ величинъ разстояній отъ четырехъ боковыхъ граней правильнаго тетраэдра число постоянное. Пусть Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 обозначаютъ вершины тетраэдра, а q_i разстояніе какой угодно точки отъ грани, противолежащей вершинѣ Q_i. Это разстояніе считается положительнымъ или отрицательнымъ, смотря по тому, лежитъ ли разсматриваемая точка отъ разсматриваемой грани съ той же стороны, что и тетраэдръ, или съ противоположной. Уравненіе поверхности будетъ

$$\frac{1}{q_0}+\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+\frac{1}{q_3}=0; \tag{16}$$

но ни одна изъ выведенныхъ выше формулъ не примѣнима къ такимъ координатамъ. Поэтому перейдемъ къ Декартовымъ координатамъ, при чемъ удобно будетъ выбрать координатныя оси слѣдующимъ образомъ: за оси x-овъ, y-овъ, z-овъ мы возьмемъ прямыя, соединяющія середины Q_0Q_1, Q_0Q_2, Q_0Q_3 соотвѣтственно съ серединами Q_2Q_3, Q_3Q_1, Q_1Q_2. Обозначая черезъ $2a$ разстояніе между двумя противолежащими ребрами, видимъ, что координаты точекъ Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 будутъ соотвѣтственно $-a, -a, -a)$, $(-a, a, a)$ $(a, -a, a)$, $(a, a, -a)$, а поэтому

$$q_0\sqrt{3}=-x-y-z+a,\qquad q_2\sqrt{3}=x-y+z+a,$$
$$q_1\sqrt{3}=-x+y+z+a,\qquad q_3\sqrt{3}=x+y-z+a,$$

Уравненіе (16) преобразуется въ

$$xyz+\tfrac{1}{2}a(x^2+y^2+z^2-a^2)=0. \tag{17}$$

Мы имѣемъ, слѣдовательно, поверхность третьяго порядка. Она имѣетъ четыре двойныя точки въ углахъ тетраэдра, и видъ, такъ сказать, раздутаго тетраэдра; она касается граней куба, описаннаго около тетраэдра вдоль реберъ, и пересѣкается діагональными плоскостями этого куба по шести параболамъ. Плоское сѣченіе, параллельное плоскости Oxy въ разстояніи z отъ нея, есть эллипсъ, изображаемый уравненіемъ

$$x^2+y^2+\frac{2z}{a}xy=a^2-z^2,$$

т. е. эллипсъ, оси котораго параллельны сторонамъ Q_0Q_3, Q_1Q_2, а вершины лежатъ на двухъ изъ шести параболъ. Полуоси этого эллипса равны

$$\sqrt{a(a-z)}\ \text{ и }\ \sqrt{a(a+z)};$$

изъ того обстоятельства, что сумма ихъ квадратовъ величина постоянная можно заключить (§ 626, c), что при измѣненіи z эллипсъ передвигается и деформируется, оставаясь всегда касательнымъ къ четыремъ гранямъ куба: точки касанія описываютъ четыре ребра тетраэдра. Для того, чтобы вычислить объемъ тѣла, ограниченнаго нашею поверхностью, достаточно замѣтить, что площадь эллипса $\sigma(z)=\pi a\sqrt{a^2-z^2}$, и формула (13) дастъ

$$V=2\pi a\int_0^a\sqrt{a^2-z^2}\,dz=\tfrac{1}{2}\pi^2a^3=a^3\cdot 4.9348022\ldots$$

Это и есть величина всего объема, заключающаяся, очевидно, между объемомъ $\frac{4}{3}a^3$ вписаннаго тетраэдра и объемомъ $8a^3$ описаннаго куба. Замѣтимъ, что уравненіе (17) можно также написать въ видѣ

$$\text{(18)} \qquad \arcsin\frac{x}{a} + \arcsin\frac{y}{a} + \arcsin\frac{z}{a} = \frac{1}{2}\pi,$$

такъ что x, y, z, a обозначаютъ стороны четырехугольника, вписаннаго въ кругъ діаметра a.

f) Мы рекомендуемъ читателю изучить болѣе общій вопросъ о поверхностяхъ, изображаемыхъ уравненіемъ (18), когда въ правой части будетъ какая угодно постоянная. Здѣсь мы ограничимся разсмотрѣніемъ той изъ этихъ поверхностей, которая соотвѣтствуетъ значенію π этой постоянной, т. е. представляетъ собою общее мѣсто точекъ, разстоянія которыхъ отъ трехъ плоскостей прямоугольной системы координатъ равны сторонамъ треугольника, вписаннаго въ кругъ діаметра a. Уравненіе этой поверхности въ алгебраическомъ видѣ будетъ

$$x^2y^2z^2 + \tfrac{1}{4}a^2(x^4+y^4+z^4-2y^2z^2-2z^2x^2-2x^2y^2) = 0,$$

Въ смежности съ началомъ координатъ, гдѣ членомъ шестой степени можно пренебречь по отношенію къ членамъ четвертой степени, эта поверхность уподобляется системѣ четырехъ плоскостей

$$-x^4-y^4-\cdots+2x^2y^2 = (x-y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z) = 0.$$

пересѣкающимся по тремъ парамъ перпендикулярныхъ прямыхъ, лежащихъ на поверхности. У этой поверхности четырехкратная точка въ началѣ координатъ и шесть двойныхъ прямыхъ. Вся поверхность заключена внутри куба съ ребромъ $2a$, грани котораго касаются этой поверхности по вписаннымъ въ эти грани кругамъ. Она ограничиваетъ тѣло, имѣющее видъ закругленнаго на углахъ и ребрахъ куба съ гранями, воронкообразно выдолбленными до центра. Чтобы вычислить объемъ такого тѣла, вычислимъ сперва площадь сѣченія плоскостью, параллельною одной изъ граней куба. Это сѣченіе состоитъ, какъ мы увидимъ (рис. 97), изъ двухъ равныхъ эллипсовъ съ общими осями. Эти эллипсы совпадаютъ въ одинъ кругъ, когда плоскость совпадаетъ съ гранью куба и превращаются въ одну изъ трехъ паръ ортогональныхъ отрѣзковъ, принадлежащихъ поверхности, когда плоскость сѣченія проходитъ черезъ центръ куба. Достаточно написать уравненіе поверхности въ видѣ

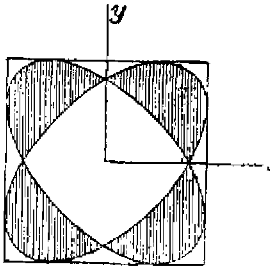

Рис. 97.

$$(x^2+y^2-z^2)^2 = 4x^2y^2\left(1-\frac{z^2}{a^2}\right),$$

чтобы выдѣлить уравненія обоихъ эллипсовъ. Въ полярныхъ координатахъ, послѣ того какъ положимъ $z = a\cos\varphi$, можемъ написать уравненія ихъ такъ

$$r^2 = \frac{a^2\cos^2\varphi}{1+\sin\varphi\sin 2\vartheta}, \qquad r^2 = \frac{a^2\cos^2\varphi}{1-\sin\varphi\sin 2\vartheta}.$$

Отсюда, примѣняя вторую изъ формулъ (3), находимъ, что площадь сѣченія, перпендикулярнаго къ оси z овъ и проведеннаго въ разстояніи z отъ начала координатъ, будетъ

$$\sigma(z) = 8\,a^2 \cos^2\varphi \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{\sin\varphi \sin 2\vartheta\, d\vartheta}{1 - \sin^2\varphi \sin^2 2\vartheta}$$

Принявъ за перемѣнную интегрированія $t = \operatorname{tg}\varphi \cos 2\vartheta$, найдемъ

$$\sigma(z) = 4\,a^2 \cos\varphi \int_0^{\operatorname{tg}\varphi} \frac{dt}{1+t^2} = 4\,a^2 \varphi \cos\varphi.$$

Такъ какъ φ должно измѣняться отъ 0 до $\frac{\pi}{2}$, то навѣрно $\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg}\varphi) = \varphi$. Теперь формула (13) дастъ

$$V = 2\int_0^a \sigma(z)\,dz = 8\,a^3 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \varphi \sin\varphi \cos\varphi\, d\varphi = a^3 \int_0^{\pi} \varphi \sin\varphi\, d\varphi,$$

и наконецъ, съ помощью интегрированія по частямъ

$$V = a^3 (\varphi \cos\varphi - \sin\varphi)_\pi^0 = \pi\, a^3.$$

Этотъ объемъ не составляетъ и $\frac{2}{5}$ объема наименьшаго шара, заключающаго въ себѣ всю поверхность тѣла, шара, очевидно, концентрическаго съ этою поверхностью и касающагося ея въ 8 точкахъ, которыя будутъ точками закругленія поверхности. Подобнымъ же вычисленіемъ найдемъ, что объемъ каждой изъ вышеупомянутыхъ воронокъ равенъ $\frac{1}{4}\pi a^3$. Поэтому объемъ тѣла, похожаго на игральную кость, которое получится, когда заполнимъ и 6 этихъ воронокъ, равенъ $\frac{5}{2}\pi a^3$. Легко повѣряется, что то, что надо удалить на углахъ куба, чтобы получить разсматриваемое тѣло, составляетъ ничтожную часть всего объема куба, а именно 0,00228 ....

ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫЯ УРАВНЕНІЯ.

Уравненія съ двумя перемѣнными.

781. Задача интегрированія въ томъ видѣ, какъ мы ее до сихъ поръ разсматривали, есть лишь частный случай задачи, въ которой разыскиваются функціи отъ одной или нѣсколькихъ перемѣнныхъ, связанныхъ съ перемѣнными и производными искомыхъ функцій однимъ или нѣсколькими соотношеніями. Такія соотношенія называются дифференціальными уравненіями и разысканіе неизвѣстныхъ функцій есть также задача интегральнаго исчисленія. Такъ, напримѣръ, въ простѣйшемъ случаѣ, которымъ мы сперва и займемся, дано дифференціальное уравненіе $f(x, y, y', y'', \ldots,) = 0$ и требуется найти всѣ функціи y, которыя тождественно удовлетворяютъ этому уравненію. Такія уравненія называются обыкновенными дифференціальными уравненіями, въ отличіе отъ уравненій въ частныхъ производныхъ, въ которыя входятъ двѣ или болѣе независимыхъ перемѣнныхъ и частныя производныя неизвѣстныхъ функцій по различнымъ перемѣннымъ. Какъ въ томъ, такъ и въ другомъ случаѣ порядкомъ уравненія называютъ наивысшій порядокъ производныхъ, въ него входящихъ. Мы почти исключительно будемъ заниматься здѣсь уравненіями перваго порядка.

782. Общій интегралъ и частные интегралы. Предположимъ, что уравненіе $f(x, y, y') = 0$ способно опредѣлить y', какъ непрерывную функцію отъ x и y. Представимъ себѣ, что черезъ каждую точку (x, y) проведена прямая, угловой коэффиціентъ которой равенъ соотвѣтствующему значенію y'. Положимъ далѣе, что подвижная точка M, выйдя изъ нѣкотораго произвольнаго положенія M_0 проходитъ безконечно малый путь по прямой, проведенной черезъ M_0 упомянутымъ способомъ, до точки M_1, затѣмъ изъ M_1 по прямой, проведенной черезъ M_1, до точки M_2 и т. д. до безконечности; ясно, что вдоль всей описываемой такимъ образомъ кривой данное уравненіе удовлетворяется. Если гдѣ нибудь внѣ этой кривой возьмемъ другую начальную точку, то подобнымъ же образомъ можемъ построить другую кривую съ тѣмъ же свойствомъ, и слѣдовательно, выходя изъ безчисленнаго множества начальныхъ точекъ, можемъ построить безчисленное множество такихъ кривыхъ, составляющихъ семейство $F(x, y, a) = 0$. Это уравненіе, изображающее безчисленное множество кривыхъ, удовлетворяющихъ данному дифференціальному уравненію, называется общимъ интеграломъ этого уравненія, и заключаетъ въ себѣ безконечное множество частныхъ интеграловъ, соотвѣтствующихъ различнымъ значеніямъ постоянной a. Итакъ, даннымъ дифференціальнымъ уравненіемъ $f(x, y, y') = 0$ точки на плоскости распредѣляются на нѣкоторыя опредѣленныя совокупности, но въ сущности, y не связывается съ x, потому что значеніемъ постоянной a въ общемъ интегралѣ можно такъ распорядиться, чтобы при данномъ по произволу значеніи x перемѣнная y приняла также произвольно заданное значеніе. Поэтому, если желаемъ опредѣлить нѣкоторую функцію y съ помощью дифференціальнаго уравненія перваго порядка, то должны еще добавить условіе, въ силу котораго, для нѣкотораго даннаго значенія x, y долженъ принять заданное значеніе. Иными словами, если x_0 и y_0 заданы по произволу, то существуетъ такая функція x отъ y, которая удовлетворяетъ уравненію $f(x, y, y') = 0$ и принимаетъ значеніе y_0 при $x = x_0$. Однако, для того, чтобы эта теорема имѣла мѣсто, необходимы извѣстныя ограниченія, которыя не вытекаютъ изъ изложенныхъ выше разсужденій. Эти разсужденія даютъ намъ возможность отдать себѣ отчетъ въ существованіи и геометрическомъ значеніи общаго интеграла, но никоимъ образомъ не могутъ насъ избавить отъ строгаго аналитическаго доказательства существованія интеграла [1]). Здѣсь мы ограничимся только указаніемъ на единственность общаго интеграла, т. е. на невозможность существованія двухъ независимыхъ функцій u и v, которыя, будучи приравнены произвольной постоянной, изображали бы общій интегралъ одного и того же дифференціальнаго уравненія перваго порядка. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ изъ уравненій $u = \text{const.}$ и $v = \text{const.}$ должно получиться одно и то же значеніе y' (совпадающее съ тѣмъ, которое получается изъ даннаго уравненія $f(x, y, y') = 0$), то должно также быть $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 0$, а слѣдовательно (§ 579), между u и v должно существовать соотношеніе, въ силу котораго приравнять u или v постоянному равносильно одно другому *).

783. Особенный интегралъ. Общій интегралъ $F(x, y, a) = 0$ удовлетворяетъ уравненію $f(x, y, y') = 0$ и тогда, когда a не постоянная, а функція отъ x и y, неявно опредѣляемая уравненіемъ $F'_a(x, y, a) = 0$; дѣйствительно (ср. съ § 621), получаемое изъ него значеніе y' во второмъ предположеніи совпадаетъ съ тѣмъ, которое получится и при a постоянномъ. Особеннымъ интеграломъ и называется тотъ, который получается черезъ исключеніе a изъ уравненій $F(x, y, a) = 0$ и $F'_a(x, y, a) = 0$. Геометрически это выражается слѣдующимъ образомъ: Данное дифференціальное уравненіе удовлетворяется не только безчисленнымъ множествомъ кривыхъ, изображаемыхъ общимъ интеграломъ, но и огибающею этихъ кривыхъ, изображаемой особеннымъ интеграломъ. Поэтому обыкновенно и говорятъ, что *особенный интегралъ есть огибающая безчисленнаго множества частныхъ интеграловъ*. Благодаря существованію особеннаго интеграла точка, двигающаяся непрерывно такъ, что она постоянно удовлетворяетъ данному дифференціальному уравненію, не осуждена непремѣнно оставаться на опредѣленной

---

[1]) По этому вопросу надо обратиться либо къ „Lehrbuch der Analysis" Lipschitz'а (стр. 500), либо къ „Traité d'Analyse" Picard'а (т. 2, стр. 292), замѣткѣ Peano въ „Atti dell' Accademia di Torino" (1885—86, стр. 677), замѣткамъ Arzelà въ „Memorie dell' Accademia di Bologna" (1895, стр 257; 1896, стр. 131). Peano даетъ доказательство существованія интеграла подъ однимъ только условіемъ, указаннымъ въ началѣ этого параграфа.

*) Т. е. если $u = \text{const.}$, то и $v = \varphi(u) = \text{const.}$

частной кривой, а, наоборотъ, можетъ, пройдя нѣкоторую дугу огибающей, сойти затѣмъ на всякую другую частную кривую [1]).

784. Слѣдуетъ замѣтимъ, что особенный интегралъ можно получить, не выполняя какого либо интегрированія. Если лѣвая часть уравненія $f(x, y, y') = 0$ есть непрерывная функція съ непрерывными первыми производными, то особенный интегралъ получится черезъ исключеніе y' изъ уравненій $f = 0$ и $\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$. Въ самомъ дѣлѣ, фиксируемъ одну изъ безчисленнаго множества кривыхъ, изображаемыхъ общимъ интеграломъ, и положимъ, что она касается въ точкѣ A той кривой линіи, которая изображается особеннымъ интеграломъ. Разсмотримъ другую частную кривую (изображаемую другимъ частнымъ интеграломъ), безконечно близкую къ первой, и пусть A' будетъ безконечно близкая къ A точка ея касанія съ особенною кривою (огибающею). Ясно, что обѣ частныя кривыя имѣютъ общую точку M, безконечно близкую къ A, координаты ξ и η которой стремятся къ предѣламъ x и y — координатамъ точки A, когда A' стремится къ A. Пусть η' и $\eta' + h$ будутъ угловые коэффиціенты касательныхъ въ точкѣ M къ двумъ частнымъ кривымъ, пересѣкающимся въ M. Ясно, что съ приближеніемъ A' къ A эти касательныя въ M стремятся совпасть съ касательною въ A къ особенной кривой. Слѣдовательно, одновременно будемъ имѣть $\lim \xi = x$, $\lim \eta = y$, $\lim \eta' = y'$, $\lim h = 0$. Такъ какъ точка M принадлежитъ двумъ кривымъ, удовлетворяющимъ данному дифференціальному уравненію, то должно быть $f(\xi, \eta, \eta') = 0$, $f(\xi, \eta, \eta' + h) = 0$. Второе уравненіе, будучи расположено по степенямъ h, обратится въ $f_{y'}(\xi, \eta, \eta') = 0$, если отбросимъ всѣ члены съ степенями h, начиная со второй. Слѣдовательно, въ предѣлѣ (т. е. на особенной кривой) имѣемъ $f(x, y, y') = 0$ и $f'_{y'}(x, y, y') = 0$ *).

785. Что касается интегрированія дифференціальныхъ уравненій, то не существуетъ методы, примѣнимой ко всѣмъ уравненіямъ, и намъ приходится ограничиться указаніемъ нѣкоторыхъ отдѣльныхъ

---

[1]) Этимъ замѣчаніемъ, столь очевиднымъ, что указывать на него кажется даже излишнимъ, очень искусно воспользовался Boussinesq для „Conciliation du véritable déterminisme mécanique avec l'existence de la vie et de la liberté morale" (Paris, Gauthier-Villars, 1878). Смотри также этюды того же автора „Sur divers points de la philosophie des sciences", стр. 82

*) Изъ разсужденія § 784 явствуетъ, что если особенный интегралъ существуетъ, то онъ можетъ быть полученъ указаннымъ путемъ; въ противномъ случаѣ исключеніе y' изъ уравненій $f(x, y, y') = 0$ и $f'_{y'}(x, y, y') = 0$ можетъ привести къ частному интегралу и даже къ функціи, вовсе не удовлетворяющей дифференціальному уравненію.

случаевъ, въ которыхъ можно помощью частныхъ пріемовъ найти общій интегралъ.

a) Если мы выведемъ изъ даннаго уравненія одно изъ возможныхъ значеній y' и подставимъ $\frac{dy}{dx}$ вмѣсто y', то придемъ къ разсмотрѣнію уравненій вида $udx+vdy=0$, гдѣ u и v данныя функціи отъ x и y. Интегрированіе выполняется непосредственно и даетъ

$$\int u\,dx+\int v\,dy=\text{const.}$$

въ томъ случаѣ, когда u функція одного x, а v функція одного y. Тогда говорятъ, что перемѣнныя отдѣлены. Отдѣленія перемѣнныхъ всегда можно достигнуть, когда u и v равны произведеніямъ функцій одного x на функціи одного y. А именно, стоитъ только раздѣлить все уравненіе на ту функцію отъ y, которая входитъ множителемъ въ u, и на ту функцію отъ x, которая входитъ въ v.

b) Перемѣнныя всегда можно отдѣлить, когда u и v однородныя функціи одной и той же степени. Дѣйствительно, полагая $y=tx$, находимъ $u=x^n\varphi(t)$, $v=x^n\psi(t)$ и уравненіе принимаетъ видъ

$$\varphi(t)\,dx+\psi(t)\,(t\,dx+x\,dt)=0.$$

Раздѣляя на x и на $\varphi+t\psi$ и интегрируя, получимъ

$$\log x+\int\frac{\psi(t)\,dt}{\varphi(t)+t\psi(t)}=\text{const.}$$

c) Очень просто интегрируется уравненіе $f(x,y,y')=0$, если въ него не входитъ x или y. Мы предположимъ, что уравненіе не можемъ или не желаемъ рѣшать относительно y' Иначе, изъ $y'=\varphi(x)$, или $y'=\varphi(y)$ тотчасъ получили бы

$$y=\int\varphi(x)\,dx,\ \text{или}\ \ x=\int\frac{dy}{\varphi(y)}.$$

Но зато мы предположимъ, что уравненіе можно рѣшить относительно x или y. Если, напримѣръ, $x=\varphi(y')$, то, положивъ $y'=t$, имѣемъ $y=\int t\,dx=\int\varphi'(t)\,t\,dt$. Исключеніе t изъ уравненій $x=\varphi(t)$ и $y=t\varphi(t)-\int\varphi(t)dt$ даетъ искомое уравненіе между x, y и c. Точно также изъ $y=\varphi(y')$, положивъ $y'=t$, получимъ

$$x=\int\frac{dy}{t}=\int\frac{\varphi'(t)\,dt}{t}$$

и т. д.

d) Уравненіе второго порядка, не содержащее x или y, легко сводится къ уравненію перваго порядка. А именно, если не входитъ y, то можно разсматривать y' какъ неизвѣстную функцію, относительно которой уравненіе будетъ уже перваго порядка; интегрированіе его, которое предполагаемъ возможнымъ, приведетъ къ уравненію $F(x, y', a) = 0$, гдѣ a произвольная постоянная. Интегрируя это уравненіе, придемъ къ искомому уравненію между x и y, которое будетъ содержать уже двѣ произвольныя постоянныя a и b. Если въ данное уравненіе не входитъ x, то стоитъ только принять y за независимую перемѣнную, разсматривать y', какъ неизвѣстную функцію отъ нея и замѣтить, что

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = y'\frac{dy'}{dy}.$$

Такимъ образомъ получается уравненіе перваго порядка, интегрированіе котораго дастъ уравненіе $F(y, y', a) = 0$ и т. д.

e) Если выраженіе y', выведенное изъ даннаго уравненія, будетъ первой степени относительно y, то уравненіе называется *линейнымъ*, и его интегрированіе всегда возможно. Дѣйствительно, положивъ $y = uv$, гдѣ u и v функціи отъ x, преобразуемъ уравненіе $y' + y\varphi(x) = f(x)$ въ $u'v + (v' + v\varphi)u = f$, и сведемъ его къ $u'v = f$, принявъ за v какую нибудь функцію, удовлетворяющую условію $v' + v\varphi = 0$. Съ помощью отдѣленія перемѣнныхъ и интегрированія найдемъ $v = e^{-\int \varphi\, dx}$. Слѣдовательно, $u' = fe^{\int \varphi\, dx}$ и наконецъ

$$y = e^{-\int \varphi\, dx}\int e^{\int \varphi\, dx} f\, dx.$$

Итакъ, нужно выполнить, какъ говорятъ, двѣ квадратуры, т. е. два простыхъ интегрированія, чтобы получить общій интегралъ линейнаго дифференціальнаго уравненія перваго порядка.

f) Уравненіе Бернулли $y' + y\varphi(x) = y^n f(x)$ тотчасъ приводится къ линейному, стоитъ только раздѣлить его на y^n и принять y^{1-n} за неизвѣстную функцію.

g) Интересно уравненіе Клеро $y = xy' + f(y')$. Дифференцируя его, получимъ $\{x + f'(y')\}y'' = 0$. Поэтому послѣдовательно получаемъ $y'' = 0$, $y' = a$, $y = ax + f(a)$—это общій интегралъ. Если y'' не равно 0, то должно быть $x + f'(y') = 0$, исключая y' изъ этого и изъ даннаго уравненія, получимъ особенный интегралъ; путь, которымъ мы его здѣсь нашли, и есть тотъ, который мы указали въ § 784.

h) Уравненіе $y = x\varphi(y') + \psi(y')$, если оно не уравненіе Клеро, приводится къ линейному; дифференцируя его, получимъ

$$\frac{dx}{dy'} + \frac{x\varphi'(y') + \psi'(y')}{\varphi(y') - y'} = 0$$

(линейное относительно x). Интегрируя его, принявъ x за неизвѣстную функцію отъ независимой перемѣнной y', получимъ уравненіе вида $F(x, y', a) = 0$, а исключая y' изъ этого и изъ даннаго уравненія, получимъ общій интегралъ. Общнѣе, когда дано уравненіе $y = f(x, y')$, дифференцированіемъ изъ него выводимъ

$$y' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y'} y''.$$

Если мы умѣемъ интегрировать это уравненіе (перваго порядка относительно y'), то, исключая y' изъ его общаго интеграла $F(x, y', a) = 0$ и даннаго уравненія, получимъ искомое соотношеніе между x, y и a.

i) Если выраженіе y', выведенное изъ даннаго уравненія перваго порядка, будетъ второй степени относительно y, то интегрированіе выполняется лишь въ совершенно исключительныхъ случаяхъ, которыми мы займемся въ слѣдующемъ параграфѣ. Здѣсь же ограничимся указаніемъ нѣкоторыхъ замѣчательныхъ свойствъ такихъ уравненій. Эти уравненія имѣютъ видъ

$$y' = y^2\varphi(x) + y\chi(x) + \psi(x)$$

и называются уравненіями Риккати (Riccati). Если какимъ нибудь путемъ найдено одно частное рѣшеніе u, то полное интегрированіе выполняется при помощи двухъ квадратуръ. Полагая $x = u - \frac{1}{z}$, приведемъ уравненіе къ линейному

$$z' + (2u\varphi + \chi)z = \varphi,$$

и, слѣдовательно, общій интегралъ будетъ

$$(1) \qquad y = u - \frac{e^{\int(2u\varphi + \chi)dx}}{\int e^{\int(2u\varphi+\chi)dx}\varphi\, dx}.$$

Если извѣстны два частныхъ рѣшенія u и v, то интегрированіе сводится къ одной квадратурѣ. Дѣйствительно, вычитая изъ даннаго уравненія тождества

$$u' = u^2\varphi + u\chi + \psi, \quad v' = v^2\varphi + v\chi + \psi,$$

получимъ уравненіе

$$\frac{d}{dx}\log(y - u) = (y + u)\varphi + \chi, \quad \frac{d}{dx}\log(y - v) = (y + v)\varphi + \chi.$$

Вычитая одно изъ этихъ уравненій изъ другого и интегрируя, найдемъ

$$\frac{y-u}{y-v} = e^{\int (u-v)\varphi\, dx}. \tag{2}$$

Если далѣе извѣстны три частныхъ рѣшенія u, v, w, то интегрированіе выполняется безъ помощи квадратуръ, потому что изъ предыдущаго соотношенія тотчасъ выводимъ

$$\frac{y-u}{y-v} : \frac{w-u}{w-v} = \text{const}.$$

Итакъ, ангармоническое отношеніе какихъ угодно четырехъ частныхъ рѣшеній уравненія Риккати есть число постоянное. Въ заключеніе укажемъ еще крайне простую форму, къ которой всегда можно привести уравненіе Риккати. Полагая

$$z = y\, e^{-\int \chi dx}, \qquad t = -\int e^{\int \chi dx} \varphi\, dx$$

и принимая t за независимую перемѣнную, а z—за неизвѣстную функцію, находимъ

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{y'-y\chi}{e^{2\int \chi dx}\varphi} = -\frac{y^2\varphi+\psi}{e^{2\int \chi dx}\varphi} = -z^2 - \frac{\psi}{\varphi}\, e^{-2\int \chi dx}$$

и уравненіе принимаетъ видъ

$$z' + z^2 = f(t).$$

786. Примѣры. a) Чтобы проинтегрировать уравненія

$$(3x^2 - y^2) y dx - (x^2 - 3y^2) x dy = 0, \quad (x^2 - 3y^2) x\, dx + (3x^2 - y^2) y\, dy = 0,$$

достаточно (§ 785, b) положить $y = tx$ и тѣмъ преобразовать данныя уравненія въ слѣдующія:

$$\frac{dx}{x} - \frac{(1-3t^2)\, dt}{2t(1+t^2)} = 0, \quad \frac{dx}{x} + \frac{(3-t^2)\, t\, dt}{1-t^4} = 0,$$

интегрированіемъ найдемъ

$$x = \frac{a\sqrt{2t}}{1+t^2}, \quad x = \frac{a\sqrt{1-t^2}}{1+t^2},$$

$$\text{т. е. } x^2 + y^2 = a\sqrt{2xy}, \quad x^2 + y^2 = a\sqrt{x^2-y^2},$$

или въ полярныхъ координатахъ $r = a\sqrt{\sin 2\theta}$, $r = a\sqrt{\cos 2\theta}$. Интегралы перваго и второго уравненія изображаютъ, слѣдовательно (§ 589, m), безконечное множество лемнискатъ, касающихся въ полюсѣ осей или прямыхъ, дѣлящихъ пополамъ углы между осями. Замѣтимъ, что двѣ лемнискаты, по произволу выбранныя одна въ одномъ, другая въ другомъ семействѣ, пересѣкаются внѣ полюса подъ прямымъ угломъ. Легко даже провѣрить, что оба данныя дифференціальныя уравненія выражаютъ общее свойство касательной и нормали, а именно—свойство составлять съ радіусомъ векторомъ уголъ, равный удвоенному углу наклоненія радіуса вектора къ неподвижной прямой. Эта прямая есть касательная въ полюсѣ или нормальная ось симметріи, смотря по тому, о свойствѣ касательной или о свойствѣ нормали идетъ рѣчь. Если мы такую задачу выразимъ уравненіемъ, примѣняя полярные координаты, то получимъ уравненія $r' = r \cot g\, 2\theta$, $r' = -r \operatorname{tg} 2\theta$, и интегрированіе дѣлается особенно простымъ.

b) Чтобы проинтегрировать уравненіе

$$(a x + b y + c)\, d x + (a' x + b' y + c')\, d y = 0,$$

можемъ принять за новыя перемѣнныя

$$\xi = a x + b y + c, \quad \eta = a' x + b' y + c',$$

если $a b' - b a'$ не равно 0 (иначе между ξ и η существовало бы соотношеніе). Уравненіе обращается въ

$$(b' \xi - a' \eta)\, d \xi - (b \xi - a \eta)\, d \eta = 0,$$

и для интегрированія полагаемъ $\eta = t \xi$ и т. д. Если $a b' = b a'$ и въ то же время $a c' = c a'$, то уравненіе, освобожденное отъ дѣлителя $a x + b y + c$, дастъ $a x + a' y = \text{const}$. Если же $a c' \gtreqless c a'$, то можно написать

$$(a x + b y)\, d (a x + a' y) + a\, d (c x + c' y) = 0,$$

такъ что, полагая $\xi = a x + a' y$, $\eta = c x + c' y$ и принимая ξ и η за новыя перемѣнныя, получимъ уравненіе вида

$$(\alpha \xi + \beta \eta)\, d \xi + a\, d \eta = 0$$

Для отдѣленія перемѣнныхъ достаточно ввести новую перемѣнную $z = \alpha \xi + \beta \eta$ вмѣсто η; тогда получимъ

$$(\beta z - a \alpha)\, d \xi + a\, d z = 0$$

и т. д.

c) Уравненіе $y \sin x + y' \cos x = 1$ — линейное; чтобы его интегрировать, достаточно (§ 785, е) опредѣлить какую нибудь функцію v, удовлетворяющую уравненію $v \sin x + v' \cos x = 0$, затѣмъ положить $y = u v$ и найти всѣ функціи, удовлетворяющія уравненію $v u' \cos x = 1$. Такимъ образомъ найдемъ $v = \cos x$, $u = \operatorname{tg} x + a$ и $y = \sin x + a \cos x$.

d) Если предложено уравненіе $(y - x y') \cos y' = 1 - x \sin y'$, то сперва рѣшаемъ его относительно y (§ 785, h), а затѣмъ дифференцируемъ

$$y = x (y' - \operatorname{tg} y') + \sec y', \quad x \sin y' + \frac{d x}{d y'} \cos y' = 1.$$

Разсматривая теперь x, какъ неизвѣстную функцію отъ y', находимъ

$$x = \sin y' + a \cos y'$$

и выводимъ отсюда

$$(1+a^2)\sin y' = x \pm a\sqrt{1+a^2-x^2},\quad (1+a^2)\cos y' = a\,x \mp \sqrt{1+a^2-x^2}.$$

Подставляя эти результаты въ данное дифференціальное уравненіе, найдемъ общій интегралъ

$$y + x \operatorname{arc\,tg}\frac{a \pm x\sqrt{1+a^2-x^2}}{1-x^2} \pm \sqrt{1+a^2-x^2} = 0.$$

e) Аналогично интегрируется уравненіе $y = x y' + x^2 f(y')$, дифференцируя которое, найдемъ

$$\frac{dx}{dy'} + \frac{x f'(y')}{2 f(y')} + \frac{1}{2 f(y')} = 0,$$

откуда, положивъ $\varphi(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$, получимъ

$$x = -\tfrac{1}{2}\,\varphi(y')\,\varphi'(y')$$

Исключая y' изъ этого и изъ даннаго уравненія, получимъ общій интегралъ.

f) Чтобы проинтегрировать уравненіе

$$(a^2 - x^2)\,dy^2 + 2xy\,dx\,dy + (b^2 - y^2)\,dx^2 = 0,$$

рѣшаемъ уравненіе относительно y и замѣчаемъ, что полученное уравненіе $y = xy' \pm \sqrt{a^2 y'^2 + b^2}$ есть уравненіе Клеро (§ 785, g). Слѣдовательно, общій интегралъ даннаго уравненія есть

$$y = cx \pm \sqrt{a^2c^2 + b^2},\ \text{или}\ c^2(a^2 - x^2) + 2cxy + (b^2 - y^2) = 0,$$

а особенный интегралъ будетъ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

g) для уравненія $y^2 + \frac{1}{x^2} + 2y' = 0$ тотчасъ видимъ частное рѣшеніе $y = \frac{1}{x}$, а потому достаточно въ формулѣ (1) положить $u = \frac{1}{x}$, $\varphi = -\frac{1}{2}$, $\chi = 0$, чтобы найти общій интегралъ

$$\frac{1}{1 - xy} + \tfrac{1}{2}\log x = \text{const}.$$

Нѣсколько общнѣе, если дано уравненіе $y^2 + \frac{1}{x^2} + 2ky' = 0$, то, пробуя удовлетворить ему выраженіемъ $y = \frac{m}{x}$, найдемъ, что m должно удовлетворять условію $m^2 - 2km + 1 = 0$; при $k^2 \geqq 1$ получимъ такимъ образомъ два частныхъ рѣшенія

$$u = \frac{k + \sqrt{k^2 - 1}}{x},\quad v = \frac{k - \sqrt{k^2 - 1}}{x}.$$

а затѣмъ по формулѣ (2) и общій интегралъ

$$x y = k + \sqrt{k^2 - 1}\,\frac{x^{\frac{\sqrt{k^2-1}}{k}} - a}{x^{\frac{\sqrt{k^2-1}}{k}} + a}.$$

При $k^2 < 1$, цѣлесообразнѣе преобразовать его къ слѣдующему виду:

$$x y = k - \sqrt{1 - k^2}\,\mathrm{tg}\left(a + \frac{\sqrt{1-k^2}}{2k}\log x\right).$$

Къ тому же результату (см. § 725, d) можно придти съ помощью подстановки $x y = z$, которая ведетъ къ отдѣленію перемѣнныхъ

$$\frac{dx}{x} + \frac{2k\,dz}{z^2 - 2kz + 1} = 0.$$

h) Разсмотримъ теперь вообще уравненіе Риккати, которое мы уже привели къ виду $y' + a y^2 = f(x)$ (§ 785, i). Мы укажемъ безчисленное множество случаевъ, въ которыхъ интегралъ этого уравненія выражается въ алгебраически-логариѳмическомъ видѣ. Эти случаи относятся къ предположенію, что $f(x)$ пропорціональна степени x; пусть $f(x) = b x^n$. Положивъ $y = uz + v$, получимъ уравненіе

$$u z' + (v' + a v^2) + (u' + 2 a u v) z + a u^2 z^2 = b x^n,$$

которое приведется просто къ $z' + a u z^2 = \frac{b x^n}{u}$, если u и v выберемъ такъ, чтобы онѣ удовлетворяли условіямъ $v' + a v^2 = 0$, $u' + 2 a u v = 0$. Этимъ условіямъ удовлетворимъ, положивъ $v = \frac{1}{a x}$ и затѣмъ $u = \frac{1}{x^2}$. Слѣдовательно, преобразованное уравненіе будетъ $z' + a\frac{z^2}{x^2} = b x^{n+2}$, и приводится къ первоначальной формѣ, если положимъ $z = \frac{1}{y_1}$, $x = x_1^{\nu}$. Въ самомъ дѣлѣ, мы тогда будемъ имѣть

$$\frac{d y_1}{d x_1} + \nu b y_1^2 x_1^{(n+3)\nu - 1} = \nu a_1 x_1^{-(\nu+1)},$$

и стоитъ только взять $\nu = \frac{1}{n+3}$, чтобы уравненіе приняло первоначальный видъ, т. е. $\frac{d y_1}{d x_1} + a_1 y_1^2 = b_1 x_1^{n_1}$, гдѣ $a_1 = \frac{b}{n+3}$, $b_1 = \frac{a}{n+3}$, $n_1 = -\frac{n+4}{n+3}$. Представимъ себѣ теперь, что указанное преобразованіе повторяется нѣсколько разъ. Мы получимъ тогда рядъ уравненій Риккати, въ которыхъ показатель n замѣняется послѣдовательно показателями $n_1, n_2, n_3, \ldots$, которые связаны соотношеніемъ

$$n_{i+1} = -\frac{n_i + 4}{n_i + 3}, \text{ при чемъ } n_0 = n.$$

Прибавляя число 2 къ обѣимъ частямъ равенства, получимъ

$$n_{i+1}+2=\frac{n_i+2}{(n_i+2)+1},\quad \text{т. е.}\ \frac{1}{n_{i+1}+2}=1+\frac{1}{n_i+2}.$$

Замѣняя i черезъ $i-1$, $i-2$, ..., 2, 1, 0 и складывая, находимъ

$$\frac{1}{n_i+2}=i+\frac{1}{n+2}.$$

Въ предложенномъ уравненіи перемѣнныя непосредственно отдѣляются при $n=0$. Поэтому мы можемъ утверждать, что уравненіе интегрируется, если въ рядѣ чиселъ n_1, n_2, n_3, ... встрѣтится число, равное нулю. Слѣдовательно, оно интегрируется, если

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}=\frac{n}{2n+4}=\text{цѣлому числу.}$$

Собственно говоря, нужно, чтобы $\frac{n}{2n+4}$ (число i) было цѣлымъ и положительнымъ, но въ случаѣ отрицательнаго цѣлаго числа, мы справляемся слѣдующимъ образомъ. Въ данномъ уравненіи дѣлаемъ $y=\frac{1}{y_1}$, $x=x_1^{\overline{n+1}}$. Тогда уравненіе принимаетъ видъ $\frac{dy_1}{dx_1}+a_1y_1^2=b_1x_1^{n_1}$, гдѣ $a_1=\frac{b}{n+1}$, $b_1=\frac{a}{n+1}$, $n_1=-\frac{n}{n+1}$, такъ что $\frac{n_1}{2n_1+4}=-\frac{n^1}{2n+4}$. Если, наконецъ, это цѣлое число не было бы конечнымъ, то потребовалось бы безконечное число преобразованій; но этотъ случай, соотвѣтствующій значенію $n=-2$, былъ только что разобранъ (см. g) инымъ путемъ.

[**Примѣчаніе**. При $n=0$, интегралъ уравненія $y'+ay^2=b$ или $dy+(ay^2-b)\,dx=0$ будетъ $x+C=\int\frac{dy}{ay^2+b}$ и выражается въ логариѳмахъ. Замѣчая, что всѣ послѣдовательныя преобразованія алгебраическія, мы видимъ, что въ разсматриваемомъ случаѣ, т. е. когда $\frac{n}{2n+4}$ цѣлое число, уравненіе Риккати интегрируется въ алгебраическихъ и логариѳмическихъ функціяхъ].

Итакъ, резюмируя, можемъ сказать, что уравненіе $y'+ay^2=bx^n$ интегрируется при

$$-\frac{n}{4}=0,\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{7},\ \frac{4}{9},\ \dots,\ \frac{1}{2},\ \dots,\ \frac{5}{9},\ \frac{4}{7},\ \frac{3}{5},\ \frac{2}{3},\ 1\ ^{*}).$$

---

*) Условіе $\frac{2n+4}{n}=i=$ цѣлому числу, даетъ

$$-\frac{n}{4}=\frac{i}{2i-1};\ \text{полагая}\ i=0,\ -1,\ -2,\ \cdots\pm\infty,\ \cdots 4,\ 3,\ 2,\ 1,$$

и получимъ написанныя значенія.

i) Уравненіе второго порядка $y''=f(x)$ всегда можно (§ 785, d) трактовать, какъ уравненіе перваго порядка, принявъ y' за неизвѣстную функцію: $y'=\int f(x)\,dx$ съ произвольною постоянною a, содержащеюся въ выраженіи интеграла. Далѣе имѣемъ $y=\int y'\,dx=xy'-\int x\,dy'$, т. е. $y=x\int f(x)\,dx-\int xf(x)\,dx$ со второю произвольною постоянною, содержащеюся во второмъ интегралѣ, такъ что произвольная часть въ выраженіи y будетъ $ax+b$, какъ и слѣдовало ожидать. Уравненіе $y''=f(y)$ также сводится тотчасъ къ уравненію перваго порядка (§ 785, d), если напишемъ $y'dy'$ вмѣсто $y''dy$, такъ что послѣдовательно найдемъ

$$\frac{1}{2}y'^2=\int f(y)\,dy,\qquad x=\int\frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)\,dy}}\,.$$

И здѣсь имѣются двѣ произвольныя постоянныя, появляющіяся при послѣдовательныхъ интегрированіяхъ.

j) Чтобы проинтегрировать уравненіе $y''\cos y+y'^2\sin y=y'$, умножимъ все на dy и замѣнимъ $y''dy$ черезъ $y'dy'$. Тогда получимъ, освободивъ уравненіе отъ очевиднаго интеграла $y=C$, уравненіе перваго порядка

$$\frac{dy'}{dy}\cos y+y'\sin y=1,$$

которое, какъ мы уже видѣли, имѣетъ общій интегралъ $y'=\sin y+\operatorname{tg}\alpha\cos y$. Слѣдовательно,

$$x=\int\frac{dy}{\sin y+\operatorname{tg}\alpha\cos y}=\int\frac{\cos\alpha\,dy}{\sin(y+\alpha)}=a+\cos\alpha\log\operatorname{tg}\frac{y+\alpha}{2},$$

гдѣ a и α произвольныя постоянныя.

k) Подобнымъ же образомъ можно привести уравненіе $y''(1+yy')=y'(1+y'^2)$, къ виду

$$\frac{dy}{dy'}=\frac{1+yy'}{1+y'^2}$$

и интегрировать (§ 785, e), принявъ y' за независимую перемѣнную. Можно также сперва привести уравненіе къ виду

$$(1+y'^2)(dy-dy')=(1+yy')\,dy'-(1+y'^2)\,dy'=(y-y')\,y'dy',$$

и затѣмъ послѣдовательно вывести

$$\frac{d(y-y')}{y-y'}=\frac{y'\,dy'}{1+y'^2},\qquad y=y'+k\sqrt{1+y'^2},$$

далѣе,

$$x=\int\frac{y+k\sqrt{y^2+1-k^2}}{y^2-k^2}\,dy,$$

и наконецъ,

$$x=a+k\log\left(y+\sqrt{y^2+1-k^2}\right)+\log\left(y-k\sqrt{y^2+1-k^2}\right),$$

гдѣ a и k произвольныя постоянныя. Въ частности при $k = 1$, если передъ тѣмъ положимъ $a = -\log(1-k^2)$, получимъ совсѣмъ простой интегралъ

$$y = \sqrt{1+e^x}.$$

l) Уравненіе $yy'y'' = y'^3 + y''^2$ приводится, если примемъ y за перемѣнную независимую, къ уравненію Клеро $y' = y\frac{dy'}{dy} - \left(\frac{dy'}{dy}\right)^2$, общій интегралъ даннаго уравненія найдемъ, слѣдовательно, интегрируя уравненіе $y' = ay - a^2$, а именно $y = a + be^{ax}$, гдѣ a и b произвольныя постоянныя. Но особенный интегралъ уравненія Клеро $4y' = y^2$ обнаруживаетъ еще безчисленное множество интеграловъ даннаго уравненія, а именно $(a-x)y = 4$, не заключающихся въ общемъ интегралѣ.

m) Въ заключеніе покажемъ на примѣрѣ, какимъ образомъ интегрированіе дифференціальныхъ уравненій можетъ служить къ разысканію замѣчательныхъ свойствъ функцій. Разсмотримъ уравненіе

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} + \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = 0, \tag{3}$$

очевидно имѣющее общій интегралъ

$$F(k,\varphi) + F(k,\psi) = \text{const}. \tag{4}$$

Попытаемся теперь иначе придти къ интегралу того же уравненія. Функціи $u = \sin\varphi$, $v = \sin\psi$, разсматриваемыя, какъ функціи отъ независимой перемѣнной $x = F(k,\varphi)$ или $x = F(k,\psi)$, очевидно, имѣютъ производныя

$$u' = \cos\varphi\cdot\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}, \qquad v' = \cos\psi\cdot\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}$$

и, слѣдовательно, удовлетворяютъ уравненіямъ

$$y'^2 = (1-y^2)(1-k^2y^2), \qquad y'' = -(1+k^2)y + 2k^2y^3.$$

Отсюда слѣдуетъ

$$v^2u'^2 - u^2v'^2 = -(u^2-v^2)(1-k^2u^2v^2),$$
$$vu'' - uv'' = 2k^2uv(u^2-v^2),$$

а потому

$$\frac{vu''-uv''}{vu'-uv'} = -\frac{2k^2uv(uv)'}{1-k^2(uv)^2}, \qquad \frac{vu'-uv'}{1-k^2u^2v^2} = \text{const}.$$

Послѣднее уравненіе, если подставимъ въ него вмѣсто u, v, u', v' ихъ выраженія черезъ φ и ψ, принимаетъ видъ

$$\frac{\sin\varphi\cos\psi\cdot\sqrt{1-k^2\sin^2\psi} + \sin\psi\cos\varphi\cdot\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi} = \text{const}. \tag{5}$$

Это уравненіе есть лишь другая форма общаго интеграла уравненія (3). Поэтому, если обозначимъ черезъ $\sin\sigma$ ту функцію отъ φ и ψ, которая написана въ лѣвой части уравненія (5), то, въ силу замѣчанія, сдѣланнаго въ концѣ § 782, можемъ утверждать, что лѣвая часть уравненія (4) есть функція отъ σ, которую обозначимъ черезъ $f(\sigma)$. Такъ какъ, далѣе, при $\psi = 0$, $\sigma = \varphi$ (на основаніи уравненія (5)), то $F(k,\varphi) = f(\varphi)$. Итакъ, получается слѣдующая теорема: Если

$$F(k,\varphi) + F(k,\psi) = F(k,\sigma),$$

то σ, φ, ψ связаны уравненіемъ

$$(1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi)\sin\sigma=\sin\varphi\cos\psi\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}+\sin\psi\cos\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}.$$

Въ этомъ состоитъ весьма важная, открытая Эйлеромъ, теорема сложенія эллиптическихъ интеграловъ перваго вида[1]). Полезно замѣтить, что послѣднее соотношеніе можетъ быть написано еще въ слѣдующихъ формахъ:

$$\cos\sigma=\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi\sqrt{1-k^2\sin^2\sigma},$$

$$\operatorname{tg}\sigma=\frac{\operatorname{tg}\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}+\operatorname{tg}\psi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{1-\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\psi\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)(1-k^2\sin^2\psi)}}.$$

Въ частности, при $k=0$ находимъ извѣстныя формулы Тригонометріи, дающія выраженія $\sin(\varphi+\psi)$, $\cos(\varphi+\psi)$, $\operatorname{tg}(\varphi+\psi)$. Замѣтимъ еще, что при $\sigma=\frac{\pi}{2}$, полагая $\varphi=\psi$, можно найти амплитуду φ, для которой $F(k,\varphi)=\frac{1}{2}F(k)$, а именно $\varphi=\operatorname{arc\,cot}\sqrt[4]{1-k^2}$. Такимъ образомъ дѣлается возможнымъ рѣшеніе одной, поставленной раньше (§ 777, d) задачи.

Геометрическія приложенія.

787. Плоскія кривыя. a) Положимъ, что ищется кривая, для которой отрѣзокъ, образуемый касательною на данной прямой, отсчитываемый отъ данной точки, есть данная функція угла между касательною и тою же прямою; условіе задачи выражается, какъ легко видѣть, уравненіемъ Клеро. Искомая кривая изображается особеннымъ интеграломъ, а общій интегралъ даетъ совокупность всѣхъ касательныхъ прямыхъ. Если, напримѣръ, желаютъ, чтобы упомянутый отрѣзокъ на оси x-овъ, считаемый отъ начала координатъ, былъ пропорціоналенъ y' — предположеніе, къ которому приводитъ вопросъ о разысканіи антиподэры (§ 627) прямой относительно данной точки — то надо будетъ интегрировать уравненіе $y=xy'-ay'^2$. Отсюда дифференцированіемъ находимъ: либо $y''=0$, откуда $y'=k$ и далѣе $y=kx-k^2a$, что даетъ семейство касательныхъ къ параболѣ $x^2=4ay$, либо $x=2ay'$, и затѣмъ $x^2=4ay$. Подобнымъ же образомъ, если ищется кривая, въ которой всѣ отрѣзки, образуемые координатными осями на касательныхъ, имѣютъ одну и ту же длину, то получается дифференціальное уравненіе $y=xy'+ay'/\sqrt{1+y'^2}$, и достаточно будетъ найти (§ 784) особенный интегралъ: $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$. Исключеніе, которое надо произвести, чтобы придти къ этому результату, въ сущности не отличается отъ того, которое надо было бы выполнить (§ 620), рѣшая эту задачу съ точки зрѣнія теоріи огибающихъ.

b) Аналогичнымъ образомъ поступаютъ, когда вмѣсто касательной разсматривается нормаль, и дифференціальное уравненіе имѣетъ видъ $x+yy'=f(y')$. Это уравненіе можно тотчасъ рѣшить относительно y (см. § 785, h). Но можно начать и съ дифференцированія этого уравненія,

[1]) Объ интегралахъ (эллиптическихъ) другихъ видовъ см. Schlömilch, Comp der höh. Analysis, Томъ II, стр. 339 и слѣд.

и затѣмъ исключить y изъ полученнаго уравненія $1+y'^2+yy''=f'(y')y''$ и изъ даннаго. Такимъ путемъ придемъ къ линейному уравненію

$$y'\frac{dx}{dy'}=\frac{x}{1+y'^2}+\frac{y'f'(y')-f(y')}{1+y'^2},$$

которое умѣемъ интегрировать. Если $F(x, y', a)=0$ будетъ общій интегралъ этого уравненія, то, исключая y' изъ даннаго уравненія и уравненія $F(x, y', a)=0$, получимъ общій интегралъ даннаго. Если, напримѣръ, желаемъ найти кривую, для которой всѣ отрѣзки, образуемые осями координатъ на нормаляхъ, имѣютъ одну и ту же длину a, то придемъ къ уравненію $x+yy'=ay'/\sqrt{1+y'^2}$ и находимъ общій интегралъ черезъ исключеніе y' изъ уравненій

$$x=\frac{ay'}{2\sqrt{1+y'^2}}\left(1-k+\frac{1}{1+y'^2}\right),\quad y=\frac{a}{2\sqrt{1+y'^2}}\left(1+k-\frac{1}{1+y'^2}\right).$$

Впрочемъ, достаточно знать одну кривую, удовлетворяющую поставленному условію, чтобы знать **всѣ** такія кривыя, и мы можемъ ограничиться, напримѣръ, значеніемъ $k=\frac{1}{2}$. Тогда предыдущія уравненія обратятся въ слѣдующія

$$x=\frac{a}{8(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\{(1+y')^3-(1-y')^3\},\quad y=\frac{a}{8(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\{(1+y')^3+(1-y')^3\},$$

и исключеніемъ y' найдемъ

$$(x+y)^{\frac{2}{3}}+(x-y)^{\frac{2}{3}}=\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Слѣдовательно, искомыя кривыя — **кривыя параллельныя астроидѣ, вершины которой лежатъ на осяхъ**; это будутъ поэтому (§ 626, e), какъ и надо было ожидать, всѣ безчисленныя **эвольвенты астроиды**

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}.$$

c) Положимъ, что ищется кривая, обладающая слѣдующимъ свойствомъ. Въ каждой точкѣ кривой отрѣзокъ нормали между точкою на кривой и одной изъ координатныхъ осей равенъ данной функціи отрѣзка, считаемаго отъ неподвижной точки, образуемаго нормалью на той же оси. Получаемъ уравненіе $y\sqrt{1+y'^2}=f(x+yy')$. Дифференцируя его, получимъ уравненіе, которое разбивается на два

$$(6)\qquad 1+y'^2+yy''=0,\quad \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=f'(x+yy').$$

Исключая y' изъ послѣдняго и изъ даннаго уравненія, находимъ особенный интегралъ, который и изображаетъ искомую кривую. Если же проинтегрируемъ первое уравненіе (6), то получится уравненіе $x+yy'=a$, и подставляя выраженіе y', взятое отсюда, въ данное уравненіе, найдемъ $(x-a)^2+y^2=f^2(a)$. Это уравненіе семейства круговъ, касающихся полученной выше кривой.

d) Если хотимъ найти плоскую кривую, для которой радіусъ кривизны въ каждой точкѣ есть данная функція отъ абсциссы точки, то должны интегрировать уравненіе $(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}=y''f(x)$. Здѣсь перемѣнныя тотчасъ отдѣляются, и получается $\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \int \frac{dx}{f(x)}$ и т. д. Напримѣръ, для $f(x) = \frac{a^2}{2x}$ получаемъ кривую упругости (elastische Kurve), изображаемую уравненіемъ $y = \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^4 - x^4}}$. Эта кривая есть профиль упругаго клинка (Klinge), прикрѣпленнаго однимъ концомъ и растягиваемаго нѣкоторою силою за другой конецъ.

e) Найти плоскую кривую, для которой радіусъ кривизны равенъ длинѣ нормали (т. е. отрѣзку нормали между точкою на кривой и неподвижною прямою). Уравненіе, выражающее условіе вопроса, есть

$$\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \pm y\sqrt{1+y'^2}, \quad \text{т. е.} \quad 1+y'^2 = \pm\, yy''.$$

Если возьмемъ знакъ $-$, то это уравненіе совпадаетъ съ первымъ изъ уравненій (6), и поэтому круги (съ центрами на данной прямой) принадлежатъ къ числу искомыхъ кривыхъ. При знакѣ $+$, получимъ $1+y'^2 = yy''$ или, умножая на dy и замѣняя $y''dy$ черезъ $y'dy'$,

$$\frac{dy}{y} = \frac{y'dy'}{1+y'^2}, \quad y = a\sqrt{1+y'^2}, \quad y = \int \frac{a\,dy}{\sqrt{y^2 - a^2}}.$$

Выбравъ начало координатъ такъ, чтобы при $x=0$ было $y=a$, найдемъ

$$x = a\log\frac{y+\sqrt{y^2-a^2}}{a}, \quad \text{т. е.} \quad y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Это уравненіе цѣпной линіи.

f) Общнѣе будетъ уравненіе кривыхъ Рибокура (§ 595, k)

$$\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = ky\sqrt{1+y'^2}, \quad \text{т. е.} \quad 1+y'^2 = kyy''.$$

Для интегрированія замѣнимъ опять $y''dy$ черезъ $y'dy'$ и получимъ

$$\frac{dy}{y} = k\frac{y'dy'}{1+y'^2},$$

откуда

$$y = a(1+y'^2)^{\frac{1}{2}k}, \quad \text{т. е.} \quad y' = \sqrt{\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{k}} - 1}.$$

Отсюда слѣдуетъ

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{k}} - 1}}.$$

Это общее уравненіе кривыхъ Рибокура. Оно приводится къ логариѳмически-алгебраической формѣ только при $\frac{k}{2}$ или $\frac{k-1}{2}$ цѣломъ (§ 751), т. е. когда k цѣлое число. При $k=-1$ и $k-1$ получаемъ опять кругъ и цѣпную линію, при $k=-2$ циклоиду, при $k=2$ параболу и т. д.

g) Еще болѣе общею будетъ задача о разысканіи кривыхъ, для которыхъ радіусъ кривизны есть данная функція отъ длины нормали. Эта задача всегда рѣшается при помощи двухъ квадратуръ. Дѣйствительно, длина нормали $n=\frac{y}{\cos\varphi}$ (φ — уголъ касательной съ осью x-въ). Кривизна (§ 591)

$$\frac{1}{\varrho}=\frac{d\varphi}{ds}=-\frac{d}{dy}\cos\varphi=-\frac{d}{dy}\frac{y}{n}=-\frac{1}{n}+\frac{y}{n^2}\frac{dn}{dy}.$$

Уравненіе $\varrho=f(n)$ преобразуется въ

$$\frac{dy}{y}=\frac{dn}{n}-\frac{dn}{n+f(n)}$$

и даетъ

$$y=ne^{-\int\frac{dn}{n+f(n)}}=\varphi(n)$$

Слѣдовательно,

$$y'=\frac{\sqrt{n^2-\varphi^2(n)}}{\varphi(n)},\quad x=\int\frac{\varphi(n)\varphi'(n)\,dn}{\sqrt{n^2-\varphi^2(n)}}\text{ и т. д.}$$

Къ этой задачѣ приводится вопросъ о разысканіи поверхностей вращенія, опредѣляемыхъ даннымъ соотношеніемъ между главными радіусами кривизны.

788. Траекторіи. Задача о траекторіяхъ состоитъ въ разысканіи кривыхъ, пересѣкающихъ подъ постояннымъ угломъ ω всѣ кривыя даннаго семейства $\varphi(x, y, a)=0$. Условія задачи выражаются тѣмъ, что при всякомъ значеніи параметра a должно быть

$$y'=\frac{-\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\operatorname{tg}\omega}{\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\operatorname{tg}\omega},$$

т. е.

$$\frac{dx}{\frac{\partial\varphi}{\partial x}\sin\omega+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos\omega}=\frac{dy}{\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\omega-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\sin\omega}.$$

Подставляя вмѣсто a его выраженіе, которое получается изъ уравненія $\varphi=0$, находимъ дифференціальное уравненіе перваго порядка, интегрированіе котораго даетъ уравненіе $\psi(x, y, b)=0$ другого семейства, всѣ кривыя котораго обладаютъ требуемымъ свойствомъ. Въ частности, вопросъ объ ортогональныхъ траекторіяхъ $\left(\omega=\frac{\pi}{2}\right)$ кривыхъ $\varphi=0$ рѣшается интегрированіемъ дифференціальнаго уравненія, получаемаго исключеніемъ a изъ уравненія $\varphi = 0$ и

$$d\,x : \frac{\partial \varphi}{\partial x} = d\,y : \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Приведемъ нѣсколько примѣровъ.

a) Найти ортогональныя траекторіи круговъ радіуса a съ центрами на данной прямой (которую цѣлесообразно будетъ принять за ось x-овъ) Для этого надо исключить b изъ уравненій

$$(x-b)^2 + y^2 = a^2, \qquad \frac{d\,x}{x-b} = \frac{d\,y}{y}.$$

Положивъ $y = a \sin \theta$ и условившись, что при $\theta = \frac{\pi}{2}$, $x = 0$, получимъ

$$x = \int \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y}\,d\,y = a \int \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta}\,d\,\theta = a\left(\cos\theta + \log \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}\right),$$

т. е. траекторіи (очевидно, трактрисы) получаются передвиженіемъ кривой, опредѣляемой уравненіями

$$x = a\left(\cos\theta + \log \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}\right), \qquad y = a \sin \theta,$$

параллельно отъ x-овъ. Легко провѣрить, что эволюта этой кривой — цѣпная линія. При произвольномъ углѣ ω, мы нашли бы другія эвольвенты цѣпной линіи.

b) Пучекъ круговъ $x^2 + y^2 - a^2 = 2\,\mu\,a\,y$ можно изобразить также его дифференціальнымъ уравненіемъ $2\,x\,y\,d\,x = (x^2 - y^2 - a^2)\,d\,y$, которое получается черезъ исключеніе μ изъ первоначальнаго уравненія и получаемаго изъ него дифференцированіемъ. Замѣна $\frac{d\,y}{d\,x}$ на $-\frac{d\,x}{d\,y}$ дастъ дифференціальное уравненіе ортогональныхъ траекторій круговъ даннаго пучка, а такъ какъ получаемое такимъ образомъ уравненіе $2\,x\,y\,d\,y = (y^2 - x^2 + a^2)\,d\,x$ отличается отъ дифференціальнаго уравненія даннаго пучка только замѣною x на y и a^2 на $-a^2$, то безъ всякаго интегрированія находимъ, что искомыя ортогональныя траекторіи составляютъ другой пучекъ круговъ $x^2 + y^2 + a^2 = 2\,\lambda\,a\,x$. Оба пучка составляютъ основаніе такъ называемыхъ диполярныхъ координатъ (§ 413) $u = \frac{1}{2} \log \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}$, $v = \operatorname{arc} \cot \mu$.

c) Опредѣленіе ортогональныхъ траекторій какого угодно семейства круговъ приводится къ интегрированію уравненія Риккати. Положимъ, что координаты ξ, η центра и радіусъ a нѣкотораго круга будутъ три извѣстныя функціи отъ дуги s линіи центровъ. Обозначимъ черезъ φ уголъ между касательною къ этой линіи и осью x-овъ, а черезъ θ уголъ между нормалью къ этой же линіи и касательною къ траекторіи въ точкѣ (x, y) встрѣчи ея съ упомянутымъ кругомъ. Мы имѣемъ

$$x = \xi - a \sin(\theta + \varphi), \qquad y = \eta + a \cos(\theta + \varphi)$$

и, слѣдовательно,

$$\frac{dx}{ds} = \cos\varphi - \frac{da}{ds}\sin(\theta+\varphi) - a\left(\frac{d\theta}{ds} + \frac{1}{\varrho}\right)\cos(\theta+\varphi),$$

$$\frac{dy}{ds} = \sin\varphi + \frac{da}{ds}\cos(\theta+\varphi) - a\left(\frac{d\theta}{ds} + \frac{1}{\varrho}\right)\sin(\theta+\varphi).$$

Такъ какъ $-\frac{dx}{dy}$ должно быть равно $\operatorname{tg}(\theta+\varphi)$, то видимъ, что неизвѣстная функція θ должна удовлетворять дифференціальному уравненію

$$\frac{d\theta}{ds} + \frac{1}{\varrho} = \frac{\cos\theta}{a},$$

въ которыхъ ϱ, радіусъ кривизны линій центровъ есть извѣстная функція отъ s. Теперь достаточно будетъ принять за неизвѣстную функцію $t = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$, чтобы придти къ уравненію Риккати

$$\frac{dt}{ds} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{a}\right)t^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{a}\right) = 0.$$

Впрочемъ, для изученія свойствъ траекторіи знаніе общаго интеграла не необходимо. Воспользовавшись дифференціальнымъ уравненіемъ постольку, поскольку оно дастъ выраженіе производной θ' отъ θ по s черезъ извѣстныя функціи, мы можемъ предыдущія выраженія $\frac{dx}{ds}$ и $\frac{dy}{ds}$ написать такъ:

$$\frac{dx}{ds} = (\sin\theta - a')\sin(\theta+\varphi), \quad \frac{dy}{ds} = -(\sin\theta - a')\cos(\theta+\varphi).$$

Слѣдовательно, дифференціалъ дуги траекторіи $ds_1 = (\sin\theta - a')\,ds$, а такъ какъ уголъ смежности, очевидно, равенъ $d\theta + \frac{ds}{\varrho}$, то видно, что радіусъ кривизны опредѣляется формулою $\varrho_1 \cos\theta = a(\sin\theta - a')$. Въ частности, при $a' = 0$ (a — постоянная) находимъ обобщеніе извѣстнаго свойства трактрисы, а именно: *радіусъ кривизны въ каждой точкѣ ортогональной траекторіи семейства круговъ постояннаго радіуса лежитъ на соотвѣтствующей нормали къ линіи центровъ*. Далѣе, легко видѣть, что какъ только будетъ извѣстно выраженіе θ, какъ функціи отъ s, натуральное уравненіе траекторіи получится черезъ исключеніе s изъ уравненій

$$s_1 = \int \sin\theta\, ds, \qquad \varrho_1 = a\operatorname{tg}\theta.$$

Наконецъ (§ 626, f) при $a' = 1$ находимъ, что *центръ кривизны въ каждой точкѣ ортогональной траекторіи соприкасающихся круговъ данной кривой лежитъ на касательной къ этой кривой*.

d) Чтобы найти ортогональныя траекторіи семейства однофокусныхъ коническихъ сѣченій

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda} + \frac{y^2}{b^2-\lambda} = 1,$$

составимъ сперва съ помощью дифференцированія и исключенія параметра λ дифференціальное уравненіе этого семейства

$$(y\,dx - x\,dy)(x\,dx + y\,dy) + (a^2 - b^2)\,dx\,dy = 0.$$

Такъ какъ замѣна $\frac{dy}{dx}$ на $-\frac{dx}{dy}$ этого уравненія не мѣняетъ, то отсюда можно заключить, что искомыя траекторіи будутъ тѣ же коническія сѣченія. Это становится яснымъ, если замѣтимъ, что при данныхъ x и y изъ перваго уравненія получаются два значенія для λ. Одно изъ нихъ меньше b^2 и соотвѣтствуетъ эллипсу, другое, лежащее между b^2 и a^2 — гиперболѣ. Слѣдовательно, черезъ каждую точку на плоскости проходятъ, пересѣкаясь ортогонально, эллипсъ и гипербола, фокусы которыхъ лежатъ въ данныхъ точкахъ, и тѣ значенія λ, которыя характеризуютъ этотъ эллипсъ и эту гиперболу среди всего семейства коническихъ сѣченій съ тѣми же фокусами, будутъ эллиптическія координаты точки (см. § 770, o).

789. Поверхности. a) При изображеніи ограниченныхъ частей земной поверхности приходится разсматривать, такъ называемыя линіи уровня (Niveaulinien), т. е. сѣченія поверхности горизонтальными плоскостями. Уравненіе поверхности $F(x, y, z) = 0$ при всякомъ данномъ z изображаетъ проекцію линіи уровня на горизонтальную плоскость Oxy. Исключеніе z изъ уравненій $F = 0$ и $\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0$ даетъ дифференціальное уравненіе проекцій всѣхъ линій уровня. Ихъ огибающая — особенный интегралъ этого уравненія — даетъ такъ называемую линію тѣни (см. § 661), отбрасываемой поверхностью на горизонтальную плоскость для вертикальнаго пучка свѣтовыхъ лучей. Если, далѣе, замѣнимъ въ дифференціальномъ уравненіи линій уровня y' на $-\frac{1}{y'}$, то общій интегралъ новаго дифференціальнаго уравненія представитъ линіи наибольшаго паденія — ортогональныя траекторіи линій уровня[1]).

b) Опредѣленіе ортогональныхъ траекторій прямолинейныхъ образующихъ линейчатой поверхности всегда можетъ быть получено при помощи одной квадратуры. Мы допустимъ, что положеніе точки на линейчатой поверхности опредѣляется общепринятыми (§ 669) координатами u и v, такъ что

$$X = x + av, \quad Y = y + bv, \quad Z = z + cv,$$

гдѣ x, y, z, a, b, c зависятъ только отъ u. Обозначая черезъ $x', y', \ldots, c'$ производныя этихъ функцій, имѣемъ $dX = (x' + a'v)\,du + a\,dv$, и т. д. и условіе ортогональности $\Sigma a\,dX = 0$ обращается въ

$$(ax' + by' + cz')\,du + dv = 0.$$

Отсюда тотчасъ находимъ интегрированіемъ $v = -\int (ax' + by' + cz')\,du$. Найдя одну траекторію $v = f(u)$, найдемъ, что всѣ другія изображаются уравненіемъ $v = f(u) + \text{const.}$ и, слѣдовательно, двѣ какія угодно траекторіи опредѣляютъ на всѣхъ образующихъ одинаковые отрѣзки.

c) Для опредѣленія асимптотическихъ линій линейчатой поверхности беремъ уравненіе (§ 703)

$$(7) \qquad \mathfrak{A}\,du^2 + \mathfrak{B}\,dv^2 + 2\,\mathfrak{C}\,du\,dv = 0,$$

---

[1]) Объ изслѣдованіи этихъ и другихъ замѣчательныхъ линій см „Calcul différentiel“ Boussinesq'a, стр. 229 243.

въ которомъ

$$\mathfrak{A} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \end{vmatrix}, \quad \mathfrak{B} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \end{vmatrix}$$

$$\mathfrak{C} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \end{vmatrix}.$$

Здѣсь надо подставить вмѣсто x, y, z выраженія $X = x + av$, $Y = y + bv$, $Z = z + cv$, такъ что

$$\mathfrak{B} = 0, \quad \mathfrak{C} = \begin{vmatrix} a & a' & x' \\ b & b' & y' \\ c & c' & z' \end{vmatrix},$$

между тѣмъ, какъ $\mathfrak{A}$ будетъ квадратичною функціею отъ v, съ коэффиціентами, вообще, зависящими отъ u. Если поверхность развертывающаяся, то (§ 667) $\mathfrak{C} = 0$, и уравненіе (7) приводится къ $du^2 = 0$, т. е. оба семейства асимптотическихъ линій совпадаютъ въ одно, составляемое образующими ($u = \text{const.}$). Если поверхность не развертывающаяся, то $\mathfrak{C}$ не равно 0, и уравненіе (7) распадается на два: $du = 0$ — уравненіе образующихъ — и

$$(8) \qquad \frac{dv}{du} = v^2 \varphi(u) + v\chi(u) + \psi(u).$$

Слѣдовательно, опредѣленіе асимптотическихъ линій косой линейчатой поверхности приводится къ интегрированію уравненія Риккати. Отсюда слѣдуетъ (§ 785, i), что четыре какія угодно асимптотическія линіи пересѣкаютъ образующія въ четырехъ точкахъ, ангармоническое отношеніе которыхъ для всѣхъ образующихъ одно и то же [1]. Далѣе, достаточно знать двѣ асимптотическія линіи, чтобы найти всѣ другія съ помощью одной квадратуры, или одну — чтобы всѣ другія опредѣлились съ помощью двухъ квадратуръ.

d) Приведеніе вопроса къ двумъ квадратурамъ возможно всегда для линейчатыхъ поверхностей съ направляющею плоскостью, потому что

$$2\,\mathfrak{C}\,\varphi(u) = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$$

[1]) Геометрическое доказательство этой теоремы далъ A. Demoulin, въ журналѣ „Mathesis“ (1899, стр. 159).

обращается въ нуль тождественно и уравненіе (8) приводится къ линейному, которое интегрируется съ помощью двухъ квадратуръ (§ 785, е). Съ другой стороны, чтобы вышенаписанный опредѣлитель обратился въ нуль, достаточно, чтобы существовали три постоянныя (не равныя 0 одновременно) l, m, n, для которыхъ $la + mb + nc = 0$ тождественно, т. е. чтобы всѣ образующія были параллельны одной неподвижной плоскости. Можно также предвидѣть возможность интегрированія (8) съ помощью двухъ квадратуръ въ томъ случаѣ, когда дѣло идетъ о нахожденіи асимптотическихъ линій поверхности, образуемой главными нормалями нѣкоторой кривой, потому что эта кривая и есть одна изъ искомыхъ кривыхъ. Подставляя вмѣсто x, y, z выраженія $X = x + \lambda v$, $Y = y + \mu v$, $Z = z + \nu v$ и принимая во вниманіе формулы Френе (§ 636), найдемъ

$$\mathcal{A} = \frac{v}{\tau^2}\left(v\,\frac{d}{du}\,\frac{\tau}{\varrho} - \frac{d\tau}{du}\right), \qquad \mathcal{C} = \frac{1}{\tau}$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ уравненіе (8) принимаетъ крайне простой видъ

$$2\,\tau\, d\left(\frac{1}{v}\right) = \frac{d\tau}{v} - d\left(\frac{\tau}{\varrho}\right),$$

если оставимъ въ сторонѣ извѣстный a priori интегралъ $v = 0$. Отсюда слѣдуетъ $v = 2\sqrt{\tau} \Big/ \int \frac{1}{\sqrt{\tau}}\, d\,\frac{\tau}{\varrho}$, при чемъ подъ знакомъ корня условлено считать τ положительнымъ. Въ частности, если обозначимъ черезъ R произвольную постоянную длину, для кривыхъ съ постояннымъ крученіемъ получимъ $v = \frac{2R\varrho}{R + \varrho}$, для цилиндрическихъ винтовыхъ линій (§ 655, c) $v = \sqrt{R\tau}$, и общнѣе для всякой кривой Бертрана (§ 658) съ перемѣннымъ крученіемъ $\frac{1}{v} - \frac{1}{\sqrt{R\tau}} = \text{const}$. Эта постоянная не произвольна, а зависитъ отъ разсматриваемой кривой и для косого круга равна первой кривизнѣ его.

e) Чтобы опредѣлить геодезическія линіи косого геликоида (§ 655, b), примѣнимъ второй изъ указанныхъ въ § 705 пріемовъ. Такъ какъ косинусы направленія нормали къ поверхности пропорціональны числамъ ay, $-ax$, x^2+y^2, то должны имѣть

$$ay\,(dy\,d^2z - dz\,d^2y) - ax\,(dz\,d^2x - dx\,d^2z) + (x^2+y^2)\,(dx\,d^2y - dy\,d^2x) = 0,$$

т. е.

$$(9) \quad a\,(x\,dx + y\,dy)\,d^2z - a\,(x\,d^2x + y\,d^2y)\,dz + (x^2+y^2)\,(dx\,d^2y - dy\,d^2x) = 0$$

Между тѣмъ изъ равенства $x^2 + y^2 = r^2$, припоминая соотношеніе

$$dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2\,d\theta^2,$$

выводимъ

$$x\,dx + y\,dy = r\,dr, \qquad x\,d^2x + y\,d^2y = r\,d^2r - r^2\,d\theta^2$$

и, кромѣ того, какъ мы знаемъ (§ 558, c), имѣютъ мѣсто равенства

$$dx\,d^2y - dy\,d^2x = (r^2\,d\theta^2 + 2\,dr^2 - r\,d^2r)\,d\theta.$$

Слѣдовательно, уравненіе (9) преобразуется въ

$$r'' = \frac{2\,r r'^2}{r^2 + a^2} + r,$$

если оставимъ въ сторонѣ интегралъ $\theta = \text{const.}$, изображающій прямолинейныя образующія. Лѣвую часть можно написать въ видѣ $r' \frac{dr'}{dr}$, но естественнѣе взять за неизвѣстную функцію $u = r'^2$. Тогда получимъ уравненіе

$$\frac{du}{dr} = \frac{4ru}{r^2 + a^2} + 2r,$$

и извѣстно (§ 785, e), что это уравненіе можно интегрировать, полагая

$$u = ve^{\int \frac{4r\,dr}{r^2 + a^2}} = (r^2 + a^2)^2 v,$$

гдѣ новая неизвѣстная функція v должна удовлетворять уравненію $\frac{dv}{dr} = \frac{2r}{(r^2 + a^2)^2}$. Отсюда вытекаетъ

$$v = \frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2 + a^2}, \qquad u = \frac{1}{b^2}(r^2 + a^2)(r^2 + a^2 - b^2)$$

съ произвольною постоянною b. Наконецъ, получимъ

$$\pm(\theta - \theta_0) = \int \frac{b\,dr}{\sqrt{(r^2 + a^2)(r^2 + a^2 - b^2)}}.$$

Правая часть — эллиптическій интегралъ — вообще не выражается въ алгебраически-логариѳмическомъ видѣ. Но при $b = 0$ находимъ образующія ($\theta = \text{const.}$), а при $b = a$ другое интересное семейство геодезическихъ линій, которое легко выводится изъ уравненій линій кривизны (§ 707, b), такъ какъ тогда

$$\mp(\theta - \theta_0) = \int \frac{a\,dr}{r\sqrt{r^2 + a^2}} = \log \frac{\sqrt{r^2 + a^2} - a}{r}$$

и наконецъ

$$r = \frac{2a}{e^{\pm(\theta - \theta_0)} - e^{\mp(\theta - \theta_0)}}.$$

f) Въ заключеніе найдемъ **асимптотическія линіи** и **линіи кривизны поверхности Шерка** (Scherk)[1]

$$\sin\frac{z}{a} = \operatorname{sh}\frac{x}{a}\operatorname{sh}\frac{y}{a}.$$

Легкое вычисленіе даетъ

$$p\cos\frac{z}{a} = \operatorname{ch}\frac{x}{a}\operatorname{sh}\frac{y}{a}, \qquad q\cos\frac{z}{a} = \operatorname{sh}\frac{x}{a}\operatorname{ch}\frac{y}{a},$$

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2}\cdot\cos\frac{z}{a} = \operatorname{ch}\frac{x}{a}\operatorname{ch}\frac{y}{a}.$$

---

[1] Crelles Journal, 1834, стр. 200. Эту поверхность G. van der Mensbrugghe (Bulletin de l'Académie de Belgique, 2-ая серія, томъ XXI, стр. 552) изслѣдовалъ и построилъ опытнымъ путемъ.

Если введемъ гиперболическія амплитуды ξ и η отъ $\frac{x}{a}$ и $\frac{y}{a}$, такъ что (§ 409)

$$\operatorname{sh}\frac{x}{a} = \operatorname{tg}\xi, \quad \operatorname{ch}\frac{x}{a} = 1/\cos\xi, \quad \operatorname{th}\frac{x}{a} = \sin\xi \quad \text{и т. д.,}$$

то получимъ $\mathfrak{L} = \sin\eta$, $\mathfrak{M} = \sin\xi$, т. е. ξ и η измѣряютъ углы наклоненія осей y-овъ и (соотвѣтственно) x-овъ къ касательной плоскости. Если теперь еще примемъ во вниманіе, что

$$dx = \frac{a\,d\xi}{\cos\xi}, \quad dy = \frac{a\,d\eta}{\cos\eta},$$

то, на основаніи извѣстныхъ формулъ (§ 686), получимъ

$$H = 0, \quad K = -\frac{1}{a^2}\cos^2\xi\cos^2\eta\,.$$

Слѣдовательно, разсматриваемая поверхность принадлежитъ къ минимальнымъ поверхностямъ, и абсолютныя величины главныхъ радіусовъ кривизны равны $a\operatorname{ch}\frac{x}{a}\operatorname{ch}\frac{y}{a}$. Для опредѣленія линій кривизны удобно будетъ воспользоваться формулами Родрига (§ 698) и написать $\frac{dx}{d\mathfrak{L}} = \frac{dy}{d\mathfrak{M}}$, т. е. $d\xi^2 = d\eta^2$, откуда $\xi \pm \eta = \text{const}$. *Для* опредѣленія асимптотическихъ линій нужно прежде всего вычислить r, s, t. Изъ выраженій p и q тотчасъ выводимъ, дифференцируя первое по x, второе по y

$$r = \frac{1+p^2}{a}\operatorname{tg}\frac{z}{a}, \quad t = \frac{1+q^2}{a}\operatorname{tg}\frac{z}{a}\,.$$

Припоминая, что $H = 0$, находимъ

$$s = \frac{(1+q^2)\,r + (1+p^2)\,t}{2pq} = \frac{1+q^2}{pq}\,r = \frac{1+p^2}{pq}\,t\,.$$

Между тѣмъ имѣемъ

$$\frac{1+p^2}{\cos^2\xi} = \frac{pq}{\sin\xi\,\sin\eta} = \frac{1+q^2}{\cos^2\eta}\,,$$

и поэтому дифференціальное уравненіе асимптотическихъ линій будетъ (§ 703)

$$d\xi^2 + 2\cot\xi\cot\eta\,d\xi\,d\eta + d\eta^2 = 0\,.$$

Это уравненіе легко приводится къ уже разсмотрѣнному раньше (§ 786, f). Достаточно положить $u = \cos\eta$, $v = \cos\xi$, чтобы найти

$$(1-u^2)\,dv^2 + 2\,uv\,du\,dv + (1-v^2)\,du^2 = 0\,.$$

Общій интегралъ, слѣдовательно, будетъ

$$(1-u^2)\cos^2\alpha - 2\,uv\sin\alpha\cos\alpha + (1-v^2)\sin^2\alpha = 0\,,$$

т. е.

$$\sin\alpha\cos\xi + \cos\alpha\cos\eta = 1\,,$$

гдѣ a — произвольная постоянная. Особенный интегралъ $\cos(\xi \pm \eta) = 0$ изображаетъ одну изъ линій кривизны, которая въ проекціи на плоскость (xy) касается всѣхъ асимптотическихъ линій. Это линія касанія поверхности съ описаннымъ цилиндромъ, параллельнымъ Ox. Она состоитъ изъ безчисленнаго множества равныхъ кривыхъ, лежащихъ въ плоскостяхъ $\cos\frac{z}{a} = 0$. Всякая изъ этихъ кривыхъ (какъ и всякая другая, полученная въ сѣченіи плоскостью, перпендикулярною къ оси z-овъ) похожа на равностороннюю гиперболу. Такъ какъ въ данномъ случаѣ $\mathfrak{L} = \pm \cos\xi$, $\mathfrak{M} = \sin\xi$, то $d\xi$, очевидно, есть уголъ смежности; но по одной изъ раньше выведенныхъ формулъ, радіусъ кривизны равенъ

$$\varrho = \frac{a}{\sin\xi\cos\xi} = a(\operatorname{tg}\xi + \cot\xi),$$

такъ что для выраженія дуги имѣемъ $s = \int \varrho\, d\xi = a \log \operatorname{tg}\xi$, а слѣдовательно, $\varrho = a\left(e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}}\right)$. Итакъ, натуральное уравненіе разсматриваемой кривой подобно уравненію **цѣпной линіи равнаго сопротивленія** (§ 767, c).

Линейныя дифференціальныя уравненія.

790. Продолжаемъ теперь разсмотрѣніе дифференціальныхъ уравненій съ двумя перемѣнными и займемся спеціально такими, въ которыя неизвѣстная функція и ея производныя входятъ *линейно*, т. е. уравненіями вида

$$(10)\quad y^{(n)} + y^{(n-1)}f_1(x) + y^{(n-2)}f_2(x) + \cdots + y'f_{n-1}(x) + yf_n(x) = f(x).$$

Онѣ называются *линейными дифференціальными уравненіями*. Если $f(x) = 0$, то уравненіе называють *неполнымъ* (или также *уравненіемъ безъ послѣдняго члена*):

$$(11)\quad y^{(n)} + y^{(n-1)}f_1(x) + y^{(n-2)}f_2(x) + \cdots + y'f_{n-1}(x) + yf_n(x) = 0.$$

Это уравненіе (11), очевидно, обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что *всякое его рѣшеніе, т. е. всякая функція y, ему удовлетворяющая, будетъ ему удовлетворять и тогда, когда мы умножимъ это рѣшеніе на постоянное число*, а также и тѣмъ, что *ему удовлетворяетъ сумма конечнаго числа частныхъ рѣшеній, умноженныхъ на постоянныя числа*. Предпославъ вышесказанное, легко теперь доказать слѣдующую теорему: *Если $y_1, y_2, \ldots, y_n$ будутъ n линейно независимыхъ частныхъ рѣшеній неполнаго линейнаго уравненія n-го порядка, то общій интегралъ этого уравненія будетъ*

$$(12)\qquad y = a_1y_1 + a_2y_2 + \cdots + a_ny_n,$$

гдѣ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ произвольныя постоянныя.

[**Примѣчаніе.** Общій интегралъ линейнаго уравненія заключаетъ въ себѣ всѣ рѣшенія уравненія, чего нельзя сказать объ уравненіяхъ не-линейныхъ, могущихъ имѣть особенныя рѣшенія. Доказательство этой теоремы можно найти также, напримѣръ, въ „Курсѣ дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій" К. Поссе, 3-е изд. 1912, стр. 610].

Ограничимся для большей ясности случаемъ $n=3$ и положимъ, что u, v, w будутъ три линейно независимыя функціи, удовлетворяющія уравненію

$$y'''+y''\varphi(x)+y'\chi(x)+y\psi(x)=0 \tag{13}$$

Это значитъ, что имѣемъ три тождества

$$u'''+u''\varphi+u'\chi+u\psi=0,\quad v'''+v''\varphi+v'\chi+v\psi=0,\quad w'''+w''\varphi+w'\chi+w\psi=0.$$

Положимъ, что y есть какое нибудь другое, отличное отъ u, v, w рѣшеніе уравненія (13). Чтобы всѣ четыре соотношенія могли существовать одновременно, необходимо, чтобы эта функція y была связана съ u, v и w соотношеніемъ

$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' & y''' \\ u & u' & u'' & u''' \\ v & v' & v'' & v''' \\ w & w' & w'' & w''' \end{vmatrix} = 0,$$

а это требуетъ (§ 375), чтобы между четырьмя этими функціями существовало линейное соотношеніе. Въ это соотношеніе между y, u, v, w необходимо долженъ входить y, иначе, вопреки предположенію, u, v, w не были бы линейно независимы. Слѣдовательно, $y=au+bv+cw$, гдѣ a, b, c — постоянныя и притомъ произвольныя, такъ какъ по сдѣланному въ началѣ § замѣчанію написанное выраженіе y удовлетворитъ уравненію (11), каковы бы ни были значенія постоянныхъ a, b, c.

[**Примѣчаніе.** Ссылка на теорему § 375 въ данномъ случаѣ достаточна, потому что, если функціи y, u, v, w будутъ рѣшеніями линейнаго однороднаго дифференціальнаго уравненія съ непрерывными коэффиціентами, то указанный въ примѣчаніи XLIV (I часть, стр. 428) къ § 375 исключительный случай не можетъ имѣть мѣста. Для подробностей отсылаемъ читателя къ одному изъ тѣхъ курсовъ интегральнаго исчисленія, которые авторъ называетъ въ предисловіи къ своему курсу (I часть, стр. VII). Краткая глава, посвященная авторомъ дифференціальнымъ уравненіямъ никоимъ образомъ не можетъ считаться исчерпывающею этотъ обширный отдѣлъ интегральнаго исчисленія.]

791. Когда общій интегралъ уравненія (11) извѣстенъ, то общій интегралъ полнаго уравненія (10) можетъ быть выраженъ черезъ n квадратуръ, съ помощью пріема, который по Лагранжу называется измѣненіемъ произвольныхъ постоянныхъ. Попытаемся удовлетворить уравненію (10) тѣмъ же выраженіемъ (12), въ которомъ подъ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ будемъ понимать прилично выбранныя функціи отъ x. Возьмемъ опять для простоты уравненіе 3-го порядка

$$y''' + y''\varphi(x) + y'\chi(x) + y\psi(x) = f(x), \tag{14}$$

и положимъ, что извѣстны три независимыя частныя рѣшенія u, v, w соотвѣтствующаго неполнаго уравненія (13). Попробуемъ удовлетворить уравненію (14) выраженіемъ $y = au + bv + cw$, гдѣ a, b, c три неизвѣстныя функціи отъ x. Мы всегда можемъ подчинить ихъ двумъ условіямъ

$$a'u + b'v + c'w = 0, \quad a'u' + b'v' + c'w' = 0.$$

Подставимъ теперь выраженія y и его производныхъ

$$y' = au' + bv' + cw', \quad y'' = au'' + bv'' + cw'',$$
$$y''' = au''' + bv''' + cw''' + a'u'' + b'v'' + c'w''.$$

въ уравненіе (14); тогда найдемъ третье условіе, которому должны удовлетворять a, b, c, чтобы уравненіе (14) удовлетворялось, а именно:

$$a'u'' + b'v'' + c'w'' = f(x);$$

Слѣдовательно, a', b', c' опредѣляются изъ системы уравненій

$$\begin{aligned} a'u + b'v + c'w &= 0, \\ a'u' + b'v' + c'w' &= 0, \\ a'u'' + b'v'' + c'w'' &= f(x). \end{aligned}$$

Эта система имѣетъ одно опредѣленное рѣшеніе, потому что u, v, w независимы, а слѣдовательно, опредѣлитель системы

$$\begin{vmatrix} u & u' & u'' \\ v & v' & v'' \\ w & w' & w'' \end{vmatrix}$$

не равенъ нулю. Опредѣливъ такимъ образомъ a', b', c', мы найдемъ и a, b, c съ помощью простыхъ квадратуръ, а затѣмъ и y — общій интегралъ съ тремя произвольными постоянными (которыя входятъ въ квадратуры, выражающія a, b, c). Въ общемъ случаѣ, каждый изъ коэффиціентовъ a_i замѣнится нѣкоторою опредѣленною функціею отъ x, сложенною съ произвольною постоянною. Мы видимъ, слѣдовательно, что общій интегралъ уравненія (10) имѣетъ видъ

(15) $$y = y_0 + a_1 y_1 + a_2 y_2 + \cdots + a_n y_n,$$

гдѣ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — произвольныя постоянныя, а y_0 — нѣкоторая функція отъ x (очевидно, удовлетворяющая уравненію (10) при $a_1 = a_2 = \cdots = 0$). Можетъ случится, что будетъ извѣстно какое нибудь частное рѣшеніе y_0 полнаго уравненія (10). Тогда достаточно знать n независимыхъ частныхъ рѣшеній $y_1, y_2, \ldots, y_n$ неполнаго уравненія, чтобы получить общій интегралъ (15) полнаго уравненія, не прибѣгая къ методѣ Лагранжа. Дѣйствительно, если въ уравненіи (10) положимъ $y = y_0 + z$, то тотчасъ увидимъ, что z должно удовлетворять уравненію (11).

792. Теорема. Если извѣстны m линейно независимыхъ, частныхъ рѣшеній неполнаго линейнаго дифференціальнаго уравненія n-го порядка, то интегрированіе соотвѣтствующаго полнаго уравненія сводится къ интегрированію линейнаго уравненія $(n-m)$-го порядка и къ m слѣдующимъ затѣмъ квадратурамъ.

Дѣйствительно, пусть $y_1, y_2, \ldots, y_m$ будутъ рѣшенія уравненія (11) и

$$\alpha = \begin{vmatrix} y_1 & y_1' & y_1'' & \cdots & y_1^{(m-1)} \\ y_2 & y_2' & y_2'' & \cdots & y_2^{(m-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_m & y_m' & y_m'' & \cdots & y_m^{(m-1)} \end{vmatrix} \gtrless 0$$

ихъ опредѣлитель Вронскаго. Попытаемся, какъ и въ предыдущемъ §, удовлетворить уравненію (10) выраженіемъ $y = a_1 y_1 + a_2 y_2 + \cdots + a_m y_m$, подчинивъ производныя $a_1', a_2', \ldots, a_m'$ условію быть пропорціональными алгебраическимъ дополненіямъ послѣдняго столбца въ опредѣлителѣ α, такъ что, обозначая черезъ z коэффиціентъ пропорціональности, будемъ имѣть

$$\sum_1^m a_i' y_i = 0, \quad \sum_1^m a_i' y_i^{(\nu)} = 0 \; (\nu = 1, 2, \ldots, m-2), \quad \sum_1^m a_i' y_i^{(m-1)} = \alpha z.$$

Легко видѣть, что тогда производныя отъ y опредѣляются слѣдующими формулами

$$y^{(\nu)} = \sum_1^m a_i y_i^{(\nu)} \; (\text{для } \nu < m), \quad y^{(m)} = \sum_1^m a_i y_i^{(m)} + \alpha z,$$

$$y^{(\nu)} = \sum_1^m a_i y_i^{(\nu)} + \alpha z^{(\nu-m)} + \alpha_{1,\nu} z^{(\nu-m-1)} + \cdots + \alpha_{\nu-m,\nu} \; (\text{для } \nu > m).$$

Подставивъ эти выраженія въ (10) придемъ къ уравненію вида

$$a z^{(n-m)} + a_1 z^{(n-m-1)} + \cdots + a_{n-m} z = f(x).$$

Если будетъ извѣстенъ общій интегралъ этого линейнаго уравненія $(n-m)$-го порядка, то будутъ также извѣстны и m функцій a_i', откуда затѣмъ съ помощью m квадратуръ опредѣлятся и функціи a_i. Предыдущее доказательство есть естественное обобщеніе разсужденія въ § 791, соотвѣтствующаго предположенію $m = n$. При $m = n - 1$, припоминая сказанное о линейныхъ уравненіяхъ перваго порядка, получаемъ слѣдующій результатъ: Интегрированіе линейнаго уравненія n-го порядка, если извѣстны $n-1$ линейно независимыхъ рѣшеній соотвѣтствующаго неполнаго уравненія, приводится къ $n+1$ квадратурамъ.

793. Примѣры. a) Линейное уравненіе перваго порядка $y' + y\varphi(x) = f(x)$ всегда интегрируется въ квадратурахъ, потому что извѣстенъ общій интегралъ неполнаго уравненія $y' + y\varphi(x) = 0$, а именно $y = a e^{-\int \varphi\, dx}$. Метода Лагранжа даетъ $a' e^{-\int \varphi\, dx} = f(x)$, слѣдовательно,

$$a = \int e^{\int \varphi\, dx} f\, dx, \quad y = e^{-\int \varphi\, dx} \int e^{\int \varphi\, dx} f\, dx.$$

b) Уравненіе второго порядка $y'' + y'\varphi + y\psi = f$ интегрируется съ помощью трехъ квадратуръ, если извѣстна функція u, удовлетворяющая уравненію $u'' + u'\varphi + u\psi = 0$. Дѣйствительно, полагая $y = a u$, приходимъ къ уравненію $a''u + a'(2u' + \varphi) = f$. Это уравненіе перваго порядка относительно a', и a' получается изъ него съ помощью двухъ квадратуръ, а затѣмъ находимъ

$$y = u \int \frac{\int u e^{\int \varphi\, dx} \cdot f\, dx}{u^2 e^{\int \varphi\, dx}} dx.$$

c) Полезно замѣтить, что интегрированіе каждаго неполнаго линейнаго уравненія второго порядка приводится къ интегрированію уравненія Риккати и одной слѣдующей затѣмъ квадратурѣ. Дѣйствительно, подстановка $y = e^{\int z\, dx}$ приводитъ уравненіе

$$y'' + y'\varphi + y\psi = 0 \quad \text{въ} \quad z' + z^2 + z\varphi + \psi = 0.$$

Вслѣдствіе этого, свойства линейныхъ уравненій бросаютъ свѣтъ на уравненіе Риккати и обратно.

d) Съ помощью четырехъ квадратуръ интегрируется уравненіе (14), когда извѣстны двѣ независимыя функціи u и v, удовлетворяющія уравненію (13). Дѣйствительно, полагая $y = au + bv$, $a' = -vz$, $b' = uz$, $\alpha = uv' - vu'$, получимъ

$$y' = au' + bv', \quad y'' = au'' + bv'' + \alpha z, \quad y''' = au''' + bv''' + \alpha z' + 2\alpha' z.$$

Данное уравненіе преобразуется въ $az' + (2a' - a\varphi)z = f$, и съ помощью двухъ квадратуръ даетъ

$$z = \frac{\int a e^{\int \varphi dx} \cdot f dx}{a^2 e^{\int \varphi dx}};$$

Затѣмъ съ помощью двухъ другихъ квадратуръ получимъ и общій интегралъ даннаго уравненія $y = v\int uz\,dx - u\int vz\,dx$.

794. Уравненія съ постоянными коэффиціентами. Если коэффиціенты при неизвѣстной функціи и ея производныхъ въ уравненіи (10) числа постоянныя, то легко можно найти n линейно независимыхъ рѣшеній неполнаго уравненія (11), а затѣмъ, извѣстнымъ путемъ, съ помощью n квадратуръ составить и общій интегралъ полнаго уравненія. Дѣйствительно, попробуемъ удовлетворить уравненію (11) выраженіемъ $y = e^{kx}$; это уравненіе обращается (по сокращеніи на e^{kx}) въ условное уравненіе, опредѣляющее k — такъ называемое характеристическое уравненіе:

$$\varphi(k) = k^n + k^{n-1}f_1 + k^{n-2}f_2 + \cdots + kf_{n-1} + f_n = 0.$$

Если всѣ корни $k_1, k_2, \ldots, k_n$ уравненія $\varphi(k) = 0$ различны, то функціи $e^{k_1x}, e^{k_2x}, \ldots, e^{k_nx}$ будутъ линейно независимыя рѣшенія уравненія (11), потому что ихъ опредѣлитель Вронскаго равенъ произведенію e^{-xf_1} на (§ 27, d)

$$\begin{vmatrix} 1 & k_1 & k_1^2 & \ldots & k_1^{n-1} \\ 1 & k_2 & k_2^2 & \ldots & k_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & k_n & k_n^2 & \ldots & k_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{i=n-1} (k_{i+1} - k_i)(k_{i+2} - k_i)\ldots(k_n - k_i) \gtrless 0$$

Итакъ, общій интегралъ неполнаго уравненія выражается формулою

$$(16) \qquad y = a_1 e^{k_1x} + a_2 e^{k_2x} + \cdots + a_n e^{k_nx},$$

гдѣ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — произвольныя постоянныя. Теперь полагаемъ, что $a_1, a_2, \ldots, a_n$ такія функціи отъ x, производныя которыхъ $a_1', a_2', \ldots, a_n'$ опредѣляются системою

$$k_1^\nu a_1' e^{k_1x} + k_2^\nu a_2' e^{k_2x} + \cdots + k_n^\nu a_n' e^{k_nx} = \left| \begin{array}{l} 0 \text{ при } \nu = 0, 1, 2, \ldots, n-2, \\ f(x) \text{ при } \nu = n-1, \end{array} \right.$$

и, слѣдовательно, выражаются формулами

$$a_i' = \frac{e^{-k_ix} f(x)}{\varphi'(k_i)}.$$

Тогда метода Лагранжа даетъ общій интегралъ полнаго уравненія, въ видѣ

$$y=\frac{e^{k_1x}}{\varphi'(k_1)}\int e^{-k_1x}f(x)\,dx+\frac{e^{k_2x}}{\varphi'(k_2)}\int e^{-k_2x}f(x)\,dx+\cdots+\frac{e^{k_nx}}{\varphi'(k_n)}\int e^{-k_nx}f(x)dx.$$

Далѣе, если характеристическое уравненіе имѣетъ кратные корни, то число различныхъ частныхъ рѣшеній e^{kx} будетъ меньше порядка уравненія, и формула (16) уже не изображаетъ общаго интеграла неполнаго уравненія. Попробуемъ тогда удовлетворить этому уравненію выраженіемъ $y=x^\mu e^{kx}$. Лѣвая его часть приведется къ произведенію e^{kx} на

$$x^\mu\varphi(k)+\mu x^{\mu-1}\varphi'(k)+\frac{\mu(\mu-1)}{1\cdot 2}x^{\mu-2}\varphi''(k)+\cdots+\varphi^{(\mu)}(k).$$

Если a будетъ r — кратный корень, т. е. (§ 450, с) если

$$\varphi(a)=0,\quad \varphi'(a)=0,\quad \ldots,\quad \varphi^{(r-1)}(a)=0,$$

то предыдущее выраженіе обращается тождественно въ нуль при $k=a$ и для всякаго изъ значеній $0, 1, 2, \ldots, (r-1)$ числа μ. Поэтому, если характеристическое уравненіе имѣетъ корни a, β, ... соотвѣтственно кратности r, s, ..., то **общій интегралъ неполнаго уравненія имѣетъ форму**

$$y=(a_0+a_1x+\cdots+a_{r-1}x^{r-1})e^{ax}+(b_0+b_1x+\cdots+b_{s-1}x^{s-1})e^{\beta x}+\cdots,$$

гдѣ n постоянныхъ $a_0, a_1, \ldots, b_0, b_1, \ldots$ произвольны. Въ заключеніе упомянемъ, что обыкновенно коэффиціенты дифференціальнаго уравненія вещественны. Такъ какъ при этомъ желательно, чтобы и y представленъ былъ въ вещественномъ видѣ, то отъ мнимой формы стараются избавиться, замѣчая, что сумма $ae^{(a+i\beta)x}+be^{(a-i\beta)x}$, происходящая отъ каждой пары мнимыхъ сопряженныхъ корней (§ 447) можетъ быть представлена въ вещественномъ видѣ $(A\cos\beta x+B\sin\beta x)e^{ax}$, гдѣ постоянныя $A=a+b$ и $B=i(a-b)$ будутъ также вещественны.

795. Примѣры. а) Требуется проинтегрировать уравненіе $y''+y=f(x)$. Здѣсь характеристическое уравненіе $k^2+1=0$, поэтому e^{ix} и e^{-ix} — частныя рѣшенія неполнаго уравненія. Ихъ можно замѣнить, какъ было сказано, рѣшеніями $\sin x$ и $\cos x$. Общій интегралъ уравненія $y''+y=0$ будетъ $y=a\sin x+b\cos x$. Измѣненіе произвольныхъ постоянныхъ даетъ уравненіе

$$a'\sin x+b'\cos x=0,\qquad a'\cos x-b'\sin x=f(x),$$

изъ которыхъ выводимъ $a'=f(x)\cos x$, $b'=-f(x)\sin x$, и слѣдовательно,

$$y=\sin x\int f(x)\cos x\,dx-\cos x\int f(x)\sin x\,dx.$$

b) Интегрировать уравненіе $y''' = f(x)$. Характеристическое уравненіе имѣетъ тройной корень 0, и общій интегралъ уравненія $y''' = 0$ будетъ $y = a + bx + cx^2$, что можно было предвидѣть. Измѣненіе произвольныхъ постоянныхъ дастъ систему

$$a' + b'x + c'x^2 = 0, \quad b' + 2c'x = 0, \quad 2c' = f(x),$$

изъ которой находимъ $a' = \frac{1}{2}x^2 f(x)$, $b' = -xf(x)$, $c' = \frac{1}{2}f(x)$. Общій интегралъ уравненія $y''' = f(x)$ будетъ

$$y = \tfrac{1}{2}\int x^2 f(x)\,dx - x\int xf(x)\,dx + \tfrac{1}{2}x^2\int f(x)\,dx.$$

Впрочемъ, этотъ результатъ почти очевиденъ, потому что, полагая

$$\int f(x)\,dx = f_1(x), \qquad \int f_1(x)\,dx = f_2(x), \qquad \int f_2(x)\,dx = f_3(x),$$

интегрированіемъ по частямъ получимъ

$$\int xf(x)\,dx = xf_1(x) - f_2(x), \qquad \int x^2 f(x)\,dx = x^2 f_1(x) - 2xf_2(x) + 2f_3(x),$$

и выраженіе общаго интеграла будетъ $y = f_3(x)$.

c) Интегрировать уравненіе $y^{IV} + 2y''' + 2'' + 2y' + y = f(x)$. Корни характеристическаго уравненія будутъ -1, -1, i, $-i$. Общій интегралъ неполнаго уравненія будетъ поэтому $y = (a + bx)e^{-x} + \alpha\cos x + \beta\sin x$. По меѳодѣ Лагранжа вычисляется затѣмъ общій интегралъ даннаго уравненія

$$y = \tfrac{1}{2}(1 + x)e^{-x}\int e^x f(x)\,dx - \tfrac{1}{2}e^{-x}\int xe^x f(x)\,dx$$
$$-\tfrac{1}{2}\sin x\int f(x)\sin x\,dx - \tfrac{1}{2}\cos x\int f(x)\cos x\,dx.$$

Когда $f(x)$ задано и квадратуры выполнены, то интегралъ обыкновенно приводятъ къ виду (15), т. е. обнаруживаютъ частное рѣшеніе y_0, которое можно привести къ простѣйшему виду, отнимая отъ него всѣ слагаемыя, удовлетворяющія неполному уравненію. Напримѣръ, для $f(x) = e^{-x}$ найдемъ $y_0 = \frac{1}{4}x^2 e^{-x}$.

d) Интегрировать уравненіе $y = xy' + x^2 y''$. Пробуя удовлетворить этому уравненію выраженіемъ $y = x^n$, найдемъ, что n должно удовлетворять уравненію $1 = n + n(n-1)$, т. е. $n = \pm 1$. Слѣдовательно, общій интегралъ будетъ $y = ax + \dfrac{b}{x}$. Далѣе, если предложено уравненіе $y = xy' + x^2 y'' + f(x)$, то метода Лагранжа даетъ

$$y = \frac{1}{2}x\int f(x)\,d\,\frac{1}{x} + \frac{1}{2x}\int f(x)\,dx.$$

e) Чтобы проинтегрировать уравненіе $y + xy' + x^2 y'' = x$, положимъ, какъ въ предыдущемъ примѣрѣ, въ неполномъ уравненіи $y = x^n$, и найдемъ $n = \pm i$; а такъ какъ

$$x^{\pm i} = e^{\pm i\log x} = \cos\log x \pm i\sin\log x,$$

то $\cos\log x$ и $\sin\log x$ будутъ частныя рѣшенія неполнаго уравненія. Далѣе, частное рѣшеніе полнаго уравненія очевидно, а именно $\frac{1}{2}x$. Поэтому общій интегралъ даннаго уравненія будетъ

$$y = \tfrac{1}{2}x + a\sin\log x + b\cos\log x$$

f) Аналогичнымъ образомъ можно интегрировать уравненіе $x^2y'' - (2\mu-1)xy' + \mu^2 y = 0$. Полагая $y = x^n$ найдемъ для n одно только значеніе $n = \mu$; но одного частнаго рѣшенія x^μ достаточно (§ 793, b) для составленія общаго интеграла. Полагая $y = x^\mu z$, для опредѣленія z получимъ уравненіе $xz'' + z' = 0$, и отсюда найдемъ $z = a + b\log x$. Слѣдовательно, $y = x^\mu(a + b\log x)$. Къ тому же результату можно придти, измѣняя независимую перемѣнную. Положимъ $x = e^t$. Такъ какъ (§ 558, a)

$$y' = e^{-t}\frac{dy}{dt}, \quad y'' = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right),$$

то уравненіе обращается въ

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\mu\frac{dy}{dt} + \mu^2 y = 0.$$

Здѣсь коэффиціенты постоянные и характеристическое уравненіе имѣетъ двойной корень μ; слѣдовательно, общій интегралъ будетъ вида $(a+bt)e^{\mu t}$ и для даннаго уравненія получимъ $y = x^\mu(a + b\log x)$.

g) Подобнымъ же образомъ для интегрированія уравненія $(1-x^2)y'' - xy' + y = 0$ полагаемъ $x = \cos t$, такъ что

$$y' = -\frac{1}{\sin t}\frac{dy}{dt}, \qquad y'' = -\frac{\cot s}{\sin^3 t}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{\sin^2 t}\frac{d^2y}{dt^2}.$$

Данное уравненіе преобразуется въ $\dfrac{d^2y}{dt^2} + y = 0$ и имѣемъ частныя рѣшенія $\cos t = x$, $\sin t = \sqrt{1-x^2}$. Слѣдовательно, общій интегралъ $y = ax + b\sqrt{1-x^2}$.

h) Замѣну одной независимой перемѣнной другою часто дѣлаютъ съ цѣлью достигнуть того или другого упрощенія даннаго уравненія. Такъ напримѣръ, уравненіе $(1+x^2)y'' + xy' = \mu^2 y$ обращается, при замѣнѣ x новою перемѣнною t (пока произвольною), въ уравненіе

$$(1+x^2)t'^2\frac{d^2y}{dt^2} + \{(1+x^2)t'' + xt'\}\frac{dy}{dt} = \mu^2 y.$$

Здѣсь можно уничтожить членъ съ $\dfrac{dy}{dt}$, выбравъ t такъ, чтобы $\dfrac{t''}{t'} + \dfrac{x}{1+x^2} = 0$, т. е. взявъ $t' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, и слѣдовательно, $t = \displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \log(x + \sqrt{1+x^2})$.

При такой подстановкѣ данное уравненіе обращается въ $\dfrac{d^2y}{dt^2} = \mu^2 y$ и имѣетъ общій интегралъ $y = ae^{\mu t} + be^{-\mu t}$. Замѣчая, что $e^t = x + \sqrt{1+x^2}$, $e^{-t} = -x + \sqrt{1+x^2}$, найдемъ, что общій интегралъ даннаго уравненія будетъ

$$y = a(x + \sqrt{1+x^2})^\mu + b(-x + \sqrt{1+x^2})^\mu.$$

i) Чтобы интегрировать уравненіе, разсматриваемое Лежандромъ, $y = \frac{1}{2} y' + x y''$, положимъ $x = t^2$ и замѣтимъ, что

$$y' = \frac{1}{2t} \frac{dy}{dt}, \quad y'' = -\frac{1}{4t^3} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{4t^2} \frac{d^2 y}{dt^2}.$$

Уравненіе принимаетъ видъ $\frac{d^2 y}{dt^2} = 4y$ и даетъ общій интегралъ

$$y = a e^{2\sqrt{x}} + b e^{-2\sqrt{x}}.$$

Лепэжъ (Lepaige) замѣтилъ, что болѣе общее уравненіе $y = m y' + x y''$ интегрируется при безчисленномъ множествѣ значеній m. Дѣйствительно, подстановкою $y = e^{\int z\,dx}$ (§ 793, c) это уравненіе можно привести къ уравненію Риккати: $x(z' + z^2) + mz = 1$. Полагая $z = uv$ и опредѣляя v такъ, чтобы $xv' + mv = 0$ (чего и достигнемъ, взявъ $v = x^{-m}$), найдемъ, что u должно удовлетворять уравненію $xv(u' + vu^2) = 1$, т. е. $u' + u^2 x^{-m} = x^{m-1}$. Подстановка $x = t^{\mu}$ преобразуетъ послѣднее уравненіе въ слѣдующее:

$$\frac{du}{dt} + \mu u^2 t^{\mu(1-m)-1} = \mu t^{\mu m - 1},$$

далѣе $\left(\text{предполагая } m \gtrless 1 \text{ и полагая } \mu = \frac{1}{1-m}\right)$, получаемъ такое уравненіе

$$\frac{du}{dt} + \frac{u^2}{1-m} = \frac{t^n}{1-m}, \quad \text{гдѣ} \quad n = -\frac{1-2m}{1-m}, \quad \text{а потому} \quad \frac{n}{2n+4} = m - \frac{1}{2}.$$

Слѣдовательно, данное уравненіе интегрируется (§ 786, h) при значеніяхъ

$$m = \pm \tfrac{1}{2}, \ \pm \tfrac{3}{2}, \ \pm \tfrac{5}{2}, \ \pm \tfrac{7}{2}, \ \pm \tfrac{9}{2}, \ \ldots$$

j) Попытаемся интегрировать уравненіе не линейное

$$y'' + 3y' + 2(y - y^3) = 0,$$

слѣдуя пути, указанному Мансіономъ (Mansion). Положимъ $y' + y = z$, что преобразуетъ данное уравненіе въ $z' + 2z = 2y^3$. Пользуясь методой измѣненія произвольныхъ постоянныхъ, полагаемъ $y = ue^{-x}$, $z = ve^{-2x}$, гдѣ u и v должны удовлетворять условіямъ $u' = ve^{-x}$, $v' = 2u^3 e^{-x}$. Исключая x, получимъ $v\,dv = 2u^3\,du$, откуда $v^2 = u^4 - a^4$ (a — произвольная постоянная). Подставляя затѣмъ въ $u' = ve^{-x}$ вмѣсто v его выраженіе и интегрируя, находимъ

$$e^{-x} = \mp \int \frac{du}{\sqrt{u^4 - a^4}}.$$

Въ правой части эллиптическій интегралъ. Если бы мы умѣли выразить u, какъ функцію отъ x, то получили бы и общій интегралъ $y = ue^{-x}$. Во всякомъ случаѣ мы можемъ найти безчисленное множество частныхъ рѣшеній, взявъ $a = 0$. Тогда получается

$$e^{-x} = c \pm \frac{1}{u}, \quad y = \frac{\pm 1}{1 - ce^x}.$$

Аналогичнымъ образомъ можно трактовать болѣе общее уравненіе

$$y'' + (n+1)y' + n(y - y^{2n-1}) = 0$$

и найти его общій интегралъ въ явной, конечной формѣ, при всякомъ цѣломъ значеніи $\frac{1}{n}$. Напримѣръ, общій интегралъ уравненія $y^4 - y^3 y'' = 1$ $\left(\frac{1}{n} = -1\right)$ будетъ

$$y^2 = ae^{2x} + be^{-2x} + \sqrt{1 + 4ab}.$$

Это можно получить и другимъ путемъ (§ 785, d).

k) Приложеніе рядовъ весьма полезно при интегрированіи нѣкоторыхъ дифференціальныхъ уравненій. Напримѣръ, уравненіе $y'' + \frac{4}{x}y' + n^2 y = 0$, встрѣчающееся въ Механикѣ, интегрируется съ помощью ряда

$$f_\nu(x) = 1 - \frac{x^2}{2(\nu+1)} + \frac{x^4}{2\cdot 4\cdot(\nu+1)(\nu+3)} - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot(\nu+1)(\nu+3)(\nu+5)} + \dots.$$

Дѣйствительно, замѣчая, что $f_\nu''(x) + \frac{\nu}{x}f_\nu'(x) + f_\nu(x) = 0$ и полагая въ предложенномъ уравненіи $y = x^\mu f_\nu(nx)$, находимъ

$$f_\nu''(nx) + \frac{2\mu+4}{nx}f_\nu'(nx) + \left(1 + \frac{\mu(\mu+3)}{n^2x^2}\right)f_\nu(nx) = 0.$$

Это уравненіе можетъ совпадать съ предыдущимъ только при $\mu(\mu+3) = 0$, $\nu = 2\mu + 4$. Поэтому должно быть либо $\mu = 0$, $\nu = 4$, либо $\mu = -3$, $\nu = -2$. Слѣдовательно, искомый общій интегралъ будетъ $y = af_4(nx) + bx^{-3}f_{-2}(nx)$. Впрочемъ, функціи f_{-2} и f_4 очень просто могутъ быть выражены въ конечномъ видѣ. Для этого замѣтимъ, что $f_{\nu+2}(x) = -\frac{\nu+1}{x}f_\nu'(x)$. Между тѣмъ (§ 332, a) мы видимъ, что

$$f_0(x) = 1 - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \dots = \cos x.$$

Откуда слѣдуетъ

$$f_{-2}(x) = 1 + \int_0^x x\cos x\,dx = x\sin x + \cos x,$$

далѣе

$$f_2(x) = -\frac{1}{x}f_0'(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad f_4(x) = -\frac{3}{x}f_2'(x) = \frac{3\sin x}{x^3} - \frac{3\cos x}{x^2}.$$

Окончательно общій интегралъ можно написать въ слѣдующемъ видѣ:

$$y = \frac{a}{x^3}(\sin nx - nx\cos nx) + \frac{b}{x^3}(\cos nx + nx\sin nx).$$

l) Весьма важную роль играетъ гипергеометрическій рядъ [1])

$$f(\alpha,\beta,\gamma,x)=1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(1+\alpha)\cdot\beta(1+\beta)}{1\cdot2\cdot\gamma(1+\gamma)}x^2+\frac{\alpha(1+\alpha)(2+\alpha)\cdot\beta(1+\beta)(2+\beta)}{1\cdot2\cdot3\cdot\gamma(1+\gamma)(2+\gamma)}x^3+\cdots,$$

удовлетворяющій, какъ легко провѣрить, Гауссову дифференціальному уравненію

$$(x-x^2)y''+\{\gamma-(1+\alpha+\beta)x\}y'=\alpha\beta y.$$

Пробуя удовлетворить этому уравненію болѣе общимъ выраженіемъ $y=x^\mu f(\alpha',\beta',\gamma',x)$, найдемъ, что либо должно быть $\mu=0$, $\alpha'=\alpha$, $\beta'=\beta$, $\gamma'=\gamma$, либо $\mu=1-\gamma$, $\alpha'=1+\alpha-\gamma$, $\beta'=1+\beta-\gamma$, $\gamma'=2-\gamma$. Слѣдовательно, общій интегралъ будетъ

$$y=af(\alpha,\beta,\gamma,x)+bx^{1-\gamma}f(1+\alpha-\gamma,\ 1+\beta-\gamma,\ 2-\gamma,\ x).$$

Полезно знать, что гипергеометрическій рядъ заключаетъ въ себѣ, какъ частные случаи, многія извѣстныя разложенія. Такъ, напримѣръ, при $\beta=\gamma$ или $\alpha=\gamma=1$, или $\alpha=\beta=1$ и $\gamma=2$, находимъ разложенія функцій $(1-x)^{-\alpha}$, $e^{\beta x}$, $-\frac{1}{x}\log(1-x)$. Замѣтимъ въ заключеніе, что найденныя выше два частныхъ рѣшенія совпадутъ въ одно при $\gamma=1$; но извѣстно, что достаточно знать одно рѣшеніе, чтобы найти и общій интегралъ. Такъ, напримѣръ, при $\beta=1$ уравненіе будетъ

$$(x-x^2)y''+\{1-(2+\alpha)x\}y'=\alpha y,$$

и допускаетъ частное рѣшеніе $(1-x)^{-\alpha}$. Простое вычисленіе (§ 793, b) покажетъ, что общій интегралъ будетъ

$$y=a(1-x)^{-\alpha}+b\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1-x}{1+\alpha}+\frac{(1-x)^2}{2+\alpha}+\frac{(1-x)^3}{3+\alpha}+\cdots\right).$$

предполагая, конечно, что правая часть имѣетъ смыслъ.

[**Примѣчаніе** (Г. Эскамара. изъ итальянскаго изданія 1905 года). Въ противномъ случаѣ, т. е. при $\alpha=-n$, гдѣ $n=1,2,3,\ldots$, получимъ

$$y=(1-x)^n\left\{a+b\log\frac{x}{1-x}\right\}+b\left\{(1-x)^{n-1}+\frac{1}{2}(1-x)^{n-2}+\cdots+\frac{1}{n}\right\}$$

$$\left(\text{При } \alpha=0,\ y=a+b\log\frac{x}{1-x}\right).$$

Впрочемъ, затрудненія, встрѣтившагося при $\gamma=1$, можно избѣжать, замѣтивъ, что предложенное уравненіе не измѣнитъ своего вида при замѣнѣ γ на $1+\alpha+\beta-\gamma$, если при этомъ замѣнимъ x на $1-x$. Отсюда слѣдуетъ, что y можно писать также въ видѣ:

$$y=a(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}f(\gamma-\beta,\ \gamma-\alpha,\ 1-\alpha-\beta+\gamma,\ 1-x)+$$
$$+bf(\alpha,\ \beta,\ 1+\alpha+\beta-\gamma,\ 1-x),$$

а въ частномъ случаѣ $\beta=\gamma=1$

$$y=a(1-x)^{-\alpha}+bf(\alpha,\ 1,\ 1+\alpha,\ 1-x)].$$

---

[1]) См. Novi „Algebra superiore" стр. 286 или Jordan „Cours d'Analyse" т. I, стр. 154.

Уравненія со многими перемѣнными.

796. Уравненія съ полными дифференціалами (Totale Differentialgleichungen). Положимъ, что вмѣсто уравненія $udx + vdy = 0$ (разсмотрѣннаго выше), дано уравненіе

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz = 0, \tag{17}$$

въ которомъ u, v, w извѣстныя функціи отъ x, y, z. Если одну изъ трехъ перемѣнныхъ, напримѣръ z, будемъ разсматривать, какъ функцію отъ двухъ другихъ (независимыхъ), то уравненіе (17), очевидно, разлагается на слѣдующія два:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{u}{w}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{v}{w}, \tag{18}$$

откуда уже видно, что функціи u, v, w не вполнѣ произвольны. Дѣйствительно, такъ какъ

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}\frac{u}{w} + \frac{v}{w}\frac{\partial}{\partial z}\frac{u}{w}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{v}{w} + \frac{u}{w}\frac{\partial}{\partial z}\frac{v}{w},$$

т. е.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\frac{1}{w}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{u}{w^2}\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{v}{w^2}\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{uv}{w^3}\frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = -\frac{1}{w}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{v}{w^2}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{u}{w^2}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{uv}{w^3}\frac{\partial w}{\partial z},$$

то приравнивая одно другому эти выраженія (§ 368), найдемъ

$$u\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + v\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) + w\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0. \tag{19}$$

Это необходимое условіе для существованія зависимости между тремя перемѣнными x, y, z, полные дифференціалы которыхъ связаны соотношеніемъ (17). Чтобы показать, что условіе (19) въ то же время достаточно, мы покажемъ, что если оно выполнено, то интегрированіе уравненія (17) или равносильныхъ ему уравненій (18) возможно. Второе уравненіе (18) можно разсматривать, какъ обыкновенное дифференціальное уравненіе перваго порядка съ двумя перемѣнными y и z (принимая x за постоянную). Обозначая черезъ $\varphi(x)$ произвольную функцію отъ одного x, можно написать общій интегралъ этого уравненія въ видѣ

$$f(x, y, z) = \varphi(x), \tag{20}$$

такъ какъ, хотя x и разсматривается, какъ постоянная, но функціи u и v отъ него зависятъ, что и надо обозначить. Замѣтимъ теперь, что дифференцируя уравненіе (20) (при постоянномъ x), мы снова должны получить то дифференціальное уравненіе, интегрированіемъ котораго получилось (20). Отсюда получимъ (сравнивая два выраженія $\frac{\partial z}{\partial y}$)

$$\frac{1}{v}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{w}\frac{\partial f}{\partial z} = \mu,$$

гдѣ μ прилично выбранная функція отъ x, y, z. Если хотимъ, чтобы и первое уравненіе (18) удовлетворилось, то должны выбрать функцію $\varphi(x)$ такъ, чтобы при дифференцированіи (20) по x (при постоянномъ y) получилось бы

$$\varphi'(x) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \mu u. \tag{21}$$

А для этого необходимо (и достаточно), чтобы $\frac{\partial f}{\partial x} - \mu u$ была функціею одного x. Весь вопросъ сводится къ тому, чтобы показать, что при выполненіи условія (19), производная по y отъ $\frac{\partial f}{\partial x} - \mu u$ равна нулю, при чемъ z разсматривается, какъ функція отъ x и y, опредѣляемая уравненіемъ (20). Иными словами должно быть

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \mu u\right) - \frac{v}{w}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \mu u\right) = 0.$$

Но мы имѣетъ также

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \mu u\right) = \frac{\partial \mu v}{\partial x} - \frac{\partial \mu u}{\partial y}, \qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \mu u\right) = \frac{\partial \mu w}{\partial x} - \frac{\partial \mu u}{\partial z}.$$

Поэтому, если прибавимъ еще членъ

$$\frac{\partial \mu w}{\partial y} - \frac{\partial \mu v}{\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0,$$

умноженный на u, то послѣднее условіе приметъ видъ

$$u\left(\frac{\partial \mu w}{\partial y} - \frac{\partial \mu v}{\partial z}\right) + v\left(\frac{\partial \mu u}{\partial z} - \frac{\partial \mu w}{\partial x}\right) + w\left(\frac{\partial \mu v}{\partial x} - \frac{\partial \mu u}{\partial y}\right) = 0.$$

А это равенство тотчасъ приводится къ (19), потому что лѣвая его часть равна произведенію μ на лѣвую часть (19), сложенному съ выраженіемъ

$$u\left(w\frac{\partial \mu}{\partial y} - v\frac{\partial \mu}{\partial z}\right) + v\left(u\frac{\partial \mu}{\partial z} - w\frac{\partial \mu}{\partial x}\right) + w\left(v\frac{\partial \mu}{\partial x} - u\frac{\partial \mu}{\partial y}\right) = 0.$$

Если условіе (19) выполнено, то можно утверждать, что уравненіе (20), въ которомъ $\varphi(x)$ получается съ помощью квадратуры изъ (21), будетъ интеграломъ уравненія (17). Замѣтимъ въ заключеніе, что лѣвая часть уравненія (17), когда оно интегрируемо, дѣлается точнымъ дифференціаломъ (§ 741) по умноженіи на выбранную надлежащимъ образомъ функцію отъ x, y, z. А именно, если напишемъ уравненіе (20) въ видѣ $\Phi(x, y, z) = \text{const}$. (перенося всѣ не постоянные члены въ лѣвую часть), то будемъ имѣть

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \varphi'(x) = \mu u, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = \mu v, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z} = \mu w,$$

откуда $\mu(u\,dx + v\,dy + w\,dz) = d\Phi$. Геометрически разсмотрѣнный вопросъ сводится къ слѣдующему: дана нѣкоторая совокупность безконечнаго числа плоскостей (уравненія которыхъ получаются изъ одного при безчисленномъ множествѣ значеній одного независимаго параметра) (см. § 782) и требуется найти систему поверхностей, касающихся этихъ плоскостей въ назначенныхъ точкахъ. Изъ предыдущихъ изслѣдованій видно, что рѣшеніе этой задачи вообще невозможно. Причина этой невозможности заключается въ томъ, что ищутся поверхности (которыя могутъ и не существовать). Замѣтимъ, что, напротивъ того, существуетъ безчисленное множество кривыхъ линій, удовлетворяющихъ этимъ условіямъ, даже тогда, когда условіе (19) не выполнено. Дѣйствительно, исключеніе z изъ уравненій (17) и произвольной зависимости $\varphi(x, y, z) = 0$ приводитъ къ дифференціальному уравненію перваго порядка съ двумя перемѣнными, которое всегда имѣетъ безконечное множество рѣшеній, получаемыхъ изъ одного при безчисленномъ множествѣ значеній одного параметра (произвольной постоянной).

797. Обыкновенныя совокупныя дифференціальныя уравненія. Поставимъ теперь вопросъ, каковы должны быть соотношенія между тремя перемѣнными x, y, z для того, чтобы дифференціалы ихъ были пропорціональны извѣстнымъ функціямъ u, v, w отъ x, y, z:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}. \tag{22}$$

Геометрически это значитъ во всѣхъ точкахъ пространства a priori назначить направленія касательныхъ къ неизвѣстнымъ кривымъ. Исходя изъ этой точки зрѣнія, не трудно усмотрѣть (см. § 782), что существуетъ ∞^2 такихъ кривыхъ. Слѣдовательно, уравненія, составляющія интегральную систему уравненій (22), должны быть вида

$$F(x, y, z, a, b) = 0, \quad G(x, y, z, a, b) = 0, \tag{23}$$

гдѣ a и b произвольныя постоянныя. И въ самомъ дѣлѣ, уравненія (22) представляютъ не что иное, какъ два обыкновенныя дифференціальныя уравненія перваго порядка, которыя въ болѣе общей формѣ могутъ быть написаны слѣдующимъ образомъ:

$$f(x, y, z, y', z') = 0, \quad g(x, y, z, y', z') = 0. \tag{24}$$

Рѣшимъ эти уравненія относительно z и z': $z = \varphi(x, y, y')$, $z' = \psi(x, y, y')$. Приравнивая второе выраженіе производной перваго, получимъ соотношеніе между x, y, y', и y'', т. е. дифференціальное уравненіе 2-го порядка между двумя перемѣнными x и y. Интегрируя это уравненіе, получимъ выраженіе y черезъ x и двѣ произвольныя постоянныя a и b. Подставляя выраженія y и y' въ $z = \varphi(x, y, y')$, получимъ и выраженіе z черезъ x, a и b. Такимъ образомъ и будутъ проинтегрированы уравненія (24) или (22). Замѣтимъ далѣе, что уравненія (24) могутъ быть представлены въ видѣ (22), если рѣшимъ первыя относительно $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{dz}{dx}$. Подобнымъ же образомъ обстоитъ дѣло, когда предложены три обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненія перваго порядка съ 4-мя перемѣнными x, y, z, t. Представимъ себѣ эти уравненія рѣшенными относительно производныхъ x, y, z по t: $x' = u$, $y' = v$, $z' = w$, гдѣ u, v, w будутъ извѣстныя функціи отъ x, y, z, t. Выведемъ изъ перваго $y = \varphi(t, x, z, x')$ и подставимъ выраженія y и y' въ остальныя два; эти послѣднія примутъ видъ:

$$f(t, x, z, x', z', x'') = 0, \quad g(t, x, z, x', z') = 0.$$

Отсюда выведемъ выраженія $z = \psi(t, x, x', x'')$ и $z' = \chi(t, x, x', x'')$ и приравняемъ второе производной перваго. Полученное такимъ путемъ соотношеніе между t, x, x' x'', x''' будетъ обыкновенное дифференціальное уравненіе 3-го порядка, интегрированіемъ котораго найдемъ выраженіе x черезъ t и три произвольныя постоянныя. Подставляя найденное выраженіе x и его производныхъ въ $z = \psi(t, x, x', x'')$, а затѣмъ выраженіе x и z въ $y = \varphi(t, x, z, x')$, получимъ и выраженія z и y въ t и тѣхъ же трехъ произвольныхъ постоянныхъ. Вообще, если дана система n обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка съ $n+1$ перемѣнными:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dx_1}{u_1} = \frac{dx_2}{u_2} = \ldots = \frac{dx_n}{u_n},$$

то интегрированіе этой системы, путемъ исключенія $n-1$ перемѣнныхъ приводится къ интегрированію одного дифференціальнаго уравненія n-го порядка съ двумя перемѣнными, и такимъ образомъ система совокупныхъ интегральныхъ уравненій получается въ видѣ

$$F_i(x, x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n),$$

куда входятъ n произвольныхъ постоянныхъ. Благодаря присутствію этихъ постоянныхъ систему n функцій отъ одной независимой перемѣнной, которыя должны принимать заранѣе данныя значенія для даннаго значенія независимой перемѣнной можно опредѣлять системою n совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка.

798. Уравненія въ частныхъ производныхъ. Простѣйшее уравненіе въ частныхъ производныхъ (§ 781) есть то, которое связываетъ частныя производныя p и q неизвѣстной функціи z отъ двухъ независимыхъ перемѣнныхъ x и y съ этою функціею и независимыми перемѣнными. Мы остановимся здѣсь главнымъ образомъ на такихъ уравненіяхъ, въ которыя p и q входятъ линейно, и которыя поэтому и называются линейными. Ихъ общій видъ есть

$$up + vq = w, \tag{25}$$

гдѣ u, v, w извѣстныя функціи отъ x, y, z. Вопросъ о разысканіи всѣхъ функцій z, удовлетворяющихъ такому уравненію, геометрически сводится къ разысканію всѣхъ поверхностей, которыя въ каждой точкѣ (x, y, z) касаются прямой, проведенной черезъ эту точку въ направленіи (u, v, w), потому что уравненіе (25) можно разсматривать, какъ условіе перпендикулярности прямой даннаго направленія (u, v, w) съ нормалью $(p, q, -1)$ къ искомой поверхности (§ 659). Разсматривая вопросъ съ этой точки зрѣнія, не трудно видѣть, что всякая такая поверхность будетъ общимъ мѣстомъ кривыхъ нѣкотораго семейства, принадлежащаго къ дважды безконечной системѣ кривыхъ (23). Совокупность всѣхъ этихъ поверхностей должна, слѣдовательно, получиться, если установимъ нѣкоторую произвольную зависимость между постоянными a и b въ уравненіяхъ (23). Уравненіе всякой поверхности, удовлетворяющей уравненію (25) должно поэтому получиться черезъ исключеніе a и b изъ уравненій (23) и произвольнаго соотношенія $\omega(a, b) = 0$. Этотъ предугаданный результатъ тотчасъ подтвердится вычисленіемъ. Положимъ, что $f(x, y, z) = 0$ есть такое соотношеніе, которое опредѣляетъ z, какъ функцію отъ x и y, удовлетворяющую уравненію (25). Полагая въ (25) $p = -\frac{\partial f}{\partial x}\Big/\frac{\partial f}{\partial z}$, $q = -\frac{\partial f}{\partial y}\Big/\frac{\partial f}{\partial z}$, приводимъ уравненіе (25) къ виду

$$u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} + w\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \tag{26}$$

линейнаго и однороднаго уравненія, которое тотчасъ можно проинтегрировать, если извѣстна система интегральныхъ уравненій системы (22). Дѣйствительно, представимъ себѣ, что уравненія (23) рѣшены относительно постоянныхъ:

$$\varphi(x, y, z) = a, \quad \psi(x, y, z) - b. \tag{27}$$

Замѣтимъ, что функціи φ и ψ независимы одна отъ другой; иначе, задавъ опредѣленное значеніе для a мы не могли бы выбрать b по произволу. Теперь оказывается, что уравненіе (26) удовлетворяется, какъ при $f=\varphi$, такъ и при $f=\psi$, потому что, дифференцируя уравненія (27) и замѣняя dx, dy, dz пропорціональными имъ u, v, w, получаемъ

$$(28)\qquad u\frac{\partial\varphi}{\partial x}+v\frac{\partial\varphi}{\partial y}+w\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0,\quad u\frac{\partial\psi}{\partial x}+v\frac{\partial\psi}{\partial y}+w\frac{\partial\psi}{\partial z}=0.$$

Понимая теперь подъ f какую угодно функцію, удовлетворяющую условію (26), замѣчаемъ, что совмѣстность этого условія съ (28) требуетъ, чтобы

$$\frac{\partial(f,\varphi,\psi)}{\partial(x,y,z)}=0.$$

Слѣдовательно (§ 579), между f, φ и ψ должно существовать соотношеніе. Оно непремѣнно содержитъ въ себѣ f, иначе φ и ψ не были бы независимыми. Итакъ, $f=\omega(\varphi,\psi)$. Что касается ω, то это символъ совершенно произвольной функціи. Какъ бы мы ни выбирали ω, всегда будемъ имѣть

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\omega}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial x},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\omega}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{\partial\omega}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial z},$$

откуда

$$\sum u\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}\sum u\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\omega}{\partial\psi}\sum u\frac{\partial\psi}{\partial x}=0,$$

и уравненіе (26) удовлетворяется. Теперь мы и видимъ, что достаточно положить $\omega(\varphi,\psi)=0$, чтобы удовлетворить уравненію (25). Общнѣе, интегрированіе линейнаго уравненія съ n независимыми перемѣнными

$$(29)\qquad u_1\frac{\partial x}{\partial x_1}+u_2\frac{\partial x}{\partial x_2}+\cdots+u_n\frac{\partial x}{\partial x_n}=u,$$

сводится къ интегрированію линейнаго и однороднаго уравненія съ $n+1$ независимыми перемѣнными

$$(30)\qquad u_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+u_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\cdots+u_n\frac{\partial f}{\partial x_n}+u\frac{\partial f}{\partial x}=0,$$

а для интегрированія послѣдняго нужно интегрировать систему обыкновенныхъ совокупныхъ уравненій

$$\frac{dx}{u}=\frac{dx_1}{u_1}=\frac{dx_2}{u_2}=\cdots=\frac{dx_n}{u_n};$$

и представить интегральную систему въ видѣ

$$\varphi_i(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \text{const.} \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Самое общее рѣшеніе уравненія (30) будетъ $f = \omega(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$, а уравненіе (29) удовлетворится самымъ общимъ образомъ, если положимъ $\omega(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = 0$, гдѣ ω есть символъ произвольной функціи.

799. Полезно замѣтить, что, зная одно частное рѣшеніе $f = \varphi$ уравненія (26), можно упростить интегрированіе, сводя число независимыхъ перемѣнныхъ съ трехъ на двѣ. Такъ какъ φ заключаетъ въ себѣ по крайней мѣрѣ одну изъ перемѣнныхъ, то всегда можно предположить, что φ зависитъ отъ z, измѣняя, если понадобится, обозначеніе перемѣнныхъ; слѣдовательно, можно принять φ вмѣсто z за независимую перемѣнную. Заключая въ скобки частныя производныя, взятыя по новой системѣ независимыхъ перемѣнныхъ x, y, φ, получимъ

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

и уравненіе (26) приведется къ $u\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + v\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0$. Вопросъ приводится, слѣдовательно, къ интегрированію обыкновеннаго дифференціальнаго уравненія съ двумя перемѣнными: $y' = \chi(x, y, \varphi)$, въ которомъ φ трактуется, какъ постоянная. Общнѣе, если извѣстны ν независимыхъ частныхъ рѣшеній уравненія (30), т. е. ν функцій $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, удовлетворяющихъ уравненію (30), при чемъ ни одна изъ нихъ не есть функція другихъ, то можемъ преобразовать уравненіе (30) въ другое, подобное ему, съ $n - \nu + 1$ независимыми перемѣнными. Къ этому послѣднему приходимъ, принявъ за новыя независимыя перемѣнныя функціи $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, взамѣнъ нѣкоторыхъ ν прежнихъ.

800. Чтобы интегрировать, слѣдуя Лагранжу, какое угодно уравненіе въ частныхъ производныхъ перваго порядка съ двумя независимыми перемѣнными

$$(31) \qquad f(x, y, z, p, q) = 0,$$

ищемъ еще одно соотношеніе $g(x, y, z, p, q) = 0$, чтобы изъ него и даннаго (31) выразить p и q въ функціяхъ отъ x, y, z, и затѣмъ найти z интегрированіемъ уравненія $dz = p\,dx + q\,dy$ съ полными дифференціалами. Взявъ частныя производныя по x, y, z отъ $f = 0$ и $g = 0$ получимъ

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial z} = 0.$$

Исключимъ отсюда $\frac{\partial p}{\partial x}$ и $\frac{\partial q}{\partial y}$, и полученныя затѣмъ выраженія остальныхъ четырехъ производныхъ подставимъ въ уравненіе

$$\frac{\partial p}{\partial y}+q\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{\partial q}{\partial x}+p\frac{\partial q}{\partial z},$$

выражающее (§ 741) необходимое и достаточное условіе интегрируемости уравненія $dz=p\,dx+q\,dy$. Тогда получимъ уравненіе

$$(32)\quad \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial y}+\left(p\frac{\partial f}{\partial p}+q\frac{\partial f}{\partial q}\right)\frac{\partial g}{\partial z}=\left(\frac{\partial f}{\partial x}+p\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial g}{\partial p}+\left(\frac{\partial f}{\partial y}+q\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial g}{\partial q}.$$

Это линейное однородное уравненіе въ частныхъ производныхъ перваго порядка съ пятью независимыми перемѣнными (x, y, z, p, q). Его интегрированіе приводится, какъ мы видѣли (§ 798) къ интегрированію системы четырехъ обыкновенныхъ совокупныхъ уравненій перваго порядка. Впрочемъ, по важному замѣчанію Шарпитта (Charpit) достачно знать **одинъ лишь интегралъ** (рѣшеніе) **уравненія** (32) **съ одной произвольной постоянной**, чтобы затѣмъ, съ помощью интегрированія уравненія $dz=p\,dx+q\,dy$, получить **самое общее выраженіе функціи** $z=F(x,y,a,b)$, удовлетворяющее уравненію (31). При этомъ a и b разсматриваются, какъ постоянныя или какъ перемѣнныя, подчиненныя извѣстнымъ условіямъ. Положимъ, для большой ясности *), что уравненіе (31) приведено къ виду: $z=\Phi(x,y,p,q)$; пусть $G(x,y)$ какая нибудь функція, ему удовлетворяющая, такъ что тождественно будемъ имѣть $G=\Phi\left(x,y,\frac{\partial G}{\partial x},\frac{\partial G}{\partial y}\right)$. Съ другой стороны, опредѣлимъ a и b изъ уравненій

$$(33)\qquad \frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial G}{\partial x},\quad \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial G}{\partial y}.$$

Принимая во вниманіе, что предложенное уравненіе должно удовлетворяться независимо отъ a и b, когда положимъ $z=F(x,y,a,b)$, мы видимъ тотчасъ, что

$$F(x,y,a,b)=\Phi\left(x,y,\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y}\right)=\Phi\left(x,y,\frac{\partial G}{\partial x},\frac{\partial G}{\partial y}\right)=G(x,y).$$

Слѣдовательно, $F(x,y,a,b)$ заключаетъ въ себѣ всѣ возможныя функціи z, удовлетворяющія данному уравненію, и на этомъ основаніи называется **полнымъ интеграломъ** этого уравненія. Между тѣмъ, взявъ частныя производныя отъ тождества $F=G$, и принимая во вниманіе уравненіе (33), видимъ, что должно быть

$$(34)\qquad \frac{\partial F}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial y}=0.$$

---

*) Считая пока a и b постоянными.

Эти соотношенія, удовлетворяющіяся тождественно при a и b постоянныхъ, остаются справедливыми и въ томъ случаѣ, когда a и b будутъ надлежащимъ образомъ выбранныя функціи отъ x и y. Эти функціи будутъ либо независимы, либо въ произвольной зависимости одна отъ другой. Въ первомъ случаѣ опредѣлитель $\frac{\partial(a, b)}{\partial(x, y)}$ не равенъ нулю, а потому должно быть $\frac{\partial F}{\partial a}=0$, $\frac{\partial F}{\partial b}=0$, откуда для a и b получаются двѣ различныя функціи, подстановка которыхъ въ $z=F(x, y, a, b)$ даетъ такъ называемый *особенный интегралъ*. Во второмъ случаѣ, когда $b=\omega(a)$, гдѣ ω произвольная функція, уравненія (34) приводятся къ одному $\frac{\partial F}{\partial a}+\omega'(a)\frac{\partial F}{\partial b}=0$, и для a и b получимъ выраженія, въ составъ которыхъ входитъ символъ произвольной функціи. Подставляя ихъ въ $z=F(x, y, a, b)$ получимъ такъ называемый *общій* интегралъ даннаго уравненія [1].

---

[1]) Читателю, желающему ознакомиться подробнѣе съ этою важною теоріей и найти по ней упражненія, мы рекомендуемъ спеціальныя сочиненія Forsyth'a и Goursat.

ПРИБАВЛЕНІЕ

ПРИБАВЛЕНІЕ

Функція Вейерштрасса.

801. Функція, на которую мы указали въ концѣ § 282, имѣетъ слѣдующее выраженіе:

$$f(x) = \cos\pi x + b\cos\pi a x + b^2\cos\pi a^2 x + b^3\cos\pi a^3 x + \cdots$$

при нѣкоторыхъ, надлежащимъ образомъ выбранныхъ, a и b. Извѣстно, что при $|b| < 1$ этотъ рядъ равномѣрно сходящійся (§ 319) и, слѣдовательно, его сумма — непрерывная функція отъ x (§ 322). Мы покажемъ теперь, что, несмотря на непрерывность, $f(x)$ ни при какомъ значеніи x не имѣетъ производной. Сперва, фиксируя значеніе x, составимъ послѣдовательность такихъ цѣлыхъ (положительныхъ или отрицательныхъ) чиселъ α_0, α_1, α_2, ..., чтобы всѣ разности

$$x - \alpha_0,\quad ax - \alpha_1,\quad a^2x - \alpha_2,\quad a^3x - \alpha_3,\ \ldots$$

были больше $-\frac{1}{2}$ и не больше $\frac{1}{2}$; для этого достаточно взять $-\alpha_n = [\frac{1}{2} - a^n x]$. Положимъ теперь

$$x_n = \frac{\alpha_n - 1}{a^n},\quad x'_n = \frac{\alpha_n + 1}{a^n},$$

такъ что

$$\tfrac{1}{2} < a^n(x - x_n) \leqq \tfrac{3}{2},\quad \tfrac{1}{2} \leqq a^n(x'_n - x) < \tfrac{3}{2}.$$

Если $a \geqq 3$, то будемъ имѣть

$$x - x_{n+1} \leqq \frac{3}{2a^{n+1}} \leqq \frac{1}{2a^n} < x - x_n,$$

и поэтому

$$x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots,\quad \lim_{n=\infty} x_n = x.$$

Точно также

$$x_0' > x_1' > x_2' > x_3' > \cdots, \quad \lim_{n=\infty} x_n' = x.$$

Теперь разсмотримъ два отношенія приращеній

$$\frac{f(x)-f(x_n)}{x-x_n}, \quad \frac{f(x_n')-f(x)}{x_n'-x}.$$

Первое будетъ лѣвостороннее, второе правостороннее. Лѣвостороннее отношеніе приращеній

$$\frac{f(x)-f(x_n)}{x-x_n} = \sum_0^\infty b^\nu \frac{\cos(\pi a^\nu x) - \cos(\pi a^\nu x_n)}{x-x_n}.$$

разлагается на слагаемыя

$$(1) \quad \sum_0^{n-1} (ab)^\nu \frac{\cos(\pi a^\nu x) - \cos(\pi a^\nu x_n)}{a^\nu (x-x_n)} + \sum_0^\infty b^{n+\nu} \frac{\cos(\pi a^{n+\nu} x) - \cos(\pi a^{n+\nu} x_n)}{x-x_n}.$$

Относительно первой суммы замѣтимъ, что

$$\frac{\cos(\pi a^\nu x) - \cos(\pi a^\nu x_n)}{a^\nu (x-x_n)} = -\pi \sin\left(\pi a^\nu \frac{x+x_n}{2}\right) \frac{\sin\left(\pi a^\nu \frac{x-x_n}{2}\right)}{\pi a^\nu \frac{x-x_n}{2}}.$$

Такъ какъ абсолютныя величины $\sin x$ и $\frac{\sin x}{x}$ не больше 1, то абсолютная величина послѣдняго выраженія не больше π. Отсюда слѣдуетъ, если предположимъ $b>0$, что первая изъ суммъ въ (1) по абсолютной величинѣ будетъ меньше, чѣмъ

$$\pi \sum_0^{n-1} (ab)^\nu = \pi \frac{(ab)^n - 1}{ab-1} < \frac{\pi}{ab-1}(ab)^n.$$

Слѣдовательно, ее можно представить въ видѣ $\frac{\pi\theta}{ab-1}(ab)^n$, гдѣ θ содержится между -1 и $+1$. Что касается второй суммы въ формулѣ (1), то замѣтимъ, что

$$\cos(\pi a^{n+\nu} x) - \cos(\pi a^{n+\nu} x_n)$$
$$= -\cos(\pi a^{n+\nu} x_n)\{1-\cos(\pi a^{n+\nu}(x-x_n))\} - \sin(\pi a^{n+\nu} x_n)\sin(\pi a^{n+\nu}(x-x_n)).$$

Предполагая теперь, что a нечетное цѣлое число, мы видимъ, что дуга

$$\pi a^{n+\nu} x_n = \pi a^\nu \cdot a^n x_n = \pi a^\nu (\alpha_n - 1)$$

есть кратное отъ π и при томъ четное или нечетное, смотря по тому, будетъ ли α_n нечетное или четное число. Отсюда слѣдуетъ, что

$$\cos(\pi a^{n+\nu} x_n) = -(-1)^{\alpha_n}, \quad \sin(\pi a^{n+\nu} x_n) = 0,$$

$$\cos(\pi a^{n+\nu} x) - \cos(\pi a^{n+\nu} x_n) = (-1)^{\alpha_n} \{1 - \cos(\pi a^{n+\nu}(x - x_n))\}.$$

Поэтому разсматриваемая сумма приводится къ

$$(2) \qquad (-1)^{\alpha_n} (ab)^n \sum_0^\infty b^\nu \frac{1 - \cos(\pi a^{n+\nu}(x - x_n))}{a^n (x - x_n)}.$$

Всѣ члены подъ знакомъ суммы положительны или равны нулю. Первый членъ равенъ

$$\frac{1 - \cos(\pi a^n (x - x_n))}{a^n (x - x_n)}.$$

Дуга $\pi a^n (x - x_n) > \frac{1}{2}\pi$, и $\leqq \frac{3}{2}\pi$. Ея косинусъ, слѣдовательно, меньше нуля или равенъ нулю, поэтому разсматриваемый членъ, въ которомъ числитель не меньше 1, а знаменатель не больше $\frac{3}{2}$, будетъ не меньше $\frac{2}{3}$. А вся сумма въ формулѣ (2) поэтому навѣрно больше $\frac{2}{3}$. Отсюда заключаемъ, что выраженіе (2) можно представить въ видѣ $(-1)^{\alpha_n} \cdot \frac{2}{3} k (ab)^n$, гдѣ $k > 1$. Итакъ, будемъ имѣть

$$\frac{f(x) - f(x_n)}{x - x_n} = (-1)^{\alpha_n} (ab)^n \left(\frac{2k}{3} + \frac{\pi\theta}{ab-1}\right).$$

Выраженіе въ скобкахъ всегда больше, чѣмъ

$$\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{ab - \left(1 + \frac{3}{2}\pi\right)}{ab - 1},$$

и будетъ поэтому положительнымъ при $ab \geqq 1 + \frac{3}{2}\pi$. Съ другой стороны, извѣстно, что $(ab)^n$ съ возрастаніемъ n превзойдетъ всякое данное число. Итакъ, лѣвостороннеее отношеніе приращеній возрастаетъ безпредѣльно, когда независимая перемѣнная стремится къ предѣлу x проходя послѣдовательность значеній $x_0, x_1, x_2, \ldots$. Совершенно подобное же вычисленіе даетъ

$$\frac{f(x_n') - f(x)}{x_n' - x} = -(-1)^{\alpha_n} (ab)^n \left(\frac{2k'}{3} + \frac{\pi\theta'}{ab-1}\right),$$

гдѣ $k' > 1$, а θ' лежитъ между -1 и $+1$. Поэтому правостороннее отношеніе тоже безпредѣльно растетъ по абсолютной величинѣ, но при всякомъ значеніи n имѣемъ знакъ, противоположный знаку лѣвосторонняго отношенія, когда независимая перемѣнная стремится къ тому же предѣлу x, проходя послѣдовательность значеній $x_0', x_1', x_2', \ldots$.

Кромѣ того Винеръ (Wiener)[1]) доказалъ, что можно составить и другія послѣдовательности, для которыхъ отношенія приращеній будутъ стремиться къ произвольно заданнымъ предѣламъ. Винеръ воспользовался также функціей Вейерштрасса, чтобы показать (см. § 692, b), что поверхность, не будучи линейчатой, можетъ быть развертывающеюся. Разумѣется, матеріально такую поверхность нельзя осуществить, потому что у нея нѣтъ касательной плоскости ни въ одной точкѣ[2]).

Нѣкоторыя свѣдѣнія объ исчисленіи конечныхъ разностей.

802. Когда дана нѣкоторая послѣдовательность чиселъ $u_0, u_1, u_2, \ldots$, то конечною разностью или просто разностью какого нибудь члена называютъ то число, которое надо съ нимъ сложить, чтобы получить слѣдующій членъ. Составленіе разностей членовъ нѣкоторой послѣдовательности есть операція, обозначаемая символомъ Δ:

$$\Delta u_p = u_{p+1} - u_p .$$

Простой переходъ отъ одного члена къ слѣдующему (замѣна одного другимъ) можетъ быть также разсматриваема, какъ нѣкоторая операціи ∇ такого рода, что

$$\nabla u_p = u_{p+1} .$$

Правая часть есть не что иное, какъ $u_p + \Delta u_p$ и потому можно сказать, что операціи Δ и ∇ находятся между собою въ символической зависимости $\nabla = 1 + \Delta$. Если же въ выраженіи Δu_p замѣнимъ u_{p+1} черезъ ∇u_p, то получимъ $\Delta = \nabla - 1$.

803. Мы покажемъ теперь, что знаки операціи Δ и ∇ подчиняются алгебраическому вычисленію, по правиламъ, изложеннымъ въ § 350. Сперва замѣтимъ, что какъ p — кратное примѣненіе операціи Δ надъ u_q, такъ и q — кратное ея примѣненіе къ u_p, даютъ u_{p+q}, такъ что имѣемъ

$$\nabla^p u_q = \nabla^q u_p = u_{p+q} ,$$

---

[1]) „Crelle's Journal". 1881. Стр. 221.

[2]) „Lehrbuch der darstellenden Geometrie". Томъ II, Стр. 33.

или, подставляя $\nabla^{\nu} u_0$ вмѣсто u_ν,

$$\nabla^p \cdot \nabla^q = \nabla^q \cdot \nabla^p = \nabla^{p+q}.$$

Далѣе, замѣтимъ, что операціи Δ и ∇ могутъ быть переставляемы, потому что $\nabla \Delta u_p$ изображаетъ членъ, слѣдующій за Δu_p въ послѣдовательности Δu_0, Δu_1, Δu_2, ..., т. е. Δu_{p+1}, вмѣсто котораго, очевидно, можно писать $\Delta \nabla u_p$. Итакъ, $\nabla \Delta = \Delta \nabla$. Отсюда слѣдуетъ, что рядъ операцій Δ и ∇, можно производить въ какомъ угодно порядкѣ. Далѣе, такъ какъ разность суммы, очевидно, равна суммѣ разностей слагаемыхъ членовъ, то

$$\begin{aligned}\Delta^2 &= \Delta(\nabla - 1) = \Delta\nabla - \Delta = \nabla\Delta - \Delta \\ &= \nabla(\nabla - 1) - (\nabla - 1) = (\nabla - 1)^2.\end{aligned}$$

Общнѣе, допустивъ, что

$$\Delta^p = (\nabla - 1)^p,$$

получимъ

$$\Delta^{p+1} = \Delta(\nabla - 1)^p = (\nabla - 1)^p \Delta = (\nabla - 1)^{p+1},$$

такъ что вышеуказанная формула справедлива при всякомъ p. Отсюда вытекаетъ, что для выраженія p-ой разности перваго члена послѣдовательности u_0, u_1, u_2, ..., имѣемъ

$$\Delta^p u_0 = u_p - \frac{p}{1} u_{p-1} + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} u_{p-2} - \cdots \pm u_0. \tag{1}$$

Для любого другого члена имѣемъ

$$\Delta^p u_q = \Delta^p \nabla^q u_0 = \nabla^q \Delta^p u_0 = \nabla^q (\nabla - 1)^p u_0,$$

т. е.

$$\Delta^p u_q = u_{p+q} - \frac{p}{1} u_{p+q-1} + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} u_{p+q-2} - \cdots \pm u_q.$$

Если, наоборотъ, желаемъ возстановить самую послѣдовательность, зная послѣдовательныя разности перваго члена, то надо примѣнить формулу $\nabla^p = (1 + \Delta)^p$, которая даетъ

$$u_p = u_0 + \frac{p}{1} \Delta u_0 + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} \Delta^2 u_0 + \cdots + \Delta^p u_0. \tag{2}$$

804. Разности отъ 0^q. Такъ называютъ для краткости послѣдовательныя разности перваго члена послѣдовательности чиселъ 0^q, 1^q, 2^q, 3^q, ... На основаніи формулы (1) имѣемъ

$$\Delta^p 0^q = p^q - \frac{p}{1}(p-1)^q + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2}(p-2)^q - \cdots \pm p.$$ (3)

Составляя, напримѣръ, разности кубовъ, получаемъ слѣдующую таблицу чиселъ:

0 1 8 27 64 125 216 343 512 729 1000 . . .
1 7 19 37 61 91 127 169 217 271 . . .
6 12 18 24 30 36 42 48 54 . . .
6 6 6 6 6 6 6 6 . . .
. . . .

Какъ видимъ, четвертыя разности всѣхъ членовъ послѣдовательности равны нулю. Мы вскорѣ увидимъ, что это лишь частный случай одной общей теоремы, которая даетъ возможность обратно возстановить первоначальную послѣдовательность путемъ простого сложенія *). Это полезно на практикѣ при составленіи таблицъ квадратовъ и кубовъ. Возвратимся къ формулѣ (3) и выведемъ изъ нея простой способъ быстро вычислять разности отъ 0^q. Замѣнивъ p на $p-1$ и складывая получаемую формулу съ (3), найдемъ

$$\Delta^p 0^q + \Delta^{p-1} 0^q = p^q - \frac{p-1}{1}(p-1)^q + \frac{(p-1)(p-2)}{1\cdot 2}(p-2)^q - \cdots \pm 1.$$

Между тѣмъ правая часть, умноженная на p, даетъ

$$p^{q+1} - \frac{p}{1}(p-1)^{q+1} + \frac{p(p-1)}{1\cdot 2}(p-2)^{q+1} - \cdots \pm p = \Delta^p 0^{q+1}.$$

Слѣдовательно, имѣемъ

$$\Delta^p 0^{q+1} = p(\Delta^p 0^q + \Delta^{p-1} 0^q). \tag{4}$$

Примѣняя эту формулу, весьма легко составить слѣдующую таблицу:

	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5	Δ^6	Δ^7	Δ^8
0^1	1							
0^2	1	2						
0^3	1	6	6					
0^4	1	14	36	24				
0^5	1	30	150	240	120			
0^6	1	62	540	1560	1800	720		
0^7	1	126	1806	8400	16800	15120	5040	
0^8	1	254	5796	40824	126000	191520	141120	40320
	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

*) См. формулу (5) § 806, гдѣ $y^{(\nu)} = 0$ при $\nu = p,\ p+1,\ p+2, \ldots,$ если y — цѣлая функція степени $< p$.

Элементы второго столбца получаются слѣдующимъ образомъ: начиная съ 2, прибавивъ это число къ 1 и удвоивъ сумму, получаемъ 6; прибавивъ 6 къ 1 и удвоивъ сумму, получимъ 14; $(14+1)2=30$ и т. д. Для составленія 3-го столбца поступаемъ аналогично, а именно: прибавляемъ первое число столбца къ стоящему отъ него слѣва числу предыдущаго столбца и сумму утраиваемъ и т. д. Такъ, напримѣръ, начиная съ 6, получаемъ $(6+6)\cdot 3=36$; далѣе $(36+14)\cdot 3=150$ и т. д.*) Таблицу, составленную такимъ образомъ, полезно имѣть передъ собою, когда надо вычислять разности отъ 0^q, что встрѣчается во многихъ интересныхъ вопросахъ Анализа.

805. Полезно также замѣтить нѣкоторыя свойства, которыя легко выводятся изъ (4). Прежде всего, $\Delta^p 0^q = 0$, когда $p > q$. Дѣйствительно, допуская, что это справедливо для нѣкотораго значенія q (а это очевидно при $q=1$), изъ формулы (4) тотчасъ увидимъ, что это будетъ справедливо и при замѣнѣ q на $q+1$. Изъ той же формулы вытекаетъ, если положимъ $q=p-1$, что $\Delta^p 0^p = p!$ Наконецъ, замѣтимъ, что $\Delta^p 0^q$ всегда дѣлится на p! Въ самомъ дѣлѣ, напишемъ формулу (4) слѣдующимъ образомъ:

$$\Delta^p 0^q = p\,\Delta^{p-1} 0^{q-1} + p\,\Delta^p 0^{q-1}$$

и примѣнимъ эту формулу нѣсколько разъ ко второму члену правой части. Тогда получимъ

$$\Delta^p 0^q = p\,\Delta^{p-1} 0^{q-1} + p^2 \Delta^{p-1} 0^{q-2} + \cdots + p^{q-p+1} \Delta^{p-1} 0^{p-1}.$$

Слѣдовательно, $\Delta^p 0^q$ дѣлится на p; а такъ какъ во второй части входятъ только $(p-1)$-ыя разности, то можно сказать, что $\Delta^p 0^q$ дѣлится на $p(p-1)$. Отсюда слѣдуетъ, что каждый членъ второй части дѣлится на $p(p-1)(p-2)$, а потому и $\Delta^p 0^q$ дѣлится на $p(p-1)(p-2)$ и т. д. Такимъ путемъ съ помощью цѣпи послѣдовательныхъ заключеній ясно увидимъ, что $\Delta^p 0^q$ дѣлится на $p!$, каково бы ни было q.

806. Разности функцій. Положимъ теперь, что составлена послѣдовательность значеній $f(x)$, $f(x+h)$, $f(x+2h)$, ... нѣкоторой функціи y. Разность p-го порядка (p-ая разность) перваго числа, по формулѣ (1), будетъ

$$\Delta^p y = f(x+ph) - \frac{p}{1} f(x+(p-1)h) + \frac{p(p-1)}{1\cdot 2} f(x+(p-2)h) - \cdots \pm f(x).$$

Если разложимъ каждый членъ правой части по формулѣ Тэйлора, то найдемъ, что коэффиціентъ при h^ν будетъ

$$\frac{y^{(\nu)}}{\nu!}\left(p^\nu - \frac{p}{1}(p-1)^\nu + \frac{p(p-1)}{1\cdot 2}(p-2)^\nu - \cdots \pm p\right) = \frac{y^{(\nu)}}{\nu!}\Delta^p 0^\nu.$$

---

*) Первое число каждаго столбца равно первому числу предыдущаго, умноженному на p, гдѣ p номеръ столбца.

напримѣръ, имѣть $\Delta^4 0^7$, то нужно замѣтить, что разложенія 7 на четыре цѣлыя слагамыя будуть

$$1+1+1+4,\qquad 1+1+2+3,\qquad 1+2+2+2.$$

Первое и третье считается по четыре раза, а второе 12 разъ. Слѣдовательно,

$$\Delta^4 0^7 = 7!\left(\frac{4}{4!}+\frac{12}{2!\,3!}+\frac{4}{2!\,2!\,2!}\right)=8400.$$

b) Для функціи $y=\frac{1}{x}$ получаемъ

$$\Delta y = -\frac{1}{x}+\frac{1}{x+h} = -\frac{h}{x(x+h)},$$

$$\Delta^2 y = \frac{h}{x(x+h)} - \frac{h}{(x+h)(x+2h)} = \frac{2h^2}{x(x+h)(x+2h)},\ \ldots$$

и вообще

$$\Delta^p y = \frac{(-1)^p p!\,h^p}{x(x+h)(x+2h)\cdots(x+ph)}.$$

Положивъ $h=-1$ и замѣнивъ x на $\frac{1}{x}$ въ формулѣ (5), получимъ

$$\frac{1}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-px)} = \frac{1}{p!}\left(\Delta^p 0^p + x\,\Delta^p 0^{p+1} + x^2\,\Delta^p 0^{p+2}+\cdots\right).$$

Разлагая каждый множитель лѣвой части въ рядъ (геометрическую прогрессію) и представляя себѣ умноженіе выполненнымъ, легко найдемъ, что $\frac{\Delta^q 0^{p+q}}{p!}$ — равна суммѣ всѣхъ произведеній изъ q цѣлыхъ положительныхъ чиселъ, равныхъ или неравныхъ, не превосходящихъ p. Такимъ образомъ становится очевиднымъ доказанное въ концѣ § 805 свойство.

c) Объясненное въ § 802 обозначеніе позволяетъ воспользоваться символическимъ вычисленіемъ (§ 350), такъ что различные результаты получаются весьма легко. Замѣтимъ, что

$$u_0+u_1x+u_2x^2+\cdots = (1+xV+x^2V^2+\cdots)\,u_0,$$

и преобразуемъ выраженіе въ скобкахъ въ

$$\frac{1}{1-xV} = \frac{1}{(1-x)-xV} = \frac{1}{1-x}+\frac{x\Delta}{(1-x)^2}+\frac{x^2\Delta^2}{(1-x)^3}+\cdots.$$

Тогда тотчасъ получится

$$\sum_0^{\infty} u^{\nu} x_{\nu} = \sum_0^{\infty} \frac{x^{\nu}\,\Delta^{\nu} u_0}{(1-x)^{\nu+1}}.$$

Если, например, дан ряд

$$f(x) = 1^q x + 2^q x^2 + 3^q x^3 + 4^q x^4 + \cdots,$$

то легко найти его сумму

$$f(x) = \frac{x\,\Delta 0^q}{(1-x)^2} + \frac{x^2 \Delta^2 0^q}{(1-x)^3} + \cdots + \frac{x^q \Delta^q 0^q}{(1-x)^{q+1}}.$$

Мы видим, что $f(x)$ есть частное от деленія полинома степени q на $(1-x)^{q+1}$.

d) Подобным же образом, когда дан ряд

$$f(x) = \frac{1^q x}{1!} + \frac{2^q x^2}{2!} + \frac{3^q x^3}{3!} + \frac{4^q x^4}{4!} + \cdots,$$

получим

$$f(x) = e^{xE} = e^x \cdot e^{x\Delta} = e^x\left(\frac{x}{1!}\Delta 0^q + \frac{x^2}{2!}\Delta^2 0^q + \cdots + \frac{x^q}{q!}\Delta^q 0^q\right).$$

Итак, сумма даннаго ряда есть произведеніе e^x на полином степени q с цѣлыми коэффиціентами. Отсюда слѣдует, что сумма ряда

$$\frac{1^q}{1!} + \frac{2^q}{2!} + \frac{3^q}{3!} + \frac{4^q}{4!} + \cdots$$

равна цѣлому кратному от e. Например, имѣем

$$\frac{1}{1!} + \frac{4}{2!} + \frac{9}{3!} + \cdots = 2e, \quad \frac{1}{1!} + \frac{8}{2!} + \frac{27}{3!} + \cdots = 5e.$$

808. Исчисленіе конечных разностей имѣет много полезных приложеній в Алгебрѣ, о чем читатель может узнать в других сочиненіях [1] *). Здѣсь мы ограничимся указаніем на то, каким образом оно может служить для рѣшенія задачи интерполированія (§ 343), т. е. для составленія цѣлой функціи y, принимающей заранѣе заданныя значенія $y_0, y_1, y_2, \ldots$ при данных значеніях $x_0, x_1, x_2, \ldots$ независимой перемѣнной. Представим себѣ еще третью перемѣнную t, которая соотвѣтственно парам (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) ... перемѣнных x и y принимает значенія 0, 1, 2, ... Перемѣнныя x и y, разсматриваемыя, как функціи от t, должны, слѣдовательно, при $t = p$ принимать значенія x_p и y_p, и так как вообще $u_p = (1+\Delta)^p u_0$, то мы можем написать

$$x = (1+\Delta)^t x_0, \quad y = (1+\Delta)^t y_0. \tag{6}$$

---

[1] Bertrand. „Algèbre". 2-ая часть, стр. 239, 249 и др.

*) Для ознакомленія с теоріею конечных разностей и разнообразными ея приложеніями рекомендуем читателю сочиненіе академика А. Маркова „Исчисленіе конечных разностей". 2-ое изданіе „Mathesis". 1910.

Исключенiе t изъ этихъ уравненiй въ каждомъ данномъ случаѣ и дастъ искомое соотношенiе между x и y. Положимъ, напримѣръ, что $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ взяты черезъ равные промежутки h въ интервалѣ (x_0, x_n). Въ этомъ случаѣ $\Delta x_0 = h$, $\Delta^2 x_0 = 0$, $\Delta^3 x_0 = 0 \ldots$ и, слѣдовательно,

$$x = x_0 + t\Delta x_0 + \frac{t(t-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 x_0 + \cdots = x_0 + th,$$

что, впрочемъ, можно было предвидѣть. Значенiе t, получаемое отсюда, подставимъ во второе уравненiе (6). Оно обратится тогда въ Ньютонову формулу [1])

$$y = y_0 + \frac{x-x_0}{h}\cdot\frac{\Delta y_0}{1} + \frac{x-x_0}{h}\left(\frac{x-x_0}{h} - 1\right)\frac{\Delta^2 y_0}{1\cdot 2} + \cdots.$$

Свойства Бернуллiевыхъ чиселъ.

809. Бернуллiевы числа (§ 351) очень просто выражаются въ разностяхъ отъ 0^q. Дѣйствительно, разсмотримъ послѣдовательность чиселъ, первый членъ которой $u_0 = 0$, а остальные опредѣляются формулою

$$u_p = 0^q + 1^q + 2^q + \cdots + (p-1)^q.$$

Послѣдовательность первыхъ разностей и будетъ $0^q, 1^q, 2^q, \ldots$. Слѣдовательно, $\Delta^p u_0 = \Delta^{p-1} 0^q$. Отсюда вытекаетъ, если приложимъ формулу (2) § 803 и возьмемъ $p > q$, что

$$1^q + 2^q + \cdots + (p-1)^q = \frac{p(p-1)}{1\cdot 2}\Delta 0^q + \cdots + \frac{p(p-1)\cdots(p-q)}{1\cdot 2\cdots(q+1)}\Delta^q 0^q.$$

Если разложимъ правую часть по степенямъ p, то коэффицiентъ при p будетъ

$$-\tfrac{1}{2}\Delta 0^q + \tfrac{1}{3}\Delta^2 0^q - \tfrac{1}{4}\Delta^3 0^q + \cdots.$$

Въ лѣвой части при $q > 1$ коэффицiентъ при p будетъ тотъ же, что въ $1^q + 2^q + \cdots + p^q$, т. е. (§ 358, a) B_q. При $q = 1$, онъ равенъ $B_1 - 1 = -B_1$. При всякомъ другомъ нечетномъ q, $B_q = 0$, поэтому можно сказать, что коэффицiентъ при p въ u_p всегда равенъ $(-1)^q B_q$. Итакъ, имѣемъ

$$(1) \qquad (-1)^{q-1} B_q = \tfrac{1}{2}\Delta 0^q - \tfrac{1}{3}\Delta^2 0^q + \tfrac{1}{4}\Delta^3 0^q - \cdots.$$

---

[1]) Интересное приложенiе этой формулы къ отдѣленiю корней даетъ теорема Choquet и Matrot (Mathesis, 1891, стр 218).

Эта формула послужитъ намъ для доказательства одной интересной теоремы.

810. Теорема Штаудта и Клаузена (Staudt und Clausen). Всякое Бернулліево число B_{2n} равно цѣлому числу безъ суммы обратныхъ величинъ тѣхъ простыхъ чиселъ, которыя дѣлаются дѣлителями $2n$, когда ихъ уменьшимъ на единицу [1]).

a) Докажемъ сперва слѣдующую лемму: Всякое составное число p, бо̀льшее 4, есть дѣлитель числа $(p-1)!$ Дѣйствительно, число p, если оно не простое и не квадратъ простого, можетъ быть разложено на два множителя, не равныхъ между собою и не равныхъ 1. Эти числа входятъ въ составъ произведенія $2 \cdot 3 \cdots (p-1)$, слѣдовательно $(p-1)!$ дѣлится на p. Если p квадратъ простого числа μ, то произведеніе $2 \cdot 3 \cdots (p-1)$ содержитъ въ себѣ множителей μ и 2μ и потому дѣлится на $2\mu^2$, а слѣдовательно, и на p, если $2\mu < p$, т. е. $\mu > 2$. Слѣдовательно, между числами p, не простыми, только 2^2 составляетъ исключеніе.

b) Посмотримъ теперь когда $\Delta^{p-1} 0^q$ дѣлится на p. По доказанной леммѣ оно дѣлится на p при всякомъ составномъ p, которое больше 4, потому что такое число p дѣлитъ $(p-1)!$, которое само есть дѣлитель $\Delta^{p-1} 0^q$ (§ 805). Но и при $p=4$ будетъ то же самое, если q число четное; дѣйствительно, въ этомъ случаѣ прямо видно, что число

$$\tfrac{1}{4} \Delta^3 0^q = \tfrac{3}{4}(3^{q-1}+1) - 3 \cdot 2^{q-2}$$

есть число цѣлое, потому что $3^{q-1}+1$ дѣлится на 4. Остается разсмотрѣть случай p простого.

c) Раздѣлимъ q на $p-1$, и пусть $q = k(p-1)+r$. Такъ какъ $r < p-1$, то $\Delta^{p-1} 0^r = 0$. Поэтому, если въ извѣстной формулѣ (§ 804)

$$\Delta^{p-1} 0^q = (p-1)^q - \frac{p-1}{1}(p-2)^q + \frac{(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2}(p-3)^q - \cdots \pm (p-1)$$

вмѣсто q поставимъ r, то получимъ

$$0 = (p-1)^r - \frac{p-1}{1}(p-2)^r + \frac{(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2}(p-3)^r - \cdots \pm (p-1),$$

при условіи, что r не равно 0, въ какомъ случаѣ въ правой части надо еще прибавить ∓ 1. Поэтому, $\Delta^{p-1} 0^q$ выражается также формулою:

---

[1]) Приводимое здѣсь доказательство, принадлежитъ Radicke (Радике). См. „Nouvelle Correspondance Mathématique", 1880, стр. 503.

$$\{(p-1)^q-(p-1)^r\}-\frac{p-1}{1}\{(p-2)^q-(p-2)^r\}+\cdots$$
$$+\frac{(p-1)(p-2)}{1\cdot 2}(2^q-2^r)+\varrho,$$

гдѣ, вообще, $\varrho=0$, а при $r=0$ имѣемъ $\varrho=(-1)^p$. Между тѣмъ, по теоремѣ Фермата [1]), простое число p, не дѣлящее a, дѣлитъ $a^{p-1}-1$. Иными словами, a^{p-1} есть кратное отъ p, увеличенное на 1, и то же самое, очевидно, можно сказать и объ $a^{k(p-1)}$. Отсюда слѣдуетъ, что разность

$$a^q-a^r-a^r\{a^{k(p-1)}-1\}$$

дѣлится на p. Итакъ, $\Delta^{p-1}0^q\equiv\varrho \pmod p$.

d) Изъ предыдущаго изслѣдованія вытекаетъ слѣдующее: $\Delta^{p-1}0^q$ **не дѣлится на p только при p простомъ и q дѣлящемся на $p-1$.** Въ послѣднемъ случаѣ остатокъ отъ дѣленія $\Delta^{p-1}0^q$ на p равенъ $(-1)^p$, т. е. равенъ -1 (или при $p=2$ сравнимъ съ $-1 \pmod p$). Поэтому, если въ формулѣ (1) положимъ $q=2n$ и обозначимъ черезъ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ всѣ простыя числа, обладающія тѣмъ свойствомъ, что $2n$ дѣлится на $\alpha-1$, $\beta-1$, $\gamma-1$, то получимъ

$$B_{2n}=\text{цѣлое число}-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\cdots\right),$$

что и выражаетъ теорему. Эта теорема облегчаетъ составленіе таблицъ Бернулліевыхъ чиселъ. Только съ ея помощью Адамсъ [2]) могъ довести вычисленіе этихъ чиселъ, начатое Омомъ (Ohm), до B_{124}. Кромѣ того, она до извѣстной степени раскрываетъ связь между теоріей Бернулліевыхъ чиселъ и нѣкоторыми трудными вопросами теоріи чиселъ. Такъ, напримѣръ, Куммеръ [3]) доказалъ знаменитую теорему Фермата о невозможности рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе $x^n+y^n=z^n$ при $n>2$, для всѣхъ простыхъ чиселъ, которыя не дѣлятъ числителей Бернулліевыхъ чиселъ $B_2, B_4, \ldots, B_{n-3}$.

811. Въ § 361 было показано, что Бернулліевы числа съ четнымъ показателемъ имѣютъ по очередно знаки + и —; теперь мы покажемъ, слѣдуя Липшицу (Lipschitz) [4]), что, начиная съ нѣко-

---

[1]) Baltzer, „Elemente der Mathematik" (2-ая часть, § 13) или Чебышевъ, „Теорія сравненій", стр. 31—32.

[2]) „Crelle's Journal" (1878, стр. 269). Чтобы составить себѣ понятіе о механическихъ затрудненіяхъ этого вычисленія, достаточно указать на то, что, начиная съ B_{100}, въ числителѣ будетъ болѣе 80 цифръ.

[3]) „Crelle's Journal" (1850, стр. 130).

[4]) „Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques (1886, стр. 142).

тораго мѣста, то же самое справедливо относительно цѣлыхъ частей этихъ чиселъ [1]). Дѣйствительно, мы имѣемъ

$B_2 = 1-(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})$	$B_{16} = -6-(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{17})$
$B_4 = 1-(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5})$	$B_{18} = 56-(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{19})$
$B_6 = 1-(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7})$	$B_{20} = -528-(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{11})$
$B_8 = 1-(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5})$	$B_{22} = 6193-(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{23})$
$B_{10} = 1-(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{11})$	$B_{24} = -86579-(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{13})$
$B_{12} = 1-(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{13})$	$B_{26} = 1425518-(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})$
$B_{14} = 2-(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})$	$B_{28} = -27298230-(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{29})$

. . . .

Такъ какъ $B_{2p} > 0$ при p нечетномъ, то тѣмъ болѣе цѣлая его часть будетъ > 0, и надо поэтому доказать, что при p четномъ, не меньшемъ 8, цѣлая часть въ B_{2p} будетъ < 1. Положивъ $p = 2n$, найдемъ на основаніи формулы (2), что цѣлая часть B_{2n} навѣрно меньше, чѣмъ

$$B_{4n}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{4n+1} < B_{4n}+\log(4n+1),$$

такъ какъ (§ 183) $H_n - \log n < H_{n-1} - \log(n-1) < \cdots < H_1 - \log 1 = 1$.

Между тѣмъ, припоминая формулу Стирлинга, имѣемъ (§ 365, a)

$$-B_{4n} = 2\frac{(4n)!}{(2\pi)^{4n}}\left(1+\frac{1}{2^{4n}}+\frac{1}{3^{4n}}+\cdots\right) > 4\pi\sqrt{e}\left(\frac{2n}{\pi e}\right)^{4n+\frac{1}{2}}$$

Слѣдовательно, цѣлая часть въ B_{4n} меньше, чѣмъ

$$\log(4n+1) - 4\pi\sqrt{e}\left(\frac{2n}{\pi e}\right)^{4n+\frac{1}{2}},$$

и теорема Липшица будетъ доказана, если удастся найти такое значеніе n, при которомъ послѣднее выраженіе < 0, потому что тогда для всякого n, большаго найденнаго, оно также будетъ < 0. Для этой цѣли достаточно опредѣлить n такъ, чтобы одновременно было

$$2n > \pi e, \quad \log(4n+1) < 4\pi\sqrt{e}$$

и тотчасъ видно, что эти неравенства выполняются при $n = 5$.

[1]) Объ этихъ цѣлыхъ частяхъ трактуется въ нѣкоторыхъ изслѣдованіяхъ Эрмита (Hermite) въ „Crelle's Journal" (1876, стр. 93).

Послѣдовательныя производныя функціи отъ функціи.

812. Положимъ, что послѣдовательныя производныя нѣкоторой функціи u извѣстны, и составимъ сумму (§ 467)

$$U_{p,\,i} = \mathop{\mathrm{S}}_{p}^{i} \frac{u^{(r)}}{r!}.$$

Такъ какъ производная функціи $\varepsilon_r = \frac{u^{(r)}}{r!}$ равна $\varepsilon_r' = (r+1)\,\varepsilon_{r+1}$, то производная члена $\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}\ldots\varepsilon_{r_i}\,(r_1+r_2+\cdots+r_i=p)$ въ суммѣ $U_{p,\,i}$ будетъ равна

$$(1) \qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=i}(r_\nu+1)\,\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}\ldots\varepsilon_{r_{\nu-1}}\varepsilon_{r_\nu}\varepsilon_{r_{\nu+1}}\ldots\varepsilon_{r_i}.$$

Чтобы одинъ изъ этихъ членовъ совпалъ съ даннымъ членомъ

$$(2) \qquad \varepsilon_{\varrho_1}\varepsilon_{\varrho_2}\varepsilon_{\varrho_3}\ldots\varepsilon_{\varrho_i} \qquad (\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3+\cdots+\varrho_i=p+1)$$

суммы $U_{p+1,\,i}$, должно быть

$$r_1=\varrho_1,\ \ldots,\ r_{\nu-1}=\varrho_{\nu-1},\ r_\nu=\varrho_\nu-1,\ r_{\nu+1}=\varrho_{\nu+1},\ \ldots,\ r_i=\varrho_i$$

и, слѣдовательно, $\varrho_\nu>1$. Если это такъ, то членъ (2) встрѣтится ϱ_ν разъ въ (1). Итакъ, вышеназванный членъ заключается въ $U'_{p,\,i}$ столько разъ, сколько единицъ въ суммѣ тѣхъ ϱ, которые больше 1, т. е. $(p+1-m)$ разъ, гдѣ m есть число тѣхъ ϱ, которые равны 1. Разсмотримъ теперь члены

$$\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}\varepsilon_{r_3}\ldots\varepsilon_{r_{i-1}} \qquad (r_1+r_2+r_3+\cdots+r_{i-1}=p)$$

суммы $U_{p,\,i-1}$, и умножимъ каждый изъ нихъ на ε_1, помѣщая этотъ новый множитель послѣдовательно на каждое изъ i мѣстъ, которыя онъ можетъ занимать

$$\varepsilon_1\varepsilon_{r_1}\ldots\varepsilon_{r_{i-1}},\quad \varepsilon_{r_1}\varepsilon_1\ldots\varepsilon_{r_{i-1}},\quad \ldots,\quad \varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}\ldots\varepsilon_1.$$

Такимъ образомъ мы построимъ схему, въ которой членъ (2) будетъ заключаться m разъ, въ то время, какъ число всѣхъ членовъ схемы, очевидно, будетъ равно $i\,\varepsilon_1\,U_{p,\,i-1}$. Слѣдовательно, членъ (2) будетъ заключаться $(p+1-m)+m=p+1$ разъ въ $U'_{p,\,i}+i\,\varepsilon_1\,U_{p,\,i-1}$, и потому будемъ имѣть

$$(3) \qquad U'_{p,\,i}=(p+1)\,U_{p+1,\,i}-iu'\,U_{p,\,i}.$$

Эта формула выражаетъ основное свойство алгориѳма U. Она будетъ справедлива безъ ограниченій, если условимся полагать $U_{p,i} = 0$, когда $i > p$ или $i < 1$.

813. Теперь мы имѣемъ возможность найти общее выраженіе p-ой производной функціи $f(x) = \varphi(\psi(x))$, если послѣдовательныя производныя функціи φ и ψ извѣстны. Для простоты положимъ $y = f(x)$, $u = \psi(x)$, такъ что $y = \varphi(u)$, и докажемъ, что

$$(4)\qquad \frac{y^{(p)}}{p!} = \frac{\varphi'(u)}{1!} U_{p,1} + \frac{\varphi''(u)}{2!} U_{p,2} + \frac{\varphi'''(u)}{3!} U_{p,3} + \dots .$$

Взявъ производную по x, пользуясь при этомъ формулою (3), увидимъ, что полученное выраженіе будетъ отличаться отъ (4) только замѣною p на $p+1$; а такъ какъ формула (4), очевидно, справедлива при $p = 1$, то она справедлива и вообще.

814. Приложенія. a) Производная порядка p отъ $y = \varphi(e^x)$ можетъ быть выражена съ помощью алгориѳма (§ 807, a)

$$U_{p,i} = \overset{i}{\underset{p}{\mathrm{S}}} \frac{e^{x}}{r!} = e^{ix} \overset{i}{\underset{p}{\mathrm{S}}} \frac{1}{r!} = e^{ix} \frac{\Delta^i 0^p}{p!}.$$

Формула (4) дастъ

$$(5)\qquad y^{(p)} = \frac{\varphi'(e^x)}{1} e^x \Delta 0^p + \frac{\varphi''(e^x)}{1\cdot 2} e^{2x} \Delta^2 0^p + \frac{\varphi'''(e^x)}{1\cdot 2\cdot 3} e^{3x} \Delta^3 0^p + \dots .$$

b) Полагая, въ частности,

$$\varphi(x) = \frac{2x}{1+x^2}, \quad \text{такъ что} \quad \frac{\varphi^{(i)}(1)}{i!} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{i-1} \sin(i-1)\frac{\pi}{4}$$

получимъ, какъ извѣстно (§ 354), $y = e^{Ex}$. Формула (5) дастъ тогда при $x = 0$ слѣдующее выраженіе Эйлерова числа E_p черезъ разности отъ 0^p:

$$\begin{aligned} E_p = &-\frac{1}{4}(2\Delta^2 0^p - 2\Delta^3 0^p + \Delta^4 0^p) \\ &+\frac{1}{4^2}(2\Delta^6 0^p - 2\Delta^7 0^p + \Delta^8 0^p) \\ &-\frac{1}{4^3}(2\Delta^{10} 0^p - 2\Delta^{11} 0^p + \Delta^{12} 0^p) + \dots . \end{aligned}$$

c) При $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ формула (4) дастъ

$$\frac{y^{(p)}}{p!} = \sum_{i=1}^{i=p} \{(-1)^i y^{i+1} U_{p,i}\}.$$

Полагая послѣдовательно

$$u = \frac{1}{x}(1 - e^{-x}), \qquad u = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

и полагая въ послѣдней формулѣ $x = 0$, получимъ слѣдующія выраженія Бернулліевыхъ и Эйлеровыхъ чиселъ:

$$\frac{B_p}{p!} = \sum_{i=1}^{i=p} \left\{ (-1)^{i+p} \mathop{\mathrm{S}}_{p}^{i} \frac{1}{(r+1)!} \right\}, \qquad \frac{E_{2p}}{(2p)!} = \sum_{i=1}^{i=p} \left\{ (-1)^{i} \mathop{\mathrm{S}}_{p}^{i} \frac{1}{(2r)!} \right\}.$$

d) Полагая, наконецъ,

$$y = (1 + \alpha x)(1 + \beta x)(1 + \gamma x) \cdots = e^{u},$$

обозначимъ черезъ s_r и c_r суммы r-ыхъ степеней чиселъ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ и произведеній ихъ по r. При $x = 0$, имѣемъ, очевидно,

$$\frac{y^{(r)}}{r!} = c_r, \qquad \frac{u^{(r)}}{r!} = \frac{s_r}{r}.$$

Если въ формулѣ (4) положимъ послѣдовательно $\varphi(x) = e^x$, $\varphi(x) = \log x$, и $x = 0$, то снова найдемъ формулы Варинга (§ 467)

ЗАМѢЧЕННЫЯ ОПЕЧАТКИ.

Стран.	*Строка*	*Напечатано*	*Нужно читать*
21	3 св.	αe^{ax}	$\alpha e^{\alpha x}$
65	2 сн.	Пропущено имя автора статьи: Клейнъ	
71	9 сн.	$\frac{\partial \varphi}{\partial s}$	$\frac{d \varphi}{d s}$
229	16 сн.	70б	706
„	10 сн.	$\frac{x^2}{R} \varphi(R)$	$\frac{x^2}{R} \varphi'(R)$
238	9 сн.	$h'_1, h'_2, \ldots, h'_{n'}$	$(h'_1, h'_2, \ldots, h'_{n'})$

Въ первой части книги замѣчены еще слѣдующія опечатки:

427	4 св.	253	353
„	9 св.	положивъ $n = 2p$	положивъ $n = 2p$, $x = 0$
„	13 св.	363	362

Предметный указатель.

(Числа обозначаютъ страницы книги).

ЭРНЕСТО ЧЕЗАРО
Профессоръ Университета въ Неаполѣ

ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ УЧЕБНИКЪ АЛГЕБРАИЧЕСКАГО АНАЛИЗА И ИСЧИСЛЕНІЯ БЕЗКОНЕЧНО МАЛЫХЪ

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

Переводъ съ нѣмецкаго съ примѣчаніями и дополненіями профессора
К. А. ПОССЕ

ОДЕССА
1914