

ГРАВИТАЦИЯ

И

ОТНОСИТЕЛЬНОСТЬ

ПОД  
РЕДАКЦИЕЙ  
Х.ЦЗЮ   
В.ГОФФМАНА

78

# GRAVITATION AND RELATIVITY

Edited by  
*Hong-Yee Chiu*

NASA GODDARD INSTITUTE  
FOR SPACE STUDIES  
NEW YORK, NEW YORK

and  
*William F. Hoffmann*

SLOANE PHYSICS LABORATORY  
YALE UNIVERSITY

W. A. BENJAMIN, INC.,  
NEW YORK — AMSTERDAM, 1964

# ГРАВИТАЦИЯ И ОТНОСИТЕЛЬНОСТЬ

*Под редакцией Х. ЦЗЮ и В. ГОФФМАНА*

Перевод с английского

*Д. В. Белова и Н. В. Мицкевича*

Под редакцией

*А. Э. Петрова*

ИЗДАТЕЛЬСТВО « М И Р »

*Москва 1965*

Настоящая книга представляет собой коллективную монографию, написанную крупнейшими зарубежными специалистами по гравитационной физике.

В книге отражены современное состояние и достижения теории гравитации, проведен анализ имеющихся данных и наблюдений и, что особенно интересно, подробно обсуждаются возможности экспериментальной проверки выводов теории (в частности, о гравитационных волнах и квантовой теории гравитации). Затрагиваются астрофизические проблемы (модели Вселенной, сверхновые звезды и т. д.).

По характеру изложения книга доступна широкому кругу физиков-теоретиков и экспериментаторов, астрофизиков и математиков, интересующихся новейшими достижениями гравитационной физики.

## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Современный этап развития общей теории относительности характеризуется двумя основными тенденциями: тщательным анализом основ теории, с одной стороны, и экспериментальным исследованием на современном уровне — с другой.

Обе эти тенденции поставлены на повестку дня вследствие того, что общая теория относительности достигла такого уровня развития, при котором от нее требуются четкие и корректные ответы на основные вопросы, характерные для всякой полевой теории (понятие энергии, законы сохранения, поведение частиц в поле, волны, взаимодействие между различными полями и т. д.), и как обязательное условие — экспериментальное подтверждение выводов этой теории, которые не укладываются в рамки ньютоновской механики.

Дело, однако, не ограничивается исследованиями только гравитационных явлений. Центральной проблемой современной физики можно считать теорию элементарных частиц, которая, несомненно, неотделима от теории поля. Квантовая механика, на которую опирается теория элементарных частиц, достигла исключительных результатов, но в нее пока никак не вписываются явления, связанные с гравитацией, и поэтому в современном ее развитии она неуниверсальна, а характерные для нее

неустрашимые расхожимости требуют своего физического раскрытия. В свете этих обстоятельств построение корректной теории гравитации может указать путь дальнейших исследований в теории поля вообще.

В связи с этим общая теория относительности в последние десять лет бурно развивается как в теоретическом плане, так и в виде настойчивых попыток постановки опытов на современном уровне техники. Предлагаемая в русском переводе книга в значительной мере отражает указанные выше тенденции, представляя собой собранные вместе лекции крупных ученых, посвященные обсуждению основных принципов общей теории относительности и, что особенно интересно, обсуждению различных возможностей постановки экспериментов и описанию некоторых из них.

Что касается дискуссий по основным принципам, заложенным в фундамент общей теории относительности, то они идут по двум основным направлениям. С одной стороны, оставаясь на основных позициях Эйнштейна, предлагается еще ввести в качестве основных некоторые другие принципы (принцип Маха в лекциях Уилера; соображения об инвариантности в лекциях Андерсона) и, с другой стороны (главным образом в лекциях Дикке), обследуются другие возможные теории, описывающие гравитационные поля (например, теория скалярного поля). Такие обсуждения, несомненно, интересны, но они, во всяком случае, не отражают всех возможностей в постановке проблемы об основных принципах общей теории относительности. Например, почти во всех главах настоящей книги красной нитью как само собой разумеющееся проходит утверждение, достаточно популярное, хотя и необязательное: в общей теории относительности гравитационное поле (бесспорно материальное) отождествляется с геометрической структурой простран-

ственно-временного континуума (пространство — время — форма существования материи). Хотя здесь, конечно, имеет место смешение философских категорий, но, с другой стороны, эта идея породила далеко идущие конструктивные следствия, влияющие на математический аппарат теории и физические интерпретации (например, наметилась возможность получить ответ на вопрос, что нужно считать «потенциалами» в общей теории относительности). Можно, разумеется, встать на иную точку зрения, полагая, что поле гравитации определяется распределением и движением материальных тел и само, являясь особым видом материи, в свою очередь определяет форму своего существования в виде «искривленного» пространственно-временного континуума, изучая который мы получим определенную информацию о материи. Такая постановка вопроса ничем не хуже указанной выше и также таит в себе большие возможности.

Хочется также обратить внимание читателя на следующий факт. Многие авторы настоящей книги исходят из предположения, что общая теория относительности может быть построена на двух фундаментальных принципах — принципе эквивалентности и принципе ковариантности — или же, как модификация подхода к вопросу, сюда еще подключается принцип Маха (Уилер). И хотя в процессе анализа авторы вынуждены дробить основные принципы на более мелкие («сильный» и «слабый» принципы эквивалентности у Дикке; принцип ковариантности по отношению к абсолютным элементам и «наблюдаемым» у Андерсона; целых пять вариантов принципа Маха у Дикке и т. д.), все же становится ясным, что тут налицо попытка с негодными средствами. Уже в специальной теории относительности стало очевидным, что она не может быть строго построена только на двух принципах, из которых интуитивно исходил Эйн-

штейн (принцип относительности и принцип постоянства скорости света). Ясно, что нужно еще добавить постулаты изотропности и однородности пространства и некоторые другие. Тем более выглядят недостаточными попытки представить общую теорию относительности как дедуктивную теорию, которая вытекает только из двух или трех принципов. Ясно, например, что центральное место в общей теории относительности занимает утверждение, что пространство — время есть риманово четырехмерное многообразие. В этом утверждении, как отметил впервые В. А. Фок, содержится по меньшей мере два постулата: а) о числе измерений, б) о «римановости» континуума (тензор кривизны многообразия не равен нулю). Эти факты, хорошо известные каждому работающему в области общей теории относительности, никак не следуют ни из принципа эквивалентности, ни из принципа общековариантности, и их следует формулировать как самостоятельные принципы, обосновав их физически на экспериментах (например, может быть, исходя из анализа теории физических измерений). Часто в учебниках по общей теории относительности их преподносят как интуитивно очевидные факты или пользуются аналогиями, но это не меняет сути дела. Что же касается полной аксиоматики современной общей теории относительности, то она ждет еще своей реализации и, несомненно, должна опираться на более богатый экспериментальный материал. В этом отношении характерна помещенная в книге работа Дикке, который, не связывая себя заранее рамками возможного построения теории гравитации, пытается исходить из совокупности фактов, полученных в экспериментах.

Ясно, во всяком случае, что принцип «искривленности» пространственно-временного континуума («римановость»), эквивалентная факту существования отличного



от нуля тензора кривизны пространства) нельзя даже пытаться обосновать при помощи преобразований координат, так как тензор кривизны нельзя ни «уничтожить», ни «создать» никакими допустимыми преобразованиями ни в области пространства — времени, ни в одной точке. Как один из вариантов построения теории тяготения, отличной от теории гравитации Эйнштейна, в книге приводится в достаточно подробном изложении теория «геометродинамики» Уилера, в значительной мере основанная на привлечении анализа топологии пространственно-временного континуума. Об этой теории можно высказать три существенных замечания. Она, во-первых, представляет собой крайнюю степень реализации точки зрения, согласно которой «физика есть геометрия», с чем автор предисловия никак не может согласиться; во-вторых, эта теория пока совершенно не эвристична — критерий, которому должна удовлетворять всякая физическая теория; наконец, очень настораживает уже при первом знакомстве с теорией тот факт, что, исходя из очень экономных и простых на первый взгляд посылок, эта теория уже на первых шагах конструктивной реализации приводит к очень сложным построениям, которые сразу же наталкиваются на ряд принципиальных нерешенных вопросов и настолько усложняют математический аппарат, что ее интерпретации возможны только для самых тривиальных случаев (поля центральной симметрии), да и то с трудом.

Особенно интересным и актуальным в предложенной книге является анализ опытных данных, на которые опирается общая теория относительности и другие теории тяготения, как важный раздел применения теории гравитации к анализу основных фактов космологии. В этом направлении обсуждается возможность экспериментов и результаты, которые уже получены. К их числу

относятся эксперименты по проверке принципа эквивалентности и принципа локально-лоренцова характера пространственно-временного континуума (опыты Бельтрана — Лопеса и Робинсона — Хьюза по исследованию зависимости инертности вещества от пространственного направления, давшие отрицательные результаты с точностью до  $10^{-22}$ ) и эксперименты, лежащие в основе специальной теории относительности и важные поэтому в теории гравитации и подтверждающие принцип независимости величины электрического заряда от скорости (опыты Цорна — Чемберлена — Хьюза с отклонением пучка нейтральных молекул в электрическом поле с точностью до  $10^{-19}$ ; опыты Кинга с истечением газа с точностью до  $10^{-20}$ ; опыты Халласа и Креншоу с точностью до  $10^{-21}$ ). В настоящее время исследуются пути подхода к постановке следующих экспериментов и наблюдений: 1) повышение точности в измерении трех эффектов — вращения перигелия Меркурия, отклонения луча света в поле Солнца, гравитационного красного смещения (не сводимого к классической теории, как это было до сих пор), 2) прецессия Лензе — Тирринга для гироскопа в поле Земли; 3) гравитационное излучение при колебаниях лабораторных или астрономических масс; 4) эквивалентность гравитационной и инертной масс; 5) изотропия масс и равенство зарядов; 6) изменение гравитационной постоянной со временем; 7) общерелятивистские эффекты в астрономических исследованиях сверхновых звезд; 8) явления «коллапса» и некоторые другие.

Обсуждение полученных в опытах данных, пути увеличения точности измерений, описание принципиальных схем опытов и обсуждение новых возможностей, имеющиеся в работах Дикке, Вебера, Хьюза, Уилера и других, помещенных в книге, представляют, несомненно, большую ценность и заинтересуют как физиков-экспе-

риментаторов, так и теоретиков. Эти эксперименты влекут за собой как необходимое следствие ряд других, не менее принципиально важных. Например, для того чтобы иметь трезвые оценки в эффекте отклонения перигелия Меркурия, оказывается необходимым установить степень «сплюснутости» Солнца, которая может внести некоторую поправку в расчет отклонения перигелия.

Среди возможных обсуждаемых экспериментов следует выделить эксперименты с общерелятивистским гироскопом, которые сводятся к обнаружению прецессии оси вращения, зависящей от трех причин («геодезической прецессии» — закона параллельного перенесения оси в римановой геометрии, создаваемой полем Земли; прецессии Лензе — Тирринга; спецрелятивистской прецессии), которые должны привести к малым эффектам, имеющим, однако, важное значение для теории гравитации. Очень актуальным и, может быть, наиболее надежным в смысле сопоставления с опытом является применение общей теории относительности в астрономии и космологии, и тут выдвигается целый ряд проблем, получивших отражение в книге, таких, например, как явление «коллапса», возможность объяснения эволюции звезд с позиций общей теории относительности, космологические эффекты в общей теории относительности (замкнутость Вселенной), минимальные размеры удаленных галактик, изменение плотности галактик с расстоянием, нелинейность наблюдаемого красного смещения, масштабы времени и т. д.

Для современной теории гравитации исключительное значение может иметь то или иное решение вопроса о возможности квантования поля гравитации. Различные подходы к этому вопросу дают достаточно полную картину современного состояния этого вопроса (подходы

Андерсона, Де-Витта, Уилера, Тирринга — Фейнмана и др.).

Таким образом, предлагаемая книга выводит читателей на передовые рубежи современных исследований по теории и экспериментам в гравитации, отражает различные пути подхода, дискуссии, а библиография, приложенная в конце каждой главы, будучи достаточно полной и современной, позволяет по мере надобности углубить изучение вопроса.

Редактор и переводчики книги (роль которых отнюдь не сводилась только к переводу), работая над рукописью в тесном контакте, старались строго придерживаться оригинала и по возможности передать стиль авторов, и только в отдельных случаях, там, где этого требовали интересы читателя, были сделаны отступления в сторону более свободного перевода, но при условии правильности передачи мысли и содержания.

Можно не сомневаться в том, что в связи с общим расширением фронта научных исследований по общей теории относительности у нас и за рубежом и в связи с большим интересом к экспериментальным исследованиям в данной области предлагаемая книга приобретет широкий круг читателей и будет полезна как физикам-теоретикам, так и экспериментаторам.

Перевод книги выполнен Д. В. Беловым (гл. 1, 2, 5) и Н. В. Мицкевичем (предисловие, введение, гл. 3, 4, 6—15).

*Проф. А. Петров*

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В данной книге излагаются фундаментальные понятия, теоретическая структура и опытная база теории тяготения в свете достижений современных экспериментальных и теоретических исследований. Она позволит физикам, геофизикам, астрономам и математикам, стоявшим в стороне от проблем гравитации, познакомиться с состоянием исследований в различных областях этого раздела физики. Вместе с тем специалисты по теории относительности получают единственный в своем роде сборник работ по вопросам, многие из которых до сих пор не освещались в печати.

Тематика сборника простирается от формальных вопросов структуры общей теории относительности до возможных наблюдаемых эффектов теории гравитации в геофизике, атомной физике и астрофизике.

За исключением гл. 15, материал нашего сборника основывается на цикле лекций, прочитанных на семинаре по гравитации и теории относительности в Годдардовском институте космических исследований НАСА (Нью-Йорк) в 1961—1962 гг. Семинар этот был организован проф. Дикке с целью ввести слушателей в курс дела с особым упором на наблюдаемые эффекты теории и на те возможности, которые открываются в связи с современными методами эксперимента.

Стиль лекций противоположен аксиоматическому — изложение основывается на анализе понятий теории. Полное математическое построение теории относительности здесь не дано. Вместо этого в качестве введения к дальнейшему математическому выражению умозрительных доводов предпосылается обзор основных понятий, условий и уравнений общей теории относительности.

Текст гл. 1—14 подготовлен на основе записей (от руки и магнитофонных), предварительно просмотренных

авторами. Материал гл. 15 был первоначально представлен на Международной конференции по теории относительности и гравитации в Варшаве в 1962 г., а затем переработан в виде лекций в Летней школе теоретической физики при Колорадском университете (Боулдер, шт. Колорадо) в 1962 г. Текст, предлагаемый в гл. 15, составлен одновременно и по материалам лекции, прочитанной проф. Уилером в Институте космических исследований, и по записям лекций, читанных им в Летней школе теоретической физики в Боулдере.

Во введении дается общая дискуссия проводимых в настоящее время в гравитационной физике экспериментальных и теоретических работ и обзор содержания данного сборника. Далее идут основные главы книги в том порядке, в котором читались лекции. В первых четырех главах обрисовано основное содержание теории гравитации, а в остальных рассматриваются различные теоретические и экспериментальные вопросы, относящиеся к области интересов отдельных лекторов. При таком принципе выбора тематики неизбежны пробелы, но мы надеемся, что за отсутствие полноты охвата читатель будет вознагражден свежестью и новизной подхода.

Редакторы хотели бы поблагодарить д-ра Ястрова за гостеприимство, оказанное Годдардовским институтом космических исследований НАСА, где читались эти лекции, и за то, что он содействовал их опубликованию. Мы выражаем признательность Национальной академии наук и Национальному научно-исследовательскому совету за материальную поддержку во время подготовки этих материалов. Приносим благодарность руководству Летней школы теоретической физики при Колорадском университете за разрешение воспользоваться материалом, составившим часть гл. 15. Хотелось бы также отметить, что при подготовке сборника нам было приятно сотрудничать с рядом лекторов и издателем книги.

*Х. Цзю  
В. Гоффман*

Нью-Йорк, шт. Нью-Йорк  
Нью-Хэйвен, шт. Коннектикут

Август, 1963.

# Введение

Х. ЦЗЮ, В. ГОФФМАН

Частная теория относительности добилась успеха в объяснении электромагнитных явлений и в описании динамики частиц, движущихся в отсутствие сильных полей тяготения. Гравитационные явления хорошо описываются ньютоновской механикой, если только можно пренебрегать членами порядка  $\phi/c^2$  и  $v^2/c^2$ , где  $\phi$  — гравитационный потенциал,  $v$  — скорость частицы по отношению к источнику гравитационного поля, а  $c$  — скорость света. Общая же теория относительности описывает движение тел в сильных гравитационных полях и взаимодействие между гравитационными полями.

Самой важной и специфической чертой общей теории относительности является отождествление<sup>1)</sup> в нем гравитационных полей с геометрической структурой пространственно-временного континуума на основе представлений римановой геометрии. Эти представления изложены в гл. 2. Хотя риманова геометрия развита довольно хорошо, понимание сущности общей теории относительности остается лишь частичным.

До некоторой степени это обусловлено нелинейностью уравнений Эйнштейна, затрудняющей их математическое исследование, но еще серьезнее трудности, связанные с постановкой опытов для проверки выводов общей

---

<sup>1)</sup> Отождествление отнюдь не обязательно. Можно говорить о том, что полю соответствует структура пространства — времени, а это уже иная постановка вопроса, — *Прим. ред.*

теории относительности и сравнения этой теории с другими теориями тяготения.

Настоящий сборник посвящен основным принципам, определяющим форму и содержание теорий тяготения, а также тем экспериментам и наблюдениям, которые подтверждают правильность этой формы и служат для проверки выводов из теорий. Во введении излагаются основные вопросы, рассматриваемые в сборнике, и дается краткий обзор содержания публикуемых в нем лекций.

## Теоретические основы общей теории относительности как теории гравитации

### *Принцип эквивалентности*

Глубоко изучив свойства инвариантности уравнений Максвелла и проанализировав отрицательный результат опыта Майкельсона — Морли, Эйнштейн постулировал два фундаментальных принципа, на которых основывается его геометрический анализ пространства и времени [1]. Эти принципы известны теперь как принцип эквивалентности и принцип ковариантности. Вот как выразил их сам Эйнштейн.

Принцип эквивалентности. «Пусть в однородном гравитационном поле (при ускорении силы тяжести, равном  $\gamma$ ) существует неподвижная система координат  $K$ , ориентированная таким образом, что силовые линии гравитационного поля направлены в отрицательном направлении оси  $z$ . Пусть, далее, в пространстве, где отсутствует гравитационное поле, будет другая система координат  $K'$ , движущаяся с постоянным ускорением  $\gamma$  в положительном направлении оси  $z$  ... (Уравнения движения в обеих системах одинаковы.) Мы можем дать этому опытному факту весьма удовлетворительное истолкование, приняв, что обе системы  $K$  и  $K'$  физически в точности эквивалентны, иначе говоря, что можно с тем же успехом рассматривать систему  $K$  находящейся в пространстве, где гравитационного поля нет, но при этом движущейся равноускоренно...»



Принцип ковариантности. «Общие законы природы должны описываться уравнениями, справедливыми во всех системах координат, т. е. ковариантными относительно любых замен (координат) вообще (общековариантными)».

Прежде чем обсуждать дальнейшие пути вывода уравнений поля, следует более подробно исследовать эти два принципа.

В гл. I Дикке разделяет принцип эквивалентности на два принципа, один из которых он называет сильным, а другой — слабым принципом. Слабый принцип вытекает из следующего обстоятельства. Если произведение градиента гравитационного поля на квадрат поперечника физической лаборатории или на квадрат пространственно-временного расстояния, на котором производятся опыты, намного меньше  $c^2$ , то всякое влияние гравитации в такой лаборатории можно оттрансформировать, предоставив этой физической лаборатории свободно падать. Эта особенность гравитационного поля проявляется в римановой геометрии как возможность всегда перейти к локально декартовой системе координат.

С другой стороны, согласно сильному принципу эквивалентности, в свободно падающей и невращающейся лаборатории обнаруживается всегда одна и та же система физических законов как по форме, так и в отношении их количественного содержания независимо от положения лаборатории и ее скорости. Здесь также необходимо пренебречь влиянием градиента гравитационного поля. В указанном выше смысле сильный принцип эквивалентности *исключает* возможность изменения физических законов как в пространстве, так и во времени.

Слабый принцип эквивалентности с высокой степенью точности подтверждается экспериментом Этвёша, первоначально выполненным самим Этвёшем [2], а в последнее время — Дикке и др. [3, 4]. В этих экспериментах обнаруживается следующий факт: отношение инертной массы к гравитационной массе одинаково для подобных объектов, состоящих из разных веществ, с точностью до нескольких единиц на  $10^{-9}$ , по Этвёшу, и до  $1 \cdot 10^{-11}$ , по Дикке.

Из эксперимента Этвёша можно вывести два заключения.

1. Все материальные тела движутся по одинаковым путям в пространстве и времени, если на них действует лишь гравитационное поле, когда выполняются ограничения, наложенные прежде на величину градиента этого поля<sup>1)</sup>. Это и есть *слабый принцип эквивалентности*, служащий исходным пунктом для выяснения структуры пространства — времени.

2. С ограниченной степенью точности можно вывести *сильный принцип эквивалентности*. Иными словами, можно в определенных пределах доказать, что законы физики (например, отношения величин фундаментальных сил) одинаковы во всем пространстве — времени. Делается это следующим образом.

Если от точки к точке отношения силы различных взаимодействий будут меняться, то величины их вклада в инертную массу различных объектов будут зависеть от положения последних. Такая зависимость массы и энергии от местоположения привела бы к появлению аномальной силы, различной для веществ с разными отношениями вкладов этих различных взаимодействий в их массу — энергию. Экспериментальный факт отсутствия таких аномальных сил требует постоянства отношения взаимодействий со степенью точности, зависящей от величины их вклада в полную массу для разных веществ. В частности, вклады сильного взаимодействия, электромагнитного взаимодействия, слабого взаимодействия и гравитации в энергию тела относятся приблизительно как  $1 : 10^{-2} : 10^{-12} : 10^{-40}$  на каждый атом (мы приравняли единице вклад от сильного взаимодействия). Для макроскопического тела, обладающего массой, равной примерно 1 г, и единичной плотностью, полная гравитационная энергия составляет около  $10^{-8}$  эрг, и указанные выше отношения становятся равными  $1 : 10^{-2} : 10^{-12} : 10^{-29}$ .

Эксперимент Этвёша доказывает, что с точностью до  $10^{-11}$  величина отношения инертной массы к тяготеющей

---

<sup>1)</sup> Такое ограничение необходимо по той причине, что путь вращающейся пробной частицы в неоднородном гравитационном поле отличается от пути обычной частицы в таком же поле [5].

одинакова для различных материальных тел. Поэтому с высокой степенью точности из сильного принципа эквивалентности должно следовать постоянство электромагнитного и сильного взаимодействия. Что же касается слабого и гравитационного взаимодействия, то о них еще ничего нельзя сказать. Следовательно, эксперимент Этвёша исключает возможность заметного изменения во времени и пространстве констант связи для сильного и для электромагнитного взаимодействий. Этот эксперимент не исключает возможности такого изменения констант связи в случае слабого и гравитационного взаимодействий. Реализация этого обстоятельства может быть тесно связана с принципом Маха (гл. 8 и 15).

Одной из возможностей проверки выполнения принципа эквивалентности для гравитации является наблюдение траекторий объектов, обладающих большим значением собственной гравитационной энергии. Это осуществимо лишь в отношении астрономических объектов. Например, для Солнца указанные выше отношения сил взаимодействий равны  $1 : 10^{-2} : 10^{-12} : 10^{-6}$ , а для Юпитера —  $1 : 10^{-2} : 10^{-12} : 10^{-8}$ . Изучение движения Юпитера должно привести к более точному определению пределов применимости сильного принципа эквивалентности к гравитационной собственной энергии.

### *Принцип ковариантности*

Этот принцип гласит: «Общие законы природы должны описываться уравнениями, справедливыми во всех системах координат, т. е. ковариантными относительно любых замен вообще (общековариантными)» [1].

Существуют два понимания этого принципа.

1. Этот принцип можно толковать как утверждение о том, что система координат это просто выбранная нами сетка координатных линий в пространстве и времени, пересечения которых определяют положения событий. Поэтому выбор системы координат не имеет никакого отношения к содержанию теории. Таков ограниченный смысл ковариантности, и это в некотором роде бессодержательное утверждение, так как любая физическая теория может быть сформулирована общековариантным

образом без какого-либо углубления ее физического содержания. Например, уравнения Максвелла могут быть записаны в форме, представляющей общековариантной [гл. 11, уравнение (34)], но при этом их физическое содержание не расширится, пока метрика ограничивается случаем плоского пространства. К тому же мы всегда можем вернуться к обычным диагональным лоренцовым значениям метрики, просто произведя соответствующее преобразование координат. В этом ограниченном смысле все законы физики могут быть представлены в ковариантном виде без введения в них какого бы то ни было нового физического содержания, и поэтому принцип ковариантности в такой трактовке является бессодержательным утверждением.

2. Когда Эйнштейн формулировал принцип ковариантности, он имел в виду совершенно иное (гл. 9). Именно, он подразумевал, что законы природы это геометрические утверждения относительно физических объектов и что такие законы должны сохранять свою силу в пространствах с произвольными геометриями. В полностью геометризированной теории геометрия конкретизируется на основании самой теории, а не дана априори (как *абсолютный элемент*). Например, в случае уравнений Эйнштейна геометрия определяется на основании полевых уравнений, тогда как в частной теории относительности на геометрию наложены априорные ограничения, соответствующие лоренц-инвариантности.

Во всех известных выражениях законов физики используются геометрические образы и представления. Возможно, что геометрические представления настолько глубоко проникли в наше сознание, что мы не в состоянии мыслить иных описаний физических теорий. Мы хотим подчеркнуть здесь два разных пути: либо используемая в теории геометрия задается априори (как это имеет место в случае плоского пространства, принятого в большинстве физических теорий), либо она определяется самой теорией. В случае когда геометрия задана априори, она образует абсолютный элемент теории, и все законы физики, записывающиеся в геометрической форме, лишь дают связь между различными геометрическими объектами, но самой геометрии не определяют. До

настоящего времени единственной теорией, определяющей геометрию, является теория относительности.

Более того, не существует такой микроскопической теории, которая была бы успешно сформулирована в форме, приложимой к пространствам с произвольной геометрией. Микроскопические законы природы обычно действуют в малых областях — порядка  $10^{-8}$  см (атомы) или  $10^{-13}$  см (ядра или фундаментальные частицы). Всегда можно перейти к такой системе координат, в которой метрика является локально плоской и гравитационные эффекты отсутствуют, если только кривизна не меняется в пространстве так резко, что ее изменения становятся существенными уже на таких малых расстояниях. Поэтому может оказаться излишним требовать, чтобы законы физики, описывающие явления микромира, были применимы в пространствах с произвольной геометрией<sup>1)</sup>.

Кроме того, требование ковариантности приводит к дополнительным усложнениям (гл. 9). Решения уравнений поля Эйнштейна должны допускать применение произвольных преобразований координат, чтобы быть общековариантными. Это отражает факт существования четырех тождеств, наложенных на десять уравнений поля (гл. 4), а именно законов сохранения энергии и импульса, выраженных в виде

$$T_{;\nu}^{\mu\nu} = 0. \quad (1)$$

Итак, из десяти уравнений Эйнштейна для десяти неизвестных компонент метрики  $g_{\mu\nu}$  независимы лишь шесть. Поэтому теория автоматически допускает произвольные преобразования координат<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Такое заключение, однако, недействительно в случае неевклидовой топологии пространства — времени [6].

<sup>2)</sup> «Истинное» гравитационное поле определяется «римановостью» пространственно-временного континуума, т. е. наличием не равного нулю тензора кривизны, так что никаким преобразованием координат ни локально, ни даже в точке обратить его в нуль нельзя, потому что это тензор, и поэтому нельзя «убрать» поля; то, что четыре компоненты  $g_{\alpha\beta}$  можно брать как наперед заданные функции, есть следствие известной теоремы Римана и не связано с тождествами для  $T_{\mu\nu}$  — Прим. ред.

Для данной системы уравнений нельзя, однако, получить определенных решений, не задавая дополнительно четверки уравнений. Эти четыре уравнения известны как *координатные условия*. По отношению к уже полученному решению должна существовать возможность перевести его в любую другую систему координат, совместную с данной геометрией. Таким образом, роль координатных условий в получении решений чисто вспомогательная, и, как только решение найдено, координатные условия можно отбросить. Однако нельзя найти решения, не наложив вначале и не отбросив затем координатных условий.

Фок [7] утверждает, что существует некоторое семейство нековариантных координатных условий. С его точки зрения, в общей теории относительности существует семейство предпочтительных систем координат, не вытекающее из теории Эйнштейна и следующее из других соображений. Этот вопрос рассматривается в гл. 9.

### *Отождествление гравитационных полей с геометрической структурой пространства — времени*

С той точностью, с которой выполнен эксперимент Этвёша, известно, что все материальные тела прочерчивают одинаковые траектории в пространстве — времени, если на них действуют лишь гравитационные силы. Не значит ли это, что гравитационное поле является свойством пространства? Иначе говоря, нельзя ли вместо гравитационных полей рассматривать геометрическую структуру пространства — времени? Это оказалось возможным и действительно реализовано теорией гравитации.

Один из способов геометризации тяготения состоит в таком определении геометрии, чтобы траектории частиц совпадали с особыми кривыми, выделенными геометрией. Согласно предположению Эйнштейна, с траекториями частиц следует отождествить экстремальные кривые геометрии. Тогда гравитационное поле оказывается замененным кривизной пространства, а уравнения движения — уравнениями геодезических линий. Этот

путь геометризации тяготения, однако, не является единственным. Можно определить геометрию таким образом, чтобы частицы двигались не по геодезическим линиям метрического поля. Геодезические линии и другие кривые подробно обсуждаются в гл. 1.

### *Классические измерения пространственно-временных расстояний*

В геометризованной теории тяготения гравитационное поле заменено кривизной пространства, которая выражается через систему метрических коэффициентов  $g_{\mu\nu}$  (метрический тензор). Определением для них может служить выражение элемента дуги  $ds$  (расстояния между двумя соседними точками пространства — времени) в форме

$$(ds)^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2)$$

где  $\{x^\mu\}$  — использованные при этом координаты, причем подразумевается суммирование по повторяющимся индексам. Для того чтобы это определение расстояния приобрело конкретный смысл, связанный с физическими операциями, необходимо выработать схему измерения расстояний. Такие измерения необходимы не только при бесконечно малых расстояниях, к которым относится уравнение (2), но и при больших расстояниях.

В своих классических трудах Эйнштейн рассматривал вопрос об измерениях в пространстве и времени, оперируя представлениями о линейках и часах. В системе, где линейки и часы покоятся относительно друг друга, с помощью этих измерительных приборов осуществляются ортогональные измерения, т. е. с помощью часов определяется расстояние вдоль оси времени, а с помощью линейки — вдоль пространственных осей. Если сильный принцип эквивалентности является точным и окончательным, то все константы связи, конечно, постоянны. Тогда существует уверенность, что линейки и часы не изменяются в зависимости от их положения, и сравнение результатов измерения, производимого в разных местах (например, определение величины скорости света), имеет определенный и ясный смысл.

Однако, согласно одному из вариантов теории гравитации (Дикке, гл. 8), константа гравитационного взаимодействия (связи)  $Gm_p^2/\hbar c$  в действительности не является постоянной, но может изменяться со временем. Возможно даже, что и другие фундаментальные константы не являются постоянными. Отношение результатов измерения длины с помощью материальной линейки (состоящей из атомов) к результатам измерения длины путем отсчета числа длин волн красной линии в спектре  $Kr^{86}$  пропорционально  $e^2/\hbar c$  (гл. 3). Поэтому если допустить сомнение в правильности сильного принципа эквивалентности (гл. 1 и 8), то придется пересмотреть все измерения, производимые с помощью часов и линеек различной природы. Может оказаться, что утверждения наподобие следующего: «скорость света имеет одинаковое численное значение, если ее измерять локально в различных системах отсчета», не имеют достаточно определенного смысла.

С другой стороны, для измерения пространственно-временных интервалов нет никакой необходимости прибегать к помощи часов и линеек. Измерение пространственных и временных интервалов можно объединить в одной и той же операции. Как показывают в гл. 3 Марцке и Уилер, эта операция может быть сформулирована с использованием представлений лишь о световых лучах и траекториях частиц независимо от строения материи. Тогда принцип постоянства скорости света, измеренной в какой бы то ни было местной системе отсчета, становится, как это отметил уже давно Вейль [8], постулатом, принимаемым для истолкования результатов измерений.

Марцке и Уилер предложили также способ, позволяющий производить сравнение отрезков пространственно-временных расстояний на больших протяжениях даже в присутствии гравитационных полей. Сущность его состоит в использовании частицы, движущейся по геодезической линии, и соседней частицы, движущейся по параллельной мировой линии, вообще говоря, не являющейся геодезической. Между частицами бегают световой луч, отражающийся попеременно то от одной, то от другой. Число таких отражений дает вполне определенную меру пространственно-временного интервала.



## Уравнения гравитационного поля Эйнштейна

Уравнения гравитационного поля Эйнштейна позволяют определить геометрию, если задан тензор натяжений (источник гравитационного поля) и соответствующие граничные условия. Из уравнений поля мы можем вывести также уравнения движения пробной частицы, которые в случае слабых полей и малых скоростей сводятся к ньютоновым уравнениям движения. Эксперимент Этвёша показывает, что источником гравитационного взаимодействия является полная масса — энергия. Любое распределение материи, кроме своей энергии покоя, обладает также собственно натяжением. (Понятие твердого тела не имеет инвариантного смысла, так как волна напряжений не может распространяться мгновенно.) Поэтому в качестве источника в уравнениях гравитационного поля обычно берется тензор энергии — натяжений  $T_{\mu\nu}$ , включающий как одну из компонент распределение энергии. Можно, однако, взять в качестве источника скалярного поля свернутый тензор натяжений  $T = T_{\mu}^{\mu}$ , как показано в гл. 8.

В гл. 4 Уилер обсуждает вывод уравнений поля. Требуется, чтобы теория была общековариантной, чтобы она включала лишь метрический тензор и различные геометрические объекты, построенные из его компонент и их производных, и чтобы ее уравнения имели возможно более низкий порядок. Из этих предположений однозначно следуют уравнения гравитационного поля Эйнштейна, если дополнительно предположить, что источником этого поля является тензор энергии — натяжений  $T_{\mu\nu}$ .

## Опытные основания общей теории относительности и других теорий тяготения

Общая теория относительности и другие теории тяготения основываются на одном или нескольких принципах из числа следующих:

- 1) принцип эквивалентности;
- 2) локально лоренцов характер пространства и времени;

3) принцип ковариантности (обсуждавшийся выше);  
 4) независимость величины электрического заряда от скорости;

5) предположение о том, что отношение величин двух пространственно-временных интервалов обладает определенным значением, не зависящим от пути их переноса для сравнения (риманова геометрия).

Подтверждаются ли эти принципы экспериментом?

### *Принцип эквивалентности и принцип локально лоренцова характера пространства — времени*

С идеей локально лоренцова характера пространства — времени связана идея об изотропии пространства — времени. Принцип Маха требует, чтобы инертные свойства материи определялись распределением материи сразу во всем мире. Наивная трактовка принципа Маха состоит в том, что инертные свойства материи зависят от ее *локального* распределения, а потому следует ожидать их зависимости от направления движения. Однако все попытки обнаружить такую анизотропию были безуспешными (гл. 7).

Бельтран-Лопес, Робинсон и Хьюз [9] провели опыты с целью выяснения, зависит ли инертность вещества от направления в пространстве (гл. 6). Локальными источниками анизотропии массы должны быть Солнце и Галактика. Были проведены измерения парамагнитного резонансного поглощения линий зеemanовского расщепления для хлора и кислорода и исследования ядерного магнитного резонанса для лития. В случае зеemanовского расщепления электрон с отличным от нуля магнитным моментом движется в атоме в состояниях с различными магнитными квантовыми числами в различных направлениях по отношению к ориентации внешнего магнитного поля. Поэтому если масса зависит от направления движения, то разность энергий для состояний с различными магнитными квантовыми числами должна зависеть от пространственной ориентации атома. То же самое справедливо и для различных магнитных состояний ядра в опытах с литием. Поскольку энергии связи в ядрах намного больше энергии связи электронов в ато-

мах, эксперимент с литием более точен. Результаты этого эксперимента дают верхний предел возможной масс-анизотропии, равный  $10^{-22}$ .

### *Принцип независимости величины электрического заряда от скорости*

Постоянство величины электрического заряда вне зависимости от скорости его движения требуется инвариантностью уравнений Максвелла относительно преобразований Лоренца. Оно служит основой электродинамики точно так же, как и частной теории относительности, из которой выросла общая теория относительности. Факт постоянства заряда был с высокой точностью установлен в результате ряда опытов по определению отношения зарядов электрона и протона. Некоторые из этих опытов описаны Хьюзом в гл. 13. В одном из них, выполненном Цорном, Чемберленом и Хьюзом [10], измерялось отклонение пучка нейтральных молекул, движущихся в электрическом поле, перпендикулярном направлению их движения; это отклонение оказалось почти равным нулю. Для пучка атомов цезия на основании известной величины чувствительности прибора равенство зарядов электрона и протона было установлено с точностью  $10^{-19}$ .

В других экспериментах Кинг [11], используя метод истечения газа, установил равенство зарядов с точностью около  $10^{-20}$ , взяв водород и гелий, а Хиллас и Крэншоу [12] — с точностью около  $10^{-21}$ , взяв аргон и азот. Эти эксперименты не только доказывают равенство (при различном знаке) электрических зарядов электрона и протона, но также в качестве побочного результата с исключительно высокой степенью точности подтверждают независимость величины электрического заряда от скорости.

Этот вывод получается следующим образом. В атоме водорода протон и электрон движутся около их общего центра масс. Так как масса электрона намного меньше массы ядра, его скорость на три порядка превышает скорость ядра. В многоэлектронных системах это отношение скоростей еще больше. В случае аргона ( $Z=18$ )

скорости электронов в  $K$ -оболочке составляют около  $4 \cdot 10^9$  см/сек, а точность установления равенства зарядов достигает  $10^{-21}$ . Взяв в качестве параметра предполагаемой зависимости электрического заряда от скорости величину  $(v/c)^2$ , мы найдем, что коэффициент при этом параметре должен быть менее  $10^{-9}$ . Этот результат может рассматриваться как та степень точности, с которой электрический заряд не зависит от скорости.

### *Основания для применения римановой геометрии при описании пространственно-временной структуры мира*

Одним из важнейших постулатов, касающихся структуры пространства — времени, является утверждение о том, что отношение величин двух интервалов не должно зависеть от пути их переноса для сравнения. Соответствующие фактические данные рассматриваются Уилером в гл. 3.

### **Проверка теории гравитации на основе экспериментов и наблюдений**

Экспериментов по проверке такой, казалось бы, всеобъемлюще важной теории, как общая теория относительности, — теории, определяющей структуру пространства — времени и, как предполагают некоторые, возможно, также структуру элементарных частиц, проведено очень мало. Дело в том, что для сколько-нибудь надежной проверки тех немногих выводов, которые эта теория делает в отношении явлений, поддающихся наблюдению, требуется почти невероятная точность измерений. В прошлом такая точность была достигнута лишь в отношении трех эффектов: незначительного релятивистского вращения перигелия орбиты планеты Меркурий, гравитационного искривления световых лучей от звезд при прохождении вблизи Солнца и красного смещения спектральных линий, если они испускаются и поглощаются при двух разных значениях гравитационного потенциала. В настоящее время проводятся изыскания по обеспечению той точности экспериментов, которая необходима

для изучения двух новых эффектов: прецессии гироскопа в поле вращающейся Земли и гравитационного излучения. Ввиду такой малочисленности эффектов неудивительно, что гравитация привлекала в прошлом мало интереса как объект экспериментального исследования.

За последние несколько лет интерес к данной области исследования возрос. Это было вызвано рядом причин: разработкой новых и прецизионных методов эксперимента (например, использование спутников, точных электронных систем и пр.), расширением основ теоретических исследований по гравитации и усилившимся у некоторых физиков ощущением того, какую фундаментальную роль может играть тяготение в других вопросах физики, таких, как вопрос о структуре элементарных частиц. Новые экспериментальные исследования проводятся в различных направлениях, в том числе и в тех, о которых уже говорилось. Ради полноты мы перечислим все известные пути экспериментальных исследований:

1. Повышение точности при измерении «трех знаменитых эффектов» общей теории относительности: поворота перигелия Меркурия, отклонения лучей света звезд полем Солнца и, наконец, гравитационного красного смещения.

2. Попытки измерения не обнаруженных до сих пор общерелятивистских эффектов, в частности прецессии Лензе — Тирринга для гироскопа в гравитационном поле Земли и гравитационного излучения при колебаниях лабораторных или астрономических масс.

3. Фундаментальные прецизионные измерения, служащие для обоснования любой теории гравитации: эксперименты по проверке эквивалентности гравитационной и инертной масс, изотропии массы и равенства зарядов.

4. Попытки обнаружения эффектов, не предсказываемых общей теорией относительности, но следующих из других теорий: гравитационного «эфирного ветра», изменения гравитационной «постоянной» со временем, взаимодействия скалярных волн вещества с Солнечной системой.

5. Применение общей теории относительности при астрофизических исследованиях сверхплотных звезд и

поиски новых выводов из результатов сравнения предсказаний теории с данными наблюдений.

6. Поиски таких космологических эффектов, как кривизна мира в целом и замкнутость пространства.

### *Повышение точности при измерении трех знаменитых эффектов*

Так как вопрос о трех знаменитых эффектах в последующих главах книги не затрагивается, мы рассмотрим его здесь несколько подробнее.

Уравнения гравитационного поля в общей теории относительности нелинейны. Поэтому к гравитационным полям нельзя безоговорочно применять принцип суперпозиции. Обсуждая эффекты общей теории относительности, следует рассматривать движение совсем малых тел (пробных тел) или световых лучей, возмущающим действием которых на гравитационное поле можно пренебречь. В частности, три рассматриваемых здесь эффекта проявляются в поведении [взятом с точностью до  $(v/c)^2$  или  $\varphi/c^2$  включительно] такого рода пробных тел в пространстве с геометрией поля Шварцшильда.

Поле Шварцшильда является *точным* решением полевых уравнений Эйнштейна, обладающим следующими свойствами:

- 1) оно не зависит от времени (является статическим);
- 2) оно сферически симметрично относительно своего центра;
- 3) его действие уже на небольших расстояниях сводится к закону всемирного тяготения Ньютона;
- 4) на больших расстояниях пространство становится асимптотически плоским.

В так называемых изотропных координатах  $r'$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  и  $t$  квадрат интервала для решения Шварцшильда имеет вид

$$ds^2 = \left(1 + \frac{m^*}{2r'}\right)^4 (dr'^2 + r'^2 d\theta^2 + r'^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) - \left(\frac{1 - m^*/2r'}{1 + m^*/2r'}\right)^2 c^2 dt^2, \quad (3)$$

где  $m^*$  — «геометризованная масса», связанная с обыкновенной массой  $m$  соотношением

$$m^* = \frac{Gm}{c^2}. \quad (4)$$

В приближении слабого поля, когда  $m^*/2r' \ll 1$ , величину  $r'$  можно заменить некоторым выражением, содержащим радиальную координату  $r$ , и разложить коэффициенты в выражении для квадрата интервала по степеням  $m^*/r$ :

$$ds^2 = - \left[ 1 + \frac{2\alpha m^*}{r} + \frac{2\beta (m^*)^2}{r^2} \right] c^2 dt^2 + \left( 1 + \frac{2\gamma m^*}{r} \dots \right) dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (5)$$

Изотропные координаты  $r'$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  и  $t$  связаны со сферическими (которыми пользовался и сам Шварцшильд)  $r$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  и  $t$  следующим образом:

$$r = r' \left( 1 + \frac{m^*}{2r'} \right)^2, \quad r' = \frac{1}{2} (\sqrt{r^2 - 2m^*r} + r - m^*), \quad (6)$$

$$\theta = \theta, \quad \varphi = \varphi, \quad t = t.$$

В предельном случае слабого поля обе системы координат переходят в обычную трехмерную сферическую систему.

Для решения Шварцшильда коэффициенты  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  в выражении (5) имеют единичные значения. Другие теории тяготения могут привести к аналогичным разложениям квадрата интервала, причем указанные коэффициенты будут уже отличаться от единицы. Шифф [13] и Робертсон [14] подошли к анализу возможностей экспериментального подтверждения решения Шварцшильда именно с этой стороны.

В общей теории относительности равенство величины  $\alpha$  единице определяется тем требованием, чтобы из выражения (3), т. е. из теории Эйнштейна, вытекала ньютонова напряженность гравитационного поля, обратно пропорциональная квадрату расстояния. Этот же член ответствен за гравитационное красное смещение. Различие в ходе часов, а значит, и в частотах атомных

спектров на различных расстояниях от материальной точки равно

$$\frac{\Delta v}{v} = \Delta \frac{Gm}{rc^2}. \quad (7)$$

Угол, на который отклоняется луч света, проходящий вблизи диска Солнца, равен

$$\theta = 2(\alpha + \gamma) \frac{Gm_{\odot}}{R_{\odot}c^2} = 0,875''(\alpha + \gamma). \quad (8)$$

В теории Эйнштейна  $\alpha = \gamma = 1$ , так что

$$\theta = 1,75''. \quad (9)$$

Значение  $\alpha$  вытекает из сравнения с законом всемирного тяготения Ньютона, а также может быть выведено из принципа эквивалентности и результатов наблюдения гравитационного красного смещения. Шифф [15] указал также, что из принципа эквивалентности в плоском пространстве следует отклонение лучей света (величина которого зависит от  $\gamma$ ). Этот вывод требует, однако, дополнительных предположений о связи между пространственно разделенными ускоренными системами координат, что не следует из опыта Этвёша. По крайней мере в одном случае [16] была показана возможность построения теории, удовлетворяющей принципу эквивалентности и предсказывающей отличную от вытекающей из общей теории относительности величину отклонения лучей света. В этом случае — в теории Дикке и Брэнса — величина отклонения лучей света равна

$$\theta = \frac{3 + 2\omega}{4 + 2\omega} \frac{4Gm_{\odot}}{R_{\odot}c^2}, \quad (10)$$

где  $\omega$  — константа взаимодействия скалярного поля. Из наблюдений поворота перигелия Меркурия для нее следует значение, большее 6.

Теоретическую величину поворота перигелия планеты в общей теории относительности также можно выразить через коэффициенты  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ . Тогда этот поворот оказывается равным  $2\alpha(\alpha + \gamma) - \beta$  с точностью до геометрического множителя, зависящего от выбора конкретной орбиты.



Из трех указанных эффектов до создания теории относительности наблюдался только поворот перигелия Меркурия. Неправильность орбиты Меркурия уже начиная с середины XIX века ставила в тупик астрономов. В 1859 г. Леверье [17] отметил, что необъясненный поворот перигелия Меркурия (по сравнению с данными теории) составляет около  $39''$  в столетие. Четвертью века позже Ньюкомб [18] нашел, что величина этого расхождения равна  $43''$  в столетие. Современные наиболее полные исследования Клеменса [19] дают величину, равную  $(42,9 \pm 0,2)''$  в столетие<sup>1)</sup>. В то же время общая теория относительности предсказывает вековой поворот, равный  $43,03''$ .

Совпадение этих данных является сейчас лучшим подтверждением общей теории относительности — как благодаря весьма показательному согласию наблюдений и теории, так и ввиду того, что теоретическое предсказание эффекта поворота перигелия в противоположность двум другим эффектам основывается сразу на двух обстоятельствах: на учете действия гравитации при измерении длины и времени с точностью до члена, пропорционального квадрату массы, и на использовании уравнений движения материальной точки, имеющих уже иной вид в общей теории относительности. Поэтому особенно важно было подтвердить этот результат и с достоверностью узнать, что вычисленные геометрические и динамические поправки, составляющие вместе около  $5600''$  в столетие, не содержат систематической ошибки.

К сожалению, случай Меркурия единственный. Иначе говоря, все зависит от изучения движения (релятивистского поворота перигелия) одной-единственной планеты. Ввиду необходимости учета множества поправок, которые могут содержать систематические ошибки, было бы неосмотрительно придавать этим измерениям такое большое значение, какое они имели бы при наличии лишь случайных ошибок, пока не получен незави-

<sup>1)</sup> Указанная величина наблюдаемого релятивистского поворота перигелия Меркурия была любезно сообщена нам д-ром Клеменсом в частном порядке. В эту величину включены поправки, соответствующие самым новым данным о массах планет.

симый результат тщательного наблюдения поворота перигелия других планет. Беда, однако, в том, что для других планет этот эффект должен быть примерно в 10 раз меньше, чем для Меркурия. Для Земли и Венеры наблюдения смогли быть проведены лишь с точностью 50%. С искусственными спутниками Земли положение даже еще хуже, так как отличие формы Земли от идеальной сферы приводит к возмущениям орбит, намного превышающим величину релятивистского эффекта.

Одним из возможных факторов, вызывающих изменение орбиты Меркурия, является несферичность (сплюснутость) Солнца. В случае приблизительно круговой орбиты учет такой сплюснутости Солнца дает для угла прецессии за один оборот величину

$$\frac{6\pi}{5} \varepsilon \left( \frac{R_{\odot}}{R} \right)^2, \quad \varepsilon = \frac{\Delta R_{\odot}}{R_{\odot}}, \quad (11)$$

где  $\Delta R_{\odot}$  — разность полярного и экваториального радиусов Солнца. Степень сплюснутости Солнца (обозначенная через  $\varepsilon$ ) еще не была достаточно точно измерена, но результат ее оценки на основе модели вращающегося Солнца приводит к пренебрежимо малому повороту перигелия Меркурия.

Дикке и его сотрудники, Хилл и Голденберг, предпринимают измерения степени сплюснутости Солнца для того, чтобы точно определить соответствующую поправку. Об этих наблюдениях кратко говорится в гл. 1.

Второй (в хронологическом порядке) «классический» эффект, послуживший проверке общей теории относительности, это наблюдение отклонения лучей света звезд в гравитационном поле Солнца. О теоретическом предсказании такого отклонения световых лучей на основе корпускулярной теории Ньютона и общей теории относительности говорится в гл. 11. Соответствующие наблюдения проводились во время многих солнечных затмений начиная с 1917 г. Результаты наблюдений, содержащие многочисленные не поддающиеся учету систематические ошибки, в среднем на 20% превышают эффект, предсказанный теорией относительности для среднего сдвига краев экстраполированного диска, т. е.

видимого положения на небесной сфере тех звезд, для которых луч зрения, соединяющий звезду и наблюдателя, касался бы края диска Солнца. К сожалению, эти результаты все же не могут быть окончательными ввиду трудности истолкования результатов наблюдений и наличия систематических ошибок [20]. Кроме того, эти наблюдения дают только сдвиг краев диска и не отражают радиальной зависимости величины отклонения.

В Йельском университете разрабатывается метод измерения отклонения световых лучей звезд полем Солнца в период между затмениями. Этот метод имеет то преимущество, что он позволит непрерывно следить за угловыми расстояниями между звездами в то время, как Солнце совершает свое видимое движение среди них, а значительное увеличение продолжительности наблюдений снизит систематические ошибки. Кроме того, использование фотоэлектрических методов регистрации вместо фотографических сделает излишним анализ деформации фотографической эмульсии при определении переменной величины масштаба для пересчета непосредственно измеренных расстояний между изображениями звезд в углы на небесной сфере. С другой стороны, яркий фон дневного неба и яркое Солнце приводят к появлению сильных фоновых эффектов и к низкой величине отношения сигнала к шумам, отсутствующим при наблюдениях во время затмений.

Третьим эффектом — как в хронологическом порядке, так и по своей важности для сравнения предсказаний общей теории относительности с выводами других теорий тяготения — является гравитационное красное смещение спектральных линий, о котором подробнее говорится в гл. 11. Общая теория относительности, как и другие соображения, основывающиеся только на принципе эквивалентности и эффекте Доплера, дают величину этого смещения, равную

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \Delta \left( \frac{Gm}{rc^2} \right). \quad (12)$$

Гравитационное красное смещение впервые было измерено для спектральных линий излучения спутника Сириуса [21] — белого карлика, масса которого была

определена из анализа относительного движения этого спутника и Сириуса, а радиус найден из теории белых карликов Чандрасекара. Результаты этих наблюдений весьма ненадежны, поскольку очень трудно выделить свет, исходящий от Сириуса В, на фоне излучения Сириуса А, а также из-за наличия дополнительного сдвига уже излученных спектральных линий под влиянием давления в звездной атмосфере и доплеровского сдвига, обусловленного конвективными потоками. Несколько лучшие результаты были позднее получены Поппером [22] при наблюдении карлика 40 Эрида В. Все попытки измерить указанный эффект на звездах и Солнце привели лишь к тому, что задача его выделения из массы посторонних сдвигов линий, вызванных эффектом Доплера и влиянием давления в фотосфере звезд, была признана очень сложной. Эти трудности удалось обойти или частично преодолеть лишь в последнее время.

В проведенных недавно экспериментах в условиях земной лаборатории Паунд и Ребка [23] нашли, что сдвиг частоты составляет  $1,05 \pm 0,10$  теоретического значения. Они воспользовались эффектом Мессбауэра резонансного поглощения  $\gamma$ -излучения изотопа железа  $\text{Fe}^{57}$  при вертикальном удалении источника излучения от его приемника на 22 м. Позднее Бролт [24] измерил красное смещение линии поглощения натрия  $D_1$  в фотосфере Солнца, выбрав эту линию потому, что она не подвержена многим возмущающим влияниям, так как поглощение ярких линий в атмосфере Солнца очень велико. Он получил  $1,05 \pm 0,05$  теоретически предсказанного значения.

### *Поиски новых релятивистских эффектов*

Вторая область, в которой проводятся в настоящее время гравитационные эксперименты, это обнаружение других эффектов, предсказываемых общей теорией относительности, но до сих пор не наблюдавшихся. Одним из таких эффектов является ориентация оси вращения гироскопа в поле вращающейся Земли. Теория этого эффекта недавно обсуждалась Шиффом [13], и мы дадим здесь ее резюме.

По теории Ньютона, такой гироскоп при отсутствии трения и асимметрии должен все время сохранять свою ориентацию в «пространстве» относительно «неподвижных» звезд. И общая, и частная теории относительности предсказывают прецессию его оси вращения, вызываемую тремя причинами:

1. Так как гироскоп участвует во вращении Земли, то его ориентация должна изменяться по закону параллельного переноса векторов в общей теории относительности. Понятие параллельного переноса вектора рассматривается в гл. 2 в связи с идеями ковариантного дифференцирования и аффинности. При переносе по окружности около центральной массы такой вектор не возвращается к своей первоначальной ориентации. Этот эффект называется геодезической прецессией.

2. Вблизи вращающейся массы инерциальная система «вовлекается во вращение» с некоторой небольшой долей угловой скорости центральной массы. Поэтому гироскоп, если он даже покоится вблизи Земли и его ось не параллельна земной оси, должен менять свою ориентацию относительно неподвижных звезд. Этот эффект называется прецессией Лензе — Тирринга.

3. Вращающийся объект, движущийся вместе с Землей (благодаря ее вращению), подвергается действию негравитационных сил (со стороны несущего устройства) и поэтому должен совершать прецессию согласно частной теории относительности.

В случае гироскопа, расположенного на экваторе Земли, при ориентации его оси вращения перпендикулярно земной оси все три эффекта примерно одинаковы и составляют около  $0,4''$  в год. Если гироскоп помещен на спутнике, первые два эффекта несколько уменьшатся и будут зависеть от параметров орбиты, а третий эффект исчезнет.

Эти прецессионные эффекты исключительно малы и поэтому обычно совершенно маскируются неидеальностью приборов. Их было бы, однако, интересно обнаружить. Сейчас работа по конструированию достаточно стабильных гироскопов для этого эксперимента проводится в двух направлениях. В одном случае используется сверхпроводящий вращающийся шар с магнитной

подвеской (Фэйрбэнк и Литтл в Стэнфорде<sup>1)</sup>); другой подход, с использованием вращающегося шара на электростатической подвеске, разрабатывается научной лабораторией при Иллинойском университете [26].

Гравитационное излучение является особенно интересной областью для исследования как с теоретической, так и с экспериментальной точки зрения. Правда, неизвестно, достаточно ли мощно гравитационное излучение галактических источников для того, чтобы его можно было обнаружить. В гл. 5 Вебер кратко излагает теоретические основания, позволяющие говорить о существовании гравитационного излучения, и описывает попытки обнаружить его, с большой смелостью и с большим умением предпринимаемые им вместе с сотрудниками.

*Гравитационные эффекты, предсказываемые или допустимые с точки зрения других теорий и гипотез о тяготении*

Ввиду крайней немногочисленности эффектов, предсказываемых общей теорией относительности и поддающихся обнаружению, можно попытаться найти такие эффекты, которых общая теория относительности не предсказывает, но которые допустимы по другим приемлемым соображениям или с точки зрения альтернативных теорий. В этом направлении начал проводить исследования Дикке — как в своей работе, где указывается круг альтернативных теорий, в равной мере с общей теорией относительности согласующихся с экспериментальными фактами, так и в ряде предложенных им опытов (гл. 7, 8 и 12).

Некоторые из этих экспериментов группируются вокруг попыток обнаружения эффектов предпочтительной системы отсчета для явлений с участием гравитационного поля, о существовании которой можно думать, если исходить из принципа Маха. В известном смысле предпочтительной является, очевидно, система отсчета, определяемая первым законом Ньютона, — инерциальная система, в которой тела, если на них не действуют силы,

---

<sup>1)</sup> Этот эксперимент рассматривается в работах [25].

сохраняют состояние равномерного прямолинейного движения (или покоя) и относительно которой гироскоп сохраняет свою ориентацию. С точки зрения наблюдений эта система отсчета в смысле вращения оказывается той же, что и система, связанная с удаленными от нас неподвижными звездами (с точностью до произвольного равномерного прямолинейного движения). Кроме того, можно представить себе однозначно выделенную фиксированную систему отсчета, которую можно определить как покоящуюся относительно среднего движения разбегающихся галактик в нашем расширяющемся мире, т. е. как систему, относительно которой объекты, находящиеся на больших удалениях, в общем не вращаются, а скорости разбега галактик изотропны и не зависят от направления, выбранного для их наблюдения.

Исследователям не дает покоя также вопрос о том, не влияет ли равномерное прямолинейное движение относительно этой «космологической» системы координат на законы тяготения, на сильные или на слабые взаимодействия. В поисках таких эффектов для сильных взаимодействий и распространения электромагнитных волн были предприняты попытки обнаружения эффектов эфирного ветра Майкельсоном и Морли [27], Кеннеди и Торндайком [28] и их последователями, а также современными экспериментаторами Таунсом, Седархолмом, Блэндом и Хэвенсом [29], Тэрнером и Хиллом [30] и Джазеджа, Джэвенем и Таунсом [31]. Джазеджа, Джэвен и Таунс подтвердили в своем опыте наличие сокращения Лоренца — Фитцджералда, обусловленного орбитальной скоростью Земли и измеренного с точностью до  $10^{-3}$ .

Влияет ли на силу гравитационного взаимодействия движение относительно системы координат, связанной с неподвижными звездами? Обнаружить такой эффект пытался Гоффман [32]. Он следил за изменением периода прецизионного маятникового гравиметра при движении Земли по ее орбите вокруг Солнца. Движение Земли по эллипсу накладывается на движение Солнца внутри Галактики и, наконец, на движение самой Галактики относительно космологической системы координат. Ввиду этого квадрат скорости Земли относительно этой системы меняется в зависимости от времени года. Из

этого эксперимента вытекает с точностью до  $2 \cdot 10^{-8}$ , что если такое движение и сказывается на тяготении в порядке  $(v/c)^2$ , то коэффициент при этом отношении меньше единицы.

Такие поиски тонких гравитационных эффектов на основе прямого измерения ускорения силы тяжести  $g$  требуют все новых и новых усилий, направленных на повышение точности и стабильности измерений. Хотя маятник и пригоден для чрезвычайно точных измерений, он вместе с тем подвержен старению и другим медленным изменениям. Другой метод, в принципе обеспечивающий значительно более высокую долгосрочную стабильность, состоит в наблюдении падения пластины интерферометра для «абсолютного» измерения  $g$ . Такой подход был развит Фоллером [33]. Другие возможные эффекты, вызванные меняющейся гравитационной постоянной и скалярными гравитационными волнами, рассматриваются в гл. 8 и 12.

### *Общая теория относительности и астрофизика*

Отклонение метрики от ее значений для плоского мира вследствие наличия распределенных масс имеет порядок безразмерной величины

$$\xi \equiv \frac{Gm}{rc^2} \sim \frac{Gr^2\rho}{c^2}, \quad (13)$$

где  $\rho$  — плотность объекта,  $r$  — его радиус, а  $m$  — его масса.

Для обычных лабораторных объектов безразмерная величина  $\xi$  составляет около  $10^{-25}$ . На «поверхности» протона она равна  $10^{-39}$ , а на поверхности Солнца  $10^{-6}$ . В высшей степени вероятно, что на поздних стадиях эволюции звезд ядро массивной звезды ( $M=30$  масс Солнца, причем масса Солнца равна  $2 \cdot 10^{33}$  г) состоит из вырожденного нейтронного газа чрезвычайно высокой плотности [34]. Тогда величина  $\xi$  приближается к единице. В этих условиях изменение метрики может сильно влиять на результаты теории звездных структур. Этот вопрос рассматривается в гл. 10 в связи с коллапсом «сверхплотной» звезды-карлика. Теория тяго-



тения может также играть важную роль в объяснении эволюции звезд, если гравитационная постоянная меняется во времени; это предполагается Дикке в гл. 8.

### *Космологические эффекты в теории тяготения*

Каковы условия на границе Вселенной? Является ли она открытой и бесконечной или конечной по своим размерам? Не приводит ли ее кривизна к замкнутости? Уравнения Эйнштейна допускают все три возможности. В гл. 15 Уилер излагает доводы Эйнштейна в пользу варианта замкнутой Вселенной. Он доказывает также, что требование замкнутости соответствует заданию таких граничных условий для уравнений поля в общей теории относительности, которые могут быть интерпретированы как математическое выражение принципа Маха.

С точки зрения материала наблюдений вопрос о замкнутости мира остается нерешенным. Современные фактические данные, говорящие в пользу тех или иных теоретических моделей, подробно рассмотрены Сандэйджем [35], который дал сводку результатов наблюдений четырех космологических явлений.

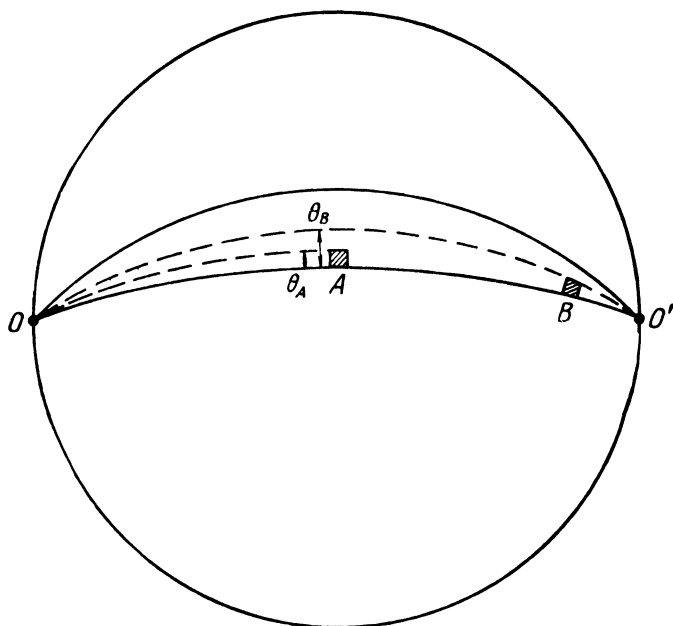
### *Минимальные размеры удаленных галактик*

В замкнутой Вселенной видимый угловой поперечник галактик обычных размеров не может быть меньше определенной величины. Этот эффект наглядно изображен на фиг. 1 на примере двумерного замкнутого пространства (сферической поверхности).

На фиг. 2 показана связь углового поперечника и звездной величины далеких галактик для фридмановской модели Вселенной при различных значениях параметра замедления  $q$ . Параметр  $q$  был использован Робертсоном [36] и Хойлом и Сандэйджем [37] для описания изотропной и однородной Вселенной. Для такой Вселенной квадрат интервала имеет вид

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) du^2, \quad (14)$$

где  $du$  — интервал вспомогательного трехмерного пространства постоянной римановой кривизны. Функция



Фиг. 1. Минимальные размеры удаленных галактик.

На замкнутой двумерной сферической поверхности объект, помещающийся в точке  $A$ , виден наблюдателю, находящемуся в точке  $O$ , под минимальным углом. Объект такого же размера в точке  $B$  виден под большим углом. Проведенные на поверхности линии являются геодезическими (линиями минимальной длины) для сферы. Точка  $O'$  — противоположный наблюдателю полюс сферы.

$R(t)$  является мерой расстояния и определяется при подстановке выражения (14) в уравнения Эйнштейна [(54), гл. 4]. Параметр замедления равен

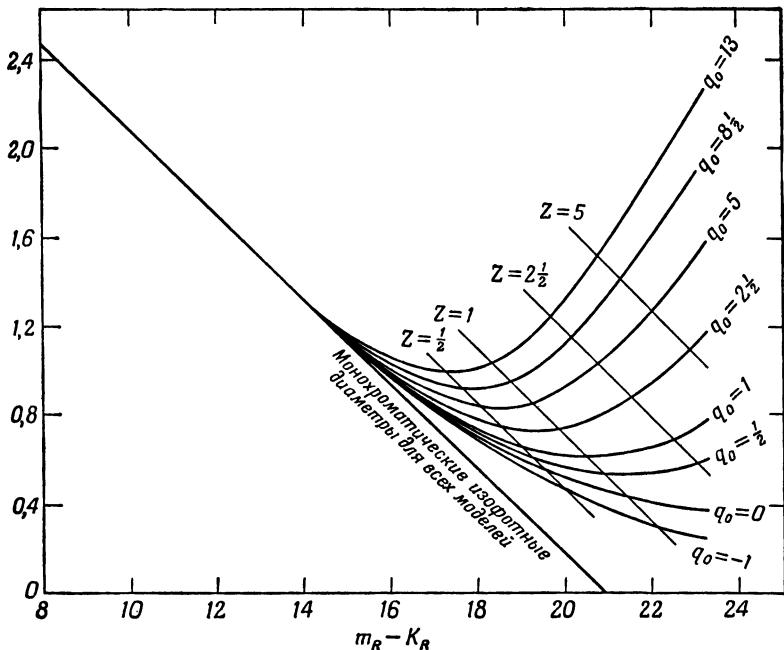
$$q = \frac{\ddot{R}}{RH^2}, \quad (15)$$

где  $H$  — параметр хаббловского расширения, равный

$$H \equiv \frac{\dot{R}}{R}. \quad (16)$$

В случае «стационарной» Вселенной угловой поперечник объектов асимптотически приближается

к постоянному значению. Для замкнутой Вселенной ( $q > 1/2$ ) угловой поперечник далеких галактик является минимальным поперечником, причем такое минимальное значение должно наблюдаться на расстояниях, превышающих предел, достижимый при наблюдении с помощью 200-дюймового телескопа. Вероятно, в будущем удастся проверить, существует ли такой минимум (т. е. узнать, замкнута ли наша Вселенная).



Фиг. 2. Метрические поперечники отдельных галактик или скоплений галактик, отнесенные к яркости наиболее ярких скоплений галактик [35].

Никакой нормировки ординаты для согласования с результатами наблюдений не проводилось. Представлены кривые для модели стационарной вселенной ( $q_0 = -1$ ) и семи моделей взрывного типа. Показаны линии одинакового красного смещения. Прямая линия дает *изотопные* (равнояркостные) диаметры для всех моделей, соответствующие уравнению  $\theta_i = \text{const}/A$ . Метрические диаметры определяются действительной границей галактики (как стандартного масштаба), тогда как изотопные диаметры относятся к величине равноярких очертаний объектов. Вопрос о смысле такого различия разобран Сандейджем.

### Изменение плотности галактик с расстоянием

Если принять, что галактики распределены во Вселенной в среднем равномерно, то в искривленной Вселенной это распределение будет выглядеть как неравномерное. К сожалению, имеющиеся сейчас данные об отношении яркости галактик к числу соответствующих галактик еще недостаточны для того, чтобы выбрать какую-то одну космологическую модель.

### Нелинейность наблюдаемого красного смещения

Изучение спектральных линий излучения далеких галактик показывает, что они сдвинуты пропорционально расстоянию этих галактик от нас; этот факт привел к модели расширяющейся Вселенной<sup>1)</sup>, где скорости разбегания галактик пропорциональны их удалению от нас:

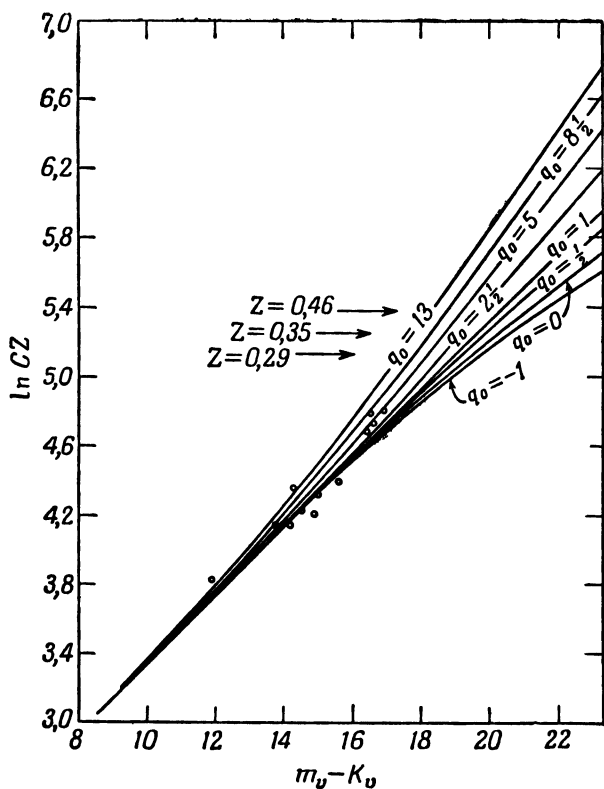
$$v = \frac{R}{T}. \quad (17)$$

Здесь  $T$  — обратная величина постоянной Хаббла, равная по современным определениям  $1,3 \cdot 10^{10}$  лет [38].

Зависимость скорости разбегания от расстояния различна для разных космологических моделей. Например, для закрытой (фридмановского типа) модели Вселенной ( $q > 1/2$ ) теоретическая скорость разбегания увеличивается с расстоянием быстрее, чем это следует из линейной зависимости (17).

Маунт-Паломарский 200-дюймовый рефлектор был построен отчасти в целях получить ответ на этот вопрос. Возможности этого телескопа обнаруживать на фоне неба далекие объекты ограничиваются 23-й звездной величиной. В случае обычной галактики эта граница соответствует расстоянию в  $4,5 \cdot 10^9$  световых лет. К сожалению, такие расстояния недостаточны для решения нашего вопроса. Расчетные данные для вселенных с разными значениями параметра замедления представлены на фиг. 3.

<sup>1)</sup> Ранняя модель Фридмана уже содержала расширение, причем была выдвинута еще до наблюдательного открытия разбегания галактик. — *Прим. перев.*



Фиг. 3. Теоретическое отношение величины красного смещения к яркости в звездных величинах для различных значений параметра замедления  $q_0$  [35].

Для случая Вселенной в стационарном состоянии  $q_0 = -1$ , а для открытого евклидова мира  $q_0 = 1/2$ . Для всех моделей с  $q_0 > 1/2$  Вселенная является замкнутой. Через  $Z$  обозначена величина красного смещения  $\Delta\lambda/\lambda_0$ , а через  $C$  — постоянная калибровки по абсолютной шкале звездных величин. Здесь же нанесены данные для 18 скоплений галактик, взятые у Хьюмаса, Мэйолла и Сандэйджа [38]. Стрелки указывают наблюдаемое красное смещение для тех далеких скоплений, звездная величина которых еще не определена. По звездной величине можно определять расстояние; для евклидова пространства расстояние  $R \sim$  (звездная величина)<sup>5</sup>.

## Масштабы времени

Наиболее удачными методами проверки космологических моделей оказались методы, основанные на сравнении масштабов времени, получаемых из этих космологических моделей и из эволюции звезд и определенных экспериментальным путем возрастов горных пород и метеоритов. Вопрос об измерении этих величин подробно рассматривается в гл. 8 с точки зрения возможности определить, меняется ли с течением времени гравитационная постоянная.

## Квантование общей теории относительности

Квантование общей теории относительности является одной из наиболее актуальных областей современного исследования гравитации. Некоторые аспекты этих работ обсуждает Андерсон в гл. 14. (Прочие аспекты исследования обсуждались Де-Виттом [39], Арновиттом, Дезером и Мизнером [41], а также Уилером [6].) Кроме того, ведутся интенсивные работы по квантованию теории относительности методами теории возмущений, применяемыми в обычной теории поля (Тирринг [41] и Фейнман<sup>1)</sup>).

Салеккер и Вигнер [42] исследовали вопрос о смысле измерений в общей теории относительности. Они пришли к выводу, что величины, фигурирующие в общей теории относительности, по своей природе являются обычно макроскопическими и, таким образом, могут быть подвержены квантовым флуктуациям, влияющим на все процессы измерения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Einstein A., Ann. d. Phys., **49**, 769 (1916); см. также английский перевод в сборнике The Principle of Relativity, New York, 1923, p. 109.

---

<sup>1)</sup> Feynman R. P., Quantization of General Relativity, цикл лекций (Recent Developments of Contemporary Physics), прочитанных в Университете Йешива 24 сентября 1962 г. (не опубликовано).

2. von Eötvös L., Pekár D., Fekete E., *Ann. d. Phys.*, **68**, 11 (1922).
3. Dicke R. H., *Sci. Am.*, **205**, 84 (1961).
4. Dicke R. H., Roll P. G., Krotkov R., The Equivalence of Inertial and Passive Gravitational Mass (будет опубликовано).
5. Papapetrou A., Corinaldesi E., *Proc. Roy. Soc.*, **A209**, 259 (1951).
6. Wheeler J. A., *Geometrodynamics*, New York, 1962, p. 225.
7. Фок В. А., *Теория пространства, времени и тяготения*, М., 1955.
8. Weyl H., *Space, Time, Matter*, New York, 1950.
9. Beltran-Lopez V., Robinson H. G., Hughes V. W., *Phys. Rev. Letters*, **4**, 342 (1960); *Bull. Am. Phys. Soc.*, **6**, 424 (1961).
10. Zorn J. C., Chamberlain G. E., Hughes V. W., *Phys. Rev.*, **129**, 2566 (1963).
11. King J. G., *Phys. Rev. Lett.*, **5**, 562 (1960).
12. Hillas A. M., Cranshaw T. E., *Nature*, **184**, 974 (1959).
13. Schiff L. I., *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **46**, 871 (1960).
14. Robertson H. P., NASA Conference on Experimental Tests of Theories of Relativity, Stanford University, July 1961, Conference Notes, p. 1.
15. Schiff L. I., *Am. Journ. Phys.*, **28**, 340 (1960).
16. Brans C., Dicke R. H., *Phys. Rev.*, **124**, 925 (1961).
17. Le Verrier U. J., *Annales de l'Observatoire de Paris*, **5**, 1 (1859).
18. Newcomb S., *Astronomical Papers of the American Ephemeris*, **1**, 472 (1882).
19. Clemence G. M., *Rev. Mod. Phys.*, **19**, 361 (1947).
20. Bertotti B., Brill D., Krotkov R., в книге *Gravitation: An Introduction to Current Research*, ed. L. Witten, New York, 1962, p. 30.
21. Adams W. S., *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **11**, 382 (1925).
22. Popper D. M., *Astrophys. Journ.*, **120**, 316 (1954).
23. Pound R. V., Rebka G. A., Jr., *Phys. Rev. Lett.*, **4**, 337 (1960).
24. Brault J., *Bull. Am. Phys. Soc.*, **8**, 28 (1963).
25. Schiff L. I., *Phys. Rev. Lett.*, **4**, 215 (1960); *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **46**, 871 (1960).
26. Nordsieck A., в книге *Progress in Astronautics and Rocketry*, ed. R. E. Robertson, J. S. Farrior, vol. 8, New York, 1962, p. 435.
27. Michelson A. A., Morley E. W., *Am. Journ. Sci.*, **34**, 333 (1887).

28. Kennedy R. J., Thorndike E. M., Phys. Rev., 42, 400 (1932).
29. Cedarholm J. P., Bland G. F., Havens B. L., Townes C. H., Phys. Rev. Lett., 1, 342 (1958).
30. Turner K. C., Hill H. A., Bull. Am. Phys. Soc., 8, 28 (1963).
31. Jaseja T. S., Javan A., Townes C. H., Phys. Rev. Lett., 10, 165 (1963).
32. Hoffmann W. F., Bull. Am. Phys. Soc., 8, 29 (1963).
33. Faller J. E., Bull. Am. Phys. Soc., 2, 29 (1963).
34. Chiu H.-Y., Supernovae, Neutrinos, and Neutron Stars, preprinted by NASA Institute for Space Studies, New York, 1963 (будет опубликовано в Ann. of Phys.).
35. Sandage A. R., Astrophys. Journ., 133, 355 (1961).
36. Robertson H. P., Publ. Astron. Soc. Pacific, 67, 82 (1955).
37. Hoyle F., Sandage A., Publ. Astron. Soc. Pacific, 68, 301 (1956).
38. Humason M. L., Nayall N. U., Sandage A. R., Astron. Journ., 61, 97 (1956).
39. De Witt B., в книге Gravitation: An Introduction to Current Research, ed. L. Witten, New York, 1962, p. 266.
40. Arnowitt R., Deser S., Misner C. W., в книге Gravitation: An Introduction to Current Research, ed. L. Witten, New York, 1962, p. 227.
41. Thirring W. E., Ann. of Phys., 3, 91 (1958).
42. Salecker H., Wigner E. P., Phys. Rev., 109, 571 (1958).



# 1

## *Об экспериментальном базисе общей теории относительности*

Р. ДИККЕ

### **Экспериментальный и формальный подход к общей теории относительности**

В настоящей главе речь пойдет об экспериментальных данных, на которых базируются теории тяготения, и в частности общая теория относительности. Подход с таких позиций несколько отличен от обычного. Специалисты, работающие в данной области, занимаются теперь главным образом формальными вопросами. Они принимают как аксиому, что общая теория относительности верна во всех ее деталях и все расчеты следует проводить в рамках этой теории.

Но если серьезно исследовать данные наблюдений, лежащие в основе общей теории относительности, то обнаруживается, что уверенность в ее правильности покоится не столько на непосредственных экспериментальных фактах, сколько на стройности и изящности этой теории. Правда, имеются нетривиальные экспериментальные факты, подтверждающие общую теорию относительности, и ниже мы их рассмотрим. Но мы увидим также, что эти экспериментальные факты не исключают других возможных теорий тяготения.

После такого введения перейдем к обсуждению тех пунктов, в которых начинают играть важную роль данные наблюдений, к выяснению их связи со структурой общей теории относительности и к рассмотрению экспериментальных фактов, наиболее важных для теории тяготения.

## Возможности наблюдения орбитального движения планет

Всякая серьезная теория тяготения в предельном случае достаточно слабых полей или достаточно малых скоростей движения тел, связанных гравитационным взаимодействием, должна переходить в ньютоновскую теорию гравитации. Данные наблюдений за движением планет весьма надежны, и ньютоновская теория вполне удовлетворительна, по крайней мере в известных пределах. Вопрос в том, каковы эти пределы.

Первое, на что мы обращаем внимание, это то, что периоды обращения планет известны с большой степенью точности. Планеты, по крайней мере самые близкие к Солнцу, за то время, в течение которого за ними велось наблюдение, успели совершить огромное количество оборотов, и это дает возможность очень точно определить их периоды обращения. Естественно возникает вопрос о том, какого рода часами измерены эти периоды.

Если измерять периоды, сравнивая их с периодом обращения Земли, то такие «часы» не очень хороши — на них влияют приливные взаимодействия и они подвержены случайным флуктуациям. Самое большее, что можно сказать относительно периодов обращения планет, это то, что с большой точностью известны отношения этих периодов. Точность в данном случае имеет порядок величины  $10^{-8}$ . Она, по-видимому, могла бы быть еще больше, если бы удалось воспользоваться данными наблюдений в предшествующие эпохи, но это затруднительно из-за необходимости расшифровывать древние записи. Точность же, с которой известны отношения радиусов планетных орбит, значительно ниже. Измерения относительных расстояний в астрономии основаны на измерении углов, а максимальная точность таких измерений порядка  $10^{-6}$ . Это означает, что, используя данные наблюдений орбитальных движений планет, третий закон Кеплера можно проверить только с точностью порядка  $10^{-6}$ .

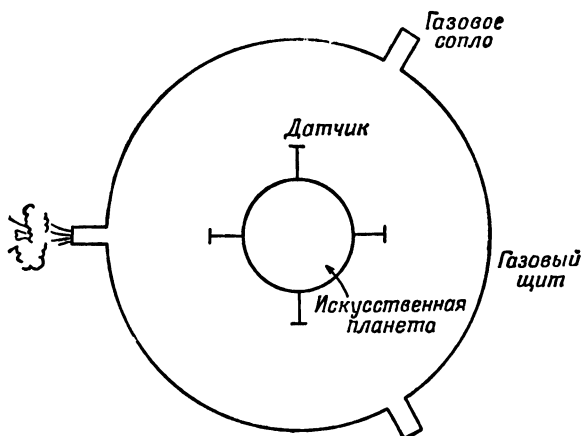
Новые методы исследования космического пространства позволяют надеяться, что в скором времени будут получены более точные данные. Так, радиолокация Лу-

ны и Венеры позволила более точно измерить расстояние до этих планет. Кроме того, в принципе представляется возможным измерять расстояние с точностью  $10^{-9}$ , посылая световой импульс от оптического квантового генератора и регистрируя луч, отраженный от углового рефлектора, помещенного на Луне. Такие точные радиолокационные методы определения траектории (с помощью приемо-ответчика, дающего сигналы эхо), как те, которые применяются при запуске космических аппаратов серии «Маринер», позволят со временем измерять расстояния даже с еще большей точностью.

Релятивистские эффекты появляются обычно в членах порядка  $(v/c)^2$ . Для Земли эта величина составляет приблизительно  $10^{-8}$ . Таким образом, если бы радиусы планетных орбит были измерены с точностью до  $10^{-8}$ , то третий закон Кеплера можно было бы проверить в тех пределах, где уже существенны релятивистские эффекты. В этом отношении многого можно ожидать от намеченных работ по исследованию космического пространства. На основе точных радиолокационных данных о траектории космических аппаратов, запускаемых в направлении различных планет, можно было бы определять орбитальное движение этих планет со значительно большей точностью, чем в настоящее время. Ведь пока что мы измеряем не абсолютные расстояния, а отношения радиусов планетных орбит.

Для повышения точности измерения расстояний в космос можно было бы запустить, например, искусственную планету, окруженную газовым щитом, который позволил бы исключить эффекты, мешающие движению по гравитационной орбите, а именно трение о газ и световое давление. Расстояние до такого объекта можно было бы определить с высокой степенью точности методами радиолокационной техники. Это дало бы нам точные данные об орбитах Земли и нашего планетоида. Идея газового щита предлагалась независимо рядом ученых, но впервые, вероятно, Шварцшильдом. Он предложил окружить миниатюрную искусственную планету полый сферической оболочкой, снабженной небольшими газовыми соплами, как показано на фиг. 1.1. Когда искусственная планета приближается к оболочке, газовые

сопла автоматически включаются, чтобы скомпенсировать торможение и предотвратить соприкосновение внутренней сферы с оболочкой. В результате искусственная планета будет двигаться по правильной орбите, не испытывая влияния светового давления и трения о газ.



Ф и г. 1.1. Искусственная планета с газовым щитом.

Такой чувствительный прибор дал бы нам весьма интересные сведения о теории тяготения, так как с его помощью можно было бы проверить формулу для гравитационной силы с точностью, при которой должны выявиться релятивистские эффекты.

Проще было бы, правда, запустить на одну и ту же начальную орбиту два или три спутника, внешне одинаковых, но с разной плотностью. Исследуя различия в движении этих спутников, можно выяснить влияние на их орбиты трения о газ и светового давления. В таком эксперименте лучше всего было бы использовать материалы с большой плотностью и в качестве наиболее плотного материала можно было бы взять уран.

Еще одно интересное возможное воздействие на планетные орбиты связано с одной из наиболее проблематичных концепций общей теории относительности — с гравитационной волной. Лишь совсем недавно был ус-

транен целый ряд теоретических неясностей, связанных с проблемой гравитационных волн. Если допустить, что такие волны реально существуют, то было бы интересно исследовать их влияние на Солнечную систему. Если гравитационные волны каким-то образом возникли в эпоху первоначального взрыва в начале расширения Вселенной, то период таких волн должен быть порядка времени прохождения звука через очень плотное тело астрономических размеров. Однако частота этой волны должна была бы непрерывно уменьшаться вследствие последующего расширения Вселенной. Возможные значения периодов волн должны лежать, по-видимому, в диапазоне от нескольких дней до многих лет.

Случайные флуктуации, вызванные в Солнечной системе гравитационными волнами, были бы аналогичны приливному действию на планетные орбиты со стороны некоторого большого тела, находящегося вне Солнечной системы. Такого рода большое тело, беспорядочно меняющее свое положение, приводило бы к непредсказуемым возмущениям планетных орбит. Чем больше радиус орбиты планеты, тем сильнее проявлялись бы возмущения в ее движении, обусловленные медленно меняющимися гравитационными волнами. Тот факт, что внешние планеты движутся в точном соответствии с законами движения Ньютона, говорит о том, что возмущения, связанные с гравитационными волнами больших периодов, малы.

Хотя это, по-видимому, и не имеет отношения к гравитационным волнам, следует отметить, что, несмотря на безукоризненность расчетов в небесной механике и отличное согласие их с данными наблюдений, это согласие не столь хорошее, как следовало бы ожидать. Как отмечает один из специалистов, ни одна из изученных планет не движется по расчетной орбите в пределах ошибок наблюдений. Причины таких расхождений неизвестны.

В качестве примера, иллюстрирующего упомянутые расхождения, в табл. 1.1 приводятся данные о массе планеты Сатурн, полученные в результате вычислений за последние сто с лишним лет. В таблице даны типичные

Таблица 1.1

## Обратная масса Сатурна

$M^{-1}$	Источник
3501,6 ± 0,8	Бессель (1883) Джеффи (1954), Струве (1924—1937)
3494,8 ± 0,3	
3502,20 ± 0,53	Хилл (1895) Герц (1953) Клеменс (1960)
3497,64 ± 0,27	
3499,7 ± 0,4	

} по движению Титана — спутника Сатурна  
 } по возмущению Сатурна Юпитером

значения обратной массы Сатурна, выраженной в единицах обратной солнечной массы  $M^{-1}$ .

Как видно из этой таблицы, ситуация оставляет желать лучшего. Расхождения в значениях масс, как правило, значительно превышают погрешности измерений.

В самое последнее время выявились противоречия в данных относительно абсолютной величины астрономической единицы (среднего расстояния от Земли до Солнца). Значение, полученное в результате радиолокации Венеры, не слишком хорошо согласуется с предсказаниями теории тяготения. Причины расхождения и в этом случае неизвестны.

Новейшие точные измерения величины астрономической единицы приводят к величинам солнечного параллакса, указанным в табл. 1.2. Легко видеть, что расхождения очень велики.

Таблица 1.2

## Солнечный параллакс

Параллакс, сек	Источник
8,79835 ± 0,00039	Рабе (1950), из динамики орбиты Эроса Мак-Гуайр и др. (1960), из динамики орбиты спутника «Пионер-5»
8,79738 ± 0,0008	
8,794491 ± 0,000024	Петтенгилл (1961), по данным радиолокации Венеры

Перейдем теперь к хорошо известному релятивистскому эффекту сдвига перигелия орбиты Меркурия. Это, пожалуй, единственный общерелятивистский эффект в области планетных орбит, лежащий в пределах современных экспериментальных возможностей. Здесь результаты весьма удовлетворительны. Согласно общей теории относительности, должна существовать релятивистская поправка к вращению линии апсид эллиптической орбиты в добавление к эффекту, обусловленному влиянием других планет и рассчитываемому в рамках обычной ньютоновской механики. Этот релятивистский эффект велик только в случае Меркурия, где он должен приводить к добавочному вращению на  $43,03''$  за столетие. Наблюдения дают  $(42,9 \pm 0,2)''$ . Это, на наш взгляд, весьма хорошее согласие. Однако имеются серьезные сомнения относительно того, насколько правильно оценена указанная ошибка.

Следует помнить, что скорость прецессии перигелия Меркурия составляет приблизительно  $5600''$  в столетие, т. е. в 130 раз больше релятивистской поправки. При этом  $5026''$  имеют геометрическое происхождение, будучи обусловленными движением координатной системы, и остальные  $575''$  динамического происхождения, связанные в первую очередь с возмущающим действием других планет. При этом малый релятивистский остаток будет определяться с той точностью, с которой определены эти различные вычитающиеся величины. Наиболее значительное возмущение обусловлено влиянием Венеры и составляет  $278''$ . Всякая неопределенность в массе этой планеты вызвала бы пропорциональную ей неопределенность в соответствующем возмущении.

Новое значение массы Венеры, полученное недавно на основании данных об орбите космической ракеты, увеличивает наше доверие к точности этого вычисленного вклада во вращение перигелия. Тем не менее остается еще одна неопределенность, связанная с рассматриваемым эффектом общей теории относительности, наиболее важным из трех классических эффектов. Дело в том, что при ничтожно малой сплюснутости Солнца его гравитационное поле изменилось бы, что сказалось бы на движении планет. Ближайшие к Солнцу планеты

движутся по орбитам, лежащим почти в экваториальной плоскости Солнца, и на орбитальном движении планет сплюснутость Солнца должна сказываться только во вращении линии апсид (вращение перигелия). Сплюснутость на  $10^{-4}$  (разность между экваториальным и полярным радиусами  $0,09''$ ) привела бы к увеличению скорости вращения перигелия Меркурия на  $7''$  в столетие, что составляет 18% релятивистского эффекта. Скорость и магнитные поля в области фотосферы довольно малы, так что поверхности одинакового давления в нижних слоях солнечной атмосферы приблизительно совпадают с гравитационными эквипотенциальными поверхностями. Следовательно, по сплюснутости Солнца можно надежно определить внешнее гравитационное поле Солнца.

Вследствие турбулентных движений в земной атмосфере диск Солнца не имеет четкой границы, и эта расплывчатость достигает  $5''$ . Поэтому сплюснутость уже на  $0,05''$  зарегистрировать чрезвычайно трудно. Точность современных исследований не представляется достаточной для того, чтобы категорически исключить эту возможность. В настоящее время в Принстоне рассматриваются возможности проведения новых, более точных измерений.

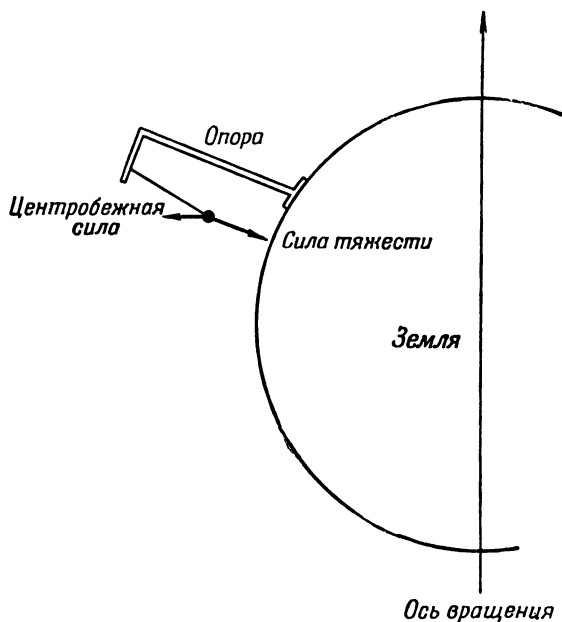
### **Эксперимент Этвёша: эквивалентность инертной и гравитационной масс**

Перейдем теперь к экспериментальным данным другого рода, имеющим самое непосредственное отношение к теориям тяготения. Читатель, возможно, удивлен тем, что я не остановился после первого на остальных двух из трех знаменитых эффектов общей теории относительности. (Правда, я упомянул о смещении перигелия, но лишь постольку, поскольку оно связано с теорией планетных орбит.) По нашему мнению, явления гравитационного отклонения света и гравитационного красного смещения отходят на второй план по сравнению с определенной совокупностью экспериментов, значительно бо-



лее подходящих для использования в качестве исходного пункта при построении теории.

Самым важным экспериментом, с моей точки зрения, является эксперимент Этвёша, который с очень большой точностью показывает, что различные тела падают



Фиг. 1.2. Упрощенная схема опыта Этвёша по сравнению отношения инертной и гравитационной массы для различных объектов.

с одинаковым ускорением. Этот опыт был осуществлен Этвёшем в 1906—1908 гг. Выражаясь несколько упрощенно, можно сказать, что он наблюдал равновесие между гравитационной и инертной силами, действующими на подвешенное тело. На такое тело будут действовать три силы: 1) центробежная сила, вызванная вращением Земли, 2) сила земного тяготения, направленная к центру Земли, и 3) натяжение растянутой нити. Положение равновесия определяется из условия равенства нулю результирующей этих трех сил, как показано на фиг. 1.2.

Этвёш использовал различные материалы, от древесины змеино́го дерева до сульфата меди. В принципе вопрос сводится к тому, одинаковы ли вертикали, определяемые как направление вдоль нити, для различных подвешиваемых тел. Этвёш заключил, что в пределах точности его эксперимента ( $5 \cdot 10^{-9}$ ) центробежная и гравитационная силы взаимно уравниваются независимо от природы материалов, которые он использовал.

Конечно, эксперимент осуществлялся не столь примитивным способом. Этвёш пользовался крутильными весами, подвешивая на концы закручиваемого стержня грузики из различных материалов.

Этот опыт был повторен в Принстоне Роллем, Кротковым и мной, и при этом удалось уменьшить погрешность до величины, меньшей  $10^{-11}$  [1]. Это и есть та точность, с которой на сегодняшний день проверена независимость гравитационного ускорения от рода материала.

### **Вывод из эксперимента Этвёша: гравитация описывается геодезическими линиями геометрии пространства**

Результат эксперимента Этвёша дает базу для построения теории тяготения. Какого типа теорию можно построить, если исходить только из того известного факта, что тела под действием гравитационного притяжения падают с одинаковым ускорением независимо от рода вещества, из которого они состоят?

Первый вывод, который можно сделать, заключается в том, что в пределах точности экспериментов траектории в пространстве — времени являются универсальными кривыми, не зависящими от строения тел, так что они представляют собой характеристики пространства, а не вещества. Поскольку, далее, эти гравитационные кривые суть некоторые универсальные кривые в пространстве, то естественно возникает вопрос: какого рода универсальные кривые можно найти в геометрии, кривые, характеризующие пространство?

Мы констатируем, что такие кривые, которые бы характеризовали геометрическую структуру пространства,

существуют: примером являются геодезические линии (кратчайшие пути между парами точек). Один из путей, органически включающий в теорию тяготения результаты экспериментов Этвёша, состоит в таком построении геометрии пространства, чтобы траекториями движущейся материи были геодезические линии в пространственно-временном континууме. Именно на этом пути для описания тяготения привлекается неевклидова риманова геометрия. Конечно, это не единственный вариант, который можно было бы выбрать. Так, можно было бы выбрать семейства кривых, которые, будучи универсальными, тем не менее не могли бы рассматриваться как геодезические линии. Сделанный нами выбор, согласно которому геометрия пространственно-временного континуума такова, что траектории материальных частиц (и фотонов) совпадают с геодезическими линиями, произволен, но удобен. Другие возможности будут рассмотрены позже.

В плоском трехмерном пространстве расстояние между двумя близкими точками в декартовой системе координат имеет вид

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2. \quad (1)$$

Аналогично расстояние между двумя близкими точками пространства — времени в присутствии гравитации (искривленное риманово пространство) выражается формулой

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \quad (2)$$

где  $g_{ij}$  — метрический тензор, являющийся функцией координат, вид которой зависит 1) от гравитационного поля и 2) от используемой системы координат. В формуле (2) подразумевается суммирование по повторяющимся индексам  $i$  и  $j$ . Что касается п. 2, то величины  $g_{ij}$  при преобразованиях координат преобразуются по определенным правилам (по закону преобразования тензоров), которые рассматриваются в гл. 2 Андерсоном. Здесь мы оставляем в стороне вопрос о возможном выборе допустимых систем координат.

Введя понятие инфинитезимального расстояния между двумя близкими точками, можно определить

геодезические линии как линии наименьшей длины. В соответствии с этим уравнение геодезической линии получится из варьирования  $s$ :

$$\delta s = \delta \int ds = 0. \quad (3)$$

Более подробно о значении геодезических линий говорится в гл. 2. При таком способе введения величины  $ds$  в связи с опытом Этвёша мы предполагаем, что пространственно-временные траектории малых объектов, свободно падающих в гравитационном поле, определяются уравнением (3). Тем самым мы идеализируем реальную задачу, поскольку обычно присутствуют и другие силы. Кроме того, для этого должно быть пренебрежимо малым так называемое *приливное взаимодействие* гравитационного происхождения. Но приливные эффекты тем меньше, чем меньше размеры падающего тела. [Один случай возможного отклонения от траектории, определяемой уравнением (3), рассмотрен в приложении А.]

Вернемся к вопросу об уравнении движения. Прежде всего определим четырехмерную скорость. По определению четырехмерная скорость  $u^i$  есть

$$u^i \equiv \frac{dx^i}{ds}. \quad (4)$$

Из уравнения (4) и соотношения

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (5)$$

имеем

$$g_{ij} u^i u^j = 1. \quad (6)$$

Вариационный принцип

$$\delta \int ds = \delta \int \sqrt{g_{ij} u^i u^j} ds = 0 \quad (7)$$

дает (из уравнения Эйлера) следующее уравнение линий минимальной длины:

$$\frac{d}{ds} g_{ij} u^j - \frac{1}{2} g_{jk,i} u^j u^k = 0, \quad (8)$$

где запятая означает обычное дифференцирование:  $g_{ik,j} \equiv \partial g_{ik} / \partial x_j$ . Первый член представляет собой по су-

шеству обычное ускорение (в плоском пространстве  $u^j \rightarrow$  скорость,  $g_{ij} = \delta_{ij}$  и  $ds \rightarrow cdt$ ), и его можно интерпретировать как силу инерции  $ma$ . Второй член может трактоваться как гравитационная сила. Иными словами, частица движется таким образом, что сила инерции и гравитационная сила всегда уравновешивают друг друга.

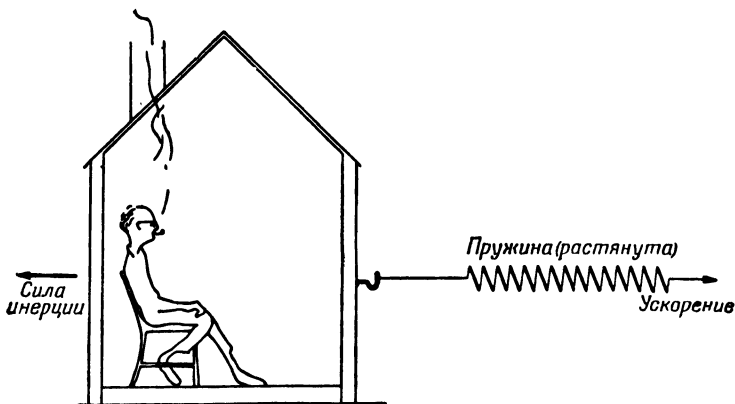
При такой интерпретации членов в уравнении (8) возникает интересная особенность, если модифицировать это уравнение, добавив член, описывающий негравитационные силы (например, электромагнитные силы). Так как величина обоих членов уравнения (8) зависит от выбранной системы координат, то всегда можно выбрать такую систему координат, в которой либо гравитационная сила, либо сила инерции обращается в нуль в некоторой точке. В первом случае посторонняя сила уравновешивается гравитационной силой и тело как бы находится в состоянии равновесия. Во втором случае посторонняя сила уравновешивает силу инерции и тело представляется движущимся ускоренно в отсутствие гравитационного поля. Следовательно, не существует абсолютного критерия, который бы позволял установить, имеем мы дело с силой инерции или с гравитационной силой, — это зависит от выбора системы координат.

Тот факт, что сила инерции подобна некоторой гравитационной силе, является одним из важных аспектов принципа Маха, к которому мы вернемся в гл. 7.

Некоторые ученые, в частности Сиама, подчеркивают, что, согласно принципу Маха, можно считать, что силы инерции, действующие на некоторого наблюдателя в лаборатории, вызваны ускорением удаленной на огромные расстояния материи, которая, взаимодействуя с объектом, порождает силы инерции.

Рассмотрим физика, находящегося внутри лаборатории (фиг. 1.3). Представим себе, что при помощи пружины лабораторию приводят в состояние ускоренного движения. На явления, происходящие внутри лаборатории, будут оказывать влияние силы инерции. С точки зрения принципа Маха эти силы инерции имеют гравитационное происхождение и являются лишь частным

случаем проявления тяготения. Намек на эту идею содержится уже в вариационном уравнении (7): силы обоих типов возникают из одного и того же члена в вариационном уравнении.



Фиг. 1.3. Силы инерции в лаборатории, движущейся с ускорением.

Итак, мы видим, что (если пренебрегать такими силами, как электромагнитные и приливные, о чем упоминалось ранее) из эксперимента Этвёша довольно естественным путем вытекает идея о том, что свободные частицы движутся вдоль геодезических линий. отождествление траекторий частиц с геодезическими линиями предопределяет выбор геометрии<sup>1)</sup>.

Несколько отвлекаясь в сторону, хочу обратить внимание на следующий интересный вопрос: должны ли вообще эти пространственно-временные траектории, вдоль которых движутся частицы, быть обязательно геодезическими линиями? Нет ли других способов введения универсальных траекторий? Такие возможности есть. Одна из них состоит в использовании некоторого двух-

<sup>1)</sup> Но не полностью. Можно указать различные римановы пространства с общими геодезическими при общей координации. — Прим. ред.

тензорного поля, в случае которого уравнения движения будут иметь следующий вид:

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{m_1 g_{ij} u^j}{\sqrt{g_{ij} u^i u^j}} \right) + \frac{d}{ds} \left( \frac{m_2 h_{ij} u^j}{\sqrt{h_{ij} u^i u^j}} \right) - \frac{1}{2} \frac{m_1 g_{jk,i} u^j u^k}{\sqrt{g_{ik} u^i u^k}} - \frac{1}{2} \frac{m_2 h_{jk,i} u^j u^k}{\sqrt{h_{jk} u^j u^k}} = 0. \quad (9)$$

Эти уравнения получаются из вариационного принципа

$$\delta \int (m_1 \sqrt{g_{ij} u^i u^j} + m_2 \sqrt{h_{ij} u^i u^j}) ds = 0. \quad (10)$$

Оказывается (и это не удивительно), что если уравнение движения имеет подобную форму, то, вообще говоря, не существует такой геометрии, при которой траектории, определяемые этими уравнениями, были бы геодезическими линиями. Эти уравнения не имеют формы уравнений для геодезических линий и тем не менее являются универсальными уравнениями. Другая возможность заключается в введении векторных полей. Оказывается, однако, что векторное взаимодействие не приводит к универсальным пространственно-временным траекториям (см. приложение Б). В этой работе мы принимаем, что траектории частиц представляют собой геодезические линии.

### Определение единиц измерения; постоянны ли физические «постоянные»?

Перед нами стоит важный вопрос: как производятся измерения? Чтобы ответить на него, нужно прежде всего определить эталоны для измеряемых величин. В этом пункте неизбежен произвол. Если взять вначале один измерительный стержень и приложить к нему другой, то можно утверждать, что оба стержня имеют одинаковую длину, поскольку они конгруэнтны. Но когда один из стержней находится на Земле, а другой — на Сириусе, такое непосредственное определение

конгруэнтности становится невозможным. Поэтому если утверждается, что на Сириусе стержень имеет ту же длину, что и на Земле, то тем самым дается некоторое определение, ибо в противном случае такое высказывание лишено смысла.

Возникает вопрос: что можно и что нельзя вводить «по определению»? Если наш подход к геометрии (определение геометрии при помощи геодезических линий и траекторий пробных частиц) правильный, то в геометрии уже оказываются заложенными такие определения длины и времени, что максимальная скорость частицы ( $ds=0$ ) оказывается постоянной величиной. Принимая, что свет распространяется как частицы с максимальной скоростью, можно получить выражение для световых траекторий в этой геометрии, потребовав равенства нулю интеграла  $\int ds$  вдоль траектории светового луча. Как уже сказано, это верхний предел скорости, которой может обладать какая бы то ни было частица. Следовательно, мы постулируем постоянство скорости света. Следует подчеркнуть, что с этой, возможно, несколько необычной точки зрения скорость света есть постоянная величина по определению, и факт ее равенства в двух различных точках пространства заключен в самой структуре геометрии, поскольку предполагается, что длина и время измеряются одной и той же мерой  $\int ds$  и что для светового луча  $ds$  равно нулю.

Если бы оказалось, что фактически измерительные стержни и часы приводят к различным значениям скорости света в зависимости от положения наблюдателя, то, оставаясь в рамках принятой теории, нам пришлось бы заключить, что на стержень или часы действует некоторое поле, изменяющее эти стержень и часы. Но, насколько нам известно, мы не сталкиваемся с такой ситуацией, так как все говорит о том, что в пределах точности наблюдений измерения реальными стержнями и часами действительно приводят к одному и тому же значению скорости света.

Вопрос о постоянстве других физических констант, в частности постоянной Планка  $\hbar$ , до сих пор остается открытым. Чтобы не усложнять нашей задачи, будем считать эту величину также постоянной.



Можно вводить все новые физические «постоянные», являющиеся постоянными по определению, но только до тех пор, пока они не смогут быть объединены в безразмерные комбинации. Как только это окажется возможным, следует остановиться, ибо вопрос о том, меняется ли от точки к точке такая безразмерная величина, это уже вопрос не определения, а эксперимента. Можно *определить полный набор* постоянных величин, взяв наибольшее число величин, определенных так, чтобы они не образовывали безразмерных чисел. Заметим, например, что заряд электрона нельзя считать по определению постоянной величиной, если до этого определены как постоянные величины  $\hbar$  и  $c$ .

### **Вариация инертной массы; «сильный» и «слабый» принципы эквивалентности**

Рассмотрим вопрос о том, что следует понимать под инертной массой частицы. Но прежде чем перейти к этому вопросу, остановимся еще на одном эксперименте. Речь идет об опыте, который накладывает четкие ограничения на возможные варианты электромагнитной теории. Эксперименты Кинга [2] и Хьюза (гл. 13) показали, что заряды электрона и протона равны друг другу с точностью до  $2 \cdot 10^{-20}$ . Эти чрезвычайно точные опыты позволяют заключить, что электромагнитное взаимодействие является с большой степенью точности взаимодействием векторного типа, так как атом содержит быстрые электроны и любая зависимость заряда частицы от скорости, если бы таковая имела место, наверняка была бы обнаружена в указанных экспериментах.

Итак, можно утверждать, что мы имеем весьма точное представление об электромагнитных взаимодействиях. А раз так, то это представление может служить тем фундаментом, базируясь на котором, мы можем осмыслить понятие инертной массы. Будем определять инертную массу по ускорению, которое приобретает частица с единичным зарядом, находящаяся на единичном расстоянии от другого такого же заряда. Напомним, что понятие длины уже определено вместе с геометрией.

Далее, можно рассмотреть вопрос о том, изменится ли отношение масс двух различных частиц (например, отношение масс протона и электрона или атома водорода и протона), если переместить их с одного места на другое. Эти отношения масс можно было бы определить, как указывалось выше, по ускорению, вызванному электрическим взаимодействием. Не говорит ли что-либо опыт Этвёша о постоянстве отношений масс при перемещении с одного места на другое? Существует ряд косвенных фактов, весьма определенно свидетельствующих в пользу такого постоянства.

Представим себе на минуту, что наша геометрия определена так, что какая-то определенная частица, скажем нейтрон, движется под действием гравитационных сил по геодезической, и, следовательно, ее движение описывается уравнением геодезической линии

$$\frac{d}{ds} g_{ij} u^j - \frac{1}{2} g_{jk,i} u^j u^k = 0. \quad (11)$$

Теперь представим себе другую частицу, например атом водорода, которая характеризуется тем, что отношение ее массы к массе нейтрона различно в разных местах. При этом условии оказывается, как и следовало ожидать, что в уравнении движения появляется новый член типа силы. Уравнение (11) изменяется и принимает вид

$$\frac{d}{ds} (m g_{ij} u^j) - \frac{1}{2} m g_{jk,i} u^j u^k - m_{,i} = 0, \quad (12)$$

где  $m$  — (переменная) масса атома водорода. Появление добавочного члена  $m_{,i}$  вызвано тем обстоятельством, что вследствие изменения массы атома водорода по отношению к массе нейтрона должна затрачиваться некоторая дополнительная работа, идущая на изменение внутренней энергии этого атома в процессе его движения. Эта дополнительная работа и отражается в возникновении добавочной силы. Но эта добавочная сила должна привести к некоторому аномальному гравитационному ускорению атома водорода по отношению к нейтрону.

Таким образом, допуская, что отношение масс атома водорода и нейтрона различно в разных местах, мы приходим к заключению, что при тщательной постановке

эксперимента эти частицы должны падать с различными ускорениями. Но этот вывод противоречит результатам опыта Этвёша. Следовательно, если справедливы наши допущения, масса водородного атома не должна изменяться по отношению к массе нейтрона, по крайней мере на сколько-нибудь значительную величину, так как в противном случае пришлось бы поставить под сомнение опыт Этвёша.

Эти соображения непосредственно приводят к принципу, который Эйнштейн назвал *принципом эквивалентности*. Мне представляется целесообразным разделить принцип эквивалентности на два принципа эквивалентности — слабый и сильный.

Под слабым принципом эквивалентности я понимаю утверждение, что в рамках высокой точности опыта Этвёша все тела движутся по однотипным траекториям — геодезическим линиям (если условия соответствуют тем, при которых был осуществлен этот опыт). Сильный принцип констатирует нечто большее. Он утверждает, что в свободно падающей лаборатории при проведении локальных экспериментов физические законы, включая все численные результаты, проявляются совершенно одинаково независимо от места, в том числе и в областях, где гравитация отсутствует. Именно этот принцип лежит в основе общей теории относительности. В силу этого принципа отношение масс нейтрона и водородного атома должно быть одинаковым во всех областях пространства, так как в противном случае законы физики в различных местах имели бы различный вид, а именно была бы различной числовая характеристика, выражающая это отношение масс.

Можно ли после всего изложенного заключить, что опыт Этвёша подтверждает *сильный принцип эквивалентности*? Ответ таков — да, но с известными оговорками. Этот опыт позволяет утверждать, что отношения масс элементарных частиц являются постоянными величинами. Далее, в области *сильных взаимодействий* эксперимент Этвёша также говорит о том, что константы связи (например, константа электромагнитного взаимодействия  $e^2/\hbar c = 1/137$ ) в хорошем приближении должны быть постоянными величинами. Но что касается

слабого и гравитационного взаимодействий, то их вклад в собственную энергию небольшого тела слишком незначителен, и опыт Этвёша не в состоянии дать какую-либо информацию о постоянстве соответствующих констант связи.

Таким образом, мы приходим к выводу, что опыт Этвёша дает подтверждение *сильному принципу эквивалентности*, но что он ничего не может сказать о постоянстве констант гравитационного и слабого взаимодействий. (См. приложение А, в котором рассматривается гравитационная траектория в случае, когда нельзя пренебречь собственной гравитационной энергией.)

Насколько категорично это утверждение? Не окажется ли возможным скомпенсировать аномальную силу в уравнении (12) каким-либо другим дальнедействующим полем скалярного, векторного или тензорного типа? Этот вопрос исследовался моим студентом Пиблсом. Он нашел, что скалярное взаимодействие уже присутствует в теории как следствие непостоянства массы, поскольку при этом масса является некоторой функцией от скаляра. Как нетрудно видеть, векторное взаимодействие неприемлемо, так как калибровочная инвариантность приводит к зависимости силы взаимодействия от энергии связи (см. приложение Б). Что касается третьей возможности, которая состоит во введении второго тензорного поля, то было показано, что она реальна и такое поле можно ввести, не вступая в противоречие с результатами опыта Этвёша. Но было показано, что в силу чрезвычайно жестких ограничений, накладываемых на возможную анизотропию пространства опытами Хьюза, Робинсона и Бельтран-Лопеца [3], а также Дривера [4], возможность существования второго тензорного поля исключается (гл. 6).

В результате указанных экспериментов с исключительной точностью установлено, что в пространстве (в локальном смысле) не существует выделенного направления. Это значит, что существует по крайней мере одна система координат, в которой все тензоры космологического происхождения пространственно диагональны. Так как этот вывод не зависит от скорости движения Земли, то два или большее число таких тензоров

должны были бы быть почти одинаковыми с точностью до скалярного множителя. В силу этого обстоятельства круг возможных дальнедействующих полей сужается до некоторого однотензорного поля. Окончательный вывод таков: опыт Этвёша подтверждает сильный принцип эквивалентности, исключая слабые взаимодействия и гравитацию.

**Заключение: «знаменитые эффекты»; недостаточное подтверждение теории**

Что касается еще двух «знаменитых эффектов», допускающих в принципе экспериментальную проверку общей теории относительности, — эффектов гравитационного отклонения света и гравитационного красного смещения, — то здесь мы имеем дело со сравнительно низкой точностью наблюдений. Существует много теорий, выводы из которых согласуются с результатами таких экспериментов в пределах ошибок наблюдения. Вряд ли следует считать серьезным подтверждением какой-либо теории ее согласие с этими наблюдениями, если учитывать недостаточную точность измерений в настоящий момент. В частности, эффект гравитационного красного смещения вытекает из обычного закона сохранения энергии. На наш взгляд, конструируемые теории должны прежде всего согласовываться с точными экспериментами — опытом Этвёша, опытом по изучению пространственной изотропии Хьюза и других, а также Дривера и с экспериментами Кинга и Хьюза по исследованию постоянства заряда. Само собой разумеется, что конструируемые теории должны согласоваться с результатами наблюдения «трех знаменитых эффектов» — *в пределах ошибок наблюдения.*

Мы видели, каким образом риманова геометрия связана с одной из теорий тяготения. Мы также выяснили, в какой степени «сильный принцип эквивалентности» подтверждается опытом Этвёша и в какой мере ему должны удовлетворять такие теории. Допущение же о постоянстве «констант» слабого и гравитационного взаимодействий не является необходимым. Это допу-

щение основывается не на наблюдениях, а на определенных философских соображениях, не представляющих слишком убедительными. В гл. 7 и 8 нами рассматриваются следствия, к которым приводит возможный отказ от постоянства гравитационной «постоянной».

## Приложение А

### *Влияние собственной гравитационной энергии на движение планеты*

Размеры планеты Юпитер близки к тем, при которых собственная гравитационная энергия планеты может заметно сказываться на динамике ее движения. Поэтому в будущем возможен один важный эксперимент. Доля полной энергии Юпитера, приходящаяся на собственную гравитационную энергию  $E_{\text{собств}}$ , составляет

$$\frac{E_{\text{собств}}}{Mc^2} = \frac{GM_J^2}{RM_J c^2} \approx 10^{-8}.$$

Вопрос в том, дает ли эта часть полной энергии Юпитера соответствующий вклад в вес планеты. Если не дает, то ускорение Юпитера должно отклоняться от нормального на величину указанного порядка.

При современной точности измерения радиуса орбиты Юпитера эта величина слишком мала, чтобы можно было сделать какие-либо заключения о гравитационном ускорении планеты. Для этого точность должна быть на два порядка выше. Но если бы нам удалось использовать для измерения радиуса орбиты Юпитера космический аппарат типа «Маринер» с радиолокационным приемо-ответчиком, дающим сигналы эхо, то тогда мы могли бы исследовать вопрос о наличии аномалии в ускорении Юпитера, поскольку у нас уже имеются точные данные относительно его периода. Собственная гравитационная энергия Солнца в 100 раз больше, чем у Юпитера, но, к сожалению (или к счастью для нас), Солнце не является составной частью системы двойной звезды, и его инертную массу нельзя измерить отдельно от гравитационной массы.

## **Приложение Б**

### *Ограничение, накладываемое опытом Этвёша на величину сил векторного поля Ли — Янга*

Дальнодействующее векторное поле (с нулевой массой) должно обладать интересными особенностями. Несколько лет назад в связи с сохранением барионного заряда Ли и Янгом [5] была выдвинута идея о возможности существования в пространстве некоторого векторного поля, тесно связанного с сохранением барионного заряда, аналогично тому, как электромагнитное поле связано с сохранением электрического заряда.

Если бы такое поле существовало, то оно взаимодействовало бы с нуклонами и приводило к дальнодействующим взаимодействиям типа электромагнитных взаимодействий. Такого рода взаимодействие было бы взаимодействием негеодезического типа. Однако опыт Этвёша накладывает жесткие ограничения на возможную величину сил такого взаимодействия. Оказывается, что если такое взаимодействие вообще существует, оно должно быть чрезвычайно слабым. Дело в том, что силы векторного поля не зависят от движения заряженной частицы. Внутри атома заряд электрона, вращающегося вокруг ядра, не зависит от скорости движения этого электрона. Точно так же силы векторного взаимодействия не зависят от характера внутриядерных связей.

Инертная же масса как раз зависит от наличия связей. Следовательно, ускорение свободного падения атома водорода должно отличаться от ускорения свободного падения атома железа. Ядро атома железа состоит из большого числа нуклонов, сильно связанных между собой и быстро движущихся. Поэтому инертная масса, приходящаяся на один нуклон, в атоме железа меньше, чем в атоме водорода. Если бы существовала векторная сила (которая зависит только от количества нуклонов), то ускорение подобной сильно связанной системы отличалось бы от ускорения системы, лишенной энергии связи, не из-за различия сил, а вследствие неодинаковости инертных масс.

Такого рода соображения накладывают крайне жесткие ограничения на величину ли-янговских сил, если они существуют. В работе [6] показано, что они должны быть слабее гравитационных сил в  $10^7$  раз.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Dicke R. H., Sci. Am., **205**, 84 (1961).
2. King J. G., Phys. Rev. Lett., **5**, 562 (1960).
3. Hughes V. W., Robinson H. G., Beltran-Lopez V., Phys. Rev. Lett., **4**, 342 (1960).
4. Drever R. W. P., Phil. Mag., **6**, 683 (1961).
5. Lee T. D., Yang C. N., Phys. Rev., **98**, 1501 (1955).
6. Dicke R. H., Phys. Rev., **126**, 1580 (1962).



# 2

## *Риманова геометрия*

ДЖ. АНДЕРСОН

### **Геометрия как экспериментальная наука**

Иммануил Кант приписывал понятиям и постулатам евклидовой геометрии априорный смысл. Другого подхода к геометрии для него не существовало. К тому времени, когда он писал свою «Критику чистого разума», исторические корни геометрии уже давно были забыты. Между тем евклидова геометрия возникла как экспериментальная наука в связи с практической деятельностью древних египтян и вавилонян. Она ведет свое начало от попыток раздела земли после наводнений, вызванных разливом Нила. Позднее Евклид дал аксиоматику этой геометрии, и она превратилась в объект чистого мышления. Во времена Канта евклидова геометрия считалась единственной геометрией, какую можно себе представить. Но вскоре математиками были созданы другие геометрии. И хотя они возникли не на экспериментальной основе, они все же показали, что евклидова геометрия не является единственно возможной.

Прошло сравнительно немного времени после появления работ Канта, и приблизительно в 1829 г. Больяи и Лобачевский выступили против одного из основных постулатов евклидовой геометрии — постулата о параллельных прямых. Этот постулат гласит, что через некоторую точку можно провести только одну прямую, параллельную другой заданной прямой. Изменив этот постулат, они создали так называемые неевклидовы геометрии.

Но лишь <sup>1)</sup> в 1915 г. в созданной Эйнштейном общей теории относительности геометрия вновь выступила как экспериментальная наука. Об этом было рассказано профессором Дикке в гл. 1.

Напомним вкратце еще раз. Принцип эквивалентности устанавливает, что, наблюдая только гравитационные явления, в малой области пространства (локально) невозможно отличить однородное гравитационное поле от равномерно ускоренного движения системы отсчета при отсутствии поля <sup>2)</sup>. Поэтому можно описывать гравитацию, либо вводя гравитационное поле в плоском пространстве, либо рассматривая искривленное четырехмерное пространство без гравитационного поля. Второй вариант соответствует геометрической интерпретации тяготения. Такая интерпретация снова ставит геометрию в разряд экспериментальной науки, задачей которой является определение геометрии материального мира. Этот подход был возрожден Эйнштейном в 1915 г. и привел его к созданию общей теории относительности.

К сожалению, общая теория относительности в значительной мере является математической дисциплиной, будучи построенной на понятиях и соотношениях тензорного исчисления и римановой геометрии. Настоящая глава посвящена четырехмерной римановой геометрии, знание основ которой необходимо для понимания общей теории относительности. Наш подход к освещению этого вопроса будет иметь синтетический характер, причем мы начнем с простейшего случая геометрии, а именно случая, когда геометрия как таковая вообще отсутствует.

---

<sup>1)</sup> Еще в прошлом веке Лобачевский пытался поставить астрономические наблюдения с целью выяснения вопроса: какова «в действительности» геометрия звезд? Характерны также его утверждения об опытном происхождении геометрии. — *Прим. ред.*

<sup>2)</sup> Такое утверждение широко популярно и до очевидности ошибочно. Разумеется, нельзя одним выбором системы отсчета (кинематика!) уничтожить или создать поле (динамика!). Тем более нельзя преобразованием координат — любым — уничтожить или создать искривленность пространства — времени с тензором кривизны, не равным нулю! — *Прим. ред.*

## Начала геометрии: дифференцируемое многообразие; геометрическая структура

Самая простая геометрия — это геометрия топологического пространства. Такое пространство представляет собой некую совокупность точек с определенной топологией. Топологией определяется понятие точек, близких друг к другу. Иными словами, она позволяет определить окрестность точки многообразия, т. е. совокупность точек, близких к данной. Если можно устанавливать взаимно однозначное соответствие между этими точками и точками евклидова пространства таким образом, что в области наложения двух таких отображений они выражаются друг через друга непрерывным и дифференцируемым образом, то такое топологическое пространство называют *дифференцируемым многообразием*. В конце концов мы установим соответствие между точками такого многообразия и точками реального пространства — времени.

Обычно считают, что топология пространства — времени совпадает с топологией обыкновенной евклидовой плоскости. При такой топологии, например, любая замкнутая кривая может быть непрерывным образом стянута в точку. Существуют и другие топологии, при которых это невозможно. Например, на поверхности бублика, которой соответствует неевклидова топология, существуют два различных класса кривых, не стягиваемых в точку.

По-видимому, даже вопрос о евклидовом характере топологии пространства — времени пока что остается открытым и должен быть решен экспериментально. Недавно Уилер и Мизнер построили модели электрического заряда, используя неевклидовы многообразия, содержащие так называемые «ручки» (worm holes).

В последующем изложении значительная часть выводов не зависит от типа топологии, которой обладает многообразие. В тех случаях, когда топология существенна, она будет предполагаться евклидовой, если нет оговорок.

Поскольку топологическое многообразие не представляет большого интереса для физики, чтобы конкрети-

зирать его, необходимо приписать ему определенную геометрическую структуру. Тогда можно попытаться установить соответствие между геометрической структурой и теми физическими величинами, которые мы хотим описать. Как мы увидим, существуют геометрические величины, называемые векторами и тензорами, которые могут быть сопоставлены реальным физическим объектам. Так, например, с электромагнитным полем обычно связывают некоторый антисимметричный тензор. Однако необходимо всегда помнить, что эти геометрические величины всего лишь *наложены* на арифметическое многообразие, лишенное каких бы то ни было свойств, кроме определенной связанной с ним топологии.

### Координаты как удобный способ описания

Теперь несколько слов о координатах в геометрии. Геометрия, с которой мы привыкли иметь дело, представляет собой так называемую внутреннюю геометрию. Свойства такой геометрии не зависят от выбора той или иной системы координат. Независимость геометрии от выбора системы координат является одной из главных особенностей общей теории относительности. Так, например, внутренняя геометрия плоскости не зависит от того, каким образом на ней проведены координатные линии. Совершенно несущественно, являются ли они кривыми (как, например, в случае полярных координат) или прямыми (в случае декартовых координат).

Таким образом, на многообразии можно построить некоторую внутреннюю геометрию и образовать внутренние величины, а именно векторы и тензоры, вообще не пользуясь понятием координат. Однако на практике это оказывается неудобным, и поэтому мы вводим координаты и с помощью аналитической геометрии сопоставляем точкам многообразия некоторые числа.

Пользуясь понятием системы координат, мы всегда должны помнить, что координатная система это просто вспомогательное средство, помогающее производить вычисления. Результаты вычислений не должны зави-

сеть от выбора системы координат. Мы не отдаем предпочтения какой-либо одной системе координат по сравнению с другими. Это положение иногда называют *принципом общей ковариантности*. Но физический смысл этого принципа значительно глубже изложенных выше простых утверждений.

Чтобы ввести координаты в нашем пространственно-временном многообразии, сопоставим точки этого многообразия точкам евклидова пространства, а именно с каждой точкой  $P$  многообразия свяжем совокупность четырех чисел  $\{x^\mu\}$ , где  $\mu = 1, 2, 3$  или  $4$ . Это можно сделать многими способами. Можно рассмотреть другое сопоставление, с иной совокупностью чисел  $\{x'^\mu\}$ . Так как обе совокупности  $\{x^\mu\}$  и  $\{x'^\mu\}$  описывают одну и ту же точку, то между  $\{x^\mu\}$  и  $\{x'^\mu\}$  должны существовать функциональные соотношения. Запишем

$$P \leftrightarrow \{x^\nu\}, \quad (1)$$

$$P' \leftrightarrow \{x'^\mu\}. \quad (2)$$

Следовательно,

$$x'^\mu = x'^\mu(\{x^\nu\}). \quad (3)$$

Поскольку многообразию предполагается дифференцируемым, функции  $x'^\mu$  должны быть непрерывными и дифференцируемыми функциями  $x^\nu$ . Предполагается также, что существуют соотношения, обратные соотношениям (3). Но если многообразие не обладает евклидовой топологией, то его нельзя покрыть единой системой координат, удовлетворяющей этим условиям. Если, например, попытаться покрыть координатной сеткой поверхность сферы, то возникнут затруднения на полюсах или в особых точках координатной системы. Таким образом, это многообразие можно «координатизировать» (параметризовать) лишь кусочно, покрывая одну область одной системой координат и другую — другой. Там, где эти области перекрываются, обе системы координат, используемые для их координатизации, должны удовлетворять соотношениям (3) во всех точках, лежащих на пересечении этих двух областей.

## Ковариантные и контравариантные тензоры

Приступим теперь к определению векторов и тензоров, руководствуясь тем трансформационным законом, по которому они преобразуются при преобразованиях координат (3). Сначала определим контравариантные величины. Простейшей контравариантной величиной является скаляр. Скаляр обладает тем свойством, что его численное значение не изменяется при преобразовании координат. Скалярами будут лишь те величины, для которых справедлив этот особый инвариантный закон преобразования. Примером числа, определенного в некоторой точке и не преобразующегося как скаляр, является кинетическая энергия частицы, находящейся в некоторой точке. При преобразовании, включающем трансляции координат, зависящие от времени, кинетическая энергия изменяется. Следовательно, хотя кинетическая энергия есть некоторое число, она не будет скаляром.

Выразим то же самое на языке математики. Пусть  $\varphi(x)$  — некоторый скаляр. При преобразовании координат  $\{x\} \rightarrow \{x'\}$  мы имеем  $\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x')$ . Но, несмотря на то что функциональная зависимость  $\varphi$  от  $x$  иная, чем  $\varphi'$  от  $x'$ , справедливо равенство

$$\varphi(x) = \varphi'(x'), \quad (4)$$

если  $\{x\}$  и  $\{x'\}$  относятся к одной и той же точке.

Теперь определим контравариантный вектор. Контравариантный вектор представляет собой<sup>1)</sup> совокупность четырех чисел (мы всегда будем иметь дело с четырехмерным пространством), обладающую в точке  $P$  определенными трансформационными свойствами. Закон преобразования контравариантного вектора  $A^\mu$  имеет вид

$$A'^\mu = A^\nu \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}. \quad (5)$$

Это линейное преобразование, так как величины  $A'$  и  $A$  связаны линейной зависимостью. (Здесь и в дальней-

<sup>1)</sup> В данной точке  $P$ . — Прим. ред.

шем подразумевается суммирование по повторяющимся индексам.) Как и прежде,  $\{x\}$  и  $\{x'\}$  относятся к одной и той же точке  $P$ . Таким образом, чтобы преобразовать контравариантный вектор, необходимо прежде всего преобразовать его компоненты согласно формуле (5) и затем подставить преобразованные координаты. Например, чтобы получить потенциалы Лиенара — Вихерта для поля равномерно движущейся частицы, следует осуществить преобразование Лоренца к системе отсчета, в которой частица находится в состоянии движения, вычислить трансформированные в соответствии с преобразованием Лоренца компоненты поля и подставить преобразованные координаты.

Примером контравариантного вектора может служить отрезок, соединяющий две близкие друг к другу точки. В одной координатной системе этот отрезок есть  $dx^\mu$ , а в другой (штрихованной) координатной системе он будет равен

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu. \quad (6)$$

Подобным же образом, задавая законы преобразования, можно определить ковариантные величины. Ковариантный скаляр преобразуется так же, как и контравариантный скаляр.

Ковариантный вектор  $B$  (для обозначения контравариантных векторов используются верхние индексы, а для ковариантных векторов — нижние) преобразуется по закону

$$B'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} B_\nu. \quad (7)$$

Примером ковариантного вектора является градиент скалярной функции

$$\frac{\partial \phi}{\partial x'^\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}. \quad (8)$$

Эти величины определены независимо от метрики. Таким путем мы ввели в наше многообразие геометрическую структуру. Можно обобщить векторные законы преобразования таким образом, что они будут определять

полный класс величин, удовлетворяющих линейным однородным законам преобразования. Эти величины называются тензорами и могут иметь произвольное число ковариантных и контравариантных индексов.

Закон преобразования тензора  $T^{\dots\mu}_{\dots\nu}$  имеет вид

$$T^{\dots\mu}_{\dots\nu} = \dots \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \dots \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \dots T^{\dots\rho}_{\dots\sigma} \quad (9)$$

Это означает, что по каждому контравариантному (или ковариантному) индексу тензор преобразуется как контравариантный (или ковариантный) вектор. Полное число индексов (контравариантных и ковариантных) называется рангом<sup>1)</sup> тензора.

### Тензорная алгебра

Введем теперь алгебру тензоров. Поскольку тензоры были определены только с точки зрения их трансформационных свойств, алгебра тензоров пока еще не введена. Определим операции сложения и умножения тензоров. Правило сложения задается следующим образом<sup>2)</sup>:

$$A^{\dots\mu}_{\dots\nu} + B^{\dots\mu}_{\dots\nu} = (A + B)^{\dots\mu}_{\dots\nu} \quad (10)$$

Складывать можно только тензоры одинаковых рангов по контравариантным и ковариантным индексам, взятым порознь, и только относящиеся к одной и той же точке.

Тот или иной тензор можно задать во всех точках пространства. В таком случае говорят о тензорном

<sup>1)</sup> В литературе также часто употребляется термин «валентность», выгодный в том отношении, что его нельзя смешать с понятием ранга матрицы. — *Прим. перев.*

<sup>2)</sup> Символика весьма сомнительная. Конечно, лучше так: суммой называется тензор

$$C^{\binom{\mu}}_{\binom{\nu}} = A^{\binom{\mu}}_{\binom{\nu}} + B^{\binom{\mu}}_{\binom{\nu}},$$

где  $\binom{\mu}$  — некоторая комбинация индексов одного рода. — *Прим. ред.*



поле<sup>1)</sup>). При сложении тензорных полей складываются соответствующие значения в каждой точке. Складывать тензоры, взятые в разных точках, не имеет смысла, поскольку они преобразуются в различных точках по-разному, и такая сумма не обладала бы необходимыми трансформационными свойствами. Поэтому, чтобы в результате суммирования получить тензор, необходимо складывать тензоры одинакового ранга и вида (в отношении ковариантности и контравариантности), взятые в одной и той же точке.

Операция умножения двух тензоров определяется таким образом, что компоненты результирующего тензора получаются перемножением всех компонент исходных тензоров:

$$A^{\dots\mu\dots} B^{\dots\nu\dots} = (AB)^{\dots\mu\dots\nu\dots}, \quad (11)$$

где  $A^{\dots\mu\dots}$  и  $B^{\dots\nu\dots}$  не обязательно одинакового ранга и не обязательно одинаковы в смысле ковариантности и контравариантности. Ранг результирующего тензора  $AB$  равен сумме рангов перемножаемых тензоров  $A$  и  $B$ . Легко проверить, что тензор-произведение  $(AB)^{\dots\mu\dots\nu\dots}$  действительно преобразуется по тензорному закону.

Определим еще некоторые алгебраические операции. Можно *свернуть* тензор, если произвести суммирование по паре индексов, одному контравариантному и одному ковариантному, получая при этом новый тензор

$$A^{\dots\mu\dots} \quad (12)$$

Ранг свернутого тензора на две единицы меньше ранга исходного. Например, перемножая два вектора  $A^\mu$  и  $B_\nu$ , получим тензор второго ранга  $(AB)_\nu^\mu$ . Свертывание  $(AB)_\nu^\mu$  дает величину  $A^\mu B_\mu$ , которая является скалярным произведением двух векторов и представляет собой тензор нулевого ранга (скаляр).

Важным свойством тензоров, которое сохраняется при преобразованиях, является их симметрия. Она

<sup>1)</sup> В случае тензорного поля коэффициентами линейного преобразования будут значения функции  $\partial x'^\alpha / \partial x^\beta$ , взятые в данной точке, как это имело место выше. — *Прим. ред.*

связана с изменением знака тензора при взаимной перестановке пары индексов одного рода:

$$A^{\dots\mu\dots\nu\dots} = \pm A^{\dots\nu\dots\dots\mu\dots}. \quad (13)$$

В зависимости от того, какой знак, плюс или минус, следует писать для рассматриваемого тензора в выражении (13), такой тензор называется симметричным или антисимметричным по данной паре индексов  $\mu$  и  $\nu$ <sup>1)</sup>. Свойство симметрии тензора инвариантно относительно преобразования координат.

Существует тензор специального вида, так называемый дельта-символ Кронекера, который определяется следующим образом:

$$\delta_{\nu}^{\mu} = \begin{cases} 1 & \text{при } \mu = \nu, \\ 0 & \text{при } \mu \neq \nu. \end{cases} \quad (14)$$

Легко показать, что определенная таким образом величина преобразуется по тензорному закону.

Отметим одно следствие однородности тензорного закона преобразования: если все компоненты какого-либо тензора равны нулю в одной системе координат, то они также будут равны нулю и в любой другой системе координат.

## Тензорные плотности

Существуют и другие величины, преобразующиеся по линейному однородному закону. Эти величины, которые называются тензорными плотностями, играют важную роль в общей теории относительности. Следуя общепринятой форме записи, будем обозначать тензорные плотности заглавными буквами готического алфавита. Тензорная плотность может иметь как контравариантные, так и ковариантные индексы. При преобразовании координат  $\{x\} \rightarrow \{x'\}$  компоненты тензорной плотности  $\mathfrak{T}$

<sup>1)</sup> Существенно, конечно, лишь *положение* этих индексов среди всех прочих, а не та конкретная буква, которой они обозначаются. — *Прим. перев.*

преобразуются следующим образом:

$$\mathfrak{F}'^{\dots\mu\dots} = \left| \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\beta}} \right|^{\omega} \dots \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \dots \mathfrak{F}^{\dots\nu\dots}. \quad (15)$$

В этой формуле  $|\partial x^{\alpha}/\partial x'^{\beta}|$  — якобиан преобразования координат, а целое число  $\omega$  — вес тензорной плотности  $\mathfrak{F}^{\dots\nu\dots}$ .

Существенную роль играет тензорная плотность Леви-Чивита  $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ , определяемая как

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1, & \text{если последовательность индексов} \\ & \mu, \nu, \rho, \sigma \text{ является четной перестановкой} \\ & 1, 2, 3, 4, \\ -1, & \text{если последовательность индексов} \\ & \mu, \nu, \rho, \sigma \text{ является нечетной перестановкой} \\ & 1, 2, 3, 4, \\ 0, & \text{если среди } \mu, \nu, \rho, \sigma \text{ имеется хотя бы} \\ & \text{пара одинаковых индексов.} \end{cases} \quad (16)$$

Можно показать, что  $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  представляет собой (аксиальную) тензорную плотность первого ранга. Эта величина позволяет записать определитель произвольного тензора второго ранга в виде

$$|h_{\mu\nu}| = \frac{1}{4!} \epsilon^{\mu\alpha\rho\nu} \epsilon^{\nu\beta\sigma\delta} h_{\mu\nu} h_{\alpha\beta} h_{\rho\sigma} h_{\gamma\delta}. \quad (17)$$

Здесь  $\epsilon$  обеспечивает нужную комбинацию различных компонент тензора  $h$  в соответствии с определением определителя.

До сих пор мы рассматривали только такие геометрические величины, законы преобразования которых линейны и однородны. Помимо них, существуют геометрические величины и других типов. Например, к числу геометрических величин принадлежит *аффинная связность*. Закон ее преобразования линейен, но не однороден. Об этом речь пойдет несколько позже. Имеются геометрические объекты и с еще более сложными законами преобразования, однако мы не будем на них останавливаться, поскольку в настоящее время они не находят приложения в физике.

## Дифференцирование тензоров

Перейдем теперь к определению операции дифференцирования тензоров и будем обозначать эту операцию с помощью запятой. Так,  $\varphi_{,\mu}$  означает частную производную функции  $\varphi$  по  $x^\mu$ . Вообще же

$$T_{\dots\mu\dots,\nu} \equiv \frac{\partial T_{\dots\mu\dots}}{\partial x^\nu}. \quad (18)$$

Величина  $T_{\dots\mu\dots,\nu}$ , однако, *не является* тензором. Рассмотрим, например, закон преобразования производной вектора:

$$A_{\mu,\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}.$$

В результате преобразования координат  $\{x^\mu\} \rightarrow \{x'^\nu\}$  величина  $A_{\mu,\nu}$  принимает вид

$$A'_{\mu,\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} A_{\rho,\sigma} + \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} A_\rho. \quad (19)$$

Ясно, что это не тензорный закон преобразования. Однако существуют некоторые дифференциальные операции, применение которых приводит к тензорным величинам, а именно по тензорным законам преобразуются следующие комбинации производных:

$$A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}, \quad (20)$$

$$\varphi_{\mu\nu,\rho} + \varphi_{\rho\mu,\nu} + \varphi_{\nu\rho,\mu} \quad (\text{при } \varphi_{\mu\nu} = -\varphi_{\nu\mu}) \quad (21)$$

и

$$A_{\mu\nu\rho,\sigma} - A_{\nu\rho\sigma,\mu} + A_{\rho\sigma\mu,\nu} - A_{\sigma\mu\nu,\rho}, \quad (22)$$

если тензор  $A_{\mu\nu\rho}$  антисимметричен относительно перестановки любой пары из всех трех его индексов.

При помощи дифференциальных операций могут быть построены также и тензорные плотности

$$\mathfrak{A}_{,\mu}^\mu \quad (\text{нулевого ранга}), \quad (23)$$

$$\mathfrak{A}_{,\nu}^{\mu\nu} \quad (\text{для } \mathfrak{A}^{\mu\nu} = -\mathfrak{A}^{\nu\mu}), \quad (24)$$

$\mathfrak{A}_{,\rho}^{\mu\nu\rho}$  (для  $\mathfrak{A}^{\mu\nu\rho}$ , антисимметричной по всем индексам). (25)

$\mathfrak{A}_{,\sigma}^{\mu\nu\rho\sigma}$  (для  $\mathfrak{A}^{\mu\nu\rho\sigma}$ , антисимметричной по всем индексам). (26)

Спросим себя теперь: какую физическую теорию и в каком объеме можно построить, имея в распоряжении только тензоры, тензорные плотности и их производные? Можно, например, используя два антисимметричных тензора второго ранга  $T^{\mu\nu}$  и  $\Phi_{\mu\nu}$ , записать следующие уравнения:

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu}_{;\nu} &= j^{\mu}, \\ \Phi_{\mu\nu,\rho} + \Phi_{\rho\mu\nu} + \Phi_{\nu\rho,\mu} &= 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Если положить

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -D_x \\ -H_z & 0 & H_x & -D_y \\ H_y & -H_x & 0 & -D_z \\ D_x & D_y & D_z & 0 \end{pmatrix} \quad (28)$$

и

$$\Phi_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -E_x \\ -B_z & 0 & B_x & -E_y \\ B_y & -B_x & 0 & -E_z \\ E_x & E_y & E_z & 0 \end{pmatrix} \quad (29)$$

и считать  $j^{\mu}$  плотностью тока, то уравнения (27) оказываются замененными уравнениями Максвелла. Но при отсутствии дополнительных уравнений, связывающих  $B$  и  $E$  с  $H$  и  $D$ , нельзя получить никаких решений не связанных друг с другом систем уравнений (27). Следовательно, сами по себе эти уравнения лишены физического содержания. Напрашивается мысль, что нетривиальная теория, которая касается величин, определенных на многообразии, в первую очередь потребует привлечения сверх введенных антисимметричных величин еще некоторого симметричного тензора второго ранга. Без этого мы либо вообще не построим никакой теории, либо построим теорию, дающую только тривиальное решение. Следовательно, указанным выше способом можно

получить лишь форму уравнений Максвелла, но нельзя выявить всего их содержания.

Необходимость ввести некоторую добавочную структуру, определяемую на многообразии, приводит нас к различным типам геометрий. Рассмотрим сначала *аффинную геометрию*.

### Аффинная геометрия: понятие ковариантного дифференцирования

Чтобы построить аффинную геометрию, выберем какую-нибудь систему координат на нашем многообразии и введем в каждой точке совокупность 64 чисел  $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$  (коэффициентов аффинной связности), которая называется аффинной связностью нашего пространства. Выбор величин  $\Gamma$  определяет тип накладываемой на пространство геометрии. Но этого недостаточно, чтобы определить аффинную связность. Необходимо еще принять некоторое правило, позволяющее по заданным значениям  $\Gamma$  в одной системе координат построить их в другой системе координат. Закон преобразования должен быть таким, чтобы значения величин  $\Gamma$  в новой системе координат однозначно определялись их значениями в исходной системе и самим координатным преобразованием.

Определим закон преобразования  $\Gamma$ , введя понятие ковариантной производной ковариантного вектора (обозначается точкой с запятой перед индексом, указывающим координату, по которой производится дифференцирование):

$$A_{\mu;\nu} \equiv A_{\mu,\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} A_{\rho}. \quad (30)$$

Потребуем, чтобы в этом законе преобразования для  $\Gamma$  сама величина  $A_{\mu;\nu}$  преобразовывалась как ковариантный тензор второго ранга. Тогда закон преобразования для  $\Gamma$  будет иметь вид

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\delta}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma_{\gamma\delta}^{\sigma} + \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}}. \quad (31)$$

Из-за наличия последнего члена в выражении (31) величина преобразуется не по тензорному закону. Тем не

менее, согласно этому закону преобразования, ее компоненты в произвольной системе координат однозначно определяются значениями этих компонент в любой другой системе координат. Следовательно, они зависят только от геометрии, наложенной на пространство, и тем самым относятся к числу величин, характеризующих внутренние свойства пространства.

Если значение аффинной связности  $\Gamma$  задано в некоторой системе координат, то всегда можно найти такую другую координатную систему, в которой все ее компоненты в какой-либо одной точке равны нулю. В этой точке ковариантная производная сводится к обычной производной

$$A_{\mu;\nu} = A_{\mu,\nu}. \quad (32)$$

В малой окрестности этой точки геометрия совпадает с геометрией Минковского для плоского пространства<sup>1)</sup>. Таким образом, любой закон, содержащий обычные производные (справедливый в плоском пространстве)<sup>2)</sup>, можно перевести в закон, справедливый в общей теории относительности (где пространство уже не является плоским), заменяя обычные производные на ковариантные.

Ковариантное дифференцирование контравариантного вектора осуществляется по следующему правилу:

$$B^{\mu}_{;\nu} = B^{\mu}_{,\nu} + \Gamma^{\mu}_{\rho\nu} B^{\rho}. \quad (33)$$

Оно удовлетворяет требованию

$$(A_{\mu} B^{\lambda})_{;\nu} = A_{\mu;\nu} B^{\lambda} + A_{\mu} B^{\lambda}_{;\nu}. \quad (34)$$

Далее в настоящей главе мы везде будем принимать, что связность  $\Gamma$  симметрична по нижним индексам:

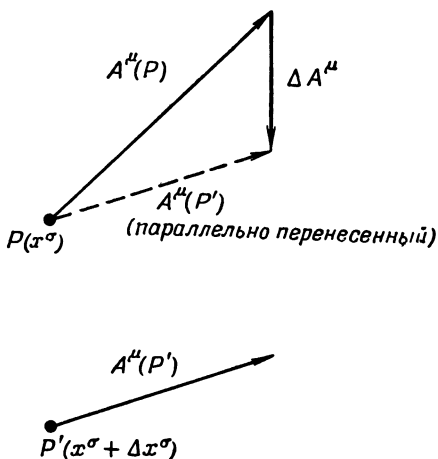
$$\Gamma^{\mu}_{\rho\nu} = \Gamma^{\mu}_{\nu\rho}. \quad (35)$$

<sup>1)</sup> Это неверно: в такой геометрии еще нет понятия «метрики» и, следовательно, нет пространства Минковского. — *Прим. ред.*

<sup>2)</sup> Следует добавить: «и записанный в декартовой системе координат», так как при отличии системы координат от декартовой (например, в сферической системе)  $\Gamma^{\mu}_{\rho\nu} \neq 0$  даже в плоском мире, и следует пользоваться общими формулами, как это делает, например, В. А. Фок. — *Прим. персв.*

## Параллельный перенос; геометрический смысл ковариантного дифференцирования

Теперь мы опишем другой способ введения аффинной связности, более наглядный с точки зрения физики. Он связан с понятием параллельного переноса вектора и с определением производной для векторного поля.



Фиг. 2.1. Параллельный перенос вектора.

Обычно производная некоторой функции определяется как предел

$$\lim_{\Delta x^v \rightarrow 0} \frac{f(x^v + \Delta x^v) - f(x^v)}{\Delta x^v} = \frac{\partial f(x^v)}{\partial x^v}, \quad (36)$$

где  $f(x^v + \Delta x^v) - f(x^v)$  — разность значений функции  $f$  в двух соседних точках  $P'$  и  $P$ . Но для векторного поля такое определение непосредственно не применимо. Операция вычитания векторов, взятых в разных точках, не имеет смысла, так как, вообще говоря, векторы в различных точках преобразуются по-разному. Чтобы устранить это препятствие, мы должны определить операцию параллельного переноса вектора из одной точки  $P'(x^\sigma + \Delta x^\sigma)$  в соседнюю точку  $P(x^\sigma)$  (фиг. 2,1). Компо-



ненты вектора  $\overline{A^\mu(P')}$ , полученного в результате параллельного переноса  $A^\mu(P')$  из  $P'$  в  $P$ , можно записать в виде

$$\overline{A^\mu(P')} = A^\mu(P') - \delta A^\mu. \quad (37)$$

Величина  $\delta A^\mu$  не является вектором. Вид этой величины определяется следующими требованиями:  $\overline{A^\mu(P')}$  должен преобразовываться как вектор в точке  $P$ ;  $A^\mu(P')$  должен преобразоваться как вектор в точке  $P'$ ;  $\delta A^\mu = 0$ , если  $A^\mu = 0$ , и  $\delta A^\mu = 0$ , если  $\Delta x^\sigma = 0$ .

Простейшей функциональной формой, удовлетворяющей этим трем условиям, оказывается следующая билинейная векторная форма:

$$\delta A^\mu = -\Gamma_{\rho\sigma}^\mu A^\rho \Delta x^\sigma, \quad (38)$$

где  $\Gamma_{\rho\sigma}^\mu$  — некоторая новая величина с тремя индексами, которая и определяет операцию параллельного переноса вектора. Вместе с изложенными выше требованиями и соотношением

$$\frac{\partial x'^\nu(P')}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\nu(P)}{\partial x^\mu} + \frac{\partial^2 x'^\nu(P)}{\partial x^\mu \partial x^\sigma} \Delta x^\sigma$$

выражения (37) и (38) определяют закон преобразования величины  $\Gamma_{\rho\sigma}^\mu$ . Этот закон совпадает с законом преобразования (31). Следовательно, при введении аффинной связности на основе понятия параллельного переноса мы получаем такой же результат, как и в случае, когда мы исходим непосредственно из требования, чтобы операция ковариантного дифференцирования носила тензорный характер.

Продолжим теперь геометрическое описание операции ковариантного дифференцирования векторного поля. Чтобы получить ковариантную производную векторного поля в точке  $P$ , необходимо сначала вектор, определяемый полем в точке  $P'$ , перенести параллельно по некоторому пути в точку  $P$  в соответствии с правилами переноса (37) и (38). Вычитая затем из него вектор, взятый в точке  $P$ , получаем

$$\Delta A^\mu = \overline{A^\mu(P')} - A^\mu(P) = A^\mu(P') - \delta A^\mu - A^\mu(P). \quad (39)$$

Поскольку  $\overline{A^\mu(P')}$  и  $A^\mu(P)$  определены в одной и той же точке, их разность тоже будет вектором. В случае малого  $\Delta x^\sigma$  можно записать

$$A^\mu(P') = \frac{\partial A^\mu(P)}{\partial x^\sigma} \Delta x^\sigma + A^\mu(P). \quad (40)$$

Подставляя это выражение в формулу (39), получаем

$$\Delta A^\mu = A^\mu + \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\sigma} \Delta x^\sigma + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu A^\rho \Delta x^\sigma - A^\mu. \quad (41)$$

Ковариантная производная представляет собой предел отношения этой разности к величине  $\Delta x^\sigma$ , характеризующей «расстояние» между точками:

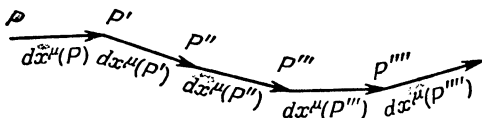
$$A^\mu_{;\sigma} = \lim \frac{\Delta A^\mu}{\Delta x^\sigma} = A^\mu_{,\sigma} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu A^\rho. \quad (42)$$

### Введение геодезических линий в отсутствие метрики

Итак, понятие аффинного пространства связано с понятием параллельного переноса. Опираясь только на это понятие без использования метрики, можно построить геодезические линии, поступая следующим образом: взяв за исходный какой-либо вектор инфинитезимального смещения в точке  $P$ , параллельно перенесем этот вектор вдоль его собственного направления в точку  $P'$ . Это даст новый инфинитезимальный вектор в точке  $P'$ , который можно в свою очередь параллельно перенести вдоль самого себя в точку  $P''$ . Продолжая этот процесс, мы получим ломаную линию, изображенную на фиг. 2.2. Таким образом можно осуществлять параллельный перенос вектора  $dx^\mu$  из любой данной точки в другую. При переходе к бесконечно малым смещениям ломаная линия перейдет в непрерывную кривую. Эта кривая будет исходить из точки  $P$  в определенном направлении и идти далее к другой точке, расположенной

на конечном расстоянии<sup>1)</sup> от исходной. Такая кривая называется *геодезической линией*.

Введем теперь некоторый параметр для обозначения точек вдоль кривой. Выберем параметр  $s$  таким образом, чтобы он преобразовывался как скаляр и имел инвариантные значения в точках  $P$  и  $P'$ . Тогда величина  $dx^\mu/ds$  будет вектором. Согласно условию, которому должна удовлетворять всякая геодезическая, компоненты



Фиг. 2.2. Построение геодезической путем последовательного инфинитезимального параллельного переноса вектора.

вектора  $dx^\mu(P)/ds$ , перенесенного в точку  $P'$ , должны совпадать с компонентами вектора  $dx^\mu/ds$  в точке  $P'$ :

$$\frac{dx^\mu(P)}{ds} - \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{ds} \Delta x^\sigma = \frac{dx^\mu(P')}{ds}. \quad (43)$$

Разделим это уравнение на величину  $\Delta s$  смещения от  $P$  до  $P'$  и перейдем к пределу при  $\Delta s \rightarrow 0$ . Получим

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left\{ \frac{dx^\mu(P')/ds - dx^\mu(P)/ds}{\Delta s} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{ds} \frac{\Delta x^\sigma}{\Delta s} \right\} = 0, \quad (44)$$

или

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{ds} \frac{dx^\sigma}{ds} = 0. \quad (45)$$

Это — уравнение геодезической линии в той форме, когда в качестве параметра, изменяющегося вдоль кривой, берется инвариант  $s$ . Интересно отметить, что данное уравнение получено без использования понятия метрики. При таком способе построения геодезических

<sup>1)</sup> Выражение пока лишено смысла, так как нет метрики и нет понятия расстояния. Поэтому его следует принять лишь как альтернативное к понятию «бесконечно близкое». — *Прим. ред.*

параметром  $s$  можно пользоваться для сравнения длин двух интервалов, лежащих на одной и той же кривой, но не на двух различных кривых<sup>1)</sup>).

В плоском пространстве можно добиться, чтобы величины  $\Gamma$  были равны нулю во всем пространстве, и уравнение (45) геодезической линии примет вид

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} = 0. \quad (46)$$

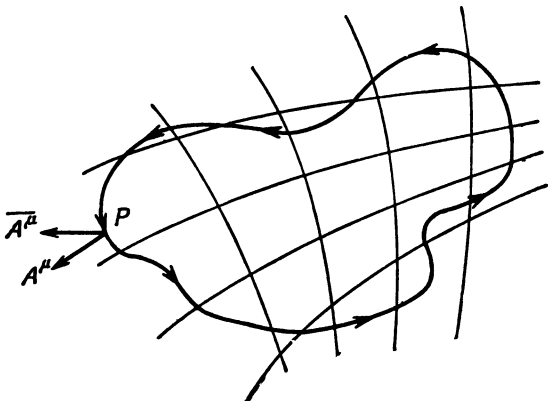
Это — уравнение прямой. Данный вывод отражает внутреннее свойство пространства и не зависит от выбора системы координат, оставаясь в силе, даже если величины  $\Gamma$  не равны нулю. Если существует какая-либо система координат, в которой все  $\Gamma$  тождественно равны нулю, то пространство плоское и геодезические линии прямые.

<sup>1)</sup> Это рассуждение не отличается точностью определений, терминов и метода. Дело обстоит так. Если контравариантный вектор  $v^\alpha$  в пространстве со связностью  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$  все время смещается псевдопараллельно по своему собственному направлению, то получится кривая, называемая *геодезической линией*, которая в этом смысле «прямейшая» и зависит, очевидно, только от направления  $v^\alpha$ , но не от него самого (т. е.  $\rho v^\alpha$  образует ту же геодезическую). При произвольном параметре  $t$  величина  $\delta v^\alpha/dt = 0$  ( $\delta/d$  — абсолютная производная). Если вектор  $v^\alpha = \alpha(dx^\alpha/dt)$  (коллинеарен касательному вектору), то

$$\frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} + T_{\lambda\mu}^\alpha \frac{dx^\lambda}{dt} \frac{dx^\mu}{dt} = \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{d}{dt} \ln \alpha.$$

Отсюда следует, что геодезическая зависит только от  $\Gamma_{(\alpha\beta)}^\lambda$ . Введем новый параметр  $z = z(t)$  так, чтобы правая часть обратилась в нуль. Для этого необходимо и достаточно, чтобы  $(d^2 z/dt^2) + [(d/dt) \ln \alpha] (dz/dt) = 0$ . Отсюда искомый параметр определится с точностью до целого линейного неоднородного преобразования с постоянными коэффициентами. Всякий такой параметр называется *аффинным* или *каноническим* параметром. По самому определению этот параметр не зависит от понятия «метрики», и именно поэтому его *нельзя* использовать для сравнения «длин» на одной или разных кривых до введения метрики; но и после того, как это сделано, на *изотропных* кривых канонический параметр не позволяет сравнивать длины. Но всегда такой параметр, как и всякий другой, впрочем, дает возможность устанавливать на кривой понятия «раньше», «позже», «между». — *Прим. ред.*

Существует простой критерий, позволяющий выяснить, можно ли найти систему координат, в которой все  $\Gamma$  обращаются в нуль. Этот критерий состоит в том, что любой вектор  $A^\mu$ , будучи параллельно перенесенным по замкнутой кривой, должен по возвращении в исходную точку принять свое первоначальное значение. Вообще же это может и не иметь места (фиг. 2.3).



Фиг. 2.3. Параллельный перенос вектора по замкнутому контуру.

Для того чтобы вектор  $A^\mu$  вернулся к своему начальному значению, необходимо, чтобы

$$\oint \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dA^\rho}{ds} ds = 0. \quad (47)$$

Более удобным критерием неискривленности пространства, связанным с интегрированием, будет так называемый тензор кривизны<sup>1)</sup>.

$$B_{\kappa\lambda\mu}^\nu = -\Gamma_{\kappa\lambda, \mu}^\nu + \Gamma_{\kappa\mu, \lambda}^\nu + \Gamma_{\alpha\lambda}^\nu \Gamma_{\kappa\mu}^\alpha - \Gamma_{\alpha\mu}^\nu \Gamma_{\kappa\lambda}^\alpha. \quad (48)$$

Можно показать, что 1) величина  $B_{\kappa\lambda\mu}^\nu$  является тензором, и 2) если  $B_{\kappa\lambda\mu}^\nu = 0$  сразу повсюду, то существует система координат, в которой все  $\Gamma$  обращаются в нуль во всем пространстве, т. е. пространство будет плоским. Этот тензор играет важную роль в римановой геометрии, а следовательно, будет занимать существенное место и в общей теории относительности.

<sup>1)</sup> Тензор Римана у некоторых авторов. — Прим. ред.

## Метрический тензор

Согласно основному положению общей теории относительности, мировая линия свободной частицы в четырехмерном пространстве — времени является геодезической линией. Аффинная связность определенным образом выражает геометрические свойства пространства, а следовательно, связана также с гравитацией и с динамическими свойствами. Но для описания геометрии недостаточно одних геодезических. Нужен еще способ, позволяющий сравнивать расстояния вдоль различных геодезических. Для этого нам нужно установить, каким образом определяется инвариантное расстояние между каждой парой точек пространства.

Как уже упоминалось, всегда можно найти такую систему координат, в которой связности  $\Gamma$  обращаются в нуль в некоторой данной точке. Малая область пространства в окрестности этой точки оказывается подобной плоскому пространству<sup>1)</sup>, и мы можем ввести здесь метрику частной теории относительности. Это означает, что можно стандартным образом, известным из частной теории относительности, определить пространственно-временное расстояние между близкими точками. Оно дается формулой

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (49)$$

где

$$(\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (50)$$

Это — метрика Минковского.

Интересно отметить, что не всегда оказывается возможным непротиворечивым образом ввести метрику в аффинную геометрию. Возьмем, например, простран-

---

<sup>1)</sup> Это утверждение весьма неточно. Лучше сказать, что в каждой точке искривленного пространства можно построить касательное к нему плоское пространство — этим и исчерпывается упомянутое «подобие». — *Прим. перев.*

ство — время, инвариантное относительно галилеевой группы преобразований:

$$\begin{aligned}x' &= x - v_x t, \\y' &= y - v_y t, \\z' &= z - v_z t, \\t' &= t.\end{aligned}\tag{51}$$

В определении такого пространства содержатся понятия параллельного переноса и аффинной связности. Действительно, здесь можно говорить об однозначном параллельном переносе на конечные расстояния. Это значит, что можно говорить о параллельности векторов, находящихся на большом расстоянии друг от друга, и, следовательно, рассматриваемое пространство является плоским. Однако ввести несингулярную метрику в таком пространстве оказывается невозможным.

Дело в том, что при отличном от нуля расстоянии во времени  $\Delta t$  расстояние в пространстве можно путем преобразования вида (51) сделать любым, тогда как временной промежуток будет оставаться неизменным. Следовательно, мы не можем однозначно определить расстояние в пространстве — времени. Только в том случае, когда точки не разделены во времени, расстояние между ними можно определить однозначно. Это будет геометрия трехмерного плоского пространства, соответствующего определенному моменту времени. В пространстве Минковского такой неприятности не возникает, так как время там не инвариантно и существует предельная скорость <sup>1)</sup>.

Метрика, определяемая величинами  $\eta_{\mu\nu}$  в формуле (50), получает свое естественное обобщение в случае

<sup>1)</sup> Здесь фактически допущено незаконное в этом случае предположение о применимости метрики Минковского или какой-либо другой *фиксированной* метрики для определения пространственно-временных интервалов. В действительности, как это проанализировал, например, Мёллер (С. Møller, *The Theory of Relativity*, Oxford, 1952), преобразования Галилея приводят к системам координат, в которых время *не ортогонально* пространственным координатам, но в остальных отношениях эти системы так же хороши, как лоренцовы, если применять общее выражение для метрики. — *Прим. перев.*

произвольного риманова пространственно-временного континуума. Мы можем просто-напросто определить инфинитезимальное расстояние между двумя соседними точками формулой

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (52)$$

где  $g_{\mu\nu}$  — некоторое новое тензорное поле.

Дав такое определение, можно поставить вопрос: нет ли какой-либо связи между метрикой  $g_{\mu\nu}$  и аффинной связностью  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ , которая была введена при определении операции параллельного переноса. Оказывается, что такое соотношение существует, и его можно получить, если потребовать, чтобы геодезические линии, построенные методом параллельного переноса, были кратчайшими линиями между двумя точками. Уравнение кривой, вдоль которой расстояние между двумя точками в пространстве будет наименьшим, при определении расстояния согласно (52) имеет вид

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \rho\sigma \end{matrix} \right\} \frac{dx^\rho}{ds} \frac{dx^\sigma}{ds} = 0, \quad (53)$$

где величины  $\left\{ \begin{matrix} \mu \\ \rho\sigma \end{matrix} \right\}$ , называемые обычно символами Кристоффеля, определяются формулой

$$\left\{ \begin{matrix} \mu \\ \rho\sigma \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (g_{\nu\rho, \sigma} + g_{\sigma\nu, \rho} - g_{\rho\sigma, \nu}). \quad (54)$$

Величины  $g^{\mu\nu}$ , входящие в эту формулу, вскоре будут выражены через  $g_{\mu\nu}$ . Как видно из сравнения уравнений (45) и (53), геодезическая линия будет совпадать с линией наименьшей длины, если положить

$$\Gamma_{\rho\sigma}^\mu \equiv \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \rho\sigma \end{matrix} \right\}. \quad (55)$$

Используя это тождество, можно выразить тензор  $B^{\lambda\mu\nu}$ , определенный формулой (48), через метрические величины. Метрический тензор можно считать симметричным, так как антисимметричные компоненты не дадут вклада в величину  $ds^2$ . Поэтому он имеет только 10 независимых компонент. Отметим для сравнения, что симметричная аффинная связность имеет 40, а произволь-



ная — 64 независимые компоненты. Эти 10 компонент  $g_{\mu\nu}$  заключают в себе геометрическую структуру общей теории относительности<sup>1)</sup>).

При введении понятия вектора контравариантные и ковариантные векторы были определены раздельно и не было указано никакого правила, позволяющего определить ковариантные компоненты какого-либо данного вектора по его контравариантным компонентам. Будем определять ковариантные компоненты любого контравариантного вектора, полагая просто

$$A_{\mu} = g_{\mu\nu} A^{\nu}. \quad (56)$$

Отсюда, в частности,

$$A^{\nu} g_{\mu\nu} A^{\mu} \equiv A_{\mu} A^{\mu}. \quad (57)$$

Далее мы можем определить тензор  $g^{\alpha\beta}$ , обратный тензору  $g_{\mu\nu}$ , в соответствии с равенством

$$g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta_{\gamma}^{\alpha}, \quad (58)$$

где

$$\delta_{\gamma}^{\alpha} = \begin{cases} 1 & \text{при } \alpha = \gamma, \\ 0 & \text{при } \alpha \neq \gamma. \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$A^{\nu} = g^{\nu\mu} A_{\mu}. \quad (59)$$

Выражения (56) и (59) дают правила поднятия и опускания тензорных индексов.

Поясним теперь смысл ковариантных и контравариантных компонент вектора. В случае косоугольной системы координат имеются два способа описания компонент вектора. В одном случае этот вектор проектируется на некоторую совокупность направлений, параллельных базисным векторам координатной системы. Эти проекции представляют собой ковариантные компоненты вектора. В другом случае вектор раскладывается на составляющие, параллельные базисным векторам координатной

<sup>1)</sup> Которая, однако, определяется не числом 10, а видом функций  $g_{\alpha\beta}(x^1, x^2, x^3, x^4)$ . — *Прим. ред.*

системы. Эти составляющие являются контравариантными компонентами вектора. Отсюда ясно, что поднятие и опускание индексов не изменяет внутренних свойств вектора, а изменяет лишь способ его описания.

### Кривизна в римановой геометрии

Тензор, получаемый из тензора  $B^{\lambda\mu}$  опусканием его единственного верхнего индекса, обычно называют тензором Римана — Кристоффеля<sup>1)</sup>:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\mu\alpha} B^{\mu}_{\beta\gamma\delta}. \quad (60)$$

Этот тензор имеет следующую геометрическую интерпретацию. На двух произвольных векторах  $\xi^\mu$  и  $\eta^\mu$ , заданных в некоторой точке четырехмерного пространства, можно построить совокупность векторов  $\omega^\mu$ , взяв всевозможные линейные комбинации  $\xi^\mu$  и  $\eta^\mu$ :

$$\omega^\mu \equiv \xi^\mu u + \eta^\mu v; \quad (61)$$

скаляры  $u$  и  $v$  могут принимать здесь любые значения.

Проведем теперь из этой точки все геодезические, для которых  $\omega^\mu$  являются касательными векторами. Совокупность этих геодезических образует некоторую двумерную поверхность в четырехмерном пространстве. Кривизну этой двумерной поверхности можно определить как кривизну сферы, построенной так, что она с точностью до величин второго порядка совпадает с нашей поверхностью в окрестности рассматриваемой точки.

Эта кривизна, определяемая на базе двух векторов  $\xi^\mu$  и  $\eta^\mu$ , обозначается буквой  $K$  и выражается следующей формулой:

$$-K = \frac{R_{\mu\nu\rho\sigma} \zeta^{\mu\nu} \zeta^{\rho\sigma}}{(g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma}) \zeta^{\alpha\gamma} \zeta^{\beta\delta}}, \quad (62)$$

1) Лучше сказать, что при  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \left\{ \begin{smallmatrix} \mu \\ \alpha\beta \end{smallmatrix} \right\}$   $B^{\mu}_{\beta\gamma\delta} = R^{\mu}_{\beta\gamma\delta}$ , так как автор уже с полным основанием указал, что *один и тот же* тензор можно рассматривать как в ковариантном, так и контравариантном аспекте, говоря о его компонентах. — *Прим. перев.*

где

$$\zeta^{\alpha\beta} \equiv \xi^\alpha \eta^\beta - \xi^\beta \eta^\alpha. \quad (63)$$

Итак,  $R$  вместе с  $g$  описывает кривизну поверхности, задаваемой векторами  $\xi^\mu$  и  $\eta^\mu$ .

Имеется другой важный тензор, играющий существенную роль в общей теории относительности. Это так называемый тензор Риччи  $R_{\mu\nu}$ , определяемый формулой <sup>1)</sup>

$$R_{\mu\nu} \equiv R^{\lambda}_{\mu\nu\lambda}. \quad (64)$$

Скалярная кривизна  $R$  по определению равна

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (65)$$

Она имеет простую геометрическую интерпретацию. Определим вначале понятие ортогональности векторов. Два вектора  $A^\mu$  и  $B^\mu$  ортогональны друг другу, если

$$g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = 0. \quad (66)$$

Это свойство инвариантно. В  $n$ -мерном пространстве можно построить систему  $n$  векторов, которые все ортогональны друг другу. Каждая пара таких векторов задает некоторую двумерную поверхность. В четырехмерном пространстве существует шесть таких поверхностей, проходящих через любую заданную точку. Средняя кривизна этих шести поверхностей и является скалярной кривизной  $R$ .

Рассмотрим далее среднюю скалярную кривизну трехмерного подпространства, ортогонального к произвольному заданному вектору  $\xi^\mu$ . Кривизна  $K$  этого подпространства выражается формулой

$$K = \frac{G_{\mu\nu} \xi^\mu \xi^\nu}{\xi^\mu \xi_\mu}, \quad (67)$$

<sup>1)</sup> У некоторых авторов тензор Риччи берется как  $R^{\lambda}_{\mu\nu\lambda}$ , т. е. отличается знаком от определенного формулой (64). — Прим. перев.

где величина  $G_{\mu\nu}$  по определению есть

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R. \quad (68)$$

Тензор  $G_{\mu\nu}$  играет фундаментальную роль в структуре уравнений поля общей теории относительности<sup>1)</sup>.

### Свойства симметрии в геометрии

Выяснив, как путем введения в арифметическом многообразии тех или иных геометрических величин можно получать различные типы геометрии, обратимся теперь к рассмотрению свойств симметрии этих различных типов геометрии. Мы все отдаем себе отчет о той роли, которую играет симметрия в формулировке физической теории, и особенно частной и общей теории относительности Эйнштейна. Свойства симметрии важны в первую очередь тем, что они накладывают ограничения на теории, которые можно было бы предложить для описания данной физической системы. Так, например, требование частно-релятивистской инвариантности приводит к ограничению числа полей, описывающих частицы.

Каковы же в таком случае свойства симметрии арифметического многообразия? Арифметическое многообразие характеризуется тем, что ни одну точку многообразия невозможно отличить от другой точки. Стоило бы нам только «потеряться» в таком многообразии, и у нас не было бы никакой возможности сообщить о своем местоположении, ибо здесь нет никаких геометрических «вех» или ориентиров. Единственными свойствами, которыми обладает арифметическое многообразие, являются топологические свойства, такие, как его связность<sup>2)</sup>. Эти свойства не меняются при какой бы то ни было деформации многообразия, вроде закручивания

<sup>1)</sup> Тензор  $G_{\mu\nu}$  называется консервативным тензором Эйнштейна и удовлетворяет дифференциальным тождествам  $G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ . — *Прим. перев.*

<sup>2)</sup> Речь идет о топологической связности, а не об аффинной связности  $\Gamma$ ! — *Прим. перев.*

или растяжения, если только деформация недостаточна для его разрыва.

Чтобы сформулировать эту мысль точнее, можно ввести понятие отображения или преобразования точек многообразия самих в себя. Каждой точке  $P$  многообразия сопоставляется некоторая новая точка  $P'$ , причем к соответствию предъявляется единственное требование, чтобы многообразие при этом не разрывалось. Иными словами, топологически близкие друг другу точки должны отображаться в точки, также топологически близкие друг другу. Когда точка  $P$  переводится в точку  $P'$ , вместе с ней должна переноситься и топология окрестности точки  $P$ , заменяя топологию окрестности  $P'$ . Поскольку локальная топология всегда предполагается евклидовой, то ясно, что замена топологии в точке  $P'$  топологией в точке  $P$  ничего не изменяет в многообразии. Следовательно, арифметическое многообразие допускает самое общее топологическое преобразование, так что его симметрия есть симметрия группы всех возможных топологических преобразований.

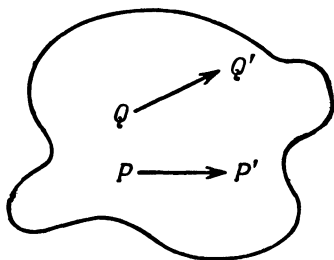
Все сказанное можно выразить в аналитической форме, осуществляя координатизацию многообразия. Если координатами точки  $P$  будет совокупность чисел  $\{x^\mu\}$  и координатами сопоставляемой с ней точки  $P'$  — совокупность чисел  $\{x'^\nu\}$ , то отображение можно выразить, задавая  $x'$  как функции  $x$  для каждой пары соответственных точек. Так как координатизация предполагается непрерывной, по крайней мере в конечных областях, то все отображение, или преобразование, выражается соотношением

$$x'^\mu = x'^\mu(\{x^\nu\}). \quad (69)$$

Таким образом, с помощью любого набора четырех функций  $x'^\mu(\{x^\nu\})$  можно осуществить некоторое топологическое преобразование.

В случае инфинитезимальной деформации или отображения такое отображение можно представить, задавая на многообразии некоторое векторное поле. Элементами поля будут векторы, которые получатся, если соединить каждую точку  $P$  с бесконечно близкой к ней точкой  $P'$  короткой стрелкой, проведенной от  $P$  к  $P'$

(фиг. 2.4). В таком случае говорят, что многообразие допускает *группу «движений»*, порождаемую этим векторным полем. Так как отображения, оставляющие топологию неизменной, произвольны, если не считать указанных ранее ограничений, то всякое векторное поле, заданное на многообразии, порождает некоторое возможное «движение»<sup>1)</sup>.



Фиг. 2.4. Инфинитезимальное отображение многообразия в самого себя.

Что произойдет со свойствами симметрии пространства, если на это пространство наложить геометрическую структуру, например ввести аффинную связность или метрический тензор? Отображая точки нашего многообразия в другие точки, нужно всегда сравнивать геометрическую структуру в каждой из двух сопоставляемых точек. Только в том случае, когда эти структуры одинаковы, можно утверждать, что отображение инвариантно и что это характеризует некоторую симметрию пространства.

Легко сообразить, что при любом наложении геометрической структуры на наше многообразие происходит сужение группы симметрии от группы всевозможных топологических отображений до некоторой ее подгруппы. Так, например, введение лоренцовой метрики в многообразии ограничивает группу симметрии до группы преобразований Лоренца. В случае метрики некото-

<sup>1)</sup> Это не «движение» в метрических пространствах, вообще говоря. — *Прим. ред.*

рых других типов может вообще не существовать никакой группы симметрии.

Поскольку в дальнейшем речь пойдет почти исключительно о метрических геометриях, мы будем рассматривать только их свойства симметрии, хотя подобные рассуждения можно провести и для случаев аффинной и проективной геометрий. Задача, следовательно, будет состоять в нахождении общих условий, при которых некоторое отображение или преобразование многообразия оставляет неизменной наложенную на него метрическую структуру. Для простоты ограничимся только случаем бесконечно малого движения от «старых» точек к «новым». Поскольку всякое конечное преобразование можно осуществить как последовательность инфинитезимальных преобразований, это ограничение не отразится на общности наших рассуждений<sup>1)</sup>.

Пусть векторное поле  $\xi^\mu(x)$  переводит точку  $P$  с координатами  $\{x^\mu\}$  в точку  $P'$  с координатами  $\{x^\mu + \xi^\mu(x)\}$ . Так как метрические коэффициенты образуют тензор, они преобразуются следующим образом:

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma}. \quad (70)$$

При этом  $x'^\mu$  являются координатами точки  $P'$ , так что

$$x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x). \quad (71)$$

Поскольку величины  $\xi$  предполагаются бесконечно малыми, обратное преобразование будет иметь вид

$$x^\mu = x'^\mu - \xi^\mu(x'). \quad (72)$$

Таким образом, метрика, которую это преобразование индуцирует в точке  $P'$ , выразится формулой

$$g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - g_{\mu\rho} \xi^\rho_{,\nu} - g_{\rho\nu} \xi^\rho_{,\mu}, \quad (73)$$

в правой части которой все величины предполагаются вычисленными в точке  $P$ .

<sup>1)</sup> Это не совсем так. Всякому конечному движению отвечает бесконечно малое, но не наоборот. — *Прим. ред.*

Первоначальная метрика в точке  $P'$  может быть выражена через величины, взятые в точке  $P$ , если разложить метрику в окрестности точки  $P$  в ряд Тейлора:

$$g_{\mu\nu}(x + dx) = g_{\mu\nu} + g_{\mu\nu, \rho} \xi^{\rho}. \quad (74)$$

Отсюда разность двух метрик  $g'_{\mu\nu}$  и  $g_{\mu\nu}(x + dx)$  оказывается равной

$$\overline{\delta g}_{\mu\nu} = -g_{\mu\rho} \xi^{\rho}_{, \nu} - g_{\rho\nu} \xi^{\rho}_{, \mu} - g_{\mu\nu, \rho} \xi^{\rho}. \quad (75)$$

Необходимым и достаточным условием того, что движение, порождаемое векторным полем  $\xi^{\rho}(x)$ , не меняет геометрии, будет равенство двух метрик, определяемых формулами (73) и (74):

$$\overline{\delta g}_{\mu\nu} = 0. \quad (76)$$

Из (76) вытекает уравнение для  $\xi$ , которое можно записать в следующей компактной форме:

$$\xi_{\mu; \nu} + \xi_{\nu; \mu} = 0. \quad (77)$$

Оно известно как *уравнение Киллинга*, и всякое векторное поле, удовлетворяющее этому уравнению, называют векторным полем Киллинга. Подобные условия можно получить для векторного поля, порождающего движение, при котором аффинная геометрия некоторого пространства остается инвариантной. Поскольку уравнение (77) содержит только геометрические объекты (вектор  $\xi$ ) и включает только геометрические операции (ковариантное дифференцирование), то оно представляет собой геометрическое уравнение и не зависит от способа координатизации пространства. Векторы Киллинга, будучи операторами инфинитезимальных инвариантных движений пространства, определяют свойства симметрии этого пространства. В свою очередь свойства симметрии определяют инфинитезимальные операторы. Поскольку произвольное векторное поле, вообще говоря, не удовлетворяет уравнению (77), то соответствующее пространство обладает значительно более узкой группой симметрии, чем арифметическое многообразие, как и утверждалось ранее.



Сказанное нами лучше всего проиллюстрировать на примере геометрии плоского пространства — времени частной теории относительности. При введении в таком пространстве декартовых координат метрика во всех точках многообразия принимает форму (50). (Для определения векторов Киллинга нет необходимости использовать декартовы координаты; для этой цели пригодна любая система координат. Но в случае декартовых координат уравнения Киллинга значительно упрощаются.) Если пространство плоское и координаты декартовы, то ковариантные производные, фигурирующие в уравнении (77), переходят в обычные. В этом случае наиболее общее решение будет иметь вид

$$\xi_{\mu} = \epsilon_{\mu\nu} x^{\nu} + b_{\mu}, \quad (78)$$

где  $\epsilon_{\mu\nu}$  — произвольная постоянная антисимметричная матрица, а  $b_{\mu}$  — четверка произвольных чисел. Как с очевидностью следует из этой формулы, определяемые ею  $\xi$  служат операторами инфинитезимальных неоднородных преобразований Лоренца.

Подобным же образом можно находить векторы Киллинга, связанные с другими метриками. В случае метрики Шварцшильда одно киллинговское поле представляет трансляцию по времени. Следовательно, метрика Шварцшильда симметрична во времени, т. е. статична. Другое, шестипараметрическое поле Киллинга представляет вращения в пространстве, и, следовательно, шварцшильдова метрика также сферически симметрична. Подчеркнем еще раз, что векторы Киллинга являются геометрическими объектами, которые характеризуют некоторую присущую пространству симметрию и потому совершенно не зависят от способа координатизации рассматриваемого многообразия.

На этом мы заканчиваем краткий обзор тензорного анализа и дифференциальной геометрии. Не претендуя на полноту и строгость изложения, мы хотели лишь обратить внимание читателя на основные идеи тех областей геометрии, которые играют важную роль в общей теории относительности. Более детальное рассмотрение этих вопросов он найдет в литературе, список которой прилагается ниже.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Schrodinger E., Space-Time Structure, Cambridge, 1960.  
В этой небольшой книге, отличающейся чрезвычайной ясностью изложения, читатель найдет подробное обоснование многих результатов, изложенных нами лишь в самых общих чертах.
2. Weyl H., Space-Time-Matter, New York, 1950.  
Эта книга до сих пор является одной из фундаментальнейших монографий в области математической физики и содержит исключительно глубокий анализ теории относительности и геометрии, несмотря на то что первое ее издание появилось в 1918 г. В нашей лекции мы во многих случаях следовали трактовке Вейля.
3. Pauli W., Theory of Relativity, New York, 1958 (имеется перевод предыдущего издания: В. Паули, Теория относительности, ИЛ, 1947).  
В этом прекрасном обзоре теории относительности дается сжатое, но четкое изложение аппарата римановой геометрии.
4. Eisenhart L. P., Riemannian Geometry, Princeton, N. J., 1926 (2nd ed., 1949) (имеется перевод первого издания: Л. П. Эйзенхарт, Риманова геометрия, ИЛ, 1948).  
Книга представляет собой хорошо написанный учебник по курсу римановой геометрии. Часть материала книги выходит за рамки обычной университетской программы; к сожалению, не рассматриваются последние работы в данной области.
5. Willmore T. J., An Introduction to Differential Geometry, Oxford, New York, 1959.  
В книге хорошо излагаются результаты многих исследований в области дифференциальной геометрии.
6. Александров П. С., Elementary Concepts of Topology, New York, 1961 (см. также: Александров П. С., Ефремович В. А., Очерк основных понятий топологии, М.—Л., 1936).  
В этой книге дается превосходное введение в топологию. Основные идеи топологии излагаются так, что они становятся интуитивно ясными, чему способствует обилие иллюстраций. Стиль книги — полная противоположность абстрактной манере изложения математических дисциплин.

# 3

## *Гравитация как геометрия (I): геометрия пространства — времени и геометродинамический стандартный метр*

Р. МАРЦКЕ, ДЖ. УИЛЕР

### **Каков реальный смысл искривленного пустого пространства?**

В теории Эйнштейна гравитация рассматривается как проявление геометрии искривленного пустого пространства. Какая другая мысль может показаться менее удобоваримой?! Ведь и просто искривленное пространство очень трудно себе представить, а говорить об искривленном *пустом* пространстве вообще кажется нелепым. Как же найти реальную почву в таком «безвоздушном» представлении?

### *Наглядный пример геометрии искривленного многообразия*

Рассмотрим упрощенную картину, в которой более выпукло проявляются те же вопросы. Допустим, что дано перечисление названий городов. Пусть дана таблица расстояний между этими городами. Как узнать, что эти города расположены на искривленной поверхности, а не на плоскости?

Возьмем, например, крупнейшие аэропорты мира: Азорские острова, Берлин, Бомбей, Буэнос-Айрес, ... . Будем писать их сокращенно: АЗ, БЕ, БО, БА, ... . Начнем с того, что составим таблицу расстояний между этими аэропортами в виде матрицы, разделенной на строки и столбцы, как это сделано в табл. 3.1.

Мы только начали составлять таблицу, как вдруг ветер вырвал у нас из рук этот клочок бумаги и унес его

Таблица 3.1

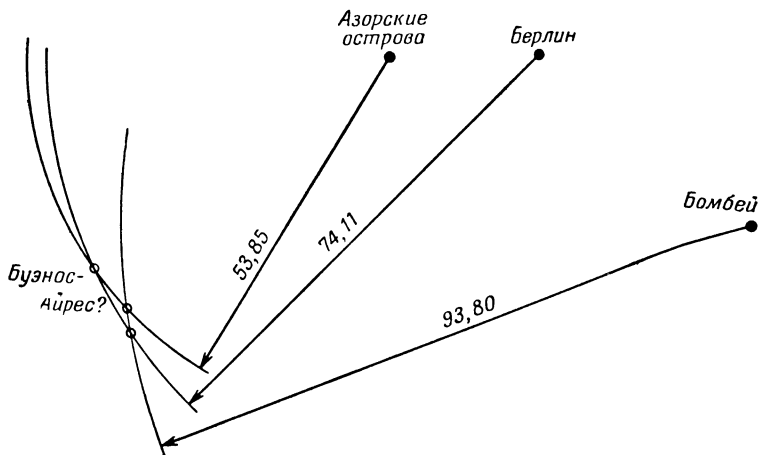
Таблица протяженности авиалиний, позволяющая выявить геометрию земного шара

	АЗ	БЕ	БО	БА	...
АЗ	0	2148	5930	5385	...
БЕ	2148	0	3947	7411	...
БО	5930	3947	0	9380	...
БА	5385	7411	9380	0	...
...	...	...	...	...	...

прочь. Упал он посреди группы студентов, работающих в поле со своими инструментами и тоже составляющих таблицы. Один из них подобрал наш листок и заглянул в него. Он приколот к планшету свежий лист бумаги, поставил на нем карандашом черную точку и приписал: АЗ. Отмерив от этой точки линейкой 21,48 см, он поставил вторую точку, БЕ. Третий шаг тоже не вызвал затруднений: пониже он нашел точку БО, лежащую на расстоянии 59,30 см от АЗ и в 39,47 см от БЕ. Но когда он перешел к последнему столбцу в табл. 3.1, возникла трудность. При всем своем желании студент не мог определить положения четвертой точки БА, которое согласовалось бы со всеми числами последнего столбца (фиг. 3.1).

Пока он ломал голову, пытаясь хоть как-нибудь понять смысл таблицы чисел на листе бумаги, и начал уже терять надежду найти решение задачи, к нему подошел товарищ и узнал о происшествии. Товарищ заметил: «А почему бы не нанести эти числа на искривленную поверхность?» После небольшой дискуссии всем стало ясно, что мысль вполне разумна. Ведь наверняка существует сфера *некоторого* радиуса, на которой все эти расстояния укладываются в соответствии друг с другом. Один из студентов оказался сильным в геометрии и даже вычислил требующийся для решения задачи радиус кривизны. Оказалось, что он равен 39,60 см. Тут

другой студент вспомнил, что радиус Земли составляет около 4000 миль, и предположил, что все расстояния в таблице, должно быть, даны в сотнях миль. Теперь оставался всего лишь какой-то один шаг для того, чтобы наши студенты поняли весь смысл этой таблицы.



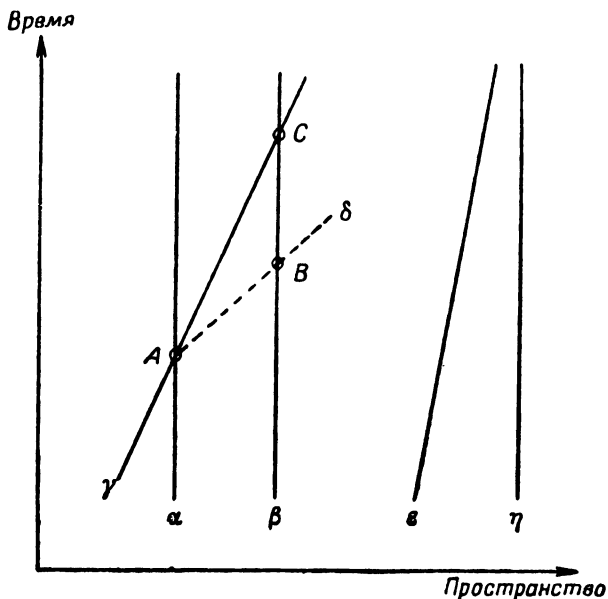
Ф и г. 3.1. На плоской поверхности невозможно найти такой четвертой точки (Буэнос-Айрес), которая лежала бы на правильных расстояниях от уже нанесенных на плоскость положений трех других аэропортов.

Мораль приведенной истории достаточно ясна. Геометрия определяется заданием расстояний между всеми парами точек. Например, нам нужно определить геометрию лодки. Сначала положим ее на берегу вверх дном. В днище примерно через каждый фут во всех направлениях втыкаются булавки, а затем измеряются и заносятся в таблицу расстояния между ними

Для определения геометрии пространства — времени тоже было бы достаточно определить расстояния между всеми точками, более или менее густо покрывающими рассматриваемую область. Но где же эти точки? Ведь в пространство — время не воткнешь булавок!

### События — точки в пространстве — времени, определенные независимо от координат

При определении точки в пространстве — времени лучше вернуться к эйнштейновскому представлению о событии как о пересечении мировых линий двух бесконечно малых пробных частиц, или двух световых лучей, или одного луча и одной частицы. Такое пересечение



Фиг. 3.2. Примеры мировых линий.

Мировые линии  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются другой мировой линией  $\gamma$  и световым лучом  $\delta$ . Точками их пересечения определяются события  $A$ ,  $B$  и  $C$ .

имеет смысл совершенно независимо от выбранной системы координат. О событии (фиг. 3.2) можно говорить, опираясь либо на одну, либо на какую-то другую систему координат, либо не пользуясь вообще никакой системой координат.

На схеме фиг. 3.2 изображено лишь несколько мировых линий и событий. Можно представить себе и более

подробную схему — целый лабиринт мировых линий и их пересечений. От такой картины легко перейти к идеализированному предельному случаю — бесконечно густой паутине световых лучей и мировых линий бесконечно малых пробных частиц. Ее можно было бы сравнить с громадной копной сена. Тогда точки соприкосновения травинки соответствовали бы всюду плотному множеству пересечений мировых линий. Определенные таким образом события заполняют все пространство — время. Каждое из них объективно дано вне зависимости от того, кто его наблюдает.

Добавим к понятию события понятие *расстояния* между двумя событиями. Представим себе гигантскую таблицу результатов наблюдений, состоящую из множества строк и столбцов. Каждая строка относится к определенной точке, и каждый столбец относится к определенной точке. На пересечении данных строки и столбца записывается интервал собственного времени или собственного расстояния между двумя соответствующими точками. Как измерять такой интервал — это еще предстоит решить. Но пока поверим, что кто-то нашел способ такого измерения расстояний. В идеализированном случае представим себе бесконечное множество строк и столбцов. Тогда наша таблица будет содержать все необходимые исходные данные для того, чтобы можно было определить геометрию пространства — времени. Правда, она будет такой тяжелой, что ее придется возить на тачке. Поэтому встает вопрос: а нет ли способа попроще для выражения той информации, которая содржится в нашей всеобъемлющей таблице?

*Для определения геометрии достаточно указать расстояния между близкими точками*

Ясно, что незачем узнавать расстояние между Нью-Йорком и Сан-Франциско, если уже известны расстояния между Нью-Йорком и Чикаго и между Чикаго и Сан-Франциско, а кроме того, гарантировано, что Чикаго лежит на пути следования авиалинии, соединяющей два города на противоположных краях материка. Тогда достаточно сложить два меньших расстояния,

чтобы получить искомое большее. Иначе говоря, зачем пользоваться такой подробной таблицей, какую мы только что описали. Достаточно знать расстояния между любой данной точкой и всеми другими точками, лежащими в непосредственной близости от нее, и больше ничего не нужно.

### **Аддитивность расстояний**

Если у нас имеется таблица расстояний между любой точкой и всеми другими точками, лежащими в непосредственной близости от нее, то путем сложения мы можем определить расстояние между любой данной точкой  $A$  и другой данной точкой  $P$ . Естественно, это расстояние будет зависеть от выбора пути. Электронной машине можно задать программу для вычисления длин всевозможных путей, связывающих две данные точки. Пусть, выполнив вычисление, машина выдает только экстремальное значение расстояния — вдоль того «геодезического пути», который приводит к экстремуму. Собственно, необязательно даже составлять программу для такого вычисления. Вопрос становится ясным, как только выясняется принципиальная возможность проведения такой операции. Итак в качестве исходных данных не следует брать расстояния между достаточно удаленными друг от друга событиями, их нужно вычеркнуть из нашей таблицы. Это упрощение номер один.

### **Перечисление точек упрощается отношением их к четырем семействам координатных поверхностей**

Упрощением номер два является способ перечисления точек. Можно было бы начать с того, что сопоставить каждой точке семизначный телефонный номер. Такие номера, однако, будут все заполнены намного раньше, чем мы закончим нашу работу. Поэтому мы введем вместо них четыре однопараметрических семейства поверхностей. Одно такое семейство поверхностей можно сравнить со стопкой автомобильных крыльев, последовательно пронумерованных. Представьте себе другое семейство поверхностей, пересекающихся и взаимно пе-



реплетающихся с поверхностями первого семейства на подобие того, как устроена решетка для упаковки яиц (только решетка должна быть очень искаженной и криволинейной). В трехмерном пространстве для удобства перечисления положений всех точек достаточно пользоваться тремя такими независимыми и взаимопроникающими семействами поверхностей. Три координаты,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  или  $x^1$ ,  $x^2$ ,  $x^3$  определяют порядковые номера всех трех пересекающихся в рассматриваемой точке поверхностей. В пространстве — времени для определения положения данного события достаточно четырех семейств координатных поверхностей.

*Единственное требование — требование непрерывности и независимости; предпочтительных систем координат не существует*

Координатные поверхности введены только из бухгалтерских соображений. Они пересекают множество событий с должной непрерывностью и независимостью каждого семейства от остальных — вот и все. Эти четыре семейства поверхностей определяют «телефонный номер» из четырех чисел ( $t$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) для каждой точки, о которой заходит речь. Телефонный номер данной точки изменится ( $\bar{t}$ ,  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $\bar{z}$ ), если мы перейдем к другой системе перечисления, основанной на совершенно других семействах поверхностей. Эта новая система перечисления (каталогизации), если она также удовлетворяет требованиям непрерывности и независимости, столь же хороша, как и старая. Ни одна система перечисления сама по себе не содержит никакой информации о кривизне. Без указания *расстояний* координаты дают не больше количественной информации о геометрии пространства — времени, чем названия аэропортов об искривленности поверхности Земли.

*Координаты как номера каталога*

Когда выбрана *какая-нибудь* координатная система, любую точку  $P$  в огромной паутине событий можно занести в наш каталог в виде четырех чисел, записанных

в определенном порядке  $(x, y, z, t)$ . Соседняя точка  $P'$  в каталоге будет обозначена четырьмя близкими числами  $(x+dx, y+dy, z+dz, t+dt)$ .

*Упрощение, обусловленное конечной мерностью пространства — времени*

В окрестности точки  $P$  находится бесконечное множество точек  $P', P'', P''', \dots$ . Может показаться, что для нахождения расстояний между всеми этими точками требуется задавать бесконечное множество чисел. Но эти опасения напрасны, ибо пространство — время обладает конечным числом измерений.

Мерность мира проявляется в том, что расстояния между соседними точками не являются независимыми. Например, в двумерном пространстве между тремя точками 1, 2 и 3 можно определить три расстояния (12), (23) и (31), являющиеся произвольными с точностью до неравенства треугольника. Но для того, чтобы указать положение четвертой точки, достаточно уже задать два расстояния (14) и (24). Третье расстояние (34) полностью определяется тогда из остальных данных с точностью до выбора знака плюс или минус при извлечении квадратного корня. То же самое мы имеем и в случае пространства большего числа измерений. На этом основании можно показать, что *расстояние от любой точки до соседней билинейно выражается через разности координат этих точек по формуле*

$$(ds)^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \quad (1)$$

(См. приложение к данной главе, посвященное дальнейшему обсуждению этого вопроса.) Здесь использовано условие суммирования Эйнштейна, согласно которому при повторении какого-либо индекса подразумевается суммирование по этому индексу. Каждый индекс независимо пробегает столько значений, сколько имеется измерений; таким образом,  $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$ . *Метрические коэффициенты* в выражении (1) — позднее мы будем называть их *гравитационными потенциалами* — могут без

ограничения общности считаются *симметричными* по отношению к перестановке индексов, так что

$$g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}. \quad (2)$$

Благодаря такой симметрии для определения расстояний между какой-либо типичной точкой и бесконечным множеством точек в непосредственной близости от нее, кроме разностей координат  $dx^0$ ,  $dx^1$ ,  $dx^2$  и  $dx^3$ , нужно знать только 10 дополнительных величин, а не 16. Таким образом, размеры нашей таблицы, по которой мы определяем геометрию пространства — времени, весьма существенно уменьшились.

Конечно, метрические коэффициенты  $g_{\alpha\beta}$  обычно зависят от положения точки. При практическом подходе к вопросу эти величины, однако, нужно знать не повсюду, а в отдельных точках, достаточно близких друг к другу. Записанные таким образом данные поступают к операторам вычислительной машины, работающим на верхнем этаже нашей воображаемой лаборатории. Они преобразуют таблицы со значениями  $g_{\alpha\beta}$  в формулы для нахождения кривых и выдадут аналитическое выражение  $g_{\alpha\beta}$  для функций четырех координат. Полученные десять формул коротко выражают все исходные данные, характеризующие геометрию пространства — времени. Вся огромная таблица исходных данных сжимается в итоге в десяток формул.

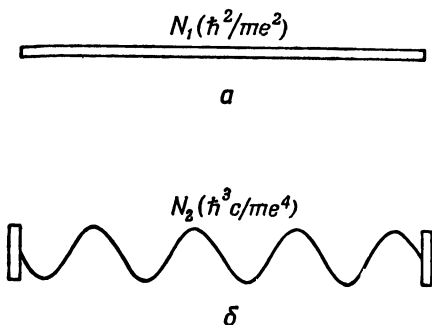
Обратимся теперь к реальному способу определения расстояния между двумя соседними точками в пространстве — времени.

### **Вопрос о часах и измерительных линейках, состоящих из атомов**

В старых курсах теории относительности для определения интервалов собственного времени и собственного расстояния предлагалось пользоваться часами и измерительными линейками, состоящими из атомов. Но позднее был поставлен вопрос, не изменяются ли некоторые физические константы по мере расширения Вселенной. Если это так, то со временем могут меняться массы

элементарных частиц, а может быть, и величина кванта заряда. Такие изменения должны по-разному влиять на два обычных эталона длины.

Взять, например, платиново-иридиевый стержень, служивший эталоном с 1889 по 1960 г. Стандартная длина отмечена на нем двумя метками, между которыми



Фиг. 3.3. Два эталона длины, зависящих от разных комбинаций физических постоянных.

$a$  — платиново-иридиевый эталон метра;  $b$  — эталон метра, основанный на длине волны света.

заклучено некоторое фиксированное число атомов, входящих в кристаллическую решетку стержня. Величина одной ячейки этой решетки равна простому кратному размеров атома водорода. Таким образом, она зависит от тех же физических констант, которые определяют размеры атома водорода. Говоря точнее, нужно учесть еще некоторые другие величины, например заряд ядер атомов платины и иридия. Включение этих безразмерных целочисленных величин не меняет сути дела: именно на основании принципов атомной физики можно утверждать, что платиново-иридиевый метр имеет длину, пропорциональную боровскому радиусу  $\hbar^2/me^2$ , причем коэффициентом пропорциональности является безразмерное число  $N_1$  (фиг. 3.3).

С октября 1960 г. стандартный метр был определен как 1 650 763,73 длины волны красно-оранжевой линии спектра инертного газа  $Kr^{86}$ .

Длина этого эталона зависит от тех же физических величин, что и длина волны простейших линий спектра водорода (если не считать еще безразмерных множителей, зависящих от заряда ядра атома криптона и конкретных значений квантовых чисел, характеризующих рассматриваемые атомные уровни). Вспомним, что с точностью до численного множителя длины волн линий водородного спектра определяются величиной  $h^3c/me^4$  (по боровской теории атома водорода). Поэтому новый эталон метра можно приравнять  $N_2(h^3c/me^4)$ , где  $N_2$  — безразмерное число.

*Отношение двух эталонов изменяется, если изменяется константа тонкой структуры*

Величина обоих эталонов совпадала в момент установления нового эталона в 1960 г., причем

$$\frac{\left( \begin{array}{l} \text{Метр, определенный с помощью} \\ \text{линии криптонового спектра} \end{array} \right)}{\left( \begin{array}{l} \text{Метр, определенный с помощью} \\ \text{платиново-иридиевого стержня} \end{array} \right)} = \frac{N_2 (\hbar^3 c / m e^4)}{N_1 (\hbar^2 / m e^2)} = \frac{N_2 \hbar c}{N_1 e^2}. \quad (3)$$

Числа  $N_2$  и  $N_1$  не могут изменяться со временем. Величина же отношения физических констант

$$\frac{\hbar c}{e^2} = 137,037 \dots$$

может изменяться со временем в процессе расширения Вселенной, если верить доводам, выдвинутым Дираком и Дикке. В настоящее время невозможно окончательно решить, правильно ли их предположение. Еще не найдено ничего такого, что с полной определенностью показало бы, меняется ли со временем безразмерное отношение физических постоянных или нет.

Допустим, что  $\hbar c/e^2$  действительно меняется со временем. Тогда вместе с ним будет изменяться и отношение двух эталонов. Мы наталкиваемся на серьезное затруднение: какой же из этих двух метров верный? А если один из них неправильный, то откуда нам знать, не будет ли неправильным и другой?

## Классическая общая теория относительности не должна отражать закономерностей квантовой физики

Поставим вопрос иначе: зачем вообще нужно было привлекать представления об атомном строении вещества для того, чтобы определить эталон длины? зачем включать в определение основ классической общей теории относительности квант действия? зачем при измерениях длины основываться *либо* на  $\hbar^2/me^2$ , *либо* на  $\hbar^3c/me^4$ ?

Бор и Розенфельд [1], исследуя общую структуру физической теории, подчеркнули, что всякая последовательная теория должна в себе самой содержать все необходимое для определения рассматриваемых в ней величин. Согласно этому принципу, классическая общая теория относительности должна быть сама пригодна для такой разметки пространства и времени, которая была бы совершенно не связана с квантом действия.

### Вейль и Лоренц

История поисков внутреннего для теории метода сравнения длин содержит интересные детали. В первых изданиях своей книги «Пространство, время, материя» Вейль [2] утверждал, что достаточно исследовать свойства световых лучей, для того чтобы найти пути сравнения неизвестного интервала  $CD$  между двумя соседними событиями, лежащими в произвольной области пространства — времени, с интервалом  $AB$  между двумя другими взятыми за основу событиями. Тогда Лоренц [3] в виде возражения привел пример двух миров: одного с метрикой  $g_{\alpha\beta}(x)$ , а другого с метрикой  $g'_{\alpha\beta}(x) = \lambda(x) g_{\alpha\beta}(x)$ , где  $\lambda(x)$  — произвольная функция точки. Он показал, что траектории световых лучей — а поэтому и точки их пересечения — совпадают в обоих пространствах, хотя геометрия последних, очевидно, различна. Отсюда он сделал вывод, что для последовательного метода сравнения расстояний необходимо использовать мировые линии не только световых лучей,

но и частиц вещества. Вейль внес в последующие издания своей книги соответствующие поправки. Но ни Вейль, ни Лоренц не указали способа, с помощью которого можно было бы фактически определить пространственно-временной интервал. Это было сделано лишь Марцке в его принстонской диссертации<sup>1)</sup>.

### Методика измерений по Марцке

Мы изложим здесь основные моменты этой диссертации ввиду ее определяющего значения в логическом обосновании теории относительности. Изложение естественно распадается на следующие пять частей: 1) идеализированный случай плоского пространства; 2) построение мировой линии, параллельной некоторой данной; 3) построение геодезических часов; 4) установление связи между исследуемым интервалом и временем, которое отсчитывают геодезические часы; 5) такое расширение пространственно-временной области рассмотрения, что становится необходимым учет кривизны.

#### *Локально плоское пространство — время*

(1) Чтобы можно было говорить об идеализированном случае плоского мира, нужно уже иметь возможность обнаруживать искривленность пространства — времени. В этой связи вспомним один из способов выяснения того, что поверхность Земли искривлена. Натянем между некоторыми двумя точками  $B$  и  $C$  нить; пусть ее длина будет равна 100 км. Протянем из  $B$  еще одну нить, на этот раз длиной 1000 км, до некоторой точки  $A$ , расположенной к тому же так, чтобы нить  $AB$  образовала с основанием  $CB$  в точке  $B$  прямой угол. Подобным же образом натянем и из  $C$  1000-километровую нить до некоторой точки  $D$ , которую выберем

---

<sup>1)</sup> Не опубликована, 1959 г. Настоящая лекция основана на материалах этой работы, и, таким образом, в ней публикуются результаты диссертации Марцке.

так, чтобы  $DC$  и  $BC$ , встречаясь в точке  $C$ , образовали там прямой угол. Построили ли мы таким образом прямоугольник? Нет, так как концы  $A$  и  $D$  находятся на расстоянии, меньшем 100 км. Относительная разница меньших сторон полученной фигуры равна

$$\frac{\text{Разность этих сторон}}{\text{Первоначальная длина}} = \frac{BC - AD}{BC} =$$

$$= \frac{\left( \begin{array}{l} \text{Длина пути, перпендикулярного} \\ \text{к направлению первоначального} \\ \text{основания} \end{array} \right)^2}{2 \times (\text{Радиус кривизны})^2} = \frac{(100 \text{ км})^2}{2 \times (6378 \text{ км})^2} = \frac{1}{81} \cdot (4)$$

Перенесем эти рассуждения на случай пространства — времени. Рассмотрим две частицы, на которые не действуют ни электромагнитные, ни какие бы то ни было другие силы, за исключением, возможно, тяготения, причем их взаимное гравитационное притяжение пренебрежимо мало. Для начала расположим их на определенном удалении друг от друга, а относительные скорости их сделаем равными нулю. Посмотрим, не начнет ли уменьшаться расстояние между ними (фиг. 3.4). Если да, то можно утверждать, что мы получили доказательство искривленности мира. Можно даже обойтись без измерения расстояний. Для того чтобы получить качественное доказательство наличия искривленности пространства — времени, достаточно дождаться, пока первоначально параллельные мировые линии частиц не пересекутся друг с другом.

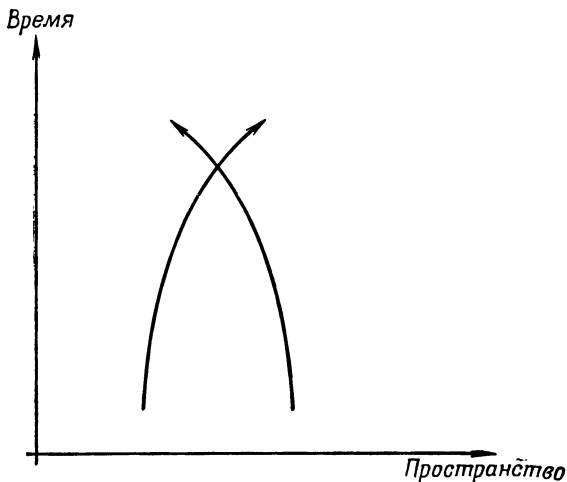
Но не будет ли искажаться движение наших двух пробных тел в результате их столкновений с другими объектами? Ведь известно, что спутник, движущийся вокруг Земли, тормозится пылью, которую он встречает на своем пути, и заметно отклоняется от идеально геодезического движения.

Движение по идеальной геодезической можно обеспечить, взяв экранированный двойной спутник, предложенный Шварцшильдом. Такая конструкция состоит из двух концентрических сфер: внутренней, или идеального спутника<sup>1)</sup>, и внешней — спутника, снабженного кор-

<sup>1)</sup> Авторы называют этот внутренний спутник *conscience* (сознание). — *Прим. перев.*



ректирующими ракетными двигателями. Внутренний спутник управляет внешним таким образом, чтобы он двигался, словно космической пыли не существует. В гл. I о пробном теле такого рода уже говорилось более подробно.



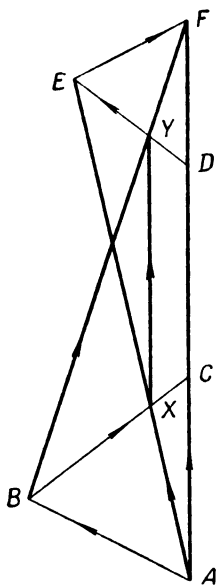
Фиг. 3.4. Факт пересечения двух мировых линий, бывших вначале параллельными, качественно говорит об искривленности пространства.

Расстояние от точек начала пути до первого пересечения между первоначально параллельными траекториями дает возможность определить радиус кривизны. Возьмем теперь такую малую область пространства — времени, что внутри нее можно пренебречь влиянием кривизны. Точнее говоря, пусть имеется оценка эффективного радиуса кривизны пространства — времени  $\rho$  и задана необходимая степень точности. Тогда из выражения (4) можно определить, насколько малой должна быть область пространства — времени, чтобы относительная ошибка не превышала установленного допустимого значения. Другими словами, ограничиваясь рассмотрением достаточно малых областей пространства —

времени, мы можем приближенно с любой желаемой степенью точности придерживаться версии идеализированного плоского пространства — времени.

### Построение параллельной

(2) Определив понятие идеально плоского, мы сделаем теперь следующий шаг — приступим к построению линии, параллельной данной. При рассмотрении кривизны мы уже допустили возможность построения параллельных. Остается узнать, как именно следует строить эти параллельные в действительности.



Фиг. 3.5. Построение мировой линии  $XY$ , параллельной данной мировой линии  $AF$ .

Тонкие линии — траектории световых лучей, использованных в процессе построения.

На фиг. 3.5  $ACDF$  является мировой линией некоторой частицы. Задача: найти мировую линию, параллельную  $ACDF$ .

Решение:

1) Найдем такую пробную частицу, которая столкнется с данной частицей (линия  $BF$ , пересекающая  $ACDF$  в точке  $F$ ).

2) Пусть первая частица испускает световой импульс в некоторой точке  $A$  ее мировой линии. Этот импульс отражается второй частицей в строго определенной точке  $B$  и возвращается к первой частице в хорошо известной точке  $C$ .

3) Выделим таким образом световой луч  $BC$  и закончим этим первый этап построения.

4) Вторым этапом построения базируется на рассмотрении мировой линии третьей частицы, пересекающей мировую линию первой частицы в точке, совпадающей с уже известным событием  $A$ . Кроме того, она пересекает уже известный световой луч  $BC$  в некоторой произвольной промежуточной точке  $X$ . Ввиду локально плоского характера пространства — времени продолжение этой мировой линии также пересекает  $BF$ .

5) Пусть на пути следования первой частицы она все время излучает световые импульсы. Каждый импульс излучения отражается от третьей частицы и возвращается к первой. После ряда таких импульсов мы определим, наконец, точку  $D$  и световые лучи  $DE$  и  $EF$ . В силу локально плоского характера пространства — времени луч  $DE$  также пересечет линию  $BF$  — в точке  $Y$ .

6) Две точки  $X$  и  $Y$  будут нашими отправными точками. Рассмотрим из числа всевозможных бесконечно малых пробных частиц, движущихся в различных направлениях с разными скоростями, такую, которая приходит из точки  $X$  в точку  $Y$ . Ее мировая линия и будет искомой параллельной  $XU$  относительно исходной мировой линии  $ACDF$ .

Описанный способ построения можно проверить, взяв локально лоренцову систему отсчета, в которой все мировые линии и световые лучи представляют собой прямые линии. Выберем начало системы в точке  $A$ , а ось времени — по линии  $ACDF$ , так что первая частица будет покоиться. Тогда можно последовательно найти координаты всех точек, участвующих в нашем построении, как показано в табл. 3.2.

Таблица 3.2

Анализ построения на фиг. 3.5 в декартовых координатах, показывающий, что мировая линия  $XY$  параллельна данной мировой линии  $ACDF$

Событие или цепь событий	$(x, t)$	Основание
$A$	$(0, 0)$	Выбор системы координат
$C$	$(0, 2a)$	Выбор системы координат; определение $a$
$B$	$(-a, -a)$	Точка $B$ связана световым лучом с $A$ и $C$
$E$	$(-b, c)$	Задание $b$ и $c$
$D$	$(0, c - b)$	Точка $D$ лежит на оси и связана световым лучом с $E$
$F$	$(0, c + b)$	То же для точки $F$
$AE$	$bt + cx = 0$	Положения точек $A$ и $E$
$BC$	$t - x = 2a$	Положения точек $B$ и $C$
$X$	$\left(-\frac{2ab}{b+c}, \frac{2ac}{b+c}\right)$	Пересечение $AE$ и $BC$
$BF$	$at + (a - b - c)x = a(b + c)$	Положения точек $B$ и $F$
$DE$	$t + x = c - b$	Положения точек $D$ и $E$
$Y$	$\left(-\frac{2ab}{b+c}, c - b + \frac{2ab}{b+c}\right)$	Пересечение $DE$ и $BF$
$XY$	$x = -\frac{2ab}{b+c}, t - \text{любое}$	Положения точек $X$ и $Y$

### Локально инерциальные системы отсчета

Проведенное исследование основывается на предположении о существовании инерциальной системы отсчета, т. е. системы, в которой мировые линии всех световых лучей и всех свободных частиц представляются прямолинейными. Наличие около поверхности Земли гравитационного поля не является препятствием для установления там такой системы отсчета. Траектории

свободных частиц представляются прямолинейными, если их рассматривать из свободно падающего лифта. Этот вывод следует из опытов Этвёша и Дикке и из принципа эквивалентности Эйнштейна. Требуется лишь, чтобы лифт был не слишком большим. Если в свободно падающем лифте две пробные частицы находятся друг от друга на горизонтальном удалении  $\Delta x$ , то в дальнейшем они падают вниз с одинаковым ускорением  $g = GM/r^2$ , где  $r$  — расстояние от центра Земли, а  $M$  (в килограммах) или  $M^* = GM/c^2$  (в метрах) — масса Земли. Но направления ускорений обеих частиц составляют малый угол  $\theta = \Delta x/r$ . Поэтому две падающие частицы движутся навстречу друг другу с ускорением  $g\theta$  м/сек<sup>2</sup>, или

$$\frac{d^2(\Delta x)}{d(\text{Время в метрах пути, пройденного светом})^2} = -\frac{g}{c^2} \frac{\Delta x}{r} = -\frac{M^*}{r^3} \Delta x. \quad (5)$$

Здесь величина  $M^*/r^3 = 1,71 \cdot 10^{-23} \text{ м}^{-2}$  равна кривизне пространства, вызванной гравитационным полем Земли. Для того чтобы относительное изменение длин, вызываемое этой кривизной, было менее  $10^{-8}$ , длительность опыта в падающем лифте должна удовлетворять неравенству

$$1,71 \cdot 10^{-23} \text{ м}^{-2} \times (\text{Время в метрах пути, пройденного светом})^2 \leq 10^{-8}, \quad (6)$$

так что длительность опыта должна быть менее  $3 \cdot 10^7 \text{ м}$ , или  $0,1 \text{ сек}$ . Этот промежуток времени несравнимо больше того срока, который требуется для установления двух параллельных мировых линий, лежащих на расстоянии  $5 \text{ м}$ , по способу, показанному на фиг. 3.5. Таким образом, этот способ вполне приемлем в масштабах лабораторного опыта.

### Геодезические часы

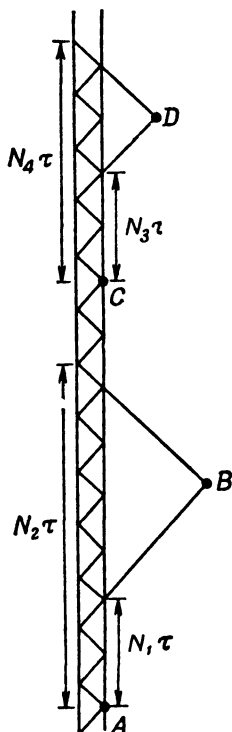
(3) Имея две частицы, мировые линии которых параллельны, мы можем заставить световой импульс последовательно отражаться от этих частиц и, таким образом, циркулировать между ними. Тем самым мы

определим геодезические часы. Они, так сказать, «тикают» всякий раз, когда световой импульс возвращается к частице номер один. Будут ли эти часы идти быстро или медленно — дело нашего выбора: ближе или дальше друг от друга будут две параллельно движущиеся частицы. Во всяком случае, вопрос об атомной структуре объектов не будет иметь никакого отношения к скорости хода часов.

### *Геометродинамический стандартный метр; сравнение интервалов*

(4) Геодезические часы служат для сравнения неизвестного интервала  $CD$  со стандартным интервалом  $AB$ . Событие  $A$  может быть искровым разрядом, происшедшим 50 лет назад, а  $B$  — таким же разрядом, происшедшим лишь немного позднее. Эти две вспышки будут служить калибровочными точками при измерении всех прочих пространственно-временных интервалов. Они определяют, так сказать, *геометродинамический стандартный метр*. Как же выразить некоторый неизвестный интервал  $CD$  через величину стандартного интервала  $AB$ ?

Найдем мировую линию, проходящую через точки  $A$  и  $C$  (фиг. 3.6). Мы будем считать, что это возможно, иначе говоря, примем, что событие  $C$  будет лежать внутри светового конуса с вершиной в  $A$ . Затем найдем параллельную мировую линию в непосредственной близости к  $AC$ . Эти две мировые линии вместе с последовательно отражающимся между ними световым импульсом образуют геодезические часы. Обозначим через  $\tau$  длительность одного светового зигзага, начавшегося и кончившегося на  $AC$ . Определим теперь отношение между периодом  $\tau$  тиканья наших геодезических часов и стандартным интервалом  $AB$  собственного времени. Для этого среди событий, лежащих на мировой линии  $AC$ , выберем то, световой импульс из которого пришел в  $B$ . Такое событие произойдет позднее, чем  $A$ . Сосчитаем число периодов (тиканий)  $N_1$  от  $A$  до испускания этого импульса. Рассмотрим также возвращение светового импульса из  $B$  на  $AC$ . Сосчитаем вновь число периодов,



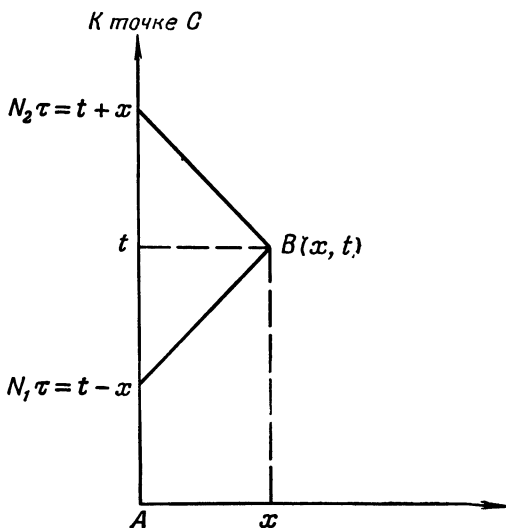
Ф и г. 3.6. Использование геодезических часов для сравнения интервалов  $CD$  и  $AB$ .

Одна частица в этих часах движется параллельно мировой линии другой частицы на малом расстоянии от нее. Наклонные линии изображают световые лучи. Анализ, проделанный Марцке, приводит к соотношению  $CD/AB = \sqrt{N_3 N_4 / N_1 N_2}$ .

прошедших до этого момента от  $A$ ; пусть это будет  $N_2$ . Величина интервала  $AB$  находится тогда из простого соотношения

$$AB = \tau \sqrt{N_1 N_2}. \quad (7)$$

Для доказательства этой формулы перейдем к лоренцевой системе отсчета (фиг. 3.7), в которой мировая линия  $AC$  изображает покоящуюся частицу, а событие  $A$  лежит в начале координат. Обозначим через  $x$  и  $t$



Фиг. 3.7. Световые лучи, идущие к точке  $B$  и от нее, в системе отсчета, в которой мировая линия  $AC$  описывает покоящуюся частицу.

(и то и другое в метрах) координаты события  $B$  в этой системе отсчета. Тогда время *испускания* импульса в направлении к  $B$  есть

$$N_1\tau = t - x, \quad (8)$$

а время *возвращения* этого импульса к геодезическим часам есть

$$N_2\tau = t + x. \quad (9)$$

Перемножая (8) и (9) и извлекая квадратный корень, получим (7).

Подобным же образом можно выразить интервал  $CD$  через периоды наших часов как  $CD = \tau \sqrt{N_3 N_4}$ . Наконец, неизвестный прежде интервал выражается теперь через величину стандартного интервала  $AB$  и наблюдаемые числа  $N_1, N_2, N_3$  и  $N_4$ :

$$\frac{CD}{AB} = \sqrt{\frac{N_3 N_4}{N_1 N_2}}. \quad (10)$$



## Более общие сравнения

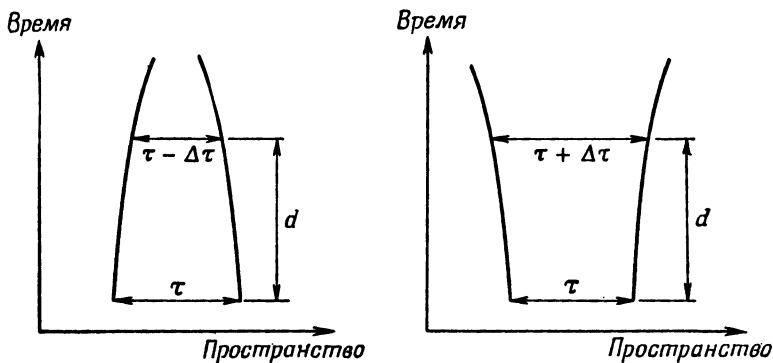
Сделаем еще несколько замечаний. Нет необходимости, чтобы интервалы  $AB$  и  $CD$  были временноподобными. Например, когда интервал  $AB$  пространственноподобный, то это просто значит, что число  $N_1$  будет отрицательным. Другими словами, световой импульс в направлении  $B$  должен быть испущен до того, как произошло событие  $A$ . Подобные же соображения относятся и к знаку числа  $N_3$ . Следовательно, можно дать простое физическое истолкование мнимому значению отношения, фигурирующего в формуле (10): в этом случае один из интервалов  $AB$  и  $CD$  пространственно-, а другой временноподобный. Можно, кроме того, сравнить интервалы  $AB$  и  $CD$  даже в том случае, если  $A$  и  $C$  невозможно связать временноподобной мировой линией. Для этого следует лишь выбрать новое событие  $E$ , лежащее так далеко в будущем и так расположенное в пространстве, что как  $AE$ , так и  $CE$  временноподобны, и взять дополнительно событие  $F$  достаточно близко к  $E$ . Тогда отношения  $EF/AB$  и  $EF/CD$  можно найти прежним способом, а отсюда мы найдем и отношение  $CD/AB$ .

Еще одно замечание: через величину стандартного интервала  $AB$  можно выразить все другие интервалы, как пространственно-, так и временноподобные. Между единицами, используемыми для выражения величины интервалов длины и интервалов времени, нет никакой разницы. Величина  $3 \cdot 10^8$  нигде не фигурирует. Во внутренней геометрии физики значение световых лучей и светового конуса более явственно выступает на поверхность. Истинная роль скорости света здесь уже не смешивается с тривиальным соотношением двух различных единиц интервала — метра и секунды, имеющих чисто историческое и случайное происхождение.

## Случай искривленного пространства — времени

(5) Перейдем теперь к сравнению интервалов  $AB$  и  $CD$ , отделенных друг от друга во временноподобном направлении большим участком *искривленного* простран-

ства — времени. Как и прежде, найдем траекторию  $AC$  бесконечно малой нейтральной пробной частицы, свободно движущейся от  $A$  к  $C$ . Найдем вторую геодезическую, параллельную  $AC$  в точке  $A$ , с помощью уже описанных нами методов. Если мы теперь попробуем использовать такую пару геодезических, как два «зеркала» для световых импульсов, с тем чтобы получить



Ф и г. 3.8. Если в работу геодезических часов не внесена поправка, то интервал между последовательными тиканьями в области, где эффективная кривизна отличается от нуля и практически постоянна, изменяется пропорционально квадрату прошедшего времени  $d$ .

Изображенные слева сходящиеся геодезические соответствуют области положительной кривизны; справа изображены расходящиеся геодезические (область отрицательной кривизны).

геодезические часы, то у нас ничего не выйдет. Ввиду искривленности пространства — времени расстояние между геодезическими меняется (фиг. 3.8).

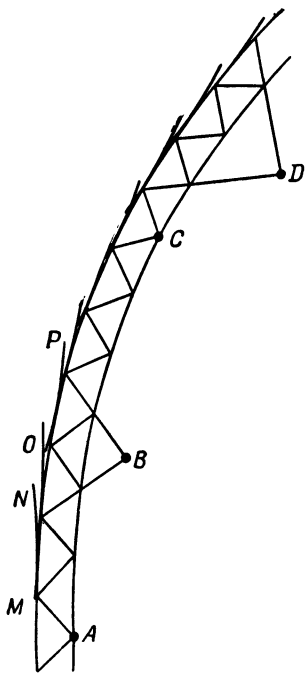
Меняется и период наших часов. Пусть, например, геодезические имеют протяженность  $d$  в области пространства, где эффективный радиус кривизны имеет порядок  $R$ . Тогда относительное изменение периода часов будет порядка

$$\frac{\Delta\tau}{\tau} \sim \left(\frac{d}{R}\right)^2. \quad (11)$$

Эта погрешность геодезических часов будет недопустимо велика, если не вводить поправки на всем участке

$d=L$  между  $AB$  и  $CD$ , где величина  $L$  сравнима с самим радиусом кривизны.

Вместо того чтобы безуспешно пытаться применять геодезические часы для измерения всего интервала, мы



Фиг. 3.9. Каждая из множества геодезических  $MN$ ,  $OP$  и т. д. остается параллельной данной геодезической  $AC$  на протяжении, достаточном для последовательного переноса в будущее интервала времени  $T$  с требуемой степенью точности.

разобьем его на  $N$  малых интервалов (фиг. 3.9) сравнимой длительности  $d=L/N$ . В каждом таком интервале будем использовать свои геодезические часы. Тогда относительная ошибка каждого часа будет порядка

$$\left(\frac{\Delta\tau}{\tau}\right)_1 \sim \left(\frac{d}{R}\right)^2 \sim \left(\frac{L}{NR}\right)^2. \quad (12)$$

Расхождение между периодом тиканья в конце и в начале будет порядка

$$\left(\frac{\Delta\tau}{\tau}\right)_{\text{полн}} \sim N \left(\frac{\Delta\tau}{\tau}\right)_1 \sim \frac{1}{N} \left(\frac{L}{R}\right)^2. \quad (13)$$

Эта погрешность может быть сделана сколь угодно малой, если взять достаточно большое количество  $N$  отдельных геодезических часов. Таким образом, искривленность пространства — времени не вызывает затруднений при сравнении с любой степенью точности произвольным образом разделенных интервалов с использованием световых лучей и геодезических.

### *Квантовые эффекты*

Все сказанное выше относится к достаточно большим масштабам, так что квантовыми эффектами можно пренебрегать. Общая теория относительности рассматривается нами в рамках классической физики. Хотя квантовые эффекты и представляют интерес, на них мы останавливаться не будем (см. работы [4—7]).

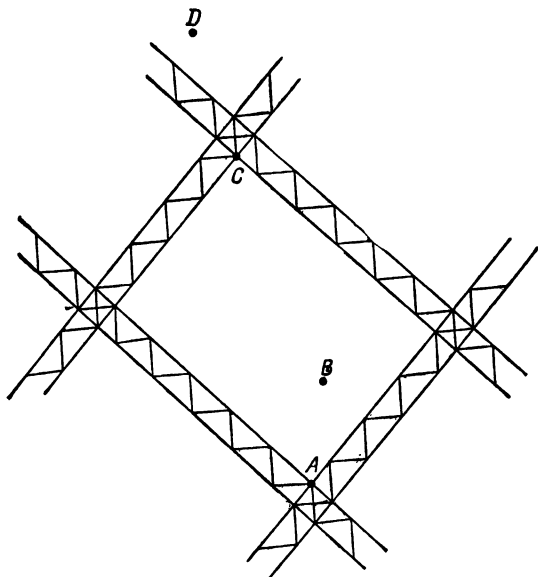
### **Отношения длин не зависят от пути переноса**

Перейдем теперь к главному вопросу. Определим величину отношения  $CD/AB$ , пользуясь сначала одним путем переноса для сравнения, а затем другим (фиг. 3.10). Сравним обе получившиеся таким образом величины. Совпадут ли они? Расхождений еще никто и никогда не наблюдал. Поэтому мы можем принять основной постулат римановой геометрии, что *отношение  $CD/AB$  не зависит от выбора пути переноса при сравнении.*

*Геометрия, в которой отношение интервалов зависит от пути их переноса для сравнения*

Постулат римановой геометрии не является очевидным и может быть даже (в принципе) неправильным. Например, Вейль предложил (отказавшись от этого впоследствии) единую теорию электромагнетизма и

тяготения, которая не опиралась на постулат Римана. В теории Вейля длина двух линеек, выбранная одинаковой в точке  $A$  пространства — времени, оказывается *различной*, если эти линейки перенести по различным



Фиг. 3.10. Два возможных пути переноса интервалов  $AB$  и  $CD$  для их сравнения.

Основным постулатом римановой геометрии является предположение о полной независимости отношения  $CD/AB$  от выбора пути переноса.

путям в одну и ту же точку  $C$ . Относительное изменение их длины (фиг. 3.11)

$$\frac{\delta L}{L} = \ln \frac{L_2}{L_1},$$

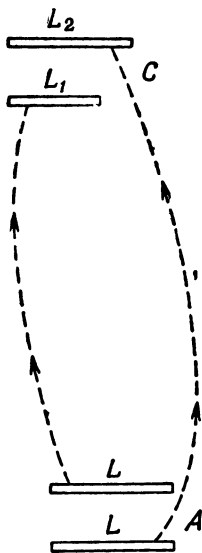
согласно теории Вейля, равно

$$\frac{\delta L}{L} = C\Phi. \quad (14)$$

Здесь  $C$  — универсальная постоянная, а  $\Phi$  — полный поток магнитного поля через поверхность, ограниченную

двумя путями переноса. Этот вывод явно противоречит постулату Римана.

Поскольку оказываются возможными такие взаимоисключающие теории, возникает вопрос: насколько точно



Фиг. 3.11. Два метровых стержня, совпадающих друг с другом при их сравнении в точке  $A$ , отличаются друг от друга при их сравнении в  $C$ , согласно теории Вейля, теперь уже отвергнутой.

Относительное изменение длины дается интегралом магнитного потока через поверхность, ограниченную двумя путями переноса. Заменяя вейлевские метровые стержни геодезическими часами, можно яснее почувствовать, какие физические выводы были бы несовместимыми с постулатом Римана.

проверена справедливость постулата Римана? В следствиях из него, которые можно было бы проверить, очевидно, нет недостатка. Достаточно сравнить любой интервал  $AB$  с другим интервалом  $CD$  по двум различным путям. Трудно представить себе другую столь же важную теорию, которую было бы легче опровергнуть, если она неправильна, и в которой в то же время столь мало были бы использованы возможности проверки.

### Справедливость принципа Паули как частичное подтверждение постулата Римана

В отношении прямого сравнения *длин* еще мало что сделано, но косвенное подтверждение справедливости постулата Римана можно видеть в результатах сравнения *масс*. Если длина изменяется при обносе вокруг области, пронизываемой потоком силовых линий, и если длина связана с массой формулой для боровского радиуса атома водорода

$$a = \frac{\hbar^2}{me^2}, \quad (15)$$

то электроны должны иметь различную массу в зависимости от своей истории. Но различие в массах электронов сразу же привело бы к нарушению принципа Паули. Действительно, что мешало бы тогда большому количеству электронов находиться на одном и том же уровне, раз массы их различны? Если бы электроны в атомах имели различные массы, они все спустились бы на *K*-оболочку. Атомы железа тогда фантастически уменьшились бы в размерах, и Земля резко сжалась бы. Но ничего такого не случилось за  $5 \cdot 10^9$  лет. За это время *L*-электроны атомов железа прошли в своем движении по орбитам

$$(5 \cdot 10^3 \text{ лет}) \times (3 \cdot 10^7 \text{ сек/год}) \times (4 \cdot 10^{18} \text{ рад/сек}) \sim 10^{36} \text{ рад}. \quad (16)$$

Допустим, что этого вполне достаточно, чтобы за счет перехода с *L*-оболочки на *K*-оболочку обнаружилась разница масс порядка  $10^{-36}$ , если бы она существовала. Поскольку такой переход не произошел, можно считать, что массы всех электронов, входящих в состав ядра нашей планеты, отличаются друг от друга менее чем на  $10^{-36}$ . Поэтому можно утверждать, что за время истории Земли шкалы расстояний, связанные с разными электронами, изменились относительно друг друга менее чем на  $1 \cdot 10^{-36}$ . На этом основании определим верхнюю границу величины вейлевского коэффициента *C* изменения длин в выражении (14). За сутки электрон вблизи

поверхности Земли обходит магнитный поток величиной

$$1 \text{ гс} \times 10^{18} \text{ см}^2, \quad (17)$$

а за  $5 \cdot 10^9$  лет поток составляет

$$\Phi \sim 10^{30} \text{ гс} \cdot \text{см}^2. \quad (18)$$

Напротив, электрон вблизи центра Земли проходит путь, охватывающий намного меньший поток. Предположим, что в конце концов циркуляция вещества внутри Земли заставляет эти электроны встретиться, так что можно провести сравнение масс, о котором мы говорили. Факт устойчивости размеров Земли указывает на верхнюю границу коэффициента Вейля

$$C = \frac{\delta L/L}{\Phi} < \frac{10^{-36}}{10^{30} \text{ гс} \cdot \text{см}^2} = 10^{-66} \text{ гс}^{-1} \cdot \text{см}^{-2}. \quad (19)$$

Следует подчеркнуть искусственность предположений и допущений, сделанных выше. Указанный в соотношении (19) верхний предел не является строго определенным. Хотелось бы найти более *решительное* экспериментальное подтверждение постулата Римана, хотя бы даже ценой потери какого-нибудь десятка порядков, так внушительно выглядящих в соотношении (19).

## Резюме

Итак, Риман постулировал, во-первых, существование интервала между двумя точками и, во-вторых, величину этого интервала (относительно некоторого стандартного интервала), которая строго определена независимо как от выбора координат, так и от того, пользуемся ли мы представлением о координатах вообще. Против постулата о том, что отношение между двумя интервалами не зависит от пути их переноса для сравнения, никогда не выдвигалось ни экспериментальных, ни принципиальных возражений. Мы описали способ такого сравнения интервалов, при котором можно обойтись без линеек и часов с атомным строением. Это говорит о том, что общая теория относительности в себе



самой содержит свой собственный способ определения интервалов пространства и времени (относительно некоторого геометродинамического стандартного метра) независимо от того, изменяются ли с течением времени такие физические константы, как  $m$ ,  $M$ ,  $e$  и  $\hbar$ , или нет.

### Конкретное предложение, касающееся введения геометродинамического стандартного метра

Рассмотрим еще один, последний вопрос: пойдет ли вообще когда-нибудь развитие техники измерения в таком направлении, что удастся заменить эталон, использующий свойства  $Kr^{86}$ , как и платиново-иридиевый метр, геометродинамическим стандартным метром, основанным на инвариантно определенном интервале  $AB$  между двумя событиями  $A$  и  $B$ , происшедшими когда-то в прошлом? Ответ: уже на данном этапе можно определить геометродинамический метр. События  $A$  и  $B$  это равноденствия, определившие начало и конец тропического года 1900,0. Этот интервал переносится вперед во времени мировой линией Земли по мере того, как она движется по своей орбите, с учетом поправок на влияние других тел Солнечной системы. Степень точности, с которой этот интервал может быть перенесен в будущее, представляется значительно большей, чем точность, с которой может быть воспроизведен эталонный метр с  $Kr^{86}$ , насколько можно судить по числу значащих цифр, приводимых для этих двух случаев [8]:

1 м = 1 650 763,73 длины волны оранжево-красной линии  $Kr^{86}$ ;

$$1 \text{ сек} = \frac{1}{31\,556\,925,974} \text{ тропического года } 1900,0.$$

Кроме того, измерение скорости света [9], или множителя перевода из секунд в метры, может быть произведено с точностью до шестого знака:

$$c = (299\,793,0 \pm 0,3) \cdot 10^3 \text{ м/сек.}$$

Поэтому уже теперь мы можем *определить геометродинамический стандартный метр как  $1/9,460546 \cdot 10^{15}$  часть интервала между двумя «эффективными равно-*

действиями», служащими началом и концом тропического года 1900,0.

При наличии такого геометродинамического эталона длины становится более конкретным вопрос о том, не изменяются ли в результате медленного изменения  $m$ ,  $M$ ,  $h$  и  $e$  также в отдельности или вместе криптоновый эталон или платиново-иридиевый метр [10—12].

## Приложение

*Критерий того, что совокупность  $(N + 1)$  точек определяет  $N$ -мерное евклидово пространство*

Определяют ли  $(N+1)N/2$  расстояний между  $N+1$  точками обобщенный треугольник и тетраэдр, т. е.  $N$ -мерный симплекс евклидова пространства? Если да, то объем  $V$  этой фигуры должен отличаться от нуля. Можно напомнить обычный ход рассуждений о величине этого объема. Казалось бы, что он покоится на использовании конкретной системы координат, однако конечный результат выражается лишь через длины, но не через координаты. Обозначим точки через  $0, 1, 2, \dots, N$ . Выберем точку  $0$  в качестве начала, а координаты  $k$ -й точки назовем  $k_s$  ( $s=1, 2, \dots, N$ ). Тогда площадь треугольника равна

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1_1 & 1_2 \\ 2_1 & 2_2 \end{vmatrix},$$

объем тетраэдра составляет

$$\frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1_1 & 1_2 & 1_3 \\ 2_1 & 2_2 & 2_3 \\ 3_1 & 3_2 & 3_3 \end{vmatrix},$$

а объем  $N$ -симплекса

$$V = \frac{1}{N!} \begin{vmatrix} 1_1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & N_N \end{vmatrix}.$$

Перепишем это выражение, поменяв местами строки и столбцы. Перемножим оба получившихся выражения, вспоминая, что произведение детерминантов равно детерминанту произведения соответствующих матриц. Элемент  $i$ -й строки и  $k$ -го столбца полученного произведения является скалярным произведением вектора  $(0i)$  на вектор  $(0k)$ :

$$(0i) \cdot (0k) = \sum_{s=1}^N i_s k_s.$$

В плоском пространстве такое скалярное произведение выражается формулой, знакомой из тригонометрии:

$$(0i) \cdot (0k) = \frac{1}{2} [(ik)^2 - (0i)^2 - (0k)^2].$$

Поэтому в стандартном выражении объема фигурируют лишь *длины*:

$$V = \frac{1}{N!} \begin{vmatrix} (01)^2 & (01) \cdot (02) & \dots & \dots \\ (01) \cdot (02) & (02)^2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & (0N)^2 \end{vmatrix}^{1/2}.$$

Полученная формула применима как в лоренцовом, так и в евклидовом мире. Равенство  $V$  нулю при  $N \geq 5$  дает 1) способ проверки в случае близких друг к другу событий того, что действительная размерность мира равна 4; 2) вывод того факта, что расстояния между соседними точками могут быть определены из 4 координат и 10 компонент  $g_{\alpha\beta}$ ; 3) способ показать наличие кривизны, когда пять или более точек достаточно удалены друг от друга (когда объем  $V_5$  не равен нулю не потому, что размерность равна 5, а потому, что кривизна отлична от нуля!). (Это замечание связано с введением в тексте метрических коэффициентов.) См. работу [13], где проанализированы условия, при которых совокупность вещественных чисел является совокупностью расстояний между точками в совокупности точек евклидова пространства.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Bohr N., Rosenfeld L., Kgl. Danske Videnskab. Selskab., Mat.-Fys. Medd., 12, No. 8 (1933); Phys. Rev., 78, 974 (1950) (цитируется в связи с обсуждением того принципа, что каждая непротиворечивая теория определяет сама по себе и в себе самой средства измерения тех величин, с которыми эта теория имеет дело).
2. Weyl H., Raum-Zeit-Materie, 1. Aufl., Berlin, 1918 (относительно проведения измерений с помощью световых лучей; содержит также предложенную Вейлем единую теорию).
3. Lorentz H. A., Collected Papers, vol. 5, The Hague, 1937, p. 363 (доказательство того факта, что как геометрия с  $g_{\alpha\beta}(x)$ , так и геометрия с  $\lambda(x)g_{\alpha\beta}(x)$  дают одни и те же мировые линии для световых лучей, но различные геодезические для частиц).
4. Schroedinger E., Preuss. Akad. Wiss. Berlin Ber., 238 (1931).
5. Osborne M. F. M., Phys. Rev., 75, 1579 (1949).
6. Anderson J. L., Rev. Mex. Fis., 3, 176 (1954).
7. Salecker H., Wigner E. P., Phys. Rev., 109, 571 (1958). (В работах [4—7] представлены первые шаги к решению вопроса, который в конце концов, видимо, окажется одним из наиболее глубоких и трудных среди проблем, когда-либо встречавшихся в теоретической физике, а именно как определить в рамках квантовой теории и в смысле Бора и Розенфельда процедуру измерения недополнительных аспектов геометрии пространства — времени.)
8. Степенсе G. M., Science, 123, 567 (1958) (величина продолжительности тропического года, процитированная в тексте, и анализ точности различных существующих эталонов времени и частоты).
9. Dimond J. W. M., Cohen E. R., в книге Handbook of Physics, ed. E. U. Condon, H. Odishaw, New York, 1958 (процитированная в тексте величина скорости света).
10. Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc., A165, 199 (1938).
11. Teller E., Phys. Rev., 73, 801 (1948).
12. Dicke R. H., Rev. Mod. Phys., 29, 363 (1957). (В работах [10—12] обсуждается вопрос о том, меняются ли физические константы со временем.)
13. Piccard S., Sur les ensembles de distances des ensembles de points d'un espace euclidien, Paris, 1940.

# 4

## Гравитация как геометрия (II)

Д Ж. У И Л Е Р

### Различие между допустимой геометрией и произвольной геометрией

В гл. 3 мы исследовали содержание римановой геометрии<sup>1)</sup>. Мы нашли, что структуру такой геометрии можно осмыслить, основываясь на понятии события и расстояний между событиями, не обращаясь к представлению о координатах. Был указан способ, позволяющий связать одну длину или инвариантный пространственно-временной интервал с другой длиной или другим интервалом, пользуясь при таком сравнении только траекториями световых лучей или материальных частиц. Совокупностью всех таких расстояний была определена геометрия<sup>2)</sup>. При этом один вариант четырехмерной римановой геометрии считался столь же прием-

---

<sup>1)</sup> Выражение «риманова геометрия», используемое в данной статье, следует понимать в том же смысле, в каком им пользуются Картан и большинство физиков, а именно как геометрию, определяемую элементом линии в виде  $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$  вне зависимости от того, будет ли сигнатура метрики  $(-+++)$ , т. е. локально лоренцова характера, или  $(++++)$ , т. е. локально евклидова характера. Правда, во многих математических работах рассматривается метрика положительно определенной сигнатуры, так как многие теоремы можно доказать лишь при условии положительной определенности.

<sup>2)</sup> Отметим для ясности тот факт, не противоречащий основной идее автора, что совокупность всех путей фотонов или частиц с нулевой массой покоя, движущихся по инерции, не определяет однозначно риманову геометрию и соответственно поле гравитации. Иначе говоря, возможны разные поля в общей координации с общими геодезическими. — *Прим. ред.*

лемым, как и другой. Мы ничего не говорили о физических законах, в силу которых одна геометрия может быть исключена как недопустимая, а другая признана возможной. Поэтому в настоящей главе мы рассмотрим следующий вопрос: в чем состоит различие между допустимой геометрией и произвольной геометрией?

Сравним с этой точки зрения теорию относительности с механикой. Теоретическая механика распадается на две ветви — кинематику и динамику. В кинематике рассматриваются всевозможные виды движения независимо от того, разрешены они или запрещены. В динамике же исследуется различие между физически допустимыми и недопустимыми историями систем.

### Физика как уравнения движения плюс начальные условия

Отбор допустимых римановых геометрий из числа лишь непротиворечивых осуществляется с помощью эйнштейновских уравнений поля. Этот принцип отбора не является достаточно жестким для того, чтобы однозначно определить динамическую историю. В этом отношении уравнения Эйнштейна очень напоминают уравнения движения Ньютона. Ведь уравнения Ньютона сами по себе еще не определяют полностью движения частицы. История частицы определяется полностью лишь при задании соответствующих начальных условий, например положения и скорости частицы в некоторый момент времени. Изменится ли когда-нибудь подобный характер физики? Сможет ли она *наряду* с уравнениями движения *указывать* и начальные значения? Или же всегда, для того чтобы получить начальные значения, нужно будет обращаться к данным *наблюдений*? На этот очень важный вопрос сейчас никто не может ответить<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> В связи с вопросом о начальных данных и о том, откуда они следуют, если их не диктуют нам динамические уравнения физики, встает и вопрос о том, существуют ли какие бы то ни было константы движения в случае замкнутого мира. Иными словами, будет ли модель Вселенной, характеризуемой единственным квантовым состоянием, определяться *без всякого* задания начальных значений? См. работы [1—4].

В настоящее время следует принять, что вся физика построена по такому принципу — и не только механика систем частиц, но также динамика электромагнитного поля и динамика геометрии, или «геометродинамика», как можно одним словом охарактеризовать общую теорию относительности.

### Начальные значения в электродинамике

Электродинамика может послужить хорошим источником аналогий при обсуждении геометродинамики. При решении какой-либо проблемы в теории относительности часто<sup>1)</sup> бывает полезно 1) перевести эту проблему в соответствующую ей проблему электродинамики; 2) проанализировать последнюю; 3) перевести полученный ответ в соответствующее утверждение геометродинамики; 4) проверить полученный таким путем («на ощупь») ответ с помощью прямых методов.

На этом пути целесообразно рассмотреть начальные данные, необходимые (наряду с заданием уравнений Максвелла) для выяснения всей истории электромагнитного поля. Эти данные часто задаются в два приема, а именно 1) в пространстве — времени выбирается пространственноподобная гиперповерхность, что аналогично выбору конкретного начального момента времени в механике, и 2) на выбранной гиперповерхности повсюду задается величина напряженности магнитного поля (аналог координат в механике) и напряженности электрического поля (аналог импульса в механике). Следует проверить «приемлемость» этих начальных данных, т. е. обращается ли в нуль дивергенция каждой из этих напряженностей (в случае пустого пространства). Если да, то говорят, что начальные значения удовлетворяют соответствующим условиям. Этих данных достаточно для определения всей эволюции электромагнитного поля в прошлом и в будущем.

---

<sup>1)</sup> Не преуменьшая, но и не преувеличивая роли метода аналогий, можно сказать, что он полезен именно тогда, когда рассматриваемая аналогия объективно имеет место. — *Прим. ред.*

## Внутренняя трехмерная геометрия и внешняя кривизна пространственноподобной гиперповерхности

Подобным же образом в геометродинамике приемлемые начальные данные на пространственноподобной гиперповерхности сводятся 1) к трехмерной геометрии, являющейся «внутренней» (или «собственной») для этой гиперповерхности (ср. с магнитным полем в электродинамике), и 2) к «внешней» кривизне этой гиперповерхности — указанию, как именно она *искривлена* (или *должна быть искривлена*) по отношению к окружающему ее четырехмерному пространству — времени, которое еще надлежит найти (ср. с электрическим полем). Такова в двух словах суть современного понимания геометродинамики.

## Метод формулировки типичных задач общей теории относительности был установлен лишь задним числом

Исторический путь развития геометродинамики отнюдь не был столь гладким, как можно было бы думать на основании сказанного выше. До последнего времени<sup>1)</sup> даже не предполагалось, что задача начальных значений в геометродинамике имеет много общего с задачей начальных значений в электродинамике. И только после того, как это было осознано, стало понятным, где «зарыта собака» в теории относительности. До того как был сделан этот шаг, было неизвестно, какие стороны четырехмерной геометрии могут задаваться произвольно, а какие являются следствиями уже заданных.

---

<sup>1)</sup> Об уравнениях, которым должны удовлетворять трехмерная геометрия, внутренняя по отношению к пространственноподобной гиперповерхности, и «внешняя» кривизна этой гиперповерхности относительно окружающей ее (и еще подлежащей построению) четырехмерной геометрии, если эти величины должны быть взаимно *совместными* частями полного набора начальных данных, см. работы [5—10]. «Бутербродная формулировка» задачи начальных значений («тонкий сэндвич») как способ решения этой проблемы, а также связь этого решения с идеей Маха о происхождении инерции рассмотрены Байерлейном, Шарпом и Уилером [10] и Уилером (гл. 15).



Поэтому было неясно даже, как *сформулировать* типичную динамическую задачу, а уж тем более — как ее *решить*. Прогресс в нашем понимании этих проблем отражается уже в том, что теорию, созданную первоначально Эйнштейном, мы называем теперь не общей теорией относительности, а «геометродинамикой».

### Содержание лекции

Чтобы дать более точное представление о том, что такое геометродинамика, мы рассмотрим в данной лекции следующие четыре вопроса:

- 1) физические основания эйнштейновских уравнений поля;
- 2) задачу начальных значений;
- 3) решение задачи начальных значений (а тем самым и уравнений Эйнштейна) в иллюстративных целях для простейшего случая «геометрии Шварцшильда»;
- 4) движение пробной частицы в этой геометрии и его связь с проверкой теории Эйнштейна.

### Вывод эйнштейновских уравнений поля

Естественным подходом к теории Эйнштейна является принцип *соответствия* с теорией тяготения Ньютона. Поэтому мы постулируем, что каждая нейтральная пробная частица движется по геодезической в четырехмерном римановом пространстве. Потребуем, чтобы определенное таким образом движение в случае малых скоростей и слабого отклонения нашего мира от плоского сводилось к движению, описываемому законами Ньютона. В дополнение к принципу соответствия между геометрией Эйнштейна и тяготением Ньютона мы потребуем, чтобы *действие массы осуществлялось чисто геометрически, путем искривления пространства — времени*. Иначе говоря, уравнения Эйнштейна должны указывать, как влияет масса на *геометрию*. Но в них не будет никакой информации относительно *координат*, с помощью которых можно было бы при желании *выразить* эту геометрию. В принципе взаимосвязь массы и

геометрии можно выразить в форме, не содержащей никакого упоминания о координатах (подобно тому как в теории групп свойства группы рассматриваются на основе соответствующей «таблицы умножения», не имеющей никакого отношения к конкретному представлению группы через матрицы). В общей теории относительности не был, однако, сделан такой шаг, как в теории групп, и при рассмотрении ее проблем не использовалось бескоординатное представление (подобное «силовым линиям» Фарадея). Поэтому на практике вошло в привычку пользоваться координатами при записи уравнений Эйнштейна. При использовании координат требование чисто геометрической связи между массой, находящейся в одном месте, и геометрией в прочих местах нельзя свести к требованию *ковариантности* уравнений поля<sup>1)</sup>. Необходимо еще, чтобы десяти уравнений Эйнштейна было *недостаточно* для определения десяти неизвестных метрических коэффициентов («принцип слабости уравнений поля», см. гл. 1 и 2). Почему? Потому что все десять компонент метрики определяют не только геометрию, но и *систему координат*<sup>2)</sup>, в которой она

<sup>1)</sup> Одной только ковариантности недостаточно. Уравнение поля в форме  $R_{\alpha\beta} - \lambda g_{\alpha\beta} = \text{const} \cdot T_{\alpha\beta}$  в той же мере инвариантно по отношению к замене координат, что и уравнение  $R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = (8\pi G/c^4)T_{\alpha\beta}$ . Первое уравнение, однако, не обеспечивает чисто геометрической взаимосвязи между геометрией и плотностью энергии — импульса — натяжений в отличие от второго.

<sup>2)</sup> Это утверждение неверно. Примеры: 1) метрика Минковского «определяет» систему координат с точностью до шести произвольных параметров, т. е. не определяет ее; 2) метрика

$$ds^2 = -dx^{12} - \sin^2(x^1 - x^4) dx^{22} - \text{sh}^2(x^1 - x^4) dx^{32} + dx^{42},$$

удовлетворяющая уравнениям поля Эйнштейна в пустоте, при замене координат

$$x^1 = \frac{3}{2}x'^1 + \frac{1}{2}x'^4 + a,$$

$$x^2 = x'^2 + b,$$

$$x^3 = x'^3 + c,$$

$$x^4 = \frac{1}{2}x'^1 + \frac{3}{2}x'^4 + d$$

не меняет своего вида, т. е. десять компонент метрики не изменяются, а система координат будет другая. Таких примеров можно указать бесчисленное множество. — *Прим. ред.*

выражается, что противоречит требованию чисто геометрического содержания этой теории.

Мы обсудили два стержневых принципа теории Эйнштейна — принцип *соответствия* с теорией Ньютона и требование чисто *геометрического* содержания новой теории. Уточним теперь содержание принципа соответствия, обратившись к уравнению геодезической линии.

### Геодезическая как путь, которому соответствует экстремальное собственное время

К понятию геодезической проще всего подойти на примере путешествия от точки  $A$  до точки  $B$  на поверхности земного шара. Возьмем произвольную линию, соединяющую обе точки. Разобьем ее на участки, каждый из которых соединяет между собой две близкие точки, причем длина каждого участка считается известной. Положение путешественника, находящегося в пути, определяется сложением длин всех пройденных им от начала пути отрезков. Для мировой линии в пространстве — времени аналогичную роль играет текущее собственное время  $\tau$ , так что

$$\begin{aligned} \tau &= \int_{\text{Начало}}^{\text{Данная точка}} d\tau = \int (d\tau^2)^{1/2} = \\ &= \int (-d\sigma^2)^{1/2} = \int (-g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta)^{1/2}. \end{aligned} \quad (1)$$

С помощью этого параметра мы можем задать рассматриваемую мировую линию как систему четырех функций

$$x^\alpha = x^\alpha(\tau). \quad (2)$$

С тем же успехом, что и  $\tau$ , для указания точек, лежащих на мировой линии, может быть использован любой другой параметр  $\lambda$ , если он монотонно возрастает вдоль мировой линии:

$$x^\alpha = x^\alpha(\lambda), \quad (3)$$

причем

$$\tau = \int_{\lambda=0}^{\lambda} \left( -g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \right)^{1/2} d\lambda. \quad (4)$$

Все сказанное относилось к произвольному пути. Среди множества всевозможных путей, связывающих точки  $A$  и  $B$ , существует один экстремальный: он не изменяет своей длины в первом порядке по степеням малой величины  $\varepsilon$ , когда форма его изменяется в этом порядке:

$$x^\alpha(\lambda) \rightarrow x^\alpha(\lambda) + \varepsilon \delta x^\alpha(\lambda), \quad (5)$$

где

$$\delta x^\alpha(\lambda) = 0 \quad \text{при} \quad \begin{cases} \lambda = \lambda_A, \\ \lambda = \lambda_B. \end{cases} \quad (6)$$

Запишем интервал собственного времени, истекший на измененном таким образом пути, в виде

$$\tau_{AB} = \tau_{AB}^{(0)} + \varepsilon \tau_{AB}^{(1)} + \varepsilon^2 \tau_{AB}^{(2)} + \dots \quad (7)$$

Величина  $\tau_{AB}^{(1)}$  зависит, во-первых, от формы исходного пути, а во-вторых, от его вариации  $\delta x^\alpha(\lambda)$ . Но в том случае, когда функции  $x^\alpha(\lambda)$  являются экстремальными,  $\tau_{AB}^{(1)}$  равняется нулю при произвольном выборе четырех вариаций  $\delta x^\alpha(\lambda)$  (если они обращаются в нуль в точках  $A$  и  $B$ ).

### Квантовая подоплека классического принципа экстремума

Почему природа предпочитает экстремальный путь? Каким образом частица «выявляет» среди различных путей (историй) сквозь пространство — время тот, который соответствует экстремальному изменению собственного времени, и выбирает именно его? Ответ на этот вопрос дает квантовая теория, и лучшая форма ответа содержится в фейнмановской формулировке принципа квантования [11—21]<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Этот принцип получил развитие в работах Г. В. Рязанова [ЖЭТФ, 33, 1437 (1957); 35, 121 (1958)]. — *Прим. перев.*

«Полная амплитуда вероятности перехода от данной начальной конфигурации  $A$  к данной конечной конфигурации  $B$ » представляет собой сумму вкладов всевозможных путей  $H$ , соединяющих обе конфигурации. Отдельные амплитуды для всех путей совпадают по *абсолютной величине*. Фаза же вклада некоторого данного пути определяется соответствующим этому пути интегралом действия  $I_H$ , поделенным на квант момента импульса  $\hbar$ . В данном случае интеграл действия дается выражением

$$I_H = -mct_{AB}. \quad (8)$$

Значит, фейнмановская амплитуда перехода имеет вид символической суммы («функционального интеграла по всем путям» с нормирующим множителем  $\mathcal{N}^\circ$ )

(Амплитуда вероятности перехода из  $A$  в  $B$ ) =

$$= \langle x_B^a | x_A^a \rangle = \mathcal{N}^\circ \sum_H e^{iI_H/\hbar}. \quad (9)$$

Но те пути, которые сильно отличаются от экстремального пути классической физики, не вносят в эту сумму существенного вклада. Их фаза настолько отличается от экстремальной, что вклады таких путей компенсируют друг друга в результате интерференции. В типичных случаях полной амплитуде соответствует практически та фаза, которая имела бы место, если бы движение следовало исключительно классическому пути. Выяснение того, что природа лишь как нам *кажется* выбирает классический путь в качестве предпочтительного, а на самом деле полностью учитывает все возможные пути, это великое достижение квантовой теории. Стало наконец понятно, почему во всей физике вообще действуют экстремальные принципы, частным случаем которых является требование прямолинейности движения или движения по геодезической. Мы видим, как глубоко смотрел Ньютон, утверждая в начале своих «Принципов», что «...описание прямых и окружностей, на которых основывается геометрия, принадлежит механике. Геометрия не обучает нас, как рисовать эти линии, а требует, чтобы они уже были нарисованы».

### Уравнения Эйлера — Лагранжа для геодезической линии

Перейдем от физического смысла экстремального принципа к следствиям этого принципа. Приведем подлежащий варьированию интеграл к виду

$$\tau_{AB} = \int_A^B L\left(x^\alpha(\lambda), \frac{dx^\alpha}{d\lambda}\right) d\lambda. \quad (10)$$

Тогда уравнения Эйлера — Лагранжа для экстремального пути будут иметь вид

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial (dx^\alpha/d\lambda)} - \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = 0. \quad (11)$$

Перепишем эти уравнения, пользуясь обозначениями

$$\Gamma_{\beta\gamma, \sigma} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\gamma\sigma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\sigma} \right) \quad (12)$$

и (взяв  $g^{\alpha\sigma}$  как матрицу, обратную  $g_{\mu\nu}$ )

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = g^{\alpha\sigma} \Gamma_{\beta\gamma, \sigma} \quad (13)$$

(символы Кристоффеля; обе эти величины являются нетензорными). Кроме того, перейдем в производных уравнения (11) от общего параметра  $\lambda$  к собственному времени  $\tau$ <sup>1)</sup>

$$\frac{d}{d\lambda} = \frac{d\tau}{d\lambda} \frac{d}{d\tau} = \left( -g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \right)^{1/2} \frac{d}{d\tau}.$$

В результате получим дифференциальное уравнение геодезической линии (гл. 1 и 2)

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0. \quad (14)$$

<sup>1)</sup> В случае движения фотонов, когда геодезические будут изотропными, придется говорить о каноническом параметре  $\tau$ , который не допускает такого простого истолкования. — Прим. ред.

### Переход к случаю малых скоростей и мира, мало отличающегося от плоского

Для того чтобы получить в уравнении (14) всего лишь одну компоненту величины  $d^2x/d\tau^2$ , нужно сложить 16 членов. Мы перейдем, однако, к случаю медленно движущейся частицы в почти плоской области пространства — времени ( $g_{ii} \approx 1$ ,  $g_{00} \approx -1$ ,  $g_{\alpha\beta} \approx 0$  при  $\alpha \neq \beta$ ). Иными словами, мы будем пренебрегать величинами

$$\frac{dx^i}{d\tau} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (15)$$

(латинские индексы используются для пространственных компонент, а греческие — для пространственно-временных) по сравнению с единицей, а также будем пренебрегать разностью  $dx^0/d\tau - 1$ . Тогда уравнение геодезической приводится к простому виду

$$\frac{d^2x^k}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^k = 0. \quad (16)$$

Ограничимся, кроме того, случаем геометрии, *статической* относительно выбранной системы координат, как, например, геометрия пространства, окружающего наше Солнце. Тогда из уравнений (12) и (13) следует, что уравнение геодезической можно записать в виде

$$\frac{d^2x^k}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^k}. \quad (17)$$

Сравним геометрию Эйнштейна с механикой Ньютона, вспомнив, что в случае медленно движущейся частицы можно приравнять друг другу собственное время  $\tau_m$  (в метрах) и обычное координатное время  $t_{сек}$  (в секундах) или  $ct_{сек} = t_m$  (в метрах); тогда

$$\begin{aligned} \frac{d^2x^k}{d\tau_m^2} &= \frac{1}{c^2} \frac{d^2x^k}{dt_{сек}^2} = \frac{1}{c^2} \left( - \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \times (\text{Гравитационный потенциал}) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^k} \left( \frac{Gm}{c^2 r} \right) = \frac{\partial}{\partial x^k} \left( \frac{m^*}{r} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь  $m$  (в килограммах) или  $m^*$  (в метрах) тождественно равно  $Gm/c^2$  — массе Солнца или другого цен-

тра притяжения, а  $r$  — расстояние от этого центра до пробной частицы. Сравнивая уравнения (17) и (18), найдем, что 00-компонента метрического тензора совпадает с ньютоновским гравитационным потенциалом  $\varphi_G$  с точностью до постоянного множителя и аддитивной константы. Константу эту можно определить так, чтобы геометрия давала лоренцово пространство — время на больших удалениях от притягивающего центра. Значит,

$$g_{00} = -1 + \frac{2m^*}{r} = -1 + \frac{2Gm}{c^2 r} = -1 + \frac{2\varphi_G}{c^2}. \quad (19)$$

### Связь между 00-компонентой метрики и массой — энергией

*Линейность* выражения (19) по отношению к величине источников поля (в рассматриваемом здесь приближении) позволяет распространить формулу (19) на случай пространства — времени, содержащего большое число покоящихся или медленно движущихся источников, локализованных или непрерывно распределенных в пространстве. Для описания этих источников целесообразно ввести плотность распределения массы  $\rho$  ( $\text{кг}/\text{м}^3$ ). Связь между распределением массы и ньютоновским потенциалом дается уравнением Пуассона

$$\nabla^2 \varphi_G = -4\pi G \rho. \quad (20)$$

Из этого уравнения следует уравнение для  $g_{00}$  — первого из десяти гравитационных потенциалов Эйнштейна:

$$\nabla^2 g_{00} = -\frac{8\pi G \rho}{c^2} = -\frac{8\pi G}{c^4} \times (\text{Плотность массы — энергии}). \quad (21)$$

### Векторный характер соответствующего источника в электродинамике

До сих пор мы продвигались вперед, пользуясь принципом соответствия с теорией всемирного тяготения Ньютона. Теперь, если мы хотим двигаться дальше, нам следует обеспечить выполнение требования чисто



геометрической связи между геометрией и энергией — импульсом — натяжением. Чтобы выразить это требование в удобочитаемом виде, полезно обратиться к примеру электродинамики. На первых порах в теории электричества совершенно не учитывалось влияние *движения* на действие электрических зарядов на расстоянии. В качестве источника всех эффектов рассматривалась лишь *плотность* электрического заряда  $\rho_e$ . Считалось, что действие заряда на расстоянии полностью описывается электростатическим потенциалом  $\phi$ , удовлетворяющим уравнению Пуассона

$$\nabla^2\phi = -4\pi\rho_e. \quad (22)$$

Но позднее, когда были обнаружены магнитные действия, связанные с движением зарядов, пришлось ввести понятие магнитного потенциала  $A^k$ . Этот потенциал понимают в наши дни как пространственную часть четырехмерного потенциала  $A^\alpha$ :

$$A^\alpha = \begin{cases} A^0 = \phi - \text{электростатический потенциал;} \\ A^k - \text{магнитный потенциал.} \end{cases} \quad (23)$$

Подобным же образом плотность заряда рассматривается как одна из компонент четырехмерного вектора  $\rho^\alpha$ :

$$\rho^\alpha = \begin{cases} \rho^0 = \rho \text{ (плотность заряда, измеряемая} \\ \text{в ед. заряда/м}^3\text{),} \\ \rho^k = \frac{1}{c} \text{ (плотность тока, измеряемая} \\ \text{в ед. заряда/м}^2 \cdot \text{сек) =} \\ = 1 \text{ (ед. заряда/м}^2 \text{ поперечного} \\ \text{сечения и м времени).} \end{cases} \quad (24)$$

Как известно, этому соответствует обобщенное уравнение Пуассона

$$\square^2 A^\alpha = -4\pi\rho^\alpha. \quad (25)$$

В этом уравнении приравниваются друг другу два четырехмерных вектора. Поэтому его смысл и содержание не зависят от той или иной лоренцевой системы отсчета, в которой рассматриваются соответствующие

процессы. Независимо от случайных значений компонент, которыми характеризуются эти четырехмерные векторы во взятой наугад системе отсчета, можно представить себе такие четырехмерные векторы сами по себе, например в виде стрелок, имеющих некоторую величину и определенное направление.

Такой способ описания, не связанный с координатами, будет соответствовать самой сущности понятия вектора, и именно такого рода способ описания нам нужен теперь для изложения проблем гравитации.

### Тензорный характер источника в геометродинамике

В правой части приближенного уравнения геометрического поля (21) стоит «плотность массы — энергии». В отличие от источника, фигурирующего в электростатике, эта величина не является временной компонентой четырехмерного вектора. Вместо этого она имеет смысл временно-временной компоненты  $T^{00}$  тензора

$$T^{\alpha\beta} = \left( \begin{array}{c|c} T^{00} & T^{0k} \\ \hline T^{j0} & T^{jk} \end{array} \right), \quad (26)$$

который имеет следующее истолкование в локально лоренцевой системе отсчета:  $T^{00}$  — энергия в  $1 \text{ м}^3$ ;  $T^{j0}$  — поток энергии в направлении оси  $j$ ;  $T^{0k}$  — поток энергии (энергия, перенесенная в направлении  $k$ -й оси через  $1 \text{ м}^2$  площадки, перпендикулярной этой оси, за промежуток времени, равный в единицах светового пути  $1 \text{ м}$ , или скорость света, умноженная на плотность импульса в направлении  $k$ -й оси; плотность берется на единицу трехмерного объема —  $1 \text{ м}^3$ );  $T^{jk}$  — компонента  $k$  импульса, перенесенная за  $1 \text{ сек}$  в направлении оси  $j$  через  $1 \text{ м}^2$  площадки, перпендикулярной направлению оси  $j$ , или компонента  $k$  силы, с которой действуют электромагнитное поле и другие факторы в  $x^j = 0$  на эти же поля в  $x^j \neq 0$ , из расчета на  $1 \text{ м}^2$  площади — компонента  $j^k$  трехмерного тензора натяжений. В частном случае покоящейся жидкости, находящейся в гидростатическом равновесии, для описания состояния жидкости обычно используются такие параметры, как

плотность массы  $\rho$ , плотность энергии  $\varepsilon$  и давление  $p$ . В этом случае тензор энергии — импульса — натяжений имеет в локально лоренцовой системе отсчета компоненты

$$T^{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \varepsilon + \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Тензорный характер источника удачным образом совпадает с тензорным характером самого поля, что явствует из формы гравитационных потенциалов  $g_{\alpha\beta}$ . Поэтому не остается ничего иного<sup>1)</sup>, как по аналогии с уравнениями для четырехмерного вектор-потенциала электромагнитного поля (25) обобщить однокомпонентное уравнение тяготения (21) в десятикомпонентное тензорное уравнение вида

$$\square^2 g_{\alpha\beta} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}. \quad (28)$$

Кавычки при операторе  $\square^2$  означают, что правило действия этого оператора на тензор не определено еще в достаточной мере. Мы знаем лишь, что для практически покоящихся источников в почти плоском мире величину  $\square^2 g_{00}$  можно привести к  $\nabla^2 g_{00}$ . Потребуем поэтому, чтобы конструкция  $\square^2 g_{\alpha\beta}$  представляла собой некоторый общий дифференциальный оператор второго порядка, содержащий члены вида

$$\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho \partial x^\sigma}. \quad (29)$$

Различных компонент потенциала  $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$  насчитывается десять. Различных вторых производных вида  $\partial^2(\dots)/\partial x^\sigma \partial x^\sigma$  — также десять. Значит, для построения десяти выражений, обозначенных пока как  $\square^2 g_{\alpha\beta}$ , нужно взять комбинацию из 100 членов. Иными

<sup>1)</sup> Это утверждение бездоказательно. Можно указать другие возможности, и не одну. — Прим. ред.

словами, для того чтобы определить конкретный вид величин „□<sup>2</sup>“  $g_{\alpha\beta}$ , требуется найти 1000 коэффициентов! Но поскольку конструкция „□<sup>2</sup>“  $g_{\alpha\beta}$  должна быть тензором с индексами  $\alpha$  и  $\beta$ , число неизвестных снижается с 1000 до 2:

$$\begin{aligned} \text{„□}^2\text{“ } g_{\alpha\beta} = C_1 \left( g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + B_1 \right) + \\ + C_2 g_{\alpha\beta} g^{\sigma\tau} \left( g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 g_{\sigma\tau}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + B_2 \right), \quad (30) \end{aligned}$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — константы, а  $B_1$  и  $B_2$  — члены, содержащие лишь первые производные  $g_{\gamma\delta}$  и однозначно определяемые принципом ковариантности. Вывод этого выражения очень громоздок, и мы не будем приводить его здесь. Конечный же результат можно выразить в более геометризованной форме с помощью тензора кривизны Римана  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ , рассматривавшегося Андерсоном в гл. 2.

### Тензор кривизны как аналог электромагнитной напряженности в геометродинамике

Как уже говорилось в гл. 3, тензор кривизны выражает физически существенную часть гравитационного поля, что нужно понимать следующим образом. Если взять две близкие друг к другу и первоначально параллельные геодезические (мировые линии нейтральных бесконечно малых пробных частиц), то закон их отклонения от параллельности (*девиация геодезических*) имеет вид

$$\left( \frac{D}{D\tau} \right)^2 \eta^\alpha + R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} \frac{dx^\beta}{d\tau} \eta^\gamma \frac{dx^\delta}{d\tau} = 0. \quad (31)$$

Величина  $\eta^\alpha$  представляет собой разность координат тех точек на этих двух мировых линиях, для которых параметр собственного времени одинаков. Производная  $dx^\beta/d\tau$  равна единичному вектору, касательному к одной из мировых линий, а  $D/D\tau$  обозначает абсолютную производную, содержащую поправку на криволинейность

системы координат. При этом для любого вектора  $A^\alpha(\tau)$  вдоль мировой линии

$$\frac{DA^\alpha}{D\tau} \equiv \frac{dA^\alpha}{d\tau} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha A^\beta \frac{dx^\gamma}{d\tau}. \quad (32)$$

Измеряя разность  $\eta^\alpha$  для достаточно большого числа пар мировых линий, пронизывающих одну и ту же область пространства — времени, мы можем определить все 20 различных компонент тензора кривизны<sup>1)</sup>. Такое исследование, проводимое с *пáрами* нейтральных пробных частиц, в теории гравитации аналогично процедуре, применяемой в электродинамике, где напряженность электрического и магнитного полей в данной области определяют с помощью *одной-единственной, но заряженной* пробной частицы<sup>2)</sup>.

### Кривизна в случае двумерной и трехмерной сферы

Чтобы пояснить смысл тензора кривизны, рассмотрим геометрию двумерной сферы радиуса  $a$ . Две геодезические, начинающиеся на экваторе и идущие на север ( $dx^1/ds=0$ ,  $dx^2/ds=1$ ), в локально евклидовой системе координат сближаются между собой строго определенным образом:  $(1/\eta^1)(d^2\eta^1/ds^2) = -1/a^2$ . Отсюда можно заключить, что

$$R^1_{212} = R_{1212} = \frac{1}{a^2} \quad (33)$$

(в локально евклидовой системе координат). Точно так же в случае трехмерной сферы радиуса  $a$  выполняются соотношения

$$R_{1212} = R_{2323} = R_{3131} = \frac{1}{a^2}, \quad (34)$$

$$R_{1223} = R_{1231} = R_{2331} = 0. \quad (35)$$

<sup>1)</sup> То, что число независимых компонент тензора кривизны Римана равно 20, следует из его свойств симметрии, указанных в уравнениях (48) и (60) гл. 2. Число независимых компонент в пространстве  $n$  измерений равно  $n^2(n^2 - 1)/12$  — результат, полученный Кристоффелем (вывод см. в книге [22]).

<sup>2)</sup> Характер геометрии на небольшом расстоянии от мировой линии заданной пробной частицы исследовался в работах [23, 24].

## Кривизна расширяющейся Вселенной

Еще больший интерес представляет случай четырех измерений; в простейшем варианте это сферическая в трех измерениях Вселенная, радиус которой  $a$  является произвольной функцией  $a(t)$  соответствующим образом выбранного координатного времени  $t$ :

$$d\sigma^2 = -d\tau^2 = -dt^2 + a^2(t) [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)]. \quad (36)$$

Здесь положение любой точки на нашей трехмерной гиперсфере определяется тремя углами  $\theta$ ,  $\varphi$  и  $\chi$ . Углы  $\theta$  и  $\varphi$  — обычные полярные углы сферической системы координат; они указывают, в каком направлении относительно начала координат расположена рассматриваемая точка. Угол же  $\chi$  указывает, на каком *удалении* от начала она находится. Произведение  $a d\chi$  играет роль обычного элемента радиальной координаты  $dr$ . В любой точке четырехмерного пространства можно ввести локально лоренцову систему отсчета с осями 0, 1, 2 и 3, ориентированными в направлении возрастания координат  $t$ ,  $\chi$ ,  $\theta$  и  $\varphi$ . Переходя к такой системе отсчета, мы обнаруживаем, что все компоненты тензора кривизны равны нулю, кроме следующих:

$$R_{1212} = R_{2323} = R_{3131} = \frac{1}{a^2} (1 + \dot{a}^2), \quad (37)$$

$$R_{0101} = R_{0202} = R_{0303} = -\frac{\ddot{a}}{a} \quad (38)$$

и им эквивалентных.

## Взаимосвязь материи и геометрии

Тензор кривизны Римана характеризует ход изменения с течением собственного времени определенной величины — расстояния между близкими и почти параллельными геодезическими. В этом смысле он показывает, как *геометрия* влияет на *материю*.

Как же обстоит дело с обратным отношением — влиянием геометрии на материю? Спрашивается, как

геометрически с достаточной определенностью выразить символическое уравнение

$$\square^2 g_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}, \quad (39)$$

связывающее метрику с тензором энергии — импульса? Слева в этом уравнении величина, линейная по вторым производным метрических коэффициентов, должна быть линейной же конструкцией относительно компонент риманова тензора кривизны<sup>1)</sup>. Поэтому мы потребуем, чтобы эта величина 1) выражалась через кривизну, 2) имела исключительно простой геометрический смысл и 3) простым образом была бы связана с физикой. Сначала будет полезнее рассмотреть правдоподобный, но все же неверный вариант, чтобы затем яснее показать, чем отличается правильное выражение.

### Объем, занимаемый скоплением пробных частиц

Рассмотрим скопление настолько большого числа пробных частиц, чтобы с их помощью можно было определить границу элемента объема. Пусть в некоторый начальный момент эти частицы находятся относительно друг друга в покое. Тогда гравитационное поле вызовет появление относительных ускорений между этими частицами в данной области. Поэтому элемент объема будет менять свою форму пропорционально второй степени собственного времени  $\tau$ . В локально лоренцовой системе отсчета относительное изменение его протяженности в направлении оси  $x$  будет равно

$$-\frac{\tau^2}{2} R^1_{010}. \quad (40)$$

Аналогичным образом будут меняться и поперечники нашего элементарного объема в направлениях осей  $y$  и  $z$ . В качестве примера рассмотрим скопление частиц, свободно падающих на Землю с высоты нескольких сотен километров. Размеры этого скопления в направле-

<sup>1)</sup> См. [25], разд. 17, где указана литература о построении тензоров из компонент тензора кривизны Римана.

ниях  $x$  и  $y$  сокращаются (фокусирующее влияние притяжения Земли), поперечник же его в направлении оси  $z$  растягивается (Земля притягивает нижние частицы сильнее, чем верхние). Легко показать, что скорость растяжения в направлении оси  $z$  в два раза превышает скорость сокращения элемента объема в направлении осей  $x$  и  $y$ . Поэтому *сам объем* по своей величине не изменяется (с точностью до второго порядка по времени включительно), пока мы говорим о пространстве, в котором нет ни вещества, ни излучения.

### Сжатие вещества под действием тяготения

Пусть наше скопление пробных частиц заполняет теперь область пространства, занятую пылью или другими источниками массы — энергии. Тогда материя *внутри* скопления будет стремиться сблизить частицы, тогда как внешнее распределение материи не будет влиять на величину объема во втором порядке по времени. Другими словами, коэффициент объемного сокращения

$$R^1_{010} + R^2_{020} + R^3_{030} = R^0_{000} + R^1_{010} + R^2_{020} + R^3_{030} = R_{00} \quad (41)$$

является прямой мерой плотности массы — энергии  $T_{00}$ . Теория всемирного тяготения Ньютона дает для относительного изменения объема простое выражение<sup>1)</sup>, из которого следует, что коэффициент сокращения объема равен

$$R_{00} = 4\pi \frac{G}{c^4} T_{00}. \quad (42)$$

Если бы этот вывод был верным, то из соображений ковариантности уравнения гравитационного поля следовало бы писать в виде

$$R_{\mu\nu} = 4\pi \frac{G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (43)$$

---

<sup>1)</sup> Необычайно правдоподобный характер квазиньютоновских доводов, приведенных в тексте в пользу неправильных уравнений поля, показывает необходимость истинной квазиньютоновской аргументации (пока еще никем не предложенной) в пользу *правильных* уравнений поля.



## Первый выбор уравнений гравитационного поля неудачен

В чем недостаток уравнения (43)? Можно сразу же сказать, что уравнение неверно, если в нем скаляр приравнивается вектору. Неверно и то уравнение, в котором приравниваются друг другу вектор с ротором, равным нулю, и вектор с ненулевым ротором. Что же касается уравнений (43), то в них тензор  $R_{\mu\nu}$ , ковариантная дивергенция которого, вообще говоря, отлична от нуля, приравнивается тензору  $T_{\mu\nu}$ , ковариантная дивергенция которого равна нулю!

## Тензоры, ковариантные дивергенции которых равны нулю

Каков смысл утверждения, что ковариантная дивергенция тензора равна нулю? И какая геометрическая величина должна быть взята вместо свернутого тензора кривизны или тензора Риччи  $R_{\mu\nu}$  для того, чтобы получился тензор с нулевой ковариантной дивергенцией?

Выберем в точке  $P$  пространства — времени временноподобное направление  $dx^\alpha/d\tau$ . Рассмотрим элемент трехмерного пространства

$$d^3\sigma_\alpha = \sqrt{-g} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial (x^\beta, x^\gamma, x^\delta)}{\partial (u, v, w)} du dv dw, \quad (44)$$

ортогональный этому временноподобному направлению<sup>1)</sup>. Зададим себе вопрос: какое количество энергии и импульса содержится в этом трехмерном объеме? В энергетических единицах оно равно

$$T^{\mu\alpha} d^3\sigma_\alpha. \quad (45)$$

Сравним эту величину с выражением для энергии и импульса, содержащихся в подобной же области, сдвинутой вперед во времени на интервал  $d\tau$ . Простое сравне-

<sup>1)</sup> Символ Леви-Чивита  $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$  равен 1, когда  $\alpha=0, \beta=1, \gamma=2, \delta=3$ , и изменяет свой знак при перестановке любой пары индексов.

ние таких двух четырехмерных векторов незаконно, так как они взяты в разных точках пространства — времени. Для сравнения необходимо перенести их в одну и ту же точку путем параллельного переноса. Поэтому изменение энергии — импульса определяется не простой разностью значений тензора  $T^{\mu\alpha}$ , а ковариантной разностью. Сравнивая это изменение с количеством энергии — импульса, перешедшим за рассматриваемый интервал времени через границы области (что следует учесть также ковариантно, используя параллельный перенос величин в одну общую точку), и полагая результирующее изменение равным нулю, мы получим ковариантную запись обычного принципа сохранения энергии и импульса <sup>1)</sup>:

$$T^{\mu\alpha}_{;\alpha} = 0. \quad (46)$$

### Выражение Картана для геометрического тензора с равной нулю ковариантной дивергенцией

Картан [28] предложил следующий общий рецепт построения *геометрической* величины, обладающей теми же самыми тензорными свойствами, что и  $T_{\mu\nu}$ , включая равенство нулю ее ковариантной дивергенции:

1. Следует взять элементарный трехмерный объем.
2. В качестве двумерного элемента поверхности этого объема рассматривается  $dS^{\alpha\beta}$ .
3. Перенести вектор  $A^\nu$  параллельным образом вдоль одномерной границы вокруг этой двумерной

---

<sup>1)</sup> Далее см. гл. 1 и 2, а также [25, стр. 177] и особенно [27, стр. 324—325]. То обстоятельство, что в нуль обращается ковариантная, а не частная дивергенция, означает, что электромагнитное поле может отдавать свою энергию геометрии и вновь получать энергию от геометрии. В принципе можно представить себе электромагнитную волну, сходящуюся в данной области из удаленных областей, тогда как остальное пространство остается плоским. Плотность энергии в данной области очень быстро и очень сильно возрастает, в результате чего излучаются сильные гравитационные волны, а затем электромагнитная волна снова расходится и уходит в бесконечность, но уже со значительно меньшей энергией.

поверхности. Рассматриваемый вектор тогда изменится на

$$\Delta A^\gamma = R^\gamma_{\alpha\beta} dS^{\alpha\beta} A^\delta. \quad (47)$$

4. При сложении таких изменений для всех элементов  $dS^{\alpha\beta}$  на замкнутой границе трехмерной области получится результат, равный нулю (и поэтому не представляющий геометрического интереса). Причина этого проста: каждый двумерный элемент поверхности отделяется от другого одномерной границей, и мы проходим по этой линии дважды, каждый раз в противоположных направлениях. Таким образом, полный вклад вихревого движения вектора  $A^\gamma$  тривиально обращается в нуль. Нам уже знаком аналогичный вывод из элементарного векторного анализа: интеграл ротора вектора  $\mathbf{B}$  по двумерной поверхности, ограничивающей трехмерную область, тождественно равен нулю:

$$\int \int [\nabla \mathbf{B}] \cdot d\mathbf{S} \equiv 0. \quad (48)$$

Здесь нуль получается при сложении *скаляров*. В случае же кривизны берется сумма *векторов*  $\Delta A^\gamma$  и также получается нуль. Но этот результат не зависит от конкретного выбора вектора  $A^\gamma$ . Отсюда можно заключить, что *геометрическая сумма матриц поворота*

$$R^\gamma_{\delta\alpha\beta} dS^{\alpha\beta} \quad (49)$$

*на всей двумерной поверхности трехмерного элемента равна нулю*. Говоря «геометрическая сумма», мы имели в виду, что эти матрицы поворота должны быть предварительно подвергнуты параллельному переносу в одну и ту же точку. Далее Картан указал, как из этого простого тезиса следуют тождества Бианки. В конечном счете получается

$$R^\gamma_{\delta\alpha\beta; \sigma} + R^\gamma_{\delta\sigma\alpha; \beta} + R^\gamma_{\delta\beta\sigma; \alpha} = 0. \quad (50)$$

### Понятие момента вращения

5. Матрица поворота (49), соответствующая данному элементу двумерной поверхности, может быть уподоблена вектору силы в элементарной механике. Сумма

этих поворотов равна нулю так же, как обращается в нуль результирующая сила. Но в механике существенны не только сами векторы, но и линии действия этих сил. Иными словами, нужно учитывать моменты сил. По аналогии Картан предлагает рассматривать некоторый момент вращения (49). Величину (49), характеризующую вращение, можно представить себе как бивектор или элементарную двумерную поверхность (лист). Ориентация этой двумерной поверхности (а она может отличаться от ориентации элемента поверхности  $dS^{\alpha\beta}$ ) указывает плоскость поворота, а ее площадь (в безразмерных единицах радианах) указывает величину этого поворота. Выберем какую-нибудь точку  $P$ , относительно которой и будем вычислять аналог момента. Где именно будет эта точка, безразлично. В механике это тоже не играет роли в том случае, когда векторная сумма сил равна нулю. Вместе с бивектором поворота, сопоставленным элементу поверхности, радиус-вектор от точки  $P$  до этого элемента поверхности определяет элементарный параллелепипед. Он и является картановским моментом.

### **Момент вращения может быть определен как скаляр на трехмерном многообразии**

6. В трехмерном мире такой момент описывается одним-единственным числом — объемом этого параллелепипеда. Сумма таких чисел, соответствующих всем элементам двумерной поверхности, охватывающей рассматриваемый трехмерный объем, пропорциональна величине этого объема. Коэффициент пропорциональности (с точностью до численного множителя) равен скалярной кривизне  ${}^{(3)}R$  трехмерного многообразия в рассматриваемой точке.

### **Момент вращения оказывается вектором в четырехмерном многообразии**

7. В четырехмерном пространстве — времени рассматриваемый трехмерный элемент объема  $d^3\sigma_\alpha$  может быть представлен как четырехмерный вектор, нормаль-

ный к этому трехмерному объему. Если объем чисто пространственноподобный (как, например,  $dx dy dz$ ), то наш четырехмерный вектор — чисто временноподобный:

$$d^3\sigma_\alpha = (d^3\sigma_0, d^3\sigma_1, d^3\sigma_2, d^3\sigma_3) = \sqrt{-g}(dx dy dz, 0, 0, 0). \quad (51)$$

Складывая картановы «моменты кривизны» для всех двумерных элементов, замыкающих данный трехмерный элемент, мы получим полный «момент кривизны», который 1) пропорционален величине нашего трехмерного элемента, 2) сам обладает свойствами трехмерного элемента и 3) может быть поэтому сам описан с помощью некоторого вектора, скажем  $d^3\omega_\alpha$ . Картан показал, что вектор, определяющий момент кривизны, связан с вектором, изображающим рассматриваемый трехмерный элемент, соотношением

$$d^3\omega_\alpha = \left( R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R \right) d^3\sigma^\beta. \quad (52)$$

### Плотность момента вращения определяет тензор Эйнштейна

8. Сам геометрический смысл произведенного Картаном исследования моментов указывает на тождественное равенство нулю ковариантной дивергенции тензора, стоящего в правой части равенства (52) <sup>1)</sup>, причем этим свойством не обладает в отдельности ни одно из слагаемых, составляющих этот тензор. Значит, у этого тензора такая же геометрическая природа, как и у тензора энергии — импульса  $T_{\mu\nu}$  <sup>2)</sup>.

9. В силу сказанного теория гравитации Эйнштейна исходит из тензорного уравнения

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = 8\pi \frac{G}{c^4} T_{\alpha\beta}. \quad (53)$$

<sup>1)</sup> Другой путь, идя по которому можно придать геометрическое содержание тензору Эйнштейна (не сравнимый, однако, по глубине с анализом Картана), см. у Паули [25], стр. 47.

<sup>2)</sup> Но и  $\infty^1$  тензоров, отличающихся от тензора энергии на  $ag_{\alpha\beta}$ , где  $a = \text{const}$ , будут обладать «той же геометрической природой», как это отметил тот же Картан. — Прим. ред.

Фигурирующий здесь коэффициент пропорциональности определяется из того требования, чтобы в статическом мире геометрия вокруг сферически симметричного центра с массой  $m$  задавалась с помощью главного метрического коэффициента вида

$$g_{00} = -1 + \frac{2Gm}{c^2 r}. \quad (54)$$

10. Возьмем некоторую точку  $P$  пространства — времени. Пусть через эту точку с какой-то скоростью проходит пробная частица. Временная ось сопутствующей ей лоренцовой системы отсчета направлена вдоль соответствующего единичного вектора  $dx^\alpha/d\tau$ . Этой оси ортогональна местная пространственноподобная гиперповерхность. На указанной гиперповерхности *плотность момента кривизны* (в единицах *длина/длина*<sup>3</sup>) *равна плотности энергии* (с множителем  $8\pi G/c^4$  для перевода из единиц *энергия/длина*<sup>3</sup> в геометрические единицы). Этим утверждением, которому соответствует уравнение

$$\left(R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R\right) \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \quad (55)$$

для любой точки  $P$  и для произвольного трехпараметрического набора направлений  $dx^\alpha/d\tau$ , выражается вся суть уравнений Эйнштейна.

### Доводы Гильберта в пользу четырех тождеств, связывающих уравнения Эйнштейна

На десять уравнений (53) накладываются четыре тождества — четыре уравнения, уже не предъявляющих новых требований к геометрии, так как они удовлетворяются *автоматически*, если только справедливы уравнения (53):

$$\left(R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R\right)_{;\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{;\beta}^{\alpha\beta}. \quad (56)$$

В конечном итоге оказывается лишь шесть уравнений для десяти величин  $g_{\alpha\beta}$ . Такое заключение первоначально оттолкнуло Эйнштейна от окончательной формы уравнений поля [29], и поэтому он сначала опубликовал

[30] уравнения вида (43). На это Гильберт [31] указал, что уравнения для определения  $g_{\alpha\beta}$  были бы совершенно неприемлемыми, если бы они действительно однозначно определяли эти величины. Ведь нам нужно определить геометрию и кривизну пространства — времени, а в каких координатах мы станем описывать эту геометрию, это уже несущественно. Но если бы наши уравнения полностью определяли все десять компонент  $g_{\alpha\beta}$ , то из них следовала бы не только геометрия, но и те координаты, в которых эта геометрия должна быть выражена. Мы знаем, однако, что реальный смысл имеет только интервал между двумя событиями (например, между двумя точками пересечения мировых линий)

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \quad (57)$$

Вопрос же о том, как проводить координатные поверхности в пространстве — времени, это вопрос удобства и к самой физике не имеет отношения.

### Свобода выбора координат проявляется в метрических коэффициентах

Свобода выбора координат находит выражение в том, что общее преобразование координат определяется четырьмя произвольно заданными функциями

$$x^\mu = x^\mu(\bar{x}^0, \bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3) \quad (\mu = 0, 1, 2, 3). \quad (58)$$

Она проявляется и в свойствах метрических коэффициентов

$$\bar{g}_{\sigma\tau} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\sigma} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\tau}. \quad (59)$$

В различии между  $\bar{g}_{\alpha\beta}$  и  $g_{\alpha\beta}$  и выражается тот произвол, который допускается и должен допускаться при решении непротиворечивой системы уравнений гравитационного поля, если их рассматривать как уравнения для определения *метрических коэффициентов*. Если же эти уравнения считать определяющими *геометрию*, то никакого места для произвола не остается, коль скоро корректно заданы *начальные условия*.

## Задача начальных значений в электродинамике и в геометродинамике

Прежде чем рассматривать задачу начальных значений к геометродинамике, целесообразно вспомнить, каков подход к решению этой задачи в теории электромагнитного поля. Там все пространство берется в некоторый данный момент — говоря более общим образом, все величины рассматриваются на некоторой пространственноподобной гиперповерхности. Во всей этой трехмерной области задаются напряженности электрического и магнитного полей. Уравнения Максвелла позволяют на основании этих *начальных данных* определить всю будущую эволюцию (и всю прошлую историю) рассматриваемого поля. Для этого нужно только, чтобы наши начальные данные были *корректно определены*, т. е. (в случае пространства, не содержащего зарядов) они должны удовлетворять *уравнениям для начальных значений*

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (60)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \quad (61)$$

во всей рассматриваемой трехмерной области.

### Внутренняя геометрия

Подобным же образом задача начальных значений формулируется и в геометродинамике<sup>1)</sup>.

1. Зададим трехмерную пространственноподобную геометрию  ${}^{(3)}\mathcal{S}$ , указав, например, шесть метрических коэффициентов  ${}^{(3)}g_{ik}$  ( $i, k=1, 2, 3$ ) как функции трех координат  $x^1, x^2, x^3$ . В геометродинамике, как и в электродинамике, это делается в два приема: выбирается пространственноподобная гиперповерхность и на этой гиперповерхности задается магнитное поле (так называемые полевые координаты электродинамики). Тогда остается лишь определить «полевой импульс» — аналог электрического поля — на этой гиперповерхности.

<sup>1)</sup> См. примечание на стр. 144.



## Внешняя кривизна

2. Определим *внешнюю кривизну*  $K_k^i$  рассматриваемой гиперповерхности (так называемую вторую фундаментальную форму<sup>1)</sup>), указав, как искривлена гиперповерхность по отношению к окружающему ее четырехмерному многообразию, которое нам еще предстоит определить. Для наглядности напомним, что *внутренняя геометрия* листа бумаги остается евклидовой, как бы мы ни изогнули этот лист. Кривизна при таком изгибе будет чисто *внешней* и связана с тем, как этот лист бумаги расположен в окружающем его трехмерном пространстве. Для более точного введения внешней кривизны мы восстановим в точках  $x^i$  ( $i=1, 2, 3$ ) и  $x^i + dx^i$  временно-подобные нормали абсолютной длины  $d\tau$ . Построим вектор от конца первой нормали до конца второй. Вернем этот вектор на исходную гиперповерхность путем параллельного переноса. Мы увидим, что он не совпадает с вектором  $dx^i$  между основаниями наших двух нормалей. Вместо этого его компоненты можно записать как

$$dx^i + K_k^i dx^k d\tau. \quad (62)$$

Это выражение и определяет тензор внешней кривизны  $K_k^i$ . Если в течение интервала собственного времени  $d\tau$  следить не за двумя пробными частицами, а за целым их скоплением, то *относительное изменение объема* этого скопления даст величину

$$(K_1^1 + K_2^2 + K_3^3) d\tau = (\text{Sp } K) d\tau. \quad (63)$$

Здесь символ  $\text{Sp } K$  обозначает след (свертку) тензора внешней кривизны. Более точную меру деформации скопления пробных частиц, происходящей с течением собственного времени, дает нам «второй инвариант внешней кривизны» — величина

$$K_2 = (\text{Sp } K)^2 - \text{Sp } K^2 = (K_i^i)^2 - K_k^i K_i^k. \quad (64)$$

<sup>1)</sup> См., например, [22], разд. 43.

### Уравнения для начальных значений

3. После того как внутренняя геометрия и внешняя кривизна гиперповерхности заданы, уравнения Эйнштейна однозначно определяют всю прошлую и будущую эволюцию геометрии, *если только* начальные данные удовлетворяют *уравнениям для начальных значений*

$$\begin{aligned} R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} R &= -\frac{8\pi G}{c^4} T_{00}, \\ R_{0i} - \frac{1}{2} g_{0i} R &= \frac{8\pi G}{c^4} T_{0i} \end{aligned} \quad (65)$$

или в (3+1)-мерном виде, который часто оказывается более удобным<sup>1)</sup>,

$$\begin{aligned} (K_i^k - \delta_i^k \text{Sp } K)_{|k} &= 2 \frac{8\pi G}{c^4} \times \left( \begin{array}{l} \text{Плотность потока энергии} \\ \text{в направлении оси } i \end{array} \right), \\ {}^{(3)}R + K_2 &= 2 \frac{8\pi G}{c^4} \times (\text{Плотность энергии}). \end{aligned} \quad (66)$$

### Суть уравнений Эйнштейна — в уравнениях для начальных значений

В уравнении (66) выражается вся суть общей теории относительности. Мы будем использовать его как уравнение для начальных значений, но оно справедливо в любой точке  $P$  пространства — времени. Рассмотрим аналогичные уравнения электродинамики

$$\text{div } \mathbf{E} = 0, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (67)$$

Их смысл в том, что силовые линии нигде не кончаются. Возьмем произвольную точку  $P$  пространства — времени и проведем через нее пространственноподобную гиперповерхность, наклон которой может быть любым. Потребуем, чтобы при любом наклоне силовые линии на этой гиперповерхности нигде не оканчивались. *Из требования о том, чтобы силовые линии никогда и нигде не*

<sup>1)</sup> В уравнении (66) символ  $|k$  обозначает ковариантное дифференцирование по  $k$ -й координате относительно геометрии трехмерного многообразия.

оканчивались, мы получим все уравнения Максвелла. Подобным же образом одно-единственное требование (66), состоящее в том, что *сумма внутренней скалярной кривизны и второго инварианта внешней кривизны должна давать умноженную на коэффициент  $16\pi G/c^4$  плотность энергии*, если его распространить на случай любой гиперповерхности, проходящей через произвольную точку  $P$ , *заключает в себе все содержание уравнений Эйнштейна.*

### Почему существенна кривизна гиперповерхности?

В случае электродинамики гиперповерхность, проходящую через точку  $P$ , достаточно охарактеризовать ее *наклоном*. Это соответствует тому, что для определения электромагнитных сил достаточно *одиночной* пробной частицы. Гравитационные же силы определяются через изменение расстояния между *двумя* пробными частицами. Поэтому-то и приходится задавать не только *наклон*, но и *кривизну* гиперповерхности, по нормали к которой идут мировые линии.

### Приложение к частному случаю геометрии, симметричной во времени

Продемонстрируем теперь действие аппарата общей теории относительности. Для этого мы выберем пример попроще. Пусть внешняя кривизна исходной пространственноподобной гиперповерхности будет равна *нулю*. Тогда предсказываемая на основании уравнений Эйнштейна геометрия четырехмерного пространства — времени будет *симметричной во времени* в том смысле, что любое явление в таком мире, происшедшее после определенного момента, окажется зеркальным отражением того, что произошло уже до этого момента<sup>1)</sup>. Таким образом, внешняя кривизна  $K_i^k$  равна нулю. Ограничимся

<sup>1)</sup> Об исследовании других случаев симметрии во времени см. работы [32, 33].

теперь таким случаем, когда «реальная» энергия отсутствует. Тогда три уравнения для начальных значений будут гождественно удовлетворены, а четвертое [уравнение (66)] сведется к требованию

$${}^{(3)}R = 0. \quad (68)$$

### Дальнейшее ограничение случаем сферической симметрии и отсутствия источников <sup>1)</sup>

Ради дальнейшего упрощения задачи будем считать геометрию сферически симметричной на исходной гиперповерхности и отличающейся от евклидовой множителем  $\psi^4$ , зависящим только от радиальной координаты  $r$ . Тогда

$$\begin{aligned} ds^2 &= \psi^4(r) (dx^2 + dy^2 + dz^2) = \\ &= \psi^4(r) (dr^2 + r^2 d\theta + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2), \end{aligned} \quad (69)$$

причем

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2. \quad (70)$$

Уравнение (69) принимает тогда простой вид

$$\nabla^2 \psi(r) = 0. \quad (71)$$

Это упрощение мы и имели в виду, когда брали неевклидов множитель  $\psi^4$ , а не  $\psi^2$  или  $\psi$ .

### Определение начальной трехмерной геометрии

Решение уравнения (71) содержит две произвольные постоянные и может быть взято в виде

$$\psi(r) = 1 + \frac{m^*}{2r}. \quad (72)$$

---

<sup>1)</sup> Автор пишет: «freedom from matter» — буквально: отсутствие материи (имеется в виду правая часть уравнений Эйнштейна); однако следует помнить, что при этом чаще всего понимается не *материя* в самом широком смысле слова, а *вещество* и (в общей теории относительности особенно) все физические поля, кроме гравитационного. Гравитационное поле само можно уже рассматривать как вид материи (особенно имея в виду, что Уилер строит из него — и в некоторых случаях только из него — весь мир, «населенный» массами и пр.). — *Прим. перев.*

Мы положили здесь первую постоянную равной единице, для того чтобы на больших расстояниях длины выражались так же, как в обычной евклидовой геометрии. Другая постоянная

$$m^* = \frac{Gm}{c^2} \quad (73)$$

имеет размерность длины и является геометрической мерой массы.

Тем самым мы определили зависимость метрического тензора известной геометрии Шварцшильда (пространства, окружающего сферически симметричный центр гравитации) от точки пространства. В этой геометрии корни трех знаменитых эффектов общей теории относительности.

Итак, мы определили *начальную* трехмерную геометрию, удовлетворяющую уравнениям начальных значений геометродинамики, подобно тому как в электродинамике находят векторную функцию точки  $\mathbf{B}(x, y, z)$ , дивергенция которой равна нулю. Но мы не решили *дальнейшей* задачи о динамической эволюции этой шварцшильдовской геометрии во времени<sup>1)</sup>.

### Неожиданная топология

Рассмотрим теперь более внимательно геометрию Шварцшильда на гиперплоскости временной симметрии. Возьмем фиксированное значение  $r$ , положим  $\theta = \pi/2$  (экватор!) и предоставим  $\varphi$  изменяться от 0 до  $2\pi$ . Пройденный путь будет тогда равен

$$(\text{Длина окружности}) = \int ds = 2\pi r \psi^2 = 2\pi r \left(1 + \frac{m^*}{2r}\right)^2. \quad (74)$$

Эта величина, как и следовало ожидать, увеличивается при возрастании  $r$ , если радиус  $r$  велик. Но при малых  $r$  она также увеличивается с уменьшением  $r$ . Минимум этой величины

$$(\text{Длина окружности горловины}) = 8\pi m^* \quad (75)$$

<sup>1)</sup> Топология и развитие во времени геометрии Шварцшильда показаны на схематических диаграммах в работе [34].

соответствует значению радиальной координаты  $r = m^*/2$ . При еще меньших  $r$  геометрия представляется зеркальным отображением геометрии, соответствующей большим значениям  $r$ , что проще всего показать, введя новую радиальную координату с помощью соотношения

$$r\bar{r} = \left(\frac{m^*}{2}\right)^2. \quad (76)$$

Элемент длины  $ds$  [см. выражение (69)], переписанный через  $\bar{r}$  вместо  $r$ , сохраняет свой прежний вид (69)!

Удивительно, что, начав с простейшей задачи геометродинамики, мы пришли прямо к неевклидовой топологии<sup>1)</sup> — к трехмерной геометрии, построенной с помощью *двух* асимптотически евклидовых пространств, соединенных между собой горловиной. Мы не получили бы такого результата, если бы взяли в качестве центра «реальный» источник, как это делается, например, когда нужно определить геометрию внутри Солнца. В данном же случае нами получено искривленное пустое пространство, в котором имеет место гравитационное притяжение. Изучая закон тяготения на большом расстоянии от центра, мы не можем здесь заметить никакого отличия его от реальной массы. Другими словами, чисто шварцшильдовская геометрия дает нам исключительно простой пример *геометродинамической модели массы*.

## Диапазон геометродинамики

Можно вместе с тем построить геометродинамическую модель массы, обладающую евклидовой топологией, — *геон*, состоящий из электромагнитного или гравитационного излучения, которое удерживает само себя собственным гравитационным притяжением. Можно также чисто геометрически и в рамках стандартной теории Эйнштейна 1915 г. дать описание электромагнетизма и электричества, совершенно не пользуясь представлением о «реальных» зарядах.

<sup>1)</sup> См. работу [34].

## Нерешенные вопросы, касающиеся расстояния, определенного постоянной Планка

Те виды классической массы и классического заряда, которые появляются в геометродинамике, не имеют прямого отношения к зарядам и массам элементарных частиц. До сих пор еще непонятна связь между исключительно богатой моделью мира в теории Эйнштейна и действительным миром. Изучение этой связи является одной из задач будущих исследований. Здесь исследователи столкнутся с физикой в области чрезвычайно малых расстояний, определяемых квантом действия  $h$ :

$$L^* = \sqrt{\hbar G/c^3} = 1,6 \cdot 10^{-33} \text{ см}, \quad (77)$$

а это предъявляет к теории совершенно исключительные требования<sup>1)</sup>, причем немалые трудности вызовет полное отсутствие экспериментальных данных об этой области.

## Зависимость угла отклонения от скорости как критерий различения тензорного и векторного полей

Теория относительности делает, однако, один вывод в области более доступных масштабов длин, интересный с точки зрения экспериментальной проверки, так как он касается различия между векторным электрическим и тензорным гравитационным полями. Рассмотрим отклонение релятивистской пробной частицы ( $\beta = v/c \sim 1$ ) сферически симметричным центром, обладающим в одном случае электрическим зарядом, а в другом случае гравитационным притяжением. Определим прицельный параметр  $b$  нашей частицы как расстояние по перпендикуляру от притягивающего центра до продолжения прямой, по которой частица двигалась первоначально. Пусть, кроме того, заряды пробной частицы и притягивающего центра будут выражены в геометрических единицах согласно формуле

$$q^*(\text{см}) = \frac{\sqrt{G}}{c^2} q \text{ (СГСЭ)}. \quad (78)$$

<sup>1)</sup> Подробнее этот вопрос разбирается в статье [35].

Тогда в случае больших значений прицельного параметра теоретически вычисленное отклонение (см. [35]) равно

$$\theta = 2 \frac{q_{\text{пробн}}^* q_{\text{центр}}^*}{b m_{\text{пробн}}^*} \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\beta^2} \quad (79)$$

в случае электромагнитного взаимодействия и

$$\theta = 2 \frac{m_{\text{центр}}^*}{b} \left( 1 + \frac{1}{\beta^2} \right) \quad (80)$$

в случае гравитационного взаимодействия. Резкая разница в зависимости этих двух результатов от скорости, по-видимому, до настоящего времени не была отмечена.

### Частный случай: отклонение луча света в поле Солнца

Могут, конечно, сказать, что одна точка на кривой (80) уже была приблизительно проверена при измерении отклонения луча света в поле Солнца. В этом случае в уравнении (80) появляется знаменитый множитель 2, которым отличаются друг от друга соответствующие предсказания теорий Эйнштейна и Ньютона. В этом случае соответствующие величины равны

$$m = (\text{Масса Солнца}) = 1,987 \cdot 10^{33} \text{ г},$$

$$m^* = (\text{Геометризованная масса}) = 1,475 \cdot 10^5 \text{ см},$$

$$b = (\text{Прицельный параметр}) = 6,94 \cdot 10^{10} \text{ см},$$

$$\theta = \frac{4m^*}{b} = (\text{Предсказание Эйнштейна}) = 1,751'',$$

$$\theta \text{ (наблюдавшееся при затмении 1947 г.)} = (2,01 \pm 0,27)'',$$

$$\theta \text{ (наблюдавшееся при затмении 1952 г.)} = (1,70 \pm 0,10)'',$$

Согласие теории и эксперимента удовлетворительное.



## ЛИТЕРАТУРА

1. Wheeler J. A., Rev. Mod. Phys., **29**, 463 (1957).
2. Wheeler J. A., Geometrodynamics, New York, 1962, p. 75.
3. Wheeler J. A., Monist, **47**, 40 (1962).
4. Wheeler J. A., в книге Proceedings of the 1962 Boulder Summer Conference on Theoretical Physics, New York (в печати).
5. Stellmacher K., Math. Ann., **115**, 136 (1937).
6. Lichnerowicz A., Helv. Phys. Acta Suppl., **4**, 176 (1956).
7. Fourès-Bruhat Y., Journ. Rational Mech. Anal., **5**, 951 (1956).
8. Bruhat Y., в сборнике Gravitation, an Introduction to Current Research, ed. L. Witten, New York, 1962.
9. Arnowitt R., Deser S., Misner C. W., Phys. Rev., **113**, 745 (1959); **116**, 1322 (1959); **117**, 1595 (1960); **118**, 1100 (1960).
10. Baierlein R. F., Sharp D. H., Wheeler J. A., Phys. Rev., **126**, 1864 (1962).
11. Фейнман Р. П., Ph. D. Thesis, Princeton University, 1942.
12. Фейнман Р. П., Rev. Mod. Phys., **20**, 367 (1948).
13. Фейнман Р. П., Phys. Rev., **76**, 769 (1949).
14. Фейнман Р. П., в сборнике Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, ed. J. Neyman, Berkeley, 1951, p. 533.
15. Фейнман Р. П., Phys. Rev., **97**, 660 (1955).
16. Кас М., Probability and Related Topics in Physical Sciences, New York, 1951.
17. Morette C., Phys. Rev., **81**, 848 (1951).
18. Choquard P., Helv. Phys. Acta, **28**, 89 (1955).
19. Polkinghorne J. C., Proc. Roy. Soc., **A230**, 272 (1955).
20. Fujiwara I., Proceedings of the Physics Seminar in Trondheim, No. 3, Copenhagen, 1962.
21. Kursunoglu B., Modern Quantum Theory, San Francisco, 1962.
22. Eisenhart L. P., Riemannian Geometry, Princeton, 1926, p. 21 (имеется перевод: Л. П. Эйзенхарт, Риманова геометрия, ИЛ, 1948, стр. 32).
23. Fermi E., Atti. Accad. Naz. Lincei, **31**, 21, 51 (1922).
24. Manasse F., Distortion in the Metric of a Small Center of Gravitational Attraction due to its Proximity to a Very Large Mass, Ph. D. Thesis, Princeton University, September 1961 (в печати, первая часть публикуется в соавторстве с Мизнером).
25. Pauli W., Theory of Relativity, New York, 1958 (имеется перевод: В. Паули, Теория относительности, ИЛ, 1948).
26. Wheeler J. A., Rev. Mod. Phys., **34**, 873 (1962).

27. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, 3-е изд., М., 1960.
28. Cartan E., Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann, 2d ed., Paris, 1951, ch. 8.
29. Einstein A., Preussische Akad. d. Wiss. Berlin, Sitzungsber., 844 (1915).
30. Einstein A., Preussische Akad. d. Wiss. Berlin, Sitzungsber., 778 (1915).
31. Hilbert D., Gesell. d. Wiss, Göttingen, Nachrichten, 395 (1915).
32. Araki H., Ann. of Phys., 7, 456 (1959).
33. Brill D., Ann. of Phys., 7, 466 (1959).
34. Fuller R. W., Wheeler J. A., Phys. Rev., 128, 919 (1962).
35. Wheeler J. A., Rev. Mod. Phys., 34, 873 (1962).

# 5

## Гравитационные волны

Д Ж. ВЕБЕР

### Возможность гравитационного излучения — нерешенная теоретическая проблема

Гравитационную волну можно рассматривать как гравитационное поле, движущееся в пространстве. Такая волна должна была бы оказывать силовое воздействие на объекты, обладающие массой, вне зависимости от того, заряжены они или нет. Физик-релятивист говорит о гравитационной волне как о распространении кривизны пространства — времени<sup>1)</sup>.

Гравитационных волн никто никогда не наблюдал. Некоторые хорошо известные физики даже сомневаются в их существовании. Поэтому нам следует прежде всего рассмотреть те основания, на которых строятся современные представления о гравитационном излучении.

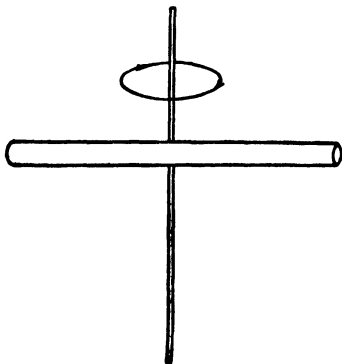
В 1916 г. Эйнштейн<sup>2)</sup> проанализировал решения своих уравнений для случая слабого поля и пришел к выводу о возможности квадрупольного излучения. Он рассматривал задачу о стержне, вращающемся вокруг одной своей оси (фиг. 5.1). В результате он установил, что мощность излучения должна быть равна

$$P = \frac{32GI^2\omega^6}{5c^5} = 1,73 \cdot 10^{-59} I^2 \omega^6 \text{ эрг/сек.} \quad (1)$$

<sup>1)</sup> Более точным было бы, по-видимому, такое определение: гравитационная волна — это возмущение гравитационного поля, распространяющееся с конечной скоростью и несущее с собой энергию. — *Прим. ред.*

<sup>2)</sup> Литература по данному вопросу указана в работе [1], где проводится также подробный анализ результатов, представленных в настоящей главе.

Здесь  $I$  — момент инерции стержня относительно оси вращения,  $\omega$  — угловая скорость,  $G$  — гравитационная постоянная, а  $c$  — скорость света. В силу симметрии стержня частота излучаемой волны равна  $2\omega$ . Из формулы (1) следует, что стержень длиной около 1 м, вращающийся со скоростью, при которой он уже может разорваться под действием напряжений, концентрирующихся в его центре, должен излучать примерно  $10^{-30}$  эрг/сек. Постоянная времени, характеризующая



Фиг. 5.1. Вращающийся стержень как источник гравитационной волны.

торможение стержня за счет такого излучения, составляет примерно  $10^{35}$  лет. Вследствие ничтожно малой мощности излучения экспериментально такое торможение не наблюдалось, и перспективы эксперимента никогда не были особенно обнадеживающими.

Малая величина интенсивности излучения объясняется отчасти тем, что излучением наименьшего возможного типа в данном случае оказывается лишь квадрупольное излучение. Это обстоятельство, как можно пояснить элементарным рассуждением, вытекает из закона сохранения импульса. Предположим, что у нас имеется изолированная система двух тел — большой и малой массы, связанных друг с другом пружиной, как показано на фиг. 5.2. Полный импульс такой изолированной ос-

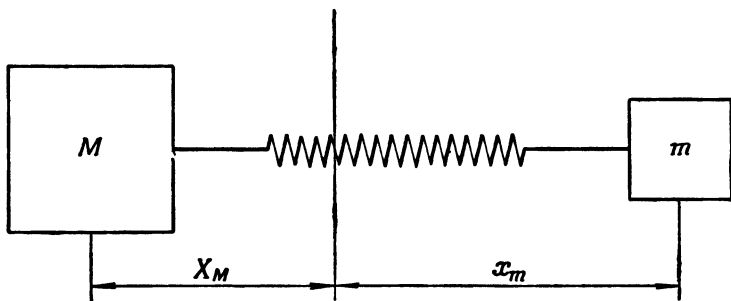
циллирующей системы будет постоянной величиной, которую можно положить равной нулю:

$$m\dot{x}_m + M\dot{X}_M = 0. \quad (2)$$

Дифференцируя это равенство по времени, получаем

$$m\ddot{x}_m + M\ddot{X}_M = 0. \quad (3)$$

Эта сумма произведений массы на ускорение соответствует сумме произведений заряда на ускорение в электродинамике. Известно, что дипольное излучение возникает при условии, что эта сумма отлична от нуля.



Фиг. 5.2. Осциллятор с дипольным распределением масс.

Отсюда следует, что гравитационный аналог электромагнитного дипольного излучения отсутствует в силу закона сохранения импульса.

Все это справедливо лишь в некотором приближении. В приближении следующего порядка следовало бы рассмотреть эффекты, связанные с запаздыванием. Дело в том, что вклады, обусловленные большой и малой массами, неполностью компенсируются на большом расстоянии. В силу сказанного мы заключаем, что гравитационное излучение наимизшего порядка не может быть дипольным, а должно быть квадрупольным излучением.

Трактовка гравитационного излучения самим Эйнштейном основывается на решениях его полевых уравнений в приближении слабого поля. Для того чтобы получить решение в случае сильного поля, следует рассмат-

ривать точные уравнения поля. Эта задача до сих пор никем не решена. При решении этой проблемы следует исходить из эйнштейновских уравнений поля

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (4)$$

В пустом пространстве скалярная кривизна и тензор материи обращаются в нуль:

$$\begin{aligned} R &= 0, \\ T_{\mu\nu} &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

так что уравнения поля Эйнштейна приводятся к виду

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (6)$$

Затем, чтобы строго установить факт существования гравитационных волн, необходимо показать, что эти существенно нелинейные уравнения имеют решения, которые в асимптотическом приближении ведут себя как сферические волны. Эти решения не должны обладать сингулярностями. Кроме того, следует показать, что в области, где расположен источник, существуют решения уравнения (4), которые гладко переходят в решения уравнений (6).

Такая проблема даже для электромагнитных волн не была решена вплоть до 1941 г., когда Щелкунову [2] удалось получить полное решение уравнений Максвелла, удовлетворяющее граничным условиям на антенне и надлежащим образом переходящее в решения, которыми описывается распространение сферической волны. Если учесть трудности, с которыми связано получение строгих решений даже в электродинамике, то становится ясным, почему эта теоретическая проблема оказывается чрезвычайно трудной в теории тяготения.

### Волновые решения уравнений Эйнштейна в приближении слабого поля

Рассмотрим теперь решения для случая слабого поля. При выводе этих решений будем считать, что пространство почти плоское и метрика почти лоренцова. В таком

случае метрический тензор можно записать в виде суммы лоренцова метрического тензора и малой величины первого порядка малости:

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \quad (7)$$

Определим также вспомогательную величину  $\varphi_{\mu}^{\nu}$ :

$$\varphi_{\mu}^{\nu} = h_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\nu} h_{\alpha}^{\alpha}, \quad (8)$$

где  $h_{\alpha}^{\alpha}$  означает след  $h$ . Можно показать, что величина первого порядка малости  $\varphi_{\mu}^{\nu}$  удовлетворяет известному нам волновому уравнению

$$\square \varphi_{\mu}^{\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} \tau_{\mu}^{\nu}, \quad (9)$$

если выполняется дополнительное условие

$$\varphi_{\mu, \nu}^{\nu} = 0. \quad (10)$$

В уравнении (9)  $\square \varphi_{\mu}^{\nu}$  — даламбертиан от  $\varphi_{\mu}^{\nu}$ , а  $\tau_{\mu}^{\nu}$  — члены наинизшего порядка в разложении  $T_{\mu}^{\nu}$ .

Исходя именно из этих уравнений, решали проблему излучения Эйнштейн и позднее Эддингтон. По своей форме эти уравнения совпадают с соответствующими уравнениями электродинамики. Поэтому следует ожидать, что тензор энергии — импульса будет играть в гравитации ту же роль, что и четырехмерный вектор тока в теории электромагнетизма. Он должен являться источником гравитационного поля, а следовательно, и источником гравитационных волн.

В 1939 г. аналогичная система уравнений была получена Паули и Фирцем, исходившими из совершенно иных соображений. Паули и Фирц исследовали релятивистские волновые уравнения для частиц со спином, большим  $1/2$ . Они установили, что свободным частицам со спином 2 и нулевой массой покоя соответствуют следующие волновые уравнения:

$$\begin{aligned} \square \varphi_{\mu}^{\nu} &= 0, \\ \varphi_{\mu, \nu}^{\nu} &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Уравнения (11) совпадают с уравнениями (9) и (10) для вакуума, и в этом совпадении нет ничего удивительного. В самом деле, для описания частиц со спином 2 необходима десятикомпонентная волновая функция (пять проекций спина и удвоение вследствие того, что возможны как положительные, так и отрицательные значения энергии). У симметричного же тензора второго ранга как раз десять независимых компонент, и, следовательно, он может служить подходящим представлением десятикомпонентной волновой функции.

Поскольку в вакууме обе системы уравнений [(9) и (10), с одной стороны, и (11) — с другой] совпадают по форме, отсюда можно заключить, что частицы, соответствующие гравитационному полю, — гравитоны — имеют спин, равный 2. Так как гравитационное поле имеет бесконечное число степеней свободы, то отсюда вытекает также, что масса покоя гравитона равна нулю.

### Поляризация гравитационных волн

Возвращаясь к уравнению (4), поставим перед собой следующий вопрос: сколько параметров необходимо для описания поляризации гравитационной волны, распространяющейся в заданном направлении? На этот вопрос можно ответить, если исследовать структуру тензора кривизны  $R_{\alpha\beta\gamma}^k$ , который удовлетворяет уравнениям поля в вакууме:

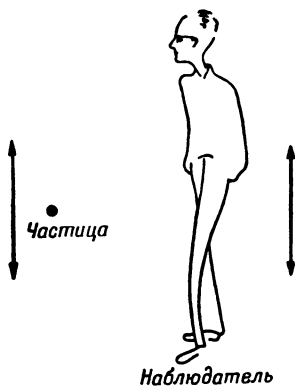
$$R_{\mu}^{\nu} = 0. \quad (12)$$

Здесь  $R_{\mu}^{\nu}$  представляет собой свертку  $R_{\dots\mu\alpha}^{\alpha\nu}$ . При соответствующем выборе системы координат для описания гравитационной волны, распространяющейся в определенном направлении, потребуются только три переменные величины. В случае волны, распространяющейся в направлении оси  $x^1$ , такими переменными будут  $g_{22}$ ,  $g_{33}$  и  $g_{32}$ . Из этих величин  $g_{22}$  и  $g_{33}$  не являются независимыми. Для локально плоской волны

$$g_{22,00} + g_{33,00} = 0, \quad (13)$$



Это обстоятельство — наличие у гравитационной волны двух степеней свободы — легко уяснить на основе простых соображений. Зададимся вопросом, как действует гравитационная волна на пробную частицу. Этот вопрос приведет нас ко второй части обсуждаемой темы, а именно к возможным способам обнаружения гравитационных волн.



Фиг. 5.3. Движение одной частицы, вызванное гравитационной волной.

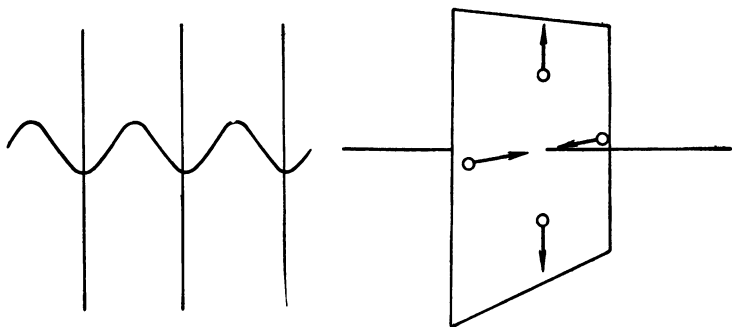
Рассмотрим взаимодействие между гравитационной волной и отдельной пробной частицей, которая приводится этой волной в колебательное движение. Если наблюдать данное взаимодействие, будучи связанным с частицей, то вследствие принципа эквивалентности наблюдатель будет осциллировать вместе с частицей и ничего не обнаружит (фиг. 5.3).

Другое дело, если на некотором расстоянии от первой частицы имеется вторая частица. Тогда вследствие запаздывания по фазе вторая частица будет двигаться относительно первой. И не исключено, что в случае синусоидальной волны внимательный наблюдатель заметит некоторое периодическое изменение расстояния между этими двумя частицами.

Но следует учесть, что, кроме ускорений, вызванных волной, на этом расстоянии между частицами будет

сказываться изменение метрики. В случае двух частиц, расположенных вдоль линии распространения волны, оба эти эффекта в точности компенсируют один другой — и в этом нет ничего неожиданного.

Если же две частицы расположены в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны, то эффект, обусловленный геометрией пространства, окажется доминирующим, и частицы будут двигаться неодинаково. Одна частица будет смещаться относительно



Фиг. 5.4. Относительное движение четырех частиц, вызванное гравитационной волной.

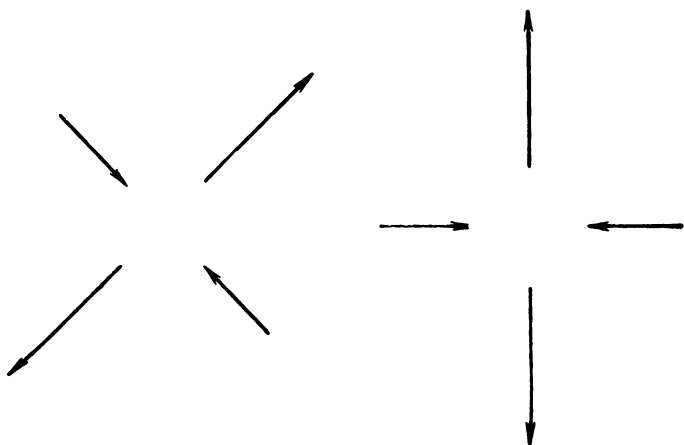
другой в направлении, перпендикулярном распространению волны.

Теперь представим себе, что в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны, расположены четыре частицы, как показано на фиг. 5.4. В этом случае наблюдатель заметил бы, что две частицы сближаются, а две другие удаляются друг от друга. Такое движение характерно для квадрупольного колебания.

В случае плоской волны в электромагнитной теории для каждого направления распространения имеются два состояния поляризации, причем одно может быть получено из другого поворотом на  $90^\circ$ . В случае гравитационной волны, взаимодействующей с четырьмя частицами, расположенными как показано на фиг. 5.4, поворот на  $90^\circ$  ничего не меняет. Поворот же на  $45^\circ$  (фиг. 5.5) приводит к другому независимому состоянию поляри-

зации волны. Две степени свободы, о которых говорилось ранее, как раз и соответствуют этим двум независимым состояниям поляризации.

Этот результат выступает наиболее отчетливо, когда общая теория относительности представлена



Фиг. 5.5. Два состояния поляризации гравитационного излучения.

в гамильтоновой форме в приближении слабого поля. Гамильтониан имеет вид

$$H = \sum \frac{\pi_k^{12} \pi_{-k}^{12}}{2} + \frac{k^2 h_{k12} h_{-k12}}{2} + 2\rho_k \rho_{-k} + \frac{k^2 q_k q_{-k}}{8}, \quad (14)$$

где

$$q_k = h_{k11} - h_{k22}. \quad (15)$$

Величины  $h_k$  являются коэффициентами Фурье. Они удовлетворяют соотношениям

$$h_{k12} = h_{-k12}^*. \quad (16)$$

Величины  $\pi$  представляют собой импульсы, канонически сопряженные  $h$ . Одна степень свободы, связанная с диагональной поляризацией (см. фиг. 5.5), характеризуется полевыми переменными и плотностями канонических

импульсов  $\pi_{k12}$ . Другая степень свободы, связанная с вертикально-горизонтальной поляризацией, описывается полевыми переменными  $q_k$ , связанными с величинами  $h_{k11}$  и  $h_{k22}$  согласно уравнениям (15).

Итак, исходим ли мы из гамильтоновой формы теории тяготения или из условий, накладываемых на тензор Римана уравнениями Эйнштейна в случае слабого поля, мы заключаем, что для каждого направления распространения  $k$  (которое определяется граничными условиями) существуют две степени свободы.

Такова формальная схема, с которой мы должны иметь дело. За последние 30—40 лет было проведено довольно много теоретических исследований с целью доказать или опровергнуть существование этих волн, поскольку было ясно, что экспериментальные исследования наталкиваются на колоссальные трудности. Один из вызывавших разногласия вопросов был связан с уравнениями движения. Общая теория относительности отличается от некоторых других теорий тем, что уравнения движения тел содержатся в самих уравнениях поля. Поэтому имеет смысл поставить следующий вопрос: допускают ли уравнения движения такое движение частиц, при котором они излучали бы волны этого поля?

В этом-то пункте мнения и расходятся. Инфельд в Варшаве, как и некоторые другие ученые, считает, что предметы, движущиеся под действием чисто гравитационных сил, не должны излучать. Это означало бы, что планета, вращающаяся вокруг Солнца, не может излучать гравитационных волн.

Но даже если бы в действительности дело обстояло таким образом, это не имело бы решающего значения, поскольку наши интересы не ограничиваются системами, в которых играют роль только гравитационные силы. Напротив, силы, с которыми физики имеют дело в лаборатории, намного больше гравитационных. Утверждать же, что частицы, движущиеся под действием электромагнитных или ядерных сил, не должны излучать гравитационных волн, нет никаких оснований. Взять, например, две массы, связанные пружиной. Эти массы движутся под действием гравитационных сил и упругих сил, имеющих электромагнитную природу. Именно не-

гравитационные силы играют решающую роль в методах обнаружения и получения гравитационных волн, которые описываются далее.

## Проблема обнаружения гравитационного излучения

Какого типа эксперименты хотелось бы осуществить в области гравитационного излучения? Классическим примером опыта по исследованию излучения был опыт Герца. Ему удалось получать и принимать электромагнитные волны в одной и той же лаборатории и продемонстрировать при этом, что они поляризованы и приводят к явлениям интерференции и дифракции. Конечно, очень хотелось бы провести такие же эксперименты с гравитационными волнами.

Эксперимент другого типа связан с обнаружением уже существующего в природе гравитационного излучения. Предположим, что вне Земли или даже вне Солнечной системы существуют источники гравитационного излучения. Как можно было бы обнаружить гравитационные волны, проходящие на Землю от такого космического источника? Возможно ли вообще существование таких источников?

Если Вселенная была порождена в результате некоего колоссального взрыва, то при этом должно было бы возникнуть мощное гравитационное излучение. Эффективное же сечение поглощения гравитационных волн обычными веществами теоретически ничтожно мало. Пусть, например, ультракоротковолновый гравитон падает на молекулу с большим моментом инерции, скажем на молекулу аммиака. Если частота гравитона равна резонансной частоте молекулы аммиака и гравитону соответствует «ширина линии» порядка  $10^4$  гц, то эффективное сечение поглощения равно примерно  $10^{-60}$  см<sup>2</sup>.

Таким образом, гравитационные волны слабо поглощаются атомными и молекулярными частицами. Если бы такие волны были порождены в момент возникновения Вселенной и если Вселенная на самом деле конечна и безгранична (замкнута), то волны должны были бы все еще циркулировать в ней. Согласно оценкам Уилера,

межзвездное гравитационное излучение интенсивностью от  $10^{-29}$  до  $10^{-28}$  г/см<sup>3</sup>, не противоречило бы современным данным о расширении Вселенной. Правда, фурье-образ этого излучения должен иметь пик на частоте 1 колебание за миллион лет. Но можно надеяться, что у него



Фиг. 5.6. Простой резонансный детектор в форме гармонического осциллятора.

имеется высокочастотный хвост, доступный обнаружению. Таким образом, есть основания продолжать поиски гравитационных волн космологического происхождения.

Как же подойти к построению прибора, при помощи которого можно было бы обнаружить гравитационные волны? Мы уже говорили об относительном движении частиц в гравитационном поле. Если в области распространения плоской гравитационной волны окажутся две пробные частицы, то под действием этой волны расстояние между ними будет изменяться. Для усиления эффекта можно было бы связать обе массы пружиной и использовать явление резонанса (фиг. 5.6). В результате можно добиться значительно большего эффективного сечения поглощения. Можно показать (см. [1]), что такой детектор подобен гармоническому осциллятору,

который приводится в движение воздействием тензора кривизны.

Уравнения движения, записанные через относительное смещение  $\xi^\mu$ , имеют вид

$$\frac{d^2\xi^\mu}{dt^2} + \frac{D}{m} \frac{d\xi^\mu}{dt} + \frac{k\xi^\mu}{m} = -c^2 R^\mu_{\ 0\alpha 0} r^\alpha \quad (17)$$

в некоторой удобной для нас системе координат. Величины  $R^\mu_{\ 0\alpha 0}$  по терминологии Де-Витта являются «электрическими» компонентами тензора кривизны;  $r^\alpha$  — радиус-вектор, проведенный от первой частицы ко второй.

Эффективное сечение поглощения такого детектора зависит от его устройства. В противоположность этому в электромагнитной теории, как известно, усредненное по всем ориентациям эффективное сечение поглощения («эффективная площадь») радиоантенны, согласованной с нагрузкой, не зависит от особенностей конструкции антенны. Антенна считается согласованной с нагрузкой, если реактивное сопротивление нагрузки равно нулю, а активное — волновому сопротивлению антенны. В этом случае эффективное сечение поглощения  $\sigma$  определяется длиной волны  $\lambda$ :

$$\sigma = \frac{\lambda^2}{4\pi}. \quad (18)$$

То же самое можно получить и в теории гравитации. Можно показать, что эффективное сечение поглощения согласованной антенны не зависит от вида антенны. Оно не будет зависеть даже от гравитационной постоянной при условии, что антенна нагружена только активным сопротивлением, сравнимым с ее волновым сопротивлением. К сожалению, затухание «антенны» для гравитационных волн приблизительно на 34 порядка меньше, чем затухание антенны для электромагнитных волн. Поэтому нет никакой надежды согласовать такую антенну с ее нагрузкой. Внутренние необратимые процессы будут всегда на много порядков больше.

Эффективное сечение поглощения для такой антенны при учете ее несогласованности с нагрузкой будет

содержать гравитационную постоянную. Оно имеет следующий вид:

$$\sigma = 15\pi Gm |r|^2 \frac{Q\beta^2}{8\omega c}. \quad (19)$$

В этой формуле  $m|r|^2$  — квадрупольный момент антенны;  $Q$  — так называемая добротность, т. е. число колебаний, которое совершит свободный осциллятор, прежде чем его амплитуда уменьшится в  $e$  раз, умноженное на  $\pi$ ;  $\omega$  — угловая частота;  $c$  — скорость света; величина  $\beta$  определяется длиной гравитационной волны по формуле

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (20)$$

Эффективное сечение достигает максимума, когда расстояние между двумя массами  $|r|$  приближается к акустической длине волны, а не к длине световой волны. Это объясняется тем, что возвращающие силы в детекторе распространяются со скоростью звука в пружине, а не со скоростью света.

На практике более удобным детектором, чем массы, соединенные пружинами, был бы большой цилиндр или шар, в котором возбуждались бы нормальные колебания. Если гравитационное излучение будет каким-либо образом возбуждать нормальные колебания такого большого цилиндра, то последний может служить детектором гравитационного излучения.

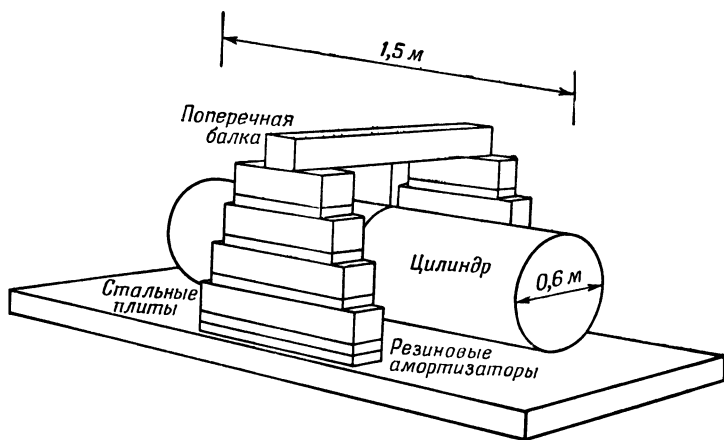
### Лабораторный детектор гравитационных волн

Детектор такого рода строится сейчас в Мэрилендском университете Зипоем, Форвардом и мной. Наша работа является лишь одной из ряда экспериментальных работ, намеченных по теме «Измерение тензора кривизны и поиски гравитационных волн». Основным элементом конструируемого нами детектора является 1,5-тонный алюминиевый цилиндр, подвешенный в большой вакуумной камере, длина которой равна 3 м, а диаметр — 2 м. Цилиндр подвешен на проволоке, охватывающей его посредине. Верхний конец проволоки закреплен на поперечной



балке, опирающейся на стопу акустических фильтров (фиг. 5.7).

Чувствительность такого прибора в принципе ограничивается лишь броуновскими нормальными колебаниями самого цилиндра, что соответствует энергии порядка  $kT$  для каждого резонансного колебания. Эта тепловая энергия распределяется равномерно по всей

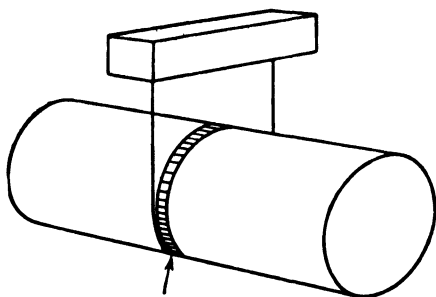


Фиг. 5.7. Резонансный детектор с подвесным цилиндром.

1,5-тонной массе алюминия, так что ей будет соответствовать исключительно малое относительное смещение торцов цилиндра (что-нибудь около  $10^{-14}$  см, т. е. порядка сотой доли диаметра ядра).

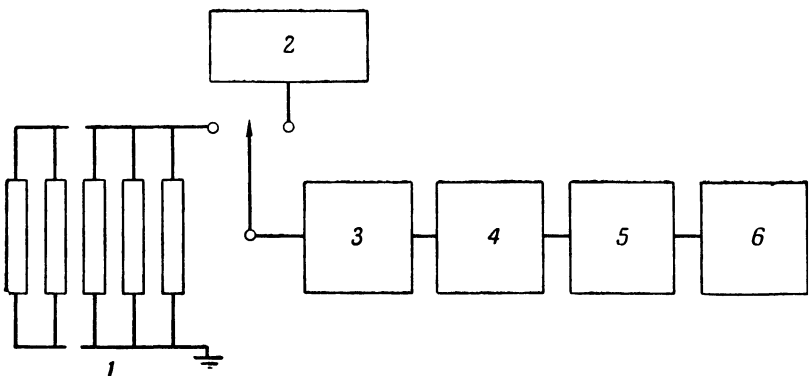
Это число чрезвычайно мало. Конечно, колебания индивидуальных атомов на торцевых поверхностях значительно больше, и  $10^{-14}$  см — это средняя статистическая флуктуация всех атомов.

Возникает весьма интересный вопрос, как регистрировать столь малое движение цилиндра. Поскольку смещение составляет  $10^{-10}$  длины световой волны, оптические методы регистрации, по-видимому, не применимы. Вместо этого мы прикрепляем к центральной части цилиндра ряд кварцевых тензодатчиков (фиг. 5.8). Тензодатчики преобразуют нормальные колебания цилиндра



Фиг. 5.8. Тензодатчики (показаны стрелкой) для обнаружения резонансных вибраций подвешенного цилиндра.

в электрическое напряжение. Это напряжение подается на очень чувствительный резонансный усилитель, сигнал с выхода которого регистрируется (фиг. 5.9). Усилитель



Фиг. 5.9. Блок-схема электронной аппаратуры для детектора гравитационных волн.

1 — кварцевые тензодатчики; 2 — генератор стандартных сигналов; 3 — предусилитель; 4 — резонансный усилитель на 1657 гц; 5 — выпрямитель и преобразователь напряжения в частоту; 6 — счетчик с интервалом счета 15 мин.

настраивается на 1657 гц — частоту используемого нормального колебания. Это соответствует длине гравитационной волны около  $10^7$  см. Шумовая характеристика нашего низкочастотного усилителя значительно лучше

шумовой характеристики квантовых усилителей (мазеров): температура шумов менее  $1^\circ \text{K}$ . Это объясняется тем, что эквивалентное шумовое сопротивление усилителя равно приблизительно  $6000 \text{ ом}$ , а сопротивление на его входе составляет примерно  $10\,000 \text{ Мом}$ .

Мне не хотелось бы слишком долго останавливаться на технической стороне дела. Отмечу лишь, что здесь со всей полнотой действует «теорема», приписываемая Дейгоффу, о том, что в простом эксперименте невозможно обойтись без нескольких стендов с электронной аппаратурой. А что может быть проще цилиндра, подвешенного в вакууме?

Целый ряд соображений приводит к усложнению технической стороны эксперимента. Так, коэффициент усиления, несомненно, будет изменяться с течением времени. Поэтому через каждые  $15 \text{ мин}$  мы отключаем детектор и подаем на вход усилителя стандартный сигнал. Стандартный сигнал на входе сравнивается с соответствующим образом ослабленным выходным сигналом, и разность этих сигналов подается на вход схемы автоматического регулирования, которая возвращает коэффициент усиления к прежнему значению. Выходное напряжение выпрямляется и преобразуется в переменное напряжение, частота которого пропорциональна выходному напряжению. Эта частота измеряется при помощи счетчика. Коэффициент усиления усилителя до и после калибровки, а также показания счетчика автоматически записываются на ленту. Лента будет подаваться на вход счетного устройства для фурье-анализа данных по периодам солнечного и звездного дня. Техническое оснащение эксперимента разработано в основном Форвардом.

Вначале мы много спорили о том, сумеем ли вообще достичь необходимой чувствительности, если не устраним шумовой фон, создаваемый, например, грузовыми автомашинами или студентами, марширующими на университетской спортплощадке. Тогда Зипой рассчитал акустические фильтры. Эти фильтры работают вполне успешно и обеспечивают настолько хорошую виброизоляцию, что для искусственного возбуждения нормальных

колебаний приходится ударять по вакуумной камере молотком.

К сожалению, теперь возник целый ряд других затруднений, не предвиденных ранее. Так, оказалась недостаточно совершенной виброизоляция усилителей и входных цепей. Входные цепи, которые погружены в жидкий гелий, привносят в значительно большей мере шумы механического, чем теплового происхождения. Мы стараемся свести эти эффекты к минимуму, переместив аппаратуру в изолированное место.

Предположим, что Солнце излучает гравитационные волны. Как же будет происходить фактически регистрация этих волн? Детектор в форме алюминиевого цилиндра служит антенной, рассчитанной на прием сигнала, обусловленного полем тензора четвертого ранга. Антенны, предназначенные для приема тензора (электромагнитного) второго ранга, хорошо известны. Некоторые из них обладают весьма острой направленностью. Наша гравитационная антенна, как мы видели ранее, также является направленной. Ее чувствительность максимальна в том случае, когда ось цилиндра перпендикулярна направлению распространения волн. Аппаратура расположена на поверхности Земли и, следовательно, вращается вместе с ней. Если излучение приходит от Солнца или из какой-либо другой области пространства, то должны были бы наблюдаться суточные вариации шумов на выходе усилителей, связанных с цилиндром.

К сожалению, человек относится к существам, ведущим дневной образ жизни, он живет и работает, руководствуясь солнечными сутками. Вместе со сменой дня и ночи изменяется напряжение в сети, а также температура. Устранить эти воздействия из эксперимента нашего типа нелегко.

Другая задача состоит в увеличении чувствительности аппаратуры. Как было показано выше, эффективное сечение поглощения пропорционально квадрупольному моменту. Для нашего 1,5-тонного детектора эффективное сечение поглощения по грубой оценке равно квадрату первого боровского радиуса ( $10^{-16}$  см<sup>2</sup>). Это эффективное сечение довольно мало, но достаточно, чтобы начать эксперимент. Для обеспечения большего эффек-

тивного сечения можно увеличить момент инерции антенны. Но при этом размеры детектора станут еще больше, а они и так уже велики (длина нашей установки равна 3 м, а диаметр — 2 м).

### **Земля и Луна как детекторы гравитационных волн**

Между тем в качестве детектора можно использовать сам земной шар [1]. Он имеет большие размеры и находится под рукой. Его можно превратить в измерительный прибор, по крайней мере в принципе. Квадрупольный момент Земли на много порядков больше квадрупольного момента нашего цилиндра.

Во время Чилийского землетрясения сейсмологической группой Калифорнийского технологического института и другими учеными наблюдались нормальные колебания Земли. Мы можем воспользоваться данными этих наблюдений о нормальных колебаниях Земли и на их основании оценить верхний предел потока гравитационного излучения [3].

Какие же сведения можно было бы получить в идеальном случае из данных о деформации Земли? Земля имеет много типов нормальных колебаний. Некоторые из них обладают симметрией, обеспечивающей их возбуждение гравитационными волнами, а некоторые такой симметрией не обладают (например, колебания со сферической симметрией гравитационными волнами возбуждаться не будут). Поэтому нам хотелось бы иметь информацию об амплитудах колебаний того и другого типа. При наличии такой информации мы могли бы с достаточной уверенностью судить о присутствии гравитационных волн.

Однако данные свидетельствуют о большом уровне шумов. Эти шумы не теплового происхождения, поскольку амплитуда колебаний земной коры, возбуждаемых за счет теплового движения, значительно меньше. Эти шумы вызваны ветрами на земной поверхности, которые дают большой шумовой фон за счет беспорядочных деформаций последней. Единственное, что мы можем сделать, это измерить уровень шумов и затем рассчитать верхний предел потока гравитационного излу-

чения. Но при анализе данных не следует слишком спешить с выводами относительно гравитационного излучения Солнца. Нужно учитывать, что собственные колебания Земли затухают очень медленно. Для колебаний Земли с периодом 1 час при  $Q \approx 400$  «период успокоения» равен примерно 400 час.

Учитывая эти трудности, мы можем установить границы спектральной плотности тензора кривизны, исходя из сейсмических данных. Предел спектральной плотности оказывается меньше  $5 \cdot 10^{-76} \text{см}^{-4} \cdot \text{рад}^{-1} \cdot \text{сек}^{-1}$ . Столь ничтожную величину трудно себе представить. Достаточно сказать, что в таком эксперименте можно было бы обнаружить лишь волны, приводящие к искривлению пространства с локальным радиусом кривизны по грубой оценке менее одного светового года. Следовательно, Земля оказывается не таким уж хорошим детектором, как можно было бы ожидать.

Чтобы обойти проблему ветровых шумов, можно, например, для обнаружения гравитационного излучения использовать Луну. У нее большое эффективное сечение — порядка сотен квадратных метров (если принять, что колебательным состояниям Луны соответствует  $Q \approx 400$ ). На Луне не должно быть ветров и, надо надеяться, нет большой сейсмической активности. Если Луна на самом деле такое спокойное место, то она была бы исключительно хорошим детектором гравитационных волн. Мы уже проводили расчеты тех ограничений, которые накладываются движением Земли и Солнца на «характеристики» Луны как детектора гравитационного излучения. Чтобы использовать Луну в качестве такого детектора, нужно, как мы полагаем, запустить искусственный спутник, который был бы оснащен гравиметром и мог, опустившись на поверхность Луны, передавать на Землю телеметрические данные о движении лунной поверхности. Гравитационные волны можно было бы также обнаруживать, наблюдая движение Луны вокруг Земли. Не исключено, что некоторые отклонения в движении Луны и планет, до сих пор еще не нашедшие объяснения, обусловлены действием гравитационных волн. Но пока что данные о таких отклонениях не настолько ясны, чтобы дать им подобную интерпретацию.

## Генерирование гравитационного излучения

При различных процессах во Вселенной, связанных с движением материи в астрономических масштабах, могут в принципе возникать значительные потоки гравитационной энергии. Источниками такого излучения прежде всего могли бы быть двойные звезды, в особенности если обе звезды карликовые [4, 5]. Такие звезды вращаются относительно друг друга с фантастическими скоростями<sup>1)</sup>. Мы не знаем, много ли таких объектов существует во Вселенной. Гравитационные волны могут возникать и при процессах столкновения нейтральной материи.

Так или иначе существует ряд возможных источников космического гравитационного излучения, которое мы хотим обнаружить. Но теперь мне хотелось бы поговорить о возможности генерирования гравитационных волн в лаборатории.

Ранее уже шла речь о том, что в качестве источника гравитационного излучения можно было бы использовать вращающийся стержень. Но возможны и другие, более подходящие варианты генератора излучения, связанного с тензором напряжений. Один из таких вариантов — акустический резонатор. В случае вращающегося стержня напряжения концентрируются в его средней точке, и это приводит к разрушению стержня. В акустическом же резонаторе напряжения распределяются по поверхностям. При таком распределении напряжений можно достичь значительно больших интегральных значений тензора напряжений, которыми фактически и

---

<sup>1)</sup> Двойная звезда, состоящая из двух белых карликов, с периодом около 100 сек и массой, приблизительно равной массе Солнца, должна излучать около  $2 \cdot 10^{37}$  эрг/сек. Это в 5000 раз больше оптической светимости Солнца. Большая часть излучения была бы почти монохроматической с частотой, равной удвоенной частоте вращения. Двойная нейтронная звезда способна излучать еще большее количество гравитационной энергии. При расстоянии между звездами порядка  $10^6$  см период обращения равен 5 мсек и излучение составляет  $2 \cdot 10^{52}$  эрг/сек. Вследствие такой потери энергии они должны были бы сблизиться примерно за 2 сек. Недавно была открыта двойная звезда (Nova Sagittae) с периодом 1 час 21 мин.

определяется мощность излучения. По этой причине акустический резонатор лучше стержневого излучателя.

Каковы должны быть размеры такого резонатора? Можно было бы думать, что размеры массивного тела, подвергающегося воздействию акустических напряжений, должны быть порядка длины гравитационной волны. Это составляет около 100 000 акустических длин волн. Но на самом деле прибор представляет собой систему квадруполей, каждый из которых колеблется со сдвигом по фазе относительно соседних квадруполей. В результате вся система в целом излучает как единственный квадруполь.

Хотя при такой схеме эффекты первого порядка, по-видимому, в самом деле взаимно компенсируются, можно показать, что эффекты более высокого порядка остаются. Кроме того, в пьезоэлектрическом кристалле на торцах кристалла возникают заряды, и некоторые компоненты электромагнитного тензора напряжений в кристалле не меняют знака через каждую половину длины акустической волны. Выводя пьезокристалл из состояния резонанса, можно создать область порядка длины гравитационной волны с напряжением, соответствующим пределу прочности материала. Такое устройство излучателя позволяет при фиксированной частоте получить интенсивность излучения, приблизительно на 40 порядков превышающую интенсивность излучения вращающегося стержня.

Таким образом, нами разработана теория и конструкция установки для измерения тензора Римана. Используя возвращающие силы негравитационного происхождения, а также резонансные эффекты, мы приблизительно на 10 порядков повысили чувствительность установки для измерения динамического тензора кривизны. Экспериментальная установка в ее настоящем виде вполне пригодна для поиска гравитационных волн. Мощность же нашего излучателя, хотя и превышает на 40 порядков мощность источника с вращающимся стержнем, все еще приблизительно на 15 порядков меньше, чем нужно для того, чтобы можно было в условиях небольшой лаборатории проводить измерения в области волновой зоны.



## ЛИТЕРАТУРА

1. Weber J., *General Relativity and Gravitational Waves*, New York, 1961, ch. 7, 8.
2. Schelkunoff S. A., *Proc. IRE*, **29**, 493 (1941).
3. Forward R. L., Zipoy D., Weber J., Smith S., Benioff H., *Nature*, **189**, 473 (1961).
4. Forward R. L., *Gravity Research Foundation Prize Essay*, 1962.
5. Dyson F. J., *Gravity Research Foundation Prize Essay*, 1962.

# 6

## *Принцип Маха и эксперименты по анизотропии массы*

В. ХЬЮЗ

### **Принцип Маха и возможная анизотропия инертной массы**

Одной из давних концептуальных проблем физики является вопрос о преимущественной координатной системе, или об инерциальной системе отсчета, в пустом пространстве. С этой проблемой соприкасается вопрос о том, имеет ли смысл говорить об инертной массе изолированного тела. Мах высказывал точку зрения, именуемую теперь принципом Маха<sup>1)</sup>, согласно которой инерциальная система отсчета определяется распределением масс во Вселенной, сила инерции, действующая на тело, есть результат гравитационного воздействия на это тело удаленной материи и инертная масса тела определяется всей материей во Вселенной. С этой точки зрения естественно поставить вопрос, не приведет ли анизотропное распределение материи во Вселенной к тому, что инертная масса сама окажется зависящей от направления, т. е. анизотропной.

В настоящей главе рассматриваются возможные эффекты, связанные с анизотропией инертной массы, если таковая существует, а также описываются эксперименты, уже осуществленные в поисках таких эффектов. Анализ возможных эффектов, доступных наблюдению, дается главным образом на основе работ Коккони и Салпитера [1, 2].

На фиг. 6.1 изображено тело массы  $m$  и некий элемент массы  $\Delta M$  во Вселенной, находящийся на расстоя-

---

<sup>1)</sup> См. гл. 7 настоящего сборника, написанную Р. Дикке.

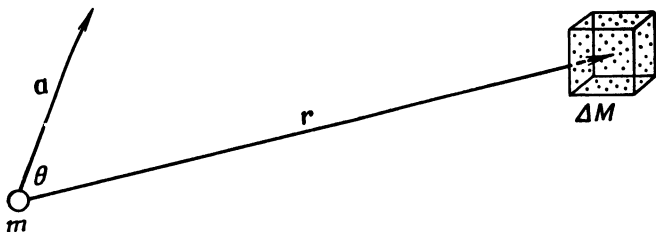
нии  $r$  от массы  $m$ . Коккони и Салпитер [1] предполагают, что добавка  $\Delta m$  к инертной массе  $m$ , обусловленная массой  $\Delta M$ , определяется формулой

$$\Delta m \sim \frac{\Delta M}{r^\nu}, \quad (1)$$

в которой

$$0 < \nu < 1.$$

Пусть ускорение тела  $m$  составляет с радиус-вектором  $r$ , направленным от тела  $m$  к телу  $\Delta M$ , угол  $\theta$ . Нас



Фиг. 6.1. Тело с инертной массой, равной  $m$ , ускоренное относительно элемента удаленного вещества с массой  $\Delta M$ .

интересует вопрос о том, какую зависимость  $\Delta m$  от угла  $\theta$  следует принять. Можно встать на ту точку зрения, что в силу принципа Маха инертная масса тела определяется всей совокупностью вещества во Вселенной так, что при этом никакой зависимости от  $\theta$  нет. Однако более интересен другой подход к этому принципу. Мы предполагаем, что должна быть какая-то зависимость от угла и пытаемся найти следствия, вытекающие из такой зависимости. Угловая зависимость должна выражаться четной функцией от  $\theta$ , принимающей одно и то же значение при  $\theta=0$  и при  $\theta=\pi$ . В самом деле, уже в простейших случаях гармонического колебания и равномерного движения по окружности при нарушении этих требований появляются нежелательные с физической точки зрения скачки кинетической или потенциальной энергии или скорости, а консервативные силы перестают быть консервативными. Если выразить эту угловую зависимость в виде разложения по полиномам Лежандра,

то простейший анизотропный член оказывается равным  $P_2(\cos \theta) = 1/2(3 \cos^2 \theta - 1)$ , так что

$$\Delta m \sim \frac{\Delta M}{r^v} P_2(\cos \theta). \quad (2)$$

В более общей форме можно сказать, что обычный закон Ньютона

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}, \quad (3)$$

в котором масса  $m$  является скалярной величиной, заменяется на

$$F_i = m_{ij}a_j, \quad (4)$$

где масса  $m_{ij}$  — величина тензорная. Вследствие четной зависимости массы от угла тензор  $m_{ij}$  должен быть симметричным. Обобщенная кинетическая энергия принимает тогда вид

$$T = \frac{P_i P_j}{2m_{ij}}, \quad (5)$$

где  $P_i$  и  $P_j$  — компоненты импульса.

В качестве примера распределения массы вокруг Земли мы рассмотрим простую модель, изображенную на фиг. 6.2. Пусть вся масса нашей Галактики будет сосредоточена в ее центре, а вся остальная масса Вселенной — распределена с постоянной плотностью во всем пространстве. Главные оси можно выбрать так, как показано на фиг. 6.3; тогда тензор массы будет диагональным. Если

$$m_{zz} = m_0 + \Delta m, \quad (6a)$$

где  $\Delta m$  — добавок, обусловленный точечной массой  $M_0$  нашей Галактики, а  $m_0$  соответствует влиянию остальной массы Вселенной, то можно записать

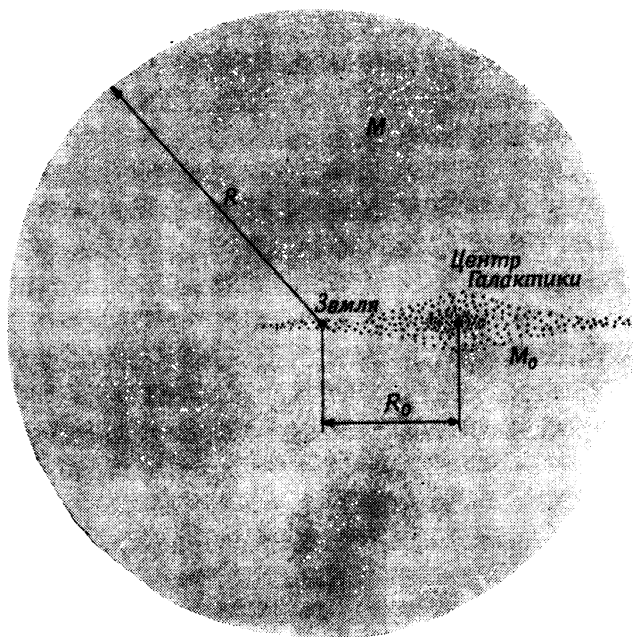
$$m_{xx} = m_{yy} = m_0 - \frac{\Delta m}{2}. \quad (6b)$$

На основании выражения (5) кинетическая энергия записывается в виде

$$T = T_0 - \frac{\Delta m}{m_0} T_0 P_2(\cos \theta), \quad (7)$$

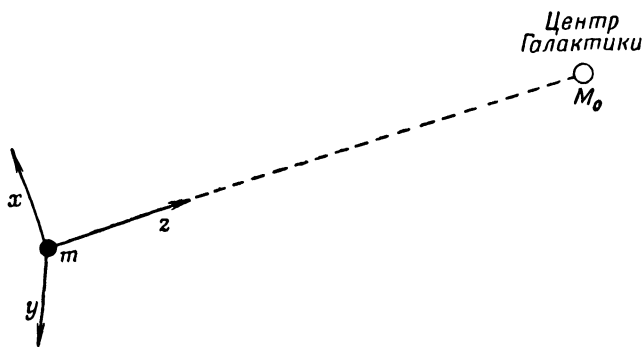
где

$$T_0 = \frac{\mathbf{P}^2}{2m_0},$$



Ф и г. 6.2. Модель распределения массы во Вселенной.

Распределение массы равномерно повсюду в сферической Вселенной радиусом  $R$ , за исключением массы нашей Галактики  $M_0$ , которая считается сосредоточенной в точке, совпадающей с центром масс Галактики.



Ф и г. 6.3. Главные оси тензора инертной массы в случае модели распределения массы, изображенной на фиг. 6.2.

а слагаемое, содержащее  $\Delta m$ , является поправкой, учитывающей анизотропию массы. Это выражение мы будем применять при квантовомеханических вычислениях, рассматривая  $T_0$  как обычный квантовомеханический оператор механической кинетической энергии, а второе слагаемое в выражении (7) — как член возмущения в гамильтониане.

Величину  $\Delta m/m_0$  можно оценить, исходя из схемы фиг. 6.2 и формулы (1). Масса  $M$  Вселенной вне нашей Галактики считается равномерно распределенной вокруг Земли вплоть до радиуса Вселенной  $R$ , а масса нашей Галактики  $M_0$  — сосредоточенной в точке на расстоянии  $R_0$  от Земли. Тогда

$$m_0 \sim \int_0^R \frac{4\pi r^2 \rho dr}{r^\nu} = \frac{4\pi \rho R^{3-\nu}}{3-\nu}, \quad (8)$$

где  $\rho$  — плотность массы Вселенной, а

$$\Delta m \sim \frac{M_0}{R_0^\nu}. \quad (9)$$

Отношение этих величин равно

$$\frac{\Delta m}{m_0} = \frac{M_0}{R_0^\nu} \frac{3-\nu}{4\pi \rho R^{3-\nu}}. \quad (10)$$

Подставим численные значения<sup>1)</sup>

$$M_0 = 3 \cdot 10^{44} \text{ г}, \quad R_0 = 2,5 \cdot 10^{22} \text{ см},$$

$$R = 3 \cdot 10^{27} \text{ см}, \quad \rho = 10^{-29} \text{ г/см}^3.$$

На основании формулы (1) можно заключить, что  $0 < \nu < 1$ . Действительно, при  $\nu < 0$  влияние данной массы на массу тела было бы тем больше, чем сильнее она удалена от него, что представляется нелогичным. С другой стороны, при  $\nu > 1$  инертная масса определялась бы в основном веществом, находящимся в самой непосредственной близости от тела, например массой

<sup>1)</sup> См. работу [3].

Солнца, а это противоречит наблюдаемому движению планет. Из выражения (10) следует, что при  $v=0$

$$\frac{\Delta m}{m_0} = 3 \cdot 10^{-10},$$

а при  $v=1$

$$\frac{\Delta m}{m_0} = 2 \cdot 10^{-5}.$$

### Экспериментальная проверка анизотропии массы

Эффекты анизотропии массы могли бы проявляться в макроскопическом масштабе в ряде систем. Одной из них является обыкновенный маятник, период которого определяется соотношением

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \sqrt{\frac{m}{m_g}}, \quad (11)$$

где  $m$  — инертная, а  $m_g$  — тяготеющая массы диска маятника,  $L$  — длина маятника, а  $g$  — ускорение силы тяжести. Период не будет зависеть от величины массы в случае равенства инертной и тяготеющей масс. Но если инертная масса подвержена анизотропии, а тяготеющая — нет, то период маятника может зависеть от его ориентации.

Другой макроскопической динамической системой, способной реагировать на анизотропию массы, является генератор, стабилизированный кварцем. В течение суток ориентация кварцевого кристалла, а вместе с ней и направление пьезоэлектрических колебаний относительно направления на центр Галактики изменяются вследствие вращения Земли. В работе [4] исследовалась степень постоянства частоты генератора, стабилизированного кварцем, по отношению к частоте переходов сверхтонкой структуры в атомном эталоне частоты «атомихрон» с цезиевым пучком. Как указывается ниже, частота этого эталона не подвержена никакому влиянию анизотропии массы. Исследования показали отсутствие эффекта анизотропии массы и дали в качестве верхнего предела анизотропного вклада в массу величину  $\Delta m/m_0 \approx 10^{-9}$ .

Салпитер и Коккони [1] высказали мнение, что с большой чувствительностью можно измерить влияние анизотропии массы на эффект Зеемана в атомах (на тонкую структуру). Атомный электрон с отличным от нуля орбитальным моментом, находясь на разных магнитных подуровнях, будет двигаться в различных направлениях относительно внешнего магнитного поля, а поэтому если его масса зависит от направления движения, то разница в энергии для различных магнитных подуровней будет зависеть от анизотропии массы. Для простоты и определенности мы рассмотрим атом, содержащий один-единственный электрон в  $p$ -состоянии. Для магнитного подуровня  $m_l = 0$  угловая часть волновой функции равна

$$Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta,$$

а электрон движется преимущественно вдоль направления  $\mathbf{H}_0$ , как показано на фиг. 6.4, справа. Для магнитных подуровней  $m_l = \pm 1$  угловая часть волновых функций имеет вид

$$Y_{1,\pm 1} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin \theta e^{\pm i\varphi},$$

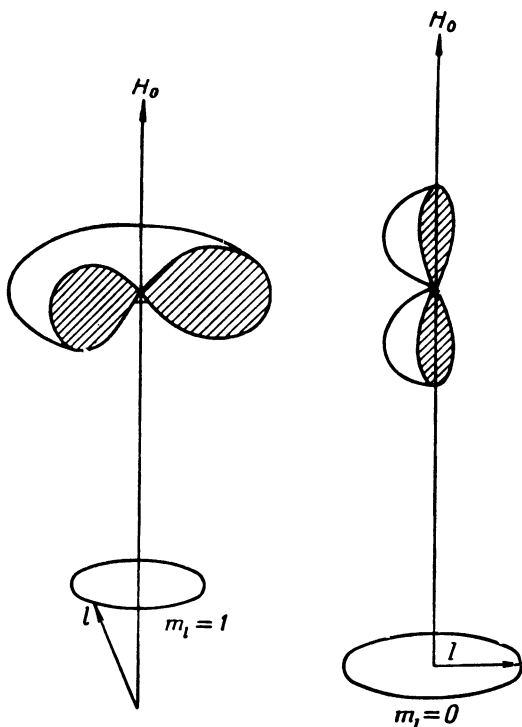
так что электрон движется в плоскости, перпендикулярной  $\mathbf{H}_0$  (фиг. 6.4, слева). Матричный элемент члена возмущения в гамильтониане (7) дает за счет анизотропии массы вклад в энергию конкретного магнитного подуровня, равный

$$\Delta E = - \frac{\Delta m}{m_0} \bar{T} \bar{P}_2(\cos \theta), \quad (12)$$

где  $\bar{T}$  — средняя кинетическая энергия электрона, а  $\bar{P}_2$  — матричный элемент  $P_2(\cos \theta)$  для данного магнитного подуровня. Член возмущения энергии (12) напоминает член электрического квадрупольного взаимодействия.

Возмущение зеемановских уровней в состоянии  $P_{1/2}$  показано на фиг. 6.5. В обычной теории здесь была бы единственная зеемановская линия, но при наличии члена, обусловленного анизотропией массы, в зеемановском спектре появляются три различные линии. Если эффект





Фиг. 6.4. Картина пространственного распределения вероятности для  $p$ -электрона ( $l=1$ ) на различных магнитных подуровнях  $m_l$ , когда ось  $z$  выбрана в направлении внешнего магнитного поля  $H_0$ .

анизотропии массы слишком слаб для того, чтобы эти линии разделялись, то все эти три линии вместе должны выглядеть как одна широкая линия, уширение которой равно

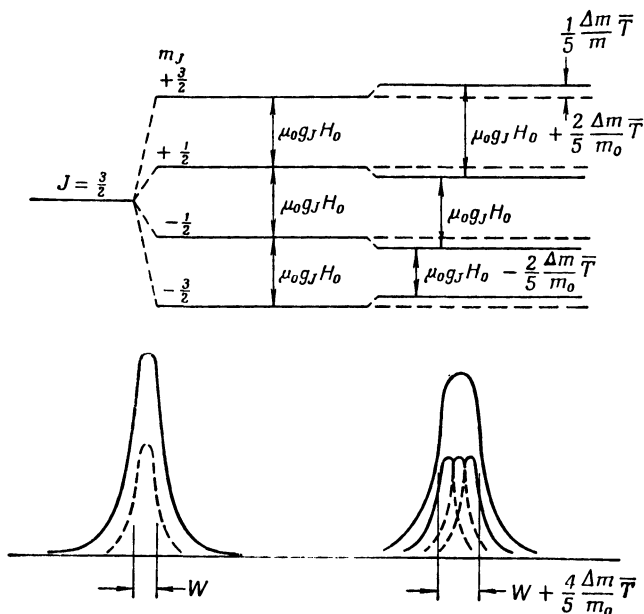
$$\Delta W = \frac{4}{5} \frac{\Delta m}{m_0} \bar{T}. \quad (13)$$

Эти результаты получены в предположении о том, что магнитное поле направлено к центру Галактики. Если магнитное поле ориентировано под некоторым углом  $\beta$  к галактическому центру, то в формуле (12) величину

$\overline{P_2(\cos \theta)}$  следует заменить на  $\overline{P_2[\cos(\theta - \beta)]}$ , и тогда теорема сложения сферических гармоник даст

$$\overline{P_2[\cos(\theta - \beta)]} = \overline{P_2(\cos \theta)} P_2(\cos \beta). \quad (14)$$

Для того чтобы выяснить существование анизотропии массы, методом парамагнитного резонанса исследовался эффект Зеемана для атомов двух видов — кислорода в основном состоянии  $^3P$  и хлора в основном состоянии  $^2P_{1/2}$ . С точки зрения теории случай хлора проще,



Ф и г. 6.5. Зеемановские уровни энергии и резонансные линии в случае электрона в состоянии  $P_{3/2}$  при масс-анизотропном возмущении.

Ширина нормальной зеемановской линии обозначена через  $W$ , тогда как ширина не поддающихся разрешению линий, связанных с анизотропией массы, равна  $W + \frac{4}{5} (\Delta m/m_0) \bar{T}$ . Эта же иллюстрация характеризует и ядерные энергетические уровни и резонансные линии для ядра со спином  $J = \frac{1}{2}$ .

так как его электроны образуют почти замкнутую оболочку, которую можно описать с помощью одной «дырки», тогда как в атоме кислорода содержатся четыре

2р-электрона. Для хлора соответствующая часть гамильтониана имеет вид

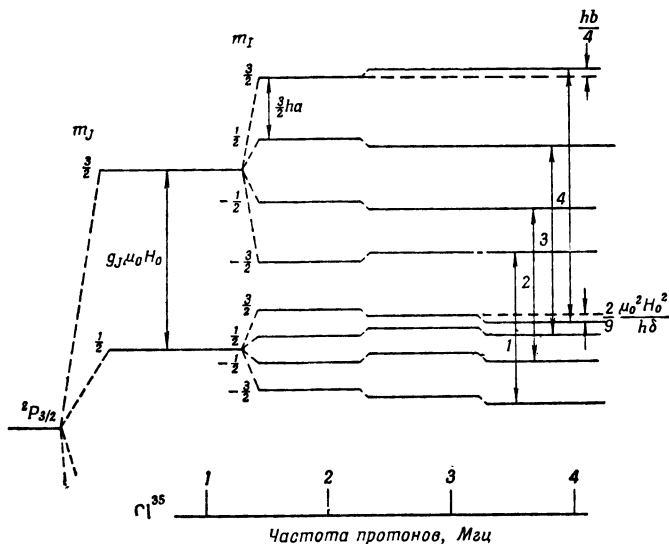
$$\mathcal{H} = \mu_0 g_l \mathbf{L} \cdot \mathbf{H}_0 + \mu_0 g_s \mathbf{S} \cdot \mathbf{H}_0 + a \mathbf{I} \cdot \mathbf{J} + b \mathcal{H}_a. \quad (15)$$

Первые два члена описывают взаимодействие орбитального магнитного момента и спинового магнитного момента электрона с внешним магнитным полем  $\mathbf{H}_0$ , причем через  $\mu_0$  обозначен магнетон Бора, а через  $g_l$  и  $g_s$  — значения множителя Ланде  $g$ , соответствующие орбитальному и спиновому моментам. Третий член описывает сверхтонкое магнитное взаимодействие магнитного момента электрона с магнитным моментом ядра ( $I$  — ядерный спин), а четвертый член — электрическое квадрупольное взаимодействие. Присутствие двух последних членов усложняет простую схему зеемановских энергетических уровней и связано с тем обстоятельством, что спин ядра  $\text{Cl}^{35}$  равен  $3/2$ . Следующие отсюда энергетические уровни изображены на фиг. 6.6; они и подверглись тщательному изучению при экспериментах по методу парамагнитного резонанса [5, 6].

На фиг. 6.7 изображена схема обычной установки для исследований парамагнитного резонанса. Молекулы хлора диссоциируют на атомы под действием электрического разряда. Полученные атомы прокачиваются по 5000 э, измеряемое протонным магнитометром. СВЧ полем с частотой приблизительно 9000 Мгц. Резонатор помещен в магнитное поле напряженностью от 4000 до 5000 э, измеряемое протонным магнитометром. СВЧ поле в резонаторе измеряется с помощью детектора. Были использованы в высшей степени стабильные генераторы СВЧ и магнитного поля и весьма чувствительные детекторы. Резонансное поглощение энергии атомами, находящимися в СВЧ резонаторе, происходит на боровских частотах, соответствующих зеемановским переходам. Типичная кривая резонансного поглощения изображена на фиг. 6.8.

В опыте с хлором исследовалась зависимость частоты, соответствующей зеемановским переходам  $m_j = +3/2 \rightarrow m_j = +1/2$  при  $m_I = +3/2$  (здесь  $m_j$  — магнитное квантовое число электрона, а  $m_I$  — магнитное квантовое число ядра), от относительной ориентации магнитного

поля и направления на центр Галактики. При неподвижном относительно Земли электромагните, когда магнитное поле было ориентировано приблизительно с севера

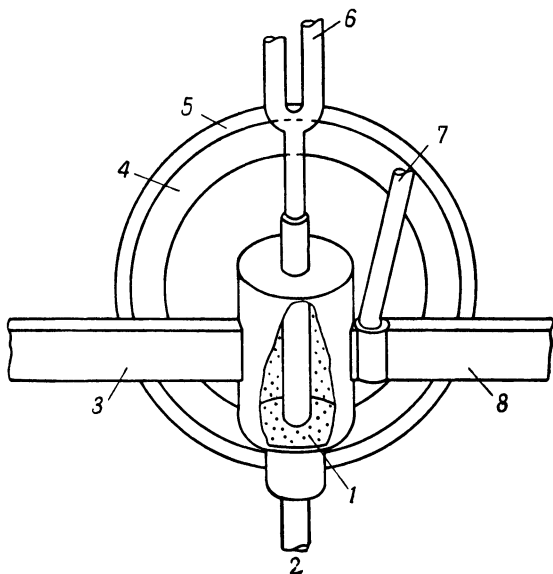


Фиг. 6.6. Энергетические уровни основного состояния  ${}^2P_{3/2}$  атома  $\text{Cl}^{35}$  во внешнем магнитном поле с напряженностью  $H_0$ .

Сдвиг энергий, пропорциональный  $H_0^2$ , вызывается возмущением, связанным с близостью уровня  ${}^2P_{1/2}$ . Энергетические уровни, соответствующие  $m_J = -1/2, -3/2$ , не изображены. В сильном поле наблюдается переход  $(m_J, m_I) = (3/2, 3/2) \leftrightarrow (1/2, 3/2)$ . Через  $\delta$  обозначено расстояние между уровнями  ${}^2P_{3/2}$  и  ${}^2P_{1/2}$ , соответствующее тонкой структуре.

на юг, эта относительная ориентация вследствие вращения Земли зависела от времени. В Нью-Хэвене, на широте  $41^\circ$ , в определенный момент звездных суток направление в горизонтальной плоскости на юг ориентировано на  $22^\circ$  от центра Галактики, а через 12 час то же самое направление вдоль горизонтальной плоскости принимает ориентацию на  $104^\circ$  от центра Галактики. Конечно, важно, чтобы сам эталон частоты, с которым сравнивается частота зеемановского перехода, не был подвержен влиянию анизотропии массы. В большей части из-

мерений частоты зеемановского перехода, например, в упоминавшихся опытах Коккони и Салпитера, применялись вторичные эталоны — генераторы, стабилизированные кварцем, калибровавшиеся время от времени по

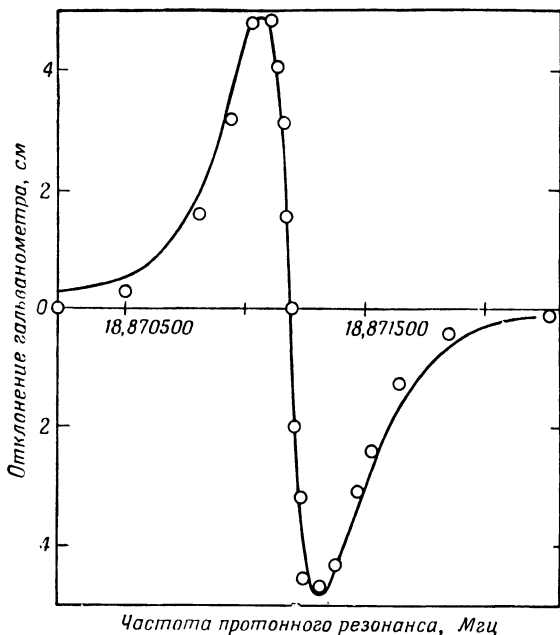


Фиг. 6.7. Схематическое изображение установки для экспериментов по поглощению при парамагнитном резонансе.

1 — резонатор волны типа  $TE_{011}$ ; 2 — патрубок для откачки; 3 — волновод, ведущий к генератору; 4 — кольцевая прокладка для коррекции магнитного поля; 5 — полюсный наконечник электромагнита (диаметром 20 см); 6 — разрядная трубка; 7 — трубка протонного регулятора; 8 — волновод, ведущий к болометру.

сигналам WWV. Ввиду возможного влияния анизотропии массы на частоту кварцевых генераторов последние не соответствовали нашим целям. В нашем опыте использовался эталон частоты с пучком атомов цезия (типа «атомихрон» фирмы «Нейшенел»). Используемый в этом эталоне [7] переход  $(F, M_F) = (4, 0) \leftrightarrow (3, 0)$  не должен быть подвержен никакому влиянию со стороны анизотропии массы. Магнитное поле поддерживалось постоянным с помощью протонно-резонансного зонда, резонансная частота которого сравнивалась с частотой

эталоны «атомихрон». В постоянном магнитном поле протонная резонансная частота не должна отражать эффектов анизотропии массы. Переход  $m_J = +3/2 \leftrightarrow m_J = +1/2$  при  $m_I = +3/2$  для  ${}^2P_{3/2}$ -состояния  $\text{Cl}^{35}$  наблюдался в течение более 12 час. С точностью до ошибки



Фиг. 6.8. Типичная линия поглощения при парамагнитном резонансе в хлоре, соответствующая переходу  $(m_J, m_I) = (3/2, 3/2) \leftrightarrow (1/2, 3/2)$ .

эксперимента, равной 30 кгц, не было обнаружено никаких изменений во времени частоты зеемановского перехода, происходящего примерно при 9190 Мгц в магнитном поле напряженностью 4730 э. Если рассматривать электронную систему хлора как «дырку», движущуюся в кулоновском потенциале, создаваемом нуклонами и электронами, то для величины  $\Delta m/m_0$  мы получим верхний предел, равный  $10^{-10}$ .

При другом методе исследований наблюдаются частоты двух зеемановских переходов, разности энергий которых при любой анизотропии массы должны изменяться по-разному. Нужно только провести наблюдение этих двух переходов в такой момент, когда направление на галактический центр дает максимальный эффект анизотропии массы. Простые экспериментальные данные такого типа получены для зеемановских переходов  $\Delta M_J = \pm 1, \pm 2$  в состоянии  $^3P_2$  атомарного кислорода [8]. Из этих данных следует, что  $\Delta m/m_0 < 10^{-10}$ .

Столь высокая чувствительность в опытах с использованием электронного парамагнитного резонанса достигается потому, что мы наблюдаем зеемановские переходы с очень высоким разрешением по энергии, а разность зеемановских энергий составляет лишь малую долю полной энергии связи электронов. Любая же анизотропия массы приводит к изменению кинетической энергии электрона, во много раз превышающему зеемановскую энергию. Таким образом, разрешение, необходимое для определения зеемановского расщепления, соответствует чрезвычайно малой доле полной кинетической энергии электронов, а поэтому становится возможным обнаружить весьма малую относительную масс-анизотропию.

В своей второй статье [2] Коккони и Салпитер показали, что еще более высокая чувствительность при наблюдении анизотропии массы может быть достигнута, если рассматривать не электронные, а ядерные энергетические уровни, так как кинетическая энергия нуклона в ядре намного превышает кинетическую энергию электрона в атоме. Кинетическая энергия нуклона в ядре обычно составляет величину порядка  $10 \text{ Мэв}$ , тогда как кинетическая энергия электрона в атоме в  $10^6$  раз меньше. Упомянутые авторы предложили, в частности, использовать эффект Мессбауэра, обеспечивающий весьма высокое относительное разрешение по энергии, для поисков эффектов масс-анизотропии в энергетических уровнях железа  $\text{Fe}^{57}$ . В атомах железа возможен переход с возбужденного ядерного уровня при  $I = 3/2$  на основной уровень при  $I = 1/2$  с энергией  $14 \text{ кэв}$ . Преимуществом эффекта Мессбауэра является то обстоятельство, что

может быть получена весьма узкая линия  $\gamma$ -излучения, если ядро железа находится в связанном состоянии в кристаллической решетке, так что импульс отдачи при излучении  $\gamma$ -кванта из ядра распределяется сразу по всей кристаллической решетке. Вопрос состоит в том, имеются ли какие-либо эффекты масс-анизотропии, связанные с энергетическими уровнями или шириной линий. Иллинойсская группа [9] провела исследование ширины мессбауэровской линии как функции времени при изменении угла между магнитным полем и направлением на центр Галактики. Было установлено, что ширина линии постоянна в пределах точности эксперимента. Точность эксперимента определяется естественной шириной линии мессбауэровского резонанса ( $\sim 10^{-8}$  эв), определяемой временем жизни возбужденного ядерного состояния ( $\sim 10^{-7}$  сек). Эта ширина намного превышает ширину линии зеemanовского резонанса в атоме, равную по порядку  $10^4$  гц, но зато и член кинетической энергии  $T$  здесь также намного больше, что приводит в результате к более высокой точности по сравнению с эффектом Зеemана для атома. Иллинойсская группа пришла к заключению, что

$$\frac{\Delta m}{m_0} < 5 \cdot 10^{-16}.$$

Значительно большей чувствительности при проверке предположения об анизотропии массы можно добиться на основе обычного ядерного магнитного резонанса. Для обнаружения масс-анизотропии фактически требуется лишь одно: минимальная неопределенность наблюдаемой частоты. Эффект Мессбауэра этого не дает из-за малого времени жизни ядер в возбужденном состоянии. В случае же обычного ядерного магнитного резонанса вполне можно получить линии шириной порядка 1 гц и при этом еще воспользоваться преимуществом большой энергии связи и кинетической энергии нуклонов.

Ввиду этого мы провели обычный эксперимент по ядерному магнитному резонансу [10] гига впервые проведенного Блохом и Пэрселлом в конце 40-х гг. [11]. По данным других экспериментов по ядерному магнитному резонансу можно приблизительно оценить верхний предел возможной масс-анизотропии. Но ни в одном из



них не проводилось систематического наблюдения резонанса на всем протяжении звездных суток и не принималось никаких мер для правильного выбора эталонов частоты.

Наш эксперимент проводился на ядрах  $\text{Li}^7$  в основном состоянии, обладающих ядерным спином  $3/2$ . В таких ядрах, кроме замкнутых оболочек, имеется один дополнительный протон. Согласно оболочечной модели, этот лишний протон находится в состоянии  $P_{3/2}$ , а поскольку оболочечная модель вполне успешно предсказывает величину ядерного магнитного момента, мы можем полагаться на нее в применении к ядру  $\text{Li}^7$ . Напротив, ядра  $\text{Fe}^{57}$ , используемые в опыте Мессбауэра, труднее интерпретировать с точки зрения оболочечной модели.

В магнитном поле у ядра  $\text{Li}^7$  имеются четыре энергетических уровня в соответствии с допустимым значением магнитного квантового числа  $M_I$ . При полном отсутствии масс-анизотропии смежные уровни одинаково отстоят друг от друга, так что должна наблюдаться лишь одна резонансная линия. При наличии же масс-анизотропии появятся три различные разности энергии, которые приведут к триплету линий ядерного резонанса, если его структура поддается разрешению, либо к одной более широкой линии, структура которой не поддается разрешению (фиг. 6.5). Наблюдение резонансной линии  $\text{Li}^7$  производилось в течение 12 час в 1-нормальном водном растворе  $\text{FeCl}_3$ , насыщенном  $\text{LiCl}$ . Магнитное поле напряженностью около 4700 э было стабилизировано на частоте протонного резонанса с помощью эталона частоты «атомихрон». Для получения узкой линии у электромагнита были предусмотрены катушки, выравнивающие поле, а ядерный образец вращался. Наблюдалась лишь одна линия шириной 1,2 гц, обусловленной отчасти неоднородностью магнитного поля, а отчасти временем тепловой релаксации, связанным с магнитным дипольным взаимодействием ядер  $\text{Li}$  между собой. На протяжении звездного дня ширина линии изменялась менее чем на 0,2 гц. Теоретическое уширение линии за счет масс-анизотропии равно

$$\Delta W = \frac{4}{5} \frac{\Delta m}{m_0} \bar{T} P_2(\cos \beta) \quad (16)$$

[см. выражения (13) и (14)]. Принимая значение  $\bar{T}$  средней кинетической энергии нуклона в ядре  $\text{Li}^7$  равным  $10 \text{ Мэв}$ , получим оценку  $\Delta m/m_0 < 10^{-22}$  [12].

Аналогичный эксперимент был проделан Дривером [13], который получил

$$\frac{\Delta m}{m_0} < 5 \cdot 10^{-23}.$$

## Истолкование экспериментов

Верхний предел относительной анизотропии массы  $\Delta m/m_0 < 10^{-22}$  намного меньше величины  $3 \cdot 10^{-10}$ , предсказываемой на основании модели Салпитера и Коккони, если положить  $v=0$ . Поэтому в рамках их теории можно сказать, что анизотропии массы, связанной с направлением в нашей собственной Галактике, по-видимому, не существует.

Из эстетического стремления к законченности мы предполагаем в дальнейшем усовершенствовать наши эксперименты. Так, можно повысить разрешение, а используя вращающийся магнит, можно будет устанавливать любую ориентацию магнитного поля в пространстве. Кроме того, следует произвести эксперимент при величине ядерного спина, превышающего  $3/2$ , так чтобы можно было обнаружить и другую [кроме  $P_2(\cos \theta)$ ] зависимость от угла.

Если исходить из предположений Коккони и Салпитера, то опыты с атомными электронами и с ядрами могут давать различные результаты. В случае электронов силы связи являются электромагнитными, тогда как в случае ядра это ядерные силы. Одни из них могут обладать анизотропными свойствами, которые могут компенсировать масс-анизотропию и которых нет у других сил. Поэтому следует провести проверку с использованием различных типов известных сил.

В заключение отметим, что хотя Коккони и Салпитер при выводе возможной анизотропии инертной массы исходили из принципа Маха, Дикке [14] указал, что в действительности из принципа Маха может вытекать и отсутствие наблюдаемой анизотропии, так что отрица-

тельный результат описанных нами экспериментов может даже подтверждать принцип Маха. Заключение Дикке по существу состоит в том, что, согласно принципу Маха, все частицы и поля должны проявлять одну и ту же анизотропию, так что в рассмотренных экспериментах может быть получен лишь отрицательный результат.

В другой теоретической работе Эпштейн [15] подчеркнул, что Коккони и Салпитер учитывают наличие анизотропии лишь в члене кинетической энергии. Эпштейн указал, что возможно обобщение, при котором учитывается и анизотропия в члене потенциальной энергии, и тогда при некоторых условиях эти эффекты анизотропии будут полностью взаимно уничтожаться. Он утверждает, что в члене потенциальной энергии должна быть анизотропия, поскольку электромагнитный потенциал предполагает обмен фотонами, а полю фотонов также нужно приписать анизотропные свойства. Теоретическая интерпретация, данная Дикке и Эпштейном, согласуется с той точкой зрения, что отрицательный результат экспериментов подтверждает универсальный (в соответствии с принципом Маха) характер масс-анизотропии, одинаковой для всех частиц и полей.

Более привычное истолкование было дано Вебером [16]: по его словам, отрицательный результат поисков масс-анизотропии «дает мощное подтверждение современной формулировки общей теории относительности и не дает никакого подтверждения принципа Маха в его сильном варианте».

## ЛИТЕРАТУРА

1. Cocconi G., Salpeter E. E., *Nuovo Cimento*, **10**, 646 (1958).
2. Cocconi G., Salpeter E. E., *Phys. Rev. Lett.*, **4**, 176 (1960).
3. Allen C. W., *Astrophysical Quantities*, London, 1955 (имеется перевод: К. У. Аллен, *Астрофизические величины*, М., 1960).
4. Essen L., Parry J. V. L., Steele J. McA., *Proc. Inst. Elec Engrs.*, **107B**, 229 (1960).
5. Beltran-Lopez V., Robinson H. G., *Phys. Rev.*, **123**, 161 (1961).

6. Harvey J. M. S., Kamper R. A., Lea K. R., Proc. Phys. Soc., **76**, 979 (1960).
7. Kusch P., Hughes V. W., Handbuch der Physik, Bd. 37 Berlin, 1959, Teil 1.
8. Radford H. E., Hughes V. W., Phys. Rev., **114**, 1274 (1959).
9. Sherwin C. W., Frauenfelder H., Garwin E. L., Lüscher E., Margulies S., Peacock R. N., Phys. Rev. Lett., **4**, 399 (1960).
10. Hughes V. W., Robinson H. G., Beltran-Lopez V., Phys. Rev. Lett., **4**, 342 (1960).
11. Abragam A., The Principles of Nuclear Magnetism, New York, 1961.
12. Beltran-Lopez V., Robinson H. G., Hughes V. W., Bull. Am. Phys. Soc., **6**, 424 (1961).
13. Drever R. W. P., Phil. Mag., **6**, 683 (1961).
14. Dicke R. H., Phys. Rev. Lett., **7**, 359 (1961).
15. Epstein S. T., Nuovo Cimento, **16**, 587 (1960).
16. Weber J., General Relativity and Gravitational Waves, New York, 1961, p. 162 (имеется перевод: Дж. Вебер, Общая теория относительности и гравитационные волны, М., 1962, стр. 197).

# 7

## Многоликий Мах

Р. ДИККЕ

### Два исторических подхода: абсолютное пространство и релятивистское пространство

Довольно любопытно, что до сих пор, насколько мне известно, были выдвинуты лишь два представления о физическом пространстве. Даже если мы обратимся к древним грекам, то и у них не обнаружим каких-нибудь других представлений, кроме этих двух. Одно из них — представление об абсолютном пространстве, иначе говоря, считается, что физическое пространство обладает самостоятельной структурой. С древних времен и до XX века это обычно понимали так, что пространство заполнено некоторого рода средой. Такая мысль выражена в философии Декарта. Среда, которую он называл «пленумом», несет вокруг Солнца планеты, как корабли, плавающие в гигантском водовороте эфирного моря. Этим объясняется движение планет, причем совершенно точно, если сделать правильное предположение о свойствах этого водоворота, а именно что он движется так, как движутся, согласно наблюдениям, планеты.

Хорошо известны представления Ньютона об абсолютном пространстве. Его закон тяготения, видимо, предполагает «действие на расстоянии» в вакууме. После своего визита в Англию Вольтер в 1730 г. писал: «Приехав в Лондон, француз обнаружит, что философия там, как и все вообще, совсем иная. Он уехал из мира, который был для него *пленумом*, а здесь попадает в *вакуум*». Но при построении своей теории тяготения Ньютон, по-видимому, имел в виду пространство,

заполненное некоторым эфиром (или пленумом). Однажды [1] он сказал:

«Возможность воздействия одного тела на другое на расстоянии через пустоту без посредства чего-нибудь еще... для меня это настолько бессмысленно, что, по-моему, к такому заключению никогда не может прийти человек, обладающий достаточной способностью разбираться в философских вопросах».

Любопытно, что другое представление о пространстве также не ново и восходит по крайней мере к началу XVIII столетия. Впервые оно было выражено, по-видимому, в высказываниях знаменитого британского философа епископа Беркли. Это идея релятивистского пространства. Согласно ей, в физическом пространстве имеют смысл лишь те понятия, в которых положение одного объекта (matter) соотносится с положением другого объекта (matter). В пустом пространстве нет, так сказать, верстовых столбов, и пространство может обладать только такими свойствами, которые обусловлены наличием в нем материи.

Я приведу цитату из Беркли, взятую из книги Сиамы «Единство Вселенной» [2]. (Подобные же утверждения можно встретить в «Принципах человеческого познания» Беркли [3].)

«Если любое положение относительно, то относительно и любое движение, которое, будучи именно движением, можно представить, лишь определив его направление, а последнее в свою очередь имеет смысл лишь относительно нашего или какого-нибудь другого тела. Все направления (вверх, вниз, направо, налево и пр.) и все положения основываются на соотношениях, и, кроме данного движущегося тела, необходимо предполагать наличие еще какого-то другого».

Это весьма ясное выражение принципа относительности. Дальше Беркли развивает его следующим образом:

«Пусть у нас имеются две сферы и, кроме них, не существует ничего материального. Тогда никак нельзя представить себе вращения этих двух сфер вокруг их общего центра. Но допустим, что внезапно создано небо с неподвижными звездами в нем, тогда мы сразу же сможем представить себе движение сфер, определяя мысленно их положение относительно различных участков неба».

Мы видим здесь предвосхищение идеи относительности, позднее независимо сформулированной Махом и получившей известность как принцип Маха.

Вот что говорит Мах [4]:

«По-моему, существует лишь относительное движение... Когда тело вращается относительно неподвижных звезд, возникают центробежные силы; если же оно вращается относительно какого-то другого тела, но не вращается относительно неподвижных звезд, то никаких центробежных сил не появляется. Я не имею ничего против того, чтобы называть первое вращением, если под этим не понимать ничего более, чем относительное вращение, т. е. вращение относительно неподвижных звезд».

Это идея о том, что вращение тела относительно системы неподвижных звезд эквивалентно вращению звезд вокруг тела. В обоих случаях относительное движение одинаково.

Перейдем теперь к некоторым замечаниям Эйнштейна о роли принципа Маха в физике [5]:

«Но, во-вторых, в свете теории относительности оказывается, что Мах, по-видимому, находился на верном пути, полагая, что инерция обусловлена взаимным влиянием материи. Как мы покажем далее, согласно нашим уравнениям, инертные массы воздействуют друг на друга соответственно представлениям об относительности инерции, хотя и весьма слабо. Чего следовало бы ожидать, если исходить из позиций Маха?»

Эйнштейн перечисляет три эффекта, существования которых следует ожидать в том случае, если принцип Маха справедлив.

1. «На тело должна действовать ускоряющая сила, когда соседние с ним массы подвергаются ускорению, причем ее направление должно совпадать с направлением этого ускорения».

Представим себе тело, помещенное внутри массивной полой сферы. Если эту сферу внезапно подвергнуть ускорению, то такое ускорение близлежащей материи в очень малом масштабе будет подобно ускорению всей Вселенной относительно взятого нами тела. Поэтому на тело должна действовать сила инерции, ускоряющая его в том же направлении, в каком мы ускорили нашу сферу. Такая сила инерции должна появиться в указанных

условиях как прямое следствие принципа Маха. Эйнштейн показал, что этот эффект учитывается математическим аппаратом общей теории относительности.

2. «Вращающееся покое тело должно создавать внутри себя «поле сил Кориолиса», приводящее к отклонению движущихся тел в направлении вращения, а также поле радиальной центробежной силы».

Это утверждение можно пояснить следующим образом. Вращение полой сферической оболочки в некотором смысле соответствует вращению всей Вселенной вместе со всей содержащейся в ней материей. А вращение Вселенной относительно некоторой «неподвижной» системы координат с точки зрения принципа Маха физически совершенно эквивалентно вращению координатной системы относительно неподвижной Вселенной. Мы знаем, что в последнем случае (когда вращается система координат) возникают сила Кориолиса и центробежная сила. И в первом случае в том же самом смысле вращение массивной сферы относительно закрепленной системы координат должно было бы вызвать появление чего-то наподобие полей силы Кориолиса и центробежной силы в этой фиксированной системе внутри сферической оболочки. Данный эффект рассматривался в рамках общей теории относительности Тиррингом и Лензе [6].

3. «Инертность некоторого тела должна возрасти, если поблизости от него сконцентрируются тяжелые массы».

Эйнштейн, по-видимому, ошибался, полагая, что в его общей теории относительности имеет место этот эффект. Форма уравнений, на основе которых Эйнштейн [5] демонстрировал этот эффект, связана с определенной системой координат, так что эффект был попросту координатным — возникающим лишь в определенной системе координат. Такой выбор является произвольным, а в лаборатории не должно наблюдаться заметных эффектов, вызванных концентрированием вещества вокруг этой лаборатории, если распределение вещества сферически симметрично. Утверждение Эйнштейна относительно этого эффекта критически рассмотрено Брэнсом [7].

Итак, в общей теории относительности представлены 1-й и 2-й эффекты, но не представлен 3-й. Мы обнаружим



и другие подтверждения глубокого влияния идей Маха на взгляды Эйнштейна на гравитацию. Принцип Маха проходит красной нитью по всей общей теории относительности.

С другой стороны, мне хотелось бы противопоставить приведенным выше допотопным рассуждениям епископа Беркли о смысле относительности цитату из современной книги Синга «Общая теория относительности» [8]. Синг пишет в предисловии:

«Я многим обязан хорошо известным книгам Паули, Эддингтона, Толмена, Бергмана, Мёллера и Лишнеровица, однако геометрический способ рассмотрения пространства — времени восходит непосредственно к Минковскому. Он протестовал против употребления слова «относительность» в применении к теории, основанной на «абсолютном» (пространство — время), и я уверен, что если бы он дожил до создания общей теории относительности, то повторил бы свой протест даже в более сильных выражениях. Однако нам незачем беспокоиться по поводу названия, ибо слово «относительность» означает теперь прежде всего теорию Эйнштейна и лишь во вторую очередь ту туманную философию, которая, может быть, первоначально применила это слово. Именно затем, чтобы поддержать взгляды Минковского на принцип относительности, я, как видно, становлюсь на трудный путь миссионера. Когда во время дискуссий о релятивизме я пытаюсь сделать вещи более ясными с помощью пространственно-временной схемы, другие участники дискуссии смотрят на это с вежливой отрешенностью и после паузы смущения, словно они были свидетелями детской бестактности, возобновляют спор, опираясь на свои собственные понятия».

Отвергнув таким образом относительность Маха и Беркли, он не останавливается на этом и отбрасывает также другой широко известный принцип теории тяготения:

«Принцип эквивалентности выполнил важные обязанности повивальной бабки при рождении общей теории относительности, но, как заметил Эйнштейн, младенец никогда не вырос бы из пеленок, если бы не идея Минковского. Я предлагаю похоронить повивальную бабку с соответствующими почестями и посмотреть прямо в лицо фактам абсолютного пространства — времени».

В этой самой новейшей точке зрения выдающегося специалиста по теории относительности мы возвращаемся к тому взгляду, что наше пространство — время

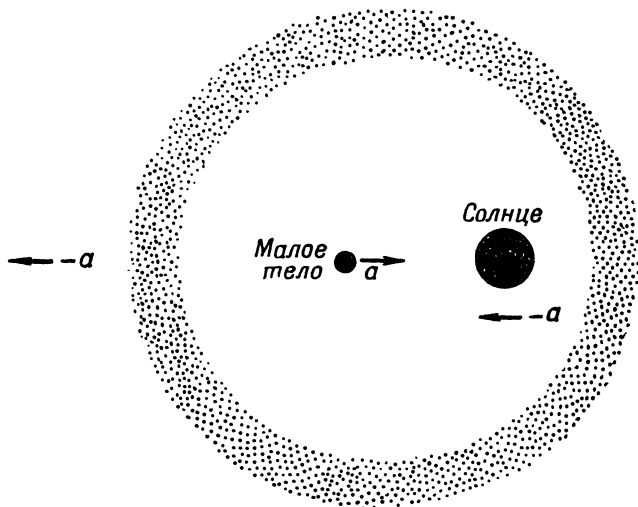
абсолютно. С точки зрения Синга, общая теория относительности описывает геометрию абсолютного пространства. По Сингу, можно абсолютным образом измерить некоторые характеристики этого пространства. Существуют характеризующие это пространство инвариантные кривизны, причем эти инварианты в принципе поддаются измерению. Бергман отметил, что определение этих инвариантов во всем пространстве приводит в некотором смысле к перенумерации точек пространства с помощью инвариантных параметров, не зависящих от выбора системы координат. Но это представления об абсолютном пространстве, и мы возвращаемся, таким образом, к старому понятию абсолютного пространства. Главное различие между нашим абсолютным пространством и ньютоновским пространством состоит в том, что первое является четырехмерным и римановым и что нам не нужно заполнять его какой-нибудь средой. Кроме того, геометрические свойства пространства зависят от находящейся в нем материи.

### **Упрощенная модель Сиамы, служащая для истолкования принципа Маха**

Приведенные выше цитаты иллюстрируют крайний разброд во взглядах специалистов, включая и титанов мысли прошлого. Потому-то я и назвал эту лекцию «Многоликий Мах». То лицо Маха, которое я обрисую в первую очередь, соответствует взгляду Сиамы [9]. Это в высшей степени упрощенная картина, представляющая гравитацию как род векторного взаимодействия. Подобного рода теории предлагались и другими; недавно с аналогичной теорией тензорного взаимодействия выступил Вайскопф.

Представим себе Солнце и падающее на него ничтожно малое пробное тело (фиг. 7.1). Мы рассмотрим эту систему во Вселенной, в которой на больших расстояниях имеются большие количества вещества. Подходя к движению чисто релятивистски, мы могли бы высказать два полностью равноценных физических утверждения: данное тело падает на Солнце или тело по-

коится, а Солнце падает на него. Если Солнце падает на тело, то можно предположить, что падает (иначе говоря, подвергается ускорению) все вещество, расположенное на больших расстояниях. Это просто релятивистское преобразование, и оба утверждения эквивалентны. Все сказанное мы можем выразить иначе.



Фиг. 7.1. Простая модель Вселенной, содержащая малое тело, гравитационно притягивающееся к Солнцу.

Все остальное вещество Вселенной представлено в виде массивной оболочки, расположенной на большом расстоянии. Можно либо малое тело рассматривать как ускоренное относительно покоящегося вещества на больших расстояниях и почти покоящегося Солнца, либо удаленное вещество и Солнце ускоренными относительно покоящегося малого тела.

С точки зрения Маха, — как ее выражает Сиам, — гравитационные силы, действующие на пробное тело в той системе координат, где оно не ускорено и принуждено стоять на месте, распадаются на две — на гравитационное притяжение со стороны Солнца и на гравитационное взаимодействие с удаленным ускоренным веществом во Вселенной. Эту вторую гравитационную силу мы называем силой инерции.

Сиамы полагает, что постоянство гравитационного ускорения, т. е. независимость этого ускорения от состава падающего тела, является вторичным эффектом. Так как в модели Сиамы силы инерции считаются истинно гравитационными, а выбранная специальная система координат такова, что в ней (гравитационная) сила инерции уравновешена непосредственным (гравитационным) притяжением со стороны Солнца, то эта результирующая сила равна нулю и останется равной нулю при замене этого пробного тела другим. Следовательно, в этой системе координат как свинцовый, так и алюминиевый грузы будут покоиться, а в какой-то другой системе координат они будут иметь одно и то же ускорение.

По Сиаме, в этой системе координат ускоренное удаленное вещество излучает такую гравитационную волну, что полная сила, действующая на наше пробное тело, равна нулю.

Если эту гравитационную силу можно понимать как обычное силовое поле, приходящее с большого расстояния в виде волны, то такая волна должна запаздывать во времени, как в случае электромагнитного поля ускоренно движущейся заряженной частицы. При таком волновом процессе интенсивность сил инерции должна падать пропорционально  $1/r$ , как и всегда в случае запаздывающих потенциалов.

Согласно модели Сиамы, сила инерции, действующая на пробное тело (фиг. 7.1) и вызванная ускорением удаленного вещества относительно этого тела, пропорциональна его массе  $m$ , массе удаленного ускоряющего вещества  $M$  и величине ускорения  $a$  и обратно пропорциональна расстоянию от ускоряющего вещества:

$$F \approx \frac{GmMa}{rc^2}. \quad (1)$$

Так как теория Сиамы линейна, здесь фигурируют только первые степени масс. Зависимость типа  $r^{-1}$  следует из того, что поле инерции интерпретируется как излучение, испускаемое при ускорении удаленного вещества. Следовало бы также включить добавочную инерцию, обусловленную ускорением Солнца, но она весьма

мала по сравнению с вкладом со стороны сильно удаленного вещества.

При такой интерпретации принципа Маха гравитационное поле должно обладать рядом свойств.

Во-первых, удаленные галактики при таком подходе играют активную роль как источники сил инерции, и их роль не сводится к роли маяков, отмечающих «истинное» абсолютное пространство. (Трудность при описании ускорения относительно пустого физического пространства состоит в том, что в этом абсолютном пространстве невозможно обнаружить никаких вех. Но можно, например, рассеять в пространстве светящиеся пылинки с пренебрежимо малой массой. Такие светящиеся точки позволят нам видеть, где находится «истинное основное абсолютное пространство».)

Следует отметить, что, говоря о физическом пространстве, попросту освещенном сигнальными огнями пренебрежимо малой массы, я имею дело с абсолютным пространством типа описанных Сингом. Напротив того, подход Беркли, Маха, Эйнштейна и Сиамы предполагает значительно более непосредственную физическую связь между силами инерции и наличием больших количеств вещества на больших расстояниях. Если это вещество удалить, то, согласно Маху, сила инерции должна исчезнуть. Если бы удалось сильно уменьшить количество этого вещества, то локальные проявления инерции резко изменились бы. Резюмируя, скажем, что, согласно взглядам Маха, эффект инерции следовало бы истолковать как проявление взаимодействий вещества, находящегося во Вселенной на больших расстояниях, и ускоренных тел в лаборатории. Наблюдая гироскоп в лаборатории и отмечая, что он все время ориентирован на какую-то конкретную далекую галактику, мы должны заключить, что это не просто случайное совпадение. Существуют поля, создаваемые удаленным веществом, которые так действуют на гироскоп в нашей лаборатории, что он сохраняет постоянную ориентацию относительно удаленного вещества.

Модель Сиамы не позволяет вполне удовлетворительно выразить принцип Маха. Выбрав для исследования

гравитационных эффектов специально систему координат (где пробное тело покоится), Сиам отказался от преимуществ общей ковариантности. Пытаясь представить силы инерции как векторные силы, он пришел к очевидной трудности, состоящей в том, что эти силы не зависят от ускорения. Поэтому влияние инерции должно описываться в схеме Сиамы в специальных системах координат, где пробные тела не ускорены. Векторная теория гравитации неудовлетворительна и в других отношениях. Например, векторное взаимодействие (скажем, электромагнитная сила) действует на сохраняющуюся величину (типа заряда), а вызванное им ускорение зависит от энергии связи системы частиц. Поэтому в векторной теории гравитационные ускорения должны зависеть от состава тел.

Хотя модель Сиамы для эффектов инерции и не приводит к корректной теории гравитации (не зависящей от выбора координат), она все же дает простую физическую картину происхождения сил инерции.

### **Недостатки общей теории относительности**

Как было видно из слов Синга, теория Эйнштейна не является релятивистской в смысле Маха. В этой теории пространство обладает физическими свойствами и образует физическую систему даже в отсутствие всякого вещества. Говорить же о движении пробного тела без массы значит перейти к абсолютной геометрии.

С другой стороны, замечательно, насколько глубоко принцип Маха пронизывает общую теорию относительности Эйнштейна. Подробнее мы будем говорить об этом ниже, а здесь просто отметим, что Эйнштейн, описывая эффекты гравитации как проявление некоторого тензорного поля, смог определить силу инерции, пропорциональную ускорению частицы, как одну из сил, определенных через это тензорное поле. Тем не менее, по-видимому, в общей теории относительности принцип Маха не выражается должным образом. Это видно из того, что в отсутствие всякой материи метрический тен-

зор описывает плоское пространство, а это плоское пространство обладает инертными свойствами. Даже знаменитое решение Шварцшильда неудовлетворительно с точки зрения принципа Маха. Уходя на бесконечность, мы видим, что масса — источник (источник сил инерции, согласно Маху) теряется вдали, а пространство становится плоским и все же сохраняет свои инертные свойства в нарушение предположений Маха.

Нужно, однако, заметить, что теория должна содержать не только систему дифференциальных уравнений, — для того, чтобы полностью определить задачу, необходимо задать условия для граничных или начальных значений. Уилер и другие исследователи установили, что трудности сопряжения общей теории относительности с принципом Маха могут быть связаны с формулировкой условий для граничных условий, а не с формой уравнений поля (гл. 15).

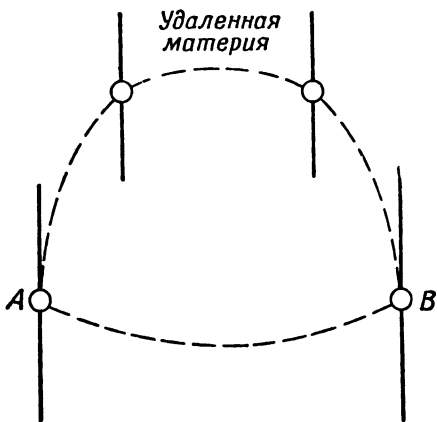
### Каталог полей далекого действия — фермионных полей

Так как принцип Маха предполагает, что удаленное вещество оказывает влияние на лабораторию, то существенно проанализировать все поля далекого радиуса действия, которые нам известны. Они могут оказаться именно теми инструментами, через которые передается маховское взаимодействие.

Взаимодействия далекого действия обусловлены полями, которые на языке квантовой теории поля соответствуют частицам с нулевой массой покоя. Эти поля можно разделить (каталогизировать) на бозонные и фермионные поля в зависимости от целого или полуцелого спина их частиц. Интересующие нас частицы не должны иметь ни массы покоя, ни заряда.

С помощью таких безмассовых частиц с полуцелым спином, как нейтрино, вряд ли можно будет объяснить гравитационные эффекты. Дело в том, что при любом статическом взаимодействии должны присутствовать по крайней мере два нейтрино. Точнее говоря, должны встречаться попарно нейтрино и антинейтрино.

Несколько лет назад Фейнман сумел следующим образом получить, исходя из взаимодействия четырех нейтрино, силу, изменяющуюся как  $1/r^2$ . Нейтрино из тела  $A$  поглощается удаленным телом; последнее обменивается нейтрино с другим удаленным телом, а нейтрино из



Фиг. 7.2. Фейнмановская диаграмма для обмена четырьмя нейтрино между взаимодействующими телами  $A$  и  $B$  и удаленным веществом.

этого тела поглощается телом  $B$ . Наконец, тело  $B$  перебрасывает четвертое нейтрино телу  $A$ , замыкая кольцо (фиг. 7.2). Отсюда прекрасно получается сила типа  $1/r^2$  между  $A$  и  $B$ .

Такая схема в какой-то мере соответствует и принципу Маха, поскольку в ней участвует вещество на больших расстояниях. Однако здесь есть и трудность. Получается, что вещество, расположенное ближе, оказывает более существенное влияние, чем удаленное вещество. Но в эффектах инерции главную роль играет, несомненно, не Земля. Мы ведь знаем, что при вращении Земли наблюдается прецессия гироскопа. Рассмотренная схема обмена четырьмя нейтрино, по-видимому, вряд ли поможет решить проблему гравитации с учетом принципа Маха.



## Векторные поля далекого радиуса действия

Наиболее интересные возможности при описании эффектов тяготения и инерции представляет класс бозонных полей далекого радиуса действия, которым соответствуют нейтральные безмассовые частицы с целым спином. В этот класс входят скалярное, векторное, тензорное взаимодействия и взаимодействия высших рангов. Поскольку природа в общем не злонамеренна, хотя и не проста, я не буду рассматривать бозонных полей, описываемых тензорами выше второго ранга.

Прежде всего я рассмотрю векторное поле. Нам известно одно безмассовое векторное поле — электромагнитное взаимодействие вещества. Но это не единственное возможное векторное поле. Могут быть и другие векторные поля, весьма существенные для космологии и теории тяготения. Например, Ли и Янг [10] несколько лет назад предположили, что сохранение барионного числа может объясняться наличием векторного поля с нулевой массой покоя квантов. Такое поле было бы связано с весьма слабым взаимодействием между нуклонами. Согласно теории Ли и Янга, два нейтрона (или два атома водорода) отталкивались бы друг от друга как одноименно «заряженные» частицы, а нейтрон притягивался бы к антинейтрону.

Можно было бы спросить: не играет ли важной роли в масштабах всей Вселенной взаимодействие между одинаково заряженными частицами через векторное поле? На этот вопрос, по-видимому, можно ответить, что если справедлива гипотеза об однородности и изотропии Вселенной и если это векторное поле является калибровочно инвариантным (т. е. подчиняется уравнениям типа уравнений Максвелла), то в среднем по достаточно большим пространственным областям такое векторное поле не даст существенных космологических эффектов [11]. Причины этого состоят в следующем.

Антисимметричный тензор, которым описывается электромагнитное поле (или векторное поле Ли — Янга), обладает шестью отличными от нуля компонентами<sup>1)</sup>. Их можно сгруппировать в две тройки компонент,

<sup>1)</sup> Точнее, независимыми и отличными от нуля. — *Прим. перев.*

каждая из которых при поворотах (не затрагивающих времени) преобразуется как набор компонент обычного трехмерного вектора — в случае электромагнетизма это напряженности электрического и магнитного полей. Если в такой-то системе координат в среднем по достаточно большому объему Вселенная представляется изотропной, то результирующее трехмерное векторное поле, усредненное по такому объему, должно равняться нулю. Присутствие «электрического» или «магнитного» поля выделило бы некоторое направление и нарушило бы изотропию. При усреднении по большим объемам как электрическое, так и магнитное поле должно обращаться в нуль. Тогда нулю будут равны все компоненты антисимметричного тензора напряженности поля, а так как это поле подчиняется уравнениям типа Максвелла, то, следовательно, должны обратиться в нуль средние по этому объему величины плотностей заряда и тока:

$$F^i_j = J^i = 0. \quad (2)$$

Такая плотность заряда — тока представляет собой четырехмерный вектор. Следовательно, если, согласно требованию изотропии, все его компоненты равны нулю в специальной системе координат, то это будет справедливо и в любой другой системе.

Такое заключение является совершенно общим. Если предположение об изотропии и однородности Вселенной отвечает действительности, то в среднем по большим объемам результирующие «заряд» и «ток» должны быть равны нулю. Если бы поле Ли — Янга действительно существовало, то в среднем по большим областям число нуклонов должно было бы быть равным числу антинуклонов. Это кажется неправдоподобным. Если бы так было на самом деле, то из-за столкновений вещества с антивеществом уровень  $\gamma$ -излучения в космических лучах был бы значительно выше. Такого мощного потока  $\gamma$ -лучей не наблюдается.

Все это не исключает предположения Литтлтона и Бонди об избытке заряда во Вселенной, так как теория указанных авторов требует пересмотра уравнений Максвелла и не является калибровочно инвариантной. В рав-

ной мере не исключается и возможность получить закон сохранения барионного числа из калибровочно инвариантной векторной теории. Например, в недавно опубликованной статье [12] Швингер указал на возможность калибровочно инвариантного векторного поля с отличной от нуля массой покоя квантов. Исходя из всего сказанного выше, мы ничего не можем заключить о таких короткодействующих силах. Мой вывод состоит в том, что при обычных предположениях об изотропии взаимодействие больших областей Вселенной друг с другом не может быть векторным, подчиняющимся (калибровочно инвариантным) уравнениям типа уравнений Максвелла в однородной изотропной Вселенной.

При наличии векторного взаимодействия, которому соответствует заряд лишь одного знака, в случае замкнутой Вселенной можно получить более общий результат. В этом случае нет нужды делать предположения об изотропии и однородности. В замкнутой Вселенной никак не может быть калибровочно инвариантного взаимодействия для вещества, заряд которого по предположению может иметь только один знак. Такая Вселенная не может иметь отличного от нуля результирующего заряда, так как для «электрического» потока вовне просто нет места. Все силовые линии должны заканчиваться на таком же числе зарядов противоположного знака. Однако наличие попарно равного числа противоположных зарядов противоречит нашему предположению о том, что все вещество является источником этого поля с одним и тем же знаком заряда. Поэтому не может существовать такого векторного поля, для которого все вещество в замкнутой Вселенной служило бы источником одного знака. На основании сказанного здесь и выше я заключаю, что векторное поле непригодно для выражения принципа Маха.

Скалярное же и тензорное поля, по-видимому, могут дать гравитационные эффекты далекого радиуса действия, рассматриваемые в космологии и подразумеваемые в принципе Маха. Я изложу далее некоторые свойства скалярного взаимодействия — свойства, известные не так уж хорошо, как можно было бы ожидать.

## Скалярное поле — некоторые малоизвестные свойства

Я введу переменную (потенциал) скалярного поля, порождаемого веществом Вселенной, изменяющуюся от точки к точке. Действующая на вещество четырехмерная сила задается градиентом этого скаляра:

$$F_i = \varphi_{,i}. \quad (3)$$

Весьма интересно, что подобного рода взаимодействие скалярного поля с релятивистски описываемой частицей возможно лишь в том случае, если масса частицы является функцией нашего скаляра. Это вытекает из следующих физических соображений. Три пространственные компоненты импульса частицы, взаимодействующей со скалярным полем, должны изменяться в собственном времени в соответствии с уравнением

$$\frac{\partial}{\partial \tau} P_\alpha = F_\alpha = \varphi_{,\alpha}. \quad (4)$$

Компоненты  $\varphi_{,\alpha}$  представляют собой производные скалярного потенциала по пространственным координатам, а  $P_\alpha$  — соответствующие компоненты импульса.

Рассмотрим теперь соответствующее четырехвекторное уравнение для того частного случая, когда скалярное поле является статическим, а система координат — стационарной, так что отличны от нуля лишь пространственные компоненты градиента. Тогда скорость изменения нашего скаляра во времени равна нулю:

$$\varphi_{,4} = 0, \quad (5)$$

а это значит, что энергия частицы постоянна [см. уравнение (4)] и равна

$$E = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (6)$$

С другой стороны, из уравнения (4) вытекает, что если производные скаляра по пространственным координатам отличны от нуля, то частица испытывает ускорение. Получается, что скорость частицы изменяется, тогда как ее кинетическая энергия остается постоянной. Следовательно, уравнения (5) и (6) могут удовлетворяться лишь

в том случае, когда меняется масса частицы. Этот вывод представляется весьма общим. Взаимодействие скалярного поля с частицей приводит к тому, что масса частицы изменяется, становясь функцией этого скалярного поля.

Заметим, например, что вариационный принцип, из которого следуют уравнения движения при скалярном взаимодействии, очевидно таков:

$$0 = \delta \int \left[ \frac{1}{2} m u^i u_i + \varphi \right] d\tau. \quad (7)$$

Здесь  $u^i$  — четырехмерная скорость, а  $m$  — масса частицы (полагаемая постоянной);  $\varphi$  — скалярный потенциал. Однако получаемое из этого вариационного принципа эйлеровское уравнение движения

$$\frac{d}{d\tau} (m u_i) = \varphi_{,i} \quad (8)$$

некорректно. Чтобы показать это, умножим его на  $u^i$  и воспользуемся соотношением

$$u^i u_i = -1. \quad (9)$$

Если к тому же предположить, что масса постоянна, мы получим равенства

$$u^i \frac{d}{d\tau} (m u_i) = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} (m u^i u_i) = -\frac{1}{2} \frac{dm}{d\tau}, \quad (10)$$

$$u^i \frac{d}{d\tau} (m u_i) = u^i \varphi_{,i} = \frac{d\varphi}{d\tau},$$

откуда

$$\frac{1}{2} \frac{dm}{d\tau} = -\frac{d\varphi}{d\tau}. \quad (11)$$

Но уравнение (11) несовместимо с предположением о постоянстве массы. Чтобы правильно сформулировать вариационный принцип, который не противоречил бы соотношению (9), нужно отбросить предположение о постоянстве массы и производить варьирование, накладывая соотношение (9) в качестве связи. Или же можно исходить из вариационного принципа

$$0 = \delta \int m \sqrt{-u^i u_i} d\tau. \quad (12)$$

И в том и в другом случае уравнение движения имеет вид

$$\frac{d}{d\tau}(mu_i) + \frac{dm}{d\varphi} \varphi_{,i} = 0, \quad (13)$$

причем масса частицы является функцией скалярного поля.

У скалярного поля имеются и другие любопытные свойства. Будучи бозонным полем, оно допускает простое суммирование всех воздействий со стороны вещества, находящегося на больших расстояниях. Представим себе следующее упрощенное уравнение — подобие волнового уравнения для скалярного поля. Источником поля должна быть некая скалярная мера плотности массы во Вселенной  $\rho$ , помноженная на константу взаимодействия  $A$ :

$$\square \varphi = \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi A \rho. \quad (14)$$

Воспользуемся моделью Вселенной в виде одной оболочки массы  $M$  и радиуса  $R$ . Используя граничное условие, согласно которому  $\varphi$  стремится к нулю при неограниченном увеличении  $R$ , получим решение уравнения (14) в виде

$$\varphi = A \frac{M}{R} \quad (15)$$

для внутренней части массивной оболочки.

Нужно признать, что эти уравнения чрезмерно упрощены. Здесь не учтены эффекты искривленности пространства, а плотность вещества  $\rho$  как следует не определена. Поскольку потенциал  $\varphi$  является скаляром, должна быть скаляром и плотность вещества, так что подходящей мерой для нее может служить след тензора энергии импульса материи<sup>1)</sup>. Интересно, что из теоремы

<sup>1)</sup> Как обычно (порок терминологии), под «тензором энергии — импульса материи» следует понимать симметричный тензор энергии — импульса — натяжений вещества и всех полей за исключением гравитационного (которое также по ряду соображений следует причислить к материи в самом общем смысле этого слова). — *Прим. перев.*

вириала следует равенство усредненного по времени интеграла по стационарно-локализованному телу от следа тензора энергии — импульса полной энергии этого тела. Поэтому, как и в случае гравитационного поля, скалярное поле в основном определяется полной массой тела при тех же самых условиях, когда существенна и гравитация. Рассматривая взаимодействие близких друг к другу материальных объектов через скалярное поле, мы видим, что скалярный потенциал должен содержать два слагаемых: одно, зависящее от массы вещества, лежащего вблизи, а другое — от массы вещества, находящегося на больших расстояниях.

Другим интересным свойством скалярного взаимодействия является то, что оно ведет к взаимному притяжению двух кусков вещества. К тому же сила (интенсивность) этого взаимодействия имеет тот же порядок, что и сила гравитационного взаимодействия. Получить с помощью скалярного поля сильное взаимодействие весьма трудно по той причине, что суммарное влияние всего вещества во Вселенной слишком велико по сравнению с действием близлежащего объекта. Слагаемое, соответствующее действию удаленного вещества, создает такой высокий фон, что действие близлежащего вещества теряется на нем и дает лишь слабый эффект. Независимо от способов конкретизации теории и от предположений о силе связи для нашего скаляра можно показать, что сила взаимодействия с ним фактически оказывается той же, что и для гравитационного взаимодействия, ну, может быть, с точностью до одного порядка величины [13].

Итак, скалярное поле дает эффект притяжения с силами, примерно соответствующими силам гравитации. Кроме того, оно удовлетворяет одному из требований принципа Маха, а именно инертная масса частицы в данной точке зависит от распределения вещества вокруг этой точки (третий эффект из перечисленных Эйнштейном). Но одно лишь скалярное поле непригодно для описания гравитации — его другие свойства оказываются неподходящими. Теория скалярного поля, вообще говоря, дает неправильное значение поворота перигелия Меркурия. Кроме того, в этой теории свет при

прохождении мимо Солнца не отклоняется. Итак, исходя из одного только скалярного поля, построить теорию гравитации невозможно.

### Тензорное поле — мост между принципом Маха и геометрией

В какой-то мере тензорное поле обладает теми свойствами, которые соответствуют принципу Маха. Вопрос лишь в том, достаточно ли таких свойств.

Во-первых, если нашей целью является теория, в которой существенна лишь взаимосвязь вещества с веществом, то ее уравнения должны записываться общеквариантным образом. Не должна использоваться явная конкретизация координатных систем, которая могла бы выражать какие-то внутренние свойства самого пространства.

Во-вторых, при рассмотрении законов физики в двух системах координат, одна из которых является локально ускоренной по отношению к другой, та сила, которая в одной системе координат была силой инерции, в другой системе может выступать в качестве силы тяготения. Иначе говоря, силы инерции и гравитационные силы взаимопревращаемы и являются проявлением одной и той же сущности. По этой причине можно отбросить следующее напрашивающееся обобщение классических законов физики.

В классической механике вариационный принцип записывается как

$$\delta \int \left[ \frac{1}{2} m v^2 - (\text{Потенциальная энергия}) \right] dt = 0. \quad (16)$$

Нам, может быть, хотелось бы распространить этот принцип на случай движения частицы в гравитационном поле, взяв два члена, из которых первый приводил бы к инерционным эффектам, а второй — к эффектам гравитационного поля:

$$\delta \int [I + G] d\tau = 0, \quad (17)$$



Как раз такой подход и будет ошибочным с точки зрения принципа Маха. Мы должны иметь возможность перебрасывать силу из категории гравитационной в категорию сил инерции и наоборот простым преобразованием координат. Если же, однако, подинтегральное выражение в принципе (17) является инвариантом (ведь предполагается, что уравнения общековариантны) и интегрируется по некоторой инвариантной мере времени вдоль мировой линии, то переход от одной системы координат к другой не будет «перемешивать» слагаемые  $I$  и  $G$  в подинтегральном выражении. Записав уравнения таким образом, мы зафиксируем различие между эффектами инерции и тяготения.

Это наводит на мысль о необходимости получать как силу инерции, так и гравитационную силу из одного и того же инварианта, если только мы хотим включить в теорию принцип Маха таким образом, чтобы эти силы переходили друг в друга при переходах между системами координат. Раз силы инерции должны соответствовать ускорениям, то ясно, что этот инвариант должен быть квадратичным по скоростям. Простейший из инвариантов такого типа включает тензорное поле и задается в виде  $g_{ij}u^i u^j$ . Здесь не очевидно, что  $g_{ij}$  имеет какое-либо отношение к метрическому тензору. Тензор  $g_{ij}$  может быть и любым не симметричным относительно своей главной диагонали тензором. Такой инвариант приводит к вариационному принципу, в котором силам инерции и гравитационным силам соответствует один и тот же член

$$\delta \int g_{ij} u^i u^j d\tau = 0. \quad (18)$$

В такой теории преобразования координат будут переводить один тип сил в другой.

Это обстоятельство указывает на тот факт, что гравитация должна быть связана с тензором и тензорными полями. В противном случае у нас получатся неприятности с взаимным переходом сил инерции и тяготения.

Если в наши уравнения движения всех частиц войдет одно-единственное тензорное поле, то проще всего назвать его потенциал метрическим тензором и определить геометрию пространства таким образом, чтобы он был

метрическим тензором и в смысле этой геометрии. С одной стороны, такое определение понятия геометрии содержит элемент произвола. Просто это именно та геометрия, в которой траектории движения бесструктурных частиц под действием гравитации по определению являются геодезическими. Иначе говоря, эти мировые линии определяются вариационным принципом

$$0 = -\delta \int g_{ij} u^i u^j d\tau, \quad (19)$$

где

$$-d\tau^2 = g_{ij} dx^i dx^j = ds^2, \quad (20)$$

причем

$$u^i = \frac{dx^i}{d\tau}.$$

Таким образом,

$$0 = \delta \int ds. \quad (21)$$

Если масса покоя нашей частицы равна нулю, то

$$ds = 0 \quad (22)$$

и

$$\int ds = 0. \quad (22a)$$

Такие траектории называются нулевыми (изотропными) геодезическими для данной геометрии.

Указанное определение геометрии оказывается возможным лишь в том случае, если движение частиц (почти точечных) в гравитационном поле определяется всегда одинаково независимо от состава этих частиц согласно принципу (19). Если одна частица вещества (например, нейтрон) движется по некоторой мировой линии, а другая (скажем, атом водорода), начавшая свое движение при тех же самых начальных условиях, отклоняется от этой линии, то обе мировые линии нельзя одновременно рассматривать как геодезические. Тогда было бы невозможно определить единую геометрию на основании движения частиц в гравитационном поле.

С точки зрения принципа Маха гравитационному полю должно соответствовать только одно простран-

ство — время. Некоторое (но не окончательное) подтверждение этому мы получили с помощью модели Сиамы. Единственность гравитационного ускорения, иными словами пространственно-временных (геодезических) траекторий, можно рассматривать как следствие из принципа Маха.

Таким образом, от анализа принципа Маха мы более или менее прямым путем пришли к мысли о том, что движение вещества в гравитационном поле совершается по единственным пространственно-временным траекториям, что это движение можно описать уравнениями, содержащими тензорное поле, что эти уравнения мы получаем из вариационного принципа вида (18) и, наконец, что это тензорное поле можно определить как поле метрического тензора нашей геометрии.

Остается еще вопрос: будут ли наши линейки в самом деле измерять расстояния, определяемые этой геометрией, ибо мы определяли расстояния пока лишь на основе представления о движении частиц в пространстве — времени? Теперь мы покажем, что линейки измеряют именно те расстояния, которые определяет наша геометрия.

Уравнение (18) является обобщением соответствующего принципа частной теории относительности, если в последнем метрический тензор Минковского заменить на обобщенный симметричный тензор  $g_{ij}$ . Если классическое уравнение движения, получаемое из этого вариационного принципа как уравнение Эйлера, должно находиться в согласии с квантовомеханической формулировкой той же самой задачи, то и волновое уравнение должно получаться из выражения для плотности лагранжиана, в котором мы снова заменим тензор Минковского на  $g_{ij}$ . Если обобщить таким образом все уравнения полей, включая максвелловское, то уже нигде не останется метрического тензора Минковского, а вместо него будет стоять  $g_{ij}$ .

Всегда можно выбрать такую систему координат, что в данной точке метрика  $g_{ij}$  примет значения тензора Минковского, а ее первые производные обратятся в нуль. Поскольку вторые и высшие производные будут достаточно малыми, а линейка достаточно короткой,

постольку уравнения движения всех частиц и полей, составляющих эту линейку, совпадут (в этой системе координат в данной конкретной точке) с соответствующими выражениями частной теории относительности. Поэтому наша линейка будет правильно измерять пространственноподобные интервалы (длину). А поскольку эта мера интервала инвариантна, она сохранится и во всех прочих системах координат. Отсюда мы заключаем, что при указанных условиях, когда линейки и часы сделаны из обычного вещества, т. е. из частиц, взаимодействие которых является сильным взаимодействием, а собственные энергии гравитационного взаимодействия достаточно малы, эти приборы вполне пригодны для измерений в рамках нашей геометрии.

Окончательный вывод таков, что для выражения законов тяготения в форме, совместимой с принципом Маха, необходимо использовать тензорное поле. Вместе с тем мы видели, что скалярное поле далекого радиуса действия могло бы давать важные космологические эффекты и играть важную роль в связи с принципом Маха.

### **Проявления принципа Маха в случае скалярного поля**

Мы рассмотрим теперь проблему, возникшую в связи с решением Шварцшильда в общей теории относительности. Любое локализованное распределение масс, окруженное пустым пространством, дает гравитационное поле, которому асимптотически соответствует плоское пространство. Других приемлемых граничных условий найти не удалось. Однако такое плоское пространство в областях, где нет поблизости вещества, обладает абсолютными инертными свойствами.

Избежать этого парадокса можно, лишь считая пространство вокруг любого локализованного распределения масс замкнутым. Такое замыкание пространства возможно, если сверх обычного тензорного поля имеется скалярное поле.

Если массы частиц изменяются обратно пропорционально некоторой положительной степени потенциала скалярного поля  $\lambda$ , а в открытом пространстве асимпто-

тически выполняются граничные условия  $\lambda \rightarrow 0$  (или  $\lambda = 0$  где-нибудь внутри замкнутого пространства), то мы получаем основание для того, чтобы пространство было замкнутым. Действительно, частица не сможет уйти в область, в которой  $\lambda \rightarrow 0$ , так как ее энергия должна была бы тогда неограниченно возрасти. Это обстоятельство показывает, что введение скалярного поля, при котором

$$m = m_0 \lambda^{-n}, \quad (23)$$

является одним из способов обеспечения замкнутости пространства.

Ввиду чрезвычайной точности, с которой были выполнены опыты Этвёша, следует предположить, что зависимость массы от  $\lambda$  одинакова для всех частиц. В противном случае было бы невозможно получить одинаковое гравитационное ускорение для всех тел вне зависимости от их состава.

Более полной реализации принципа Маха в релятивистской теории тяготения способствует и другое свойство скалярного поля. Как мы уже видели, соображения Беркли, Маха и Сиамы привели нас к мысли о том, что гравитационное ускорение тела должно зависеть от распределения масс вокруг этого тела. Ранее мы отметили [формула (1)], что выражение, полученное Сиамой для силы инерции, имеет вид

$$F \sim \frac{GMma}{Rc^2}, \quad (24)$$

где на этот раз через  $M$  обозначена полная масса Вселенной вплоть до ее наблюдаемых границ, а через  $R$  — мера радиуса этой Вселенной. Это выражение согласуется с более обычным выражением

$$F = ma \quad (25)$$

только в том случае, если

$$\frac{GM}{Rc^2} \sim 1. \quad (26)$$

Это соотношение следует также из рассмотрения эффекта Лензе — Тирринга в общей теории относительно-

сти. Внутри пустой массивной оболочки массы  $m$  и радиуса  $r$ , вращающейся вокруг некоторой оси с угловой скоростью  $\omega_1$ , гироскоп должен прецессировать относительно удаленного вещества Вселенной со скоростью

$$\omega_2 = \frac{8}{3} \frac{Gm}{rc^2} \omega_1. \quad (27)$$

Если принцип Маха справедлив, то отношение  $\omega_2/\omega_1$  должно зависеть от распределения масс во Вселенной:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = f\left(\frac{m}{M}, \frac{R}{r}\right), \quad (28)$$

где  $M$  и  $R$  — снова подходящие меры массы и радиуса наблюдаемой части Вселенной. При  $m/M \ll 1$  и  $(m/r)(R/M) \ll 1$  приведенная выше формула (27), полученная Тиррингом и Лензе, показывает, что член низшего порядка в разложении функции должен иметь вид

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \gamma \frac{m}{M} \frac{R}{r}, \quad (29)$$

где  $\gamma$  — безразмерная величина порядка единицы. Заметим, что совместно с формулой (27) последняя формула дает

$$\frac{GM}{Rc^2} \sim \gamma. \quad (30)$$

При несколько ином подходе и с точки зрения принципа Маха силы Кориолиса, возникающие во вращающейся системе координат, могут рассматриваться как следствие лензе-тирринговского вращения, вызванного вращением всей Вселенной вокруг исследуемой точки. Если наивным образом применить к этому случаю формулу Лензе — Тирринга (где она на самом деле незаконна, так как была найдена из решения для слабого поля), то мы получим

$$\omega_1 \sim \frac{GM}{Rc^2} \omega_1, \quad (31)$$

откуда снова следует, что

$$\frac{GM}{Rc^2} \sim 1. \quad (32)$$

Если усматривать в выражении типа (32) прототип того уравнения, которое когда-то будет получено точно, то придется заключить что либо распределение масс  $M/R$  задается уравнением поля или граничными условиями, накладываемыми на эти уравнения, либо гравитационная постоянная должна быть переменной и зависеть от распределения масс.

Рассмотрим первую возможность. Если уравнения Эйнштейна правильны, то гравитационная постоянная должна иметь фиксированное значение. В этом предположении выражение (32) можно включить в теорию тяготения, введя скалярное поле. Некоторое скалярное поле, создаваемое всем веществом, содержащимся во Вселенной, и действующее на все частицы в этой Вселенной, вероятно, могло бы так воздействовать на массы последних, чтобы отношение  $M/R$  оставалось постоянным. Это не накладывает ограничения на число частиц во Вселенной, а означает, что массы частиц, регулируемые скалярным полем, сами себя «подгоняют» таким образом, чтобы придать отношению  $M/R$  нужное значение.

Дело обстоит так, как будто Вселенная является гигантской следящей системой, непрерывно и автоматически подгоняющей значения масс частиц к таким величинам, чтобы выполнялось условие обратной связи

$$\frac{GM}{Rc^2} = 1. \quad (33)$$

Заметим, что такое действие скалярного поля далекого радиуса действия дает готовое объяснение чрезвычайно слабому характеру гравитационного взаимодействия, выражаемому малой величиной гравитационной константы связи (по сравнению с атомной связью):

$$\frac{Gm_p^2}{\hbar c} \sim 10^{-40}. \quad (34)$$

Малая величина константы объясняется тем, что  $m_p$  — масса протона — очень сильно уменьшена под действием скалярного поля, создаваемого громадным количеством вещества в отдаленных частях Вселенной.

Вспомним, что, будучи выражена в единицах массы протона, масса Вселенной оказывается примерно равной

$$\frac{M}{m_p} \sim 10^{80}, \quad (35)$$

а радиус Вселенной в единицах комптоновской длины волны протона приблизительно равен

$$\frac{Rm_p c}{\hbar} \sim 10^{40}. \quad (36)$$

Соотношение

$$\frac{Gm_p^2}{\hbar c} \sim \sqrt{\frac{m_p}{M}} \sim \frac{\hbar}{Rm_p c}, \quad (37)$$

по мнению Дирака [14], указывает, что по мере изменения возраста Вселенной ( $\sim R/c$ ) изменяются и  $M$  и  $G$ , причем так, что соотношение (37) не меняется. С точки зрения действия скалярного поля мы сказали бы, что скорее всего меняется не  $G$ , а  $m_p$ .

Мною высказано утверждение (см. [15]), что оба соотношения (37) можно получить из выражения (32), вытекающего из анализа принципа Маха и условий, необходимых для существования Солнечной системы.

Было высказано мнение, что общая теория относительности может быть приведена в соответствие с требованиями принципа Маха, если наряду с тензорным полем теории Эйнштейна существует и скалярное поле с далеким радиусом действия.

Такое скалярное поле могло бы привести к замыканию пространства вокруг локализованного распределения масс и при этом так «подогнать» значения масс частиц, чтобы они удовлетворяли маховскому условию

$$\frac{GM}{Rc^2} \sim 1. \quad (32)$$

В соответствии с указанным выше 3-м требованием Эйнштейна (эффект, не представленный в обычной общей теории относительности) то скалярное поле, которое должно определяться и порождаться веществом, помещаемым вокруг лаборатории, приводит и к усилению



эффекта инерции. Возрастание сил инерции должно проявляться главным образом в уменьшении локально вызываемых гравитационных ускорений (из-за увеличения инертной реакции).

В гл. 8 я покажу, что нашим требованиям отвечает теория скалярного поля, в которой массы частиц изменяются как  $\lambda^{-1/2}$ , а при замене единиц эта теория переходит в новую теорию, в которой массы частиц постоянны, но гравитационная «постоянная» становится переменной. В этой форме теории константа гравитационной связи  $Gm_p^2/\hbar c$  изменяется в результате изменения  $G$ , а величины  $m_p$ ,  $\hbar$  и  $c$  являются истинными константами. Уравнения поля Эйнштейна теряют свою силу, а их место занимают уравнения, почти совпадающие с уравнениями Йордана. Более подробно эти вопросы будут обсуждаться в гл. 8. В гл. 8 и 12 мы рассмотрим астрофизические и геофизические следствия, вытекающие из теории скалярного поля (если таковое существует).

Итак, мы видели, что у Маха много лиц — почти столько же, сколько было исследователей, рассматривавших принцип Маха. Будучи основан на глубоких философских идеях, этот принцип является интуитивным<sup>1)</sup>, и его трудно возвысить (или, если угодно, низвести) до уровня количественной теории. Но то, что самого Эйнштейна к его чрезвычайно изящной теории гравитации привели соображения, вытекающие из этого принципа, говорит о многом. Принцип Маха еще может быть очень полезным для физиков будущего.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Newton I., Principia Mathematica, 2nd ed., London, 1713 (имеется перевод в Собрании сочинений А. Н. Крылова, т. 4).
2. Sciama D. W., The Unity of the Universe, New York, 1961, p. 97.
3. Berkeley B., The Principles of Human Knowledge, London, 1937.
4. Mach E., The Science of Mechanics, 5th ed., London, 1942, ch. 1.

<sup>1)</sup> Автор употребляет немецкое слово «anschaulich» как принятое в работах философов. — Прим. перев.

5. Einstein A., *The Meaning of Relativity*, Princeton N. J., 1955, p. 100 (имеется перевод предыдущего издания: А. Эйнштейн, *Сущность теории относительности*, ИЛ, 1955).
6. Thirring H., Lense J., *Zs. Phys.*, **19**, 156 (1918).
7. Brans C., *Phys. Rev.*, **125**, 2194 (1962).
8. Synge J. L., *Relativity, The General Theory*, Amsterdam, 1960, p. IX (имеется перевод: Дж. Л. Синг, *Общая теория относительности*, М., 1963, стр. 8).
9. Sciama D. W., *Roy. Astron. Soc. Monthly Notices*, **113**, 34 (1953).
10. Lee T. D., Yang C. N., *Phys. Rev.*, **98**, 1501 (1955) (имеется перевод в сборнике «Элементарные частицы и компенсирующие поля», изд-во «Мир», 1964, стр. 39).
11. Dicke R. H., *Phys. Rev.*, **126**, 1580 (1962).
12. Schwinger J., *Phys. Rev.*, **125**, 1043 (1962) (имеется перевод в сборнике «Элементарные частицы и компенсирующие поля», изд-во «Мир», 1964, стр. 207).
13. Dicke R. H., *Phys. Rev.*, **126**, 1875 (1962).
14. Dirac P. A. M., *Proc. Roy. Soc.*, **165A**, 199 (1938).
15. Dicke R. H., *Nature*, **192**, 440 (1961).

# 8

## *Влияние переменного во времени гравитационного взаимодействия на Солнечную систему*

Р. ДИККЕ

### **Изменение теории Эйнштейна в соответствии с принципом Маха**

В гл. 7 я рассматривал основные особенности теории тяготения. Две из них мы используем в качестве отправного пункта в настоящей главе.

1. Из двух требований: чтобы теория тяготения описывалась общековариантными уравнениями и чтобы силы инерции и силы тяготения проистекали из единого инварианта, — следует необходимость представления гравитации через тензорное поле. Теория Эйнштейна является частным случаем тензорной теории, в которой это тензорное поле является единственным полем, ответственным за гравитационные эффекты, а геометрия определена таким образом, что ее метрическим тензором является именно этот тензор поля.

2. Общая теория относительности Эйнштейна не является релятивистской в смысле Маха. Иначе говоря, эта теория не ограничивается описанием соотношений между положениями объектов. Более того, при полном отсутствии материальных объектов пустому пространству в ней приписываются такие свойства, как фиксированные направления, а движение относится к предпочтительной — или абсолютной — геометрии.

В настоящей лекции я рассмотрю вопрос о том, как, вводя в уравнение вторую полевую величину, можно видоизменить теорию Эйнштейна, чтобы (по крайней мере частично) избавиться от абсолютного характера

пространства — времени в ней. Затем я перейду к связи этой новой теории с некоторыми проблемами геофизики и астрофизики.

В гл. 7 при обсуждении модели Сиамы я имел в виду некоторые стороны этого обобщения. Уравнения Сиамы приводят к мысли о возможности более полной реализации принципа Маха в общей теории относительности при введении такой гравитационной «постоянной», которая была бы функцией некоторой полевой переменной.

Такая возможность возникла также в связи с представлением о гравитационной константе, меняющейся со временем. Впервые гипотеза об изменении гравитационной константы со временем возникла в физике, по-видимому, в связи с космологическими идеями Милна. Позднее Дирак [1] высказал мысль о том, что численные совпадения в значениях больших космологических величин могут соответствовать переменному во времени гравитационному взаимодействию, т. е. что гравитационная постоянная в действительности не постоянна, а зависит от времени. Еще позже Йордан [2] попытался придать идеям Дирака соответствующую математическую форму, предположив, что гравитационная «постоянная» является функцией скаляра.

Я подойду к этому вопросу несколько иначе и покажу, что вдобавок к гравитационному полю, связанному с геометрией мира, можно взять еще дальнедействующие поля вещества. С одним из них мы уже знакомы — это электромагнитное поле. Две заряженные частицы могут взаимодействовать друг с другом на большом расстоянии через электромагнитное поле. Я показал в гл. 7, что этот тип векторного поля, по-видимому, исключается, так как приводит к дальнедействующим силам в космологической области. В однородной изотропной Вселенной большие области мира не могут друг с другом взаимодействовать векторным образом, если уравнения соответствующего векторного поля имеют максвелловский вид (калибровочно инвариантны).

## Второй тензор в теории гравитации — малообещающее нововведение

В теории относительности имеются два других поля, которые могут сыграть важную роль в космологии. Одно из них — дальнедействующее скалярное поле, а другое — дальнедействующее тензорное, т. е. второй тензор наряду с метрическим тензором, связанным в теории Эйнштейна с гравитацией. Я рассмотрю сначала тензорное поле.

Наряду с метрическим тензором пространства — времени можно представить себе еще одно тензорное взаимодействие. Но ввести в теорию еще одно такое тензорное поле большого радиуса действия было бы очень затруднительно. Дело в том, что второе тензорное поле привело бы к странным выводам в отношении некоторых опытов, вроде тех, которые производились Хьюзом и сотрудниками. Хьюзу и независимо Дриверу удалось с очень большой точностью доказать изотропию пространства. Этот опыт подробно описан в гл. 6.

Те причины, в силу которых тензорное поле привело бы к трудностям в случае опыта Хьюза, были впервые количественно рассмотрены Пиблзом и Дикке [3, 4]. Ход их рассуждения таков. Допустим, что существует второе тензорное поле. Можно выбрать систему координат, в которой метрический тензор локально принимает те же значения, что и в мире Минковского (т. е. он локально лоренцов). Второй тензор, вообще говоря, не будет при этом локально лоренцовым, и вид его будет таков, что в своей пространственной части он будет проявлять анизотропию. Если существуют силы, связанные с этим вторым тензорным полем, то эта пространственная анизотропия должна сказываться и на результатах опыта Хьюза.

Если случится так, что сразу оба тензора окажутся изотропными в некоторой системе координат, то можно перейти к движущейся системе, и если наши тензоры не совпадают друг с другом в точности, то всегда в движущейся системе мы обнаружим у одного из них недостаточную изотропность. Я полагаю, что ввиду чрезвычайной точности и чувствительности указанного опыта

этот довод является сокрушительным для второго тензорного взаимодействия. Я не представляю себе достаточно очевидного способа сконструировать на его базе приемлемый вид взаимодействия.

### Замечательные свойства скалярного поля

Скалярное поле более перспективно. Я подытожу его свойства, упоминавшиеся уже в гл. 7. Замечательно, что, как ни скудны данные наших наблюдений относительно этого взаимодействия (ведь даже его существование находится под сомнением), мы все же можем хорошо обрисовать его свойства. Все дело в исключительной простоте такого взаимодействия, поскольку для весьма полного определения его свойств достаточно пары наблюдений да учета требования лоренц-инвариантности. Перечислим свойства дальнедействующего скалярного взаимодействия (нейтральное скалярное поле с нулевой массой покоя).

1. Скалярное поле приводит к силам притяжения между телами.

2. Скалярное поле может быть только слабым. Сила такого взаимодействия должна быть того же порядка, что и у гравитационного.

3. Скалярное поле не взаимодействует с фотонами и другими частицами, движущимися со скоростью света.

4. Скалярная сила убывает с увеличением скорости частицы по закону  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ .

5. Скалярное поле может взаимодействовать с частицей тогда и только тогда, когда масса этой частицы является функцией скаляра.

Отсюда следует, что при движении частицы в неоднородном скалярном поле должна совершаться работа. Это приводит к добавочной силе, действующей на вещество ввиду его взаимодействия со скаляром. Полученный вывод можно записать в виде уравнения

$$\frac{d}{d\tau}(mu_i) - \frac{1}{2} mg_{jk, i} u^j u^k + m_{,i} = 0, \quad (1)$$

где

$$u^i = \frac{dx^i}{d\tau}, \quad u^i u_i = -1, \\ d\tau^2 = -g_{ij} dx^i dx^j = -ds^2 \quad (2)$$

и

$$m_{,i} = \frac{dm}{d\varphi} \varphi_{,i}. \quad (3)$$

Из опыта Этвёша, проделанного с высокой точностью, вытекает требование, чтобы в случае существования такого скалярного взаимодействия оно было в основном одинаковым для всех частиц. В противном случае существовали бы аномальные ускорения. В самом деле, если бы суммарная масса протона и электрона зависела от скаляра иначе, чем масса нейтрона, то нейтрон, вообще говоря, падал бы с другим ускорением, чем обычный атом водорода. Мы сталкиваемся, таким образом, с требованием, чтобы массы всех частиц с точностью до соответствующих постоянных множителей равнялись одной и той же функции от потенциала скалярного поля:

$$m(\varphi) = m_0 f(\varphi). \quad (4)$$

Предположение о зависимости массы частицы от скаляра приводит к некоторым довольно странным выводам. В частности, «константа» гравитационной связи тогда не будет настоящей константой. Эту гравитационную константу можно записать в виде безразмерной величины — константы связи — с помощью атомных констант как

$$\frac{Gm_p^2}{\hbar c} \approx 10^{-40}, \quad (5)$$

где  $m_p$  — масса протона. Но если бы масса протона изменялась от точки к точке, то это отношение также изменялось бы, и гравитационное взаимодействие, выраженное с помощью атомных постоянных, само не было бы постоянным.

В физике константы связи, такие, как

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137} \quad (6)$$

и

$$\frac{Gm_p^2}{\hbar c} \approx 10^{-40}, \quad (7)$$

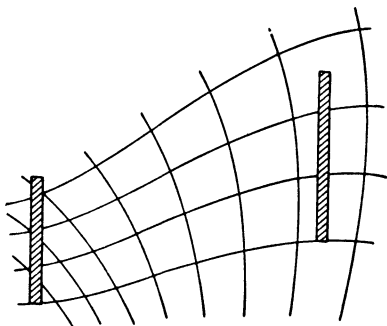
обычно рассматриваются как *fait accompli*<sup>1)</sup> природы, т. е. как числа, раз и навсегда данные и никак не связанные с другими безразмерными физическими величинами. Но если константа гравитационной связи переменна и является функцией некоторого скалярного потенциала, в свою очередь зависящего от распределения материи во Вселенной, то оказывается возможным понять, почему эта величина исключительно мала. По моему мнению и в противоположность точке зрения Эддингтона, число  $10^{-40}$  не следует трактовать как случайное числовое значение чисто математического происхождения. В согласии с приведенной выше интерпретацией величина  $Gm_p^2/\hbar c$  должна быть малой потому, что Вселенная содержит очень большое количество частиц ( $\sim 10^{80}$ ). Это громадное количество материи, разбросанной на огромных просторах Вселенной, обуславливает такое локальное значение  $m_p$ , что константа гравитационной связи оказывается малой.

С переменными массами частиц связано еще одно замечательное обстоятельство. Если изменяются массы атомов, то изменяются и их периоды и диаметры, а следовательно, изменяется длина измерительных стержней и периоды часов. Все они зависят от величины скалярного поля. В одном месте длина измерительного стержня будет иной, нежели в другом (фиг. 8.1), так как для описания этих эффектов я использую не ту геометрию, которая определяется путем измерений с помощью измерительного стержня и часов, а геометрию, заданную метрическим тензором уравнений Эйнштейна. Это геометрия, в которой единица длины  $\sqrt{G\hbar/c^3}$ , единица времени  $\sqrt{G\hbar/c^5}$ , а единица массы  $\sqrt{\hbar c/G}$ .

При желании мы можем задаться целью переопределить так геометрию, чтобы длина измерительного стержня в ней не изменялась. Иными словами, мы можем определить единицу длины в любой точке как дли-

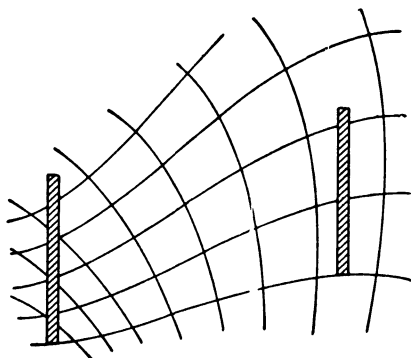
<sup>1)</sup> «Совершившийся факт» (фр.). — Прим. ред.





Фиг. 8.1. Неравномерно проведенные линии изображают геометрию искривленного мира, которую дают уравнения Эйнштейна. Согласно последним, длина линейки от точки к точке меняется, будучи функцией скалярного поля.

ну нашего измерительного стержня, перенесенного в эту точку (фиг. 8.2). Если я переопределяю геометрию таким образом, чтобы измерительные стержни и часы вели



Фиг. 8.2. В геометрии, переопределенной соответствующим образом и не удовлетворяющей уравнениям Эйнштейна, длина линейки постоянна.

себя должным образом, а массы частиц не изменялись, то обнаружится следующее:

1) уравнения поля метрического тензора будут иными, чем в общей теории относительности, — это будут видоизмененные уравнения;

2) в этих видоизмененных уравнениях гравитационная постоянная уже не будет константой, но будет изменяться от точки к точке; все прочие физические постоянные сохранят свое постоянство.

Формализм такого рода, в котором уравнения общей теории относительности заменяются видоизмененными уравнениями, был введен впервые Йорданом [2]. Я рассмотрю здесь вариант, тесно связанный с одним из видов уравнений Йордана.

### Видоизмененные уравнения Эйнштейна, содержащие скалярное поле

Короче всего такую теорию можно получить на основе вариационного принципа, из которого следуют искомые уравнения. В общей теории относительности эйнштейновские уравнения поля и уравнения движения для вещества выводятся из вариационного принципа вида

$$\delta \int (R + GL) \sqrt{-g} d^4x = 0, \quad (8)$$

где  $R$  — свернутый тензор кривизны,  $G$  — гравитационная постоянная, а  $L$  — плотность лагранжиана для вещества. Если мы произведем указанное варьирование относительно компонент метрического тензора, то получим уравнения Эйнштейна. Если же мы будем варьировать координаты частиц, входящие в плотность лагранжиана для вещества, то получим уравнения движения вещества. В этом вариационном принципе содержатся все уравнения гравитационной физики.

Для того чтобы явно ввести скалярное поле, нужно к плотности лагранжиана для вещества добавить плотность лагранжиана скалярного поля. Тогда вариационный принцип примет вид

$$\delta \int [R + G(L + L_\lambda)] \sqrt{-g} d^4x = 0, \quad (9)$$

где для удобства плотность лагранжиана  $L_\lambda$  взята в виде

$$L_\lambda = -G^{-1} \left( \omega + \frac{3}{2} \right) \frac{\lambda_{,i} \lambda^{,i}}{\lambda^2}. \quad (10)$$

Здесь  $\lambda$  — потенциал скалярного поля, а  $\omega$  — постоянная, которую можно рассматривать как константу связи для этого поля. Помимо того, что скалярное поле явно входит в плотность лагранжиана скалярного поля, оно неявно содержится и в плотности лагранжиана для вещества, так как от него зависят массы частиц. Мы возьмем их в виде

$$m = m_0 \lambda^{-1/2}. \quad (11)$$

Позднее я укажу, почему этот вид зависимости особенно интересен.

Из уравнения (9) следуют уравнения Эйнштейна для компонент метрического тензора и новые уравнения движения для частиц. Измерительный стержень, если его длину выражать через единицы этой геометрии, ведет себя теперь несколько необычно. При перемещении от точки к точке он то сокращается, то растягивается. Часы в одних точках спешат, а в других отстают. Мы можем, однако, переопределить единицы измерения таким образом, чтобы измерительные стержни вели себя нормально. Оказывается, что соответствующее изменение уравнений приводит к следующему вариационному принципу:

$$\delta \int \left( \varphi R - \frac{\omega \varphi, i \varphi', i}{\varphi} + L \right) \sqrt{-g} d^4x = 0, \quad (12)$$

где  $\varphi$  — новый скаляр с размерностью  $G^{-1}$ , причем  $\varphi \sim \lambda$ . Массы частиц, входящие в  $L$  в этом уравнении, уже не являются переменными — они константы.

Полученный результат тесно связан с одним из типов вариационного принципа Йордана. Из него следует гравитационное взаимодействие, описываемое не просто метрическим тензором, но совокупностью метрического тензора и скаляра. Впервые уравнение (12) рассматривалось в связи с принципом Маха Брэнсом и Дикке [5]. Переход от уравнения (12) к уравнению (9) рассмотрен Дикке [6].

В теории, основанной на уравнении (12), вещество подчиняется обычным уравнениям движения, известным из теории Эйнштейна, но сами уравнения Эйнштейна теряют силу.

Подведем итоги. В той форме теории, где выполняются уравнения Эйнштейна, измерительные стержни проявляют странные отклонения. В той форме теории, в которой измерительные стержни ведут себя нормально, уравнения Эйнштейна неприменимы. Мы можем выбирать либо ту, либо другую форму. С физической точки зрения они совершенно эквивалентны, отличаясь друг от друга лишь определением единиц измерения, а значит, и геометрией. Вопрос об их эквивалентности рассмотрен в работе [6].

### Следствие видоизмененной теории: переменная во времени гравитационная «постоянная»

Интересно, что уравнения указанного типа, по-видимому, совместны с принципом Маха. Они приводят также к гравитационной постоянной, изменяющейся со временем и при переходе от точки к точке в пространстве. Представляется затруднительным сформулировать теорию, в которой учитывался бы принцип Маха и использовался лишь метрический тензор без скалярного поля. Я покажу, что этот тип теории предполагает изменение гравитационного взаимодействия в пространстве и во времени. После этого я хотел бы по возможности подробнее поговорить о том, как изменение во времени гравитационного взаимодействия должно проявляться в Солнечной системе.

Из уравнения (12) для случая статического распределения вещества следует уравнение для скалярного поля в виде

$$\nabla^2\varphi \sim T, \quad (13)$$

где  $T$  — свернутый тензор энергии — импульса вещества. В случае изменяющейся во времени конфигурации вещества оператор Лапласа следует заменить на даламбертиан. В лоренцовых координатах, пренебрегая влиянием кривизны, мы получим тогда

$$\square^2\varphi \equiv \nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \approx T. \quad (14)$$

Из этого уравнения следует, что по мере того, как Вселенная, которую мы считаем однородной, с течением времени расширяется, а количество содержащегося в ней вещества изменяется, скалярный потенциал, связанный с распределением вещества, также изменяется.

В результате тяготение должно со временем становиться все слабее. Можно даже примерно оценить скорость его уменьшения. Оказывается, что за год оно должно ослабевать на величину порядка  $10^{-11}$ , если только наша теория верна.

Такое изменение должно бы приводить к различным интересным эффектам, связанным с историей и теперешним состоянием Солнечной системы и Галактики. Правда, данные наблюдений, имеющиеся в нашем распоряжении, допускают столько различных толкований, что на основании сказанного мною ниже вряд ли можно будет доказать непостоянство величины  $G$ . Но если бы удалось получить хорошее лабораторное подтверждение тому, что гравитационная постоянная меняется со временем, то мои замечания относительно возможных эффектов, связанных с изменениями  $G$ , оказались бы небезосновательными.

## Переменная «константа» $G$ и эволюционный возраст звезд

Одно из главных проявлений уменьшения гравитационной постоянной со временем связано с эволюцией звезд. Дело в том, что светимость звезд весьма сильно зависит от величины гравитационной постоянной. При уменьшении этой величины со временем должна уменьшаться и светимость звезд. Это приводит к двум основным выводам относительно наших наблюдений.

1. В настоящее время возраст звезды определяется на основании ее современного состояния (в ходе эволюции) в предположении, что гравитационная постоянная всегда была одной и той же. Результаты окажутся ошибочными, если вследствие более сильного гравитационного взаимодействия в прошлом звезда эволюционировала более быстро.

2. Светимость Солнца в прошлом была бы тогда больше, чем в настоящее время. Это означало бы, что в прошлом на поверхности Земли и других планет были более высокие температуры.

В первую очередь рассмотрим, как сказывается изменение  $G$  на эволюции звезд. Соотношения здесь довольно простые. На основании теоремы о вириале потенциальная гравитационная энергия звезды равна удвоенной полной кинетической энергии внутреннего движения, т. е. удвоенной тепловой энергии. Последняя же пропорциональна температуре в центре звезды. Поэтому можно написать, что

$$\frac{GM}{R} \sim T, \quad (15)$$

где  $M$ ,  $R$  и  $T$  — масса, радиус звезды и температура в ее центре. Если при изменении гравитационной постоянной мы полагаем радиус неизменным, то температура в центре, очевидно, должна меняться пропорционально  $G$ . С другой стороны, интенсивность излучения черного тела пропорциональна четвертой степени температуры. Отсюда — самым примитивным образом — мы должны ожидать, что светимость будет изменяться как четвертая степень гравитационной постоянной.

В действительности все обстоит сложнее. Во-первых, все сказанное справедливо лишь тогда, когда коэффициент поглощения не зависит от температуры. В случае весьма массивных (очень ярких) звезд, когда прозрачность звездных недр определяется в основном комптоновским рассеянием, сечение рассеяния постоянно и не зависит от температуры. Поэтому в случае весьма массивных звезд мы можем ожидать следующей зависимости светимости:

$$L \sim G^4. \quad (16)$$

В случае же звезды, имеющей массу порядка солнечной, прозрачность звездных недр определяется в основном процессами тормозного излучения, или, как говорят астрономы, свободно-свободными переходами электронов. В рассматриваемом частном случае интенсивность свободно-свободных переходов довольно сильно

зависит от температуры, и за счет этих процессов в законе изменения светимости прибавляются еще три или четыре единицы в показателе степени. Для звезды примерно солнечной массы светимость тогда ведет себя как

$$L \sim G^{7+8}. \quad (17)$$

Но упрощающее предположение о неизменности радиуса звезды совершенно необосновано. Температура в центре звезды определяется той температурой, при которой происходят ядерные реакции. Эта температура не очень сильно зависит от  $G$ , так что в действительности должен изменяться радиус звезды, а не температура в ее центре. Более тщательный анализ показывает, однако, что зависимость светимости от гравитационной постоянной, полученная нами ранее, остается приблизительно правильной как при изменении температуры в центре звезды, так и при изменении ее радиуса.

Таким образом, светимость звезды солнечной массы должна заметно зависеть от величины  $G$ . Изменение светимости примерно в восемь раз превышает изменение гравитационной постоянной. Если изменение  $G$  за год составляет  $3 \cdot 10^{-11}$ , то изменение светимости должно быть равно

$$\frac{\delta L}{L} \approx 8 \frac{\delta G}{G} \approx 2,5 \cdot 10^{-10} \text{ год}^{-1}. \quad (18)$$

За 4 млрд. лет светимость должна измениться примерно на 100%. Изменение  $G$ , протекающее с такой скоростью, весьма заметным образом сказалось бы на темпах звездной эволюции и могло бы привести к серьезным расхождениям в определенных в настоящее время эволюционных возрастах звезд.

Я перейду теперь к истории Галактики в той форме, в какой она нам известна, и рассмотрю вопрос о том, как ускоренная эволюция звезд в прошлом должна сказываться на результатах наших наблюдений. Мы считаем, что наша Галактика первоначально представляла собой гигантскую массу водорода, которая через очень короткий промежуток времени после ее образования дала первичную популяцию звезд. Эти звезды носят название «популяция II» и находятся в шаровых скопле-

ниях, а также в форме поля звезд с высокими скоростями. О том, что звездная популяция II образовалась довольно быстро, говорят большие и беспорядочно направленные скорости звезд, в которых, по-видимому, отражается первоначальная турбулентность движения газа.

Если это так, то популяция II должна была образоваться за время порядка характеристического времени затухания турбулентности в Галактике, не превышающего, по-видимому, 200 млн. лет.

Могло быть и так, что первоначальная популяция отличалась большей яркостью и активностью и содержала очень большое количество массивных звезд, ультрафиолетовое излучение которых привело к появлению турбулентности, сохранявшейся затем 1 млрд. лет. Более 1 млрд. лет эта турбулентность не могла поддерживаться яркими звездами первоначальной популяции, так как время жизни звезд, обладающих подходящим для поддержания турбулентности ультрафиолетовым спектром, мало. Таким образом, срок образования основной части популяции II, вероятно, меньше 1 млрд. лет.

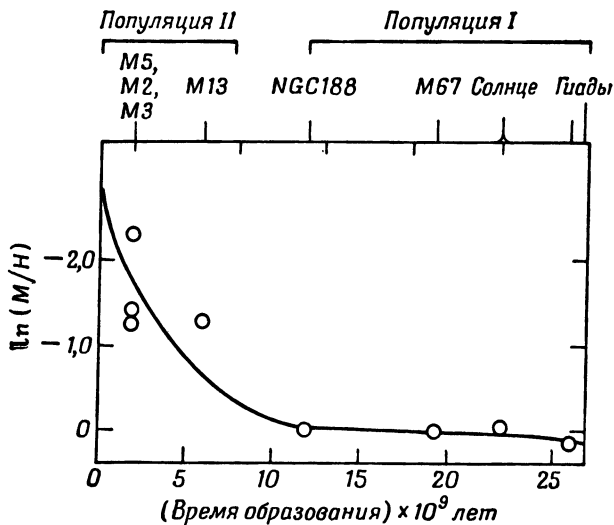
Эта шкала времени, по-видимому, довольно хорошо согласуется с предположением Салпитера о том, что скорость образования звезд пропорциональна количеству имеющегося в Галактике газа. Отсюда следует, что период образования гало составляет 0,2 всего возраста Галактики. Он превышает 1 млрд. лет и имеет порядок 2 млрд. лет.

Характерной особенностью звезд популяции II является малое содержание тяжелых элементов. Видимо, они состоят из чистого водорода.

Что же касается звезд популяции I, то все они характеризуются значительным содержанием тяжелых элементов. Проведенные Арпом [7] и другими исследователями измерения показали, что относительное содержание тяжелых элементов увеличивается со временем примерно так, как показано на фиг. 8.3. По оси абсцисс отложено время в условных единицах, а по оси ординат — логарифм отношения содержания металла к содержанию водорода. Содержание металла очень быстро достигает значения этой величины для Солнца. Для



чрезвычайно старого скопления NGC 188, отмеченного на оси времени сразу же после популяции II, характерно, по-видимому, такое же содержание тяжелых элементов, как и для Солнца.



Фиг. 8.3. Отношение содержаний металлов и водорода в звездах (по отношению к солнечному) как функция времени образования звездных скоплений [7].

Данные, приведенные на фиг. 8.3, не очень точны, так как весьма трудно измерить малые изменения в содержании тяжелых элементов. Все же они показывают, что тяжелые элементы образуются в основном в звездах, относящихся к гало. Это связывает между собой звезды, образующие гало, и популяцию II. После завершения образования популяции гало начали появляться звезды с малыми скоростями. Похоже, что они с самого начала содержали большую часть своих тяжелых элементов. В дальнейшем содержание этих элементов возросло лишь незначительно (на 20—40%).

В первоначальной популяции присутствовали звезды такого типа, который уже не обнаруживается в Галак-

тике, а именно звезды больших масс популяции II. Мы уже не наблюдаем их и не имеем данных об их свойствах. Возможно, что это были «предки» сверхновых, и они могли бы послужить первичным источником тяжелых элементов. Если в прошлом гравитационное взаимодействие было более сильным, то это обстоятельство могло сказаться на устойчивости звезд так, что вероятность образования сверхновых увеличилась.

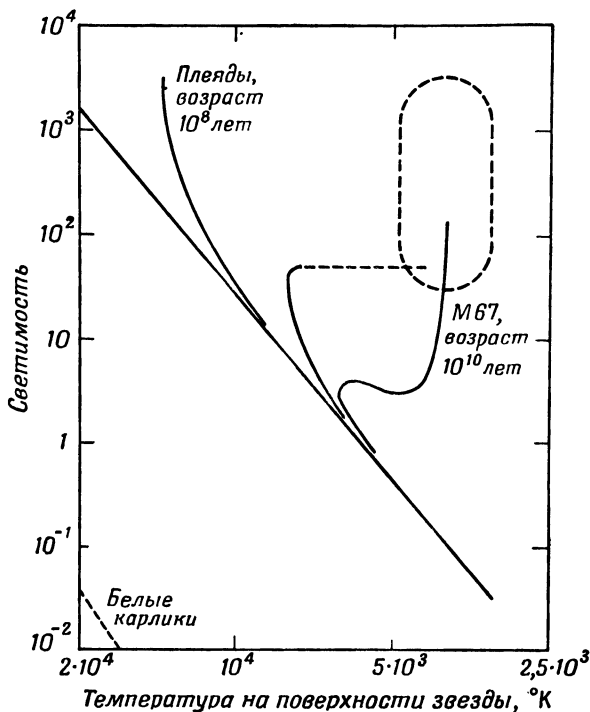
Возраст звезд определяют в сущности по степени «выгорания» в них водорода. Вначале звезды состоят из водорода и примеси тяжелых элементов, причем в центре звезды происходят ядерные реакции. По мере выгорания водорода в центре область, в которой происходит реакция, расширяется. По мере ее расширения несколько возрастает светимость. Наконец, звезды достигают такого этапа, когда их характер начинает радикально изменяться. Происходит сильное расширение, и они превращаются в красных гигантов.

На фиг. 8.4 показана известная диаграмма Герцшпрунга — Расселла, на которой представлена зависимость логарифма светимости звезд от логарифма температуры их поверхности. Светимость характеризует мощность звездного излучения, а светимость Солнца принята за единицу. Из диаграммы видна температура поверхности Солнца.

Вновь сформировавшаяся звезда идет вниз по прямой линии, именуемой главной последовательностью. Первоначальное положение звезды на главной последовательности определяется ее массой. Более массивные звезды обладают вначале более высокими светимостью и температурой. После того как в звезде выгорела определенная часть (скажем, 20—30%) водорода, она начинает довольно быстро двигаться от главной последовательности вверх — в область красных гигантов. Что происходит после этого, не вполне ясно. По-видимому, звезда заканчивает свое развитие в виде белого карлика.

Таким образом, при определении возраста звезды по ее светимости необходимо знать время, в течение которого звезда данной массы теряет от 20 до 30% водорода. Та доля водорода, которая должна выгореть в звезде перед тем, как она сойдет с главной последова-

тельности, определяется на основании теории звездной эволюции. Какая-то система звезд, появившихся одновременно, например скопление Плеяд, первоначально



Фиг. 8.4. Диаграмма Герцшпрунга — Расселла, дающая распределение звезд по температуре и светимости.

Светимость Солнца принята равной единице.

двигалась вниз по главной последовательности. Но массивные звезды, обладавшие большой светимостью, быстро сожгли свой водород и отошли от главной последовательности в область красных гигантов. Таким образом и вышло, что в настоящее время Плеяды лежат не на главной последовательности, а на ниспадающей кривой, изображенной на фиг. 8.4. Форма этой кривой позволяет определить возраст данного звездного скопления (по

точке, в которой кривая касается главной последовательности).

Плеяды еще довольно молоды. В случае же более старых скоплений самые массивные звезды в них уже мертвы. Сначала они превратились в красных гигантов, затем, по-видимому, быстро прошли путь дальнейшего развития и кончили его в виде белых карликов. Самая нижняя кривая соответствует звездам весьма старого скопления М67.

Кривые фиг. 8.4 не отражают развития звезд во времени, и отдельные звезды вовсе не движутся вдоль кривых. Кривые характеризуют распределение звезд в какой-то определенный момент — «теперь». Распределение позволяет произвести оценку возраста всего скопления. Таким образом и получены наши данные об эволюционном возрасте звезд. Если же гравитационное взаимодействие изменяется со временем, то эти данные неверны.

В табл. 8.1 приведены различные значения возраста Галактики, определенные на основании теории звездной эволюции для постоянного и меняющегося со временем  $G$ . Шаровые скопления содержат звезды, принадлежащие к числу самых старых известных звезд. Эволюционный возраст этих звезд оценивается в 25 млрд. лет. Но такая оценка весьма неточна.

Как уже говорилось, некоторые из величин, приведенных в табл. 8.1, внушают серьезные сомнения. Могут быть ошибочными болометрические поправки для видимых светимостей. Ошибки могут содержаться и в значениях абсолютной видимой светимости, а также подсчитанной яркости звезд на главной последовательности и доли водорода, выгоревшего при прохождении по главной последовательности. При всем этом шаровые скопления должны быть старше самых старых звезд популяции I, для которых указанные ошибки невелики. Поэтому их возраст должен превышать 16 млрд. лет. В дальнейшем мы примем, что их возраст равен 25 млрд. лет, имея, впрочем, в виду все возражения.

Итак, мы принимаем эволюционный возраст шаровых скоплений равным 25 млрд. лет при условии, что величина  $G$  постоянна. Тогда при учете ускоренной эволюции в прошлом, обусловленной более сильным гра-

Таблица 8.1

Возрасты астрономических объектов (за единицу принято  $10^9$  лет)

Объект	Метод определения возраста	Общая теория относительно-сти, $\sigma$ по-стоянна	Случай по-ложительной кривизны по Бренсу — Дик-ке, $\sigma$ пере-менная $\omega = 6$
Шаровое скопление	По звездной эволюции	25	7,8
Старое галактическое скопление NGC 188	По звездной эволюции	16	7,0
Солнце	По звездной эволюции	4—15	2,5—6,9
Солнце	По радиоактивности	4,5	4,5
Система Галактики	По степени истощения газообразного водо-рода	5—12	5—12
Эллиптические галакти-ки	По звездной эволюции (средний возраст)	10—16	5,5—7,0
Вселенная	По содержанию урана с момента первого образования		
	когда появилось «сразу» 25%	11,1	11,1
	когда появилось «сразу» 50%	7,5	7,5
Вселенная	По разбеганию галак-тик (Хаббл)	13,0	15,0
Вселенная (плоская)	Из хаббловского воз-раста	8,6	
Вселенная (замкнутая)	Из хаббловского воз-раста	< 8,6	8,0
Вселенная (открытая)	Из хаббловского воз-раста	{ < 13 > 8,6	

витационным взаимодействием, мы получим, что этот возраст уменьшится примерно до 7,8 млрд. лет. Это значение все же слишком близко к возрасту Вселенной, получаемому при учете хаббловского расширения. Возраст Вселенной, расширяющейся по Хабблу, если говорить о Вселенной плоского типа, составляет около 8 млрд. лет, и он меньше 8 млрд. лет для замкнутой Вселенной.

Посмотрим, как скажется изменение переменной  $G$  на оценке некоторых других возрастов, указанных в табл. 8.1. Возраст старого галактического скопления NGC 188 уменьшается с 16 до 7 млрд. лет. Заметим, что разность возрастов таких весьма различных по своему строению образований, как шаровые скопления и старое галактическое скопление NGC 188, равная 9 млрд. лет в случае постоянной  $G$ , уменьшается до 0,8 млрд. лет в случае переменной  $G$ .

Эволюционного возраста Солнца мы не знаем с достаточной определенностью, так как нам неизвестно содержание в нем гелия. Считается, что эволюционный возраст Солнца лежит где-то в рассмотренной области. Но можно принять радиоактивный возраст Солнца равным возрасту метеоритов, т. е. порядка 4,5 млрд. лет.

Оценка возраста нашей Галактики основывается на гипотезе Салпитера о ходе развития галактик. Согласно этой гипотезе, скорость образования звезд должна быть пропорциональна наличному содержанию водорода. Исходя из значения для скорости конденсации водорода в звезды, которое можно вычислить в данный момент в предположении об экспоненциальной зависимости, мы получим для возраста Галактики величину от 5 до 12 млрд. лет. Возраст эллиптических галактик можно определить на основе работы Крэмпина и Хойла [8]. Цветовое распределение в эллиптических галактиках говорит о том, что их эволюционный возраст имеет порядок 16 млрд. лет. Если же перейти к масштабам времени, пересмотренным с учетом более сильного тяготения в прошлом, то этот возраст становится равным 5,5—7 млрд. лет.

Итак, из того, что в прошлом значения гравитационной постоянной были больше, чем сейчас, прежде всего следует, что старые звезды следует отнести к более молодым. В результате их возраст становится меньше того возраста Галактики, который следует из модели расширяющейся Вселенной. Но, как я уже отмечал, указанные возрасты определены весьма неточно. Помнится, еще каких-нибудь 4 или 5 лет назад считалось, что шаровые скопления насчитывают около 6,5 млрд. лет «от роду». Вы видите, таким образом, что все эти данные суще-

ственно изменяются, и никак нельзя чрезмерно поддаваться впечатлению, которое может возникнуть при сопоставлении этих чисел.

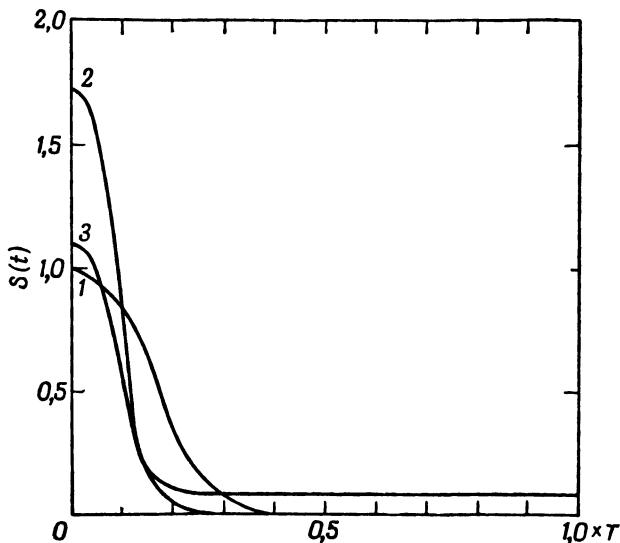
## Урановый возраст

При определении возраста Вселенной на основе распада урана исходят из относительного содержания двух изотопов урана  $U^{235}$  и  $U^{238}$ , причем предполагается, что их первоначальное содержание правильно дается теорией ядерного синтеза. Принимается, что в процессе образования урана его содержание возрастает со временем линейно, — допущение, согласующееся с моделью Салпитера. Кроме того, учитывается, что в соответствии со сказанным ранее часть урана образовалась быстрее в связи с популяцией гало. В одном случае я считал, что быстро образовалось 25%, а в другом случае 50%. Позднее я вычислил возраст, исходя из предположения об образовании урана в популяции гало, согласно кривым типа указанных на фиг. 8.5 [9]. Кривые 1, 2 и 3 дают для времени первоначального образования урана значения: 9, 7,7 и 7,2 млрд. лет.

Я не пользовался данными об относительном содержании урана и тория, так как эти элементы обладают различными химическими свойствами, а у тория, кроме того, большой период полураспада. Поэтому я рассматривал лишь содержание  $U^{235}$  и  $U^{238}$ . Поскольку период полураспада  $U^{235}$  сравнительно мал, результаты определения возраста этим методом весьма мало зависят от предполагаемого первоначального содержания изотопов. Первоначальное отношение содержания  $U^{235}$  и  $U^{238}$  не входит существенным образом в наши соотношения.

Не исключено, что кривые скорости образования урана и неверны. Если, например, незадолго до образования Солнечной системы вблизи от нее появилась сверхновая, то часть урана, имевшегося в Солнце, могла образоваться именно в это время. В результате соотношение между содержанием  $U^{235}$  и  $U^{238}$  могло измениться. Вследствие малого времени жизни  $U^{235}$  значительная часть его, наблюдаемого в Солнечной системе,

должна была бы тогда образоваться именно таким образом. Напротив,  $U^{238}$  обладает большим временем жизни и мог в гораздо большей степени накопиться в более далеком прошлом. Поэтому его содержание менее зависит от того, что происходило вблизи от Солнца



Фиг. 8.5. Скорость образования урана в Галактике  $S(t)$  (в произвольных единицах).

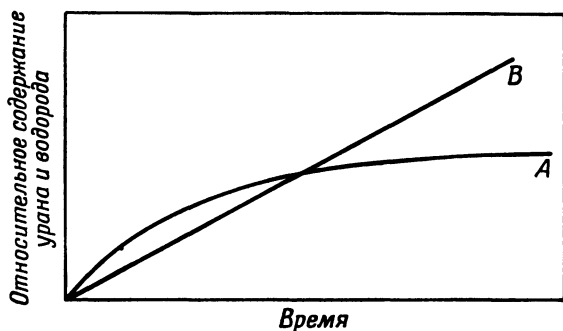
Через  $T$  обозначен возраст Галактики.

в более поздний период. Таким образом, точная форма кривой образования может оказаться весьма существенной при определении возраста. Следует все же отметить, что во время образования Солнечной системы отношение содержания  $U^{235}$  к  $U^{238}$  было равно 0,34. Таким образом, весьма значительная часть урана должна была образоваться непосредственно перед возникновением нашей Солнечной системы, если только такое объяснение этого короткого масштаба времени *правильно*.

Приведенные выше урановые возрасты существенно отличаются от определенных Хойлом и Фаулером на основе совершенно других предположений об изменении



скорости образования урана. Хойл и Фаулер принимают, что уран образуется в таком типе сверхновых, которые не могут появиться ранее чем через 4—5 млрд. лет после начала конденсации звезд. Таким образом, имеет место «инкубационный период» от 4 до 5 млрд. лет. Эти



Ф и г. 8.6. Содержание урана как функция времени.

Кривая A получена в предположении, что отношение содержаний урана и водорода изменяется со скоростью, пропорциональной наличному количеству водорода. В случае кривой B такое же предположение делалось относительно скорости изменения абсолютного содержания урана.

авторы предполагают также, что содержание урана описывается возрастающей функцией времени, кривая которой дана на фиг. 8.6 (кривая A). Но из модели Салпитера следует, что отношение содержания урана к содержанию водорода должно возрасти линейно со временем, как кривая B на фиг. 8.6. Все же причиной расхождения между возрастами, приведенными мною, и выводами Хойла и Фаулера является задержка в 4—5 млрд. лет с самого начала введенная последними.

Определенные мною возрасты отличаются также и от определенных Камероном. В модели Камерона [10] считается, что первичные (легкие) элементы образуются с той же скоростью, что и сами звезды, а скорость образования звезд принимается убывающей по экспоненте. Вторичные элементы образуются со скоростью, зависящей от концентрации легких элементов. В случае урана зависимость скорости образования от времени очень сложная и объясняется совсем иначе, нежели зависи-

мость, полученная Фаулером и Хойлом. Но окончательные выводы о возрасте элементов оказываются почти такими же.

### Переменная «константа» $G$ и температура Земли в прошлом

Что можно теперь сказать о более высоких температурах в прошлом? Если предположить, что излучательная способность Земли оставалась неизменной, то изменение температуры Солнца должно было бы привести к соответствующему изменению температуры Земли. Тогда, возвращаясь на 4—5 млрд. лет назад, мы должны ожидать повышения температуры примерно от  $300^\circ\text{K}$  до точки кипения воды.

Здесь не учтена поправка на звездную эволюцию и на движение Солнца вдоль главной последовательности. Учет этой поправки должен привести к снижению температуры, хотя и небольшому. Температура может понизиться примерно на  $10^\circ\text{K}$ , так что будет равна  $353$  или  $363^\circ\text{K}$ , что все же близко к точке кипения воды.

Коэффициент уменьшения светимости за счет изменения  $G$  равен примерно 2,7 за 4,5 млрд. лет. Этот вывод основывается на линейной экстраполяции, причем берется

$$\frac{\delta G}{G} = 3 \cdot 10^{-11} \text{ год}^{-1}. \quad (19)$$

Зависимость температуры Земли от солнечной светимости в значительной мере определяется содержанием в атмосфере паров воды. Повышение этого содержания приводит к двум противоположным эффектам. С одной стороны, усиливается парниковый эффект, что ведет к повышению температуры. С другой стороны, повышается альbedo и перенос тепла на высокие широты, что ведет к понижению температуры. Мне кажется, что можно утверждать следующее: при повышении интенсивности солнечного излучения температура на поверхности Земли должна несколько увеличиться, что приведет к повышению давления пара и к усилению парникового эффекта, но, с другой стороны, и к усилению облачности.

Но можно утверждать, что характер облачности в атмосфере может сильно измениться лишь тогда, когда в атмосфере будет уже весьма значительное количество водяного пара. Дело в том, что в атмосфере существуют как восходящие, так и нисходящие конвекционные воздушные потоки. Так как они охватывают примерно равные области, то в широких пределах содержания водяных паров в атмосфере облачность не должна превышать 50%.

Возможно, что при усилении солнечного излучения возрастает различие в поглощении такого излучения на экваторе и на полюсах. Это привело бы к усилению циркуляции и увеличению облачного покрова там, где он будет эффективен. При абсолютной влажности атмосферного воздуха, близкой к 80—90%, характер циркуляции должен измениться довольно любопытным образом — не будет таких областей конвекции, к которым мы привыкли. Водяные пары будут подниматься в районе экватора и выпадать в виде дождей прежде всего в области полюсов. При этом облачность сможет приблизиться к 100%-ной.

Перемены температуры поверхности Земли могут оказаться существенными с биологической точки зрения. Если в прошлом на Земле было слишком жарко, это сказалось бы отрицательно на живых организмах. Таков один из всего-навсего двух чувствительных критериев для проверки прошлых температур, которые приходят на ум. Другой критерий — это древние оледенения.

Но поскольку других данных нет, следует, я полагаю, все же заключить, что вопрос этот слишком сложен. Никаких определенных выводов о влиянии повышенной светимости Солнца в прошлом на температуру поверхности Земли сделать нельзя. Мы не можем с уверенностью сказать, насколько должна была измениться при этом температура поверхности Земли.

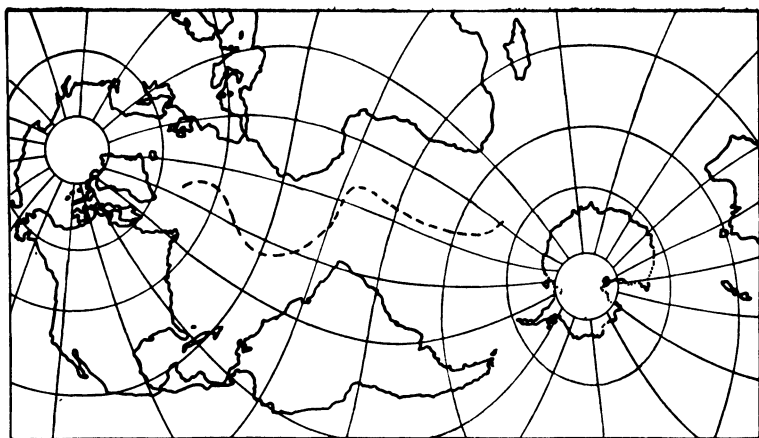
Что касается Луны, то в этом отношении все, конечно, гораздо яснее. Можно с полной определенностью утверждать, что в прошлом максимальная температура на поверхности Луны была больше, чем сейчас, и 4,5 млрд. лет назад была близка к 250°С.

## Расширяются ли Земля и Луна?

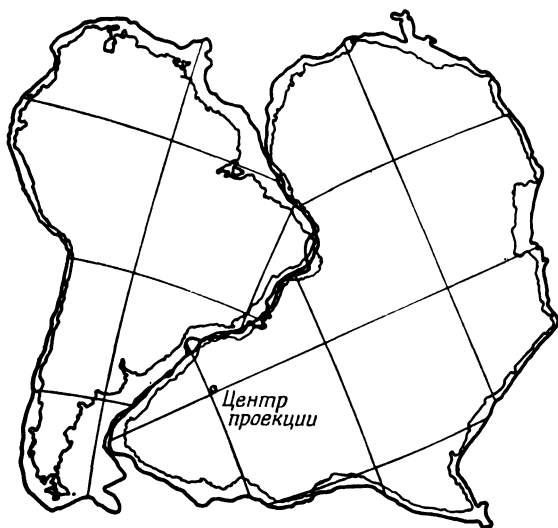
Еще один интересный геофизический эффект, возможный при уменьшении гравитационной «постоянной», — непрерывное расширение Земли. Действие на Землю ослабевающего тяготения впервые рассмотрено Йорданом [2]. Земля весьма существенно сжата гравитационными силами. По мере того как с течением времени эти силы ослабевают, Земля расширяется. При уменьшении гравитационной постоянной на  $3 \cdot 10^{-11}$  в год Земля должна расширяться настолько, чтобы длина ее экватора увеличивалась приблизительно на 150 км за млрд. лет. Эта скорость расширения вычислена на основании данных о степени сжатия Земли в настоящее время. Точно так же экватор Луны должен увеличиваться примерно на 1 км за млрд. лет.

Существуют ли какие-либо данные, говорящие о расширении Земли? Вошло в традицию объяснять процесс горообразования сжатием Земли с сопутствующими прогибами земной коры, в результате которых возникают горы. Но это классическое объяснение процесса горообразования в последние годы несколько утратило свою привлекательность, и многие геофизики уже не принимают его всерьез.

Имеется ряд замечательных фактов, которые можно рассматривать как указание на расширение Земли, но вопрос опять упирается в неоднозначность их интерпретации. На фиг. 8.7 представлена иллюстрация к одной старой классической проблеме, стоящей перед геофизиками. Эта иллюстрация принадлежит Кэри [11], которому удалось объяснить различные особенности геологического строения Земли очень большим ее расширением. Согласно Кэри, при расширении Земли образовался гигантский разлом вдоль теперешнего западного побережья Африки, в результате чего разошлись африканский и южноамериканский континенты. На фиг. 8.8 показано довольно хорошее взаимное соответствие границ этих двух континентов. Внешняя линия изображает подводную границу материка, т. е. границу континентального шельфа.



Фиг. 8.7. Карта береговых линий Америки и Европы — Африки относительно Средне-Атлантического хребта [11].



Фиг. 8.8. Карта соответствия между Южной Америкой и Африкой на изобате 2000 м, взятой вдоль края материкового щита [11].

Различные версии такого же рода предлагались и другими геологами, в частности Эдьедом, Вилсоном и Хизеном. Вилсон и Хизен высказали предположение, что расширением Земли объясняется мировая система долин провала, например срединная система разломов вдоль Средне-Атлантического хребта.

К сожалению, особенности геологического строения Земли, указанные Кэри, можно объяснить не только расширением Земли, а, например, и дрейфом материков. Эта старая теория, выдвинутая Вегенером (1915 г.) и Дю-Туа (1937 г.), получила более реальное основание, когда было признано, что наличие конвективного движения в мантии может привести к движению материковых масс. Кроме уже указанных геологических фактов, имеется и другое доказательство существования относительного перемещения материков. Результаты недавних исследований палеомагнетизма, многие из которых были получены и проанализированы Ранкорном, подтвердили наличие дрейфа материков. Для такого дрейфа не требуется расширения Земли, но, по-видимому, необходимо, чтобы имелаась конвективная мантия.

Можно утверждать, что совпадение береговых линий ничего не означает. Из всего множества изрезанных берегов всегда можно выбрать такие береговые линии, которые можно привести в совпадение. Но общее происхождение этих двух береговых линий весьма решительно подтверждается наличием Средне-Атлантического хребта высотой от 1 до 2 км, показанного на фиг. 8.7 пунктиром. Этот хребет лежит как раз на полпути между указанными границами материков. Он довольно точно отмечает срединный водораздел на основании бассейна Атлантического океана.

Как уже было сказано, вдоль этого хребта на большей части его протяжения простирается срединный разлом, ширина которого довольно велика и достигает нескольких километров. Картина такова, как будто Земля в этой своей части раздалась и образовалась трещина. Эта трещина в некоторых местах пропадает, но в общем проходит вдоль значительной части всей длины хребта.

Среднеокеанский хребет имеется не только в Атлантическом океане, но и во всех океанах. На фиг. 8.8 хребет продолжен вокруг Африки. Он переходит в Индийский океан и продолжается по окружности Тихого океана. Наконец, он связан с Калифорнийским заливом. В Калифорнийском заливе имеется разлом с севера на юг, продолжающийся на суше.

Еще один интересный факт, что Средне-Атлантический хребет проходит, по-видимому, непосредственно через Исландию. Здесь разлом выходит на сушу, и его можно непосредственно наблюдать. Местность здесь довольно сильно поднята. Наблюдаемая в Исландии вулканическая активность, очевидно, связана с тем, что Исландия является частью Средне-Атлантического хребта и что через нее проходит указанный разлом.

Я полагаю, что все сказанное весьма убедительно свидетельствует в пользу того, что когда-то эти континенты подходили ближе друг к другу и были каким-то образом друг с другом связаны. Но при таком объяснении мы наталкиваемся на противоречия. Кэри предполагает, что расширение Земли было очень велико — намного больше, чем это требуется одним только ослаблением тяготения. Из нашего предположения о малой скорости ослабления тяготения нельзя получить столь сильного расширения.

Изменение структуры вещества при приближении к центру Земли вряд ли может привести к непропорционально большому изменению ее радиуса. Обычно предполагается, что внутреннее ядро представляет собой твердое образование из железа и никеля, а внешнее ядро жидкое. Изменение  $G$  может сместить границу фаз и зону плавления. Но при этом резкие изменения вряд ли возможны. При расширении поглощается тепло и развиваются силы реакции, в результате чего расширение замедляется. Это не такой процесс, при котором может развиваться нестабильность. Очень большое расширение Земли является одной из серьезных проблем, связанных с идеями Кэри.

Против теории Кэри говорит и то, что если бы Земля расширялась со скоростью, о которой говорит Кэри, то

это привело бы к весьма заметному изменению в движении Луны относительно вращения Земли. Длительность дня возрастала бы в значительно большей степени, чем это наблюдалось в течение исторических эпох.

### Конвекция в мантии Земли

Объяснение дрейфа материков, основанное на конвекции в мантии, в значительной мере принадлежит Венинг-Майнесу. Согласно Венинг-Майнесу, при первоначальном конвективном охлаждении Земли было небольшое количество ячеек конвекции, становившихся все многочисленнее по мере образования земного ядра. В этой модели мантия Земли, которая обычно считается твердой, рассматривается как своего рода вязкая жидкость, находящаяся в постоянной конвекции. Как было указано выше, конвекция привела к раздвиганию материков и образованию таких океанов, как Атлантический. Предполагается, что это произошло в недавнем прошлом, и еще 100—200 млн. лет назад материки (согласно этой модели) составляли одно целое. Их разделение произошло лишь позднее.

Мы уже кратко отметили, что идея миграции материков, плавающих на мантии, восходит к Вегенеру, который объяснял периоды оледенения дрейфом материков к Северному полюсу, где они охлаждались, а затем дрейфовали назад. Получалось, что материки плавают, как куски дерева на поверхности спокойного пруда.

Об эффектах, происходящих вследствие конвекции в мантии, если такая конвекция существует, можно было бы сказать много любопытных вещей. Если вдоль среднеокеанского хребта действует ячейка восходящего течения в мантии, то там следует ожидать усиленного теплового потока. И в самом деле такой поток наблюдается. Кроме того, если на данном участке происходит поднятие вещества, то океанское дно в этом месте должно быть довольно молодым. В этом случае здесь должно быть мало осадочных пород. Как раз это весьма удивительным образом и наблюдается в отношении всех океанов, и там на самом деле отложений на дне мало. На



основании скорости накопления осадков в наше время можно было бы ожидать там гораздо большего их количества, чем наблюдаемое в действительности.

Как было уже упомянуто, недавние измерения палеомагнетизма довольно определенно указывают на продолжающийся дрейф материков. Но если дрейф материков, связанный с конвекцией в мантии, действительно существует, то, я думаю, было бы очень трудно сказать что-нибудь о всеобщем расширении. Эффекты такого расширения слишком малы по сравнению с эффектами конвекции и теряются на фоне последних.

Конвекция может быть и сама связана с уменьшением гравитационной постоянной. Дело в том, что при понижении давления внутри Земли понижается и точка плавления слагающих ее пород. По мере того как точка плавления приближается к фактической температуре, либо происходит локальное расплавление, либо вязкость просто уменьшается до такой степени, что начинается конвекция. Таким образом, уменьшение гравитационной постоянной может действительно сказываться на конвекции.

Третье объяснение, которое получил дрейф материков, состоит в следующем. Первоначально — сразу же после образования Земли — внутри нее происходила весьма интенсивная конвекция. Она была связана с перемещением твердой мантии или жидких масс, расплавленных за счет тепла, обусловленного исходной радиоактивностью, или тепла, выделявшегося при уплотнении, т. е. за счет гравитационной энергии. Конвекция в молодой Земле привела к образованию больших конвекционных ячеек, определивших распределение масс суши. Затем эти конвекционные ячейки исчезли, так что существующее сейчас распределение масс суши представляет собой «ископаемые остатки» первоначальных конвекционных ячеек. У такого объяснения имеются свои преимущества.

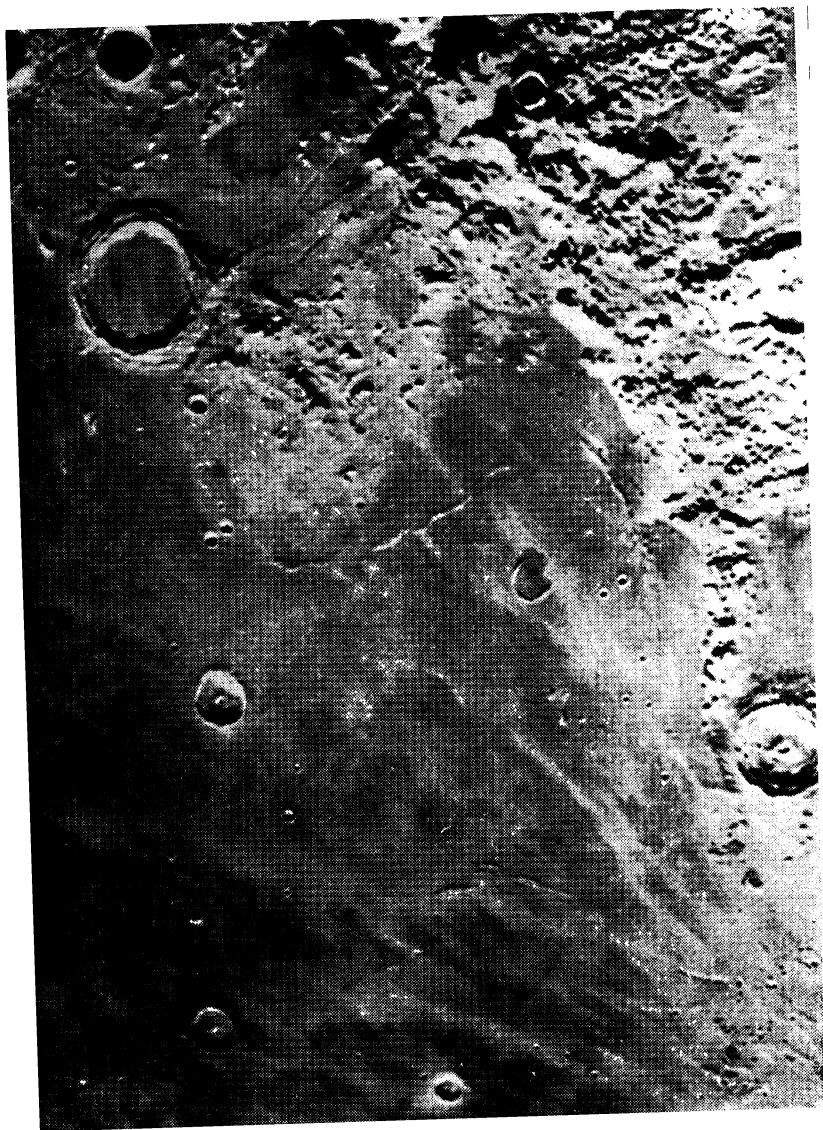
Если конвекции в настоящее время не происходит, то можно вполне удовлетворительно объяснить систему океанических разломов. Они могут быть вызваны всеобщим расширением, связанным с ослаблением тяготения. Если же конвекция продолжается и по сей день, то я

полагаю, что прямая роль всеобщего расширения в образовании океанических разломов невелика.

Подобным же образом дело обстоит и с расширением Луны с той лишь разницей, что в случае Луны нет оснований думать о конвекции. Если бы конвекция имела, то на поверхности Луны наблюдались бы разрывы и сдвиги. Можно было бы увидеть кратеры, разъехавшиеся надвое, когда одна половина сдвинулась относительно другой. Таких случаев, очевидно, нет. Поэтому Луна больше подходит для поисков проявлений расширения, хотя ее предполагаемое расширение намного меньше земного. В результате расширения на поверхности должны были появиться разломы или потоки магмы. Потоков магмы можно ожидать вследствие того, что расширение внутренней части Луны сдерживается наружными частями. Внутренние компоненты с низкими температурами плавления могут под давлением проходить наружу через разломы в твердой коре.

На фиг. 8.9 показан участок поверхности Луны с характерными для нее морями. Всем нам знакомы большие темные области на Луне, которые могли бы оказаться потоками лавы. Голд предположил, что это моря пыли. Я сомневаюсь в правильности такого «пылевого» объяснения. Ведь целый ряд кратеров затоплен и внутри и снаружи до одинакового уровня, насколько можно судить об этом, измеряя высоту по длине тени. Я не могу представить себе, как может установиться гидростатическое равновесие пыли, заполняющей кратер до нужной высоты. Скорее можно было бы думать о жидкости, которая подводится через трещины в поверхности от общего магматического бассейна, расположенного под поверхностью. Кроме того, в более приподнятых местах имеется множество старых бассейнов-ловушек, не обладающих специфическим темным цветом морей, что заставляет предположить о зависимости цвета прежде всего от различий в составе.

На фиг. 8.10 изображена другая деталь, считавшаяся одно время следом попадания метеорита. Я думаю, что быстро движущееся тело не может создать подобной «царапины», но должно вызвать мощную ударную волну, которая привела бы к возникновению кратерообразной



Ф и г. 8.9. Характерные для лунной коры моря и кратеры (из «Лунного атласа ВВС США», лист D3-а).

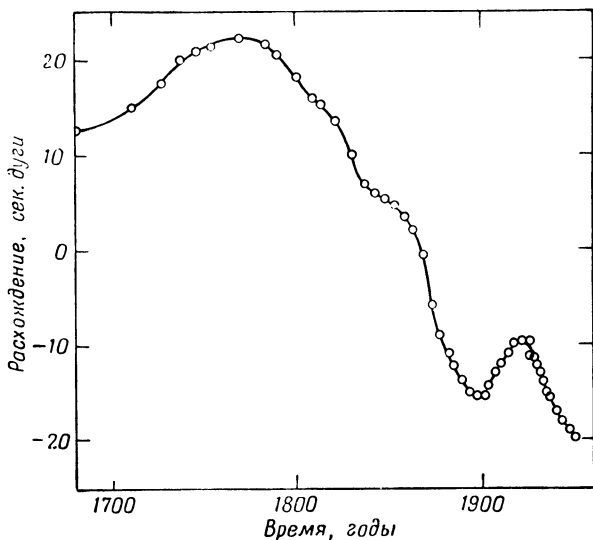


Ф и г. 8.10. Фотография, на которой видна «царапина» на лунной поверхности (из «Лунного атласа ВВС США», лист С2-в).

структуры. По моему мнению, более правдоподобно объяснить данное образование разломом в поверхности Луны, т. е. это трещина, заполненная изнутри магмой.

### Аномалии в движении Луны и во вращении Земли

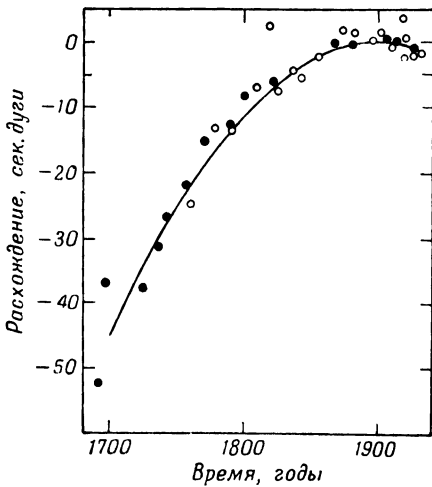
Ослабление тяготения с течением времени, кроме прочего, должно приводить к постепенному замедлению движения Луны по ее орбите вокруг Земли. Поэтому



Фиг. 8.11. Разность наблюдаемой и предвычисленной долготы Луны [12].

фактическое положение Луны должно отличаться от вычисленного в предположении постоянной величины  $G$ . На фиг. 8.11 дана кривая соответствующих расхождений для Луны, полученная на основании телескопических наблюдений за последние 200 лет [12]. Ошибка в положении Луны, т. е. разность наблюдаемой и вычисленной долготы, приведена как функция времени, определяемого исходя из вращения Земли. Эта ошибка

состоит по крайней мере из двух слагаемых. Одно из них соответствует беспорядочным флуктуациям, обычно приписываемым неправильности в скорости вращения Земли (еще одно возможное объяснение дается в гл. 12). Другое соответствует квадратичному эффекту, на который



Фиг. 8.12. Ошибка в положении, взятая с учетом весовых множителей [12].

Светлые кружки соответствуют данным для Солнца, темные кружки — данным для Меркурия. Результаты, относящиеся к периоду до 1740 г., основаны на экстраполированной долготе Солнца.

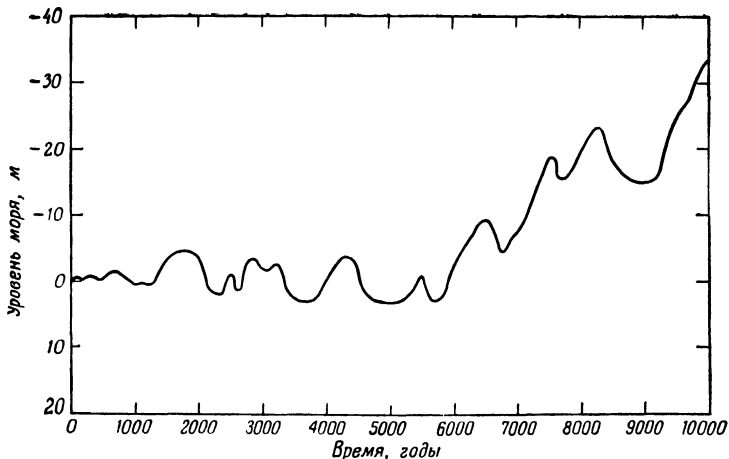
указывает параболическая форма кривой. Этот квадратичный эффект, по крайней мере частично, связан с приливным взаимодействием между Землей и Луной, замедляющим вращение Земли и приводящим к переходу Луны на орбиту со все большим радиусом и все большим периодом обращения. Флуктуации, вызванные неправильностями вращения Земли, можно исключить и рассматривать тогда лишь приливное замедление движения Луны, для чего следует при наблюдениях Луны учитывать также наблюдаемое положение Солнца и Меркурия.

На фиг. 8.12 показано, как выглядит результат такой обработки данных. Кривая представляет собой теперь дугу параболы без флуктуаций, так как неправильности

вращения Земли уже исключены. По этой кривой можно определить, с какой скоростью замедляется движение Луны вследствие одного лишь приливного взаимодействия. Приливные эффекты могут быть вычислены непосредственно по данным наблюдений.

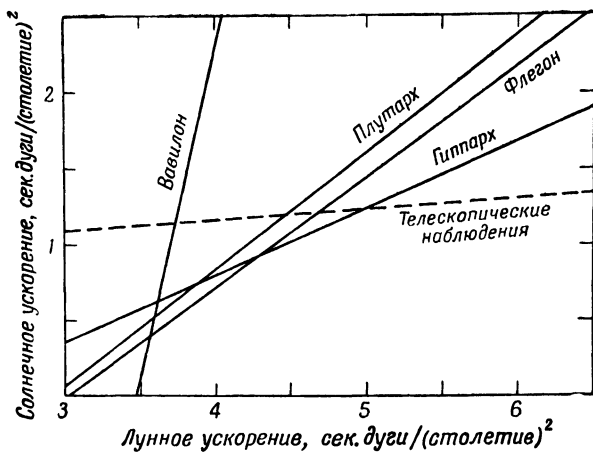
Замедление движения Луны благодаря ее приливному взаимодействию с Землей вызывает также замедление вращения Земли. Но это не единственное приливное воздействие на вращение Земли, которое необходимо учитывать. Имеются и другие существенные приливные эффекты. На скорость вращения Земли влияют два других приливных взаимодействия. Кроме приливного действия Луны на Землю, на вращении Земли сказываются приливы на Земле, вызванные Солнцем. Существует также приливное действие в атмосфере. Как уже упоминалось, телескопические наблюдения дают приливное замедление движения Луны вместе с результирующим замедлением скорости вращения Земли. Принимая, что приливное замедление вращения Земли пропорционально силе, вызывающей приливы, можно вычислить замедление вращения Земли под действием Солнца. Поддаются также вычислению и приливные воздействия на вращение Земли со стороны атмосферы на основании измеренных флуктуаций атмосферного давления. Сопоставляя эти эффекты, можно вычислить ожидаемое замедление скорости вращения Земли вследствие всех приливных взаимодействий.

Скорость вращения Земли должна изменяться и в связи с флуктуациями уровня мирового океана. На фиг. 8.13, заимствованной у Фэйрбриджа [13], представлены имеющиеся в нашем распоряжении данные относительно флуктуации уровня океана, от которого зависит момент инерции Земли. Уровень мирового океана в прошлом определен по содержанию радиоактивного изотопа углерода в раковинах прибрежных моллюсков. Древние наблюдения затмений, из которых можно делать заключения о скорости вращения Земли в прошлом, относятся главным образом к периоду, когда уровень океана менялся особенно быстро. Мы должны, таким образом, принимать во внимание эффекты изменения уровня океана, происходившего в тот период времени.



Ф и г. 8.13. Изменение уровня мирового океана (в метрах) в историческую эпоху [13].

Время отсчитывается от наших дней в прошлое.



Ф и г. 8.14. Результаты исследования Фотерингэмом [14] непротиворечивых величин для  $f_{\text{л}}/T^2$  и  $f_{\text{с}}/T^2$ , соответствующих лучшим из древних наблюдений ряда солнечных затмений.



Если в результате таяния арктических и антарктических льдов уровень мирового океана поднимется на 1 см, то скорость вращения Земли должна уменьшиться на  $1 \cdot 10^{-9}$ , если учесть эффект упругой деформации Земли, но пренебречь изостатической поправкой для земной коры. Но, по-видимому, было бы правильнее предположить, что изостатическая поправка на компенсацию изменения формы Земли существенна, и считать, что скорость вращения Земли изменяется пропорционально изменению уровня океана, причем коэффициент пропорциональности требуется специально определить.

На фиг. 8.14 представлены данные наблюдений, на основании которых следует определять величину векового ускорения вращения Земли и движения Луны. Эти данные должны быть собраны за длительные периоды времени, так как скорость вращения Земли изменяется неправильно. Поэтому приходится обратиться к классическим наблюдениям затмений вавилонянами и греками. Каждое наблюдение затмения, например описанное Гиппархом, дает линейную связь между вековыми ускорениями Солнца и Луны. Вековое «ускорение» Солнца служит мерой увеличения скорости вращения Земли. Таковы, например, прямые, изображенные на фиг. 8.14. Если вековое ускорение Солнца служит мерой лишь изменения скорости вращения Земли, то ускорение Луны связано с двумя эффектами — собственно ускорением Луны и замедлением часов, проверяемых по вращению Земли.

При таком анализе постепенное замедление движения Луны и планет, связанное с ослаблением гравитационного взаимодействия, должно проявляться в форме добавочного увеличения скорости вращения Земли, остающегося необъясненным после того, как уже учтены все факторы, влияющие на это вращение. Рассматривая совместно данные современных телескопических наблюдений и информацию, выведенную из наблюдений затмений древними, можно определить вековое ускорение Солнца, а значит, и эффективное среднее ускорение вращения Земли. Исключая из полученного эффекта влияние трех приливных ускорений, определенных на основе данных телескопических наблюдений и известных флук

туаций барометрического давления, мы приходим к остаточному расхождению, порядок которого довольно хорошо соответствует предполагаемым результатам ослабления тяготения. Оказалось, что в случае четырех наилучших наблюдений затмений, рассмотренных Фотерингэмом, — единственных, представляющих действительную ценность для исследования, — противоречия исчезают лишь при учете флуктуаций уровня мирового океана. Полученная в результате таких вычислений линейная зависимость скорости вращения Земли от вариаций уровня океана позволяет производить поправку на флуктуации уровня океана. При учете этой поправки избыточное ускорение вращения Земли оказывается еще более значительным.

К сожалению, есть один пункт, в отношении которого у нас нет полной уверенности, а именно вопрос о том, что происходит с земной корой. Земная кора могла в течение весьма длительного периода времени взаимодействовать с мантией, вследствие чего момент количества движения должен был передаваться от коры к остальной массе Земли. Однако дрейф магнитного поля Земли в западном направлении показывает, что кора вращается медленнее, а не быстрее. Под действием магнитных сил (благодаря вихревым токам, индуцируемым в мантии) вращение Земли должно замедляться, а не ускоряться.

### **Происхождение неисчезающего магнитного поля Юпитера**

В заключение я хотел бы отметить еще один весьма любопытный эффект, в котором, по-моему, может проявляться переменная гравитация. Этот эффект связан с процессами внутри Юпитера.

Объяснение существования магнитного поля у Юпитера может составить целую проблему. Время релаксации электрических токов внутри Юпитера (до их полного исчезновения) достаточно мало для того, чтобы у Юпитера уже не оставалось первоначального маг-

нитного поля. Поэтому магнитное поле Юпитера следует объяснять магнитогидродинамическим перемешиванием внутренней части планеты, при котором генерируется магнитное поле. Правда, для этого требуется весьма значительная энергия. Дело в том, что внутренняя часть Юпитера, насколько это известно, состоит из вырожденного водорода, обладающего высокой теплопроводностью. Ввиду этого очень затруднительно вызвать конвективные токи масс с помощью теплового потока. Во внешней оболочке планеты конвекция может происходить, но эта оболочка, вероятно, обладает низкой электропроводностью.

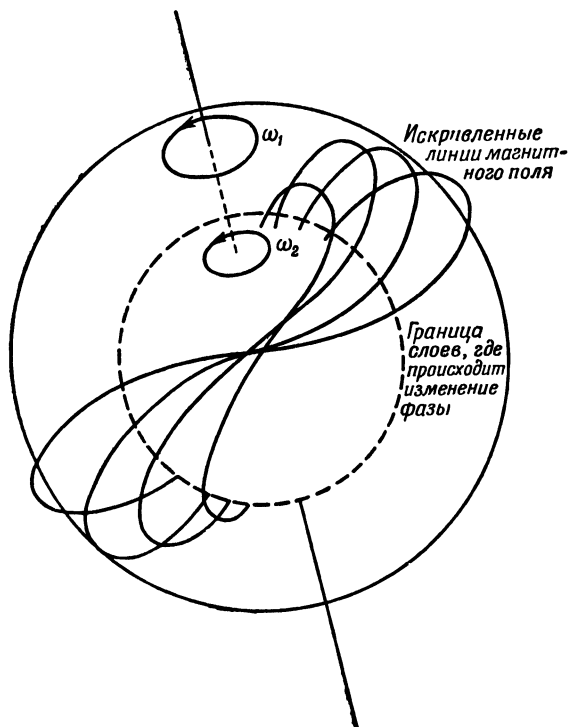
Возможно, что у Юпитера имеется невырожденное твердое ядро из тяжелых элементов, масса которого в несколько раз превышает земную. Такое предположение было сделано Де-Маркью. Но какой бы радиоактивностью ядро ни обладало, оно вряд ли может дать поток тепла, достаточный для образования такого градиента температуры, чтобы во внешней части металлоподобной фазы водорода происходила конвекция.

Можно предположить, что магнитное поле создается внутренним железным ядром, но это не соответствует известным свойствам поля у Юпитера. Радиоастрономические измерения показывают, что это поле не имеет ничего общего с магнитным полем центрального диполя. Оно смещено в сторону и довольно сильно локализовано. Поэтому источник магнитного поля не должен находиться в центре планеты.

Наличие потоков, исходящих из ядра, можно объяснить изменением гравитационной постоянной. Для этого нужно предположить, что на некотором расстоянии от центра Юпитера — на 0,6 или 0,7 его радиуса — имеется область фазового перехода вырожденного водорода в невырожденный. При изменении  $G$  должна изменяться и глубина, на которой происходит такой фазовый переход. Глубина, на которой происходит стык фаз и, следовательно, плотность претерпевает скачок, должна увеличиваться по мере ослабления тяготения.

Такое изменение плотности приводит к тому, что скорость вращения внутренней части Юпитера отлична от скорости вращения его внешней части. Момент инер-

ции вещества, претерпевающего фазовый переход, изменяется так, что движение планеты уже не соответствует движению твердого тела. В силу закона сохранения момента количества движения внутренняя часть планеты вращается быстрее внешней части.



Фиг. 8.15. Схема, поясняющая возможность возникновения магнитного поля Юпитера вследствие вращения одного слоя планеты относительно другого.

Какая энергия может выделяться при таком движении? Этот вопрос исследовался Пиблзом. Он установил, что этой энергии намного больше, чем может дать радиоактивность. Энергия может выделяться за счет магнитного торможения относительного вращения двух

взаимодействующих проводящих шаровых слоев. Кроме того, при таком движении возможно тангенциальное скольжение слоев, в результате которого возбуждается магнитное поле.

Магнитные силовые линии, выходящие наружу через сферу фазового перехода по радиусу, должны идти далее, закручиваясь, как нить на клубке, пока не появится значительное магнитное давление и напряжение. Возникающие при этом магнитные силы и перепутанность магнитных силовых линий могут привести к турбулентности в пограничной области.

Легко сообразить, что при наличии таких процессов они могут играть важную роль в перемешивании внутри Юпитера, поскольку связаны с вращением одних слоев относительно других.

Я не могу точно сказать, каким образом в данном случае возникает магнитное поле. Трудно понять, как вообще магнитное поле может поддерживаться в каком-либо небесном теле. Но я могу представить себе случай, когда с тангенциальным скольжением сферических слоев связано магнитное поле, не являющееся аксиально-симметричным. На границе движущихся слоев могут существовать конвекционные и турбулентные вихри (фиг. 8.15).

Любопытно и, может быть, существенно, что Юпитер действительно обладает различными скоростями вращения. Наблюдаемые на нем детали оказываются вращающимися с разными скоростями, зависящими от их широты на планете. Магнитное поле также обладает своей собственной вполне определенной скоростью вращения, примерно равной скорости вращения видимых объектов на высоких широтах.

Эффекты, рассмотренные в данной лекции, не доказывают факта изменения гравитационной постоянной во времени, но в то же время не приходит в голову и ни одного эффекта, который бы исключал возможность такого изменения. Напротив, очень часто изменением  $G$  можно объяснить различные непонятные явления в астрономии и геофизике.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc., A165, 199 (1938).
2. Jordan P., Schwerkraft und Weltall, Braunschweig, 1955.
3. Peebles J., Dicke R. H., Phys. Rev., 127, 629 (1962).
4. Peebles J., Ann. of Phys., 20, 240 (1962).
5. Brans C., Dicke R. H., Phys. Rev., 124, 925 (1961).
6. Dicke R. H., Phys. Rev., 125, 2163 (1962).
7. Arp H., Science, 134, 810 (1961).
8. Crampin J., Hoyle F., Roy. Astron. Soc. Monthly Notices, 122, 27 (1961).
9. Dicke R. H., Nature, 194, 329 (1962).
10. Cameron A. G. W., Phys. Chem. Earth, 3, 199 (1960).
11. Carey W. S., в сборнике Continental Drift: A Symposium, University of Tasmania, 1958, p. 177.
12. Munk W. H., MacDonald G. J. F., The Rotation of the Earth, Cambridge, 1960.
13. Fairbridge R. W., Phys. Chem. Earth, 4, 158 (1961).
14. Fotheringham J., Roy. Astron. Soc. Monthly Notices, 80, 578 (1920).

# 9

## Принципы относительности и роль координат в физике

ДЖ. АНДЕРСОН

### Вопрос о принципе относительности

Принято считать, что в формулировке общей теории относительности важную роль играют два принципа. Первый — принцип эквивалентности — обычно принимают без возражений<sup>1)</sup>. Второй же — общий принцип относительности (или, как его иногда называют, принцип общей ковариантности), — напротив, послужил предметом горячих дискуссий уже тогда, когда его впервые высказал Эйнштейн в 1915 г. Первым выступил против этого принципа Кречман [1], а в последнее время он вновь весьма критически обсуждался Фоком в его недавно вышедшей книге [2].

Общий принцип относительности представляет собой в сущности утверждение о том, что некоторый класс физических теорий обладает определенными свойствами инвариантности. Поэтому он в ряде отношений представляет интерес для физика-теоретика. Важнее всего, по-видимому, что принцип инвариантности, связанный с некоторой группой преобразований, обычно накладывает ограничения на возможные типы теорий, которые можно сформулировать, не нарушая этого принципа. Поэтому было бы интересно исследовать этот принцип с

---

<sup>1)</sup> Это утверждение устарело. В настоящее время существует много работ (например, ряд статей В. А. Фока, Дж. Л. Синга и др.) и соображений, которые позволяют думать, что этот принцип, взятый сам по себе, не является столь необходимым для обоснования теории Эйнштейна. — *Прим. ред.*

тем, чтобы выявить те ограничения, которые он накладывает на возможный вид уравнений общей теории относительности.

В 1918 г. Нётер [3] показала, что существует весьма тесная связь между свойствами инвариантности некоторой данной теории, уравнения которой следуют из вариационного принципа, и законами сохранения, действующими в этой теории. Рассмотрим сначала теорию, инвариантную относительно группы, элементы которой определяются конечным числом параметров, т. е. инвариантную относительно группы Ли. В этом случае каждому параметру соответствует уравнение непрерывности, выполняющееся при реальном движении рассматриваемой системы. Более того, если эта система в некотором смысле замкнута, то полученное уравнение непрерывности может быть превращено в закон сохранения, т. е. будет справедливо утверждение, что некоторая динамическая переменная является интегралом движения.

Когда речь идет о теории, инвариантной относительно группы, элементы которой определяются одной или несколькими произвольными функциями пространственно-временных координат (такова, например, группа калибровочных преобразований электродинамики или группа произвольных преобразований координат в общей теории относительности), соответствующая взаимосвязь уже не так ясна. Каждой произвольно выбираемой функции соответствует тогда свое уравнение непрерывности. Но теперь эти уравнения являются тождествами, и они удовлетворяются переменными нашей теории вне зависимости от того, описывают ли изменения этих переменных действительное движение или нет. Хотя из этих тождеств и можно получить большое число уравнений непрерывности, удовлетворяющихся лишь в случае действительных движений нашей системы, оказывается, что они, за исключением отдельных узкочастных случаев, не дают сохраняющихся величин. Чтобы лучше понять этот тип законов сохранения, может быть полезно глубже разобраться в инвариантных свойствах теории.

Наконец, как мы увидим, общий принцип относительности тесно связан с определением координат в ос-



новном пространственно-временном многообразии, а потому может пролить свет на ту роль, которую играют координаты и процесс их выбора на многообразии для физики.

## Две формулировки частного принципа относительности

Прежде чем приступить к обсуждению общего принципа относительности, полезно кратко остановиться на более знакомом принципе, а именно частном принципе относительности. Уже здесь все выглядит не так очевидно, как это толкуется в некоторых книгах. Основная интуитивная мысль достаточно проста — у нас нет никаких оснований предпочесть из физических соображений какую-то одну из систем отсчета, движущихся равномерно и прямолинейно относительно друг друга. Неясность этого определения связана с внешне безобидным выражением «из физических соображений». Взяв почти любую физическую систему, например сосуд с газом или электрон, мы всегда можем найти такую систему отсчета, которая будет отличаться от всех других систем, движущихся равномерно и прямолинейно относительно друг друга, — это система, в которой наша физическая система покоится. Попытаемся поэтому уточнить, что такое «физические соображения».

Представим себе две одинаково построенные системы, например два электрона или два тождественных ящика с газом, движущиеся относительно друг друга равномерно. Назовем их системой *A* и системой *B*. Представим себе двух наблюдателей или две системы отсчета *A* и *B*, такие, что физическая система *A* находится в покое относительно системы отсчета *A*, а физическая система *B* находится в покое относительно системы отсчета *B*. Тогда частный принцип относительности накладывает следующее требование: если начальное состояние системы *A* с точки зрения наблюдателя *A* такое же, как начальное состояние системы *B* с точки зрения наблюдателя *B*, то конечное состояние системы *A* с точки зрения наблюдателя *A* должно быть таким же, как и конечное состояние системы *B* с точки зрения

наблюдателя *Б*. Отметим, что наблюдатель *А* никогда не рассматривает систему *Б* и наоборот, наблюдатели только сравнивают результаты, которые они получают при наблюдениях каждый в своей собственной системе. Если бы наблюдатель *А* мог производить измерения в системе *Б*, то он, вообще говоря, получил бы совершенно иные результаты, чем наблюдатель *Б* при измерениях в системе *Б*. Именно в таком смысле и следует понимать выражение «физические соображения» в нашей первой формулировке частного принципа относительности. Теперь мы можем перефразировать первоначальную формулировку следующим образом: не существует такой физической системы или состояния этой системы, которые вели бы себя неодинаково в любых двух системах отсчета, движущихся относительно друг друга прямолинейно и равномерно.

Есть и другая формулировка, на первый взгляд кажущаяся совершенно не связанной с первой. В этой формулировке утверждается следующее: законы физики можно выразить в такой форме, что они не будут изменяться при действии преобразования Лоренца на величины, входящие в эти законы. Для того чтобы можно было сослаться на этот принцип, назовем его принципом частной ковариантности. В первой формулировке ничего не говорилось о том, как различные физические величины преобразуются при преобразовании Лоренца, — мы просто не упоминали о лоренцовых преобразованиях. Да и не всегда очевидно, имеет ли смысл говорить о лоренцовом преобразовании той или иной конкретной физической величины.

Чтобы понять разницу между двумя приведенными формулировками, рассмотрим две разные физические системы и соответствующие законы. Пусть одной системой будет электромагнитное поле, а другой — ящик с газообразным водородом. С электромагнитным полем мы связываем, конечно, уравнения Максвелла (законы электромагнетизма). Они справедливы во всех возможных вариантах электромагнитного поля: и в случае поля электрона, покоящегося относительно наблюдателя, и в случае поля электрона, движущегося равномерно или даже произвольным образом. Кроме того, способ изме-

рения электромагнитного поля не зависит от измеряемого поля. Чтобы определить электрическое поле в некоторой точке, следует поместить в эту точку пробное тело и измерить действующую на него силу. Другой наблюдатель, движущийся равномерно относительно предыдущего, измеряет наблюдаемое им электрическое поле точно таким же образом. Поэтому правомерен вопрос: как связаны между собой результаты таких измерений для одного и того же поля? Такая взаимосвязь может быть в принципе проверена путем наблюдения. Посмотрим теперь, выполняется ли частный принцип относительности в двух указанных формах в случае электромагнитного поля и уравнений Максвелла.

В качестве двух систем, фигурирующих в первой формулировке, можно взять один электрон, покоящийся относительно  $A$ , и другой, покоящийся относительно  $B$ . Все требования принципа сводятся тогда к тому, чтобы поле электрона  $a$ , измеренное наблюдателем  $A$ , было таким же, как поле электрона  $b$ , измеренное наблюдателем  $B$ . Но поскольку наши наблюдатели могут измерять всевозможные электромагнитные поля, электроны можно поменять ролями. Физической системой, исследуемой  $A$ , будет тогда электрон, покоящийся относительно наблюдателя  $B$ , а системой, исследуемой  $B$ , будет электрон, покоящийся относительно  $A$ . И здесь результаты измерения полей наблюдателями  $A$  и  $B$  должны совпадать. Аналогичное соответствие должно иметь место для любых систем зарядов и полей. Но физический закон — это утверждение о том, как ведут себя все физические системы, обладающие некоторыми общими свойствами (в самом деле, физический закон как раз и обнаруживает наличие таких общих качеств). Вместе с тем все электромагнитные системы, наблюдаемые  $A$ , образуют множество, совпадающее с множеством электромагнитных систем, наблюдаемых  $B$ . Отсюда вытекает, что физические законы, управляющие этими системами, будучи выражены наблюдателем  $B$  через измеряемые им поля, должны в точности совпадать с законами, выраженными наблюдателем  $A$  через поля, наблюдаемые уже им, иначе частный принцип относительности не будет выполнен. Кроме того, поскольку можно

сопоставлять величины, измеряемые наблюдателями  $A$  и  $B$  для одного и того же конкретного поля, можно говорить и о преобразовании законов, сформулированных  $A$ , в законы, сформулированные  $B$ . Так как эти две системы законов имеют один и тот же вид, преобразование от одного поля к другому должно быть именно таким, чтобы этот вид сохранялся. Мы пришли, таким образом, к уже сформулированному выше утверждению о частной ковариантности. Хорошо известно, что форма уравнений Максвелла сохраняется не при преобразованиях Галилея, а именно при преобразованиях Лоренца, хотя первая формулировка частного принципа относительности в равной мере допускает оба вида преобразований.

Подведем итоги всего сказанного относительно электромагнитного поля. Наблюдатель  $A$  рассматривает многообразие всех электромагнитных полей и видит, что они подчиняются системе законов, которые можно записать в виде уравнений

$$F_{A, \nu}^{\mu\nu} = -j_A^{\mu} \quad (1)$$

и

$$F_{A\mu\nu, \rho} = 0, \quad (2)$$

где  $F_A^{\mu\nu}$  — обычная антисимметричная матрица, составленная из  $E_A$  и  $B_A$  — напряженностей электрического и магнитного полей, измеряемых  $A$ . Матрица-столбец  $j_A^{\mu}$  построена из плотностей тока и заряда, измеряемых  $A$ . Я называю эти величины матрицами, так как на данном этапе я определяю лишь их алгебраические, но не трансформационные свойства. Подобным же образом, наблюдатель  $B$  рассматривает многообразие всех электромагнитных полей и видит, что они подчиняются системе законов, которые, если справедлив частный принцип относительности, должны иметь тот же вид, что и уравнения (1) и (2), только  $A$  следует заменить на  $B$ . Кроме того, ввиду общности многообразия полей, измеряемых  $A$  для подтверждения уравнений (1) и (2), и многообразия полей, рассматриваемых  $B$ , должна существовать связь как между  $F_A^{\mu\nu}$  и  $F_B^{\mu\nu}$ , так и между результатами измерения наблюдателями  $A$  и  $B$  в про-

странстве и времени — такая связь, чтобы при подстановке в уравнения (1) и (2) величин, измеренных  $A$  и выраженных через величины, измеренные  $B$ , получались правильные уравнения, удовлетворяемые величинами, измеряемыми  $B$ . Правильный закон преобразования, связывающий величины, относящиеся к наблюдателям  $A$  и  $B$ , вывели Пуанкаре [4] и Эйнштейн [5]. Для измерений в пространстве и времени эти преобразования имеют вид

$$x_B^\mu = \alpha_\nu^\mu x_A^\nu + b^\mu. \quad (3)$$

Здесь  $b^\mu$  — совокупность четырех чисел, а  $\alpha_\nu^\mu$  — матрица, обладающая свойствами

$$\alpha_\rho^\mu \alpha_\sigma^\nu \eta_{\mu\nu} = \eta_{\rho\sigma}, \quad (4)$$

где  $\eta_{\mu\nu}$  — метрика Минковского в декартовой системе координат, имеющая вид

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Тогда напряженности связаны соотношением

$$F_B^{\mu\nu} = \alpha_\rho^\mu \alpha_\sigma^\nu F_A^{\rho\sigma}. \quad (6)$$

Подчеркнем еще раз, что законы преобразования (3) и (6), хотя они и выведены из того требования, чтобы уравнения Максвелла (1) и (2) сохраняли при этих преобразованиях свой вид, должны быть, по крайней мере в принципе, объектом непосредственной экспериментальной проверки. Мы видим, таким образом, что электромагнитные поля ведут себя в согласии с обеими формами частного принципа относительности.

Рассмотрим теперь тот случай, когда исследуемой системой являются ящики с газом. Наблюдатель  $A$  рассматривает всевозможные состояния газа, для которых он может измерить такие термодинамические характеристики, как температура, давление и энтропия, и из результатов своих измерений делает заключение о том, что эти состояния газа подчиняются первому и второму

началам термодинамики. Наблюдатель *Б* подобным же образом исследует свои ящики с газом, и, если частный принцип относительности справедлив, он должен обнаружить, что измеряемые им термодинамические величины точно так же подчиняются законам термодинамики, как и измеренные *А*.

Однако между случаями электродинамики и термодинамики имеется существенное различие. Термодинамические величины имеют смысл лишь тогда, когда их рассматривают в системе отсчета, в которой физическая система покоится. Поэтому результат любого измерения температуры газа, равномерно текущего мимо наблюдателя, или, что то же самое, измерения температуры наблюдателем, который бежит мимо покоящейся системы с газом, держа термометр в руке, будет, вообще говоря, зависеть от типа применяемого термометра, от его ориентации относительно направления движения и т. п. Это, конечно, не означает, что на основании своих измерений в движущейся физической системе наблюдатель не может заключить, какова ее температура в состоянии покоя. Но он вынужден выражать результаты своих наблюдений через «температуру покоя» системы, ибо только она характеризует термодинамическое состояние этой системы. Поэтому с физической точки зрения говорить о трансформационных свойствах термодинамических величин не имеет смысла, так как соответствующие преобразования никогда даже в принципе нельзя проверить путем наблюдения. Следовательно, требование частной ковариантности в применении к термодинамическим системам лишено физического содержания. Хотя и можно *определить* законы преобразования термодинамических величин таким образом, чтобы законы термодинамики сохраняли свой вид при этих преобразованиях, формально подчиняясь принципу частной ковариантности, такая процедура была бы физически бессодержательна. Она уже реализовалась в виде частноковариантной формулировки термодинамики, предпринятой Планком [6], Эйнштейном [7], а позднее разработанной Толменом [8].

Хотя в указанном смысле ковариантная формулировка термодинамики физически бессодержательна, я

хотел бы подчеркнуть, что релятивистский подход к идеальному газу — дело совсем другое. Здесь не ставится вопрос о трансформационных свойствах различных термодинамических величин и считается, что мы все время работаем в такой системе отсчета, где в целом газ покоится. Мы ищем лишь новых черт в уравнениях состояния газа, учитывающих, что молекулы или атомы газа движутся с релятивистскими скоростями. Случай идеального релятивистского газа впервые рассмотрел Ютнер [9]<sup>1)</sup>. Ему удалось получить функцию распределения  $Z$  в виде

$$Z = e^{-H/kT} dx_1 \dots dx_{2N}, \quad (7)$$

где  $H$  — энергия системы, зависящая от  $2N$  переменных  $x_1, x_2, \dots, x_{2N}$ . Это обычное выражение для функции распределения, которое можно найти во всех книгах по статистической механике. Вместо того чтобы использовать здесь  $H$  в форме  $\sum_i 1/2 p_i^2$ , соответствующей идеальному газу, Ютнер воспользовался релятивистским выражением

$$H = \sum_i (m_0^2 c^4 + c^2 p_i^2)^{1/2}. \quad (8)$$

Такие термодинамические величины, как давление и внутренняя энергия, выводятся обычным образом, через соответствующие производные от  $(\ln Z)/kT$ . Заметим, что при этом ничего не предпринимается в направлении ревизии обычной нерелятивистской формулировки статистической механики. Такая ревизия, вероятно, могла бы потребоваться при рассмотрении систем, компоненты которых движутся с релятивистскими скоростями, однако частный принцип относительности не в состоянии помочь нам в поисках путей соответствующего изменения теории. Единственное указание, вытекающее из этого принципа, состоит в необходимости замены нерелятивистского выражения для  $H$  релятивистским выражением (8).

Какие же выводы следуют из всего сказанного о частном принципе относительности? Прежде всего то,

<sup>1)</sup> См. также [10].

что он отнюдь не является утверждением о различных физических системах, которые могут быть реализованы в пространственно-временном многообразии. Данный принцип очень мало говорит о том, каковы должны быть физические системы и каков вид законов, которым они должны подчиняться. Это особенно справедливо в случае систем, для которых можно однозначно выделить систему покоя, таких, как наш ящик с газом. Тогда первая формулировка принципа ничего нам не говорит, а вторая выполняется тривиальным и нефизическим образом, требуя просто, чтобы при преобразовании различных термодинамических величин вид законов термодинамики сохранялся неизменным. Даже для систем, аналогичных электромагнитным полям, когда нет ограничений в отношении того, какие поля измеряются какими наблюдателями, наш принцип несет очень мало информации, если дополнительно не потребовать, чтобы рассматриваемые законы были *локальными* (были доступны проверке исключительно путем измерений, произведенных в непосредственной близости от данной точки) и чтобы законы преобразования физических величин, фигурирующих в этих законах, также были локальными в том же смысле. Если же теперь потребовать, чтобы величины, описывающие наши физические системы, преобразовались по линейному и однородному закону (иначе говоря, чтобы это были тензоры или тензорные плотности, спиноры и т. д.), то мы тем самым очень жестко ограничим возможные типы систем и физических законов природы.

Закончим наш анализ частного принципа относительности его выражением в терминах геометрии. Прежде всего отметим, что в силу постулата о независимости скорости света от движения источника в любой точке пространственно-временного многообразия должен существовать инвариантный геометрический объект — световой конус. Такой объект имеется в метрической геометрии и является местом всех точек в окрестности некоторой данной точки, расположенных на световых (нулевых, изотропных) расстояниях относительно этой точки. Пусть  $x^\mu$  — координаты рассматриваемой точки. Тогда



все другие точки  $x^\mu + dx^\mu$ , лежащие на световом конусе с вершиной в  $x^\mu$ , соответствуют равенству

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu = 0, \quad (9)$$

где  $g_{\mu\nu}(x)$  — метрика в точке  $x^\mu$ . Частный принцип относительности требует тогда, чтобы пространство — время было однородным и изотропным. Следовательно, существует десятипараметрическая группа движений, относительно которой метрика неизменна в смысле, указанном в гл. 2, посвященной римановой геометрии. Отсюда можно заключить, что геометрия мира является плоской и тензор кривизны удовлетворяет равенству

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = 0 \quad (10)$$

во всем пространстве. Поэтому всегда можно найти такую систему координат, в которой метрика повсюду равна матрице  $\eta_{\mu\nu}$ , компоненты которой заданы формулой (5). Движения, допустимые в такой геометрии, приобретают в данной системе координат вид (3). Физические объекты изображаются тогда геометрическими объектами геометрии Минковского, а физические законы представляют собой констатацию соотношений между различными геометрическими объектами. Физика обращает особое внимание на локальные геометрические объекты, подчиняющиеся линейным и однородным трансформационным законам, и на локальные соотношения, которые мы можем установить между ними. Следует подчеркнуть, что все наши утверждения по своей природе являются геометрическими и выполняются независимо от того, в какой системе координат мы их выражаем.

## Общая ковариантность как тривиальное обобщение

Перейдем теперь к общей теории относительности. Как я уже отметил в начале главы, до настоящего времени сохраняется множество весьма различных подходов к этому вопросу. Фок [2], например, заявил даже: «Что касается «общего принципа относительности», то такого принципа просто не существует, и в общей

теории относительности относительности меньше, чем в частной теории». В поддержку своего вывода он приводит то обстоятельство, что если в плоском пространстве — времени Минковского существует десятипараметрическая группа движений, а именно группа Лоренца, то общая риманова метрика не позволяет связать с ней вообще никакой подвижности. Хотя это и верно, но совершенно не относится к делу, так как в общей теории метрика уже не считается данной априори, как это было в случае частной теории относительности, а рассматривается как динамическая величина наряду с другими полями, существующими в природе. В самом деле, как мы увидим, именно таково требование общей теории относительности, вынуждающее нас подходить к метрике указанным образом. Возражение Фока равносильно тогда утверждению, что электродинамика не удовлетворяет частному принципу относительности, так как поле электрона зависит от движения наблюдателя относительно этого электрона. Другими словами, конкретная метрика в такой же мере не является в общей теории относительности законом природы, как и конкретное электромагнитное поле в частной теории относительности.

Как и в частной теории относительности, в общей теории имеются две различные формулировки принципа относительности. Одна из них аналогична требованию частной ковариантности, и в этой формулировке мы будем называть принцип относительности принципом общей ковариантности. Этот принцип утверждает, что законы физики могут быть записаны в форме, не изменяющейся, когда входящие в них различные величины подвергаются произвольному преобразованию координат. Подобно принципу частной ковариантности принцип общей ковариантности сам по себе лишен физического содержания. Возражая против этого принципа, утверждают, что любую систему уравнений, инвариантных в смысле частной теории относительности, можно переписать в общековариантной форме, произведя преобразование координат из декартовой системы, в которой метрика некоторым образом зависит от пространственных и временных координат. Такая переписка этих за-

конов сводится тогда к замене  $\eta_{\mu\nu}$  на  $g_{\mu\nu}$ , обычных производных на ковариантные и добавлению уравнения (10) для определения метрики. Но таким способом мы вводим общую метрику довольно тривиально, не внося в теорию нового физического содержания. Для того чтобы физически обогатить теорию, потребовалось бы обобщение  $g_{\mu\nu}$ , допускающее искривленное пространство — время, в котором уравнение (10) не удовлетворяется, а это обобщение не может быть получено из  $\eta_{\mu\nu}$  путем преобразования координат.

Есть еще другой пример такого рода тривиального продолжения теории, связанный с предложенным Сакураи [11] объяснением сильного взаимодействия странных частиц. Известно, что теория электрона Дирака инвариантна по отношению к группе калибровочных преобразований первого рода

$$\begin{aligned}\psi^{*'} &= e^{-i\alpha}\psi^*, \\ \psi' &= e^{i\alpha}\psi,\end{aligned}\tag{11}$$

где  $\alpha$  — постоянная. Вследствие теоремы Нётер [3], упоминавшейся выше, с такой теорией связан ток

$$j^\mu = -i\eta^{\mu\nu}(\psi^*\psi_{,\nu} - \psi\psi^*_{,\nu}),\tag{12}$$

подчиняющийся закону сохранения

$$j^\mu_{,\mu} = 0,\tag{13}$$

если спинорное поле  $\psi$  удовлетворяет уравнению Дирака.

В полной аналогии с переходом от декартовых координат к произвольным координатам мы можем расширить рассматриваемую группу, взяв в качестве  $\alpha$  некоторую произвольную функцию пространственных и временной координат. Спинорные поля при этом все же считаются преобразующимися по закону (11). Оказывается, что интеграл действия после преобразования изменяет свой вид, а именно в нем появляется новый член

$$\int d^4x \alpha_{,\mu} j^\mu.$$

Этот добавочный член может быть компенсирован путем введения нового поля  $A_\mu$ , преобразующегося по закону

$$A'_\mu = A_\mu + \alpha_{,\mu}, \quad (14)$$

и добавлением к действию компенсирующего члена вида

$$- \int d^4x A_\mu j^\mu.$$

Тогда по аналогии с уравнением (10) можно потребовать, чтобы вектор  $A_\mu$  удовлетворял уравнению

$$F_{\mu\nu} \equiv A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu} = 0. \quad (15)$$

Из этих уравнений следует, что  $A_\mu$  всегда можно представить в виде

$$A_\mu = \varphi_{,\mu}, \quad (16)$$

где  $\varphi$  — некоторая функция точки. Таким образом, всегда можно произвести калибровочное преобразование, приводящее к новому набору потенциалов  $A'_\mu = 0$ , достаточно только взять в качестве  $\alpha$  в законе (11) и (14) функцию  $-\varphi$ , точно так же как в случае теории относительности всегда можно найти систему координат, в которой  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ , если метрика  $g_{\mu\nu}$  удовлетворяет уравнению (10). Здесь мы тоже формально расширили группу ковариантности теории, не вложив в нее никакого нового физического содержания. Более того, можно показать, что подобное расширение не затрагивает законов сохранения. По-видимому, всегда существует возможность формального расширения группы ковариантности теории от конечнопараметрической группы Ли до группы, включающей набор произвольных функций. Поэтому мы заключаем, что между принципом относительности для данного класса теорий и соответствующей им группой ковариантности нет взаимно однозначного соответствия.

### **Вывод принципа относительности из группы ковариантности согласно критерию Кречмана**

Вопрос о взаимосвязи между группой ковариантности и принципом относительности возник с первых дней существования теории относительности. Ответ на него был

предложен Кречманом [1], и я кратко рассмотрю его здесь, так как он имеет отношение к вопросу о роли координат в физике. Утверждение Кречмана сводится к следующему. Для того чтобы получить принцип относительности, связанный с данной группой ковариантности, следует выяснить, в какой мере можно ограничивать эту группу ковариантности путем наложения нековариантных ограничений на объекты, фигурирующие в теории, не ограничивая в то же время физических возможностей, из которых исходила теория при ее формулировании. Предельно ограничив таким способом группу ковариантности, Кречман приходит к некоторой подгруппе первоначальной группы ковариантности. Эта подгруппа и принимается в качестве группы преобразований принципа относительности.

Примером таких ограничений могут служить условия калибровки в электродинамике и координатные условия в общей теории относительности. В электродинамике мы можем ограничиться калибровочными преобразованиями первого рода, в которых  $\alpha$  является постоянной, если мы наложим, например, калибровочное условие Кулона  $(\nabla \cdot \mathbf{A}) = 0$ . Кречман исследовал вопрос о том, до какой степени можно ограничить группу всех преобразований координат. Он предложил систему координатных условий, позднее вновь открытую Комаром [12] и широко использованную им и Бергманом [13] при обсуждении проблемы квантования общей теории относительности. Эти координатные условия были получены, когда прежде всего были построены все 14 возможных скаляров, составленных лишь из метрики и ее первых и вторых производных. Если метрика удовлетворяет уравнениям общей теории относительности в отсутствие вещества, то  $R_{\mu\nu} = g^{\sigma\rho} R_{\rho\sigma\mu\nu} = 0$ , и лишь четыре из этих скаляров отличны от нуля. Эти четыре скаляра, вообще говоря, принимают различные значения в различных точках пространства — времени, за исключением тех случаев, когда метрика подчинена группе симметрии или группе движений (такой подход к подвижности подробно рассматривался в гл. 2). Во всех прочих случаях значения скаляров в соответствующих точках могут служить координатами этих точек. Именно такие координатные

условия были использованы Кречманом. Отсюда он заключил, что в общей теории относительности не существует принципа относительности.

В действительности критерий Кречмана не вполне удобен для выяснения того, допускает ли данная теория существование принципа относительности. Например, если применить этот принцип к частной теории относительности, то можно сузить группу преобразований Лоренца до одного лишь тождественного преобразования, воспользовавшись нелоренц-ковариантными условиями. Отсюда можно было бы заключить, что и в частной теории относительности не существует принципа относительности. Мы можем, например, нарушить частную ковариантность такой теории, как теория Максвелла, наложив ограничивающие условия на напряженность электромагнитного поля. Мы можем привязать к данной точке начало системы отсчета, наложив условия на первые компоненты полного вектора энергии — импульса. Другие дополнительные условия могут закрепить ориентацию координатных осей. Всегда найдется такая лоренцова система отсчета, в которой эти условия выполнены, если только конкретное рассматриваемое нами поле само не обладает некоторыми свойствами симметрии. Подобным же образом мы можем фиксировать величину  $\alpha$  в калибровочном преобразовании (11), потребовав, например, чтобы соблюдалось равенство  $\psi^*(0)/\psi(0) = 1$ .

### **Другой подход к принципу относительности; абсолютные и динамические элементы теории**

Какой же критерий тогда годится для определения принципа относительности, действующего в данном классе теорий? Чтобы ответить на этот вопрос, я сначала сравню подход, при котором группа ковариантности некоторой теории расширяется без изменения физического содержания этой теории, и подход, включающий также изменение этого физического содержания. В случае поля Дирака мы можем перейти от калибровочных преобразований, при которых  $\alpha$  — постоянная, к таким преобразованиям, при которых она произвольным обра-

зом зависит от точки в пространстве — времени. Тогда расширение группы приводит к введению нового поля  $A_\mu$ , которое мы затем подчиняем уравнению (15). Такое расширение теории не изменяет физической картины. В противоположном случае можно было бы потребовать, чтобы вектор-потенциал  $A_\mu$  удовлетворял уравнениям

$$F_{,\nu}^{\mu\nu} \equiv (A^{\mu,\nu} - A^{\nu,\mu})_{,\nu} = -j^\mu, \quad (17)$$

где  $j^\mu$  определяется уравнением (12). При таком расширении теории ее физическое содержание изменяется.

Подобным же образом мы расширили группу ковариантности, перейдя от преобразований Лоренца к произвольным преобразованиям координат и введя при этом метрику как дополнительный элемент, нуждающийся в особом определении. Наше требование, чтобы эта метрика удовлетворяла уравнениям (10), не содержит физически ничего нового, так как любая метрика, удовлетворяющая этим уравнениям, является с необходимостью плоской метрикой частной теории относительности. Новое физическое содержание вносится, если потребовать, чтобы метрика удовлетворяла уравнениям поля Эйнштейна

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = -T^{\mu\nu}, \quad (18)$$

где  $T^{\mu\nu}$  — тензор энергии — импульса, относящийся к другим полям и частицам, рассматриваемым в теории.

Как в случае электромагнетизма, так и в случае гравитации различие между такими двумя путями обобщения теории очевидно. В том случае, когда мы используем уравнения (10) для метрики или уравнения (15) для  $A_\mu$ , эти переменные не являются динамическими объектами, какими они являются в случае использования уравнений (17) и (18). В первом случае их нахождение никак не связано с другими физическими объектами теории, в последнем же случае это совсем иначе.

Чтобы эти различия проявились еще резче, я хотел бы ввести деление всех элементов, фигурирующих в физической теории, на два разных типа — на абсолютные и на динамические элементы. Такое деление вполне себя оправдывает, поскольку для определения принципа относи-

тельности, действующего в данной теории, мы будем пользоваться ее абсолютными элементами. Прежде всего укажем, как можно определить эти абсолютные элементы теории.

Допустим, что теория записана в виде системы функциональных соотношений

$$\mathcal{S}_i(y_A) = 0 \quad (19)$$

между независимыми переменными, входящими в эту теорию. Кроме того, допустим, что с уравнениями (19) связана конкретная трансформационная группа ковариантности. Рассмотрим теперь все инвариантные функции, которые могут быть построены из различных подсистем переменных  $y_A$ . Под инвариантной функцией понимается такая функция, величина которой не зависит от выбора калибровки или системы координат. В электродинамике инвариантными функциями  $A^\mu$  являются  $F^{\mu\nu}$ . В случае группы всех криволинейных координатных преобразований общей теории относительности построение инвариантов более затруднительно. Сама по себе переменная скалярного поля в этом смысле не является инвариантом. Она станет инвариантом, лишь если мы найдем инвариантный способ определения той точки, в которой взято значение этого скаляра. Если значения инвариантных функций, построенных из данной подсистемы, определяются однозначно на основании уравнений (19), и только уравнений (19) (т. е. не привлекаются остальные переменные  $y_A$ , граничные условия, начальные условия и пр.), то те переменные  $y_A$ , которые образовали эту подсистему, составляют абсолютный элемент теории. Конечно, сами переменные  $y_A$ , вообще говоря, не должны быть инвариантными относительно группы ковариантности.

Выявить абсолютные элементы не так трудно, как это кажется поначалу. Чтобы убедиться в том, что некоторая подсистема образует абсолютный элемент, достаточно всего лишь построить в худшем случае столько независимых инвариантов, сколько переменных образуют рассматриваемую подсистему. Если все они определяются однозначно, то любой другой инвариант, построенный для этой подсистемы, будет также определен однознач-



но, ибо он будет функцией первоначально взятых инвариантов. Более того, в конкретной теории обычно бывает совершенно очевидно, какие подсистемы образуют инвариантные элементы.

В той теории, в которой  $F_{\mu\nu} = 0$ , компоненты  $A_\mu$  определяются однозначно (с точностью до калибровочного преобразования), а поэтому определяется однозначно и любой инвариант, построенный из них. Таким образом, они образуют абсолютный элемент. Они не образуют абсолютного элемента, если считать, что выполняются обычные уравнения Максвелла (17), так как потенциал  $A_\mu$  определяется из уравнений Максвелла лишь при задании источников (плотности токов) и граничных условий в дополнение к известной калибровке. Подобным же образом если  $R_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$ , то  $g_{\mu\nu}$  представляет собой абсолютный объект, так как определяется однозначно с точностью до произвольного преобразования координат. Совсем другое дело, когда считается, что метрика  $g_{\mu\nu}$  удовлетворяет уравнениям Эйнштейна (18).

Другим примером теории, содержащей абсолютные элементы, является теория, предложенная в качестве альтернативной теории гравитации в первые годы существования теории относительности. Метрика в ней считается удовлетворяющей уравнениям

$$C_{\mu\nu\rho\sigma} = 0, \tag{20}$$

причем

$$R = 0. \tag{21}$$

Здесь  $C_{\mu\nu\rho\sigma}$  — тензор конформной кривизны, или тензор Вейля, построенный из метрики и ее первых двух производных, а  $R$  — скалярная кривизна. Можно показать, что всякая метрика, удовлетворяющая уравнениям (20), является конформно плоской, т. е. ее можно путем преобразования координат привести к виду

$$g_{\mu\nu} = \gamma(x) \eta_{\mu\nu}, \tag{22}$$

где  $\gamma(x)$  — произвольная функция точки в пространстве — времени <sup>1)</sup>. Эта функция определяется из уравне-

<sup>1)</sup> Если число измерений пространства  $\{x^\alpha\} > 3$ . — Прим. ред.

ния (21) при наложении граничных и начальных условий. Теория Вейля содержит сферически симметричное статическое решение типа Шварцшильда, однако приводит к неправильному значению поворота перигелия Меркурия. Введя новые переменные  $(\sqrt{-g})^{-1/2} g_{\mu\nu}$  и  $\sqrt{-g}$ , мы обнаружим, что  $(\sqrt{-g})^{-1/2} g_{\mu\nu}$  образуют абсолютный элемент. Любопытно, что единственными общековариантными локальными уравнениями второго порядка, подчинения которым можно требовать от метрики, являются уравнения (20) и (21), уравнения Эйнштейна (18) и уравнения для плоского мира (10).

Определив абсолютные элементы теории, можно теперь сформулировать для нее принцип относительности. Группу относительности, связанную с принципом относительности, мы определим как подгруппу группы ковариантности теории, оставляющей абсолютные элементы этой теории инвариантными. Если абсолютных элементов не существует, то группа относительности совпадает с группой ковариантности.

Рассматривая с точки зрения этого критерия два варианта электродинамики, описываемые уравнениями (15) и (17), мы видим, что в первом случае, так как  $A_\mu$  образует абсолютный элемент, группа относительности сводится к совокупности тех калибровочных преобразований первого рода, при которых  $\alpha$  постоянна. Во втором же случае  $A_\mu$  уже не образует абсолютного элемента, а потому группа относительности содержит все калибровочные преобразования, в которых  $\alpha$  — произвольная функция пространственных и временной координат. Аналогичным образом, когда метрика удовлетворяет уравнениям  $R_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$ , она образует абсолютный элемент, а группа относительности совпадает с группой преобразований Лоренца. Если же метрика удовлетворяет уравнениям (18), она уже не является абсолютным элементом, и группа относительности будет тогда группой всех произвольных координатных преобразований, якобиан которых отличен от нуля. Мы видим, что при принятом определении группы относительности в каждом из рассмотренных случаев следуют естественно ожидаемые выводы.

## Понятие предпочтительных систем координат

Я хочу обсудить значение групп относительности и абсолютных элементов в физике, однако прежде подвергну критике подход Фока [2] к «предпочтительным» системам координат в общей теории относительности<sup>1)</sup> и укажу на связь между законами сохранения и группами относительности. Фок предложил определить как предпочтительное семейство систем координат те координаты, в которых удовлетворяются условия гармоничности

$$\{\sqrt{-g} g^{\mu\nu}\}_{, \mu} = 0 \quad (23)$$

наряду с некоторыми условиями на бесконечности (такими, как отсутствие приходящего гравитационного излучения). Чтобы обосновать «предпочтительность» таких систем, Фок выставляет тот довод, кажущийся правдоподобным, что в случае изолированной системы масс условия гармоничности совместно с соответствующими дополнительными условиями определяют систему координат однозначно с точностью до преобразования Лоренца. Он указывает также, что гармонические координаты удовлетворяют линейному общековариантному уравнению. Далее Фок утверждает:

«Только признав его (существование привилегированной координатной системы, которое считается отражением определенных внутренних свойств пространства — времени), можно говорить о правильности гелиоцентрической системы Коперника в том же смысле, в каком это было возможно в механике Ньютона. Непризнание же привилегированных координатных систем ведет к той точке зрения, согласно которой гелиоцентрическая система Коперника и геоцентрическая система Птолемея будто бы равноправны. Такая точка зрения представляется нам неправильной».

Хотя Фок и указывает, что существование его предпочтительных систем координат отражает некоторые внутренние свойства пространства — времени, он не го-

<sup>1)</sup> Я буду и далее пользоваться термином «общая теория относительности», говоря о теории Эйнштейна, несмотря на возражения, выдвинутые Фоком против этого термина. Я полагаю, что данное здесь точное определение этого термина придало ему вполне ясный смысл.

ворит, в чем состоят эти свойства или как они связаны с гармоническими координатными системами. Насколько я понимаю, его доводы в пользу гармонических координат того же рода, что и возможная аргументация за признание декартовых координатных систем предпочтительными в частной теории относительности. Хотя, конечно, и верно, что использование в частной теории относительности декартовых координат приводит ко многим упрощениям, все же нет никаких *физических* оснований для того, чтобы отказаться от прочих систем координат. Часто бывает как раз наоборот, например атом водорода лучше всего описывать в сферических координатах. Во всех случаях существенны именно геометрические свойства теории, например группа относительности, абсолютные элементы и т. д. Как таковые, эти свойства могут быть выражены в любой допустимой системе отсчета. Выбор для их выражения какой-то конкретной системы с физической точки зрения не играет никакой роли и определяется по существу соображениями удобства. Подобным же образом в том случае, когда  $A_\mu$  удовлетворяет уравнениям  $A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu} = 0$ , та система калибровки, в которой  $A_\mu = 0$ , может считаться предпочтительной из соображений простоты. Физически, однако, ничего не изменится, если принять какую-либо другую калибровку. В обоих случаях группа относительности является группой калибровочных преобразований первого рода. Только при наличии какого-нибудь физического основания, ввиду которого мы можем пользоваться той или иной системой координат, имеет смысл говорить о привилегированной системе. В противном случае пришлось бы пользоваться туманным критерием «наиболее естественного» или «простейшего» при выборе таких привилегированных систем.

### Свойства инвариантности и законы сохранения

В начале главы я упомянул о взаимосвязи, существующей между свойствами инвариантности теории и законами сохранения, связанными с этой теорией. Такая взаимосвязь выявляется при использовании теоремы

Нётер [3]. Обыкновенно результаты теоремы Нётер даются в двух частях. Одна часть используется в случае  $p$ -параметрической группы Ли, а другая — в случае групп преобразований, зависящих от  $q$  произвольных функций пространственных и временной координат. В сущности оба случая не очень сильно различаются, что показано Бергманом [13], так как любая группа второго рода содержит бесконечное множество однопараметрических подгрупп, образованных всевозможными системами  $q$  функций.

Теорема Нётер состоит в следующем. Пусть дана теория, обладающая группой относительности (в том смысле, в каком мы пользовались этим термином), являющейся  $p$ -параметрической группой Ли  $G_p$ , причем уравнения движения для переменных поля  $y_A$  следуют из вариационного принципа. Если  $\varepsilon^i$  ( $i=1, 2, \dots, p$ ) — параметры группы  $G_p$ , то существует набор величин  $t_{i, \mu}^\mu$  ( $\mu=1, 2, 3, 4$ ), удовлетворяющих уравнениям непрерывности вида

$$t_{i, \mu}^\mu = 0 \quad (24)$$

при условии, что выполнены уравнения движения для переменных поля. Этот результат имеет место лишь в том случае, если группа  $G_p$  является истинной группой относительности, связанной с принципом относительности, а не возникает в результате введения в теорию абсолютных элементов. Таким образом, хотя группа общих преобразований координат и содержит бесконечное множество однопараметрических групп Ли, они, вообще говоря, не приводят к уравнениям непрерывности вида (24), если метрика является абсолютным элементом теории. В частности релятивистских теориях к уравнениям непрерывности приводит только группа Лоренца, и тогда уравнения (24) выражают закон сохранения для тензора энергии — импульса — натяжений.

Как я уже говорил, дифференциальные законы сохранения (24) удовлетворяются лишь решениями уравнений движения, и поэтому их иногда называют слабыми законами. Если в теории существует группа относительности, преобразования которой зависят от набора произвольных функций точки пространства — времени, и если

эта группа включает  $G_p$  в качестве подгруппы, то законы сохранения, связанные с  $G_p$ , могут быть расширены и приведут к сильным законам, выполняющимся вне зависимости от того, удовлетворяются ли уравнения движения. Такие законы имеют вид

$$\Theta_{i, \mu}^{\mu} \equiv 0. \quad (25)$$

Как следствие отсюда можно вывести существование системы суперпотенциалов  $U_i^{\mu\nu}$ , обладающих свойствами

$$\Theta_i^{\mu} = U_{i, \nu}^{\mu\nu} \quad (26)$$

и

$$U_i^{\mu\nu} = -U_i^{\nu\mu}. \quad (27)$$

В случае электродинамики суперпотенциалами являются просто  $F^{\sigma\xi}$ , где  $\xi$  — некоторая произвольная функция точки в пространстве — времени. Ввиду этого там существует бесконечное множество законов сохранения

$$\Theta_{, \mu}^{\mu} \equiv 0, \quad (28)$$

где

$$\Theta^{\mu} = (F^{\mu\nu}\xi)_{, \nu}. \quad (29)$$

В настоящее время из всех этих законов сохранения простую интерпретацию получил лишь один, а именно в случае  $\xi=1$ . Тогда, если удовлетворяются уравнения поля (уравнения движения)  $\Theta^{\mu}=j^{\mu}$ , мы приходим к обычному уравнению непрерывности для четырехмерного вектора плотности тока. Члены, фигурирующие в других вариантах  $\Theta$ , удастся интерпретировать как высшие электрические и магнитные моменты распределения зарядов, однако неясно, могут ли они оказаться полезными.

В случае общей теории относительности опять имеет место бесконечное множество суперпотенциалов, которые в свою очередь дают соответствующее множество уравнений непрерывности. Эти суперпотенциалы на деле можно выписывать по-разному, добавляя к ним величины,

антисимметричные по двум верхним индексам. Одна из систем суперпотенциалов имеет вид

$$U^{\mu\nu} = (16\pi \sqrt{-g})^{-1} g_{\kappa\lambda} \{g(g^{\kappa\delta} g^{\nu\lambda} - g^{\nu\delta} g^{\mu\kappa})\}_{,\delta} \xi^\lambda, \quad (30)$$

где  $\xi^\lambda$  — четыре произвольные функции точки в пространстве — времени. Эти суперпотенциалы можно опять использовать в целях построения сохраняющихся токов  $\Theta^\mu = U^{\mu\nu}_{,\nu}$ . Придавая в некоторой системе координат каждой компоненте  $\xi^\lambda$  по очереди единичное значение, а остальным компонентам нулевое, мы получаем четыре уравнения непрерывности

$$\Theta_{\mu,\nu}^{\nu} \equiv 0, \quad (31)$$

где

$$\Theta_{\mu}^{\nu} = t_{\mu}^{\nu} + T_{\mu}^{\nu}. \quad (32)$$

Здесь  $T_{\mu}^{\nu}$  — тензор энергии — импульса — натяжений, обусловленный полями вещества и пр., а  $t_{\mu}^{\nu}$  — эйнштейновский псевдотензор энергии — импульса — натяжений<sup>1)</sup>. Псевдотензор  $t_{\mu}^{\nu}$  обычно толкуют как относящийся к гравитационному полю. Однако он преобразуется при произвольных преобразованиях координат, не как тензорная плотность и даже не как геометрический объект. Это обстоятельство привело к бесконечным дискуссиям о роли и смысле энергии в общей теории относительности<sup>2)</sup>. К настоящему времени более или менее выяснилось, что любая попытка отобрать из бесконечного множества уравнений непрерывности, следующих из суперпотенциалов  $U^{\mu\nu}$  [выражение (30)], именно ту четверку, которая описывает сохранение энергии и импульса, обречена на неудачу. Это возможно лишь в тех чрезвычайно частных случаях, когда метрика допускает группу движений [14]. Существенно, что в общей теории относительности группа относительности всех преобразований

<sup>1)</sup> В действительности речь должна идти о соответствующих плотностях. Кроме того, вызывает определенные сомнения сложение [выражение (32)] симметричного и канонического «тензоров», а не двух канонических. — *Прим. перев.*

<sup>2)</sup> Вывод точных трансформационных законов для величин рассматриваемого типа см. в статье Н. В. Мицкевича [Доклады Болгарской АН, 14, 439 (1961)]. — *Прим. перев.*

координат приводит к расширенному классу уравнений непрерывности по сравнению со случаем частной теории относительности. Будут ли все эти уравнения непрерывности иметь смысл и допускать проверку, по крайней мере на основе наблюдений, — вопрос все еще открытый. Определенный ответ того или иного рода внес бы, конечно, значительно бóльшую ясность в вопрос об общем принципе относительности.

### **Следствия из определения принципа относительности посредством абсолютных и динамических элементов**

Я показал уже, как принцип относительности, связанный с конкретной теорией, определяется абсолютными элементами этой теории. Все сказанное я хотел бы заключить несколькими словами об обратной связи. Ясно, что такого рода обратная связь должна иметь место. Тогда, требуя совпадения группы общих координатных преобразований с группой относительности, а не с группой ковариантности этой теории, мы вынуждены рассматривать метрику как динамический элемент (а не абсолютный), так как никакая метрика не допускает группы всех возможных движений. Требование, чтобы группа всех преобразований координат была в физике группой относительности, не является в таком случае никоим образом тривиальным утверждением. Добавляя требование, чтобы уравнения, определяющие метрику, были локальными уравнениями и содержали вторые производные от метрики, мы придем лишь к одной системе уравнений, совместной с этим требованием, а именно к уравнениям (18).

Из сказанного видно, что, принимая принцип относительности, мы тем самым определяем абсолютные элементы теории и в то же время сильно ограничиваем класс допустимых теорий, которые могут быть построены в соответствии с данным принципом относительности. Мы приобрели, таким образом, весьма полезный «компас», указывающий пути формулирования физических теорий. В частности, принцип относительности помогает



находить абсолютные элементы теории. Допустим, что в данной теории действует очевидный принцип относительности, как это имеет место в частной теории относительности, и что соответствующая группа относительности является подгруппой некоторой более широкой группы, например группы общих преобразований координат. Тогда можно, вообще говоря, перефразировать первоначальную теорию таким образом, что ее группа ковариантности совпадет с более широкой группой. Для этого мы должны, однако, ввести в теорию дополнительные — абсолютные — элементы. Фактически такие элементы присутствовали и до расширения группы ковариантности, но оставались незамеченными, имея фиксированные конкретные значения. Так,  $g^{\mu\nu}$  присутствует и в частной теории относительности, но с раз навсегда заданными значениями, характерными для компонент метрики Минковского. Обратив же на них внимание как на абсолютные элементы теории, мы можем поставить более общий вопрос о справедливости теории, допускающей их появление в этой роли. Для большей ясности я рассмотрю «общий принцип взаимности».

Очевидно, что абсолютные элементы оказывают влияние на физическое поведение систем. Иными словами, приписать абсолютным элементам новые значения это значит изменить физическое поведение рассматриваемой системы. Например, изменяя значения метрики, можно получить в качестве траекторий частиц окружности, а не прямые линии. Напротив, физическое поведение системы со своей стороны на абсолютные элементы не влияет. Присутствие в теории абсолютных элементов указывает на недостаток в ней взаимности: абсолютные элементы могут влиять на физическое поведение системы, а оно не может в свою очередь влиять на них. Отсутствие взаимности представляется совершенно нелогичным и неудовлетворительным. В противоположность этому можно сформулировать принцип, который мы назовем общим принципом взаимности: каждый элемент физической теории подвергается воздействию всех прочих ее элементов. В соответствии с этим принципом удовлетворительная теория не должна содержать абсолютных элементов. Именно отрицательное отношение к абсолютным

элементам и заставило (отчасти) Эйнштейна принять метрику в качестве динамического элемента и вывести уравнения движения (18).

В чем же тогда состоит ценность понятия абсолютного элемента при исследовании различных физических теорий? Это понятие может быть использовано для оценки теории в отношении того, удовлетворяет ли она сформулированному выше принципу взаимности. Если теория содержит абсолютные элементы, то, следовательно, она в этом аспекте неудовлетворительна. Значит, необходимо ее расширить таким образом, чтобы эти элементы стали динамическими, а группа относительности совпала с полной группой преобразований. Тогда в теории не останется абсолютных элементов. То обстоятельство, что наши новые уравнения должны быть ковариантными относительно расширенной группы относительности преобразований, может помочь нам найти вид этих уравнений. Если же, кроме того, потребовать, чтобы эти уравнения были локальными в том смысле, что проверка их возможна чисто локальным способом, то круг допустимых уравнений может быть чрезвычайно сильно сужен.

Я хотел бы проиллюстрировать сказанное на примере того, как подобные рассуждения оправдывают введение Янгом и Миллсом [15] нового типа полей. С нашей точки зрения, эти поля всегда присутствовали в физической теории, инвариантной по отношению к вращениям в изопространстве, но были фиксированы как абсолютные элементы. Расширяя группу ковариантности таким образом, чтобы включить в нее возможность любых поворотов вокруг различных направлений в каждой точке пространства — времени, мы приходим к явному включению этих полей в уравнения других полей, однако можно еще потребовать, чтобы они удовлетворяли уравнениям, подобным (15), и это требование не изменит их роли абсолютных элементов теории. Если же потребовать, чтобы эти поля были физическими элементами, то теория должна быть обобщена так, как это сделали Янг и Миллс. Этот пример указывает на необходимость пересмотра прочих групп преобразований, существующих в физике, с целью выявления более широких групп, в которые входят эти первые. Тогда можно будет перейти от

теории, соответствующей первоначальной группе, взятой в качестве группы относительности, к теории, соответствующей расширенной группе в качестве группы ковариантности и с дополнением новых элементов. Тогда возникает вопрос: должны ли эти новые элементы оставаться абсолютными или, напротив, теория должна быть обобщена таким образом, чтобы группа ковариантности совпала с группой относительности, а абсолютные элементы превратились в динамические?

### Абсолютные элементы и свойства симметрии в физике

Заканчивая это обсуждение групп относительности и абсолютных элементов, я хотел бы коснуться приблизительных свойств симметрии и сильных взаимодействий странных частиц. Говоря о симметрии системы, мы связываем ее с конкретной физической ситуацией. Это именно то, что, по крайней мере в принципе, может быть непосредственно обнаружено. С этой точки зрения мы говорим о сферической симметрии поля точечного электрона<sup>1)</sup>. Вследствие теоремы Нётер с такой симметрией должен быть связан ряд сохраняющихся величин, например момент импульса заряженной частицы, движущейся в сферически симметричном поле. Иногда оказывается, что некоторые элементы всегда характеризуются одним и тем же типом симметрии, при каких бы условиях мы их ни рассматривали. Мы склонны тогда утверждать, что такая симметрия является законом природы и прочие законы природы следует формулировать таким образом, чтобы она входила и в них. При этом элемент, обладающий данной симметрией, становится абсолютным элементом теории. Если принять гипотезу, что в действительности абсолютных элементов в физике нет, то мы увидим, что наблюдаемое свойство симметрии может быть объяснено в рамках теории, в которой этот абсолютный элемент принят в качестве динамического,

<sup>1)</sup> Лучше говорить о поле точечного скалярного заряда, так как поле реального электрона аксиально симметрично ввиду наличия у последнего собственного магнитного момента. — *Прим. перев.*

чрезвычайно слабым взаимодействием данного элемента с остальными частями нашей физической системы. Тогда существовавшая в отсутствие взаимодействия симметрия будет на самом деле выполняться лишь приближенно. Возможно, что законы сохранения и соответствующие свойства симметрии для сильных взаимодействий могут рассматриваться как вызванные наличием дополнительных элементов, взаимодействующих лишь очень слабо со странными частицами, — в значительной мере таким же образом, как мы мыслим теперь гравитационное поле, обладающее в отсутствие полей и вещества свойствами симметрии, выражающимися в виде группы Лоренца, но при включении взаимодействия с веществом теряющее это свойство симметрии.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Kretschmann E., *Ann. d. Phys.*, **53**, 575 (1917).
2. Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения, М., 1955.
3. Noether E., *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Klasse*, **1918**, 235 (имеется перевод в сборнике «Вариационные принципы механики», М., 1959).
4. Poincaré H., *R. C. Circ. Mat. Palermo*, **21**, 129 (1906).
5. Einstein A., *Ann. d. Phys.*, **17**, 891 (1905).
6. Planck M., *Berl. Ber.*, 542 (1907); *Ann. d. Phys.*, **26**, 1 (1908).
7. Einstein A., *Jahrb. Radioaktivität und Elektronik*, **4**, 411 (1907).
8. Tolman R. C., *Relativity, Thermodynamics and Cosmology*, Oxford, New York, 1934, ch. 5.
9. Jüttner F., *Ann. d. Phys.*, **34**, 856 (1911).
10. Tauber G. E., Weinberg T. W., *Phys. Rev.*, **122**, 1842 (1961).
11. Sakurai J. J., *Ann. of Phys.*, **11**, 1 (1960) (имеется перевод в сборнике «Элементарные частицы и компенсирующие поля», изд-во «Мир», 1964, стр. 42).
12. Komar A., *Phys. Rev.*, **111**, 1182 (1958).
13. Bergmann P. G., *Phys. Rev.*, **112**, 287 (1958).
14. Trautman A., *Conservation Laws in General Relativity*, препринт.
15. Yang C. N., Mills R. L., *Phys. Rev.*, **96**, 191 (1954) (имеется перевод в сборнике «Элементарные частицы и компенсирующие поля», изд-во «Мир», 1964, стр. 28).

# 10

## Сверхплотные звезды и критическое число нуклонов

Д. Ж. УИЛЕР

### Сверхплотные звезды

Средняя плотность Солнца примерно такая же, как и плотность воды. Плотность белых карликов порядка  $10^6 \text{ г/см}^3$ . Что будет со звездой, если она холодная и настолько плотная, что в ее центре плотность вещества на много порядков превышает упомянутые только что значения, достигая и превышая ядерные плотности<sup>1)</sup>?

### Слишком слабая и незаметная?

Никаких данных наблюдений, которые говорили бы о существовании звезд солнечной массы с плотностью, близкой к плотности ядерного вещества, т. е. порядка  $10^{14} \text{ г/см}^3$ , пока что нет. Диаметр такого объекта должен составлять примерно 30 км. Из-за очень высокой теплопроводности он должен быстро остыть. Даже если температура его поверхности так же высока, как на Солнце, излучаемая им мощность будет равняться той, которую

---

<sup>1)</sup> Данный обзор основывается на материалах отчета Гаррисона, Вакано и Уилера [1] и на дополнительных соображениях из работы Уилера [2], а также на данных работы [3]. См. также работы [4—6]. В отношении предварительного исследования коллапса звезды и оценки порядка величины массы, в котором показано, что критическая масса, соответствующая коллапсу нейтронной звезды, имеет тот же порядок, что и критическая масса звезды, поддерживаемой электронным давлением, см. работу [7]. Дальнейшему рассмотрению нейтронных звезд посвящена работа [8]. См. также [12, 16].

приносит на Землю свет Луны! Надежда увидеть такой слабый объект столь же мала, как и наблюдать планеты других звезд<sup>1)</sup>.

### **Неизвестно, приводит ли астрофизическая эволюция к состоянию сверхплотной звезды**

Более того, в настоящее время мы не можем даже сказать более или менее точно, сколько звезд в ходе своей эволюции должно прийти в состояние с такой высокой плотностью. Еще не решены проблемы, касающиеся выгорания водорода и гелия и превращения легких элементов в тяжелые. Еще предстоит выяснить, какое количество вещества выбрасывается из звезд при взрывах, проанализировать вопрос о том, как сказывается на всех таких процессах вращение звезд, а также с какой скоростью момент импульса звезды теряется при ее взаимодействии с магнитными полями космических масштабов.

Рассмотрим звезду с массой  $70 M_{\odot}$  ( $M_{\odot} = 2 \cdot 10^{33}$  г — масса Солнца) или меньшей. При приближении состояния вещества в глубинах звезды к той точке, на которой прекращается термоядерная реакция, ядро звезды становится неустойчивым по отношению к гравитационному сжатию. Выделение энергии, освобождающейся при резком сокращении ядра, приводит к тому, что оставшая часть звезды разлетается в виде взорвавшейся оболочки. При этом большинство звезд находится во вращении. Можно думать, что вращение сжимающегося ядра будет все ускоряться до тех пор, пока ядро не разорвется под действием центробежных сил. Но ядро связано с внешней оболочкой через магнитные поля. В силу такой связи скорости ядра и оболочки стремятся выравняться. К тому же момент инерции звезды будет создаваться в основном расширяющейся оболочкой, так что угловая скорость ядра, как и оболочки, может уменьшаться при сжатии ядра. Поэтому на последней стадии термоядер-

---

<sup>1)</sup> О возможности наблюдения таких объектов с помощью телескопа в космосе см. довольно свежую работу [9].

ной эволюции вполне могут возникать звезды огромной плотности<sup>1)</sup>.

Для полного исследования всех последовательных этапов ядерных превращений в звездах потребуются многие годы, особенно если при этом учитывать вращение.

**Образуются ли они в природе или нет, но сверхплотные звезды — это принципиальная проблема**

Нас интересует здесь вопрос не о том, часто ли встречаются сверхплотные звезды во Вселенной, а о том, какими свойствами они должны обладать. Мы можем задаться вопросом о физическом состоянии звезд ядерной и сверхядерной плотности с принципиальной точки зрения, не задумываясь над тем, как такое состояние может быть достигнуто. Так, например, можно рассматривать процесс горения водорода в кислороде с образованием воды. Для описания этого процесса окисления в целом необходимо учесть более десятка реакций, и его исследование составляет важную главу в теории скорости реакций. Но из термодинамики мы знаем, что *конечное равновесное состояние* реакции соединения водорода с кислородом можно проанализировать без какого бы то ни было учета процессов, приводящих к этой реакции, и их скоростей. Точно так же сверхплотные звезды вполне можно рассматривать, не обращаясь к исследованию процесса их образования. Вместо этого можно просто спросить: *каким будет конечное равновесное состояние системы  $A$  нуклонов, на которые действуют гравитационные силы, если  $A$  — очень большое число?*

**Каково может быть число нуклонов, если конечное состояние системы равновесное?**

Этот вопрос можно поставить в другой плоскости. Возьмем систему из  $A$  нуклонов. Это могут быть одни только атомы водорода, или только атомы железа, или

---

<sup>1)</sup> Обзор по данному вопросу можно найти в книге [10].

эквимольярная смесь всех 92 элементов. Предоставим всем входящим сюда массам возможность сблизаться под действием взаимного тяготения. Пусть этот процесс будет так облегчен путем катализа, чтобы свободно протекали все ядерные реакции вплоть до самого конечного этапа термоядерной эволюции. Сделаем так, чтобы все тепло, выделяющееся в ходе реакций, полностью отводилось. Предусмотрим, чтобы в том случае, если будут происходить взрывы, при которых освобождается механическая энергия, все выброшенные осколки были задержаны и остановлены, каждый из них охлажден и осторожно возвращен центральной массе, так чтобы полученное состояние характеризовалось наименьшей возможной энергией. При этом будет сохранено исходное число нуклонов  $A$ , но понизится величина массы — энергии системы. В конце концов наша звезда «устанет»; она не сможет больше выбрасывать вещество, не сможет испускать фотонов, не сможет испускать нейтронов и придет в абсолютно наинизшее состояние, которым только может обладать система  $A$  нуклонов при совместном действии ядерных и гравитационных сил. Нас интересует как раз само это состояние, а не тот путь или время, которое потребовалось для его достижения.

Если вначале звезда обладала каким-то моментом импульса, то выделится еще больше энергии. Но конечное состояние ничем не будет отличаться от состояния системы  $A$  нуклонов, первоначально не имевшей момента импульса.

### Не очень большое $A$ : кусок железа

Поставленный вопрос при малых числах  $A$  настолько прост, что каждый сам может на него ответить. Возьмем  $A=560$ . Приводя с помощью катализа нашу систему в наинизшее возможное энергетическое состояние, мы получим кристаллическую решетку с элементарной ячейкой из 10 атомов железа  $\text{Fe}^{56}$ . В этом случае соотношение всех сил очевидно. Наиболее значительны ядерные



силы, наименьшей энергии которых соответствует ядро  $\text{Fe}^{56}$ . Затем идут химические силы, обусловленные электронными связями; они определяют форму и размеры решетки. Гравитационные же силы, которые в конце концов должны стать самыми важными из всех, здесь пока что пренебрежимо малы.

Положение мало изменится, если взять число  $A$  на много больше, например  $2 \cdot 10^{49}$ . Теперь у нас уже не ничтожная пылинка, а объект, лишь ненамного уступающий по размерам Луне. В его центре гравитационное давление еще не может преобладать над силами связи кристаллической решетки. Но и те и другие пренебрежимо малы по сравнению с ядерными силами. Следовательно, равновесное состояние все еще определяется обычными соображениями стабильности ядер, и наш объект на 100% состоит из атомов  $\text{Fe}^{56}$ . Его средняя плотность незначительно превысит плотность не подвергнутого сжатию железа, т. е.  $7,8 \text{ г/см}^3$ . Поэтому равновесный радиус системы  $A$  нуклонов при  $A=2 \cdot 10^{49}$ , как легко подсчитать, равен 1000 км. Это «Луна» из чистого железа.

### **Первая переломная точка: гравитационные силы больше молекулярных сил в твердом теле**

Увеличим число нуклонов еще на три порядка! Тогда гравитационные силы в центре системы возрастут настолько, что плотность там увеличится на один порядок. Теперь, наконец, гравитационные силы превышают валентные силы. С этого момента начинают происходить интересные и важные превращения.

Дальнейший рост давления в центре системы приводит в конце концов к тому, что электроны атомов вступают в реакцию с протонами ядер, обратную  $\beta$ -распаду. С исчезновением большинства атомов вещество сжимается до ядерных плотностей. Мы будем называть те критические условия, при которых происходит этот переход, переломной точкой Чандрасекара.

## **Вторая переломная точка: гравитационные силы больше ядерных**

При дальнейшем повышении давления в центре системы мы приходим к точке, в которой рушится даже ядерное вещество. Это переломная точка Ландау — Оппенгеймера — Волкова.

В первой переломной точке гравитационные силы преодолели давление, создаваемое электронами, во второй — даже давление в ядерном веществе.

## **Загадка сверхкритического числа нуклонов**

А что если число нуклонов превысит критическое значение  $A = A_{\text{крит}}$ , соответствующее второй переломной точке? При добавлении хотя бы одного лишнего килограмма нуклонов к системе с  $A = A_{\text{крит}}$  равновесной конфигурации уже не будет. А что же будет? Никто не знает! Нет другой проблемы, которая столь же глубоко, как эта, вторгалась бы в граничную область между физикой элементарных частиц и общей теорией относительности.

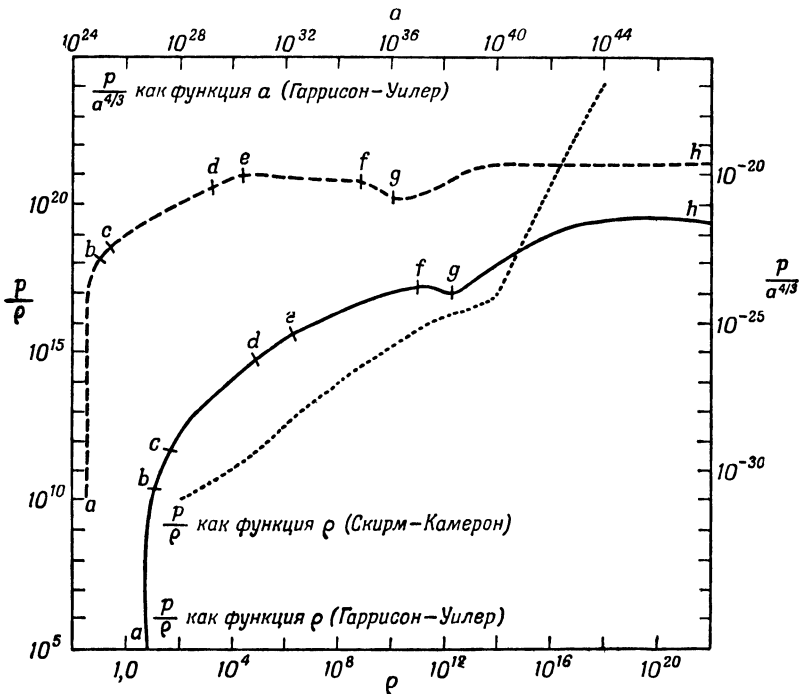
Прежде чем делать какие-либо выводы из существования критического числа нуклонов, нам следует теперь проанализировать проблему существования этого числа более осторожно.

## **Уравнение состояния**

Этот анализ удобнее всего разделить на две части — микроскопическую и макроскопическую. Первая связана с соотношением между давлением и плотностью, или уравнением состояния, для очень сильно сжатого вещества; вторая — с уравнением гидродинамического равновесия, связывающего между собой градиент давления в одной точке звезды с гравитационным притяжением, исходящим из точек, расположенных ближе к центру этого объекта.

Для того чтобы выяснить основные свойства уравнения состояния, достаточно рассмотреть порядки величин

(фиг. 10.1). Данные, лежащие на отрезке  $ab$  соответствующего графика, почерпнуты из измерений при высоких давлениях и опытах, в которых железо было сжато при сильном взрыве до плотности, примерно в два



Фиг. 10.1. Зависимость давления от плотности для вещества при абсолютном нуле температуры, приведенного путем катализа к завершению его термоядерной эволюции.

Сплошная кривая изображает зависимость  $p/\rho$  в  $\text{см}^2/\text{сек}^2$  от плотности в  $\text{г}/\text{см}^3$ . Редкий пунктир дает значения  $p/a^{4/3}$  в  $\text{г} \cdot \text{см}^3/\text{сек}^2$  в зависимости от плотности числа нуклонов  $a$  в  $\text{см}^{-3}$ . При «низких» давлениях плотность та же, что для железа, т. е.  $7,8 \text{ г}/\text{см}^3$ . При самых высоких плотностях давление становится неопределенным. Здесь оно принято равным давлению релятивистского газа, составленного из свободных частиц — на  $\frac{2}{3}$  из нейтронов и на  $\frac{1}{3}$  из протонов и столько же электронов.

раза превышающей обычную. Отрезок  $bc$  получен интерполяцией. Отрезок  $cd$  вычислен на основе модели атома Томаса — Ферми с поправками на эффекты давления,

соответствующими теории Фейнмана, Метрополиса и Теллера. Отрезок *de* соответствует условиям, при которых ядра сближены настолько тесно, что электроны движутся практически свободно, как идеальный нерелятивистский электронный газ. Таким образом, давление здесь хорошо описывается формулой для газа свободных электронов (табл. 10.1).

Уравнение состояния для

$\frac{p_F}{mc}$	Энергия наиболее быстрых частиц	Концентрация частиц
$\ll 1$	$mc^2 + \frac{p_F^2}{2m}$	$n = \frac{8\pi p_F^3}{3h^3}$
$\gg 1$	$cp_F$	$n = \frac{8\pi p_F^3}{3h^3}$

<sup>1)</sup> Уравнение дано при температуре абсолютного нуля в двух предельных случаях) и 2) когда он велик по сравнению с  $mc$  (релятивистский случай). Все состоя частиц) =  $2 \cdot (\text{Объем фазового пространства})/h^3 = 2 \cdot (\text{Объем}) \cdot 4\pi p_F^3/3h^3$ . Оба выражения

Чандрасекар подробно рассчитал на отрезке *de* переход от нерелятивистского случая к тому случаю, когда электроны так тесно сжаты в координатном пространстве, что в пространстве импульсов типичное для них значение импульса превышает  $mc$ .

## Превращения, вызванные давлением

Дальнейшее возрастание давления приводит к таким энергиям электронов, когда они вступают в реакцию со связанными протонами, давая нейтроны. Поэтому холодное вещество, доведенное путем катализа до завершения своей термоядерной эволюции, при таких давлениях уже не состоит из атомов  $\text{Fe}^{56}$ . В ядрах увеличилось отношение числа нейтронов к числу протонов. Ввиду этого роль

кулоновской энергии ядра в определении его стабильности уменьшается. Соответствующее изменение энергии связи достигается при перегруппировке нуклонов с образованием более массивных ядер (отрезок  $ef$  нашей кривой; подробные вычисления Гаррисона на основе полуэмпирической формулы для масс Вайцекера — Грина).

Таблица 10.1

фермиевского газа <sup>1)</sup>

Плотность энергии	Давление
$n \left( mc^2 + \frac{3}{5} \frac{p_F^2}{2m} \right)$ $n \left( \frac{3}{4} c p_F \right)$	$n \left( \frac{p_F^2}{5m} \right) = \frac{8\pi}{15mh^3} \left( \frac{3h^3n}{8\pi} \right)^{5/3}$ $n \left( \frac{c p_F}{4} \right) = \frac{2\pi c}{3h^3} \left( \frac{3h^3n}{8\pi} \right)^{4/3}$

чаях: 1) когда фермиевский импульс  $p_F$  мал по сравнению с  $mc$  (нерелятивистский) свободных частиц вплоть до предельного импульса  $p_F$  заняты, так что (Число для давления совпадают при  $(3h^3n/8\pi)^{1/3} = p_F = 5mc/4$ ).

При дополнительном увеличении давления отношение числа нейтронов к числу протонов увеличивается настолько, что ядра становятся неустойчивыми относительно испускания нейтронов. Теперь вещество состоит уже из смеси нейтронов и тяжелых ядер (окрестность точки  $g$  на кривой; получена также из полуэмпирической формулы).

Дальнейшее небольшое повышение давления доводит плотность вещества примерно до  $10^{14}$  г/см<sup>3</sup>, т. е. до величины порядка плотности, наблюдаемой в самих ядрах. Что происходит при еще больших плотностях, определить труднее. Проще всего принять, что по мере все большего взаимного сближения нуклонов все больше возрастают их импульсы и все меньшую роль в их движении играют ядерные силы. Мы приходим тогда к модели фермиевского газа для нуклонов подобно тому, как при более

низких давлениях мы видели, что модель фермиевского газа должна описывать поведение электронов. (На фиг. 10.1 давление при наивысших плотностях принято равным давлению релятивистского газа из нейтронов, протонов и электронов<sup>1</sup>). Вычисления были проделаны Гаррисоном [1, 2]. Асимптотическое значение  $p/\rho$  ограничивается 1) величиной  $c^2$  на основании того требования, что скорость звука должна быть меньше скорости света, и 2) величиной  $c^2/3$  на основании требования положительности свертки тензора энергии — импульса — напряжений<sup>2</sup>). Последнее требование не удовлетворяется на кривой для  $p/\rho$  (частый пунктир), взятой с фиг. 2 работы [12].) Поэтому можно вернуться прямо к формулам табл. 10.1, к ее первой строке, если величины импульсов нуклонов соответствуют нерелятивистскому случаю, и ко второй строке, если они соответствуют релятивистскому случаю. В последнем случае высоких скоростей выражение для давления *нуклонного* газа совпадает с выражением для давления *электронного* газа! При движении частиц, создающих давление, со скоростями, приближающимися к скорости света, *масса покоя* этих частиц становится несущественной! Конечно, *плотность числа* нуклонов, при которой они становятся релятивистскими, намного превышает концентрацию

<sup>1</sup>) При исследовании предельного случая высоких давлений мы пренебрегаем рождением гиперонов и мезонов и в силу этого получаем при заданной плотности *слишком высокое* давление. При таком завышенном расчете принимается, что 1) у нас имеются только нейтроны, протоны и электроны и 2) плотности чисел электронов и протонов должны быть одинаковы (электрическая нейтральность). Тогда одинаковы фермиевские импульсы электронов и протонов. В релятивистском пределе равенство импульсов приводит к тому, что фермиевские энергии протона и электрона также равны друг другу и составляют половину фермиевской энергии нейтрона. Поэтому плотности чисел протонов и электронов должны составлять  $1/8$  плотности числа нейтронов.

<sup>2</sup>) Я. Б. Зельдович [11] утверждал, что при высоких плотностях векторный бозон со спином 1, осуществляющий связь между нуклонами, должен приводить к высокой жесткости и скорости звука, равной не  $c/\sqrt{3}$ , а  $c$ . Даже такая жесткость не может сравниться с жесткостью несжимаемой жидкости, а ведь и последняя дает для критической массы конечное значение. (Автор признателен д-ру Цзю за то, что он указал на работу Зельдовича, и за обсуждение этого и других вопросов.)

электронов, когда становятся релятивистскими эти последние, а давление соответственно выше, но это давление все равно изменяется как плотность числа частиц в степени  $4/3$ <sup>1)</sup>.

### Пренебрежимо малая роль электрического поля

В вопросе об уравнении состояния имеется несколько сторон. Во-первых, рассмотрим тот случай, когда электроны еще не втиснуты в ядра  $\text{Fe}^{56}$ . Тогда основная доля давления приходится на электроны. Действие же силы тяжести почти исключительно сосредоточено в ядрах. Не произойдет ли полного разделения электронов и ядра? Нет. Рудкьбинг [12] нашел, что у звезды будет электрическое поле, вектор напряженности которого направлен по радиусу наружу. Действием этого поля электронное давление и будет передаваться протонам и удерживать их на прежнем уровне. Напряженность такого поля в хорошем приближении можно получить, пренебрегая всем тем давлением, которое обусловлено самими протонами. Тогда ускорение силы тяжести  $g$  должно полностью уравновешиваться электрической силой:

$$m_{\text{Fe}}g = Z_{\text{эфф}}eE. \quad (1)$$

Для того чтобы оценить порядок величины наибольшей из встречающихся при этом напряженностей, рассмотрим звезду с массой 0,7 массы Солнца, с плотностью в

1) Следует сделать еще одно замечание. Плотность числа электронов  $n$  составляет  $26/56$  плотности числа нуклонов  $a$ , если рассматривать электронной газ, окружающий ядра  $\text{Fe}^{56}$ . В «нуклонном» же газе (при условии что энергия нуклонных взаимодействий пренебрежимо мала по сравнению с релятивистскими энергиями нуклонов) плотность числа нейтронов равна  $(8/9)a$ , а плотность протонов (и электронов) равна  $(1/9)a$ . Поэтому в случае железа давление равно

$$p = \left(\frac{26}{56}\right)^{4/3} \frac{2\pi c}{3h^3} \left(\frac{3h^3 a}{8\pi}\right)^{1/3},$$

а в случае нейтронов

$$p = \left[ \left(\frac{8}{9}\right)^{4/3} + 2 \left(\frac{1}{9}\right)^{4/3} \right] \frac{2\pi c}{3h^3} \left(\frac{3h^3 a}{8\pi}\right)^{4/3}.$$

центре около  $10^{16}$  г/см<sup>3</sup> (примерно в 100 раз больше ядерной плотности) и радиусом около 10 км. Вычислим величину  $g$  на поверхности такого объекта. По порядку величины это должно соответствовать *наибольшему* гравитационному притяжению, какое только существует в этой звезде. Если бы плотность была постоянной в пространстве, а искривление пространства малым, то, как нетрудно вспомнить, гравитационное ускорение принимало бы свое наибольшее значение на самой поверхности (внутри звезды имеет место потенциал гармонического осциллятора!). Величина  $g$  на поверхности равна

$$g \approx \frac{GM}{r^2} \approx \frac{(7 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/\text{г} \cdot \text{сек}^2) \cdot (1,4 \cdot 10^{33} \text{ г})}{(10^6 \text{ см})^2} \approx 10^{14} \text{ см/сек}^2. \quad (2)$$

Наивысшее значение электрической напряженности, поддерживающей ядра во взвешенном состоянии, можно оценить, положив эффективный электрический заряд равным наименьшему значению  $Z_{\text{эфф}} \approx 1$ . Тогда

$$E \approx \frac{m_{\text{Fe}} g}{e} \approx \frac{(56 \cdot 1,6 \cdot 10^{-24} \text{ г}) \cdot (10^{14} \text{ см/сек}^2)}{(4,8 \cdot 10^{-10}) \cdot (\text{г} \cdot \text{см}^3/\text{сек}^2)^{1/2}} \approx \\ \approx 20 (\text{г} \cdot \text{см}^3/\text{сек}^2)^{1/2} / \text{см}^2 \approx 6000 \text{ в/см}. \quad (3)$$

Плотность энергии, которой обладает это поле, пренебрежимо мала по сравнению с энергией сжатия и энергией ядерных связей (превращений). Следовательно, это поле можно исключить из рассмотрения.

### «Жесткая» сердцевина

Во-вторых, ряд затруднений связан с предположением, часто высказываемым исследователями ядерного вещества, относительно того, что взаимодействие между нуклонами на расстояниях порядка  $0,5 \cdot 10^{-13}$  см характеризуется эффективным ядерным потенциалом с так называемой жесткой сердцевиной. Если понимать этот потенциал буквально, то можно допустить превышение плотности ядерного вещества над нормой раза в два, после чего оно становится несжимаемым. Поэтому давление должно резко возрасти по сравнению с тем, что



предсказывает простая модель фермиевского газа. Но ничто в природе не может быть несжимаемым! Звук должен распространяться в несжимаемой жидкости со скоростью

$$v_{\text{зв}} = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}, \quad (4)$$

равной бесконечности! Если же исходить из того требования, чтобы скорость распространения сигнала не превышала скорости света, мы получим условие

$$\frac{dp}{d\rho} \leq c^2. \quad (5)$$

Но и этот предел недостижим. Рассмотрим область пространства, заполненную изотропным электромагнитным излучением. Здесь отношение давления к плотности массы имеет хорошо известное значение

$$\frac{p}{\rho} = \frac{c^2}{3}, \quad (6)$$

откуда

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{c^2}{3}. \quad (7)$$

В еще более общем случае, рассматривая изотропную и не подверженную сдвигам среду<sup>1)</sup>, к которой, таким образом, применимо понятие *давления*, и требуя, чтобы след тензора энергии — импульса — натяжений был положительно определенным, мы найдем верхний предел для отношения давления к плотности массы (фиг. 10.1):

$$\frac{p}{\rho} = \frac{c^2}{3}. \quad (8)$$

Это предположение вместе с принципом относительности приводит к верхнему пределу для отношения давления к плотности энергии, равному  $1/3$ . К этому пределу и подходит все ближе и ближе соответствующее отношение для идеального фермиевского газа по мере того, как энергия рассматриваемых ферми-частиц все больше и больше превышает их энергию покоя.

<sup>1)</sup> См. примечание 2 на стр. 334.

## Понижение давления?

Камерон [13] указал, что возможен эффект, противоположный несжимаемости, когда давление при высоких плотностях будет значительно *меньше*, чем в случае простого фермиевского газа, состоящего в основном из нейтронов. При достижении нуклонами кинетической энергии в несколько сотен *Мэв* они, отмечает Камерон, обязательно будут превращаться в гипероны в результате реакций, в которых странность может и не сохраняться. Одной из самых простых таких реакций является реакция



Если природа этих гиперонов весьма сильно отличается от природы нейтронов и протонов, то может оказаться, что столь высокая энергия не нужна для того, чтобы иметь большое число *a* барионов в единице объема. Тогда снизится давление.

В табл. 10.2 показаны те изменения, которые могут быть внесены в уравнение состояния с учетом гиперонов, *если* различные типы элементарных частиц можно рассматривать как идеальные невзаимодействующие фермиевские газы и *если* фермионы одного типа (например,  $\Lambda^0$ ) не вытесняют нигде во всем фазовом пространстве фермионов другого типа (например, нейтронов). Оба эти предположения, вероятно, не соответствуют действительности. Если все же исходить из этих предположений, то можно вычислить четыре важные физические величины (концентрацию барионов *a*, плотность электрического заряда  $\rho_e$ , плотность массы  $\rho$ , включая и массовый эквивалент кинетической энергии, и, наконец, давление *p*) путем сложения вкладов от различных частиц с весовыми множителями, указанными в таблице. Эти вклады зависят от двух фермиевских величин энергии:  $E_e$  (для электронов и  $\mu$ -мезонов) и  $E_n$  (для нейтронов,  $\Lambda^0$ - и  $\Sigma^0$ -частиц). Эти две фермиевские величины энергии требуется подобрать таким образом, чтобы получить заданное значение *a* и необходимый нейтральный характер взятой смеси частиц (*здесь* такая подгонка не производилась!). *Замечание:* во все значения энергии, указанные в табл. 10.2, включена энергия покоя,

## Идеализированный учет влияния гиперонов на уравнение состояния

частица	энергия	масса покоя, $M_{эв}$	Весовой множитель, на который следует умножить $8\pi r^3 F / 3h^3$ , чтобы получить величину вклада в барнионное число	Весовой множитель, на который следует умножить $8\pi p^3 / 3h^3$ , чтобы получить величину вклада в плотность заряда	Весовой множитель, на который следует умножить $\int_0^p p F$ $(8\pi/3h^3) \int_0^p v p^3 dp$ , чтобы получить величину вклада в давление	Весовой множитель, на который следует умножить $\int_0^p p F$ $(8\pi/h^3 c^2) \int_0^p E p^2 dp$ , чтобы получить величину вклада в плотность массы
			$e$	$E_e$	0,51	0
$\mu$	$E_e$	106	0	-1	1	1
$p$	$E_n - E_e$	938	1	+1	1	1
$\Sigma^+$	$E_n - E_e$	1190	1	+1	1	1
$n$	$E_n$	940	1	0	1	1
$\Lambda^0$	$E_n$	1115	1	0	1	1
$\Sigma^0$	$E_n$	1192	1	0	1	1
$\Sigma^-$	$E_n + E_e$	1196	1	-1	1	1
$\Xi^-$	$E_n + E_e$	1319	1	-1	1	1

Величины  $E_e$  и  $E_n$  выбираются таким образом, чтобы суммарные значения величин в первых двух столбцах равнялись приведенным ниже:

$$a \quad 0$$

Суммарные значения величин в двух последних столбцах дают давление и плотность массы при заданном числе барионов в 1 см<sup>3</sup>:

$$p(a) \quad \rho(a)$$

так что фермиевский импульс  $p_F$  получается из величин второго и третьего столбцов по формуле  $c^2 p_F^2 = (\text{Энергия})^2 - (\text{Масса покоя})^2 c^4$ . Когда величина  $E_e$  достигает значения массы — энергии  $\pi$ -мезона, начинают возникать  $\pi^-$ -мезоны. После этого равенство зарядов того и другого знака поддерживается уже благодаря изменению плотности числа  $\pi^-$ -мезонов, а не благодаря изменению  $E_e$  [14].

Итак, ввиду указанных обстоятельств чем выше становится плотность массы, тем больше энергетически допустимых барионных состояний и соответственно тем ниже должно быть давление. Если все сказанное верно, то для нахождения всего спектра масс элементарных частиц достаточно провести точные измерения и определить соответствующие характеристики уравнения состояния. Но этот вывод вряд ли является законным, и в частности потому, что, как заметил Камерон, мы пренебрегли всеми взаимодействиями между барионами. Кроме того, неизвестно, не будут ли барионы подчиняться принципу Паули при превращении нейтрона в гиперон. Ведь объединение нейтронов и протонов в  $\alpha$ -частицы в ядрах не освобождает их в этих ядрах от подчинения статистике Паули — Дирака, хотя сами  $\alpha$ -частицы подчиняются статистике Бозе — Эйнштейна! *Замечание:* Амбарцумян и Саакян [14] показали, что при возрастании плотности числа нейтронов выше критического значения, равного примерно  $8,5 \cdot 10^{38}$  г/см<sup>3</sup>, существенную роль в равновесии начинают играть  $\pi^-$ -мезоны.

Окончательный вывод таков, что при плотностях, во много раз превосходящих ядерные, давление холодного вещества, доведенного путем катализа до завершения его термоядерной эволюции, является неопределенным. Оно не может превысить  $1/3$  величины плотности энергии<sup>1)</sup>. При этом давление все ближе и ближе подходит

<sup>1)</sup> Ским [15] рассчитал для плотностей вплоть до  $10^{15}$  г/см<sup>3</sup> (примерно в семь раз превышающих обычные ядерные плотности) уравнение состояния, из которого при экстраполяции до  $2 \cdot 10^{15}$  г/см<sup>3</sup> и выше следует (см. фиг. 2 в работе Камерона [13]) давление, превышающее  $p = \rho c^2 / 3$ . Этого, по-видимому, достаточно, чтобы не пользоваться подобной экстраполяцией при анализе свойств наиболее плотных нейтронных звезд.

к указанному пределу, если его рассматривать как давление идеального фермиевского газа в пределе сверхвысоких плотностей. К этому пределу и стремится кривая уравнения состояния Гаррисона (см. фиг. 10.1) — уравнения, использованного для количественного анализа проблемы Гаррисоном, Вакано и автором [1]. Если бы появление гиперонов сильно сказывалось на виде уравнения состояния, то оно могло бы только *понижить* давление, необходимое для удерживания звездной массы во взвешенном вокруг центра звезды состоянии, а это приводило бы к *уменьшению* той критической массы, при которой происходит коллапс.

## Критическая масса

*Почему* должна быть какая-то критическая масса? Самым простым путем к ответу на этот вопрос можно прийти, спросив: каким образом радиус звезды устанавливается таким, чтобы ее полная энергия была наименьшей? Прежде всего мы рассмотрим этот вопрос при следующих упрощающих предположениях.

1. Ограничимся частной, а не общей теорией относительности, т. е. будем пренебрегать искривленностью пространства. Это предположение соответствует действительности в первой переломной точке и неплохо отражает ее даже во второй переломной точке. В данном приближении мы будем также пренебрегать эффективной массой, соответствующей давлению внутри звезды.

2. Будем считать, что вес звезды уравнивается давлением фермиевских частиц только одного вида. Иными словами, будем идеализировать рассматриваемую звезду, считая, что ее масса до первой переломной точки поддерживается давлением электронов, уравнивающим силы тяжести, действующие на ядра железа. До второй переломной точки *все давление и весь вес* будем идеализированно приписывать одним нейтронам (табл. 10.3).

3. Будем считать, что плотность везде одинакова. Вместо того чтобы выбирать *распределение* плотности внутри всей звезды таким образом, чтобы получить

Таблица 10.3

Идеализированные величины массы  $m_1$  фермионов, обуславливающих давление, и гравитационной массы  $m_2$ , приходящейся на один такой фермион

Переломная точка	Фермион и его масса покоя $m_1$	Гравитационная масса, которую считают связанной с этим фермионом	Масса звезды, выраженная через число фермионов $N$
Первая	Электрон, $m_e$	$m_2 = \frac{m_{Fe}}{26} = \frac{56}{26} m_n$	$M = N m_2$
Вторая	Нейтрон, $m_n$	$m_2 = m_n + \frac{(\text{Кинетическая энергия})_n}{c^2}$	$M = N m_2$

минимум ее энергии, мы сведем задачу к более простому случаю выбора *одного параметра* — радиуса  $R$  звезды с постоянной в пространстве плотностью. Прежде чем говорить о радиусе звезды, рассмотрим радиус области, занятой в пространстве *одним фермионом*, и для удобства дальнейшего анализа выразим его через комптоновскую длину волны этого фермиона:

$$r = \frac{4}{3\pi} \left(\frac{\pi}{3}\right)^{1/3} \frac{(4\pi R^3/3N)^{1/3}}{\hbar/m_1 c}. \quad (10)$$

Величину  $r$  можно назвать радиусом приведенной (элементарной) ячейки. Значения  $r \gg 1$  соответствуют большим длинам волн де-Бройля и нерелятивистскому импульсу фермионов. Напротив, значения радиуса  $r \ll 1$  отражают сжатие, приводящее к ультрарелятивистскому импульсу. Собственно говоря, фермиевский импульс равен

$$p_F = \frac{4}{3r} m_1 c. \quad (11)$$

4. Сумма кинетической энергии и энергии покоя одного фермиона принимается равной

$$m_1 c^2 \sqrt{1 + r^{-2}}. \quad (12)$$

Это выражение с точностью до 7% (табл. 10.4) согласуется с точным, но громоздким математическим выражением<sup>1)</sup> для энергии фермиевского газа.

Принятые нами упрощающие предположения позволяют без труда найти зависимость энергии холодной

Таблица 10.4

Сравнение значений выражения (12) и точных значений энергии (кинетической энергии плюс энергия покоя), приходящейся на одну частицу в ферми-газе в предельных случаях низких плотностей (больших значений радиуса элементарной ячейки  $r$ ) и высоких плотностей (малых  $r$ )

$r$	Точное значение средней энергии, приходящейся на нуклон в этом пределе	Значение, соответствующее формуле (12)
$\gg 1$	$m_1 c^2 + \frac{3}{5} \frac{p_F^2}{2m_1} = m_1 c^2 \left( 1 + \frac{8}{15} r^2 \right)$	$m_1 c^2 \left( 1 + \frac{8}{16r^2} \right)$
$\ll 1$	$\frac{3}{4} c p_F = \frac{m_1 c^2}{r}$	$\frac{m_1 c^2}{r}$

звезды, доведенной катализом до завершения ее термоядерной эволюции, от радиуса звезды или от радиуса элементарной ячейки  $r$ :

$$\left( \begin{array}{l} \text{Гравитационная энергия шара радиусом } R \\ \text{и с массой } M, \text{ равномерно заполненного} \\ \text{веществом} \end{array} \right) = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}. \quad (13)$$

Обозначим через  $A$  полное число нуклонов в звезде («массовое число!»). Если идеализированно представить себе, что звезда состоит из смеси ядер  $\text{Fe}^{56}$  и газа

<sup>1)</sup> Точное выражение для средней энергии (кинетической и энергии покоя), приходящейся на фермион, имеет вид

$$\frac{E_{\text{ср}}}{m_1 c^2} = \sqrt{1+x^2} - \frac{1}{8x^3} [x(2x^2-3)\sqrt{1+x^2} + 3Ar \operatorname{sh} x],$$

где

$$x = \frac{4}{3r} = \frac{p_F}{m_1 c}.$$

По этой формуле вычислены значения величин, стоящие в среднем столбце табл. 10.4 Она была дана Чандрасекаром в работе [16]. См. также [10].





Здесь  $\lambda$  — *массовый параметр*, показывающий, какую долю энергии покоя составляет гравитационная энергия. Он прямо пропорционален числу нуклонов в звезде  $A$ , возведенному в степень  $2/3$ :

$$A^{2/3} = \begin{cases} \left(\frac{26}{56}\right)^{4/3} A_0^{2/3} \lambda_e & \text{для электронно-железной звезды,} \\ A_0^{2/3} \lambda_n & \text{для нейтронной звезды.} \end{cases} \quad (16e)$$

$$(16n)$$

*Характеристическое массовое число*  $A_0$  определяется по формуле

$$A_0^{2/3} = \left(\frac{1125\pi}{256}\right)^{1/3} \frac{\hbar c}{Gm_n^2}. \quad (17)$$

Безразмерная величина

$$\frac{\hbar c}{Gm_n^2} = 1,691 \cdot 10^{38} \quad (18гр)$$

играет в гравитационном взаимодействии такую же роль, что и величина

$$\frac{\hbar c}{e^2} = 137,037 \quad (18эм)$$

в электромагнитном взаимодействии. Очень большое численное значение величины (18гр) свидетельствует о том, что для преодоления гравитационным взаимодействием всех других сил необходимо объединить множество нуклонов. Именно, характеристическое массовое число равно

$$A_0 = 8,17 \cdot 10^{57}. \quad (19)$$

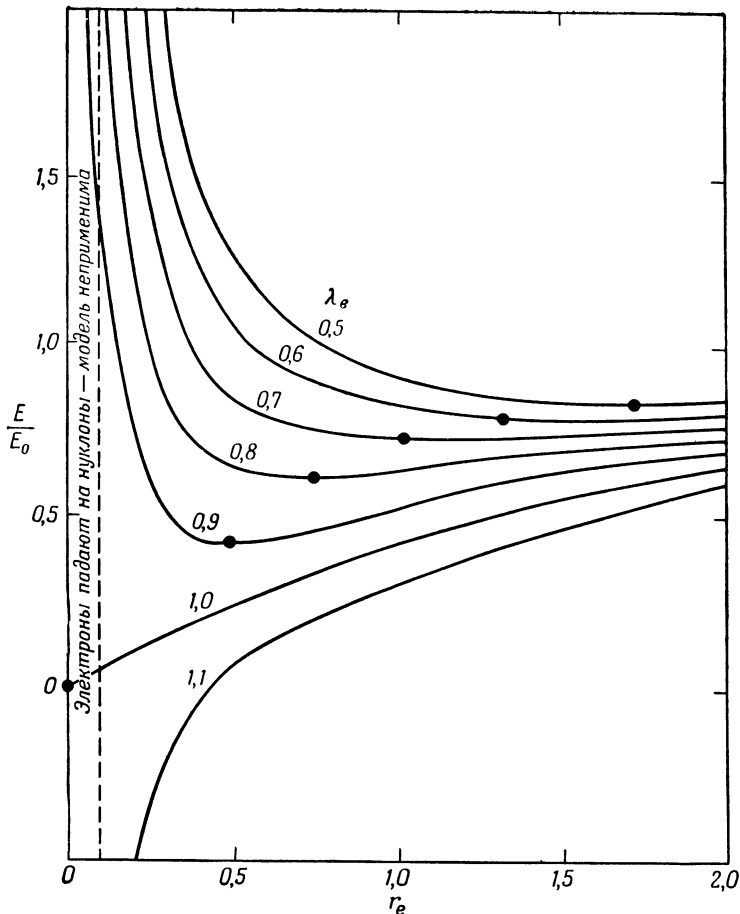
Умножая эту величину на массу нейтрона, найдем характеристическую массу

$$A_0 m_n = 13,68 \cdot 10^{33} \text{ г} = 6,89 M_\odot, \quad (20)$$

где  $M_\odot$  — масса Солнца ( $1,987 \cdot 10^{33}$  г).

**Стабильность электронно-железной модели при  $\lambda_e < 1$**

Для идеализированной модели звезды, состоящей из электронов и ядер железа  $\text{Fe}^{56}$ , часть энергии, обусловленная сжатием, зависит от радиуса элементарной



Фиг. 10.2. Энергия как функция размеров ячейки, занимаемой одним электроном, в частнорелятивистском приближении для идеализированного состояния звезды, искусственно поддерживаемого при постоянной повсюду плотности.

Учтены два вида энергии: 1) кинетическая энергия плюс энергия покоя нуклонов и 2) гравитационная энергия (в предположении, что на каждые 26 электронов приходится масса одного ядра  $\text{Fe}^{56}$ ). Вплоть до критического значения массы, определяемого массовым параметром  $\lambda_e = 1$ , каждому значению массы соответствует одно состояние устойчивого равновесия системы. При критическом же значении теоретически вычисленная плотность бесконечно велика — симптом того, что это приближение неудовлетворительно, так как электроны начинают взаимодействовать с ядрами в соответствии с реакцией обратного  $\beta$ -распада.

ячейки  $r_e$  так, как показано на фиг. 10.2. При любом значении массового параметра  $\lambda_e$ , меньшем единицы, на кривой зависимости энергии от радиуса имеется минимум. В этом случае звезда устойчива.

### Нерелятивистский предел

С уменьшением величины массового параметра  $\lambda_e$  уменьшается сжатие и возрастает по сравнению с комптоновской длиной волны радиус ячейки. В пределе при  $r_e \lambda_e \gg 1$  можно пользоваться нерелятивистскими соотношениями. Тогда выражение  $\sqrt{1+r^{-2}}$  можно заменить на  $1+1/2r^2$ . В таком случае нам нужно найти минимум для суммы нерелятивистского выражения кинетической энергии и гравитационной энергии, деленной на энергию покоя всех электронов, т. е. минимум выражения

$$\frac{1}{2r^2} - \frac{\lambda_e}{r}. \quad (21)$$

Эта величина имеет экстремальное значение при радиусе элементарной ячейки, равном

$$r_{\text{опт}} = \frac{1}{\lambda_e} \sim A^{-2/3}. \quad (22)$$

В указанном нерелятивистском пределе справедливо следующее:

1. Радиус ячейки пропорционален  $1/A^{2/3}$  (где  $A$  — по-прежнему полное число нуклонов в данном объекте).

2. Радиус звезды пропорционален  $1/A^{1/3}$  (пока  $A$  настолько «мало», что вещество звезды лучше рассматривать как твердое железо, а не как электронный газ; при еще меньших массовых числах  $A$  радиус, конечно, изменяется как  $A^{1/3}$ ).

3. Плотность пропорциональна  $A^2$  (пока число  $A$  настолько малое, а давление настолько низкое, что плотность близка к нормальной плотности железа).

### Критическое равновесие при $\lambda_e = 1$

Указанные соотношения теряют силу в релятивистской области. Теоретически вычисленный радиус элементарной ячейки для идеализированной электронно-железной модели равен

$$r_{\text{опт}} = \frac{\sqrt{1 - \lambda_e^2}}{\lambda_e}. \quad (23)$$

Для того чтобы этот радиус обратился в нуль, уже не нужно, чтобы массовый параметр  $\lambda_e$  стремился к бесконечности [как в формуле (22)]. Ему достаточно принять свое критическое значение

$$\lambda_{e \text{ крит}} = 1. \quad (24)$$

Подставляя это значение в выражение (16e), определяющее массовое число, найдем критическую массу

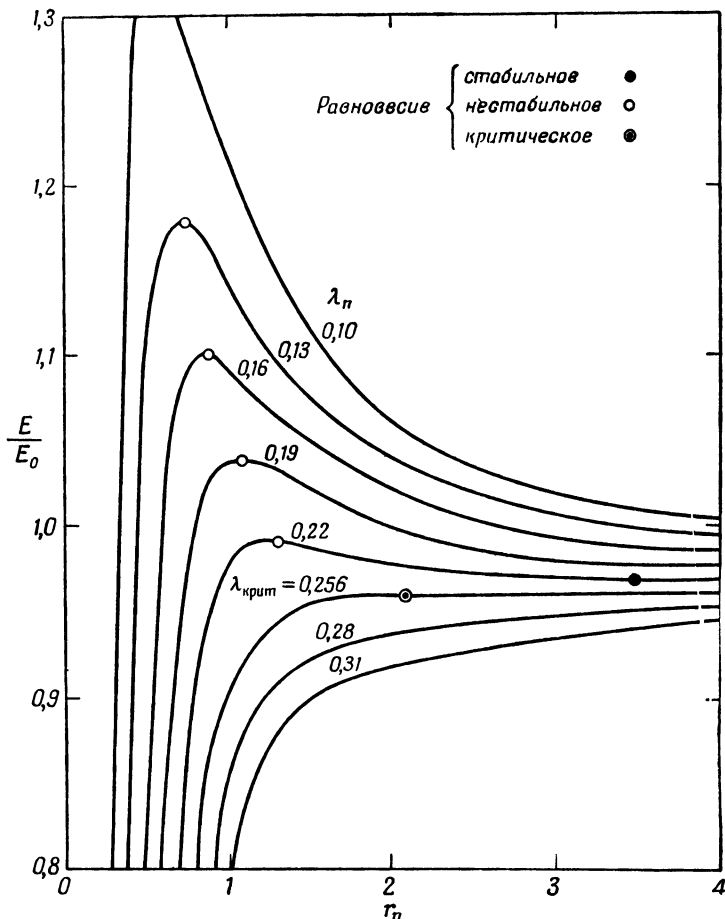
$$M_{\text{крит 1}} = \left(\frac{26}{56}\right)^2 A_0 m_n = 2,95 \cdot 10^{33} \text{ г} = 1,48 M_{\odot}. \quad (25)$$

По мере приближения массы к этому критическому значению теоретически вычисленная плотность неограниченно возрастает. Радиус ячейки стремится к нулю, а фермиевский импульс электронов становится бесконечно большим по сравнению с  $m_e c$ .

На самом же деле, когда энергия электронов достигает нескольких миллионов электронвольт, изменяется физическая картина. Электроны превращают протоны в нейтроны. Число электронов, приходящихся на один барион, падает намного ниже принятого ранее значения  $22/56$ . Ввиду этого теперь следует обратиться к идеализированной модели нейтронной звезды. Зависимость энергии такой звезды от радиуса элементарной ячейки  $r_n$  представлена на фиг. 10.3.

### Модель нейтронной звезды в нерелятивистском приближении

Возьмем фиксированное и не очень большое значение массового параметра на фиг. 10.3, например  $\lambda_n = 0,19$ . Минимум энергии имеет место при радиусе элементар-



Фиг. 10.3. Энергия как функция размеров ячейки, занимаемой одним нейтроном, для идеализированного состояния звезды, искусственно поддерживаемого при постоянной плотности, в упрощенной модели, предполагающей 1) 100%-ное содержание нейтронов, 2) фермиевскую энергию для идеального нейтронного газа, 3) гравитационное воздействие кинетической энергии нейтронов наряду с массой-энергией покоя и 4) пренебрежение общерелятивистскими поправками.

Имеются два равновесных состояния — одно устойчивое, другое неустойчивое — для значений массового параметра  $\lambda_n$ , меньших критического значения  $\lambda_{\text{крит}} = 0,256$ . При больших значениях равновесия не существует и система непрерывно спадается (коллапс).

ной ячейки  $r_n \approx 4,07$ , не слишком сильно отличающемся от  $1/\lambda_n = 5,26$ . Рассматривается существенно нерелятивистская задача. Выражение для энергии (15n) неплохо аппроксимируется нерелятивистским выражением того же самого вида (21), что использовалось для электронов. Минимум существует в обоих случаях, так как всегда можно компенсировать нерелятивистскую кинетическую энергию, положительную и пропорциональную  $1/r^2$ , нерелятивистской гравитационной энергией, отрицательной и пропорциональной  $1/r$ .

### Новое свойство, появляющееся в релятивистском пределе

Пусть теперь то же самое число фермионов будет упаковано значительно плотнее, так что они станут релятивистскими. Кинетическая энергия будет теперь возрастать пропорционально не квадрату импульса, а лишь его первой степени, т. е. как  $1/r$ , а не как  $1/r^2$ . В этом отношении нейтронная модель не отличается от электронно-железной модели. Но что касается гравитационной энергии, то здесь картина существенно меняется. В электронно-железной модели гравитационная масса относилась к *статическим объектам* — ядрам  $\text{Fe}^{56}$  и лишь в пренебрежимо малой степени к электронам, будь они релятивистскими или нерелятивистскими. Совсем другое дело нейтронная модель! Когда нейтроны становятся релятивистскими, вклад их кинетической энергии в массу системы становится существенным. Масса, приходящаяся на одну частицу, увеличивается в  $\sqrt{1 + 1/r^2}$  раз. Этот множитель, кроме того, входит двояким образом — на него умножается обычный множитель  $1/r$ , отражающий зависимость гравитационной энергии от расстояния. Поэтому гравитационный член

$$-\frac{\lambda_n}{r} \left(1 + \frac{1}{r^2}\right),$$

появляющийся в результате в формуле для энергии (15n) и на фиг. 10.3, при сильных сжатиях превышает кинетическую энергию. Иными словами, если при сжа-

тии объекта превысить определенную критическую плотность (см. максимум кривой на фиг. 10.3), то этот объект будет *сжиматься дальше сам по себе*. В максимуме система неустойчива.

### Критические условия для нейтронной модели

При увеличении массового параметра состояние устойчивого равновесия и состояние неустойчивого равновесия сближаются. Выше критического значения

$$\lambda_{n \text{ крит}} = \frac{2[\sqrt{33} - 5]^{1/2}}{\sqrt{33} + 1} = 0,256,$$

$$A = \lambda_n^{3/2} A_0 = 1,058 \cdot 10^{57}, \quad (26)$$

$$M_{\text{крит } 2} = A m_n = 1,77 \cdot 10^{33} \text{ г} = 0,89 M_{\odot}$$

уже *не существует* равновесного состояния — ни устойчивого, ни неустойчивого.

### Точная теория равновесия

При точном анализе равновесных состояний масс вещества, удовлетворяющего уравнению состояния, которое соответствует фиг. 10.1, сразу же обнаруживаются все закономерности, полученные нами приближенно. Мы предположим, что 1) имеет место сферическая симметрия, 2) вращение отсутствует и 3) наблюдается статическое равновесие.

Вместо того чтобы находить минимум энергии относительно одного параметра — радиуса сферы с одинаковой везде плотностью, нужно найти минимум энергии относительно бесчисленного множества параметров. Иначе говоря, нужно варьировать самую кривую распределения — функцию  $\rho(r)$ , которой выражается зависимость плотности от расстояния точки от центра. Отыскивая такой минимум в случае *общерелятивистского* выражения для энергии системы по методу Эйлера — Лагранжа, мы получим дифференциальное уравнение для давления  $p$  как функции радиальной координаты  $r$ .

Если бы речь шла о равновесии в рамках нерелятивистской гидростатики, то вывод этого уравнения был бы элементарным. Выделим элемент объема толщиной  $dr$  и сечением  $1 \text{ см}^2$  на расстоянии  $r$  от центра. Приравняем результирующую силу, действующую на этот элемент объема, нулю:

$$p(r) - p(r + dr) - g(r)\rho(r) dr = 0. \quad (27)$$

Здесь ускорение силы тяжести  $g(r)$  вызывается в целом массой

$$M(r) \equiv \int_0^r \rho(r) \cdot 4\pi r^2 dr, \quad (28)$$

лежащей *внутри* сферы радиусом  $r$ . Тогда

$$g(r) = \frac{GM(r)}{r^2}. \quad (29)$$

Мы находим, таким образом, что

$$\frac{dp}{dr} = -\rho \frac{GM(r)}{r^2}. \quad (30)$$

Правильное не только в частной, но и в *общей теории относительности* [17], уравнение отличается от уравнения (30) членами порядка  $1/c^2$ :

$$\frac{dp(r)}{dr} = - \frac{[\rho(p) + c^{-2}p] G [M(r) + 4\pi c^{-2}p(r)r^3]}{r[r - 2GM(r)/c^2]}. \quad (31)$$

### Систематизация всех равновесных состояний по величине плотности в центре

Вакано (см. [1]) проинтегрировал уравнение (31), используя уравнение состояния, выведенное Гаррисоном и Уилером и представленное графически на фиг. 10.1. При таком интегрировании не очень удобно задавать сначала полное число нуклонов, а затем уже определять, как эти нуклоны размещаются в пространстве. Вполне может оказаться, что выбранное число нуклонов слишком велико (см. фиг. 10.3) и ему не соответствует никакое равновесие! В таком случае уравнение гидростатического равновесия (31) вообще неприменимо. Поэто-



му нужно рассматривать только те случаи, когда равновесие возможно, будь оно устойчивое или неустойчивое. Равновесное состояние можно характеризовать определенным значением плотности в центре. Тогда, перебрав все значения плотности в центре, мы получим *все равновесные состояния*.

Все равновесные решения можно даже классифицировать по величине плотности в центре (составить своего рода «каталог»). При этом все другие свойства модели звезды будут определяться значением этой величины, если принять следующий путь интегрирования:

1. Задается «шифр каталога»  $\rho(0)$ .

2. Делается заключение, что масса  $M(r)$ , находящаяся внутри радиуса  $r$ , при *малых*  $r$  изменяется как

$$M(r) \approx \frac{4\pi}{3} \rho(0) r^3. \quad (32)$$

3. Из уравнения состояния (фиг. 10.1) берется величина центрального давления  $p(0)$ , соответствующая выбранной величине плотности  $\rho(0)$ .

4. Выбирается малый по сравнению с предполагаемым радиусом равновесной системы интервал интегрирования  $\Delta r$ . Чтобы проверить, достаточно ли мало  $\Delta r$ , нужно повторить интегрирование при вдвое меньшем интервале. При этом вычисленное распределение плотности и давления должно измениться лишь незначительно.

5. Условия в центре  $p(0)$  и  $\rho(0)$  определяют на основании уравнения (31) градиент давления вблизи центра:

$$\left(\frac{dp}{dr}\right)_0 = 4\pi G (\rho_0 + c^{-2}p_0) \left(\frac{\rho_0}{3} + c^{-2}p_0\right) r. \quad (33)$$

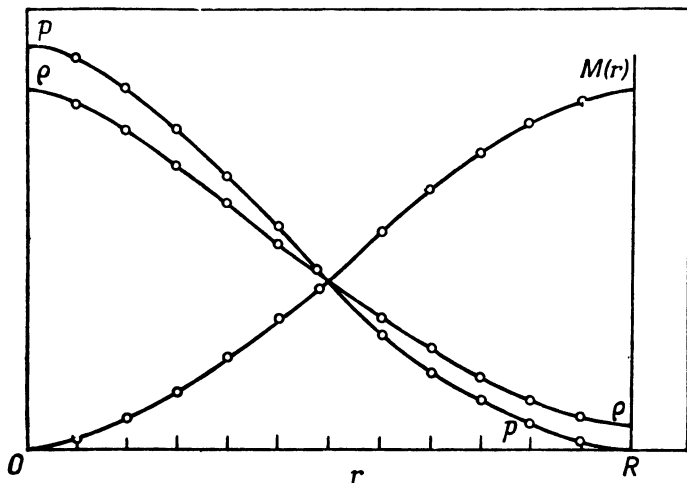
Эти данные позволяют найти давление  $p_1$  в точке  $r_1 = 1 \cdot \Delta r$ :

$$p_1 = -2\pi G (\rho_0 + c^{-2}p_0) \left(\frac{\rho_0}{3} + c^{-2}p_0\right) (\Delta r)^2. \quad (34)$$

6. Подставив это значение давления в уравнение состояния, определим величину плотности в первой точке вместе с исправленным значением массы, расположенной ниже этой точки.

7. Подобным же образом находим  $\rho_2$ ,  $p_2$  и  $M_2$  во второй точке  $r_2 = 2\Delta r$ . Обычно проводится итерирование (берутся *средние значения*  $\rho_1$  и  $\rho_2$ ,  $p_1$  и  $p_2$  и  $M_1$  и  $M_2$ ) для определения «первых улучшенных значений»  $\rho_2$ ,  $p_2$  и  $M_2$ .

8. Таким образом, интегрирование распространяется с одного интервала на другой (фиг. 10.4) наружу до



Фиг. 10.4. Схематическое пояснение к численному интегрированию уравнения гидростатического равновесия.

того значения  $r$  (назовем его  $R$ ), при котором давление падает до нуля:

$$p(R) = 0 \quad (\text{определение } R); \quad (35)$$

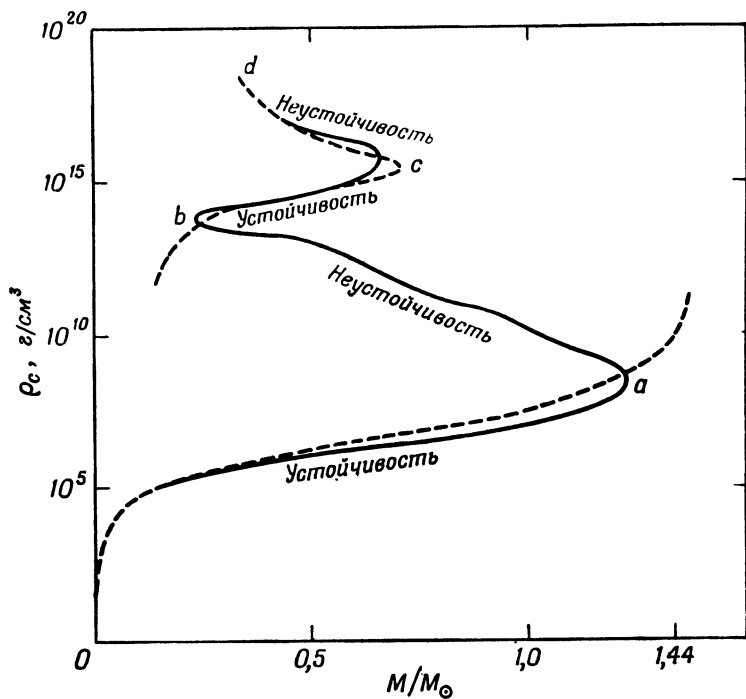
$$\begin{aligned} \rho(R) &= \rho \quad (\text{при } p=0) = \\ &= \rho \quad (\text{для несжатого железа } \text{Fe}^{56}) = 7,8 \text{ г/см}^3. \end{aligned}$$

9. Величина  $M(r)$  на поверхности «гладкого железного шара» и есть масса звезды:

$$M = M(R). \quad (36)$$

Повторяем, что мы *не находим* равновесное состояние по заданной массе. Из фиг. 10.2 и 10.3 мы уже знаем, что среди масс имеются такие, которым вообще

не соответствуют равновесные состояния (холодные и доведенные путем катализа до завершения своей термоядерной эволюции — в противоположность горячим состояниям с низкой плотностью и часто гораздо более



Фиг. 10.5. Масса как функция плотности в центре для холодной катализированной звезды.

массивным, которые наблюдаются в телескопы как звезды)! Вместо этого мы находим все *равновесные* состояния и вычисляем для каждого из них полную массу.

Наш каталог равновесных состояний иллюстрируется графиком фиг. 10.5. Здесь единицей массы служит масса Солнца  $M_{\odot} = 1,987 \cdot 10^{33}$  г. Сплошная кривая получена Гаррисоном, Вакано и Уилером (ГВУ) в результате 45 интегрирований, проведенных на счетной

машине МАНИАК (MANIAC) Института перспективных исследований с любезной помощью д-ра Мэли и г-жи Уэйман; использовалось уравнение состояния фиг. 10.1. Нижняя пунктирная кривая была получена Чандрасекаром без учета общей теории относительности и предположений о проникновении электронов в ядра. С обеих указанных точек зрения ее следует сравнивать с намного более идеализированной (для постоянной плотности) электронно-железной моделью (фиг. 10.2). В этой модели и на пунктирной кривой Чандрасекара при приближении массы к критическому значению плотность в центре уходит в бесконечность. Вместо этого на сплошной кривой обнаруживается переломная точка  $a$ , где плотность *конечна*, а энергия электронов достаточна для того, чтобы они в больших количествах соединялись с протонами. Между  $a$  и  $b$  имеется ряд равновесных состояний, но равновесие в них неустойчивое и поэтому не имеет физического смысла. Состояния, расположенные между  $b$  и  $c$ , снова будут устойчивыми. В идеализированной нейтронной модели с постоянной плотностью (фиг. 10.3) такого рода состояние соответствует черной точке, лежащей в *минимуме* энергии. *Максимум* энергии (светлый кружок) на той же кривой (то же самое значение  $A$  или  $\lambda$ ) на фиг. 10.3 нужно сравнить с состоянием *неустойчивого* равновесия на отрезке  $cd$  кривой фиг. 10.5. Вторая переломная точка  $c$  качественно соответствует критической точке или точке перегиба на фиг. 10.3.

### Сравнение результатов точных вычислений с результатами расчетов на основе простых моделей

Можно кратко указать основные характеристики равновесных состояний. «Шифр каталога» — плотность в центре  $\rho_0$  — лишь медленно растет с массой в области масс, начиная от массы пушечного ядра и кончая массой, немного меньшей, чем масса Луны, а затем в первой переломной точке возрастает примерно до  $4,5 \times 10^8$  г/см<sup>3</sup>. Превращение протонов в нейтроны при столкновениях с электронами начинается при плотно-

стях порядка  $10^7$  г/см<sup>3</sup> и становится существенным при  $\rho > 10^8$  г/см<sup>3</sup>. При плотностях такого порядка наша кривая еще мало отличается от кривой Чандрасекара. Каждая точка на ней изображает устойчивое состояние, устойчивое в том смысле, что при не очень большом возмущении давления звезда начнет колебаться с конечной амплитудой, эти колебания будут затухать, и в конце концов звезда возвратится в исходное состояние.

При более сильном сжатии наша кривая массы как функции плотности будет все заметнее отклоняться от кривой Чандрасекара. Анализ, проведенный последним, и исследование простой электронно-железной модели фиг. 10.2 показывают, что для того, чтобы гравитационные напряжения внутри звезды были достаточны для коллапса, плотность должна быть *бесконечной*. На самом же деле коллапс произойдет при конечной плотности в силу изменений в ядрах, вызываемых электронами. Из-за возможности таких процессов все состояния, расположенные между *a* и *b*, нестабильны. Если бы по какому-то волшебству звезда была бы сотворена в одном из таких равновесных состояний, то достаточно было бы самого малейшего возмущения, чтобы она либо спалась, либо взорвалась. Например, если бы мы заставили такую звезду слегка сжаться, то в ядра были бы вдавлены дополнительные электроны. В результате рост давления вследствие сжатия окажется менее значительным, чем он был бы при прежней концентрации электронов. Гравитационные же силы при этом должны существенно возрасти. Теперь давление не сможет уравновешивать возросшие гравитационные силы, и сжатие будет нарастать все быстрее. В конце концов часть звезды неизбежно коллапсирует до ядерных плотностей, а часть будет выброшена наружу.

### Обе переломные точки даются одним уравнением состояния

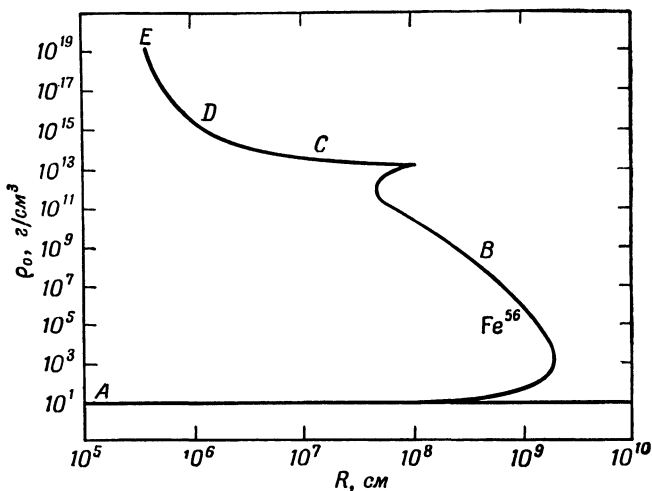
Оппенгеймер и Волков рассчитали строение нейтронных звезд, приняв, что они состоят из чисто нейтронного идеального фермиевского газа. Их результаты показаны на фиг. 10.5 в виде пунктирной линии *bcd*.

Условия коллапса холодной и катализированной звезды, поддерживаемой электронным и нейтронным давлением<sup>1)</sup>

Модель звезды	Электронно-железная	Нейтронная
Исследование минимума энергии	Фиг. 10.2	Фиг. 10.3
Критический массовый параметр	$\lambda_e = 1,000$	$\lambda_n = 0,256$
Критическое число нуклонов	$(26/56)^2 A_0 \lambda_e^{3/2} = 1,762 \cdot 10^{57}$	$A_0 \lambda_n^3 = 1,058 \cdot 10^{57}$
Это число, умноженное на $m_n$ (масса до объединения)	$2,95 \cdot 10^{33} z = 1,48 M_\odot$	$1,77 \cdot 10^{33} z = 0,89 M_\odot$
Радиус «элементарной ячейки»	$r_e \ll 1$	$r_n = 2,09$
Радиус ячейки для одного фермиона. см	$\frac{\hbar}{m_e c} \frac{r_e}{0,431} = r_e \cdot 8,95 \cdot 10^{-11}$	$\frac{\hbar}{m_n c} \frac{r_n}{0,431} = 1,017 \cdot 10^{-13}$
Радиус звезды, см	$r_e \cdot 1,082 \cdot 10^9$	$1,036 \cdot 10^6$
Плотность (принятая в этих моделях постоянной), г/см <sup>3</sup>	$r_e^{-3} \cdot 5,6 \cdot 10^5$	$3,8 \cdot 10^{14}$
Результаты ГВУ для двух переломных точек, полученные из одного уравнения состояния:		
Плотность (в центре), г/см <sup>3</sup>	$4,5 \cdot 10^8$	$4,6 \cdot 10^{15}$
Радиус, см	$0,34 \cdot 10^9$	$0,9 \cdot 10^6$
Масса, $M_\odot$	1,2	0,68

<sup>1)</sup> В первой части таблицы собраны приведенные в статье результаты для упрощенного случая состояний с постоянной плотностью. Во второй части даны результаты, полученные численными методами из точного уравнения гидростатического равновесия (31).

Результаты расчета на основе уравнения состояния фиг. 10.1 (сплошная кривая на фиг. 10.5) не очень сильно отличаются от этих данных, но зато одно это уравнение состояния *автоматически* без привлечения каких-либо особых предположений или моделей дает обе переломные точки

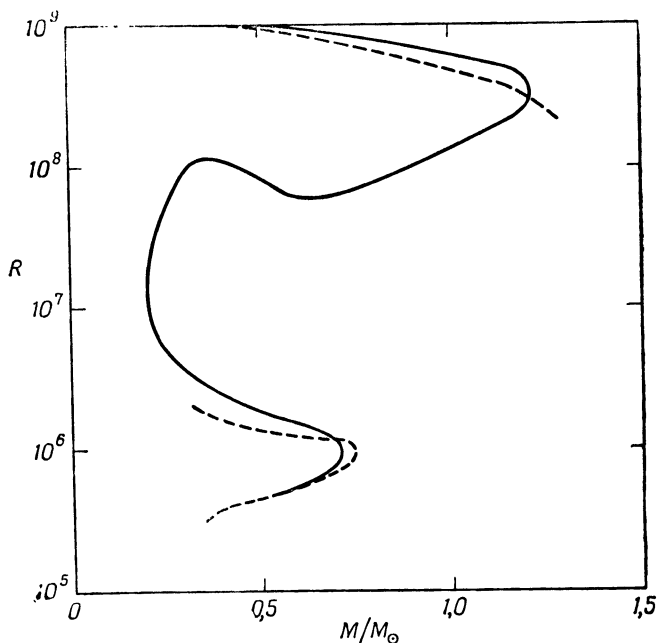


Фиг. 10.6. Зависимость между радиусом и плотностью в центре для равновесных состояний, согласно ГВУ (уравнение состояния Гаррисона, фиг. 10.1; общерелятивистский анализ гидростатики Вакано).

Прямая линия при  $\rho_0 = 7,8 \text{ г/см}^3$  показывает, как выглядела бы эта диаграмма, если бы железо было несжимаемым.

Любопытно сравнить характеристики этих двух переломных точек, вытекающие из результатов наших точных машинных вычислений (сплошная кривая на фиг. 10.5) и из результатов расчетов на основе двух идеализированных моделей с постоянной плотностью (электронно-железная и нейтронная модели; фиг. 10.2 и 10.3). Такое сравнение, проведенное в табл. 10.5, показывает, что простые модели дают не безнадежно плохие значения критической массы. Что же касается плотности, то точные вычисления для критического нейтронного состояния дают (и, по-видимому, правильно)

значение плотности в центре примерно на один порядок выше, чем ее предсказывает модель с постоянной плотностью. Однако плотность в центре, необходимая для получения критических условий в *первой* переломной



Фиг. 10.7. Зависимость между радиусом поверхности ( $R$ , см) и массой (в единицах массы Солнца) для холодного вещества, каталитически доведенного до завершения термоядерной эволюции.

Вычислено на основании общерелятивистского уравнения гидростатического равновесия и уравнения состояния фиг. 10.1 (ГВУ).

точке, оказывается *ниже* при точных вычислениях, чем та бесконечно большая плотность, которая предсказывается простой электронно-железной моделью; причина этого проста: данная модель не учитывает уменьшения числа электронов в связи с их проникновением в ядра.

На фиг. 10.6 представлена зависимость *радиуса* от *плотности*, согласно ГВУ, на фиг. 10.7 — зависимость *радиуса* от *массы*.



## Погрешности и неопределенности

Спросим теперь себя, насколько велики неопределенности в нашем анализе в тех лишь случаях, которые нас только и интересуют, — в состояниях *устойчивого* равновесия.

До первой переломной точки мы использовали лишь самые элементарные соображения о вырожденном электронном газе и о равновесии

$$n \rightleftharpoons p + e^- \quad (37)$$

для связанных нуклонов. Поэтому погрешность в величине критической массы в первой переломной точке вряд ли может превысить 10—15%. Кроме того, значение критической массы, вычисленное теоретически, согласуется с наблюдаемым верхним пределом масс белых карликов <sup>1)</sup>.

Вторая группа полученных равновесных состояний (на фиг. 10.5 от *b* до *c*) охватывает плотности примерно от половины ядерной и приблизительно до плотности, в 30 раз превышающей ядерную, причем масса изменяется от  $0,2 M_{\odot}$  до  $0,7 M_{\odot}$ . На верхней границе этой области мы приближаемся к той части кривой уравнения состояния на фиг. 10.1, где давление ненамного ниже предела  $\rho c^2/3 = 3 \cdot 10^{20} \rho$ . Как ясно уже из упрощенной нейтронной модели (фиг. 10.3), такое давление не может предотвратить коллапс фермионного шара. По мере уменьшения радиуса кинетическая энергия и вес нуклонов неограниченно возрастают, и гравитационные силы получают окончательный перевес над давлением.

Если при сильном сжатии во все больших количества порождаются гипероны, то можно думать, что в фазовом пространстве появляются все новые состояния, не требуя перехода к неограниченно растущим импульсам. Тогда давление не будет столь близко подходить к  $\rho c^2/3$ , как это должно быть, если исходить из уравнения состояния фиг. 10.1. В этом случае обрушивание, или коллапс, нейтронной звезды произойдет при *меньшей* массе, чем это изображено на фиг. 10.5. При обычных

<sup>1)</sup> См., например, [6].

ядерных плотностях этот эффект не проявляется, так как иначе ядерное вещество не обладало бы присущей ему, как известно, высокой степенью упругости <sup>1)</sup>).

### Несжимаемость — неправдоподобно, но интересно

Что можно сказать о противоположной гипотезе, что возможны сколь угодно высокие *давления*, так же как в несжимаемой жидкости? Мы задаем этот вопрос в связи с господствующим представлением о том, что нуклон-нуклонное взаимодействие характеризуется потенциалом с так называемой «жесткой сердцевиной». При релятивистских скоростях такие представления сталкиваются с очевидными трудностями, как и более привычное представление об электроны конечного радиуса. В обоих случаях возникает вопрос, в какой системе отсчета измерять этот радиус? Если при столкновении двух частиц их импульсы сильно меняются, то должны ли мы определять радиус в ускоренной системе отсчета, и если да, то каким именно образом? Следует ли рассматривать тогда взаимодействия как запаздывающие или как симметричные во времени? Удовлетворительного ответа пока еще нет ни на эти, ни на еще более острый вопрос, а именно: какие из известных физических принципов могли бы служить основанием для того, чтобы приписывать такого рода взаимодействию какой-нибудь смысл или необходимость при релятивистских скоростях, и есть ли какие-нибудь экспериментальные указания на необходимость его введения? Но несмотря на то, что представление о несжимаемой жидкости встречает столько возражений и что скорость звука, превышающая  $c$ , должна самым невероятным образом нарушать принцип причинности, интересно все же рассмотреть свойства модели звезды, состоящей из несжимаемой жидкости, так как 1) состояние такого идеализированного объекта легко поддается анализу и 2) *оказывается, что даже в случае несжимаемой жидкости приходится ввести понятие критической массы!*

<sup>1)</sup> См., например, [8].

### Нерелятивистский случай

При анализе свойств шара, состоящего из несжимаемой жидкости, рассмотрим сначала тот случай, когда масса шара мала и можно пренебречь эффектами общей теории относительности. Иными словами, пусть искривление пространства мало. Гравитационным красным смещением можно пренебречь. Гравитационная потенциальная энергия  $\varphi(r)$  единичной пробной массы мала по сравнению с энергией покоя  $c^2$  этой пробной массы.

Обозначим через  $\rho$  плотность, а через  $R$  — радиус жидкого шара. Его масса равна

$$M = \frac{4\pi\rho}{3} R^3. \quad (38)$$

Сила гравитационного притяжения, действующая на единичную массу вне этого шара, равна

$$g(r) = \frac{d\varphi}{dr} = G \frac{4\pi\rho}{3} \frac{R^3}{r^2}, \quad (39)$$

а сила, действующая на единичную пробную массу, введенную внутрь шара, есть

$$g(r) = \frac{d\varphi}{dr} = G \frac{4\pi\rho}{3} \frac{r^3}{r^2}. \quad (40)$$

Сам же гравитационный потенциал вне шара имеет тот же вид, что и потенциал точечной массы. Внутри же шара его зависимость от расстояния от центра такая же, как и зависимость потенциальной энергии обычного гармонического осциллятора от координаты. Более существенно, чем потенциал, его безразмерное отношение к  $c^2$  — отношение гравитационной потенциальной энергии к энергии покоя или, лучше, отношение полной энергии (гравитационной энергии и энергии покоя) к одной лишь энергии покоя. Тогда

$$\left( \frac{\text{Энергия покоящейся частицы}}{\text{Энергия покоя на бесконечности}} \right)_{\text{ньютоновское значение}} = 1 + \frac{\varphi(r)}{c^2} =$$

$$= \begin{cases} 1 - \frac{8\pi G\rho}{3c^2} \frac{R^3}{2r} & \text{снаружи,} \\ 1 - \frac{8\pi G\rho}{3c^2} \left( \frac{3R^2}{4} - \frac{r^2}{4} \right) & \text{внутри.} \end{cases} \quad (41)$$

## Общерелятивистское решение

Ту же задачу в общей теории относительности рассматривал Шварцшильд. Для удобства он выбрал радиальную координату  $r$  таким образом, чтобы собственное расстояние по окружности, проведенной вокруг центра, определялось как величина  $r$ , умноженная на изменение угловой координаты:

$$ds^2 = -e^{\nu(r)} dt^2 + e^{\lambda(r)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2).$$

Растягивающие множители  $\nu(r)$  и  $\lambda(r)$  находятся из уравнений поля Эйнштейна. Радиальный поправочный множитель равен

$$e^{-\lambda(r)} = \begin{cases} 1 - \frac{8\pi G\rho}{3c^2} \frac{R^3}{r} & \text{снаружи,} \\ 1 - \frac{8\pi G\rho}{3c^2} r^2 & \text{внутри} \end{cases} \quad (42)$$

и обращается в центре в единицу, как и должно быть из соображений регулярности геометрии вблизи центра. Ввиду своей связи с ньютоновским гравитационным потенциалом больший интерес представляет множитель временного растяжения  $e^{\nu(r)}$ , квадратный корень из которого является мерой расстояния между дираковскими морями<sup>1)</sup> состояний с положительной и отрицательной энергией:

$$\begin{aligned} e^{\nu/2} &= \left( \frac{\text{Энергия покоящейся частицы}}{\text{Энергия покоя на бесконечности}} \right)_{\text{эйнштейновское значение}} = \\ &= \frac{E_+}{mc^2} = \frac{-E_-}{mc^2} = \frac{E_+ - E_-}{2mc^2} = \\ &= \begin{cases} \left( 1 - \frac{8\pi G\rho}{3c^2} \frac{R^3}{r} \right)^{1/2} & \text{снаружи,} \\ \frac{3}{2} \left( 1 - \frac{8\pi G\rho}{3c^2} R^2 \right)^{1/2} - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{8\pi G\rho}{3c^2} r^2 \right)^{1/2} & \text{внутри.} \end{cases} \quad (43) \end{aligned}$$

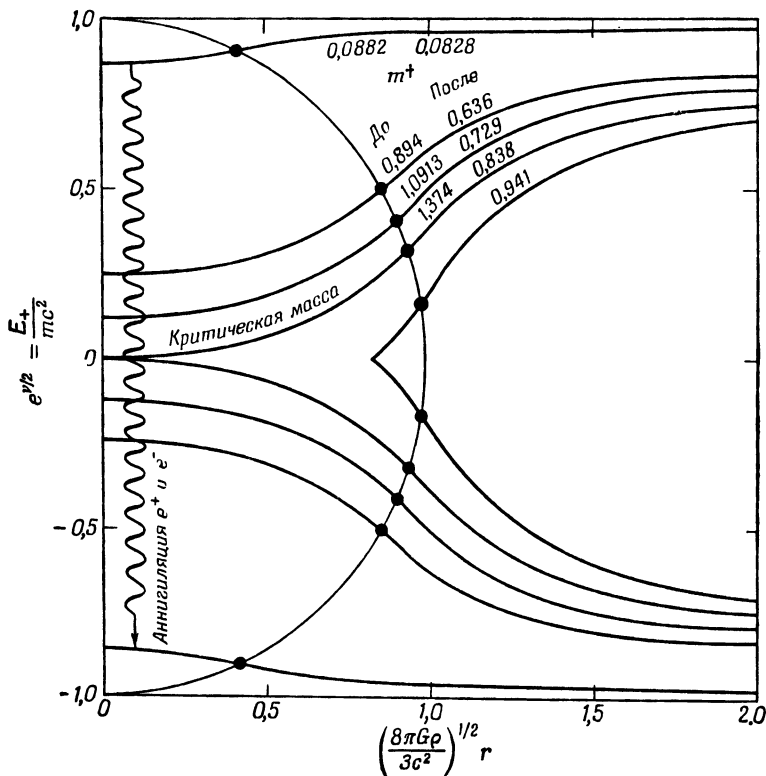
При малой массе, т. е. когда безразмерная величина, характеризующая радиус,

$$x = \sqrt{\frac{8\pi G\rho}{3c^2}} R, \quad (44)$$

<sup>1)</sup> «Dirac's seas» — выражение, уже вошедшее в литературу в изложениях дырочной теории позитрона Дирака. — *Прим. перев.*

намного меньше единицы, эти выражения переходят в соответствующие ньютоновы.

На фиг. 10.8 показано, как множитель  $e^{v/2} = E_+/mc^2$  изменяется в зависимости от радиальной координаты  $r$ .



Фиг. 10.8. Общерелятивистский аналог потенциала тяготения ( $e^{v/2}$ ), изображенный как функция радиального расстояния, для ряда значений массы шара, состоящего из несжимаемой жидкости.

Величина  $m^+$  обозначает массу, измеренную в единицах характеристической массы  $(4\pi\rho/3)(3c^2/8\pi G\rho)^{3/2}$ . Пометки «до» и «после» даны для того, чтобы указать массу до и после ее объединения в сферу, причем выражение

«до» относится к бесконечно далеко удаленным друг от друга капелькам. Величина  $e^{v/2}$  *внутри* объекта изменяется приблизительно по закону потенциальной энергии гармонического осциллятора, а *вне* его — почти как ньютонов потенциал точечной массы. Энергия, выделяющаяся при аннигиляции пары  $e^+$  и  $e^-$ , меньше  $2mc^2$  в  $e^{v/2}$  раз. Просвет между состояниями с положительной и отрицательной энергией стремится к нулю, а давление в центре — к бесконечности, когда масса подходит к критическому значению <sup>1)</sup>

$$m_{\text{крит}}^+ = 0,8382 = \left(\frac{8}{9}\right)^{3/2}.$$

При еще бóльших значениях массы приемлемых решений уравнений поля Эйнштейна не существует.

### Уменьшение просвета между состояниями с положительной и отрицательной энергией

Смысл множителя  $e^{v/2} = E_+/mc^2$  прост. В самом деле, рассмотрим случай аннигиляции электрона с позитроном. В нормальных условиях выделяющаяся при этом

<sup>1)</sup> *Замечание* Измеренная в характеристических единицах

$$\frac{4\pi\rho}{3} \left(\frac{3c^2}{8\pi G\rho}\right)^{3/2}$$

и выраженная как функция безразмерного параметра

$$x = \sqrt{\frac{8\pi G\rho}{3c^2}} R$$

масса звезды до слияния капелек равна

$$m_{\text{до}} = \frac{3}{2} \arcsin x - x \sqrt{1-x^2},$$

после же слияния

$$m_{\text{после}} = x^3.$$

Для всех допустимых масс [ $m_{\text{после}}$  вплоть до значения  $(8/9)^{3/2}$ ] разница между этими массами может быть с точностью не ниже 10% выражена с помощью ньютоновской формулы для потенциальной гравитационной энергии шара:

$$(m_{\text{до}} - m_{\text{после}})_{\text{ньютон}} = \frac{3}{10} (m_{\text{после}})^{5/3}.$$

энергия равна  $2mc^2$ . Такой же выход энергии можно получить и в следующем случае: возьмем свободные  $e^+$  и  $e^-$  на больших расстояниях по разные стороны от звезды. Предоставим им теперь падать со все возрастающей скоростью на жидкую сферу под действием гравитационного притяжения с ее стороны. Пусть эти заряды попадут каждый со своей стороны в отверстия трубки, проходящей через центр сферы, встретятся по середине и аннигилируют. Пусть, наконец, два получившихся фотона большой энергии ( $E_\gamma > mc^2$ ) вылетают из противоположных концов трубки в бесконечность и при этом частота их меняется в соответствии с эффектом гравитационного красного смещения. Тогда при наблюдении на бесконечности каждый из этих  $\gamma$ -квантов будет иметь энергию  $mc^2$ . Изменим теперь описанный процесс. Будем спускать наши две частицы к центру *медленно*, удерживая их с помощью идеальных длинных нитей так, чтобы их аннигиляция произошла при относительной кинетической энергии, равной нулю. Вся работа, произведенная электроном и позитроном в поле силы тяжести, теперь передается экспериментатору через нити, которыми он манипулирует. Каждый из  $\gamma$ -квантов, получающихся при аннигиляции, обладает энергией  $mc^2$  в лоренцовой системе отсчета, соответствующей центру звезды. Но при уходе  $\gamma$ -кванта на бесконечность энергия его становится меньше, а именно  $mc^2 e^{v/2}$ . Разность

$$2mc^2 - 2mc^2 e^{v/2}$$

представляет собой ту механическую энергию, которую экспериментатор мог получить в этом процессе.

Получить от электронно-позитронной пары (первоначально расположенной на бесконечности в состоянии покоя) энергию, превышающую  $2mc^2$ , принципиально невозможно. Поэтому множитель  $e^{v/2}$  никогда не может принимать значения, меньшие нуля. При этом теоретически вычисленное значение этого множителя, иначе говоря, величина просвета между дираковскими морями состояний положительной и отрицательной энергии, в центре жидкой массы монотонно убывает до нуля,

когда масса возрастает до своего критического значения (измеренного после объединения капелек)

$$M_{\text{крит}} = 0,838 \frac{4\pi\rho}{3} \left( \frac{3c^2}{8\pi G\rho} \right)^{3/2}. \quad (45)$$

Сколько-нибудь большое значение массы *статического* жидкого шара недопустимо с точки зрения физики.

### Расходимость давления

Есть ли какой-нибудь физический параметр самой жидкости, по изменению которого можно было бы судить о приближении к критическому состоянию, кроме того факта, что просвет между состояниями с положительной и отрицательной энергией стремится при этом к нулю? Таким физическим параметром может служить *давление*. Давление в центре растет и при критической массе становится бесконечно большим. На фиг. 10.9 представлена зависимость давления от расстояния для различных значений массы, соответствующая общерелятивистской формуле

$$p = \rho c^2 \frac{\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-x_R^2}}{3\sqrt{1-x_R^2} - \sqrt{1-x^2}}. \quad (46)$$

Здесь  $x$  — безразмерная радиальная координата из уравнения (43), а  $x_R$  — значение этой координаты на поверхности шара<sup>1)</sup>. Можно сказать, что критическая

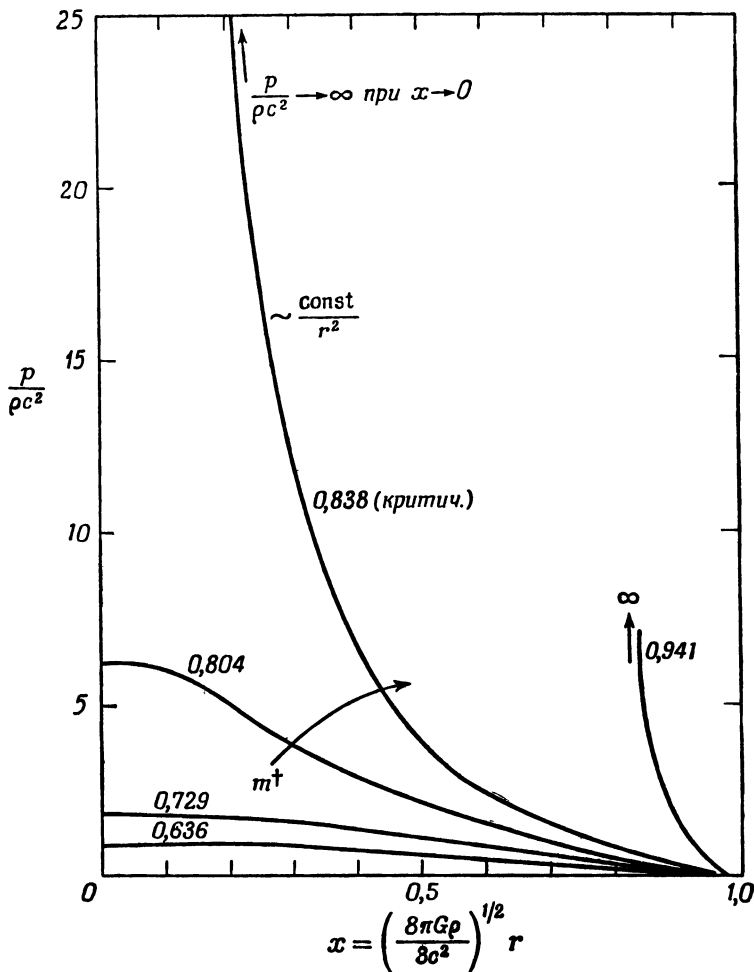
<sup>1)</sup> В нерелятивистском пределе это общее выражение для давления сводится к обычной ньютоновской формуле

$$p = \frac{\rho c^2}{4} (x_R^2 - x^2) = \frac{2\pi G\rho^2}{3} (R^2 - r^2).$$

В противоположном предельном случае массы, близкой к критической, или радиуса шара, близкого к критическому значению  $\sqrt{8/9} \sqrt{3c^2/8\pi G\rho}$ , так что  $x_R = \sqrt{8/9} (1 - \epsilon)$ , давление вблизи центра оказывается равным

$$p = \frac{4\rho c^2/3}{(4\sqrt{\epsilon})^2 + x^2}.$$





Фиг. 10.9. Давление (в единицах  $\rho c^2$ ) как функция расстояния от центра (взятого в единицах  $\sqrt{3c^2/8\pi G\rho}$ ), вычисленное в соответствии с общей теорией относительности для массы несжимаемой жидкости.

Полная масса жидкости дана в единицах  $(4\pi/3)(3c^2/8\pi G\rho)^{3/2}$  как массовый параметр  $m^\dagger$ . Теоретически вычисленное давление стремится к бесконечности в центре уже при  $m^\dagger=0,838$ . В этой же точке одновременно обращается в нуль и просвет между состояниями с положительной и отрицательной энергией (фиг. 10.8). Для одной из более высоких масс  $m^\dagger=0,941$  просвет между состояниями с положительной и отрицательной энергией обращается в нуль еще раньше.

масса в статической системе недопустима ввиду того, что давление не может принимать бесконечного значения.

### Критическая масса обязательно должна быть

Сделаем вывод из всего сказанного об идеализированных моделях и роли выбора того или другого уравнения состояния в вопросе о существовании критических величин и их значениях. Очевидно, что любое уравнение состояния, даже в таком крайнем и физически нереальном случае, как случай несжимаемости, неизбежно приводит к заключению о том, что *масса любого стабильного статического объединения холодного катализированного вещества не может превышать известного предельного значения.*

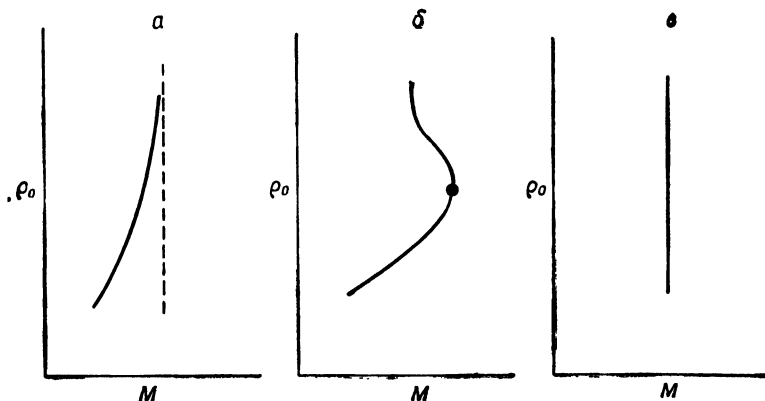
### Два рода критических точек

Всякая неопределенность в отношении уравнения состояния сверхплотного вещества сказывается на *характере* критической точки, но не на факте ее *существования*. Исследование показало существование двух родов возможных критических точек, которые мы можем назвать критической точкой «центрального разрушения» и критической точкой «начала спада».

Критическая точка «центрального разрушения» характеризуется неограниченным возрастанием давления при приближении к критическому значению массы. В качестве примеров можно привести 1) идеализированную электронно-железную модель (фиг. 10.2) и 2) более подробно исследованный Чандрасекаром газ, состоящий из электронов и ядер.

До сих пор мы принимали или рассчитывали уравнение состояния, а затем интегрировали общерелятивистские уравнения гидростатического равновесия, находя, таким образом, массу и другие свойства равновесной системы как функции плотности в центре («шифры каталога»). Но мы можем рассмотреть и обратную задачу. Пусть *дана* кривая зависимости массы от плот-

ности в центре и требуется *вывести* отсюда уравнение состояния. Мы можем, в частности, рассмотреть «нейтральный случай» (фиг. 10.10), когда масса *не зависит* от плотности в центре, если последняя превышает некоторое критическое значение. Удастся ли показать, что



Фиг. 10.10. Кривые зависимости полной массы от плотности в центре, соответствующие различным видам критического состояния.

*а* — «центральное разрушение», когда при критической или еще большей массе обращается в бесконечность давление в центре; *б* — «начало спада» — неустойчивость, при которой система с массой, превышающей критическую, спадает со все возрастающей скоростью (коллапс). Тип неустойчивости определяется уравнением состояния. Поэтому в принципе можно ввести *нейтральное уравнение состояния*, и ему соответствуют *в* — «нейтральные условия». При этом мы оказываемся на грани между «неустойчивостью относительно разрушения в центре» и «неустойчивостью относительно начала спада».

этот «нейтральный случай» описывается уравнением состояния, недопустимым в том смысле, что соответствующая ему скорость звука превышает  $c/\sqrt{3}$  или  $c$ . Если да, то это будет решающим доводом в пользу существования неустойчивости типа «начала спада», возникающего при переходе массы звезды через некоторое критическое значение.

В высшей степени интересно исследовать динамику такого спада. Некоторые стороны этой задачи были проанализированы Оппенгеймером и Снайдером [9]. Фуллер и Уилер [20] показали, что такой спад точно описывается решением Шварцшильда вплоть до того момента,

когда кривизна пространства становится бесконечной. Перейти этот предел невозможно, не привлекая глубоких проблем квантовой физики и квантовой общей теории относительности.

### **Неясно, должно ли сохраняться число барионов при весьма высоких давлениях**

Несмотря на все нерешенные проблемы, нам придется из всего сказанного сделать следующий общий вывод. Когда барионное число звезды превосходит критическое значение, *от закона сохранения барионного числа следует отказаться*. Тогда при добавлении к такой звезде хотя бы одного лишнего килограмма барионов либо 1) число барионов в ней останется *прежним*, как и до добавления этого килограмма барионов, либо 2) оно *увеличится* на то количество барионов, которое содержалось в этом килограмме, либо 3) его величина станет *неопределенной*. В первом случае, очевидно, произойдет разрушение барионов. Во втором случае оказывается, что в конечной пространственной области может быть сосредоточено сколь угодно большое число барионов, а это значило бы, что концепция сохранения барионного числа физически бессодержательна; то же самое можно сказать и о третьем случае.

Из сказанного следует, что систему, обладающую критической массой, можно рассматривать как катализатор, способный (в силу давления, неизмеримо превышающего давление в ядерном веществе) переводить нуклоны в свободное излучение. Дальнейший анализ законов сохранения, действующих при таком процессе превращения (причем *обратимого* превращения), представляется нам одной из поистине центральных проблем релятивистской физики.

### **ЛИТЕРАТУРА**

1. Harrison B. K., Wakano M., Wheeler J. A., La structure et l'évolution de l'univers, Inst. Intern. Phys., Stoops, Brussels, 1958.

2. Wheeler J. A., *Geometrodynamics*, New York, 1962.
3. Cameron A. G. W., *Astrophys. Journ.*, **130**, 884 (1959).
4. Salpeter E. E., *Ann. of Phys.*, **11**, 393 (1960).
5. Salpeter E. E., *Astrophys. Journ.*, **134**, 669 (1961).
6. Hamada T., Salpeter E. E., *Astrophys. Journ.*, **134**, 683 (1961).
7. Ландау Л. Д., *Phys. Zs. d. Sowjetunion*, **1**, 285 (1932).
8. Oppenheimer J. R., Serber R., *Phys. Rev.*, **54**, 540 (1938).
9. Spitzer L., *Am. Sci.*, **50**, 473 (1962).
10. Schwarzschild M., *Structure and Evolution of the Stars*, Princeton, N. J., 1958.
11. Зельдович Я. Б., *ЖЭТФ*, **41**, 1609 (1961).
12. Rudkjøbing M., *Pub. Københavns Obs.*, No. 160, 1952.
13. Cameron A. G. W., *Astrophys. Journ.*, **130**, 884 (1959).
14. Амбарцумян В. А., Саакян Г. С., *Астрон. журн.*, **37**, 193 (1960).
15. Skyrme T. H. R., *Nucl. Phys.*, **9**, 615 (1959).
16. Chandrasekhar S., *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, **95**, 207 (1935).
17. Oppenheimer J. R., Volkoff G., *Phys. Rev.*, **55**, 374 (1939).
18. Brueckner K. A., Masterson K. S., Jr., *Phys. Rev.*, **128**, 2267 (1962).
19. Oppenheimer J. R., Snyder H., *Phys. Rev.*, **56**, 455 (1939).
20. Fuller R. W., Wheeler J. A., *Phys. Rev.*, **128**, 919 (1962).

# 11

## Гравитация и свет

Д Ж. В Е Б Е Р

### Нерелятивистский эффект отклонения светового луча в гравитационном поле

Мысль о том, что свет взаимодействует с гравитационным полем, зародилась более столетия назад. В 1801 г. Зольднер [1] рассмотрел вопрос об отклонении луча света в гравитационном поле с точки зрения корпускулярной теории света и ньютоновских законов движения.

Рассмотрим фотон как частицу с массой  $m$  (величина  $m$  в дальнейшем сокращается, так что не возникает проблемы, какую именно массу  $m$  следует приписать фотону). Пусть фотон проходит вблизи большей массы  $M$ , как это показано на фиг. 11.1. Положим прицельное расстояние равным  $R$ . Выберем прямоугольную систему координат так, чтобы на бесконечности траектория светового луча была параллельна оси  $x$ , а отклонение луча происходило в плоскости  $xy$ . Уравнение движения имеет вид

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = - \frac{GMm}{r^2} \frac{y}{r}, \quad (1)$$

где

$$r^2 = x^2 + y^2. \quad (2)$$

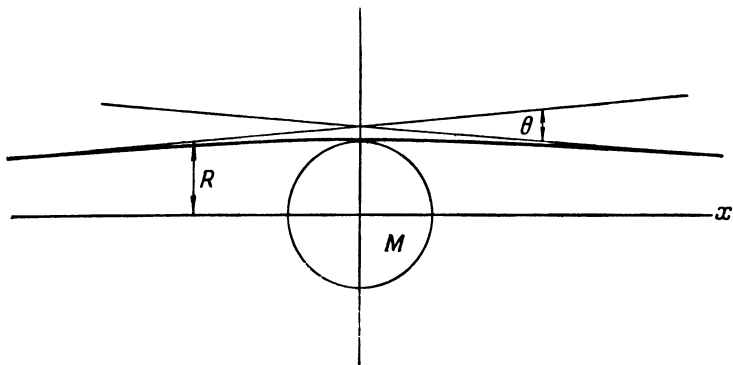
Если отклонение мало, можно положить  $y \approx R$ . Мы будем писать  $x = ct$ . Подставив эти величины в уравнение (1), можно его сразу же проинтегрировать, причем получится

$$\frac{dy}{dx} = \frac{GM_x}{c^2 R} \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}}. \quad (3)$$

Угол, на который траектория луча отклонилась от своего первоначального направления, равен

$$\theta \approx \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=-\infty} - \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=+\infty} = -\frac{2GM}{Rc^2}. \quad (4)$$

Полученная величина равна половине угла, предсказанного Эйнштейном и получившего подтверждение при



Ф и г. 11.1. Траектория светового луча, искривленная гравитационным полем Солнца.

астрономических наблюдениях во время полных солнечных затмений. Такое расхождение в результатах этих двух теорий объясняется тем, что Зольднер использовал неправильные уравнения движения. Эти уравнения справедливы лишь в случае медленно движущихся частиц, а фотоны нельзя назвать медленными. В следующем разделе мы выведем эйнштейновский результат.

### Релятивистское отклонение луча света

Уравнение геодезической имеет вид

$$\frac{d^2y}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^y \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0. \quad (5)$$

В случае света интервал всегда равен нулю, и  $s$  следует считать параметром, изменяющимся вдоль траектории

фотона <sup>1)</sup>. Можно взять  $s=x^0=ct$ . Через  $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$  обозначен символ Кристоффеля второго рода. В изотропных координатах и в низшем порядке учета отклонения элемента кривой от его формы в теории Минковского  $ds^2$  можно записать в виде

$$-ds^2 \approx \left(1 + \frac{2GM}{rc^2}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2) - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2. \quad (6)$$

Для такой метрики  $\Gamma_{0x}^y=0$ , и при указанном выше выборе параметра  $s$  в случае света, распространяющегося вдоль оси  $x$ ,  $dx^0/ds=1$  и  $dx/ds=1$ . С хорошей степенью точности уравнению (5) можно придать вид

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \Gamma_{00}^y + \Gamma_{xx}^y = 0. \quad (7)$$

Мы пренебрегли здесь членами, содержащими  $y$ -компоненту скорости ввиду ее малости. Из определения символа  $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$  и из уравнения (6) следует

$$\Gamma_{00}^y = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial y} = \frac{GM}{r^2 c^2} \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{GM_y}{c^2 (x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad (8)$$

$$\Gamma_{xx}^y = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{xx}}{\partial y} = \frac{GM}{r^2 c^2} \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{GM_y}{c^2 (x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad (9)$$

где  $dr/dy = y/r$ . Теперь можно вычислить величину отклонения светового луча центральной массой:

$$\theta = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{-\infty} - \left(\frac{dy}{dx}\right)_{+\infty} = -4 \frac{GM}{rc^2}. \quad (10)$$

Легко видеть, откуда появляется дополнительный множитель 2. Полное отклонение складывается из двух равных величин  $\Gamma_{00}^y$  и  $\Gamma_{xx}^y$ , каждая из которых по отдельности равна правой части уравнения (1). В классической же теории учитывается лишь один член, а именно  $\Gamma_{00}^y$ . При малых скоростях  $dx/ds \sim v/c$  и  $\Gamma_{xx}^y v^2 \ll \Gamma_{00}^y c^2$ , но при  $v=c$  оба слагаемых становятся в точности равными друг другу, т. е. фотон ведет себя так, как будто его гравитационная масса вдвое превышает инертную.

<sup>1)</sup> Канонический параметр. — Прим. ред.



## Влияние спина фотона

Хотя в уравнении (2) и учтен релятивистский эффект, но мы еще не учли действия спина фотона. Уравнения движения вращающихся тел и частиц со спином несколько отличаются от уравнений движения бесспиновых частиц. Я приведу здесь лишь результаты [2]. Когда спин фотона перпендикулярен направлению его движения, угол отклонения луча равен

$$\theta = - \frac{4GM}{Rc^2} \left( 1 - \frac{\lambda}{R} \right), \quad (11)$$

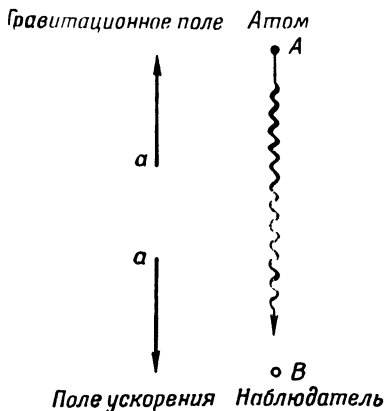
где  $\lambda$  — длина волны фотона. В случае когда спин фотона параллелен направлению движения, дополнительный член  $\lambda/R$  следует отбросить. Из квантовой теории поля мы знаем, однако, что спин частицы с нулевой массой покоя может быть либо параллельным, либо антипараллельным направлению ее движения — такая частица обладает лишь двумя возможными спиновыми состояниями: полным спином, направленным вперед, и полным спином, направленным назад. Ввиду этого обстоятельства спиновый эффект исчезает.

## Гравитационное красное смещение

Эффект гравитационного красного смещения частоты света уже не раз обсуждался. Но ради полноты я все же кратко на нем остановлюсь. Для отклонения луча света в поле Солнца наивные представления ньютоновской механики не дают правильного результата даже в первом приближении, в котором эта механика справедлива. Что же касается красного смещения, то в этом случае в первом порядке правильный результат получается уже при самом примитивном подходе, когда учитывается лишь принцип эквивалентности и закон доплеровского смещения.

Принцип эквивалентности утверждает, что в случае локальных наблюдений влияние однородного гравитационного поля неотличимо от влияния эквивалентного ему поля равномерного ускорения.

На фиг. 11.2 изображен атом, излучающий в точке  $A$  фотон с частотой  $\nu$ . В некоторый более поздний момент  $t=l/c$ , где  $l$  — расстояние между наблюдателем и атомом, наблюдатель в точке  $B$  в эквивалентной ускоренной



Фиг. 11.2. Эквивалентность однородного гравитационного поля и поля равномерного ускорения.

Эффект Доплера в первом порядке дает гравитационное красное смещение.

системе отсчета наблюдает этот фотон. За промежуток времени  $t$  наблюдатель подвергся ускорению  $g$  и в конце этого промежутка приобрел скорость

$$v = gt = g \frac{l}{c}. \quad (12)$$

С точки зрения гравитации мы называем следующий отсюда эффект красным смещением, а с точки зрения наблюдателя в ускоренной системе отсчета — эффектом Доплера. Таким образом, изменение частоты света составит

$$\Delta\nu = -\nu \left( g \frac{l}{c} \right) \frac{1}{c} = -\nu \frac{\Delta\varphi}{c^2}. \quad (13)$$

Здесь  $\Delta\varphi$  — изменение гравитационного потенциала, т. е. разность значений этого потенциала в месте нахождения наблюдателя и в месте нахождения излучающего атома. Уравнение (13) и есть выражение для гравитационного красного смещения в первом порядке.

## Сравнение теории Максвелла и теории Эйнштейна

В частной теории относительности уравнения Максвелла имеют вид

$$\square A_{\mu} = -j_{\mu}, \quad (14)$$

где  $A_{\mu}$  — четырехмерный потенциал, а  $j_{\mu}$  — вектор плотности тока. С уравнением (14) связано дополнительное условие

$$A_{,\mu}^{\mu} = 0, \quad (15)$$

называемое калибровочным условием Лоренца. С другой стороны, мы имеем уравнения Эйнштейна

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (16)$$

Эти две системы уравнений — (14) и (16) — кажутся совершенно различными. В классической теории электромагнетизма уравнения (14) описывают электромагнитное поле в координатах Минковского. Заряды и поля в теории Максвелла существуют и изменяются в плоском пространстве. В общей теории относительности гравитационное поле является свойством пространства и определяется геометрией этого пространства. На геометрию влияет присутствие масс. Движение бесспиновых частиц, испытывающих гравитационное взаимодействие, дается геодезическими линиями. Поэтому полагали, что общая теория относительности принципиально отличается от теории электромагнетизма. Но за последние годы эта точка зрения несколько изменилась.

Общий анализ теорий поля обнаруживает взаимосвязь между спином частиц и рангом тензора, описывающего данное поле. В случае электромагнитного поля фотон обладает спином 1, причем используется четырехмерный вектор-потенциал. Паули и Фирц [3] показали, что поле, описываемое симметричным тензором второго ранга, должно подчиняться релятивистским волновым уравнениям для частиц со спином 2. Это основано на том, что частица со спином 2 может иметь пять квантованных ориентаций спина. Кроме того, состояниям частицы и античастицы соответствует энергия противо-

ложного знака. Итак, у волновой функции частицы со спином 2 должно быть десять компонент, что соответствует числу компонент симметричного тензора второго ранга. Этот вопрос рассматривался в другой связи в гл. 5.

Паули и Фирц показали также, что релятивистские волновые уравнения для свободной частицы со спином 2 и нулевой массой покоя имеют вид

$$\square U_{\mu\nu} = 0, \quad (17)$$

где  $U_{\mu\nu}$  — симметричный тензор второго ранга, и что должно выполняться дополнительное условие

$$U_{,\nu}^{\mu\nu} = 0 \quad (18)$$

(в этом разделе мы поднимаем и опускаем индексы с помощью лоренцевой метрики  $\delta^{\mu\nu}$ ). Предположим теперь, что допускаются взаимодействия. Последние можно представить тензором  $\theta_{\mu\nu}$ . Тогда уравнения поля с учетом взаимодействий примут вид

$$\square U_{\mu\nu} = k\theta_{\mu\nu}, \quad (19)$$

где  $k$  — константа связи. Из дополнительного условия (18) теперь следует, что

$$\theta_{,\nu}^{\mu\nu} = 0. \quad (20)$$

Так как тензор энергии — импульса — натяжений вещества  $T_{\alpha\beta}$  удовлетворяет уравнению (20), то можно было бы связать  $T_{\alpha\beta}$  с  $\theta_{\mu\nu}$ . Тензор энергии должен появляться при построении теории гравитации именно потому, что натяжения и энергия являются источниками гравитационного поля. Но и само гравитационное поле также должно создавать и натяжения, и энергию. Обозначим этот вклад через  $t_{\mu\nu}$ . Тогда уравнения поля примут вид

$$\square U_{\mu\nu} = k(T_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}). \quad (21)$$

При  $T_{\mu\nu} = 0$  получаются уравнения для поля в пустоте

$$\square U_{\mu\nu} = kt_{\mu\nu}. \quad (21a)$$

Попытаемся теперь получить уравнения (21a) из вариационного принципа. Построим сначала плотность лагранжиана  $L$  для нашего поля. Метод построения

лагранжианов излагается в обычных учебниках по теории поля [4]. Плотность лагранжиана свободного поля тогда должна быть равна

$$L = -\frac{1}{2} U_{,\alpha}^{\mu\nu} U_{\mu\nu}^{\cdot\alpha}, \quad (22)$$

и принцип действия приводит к уравнениям поля

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial L}{\partial U_{,\alpha}^{\mu\nu}} - \frac{\partial L}{\partial U^{\mu\nu}} = 0. \quad (23)$$

Величина, построенная из  $L$  и удовлетворяющая закону сохранения  $t_{\mu,\nu}^{\cdot\nu} = 0$ , равна [5]

$$t_{\mu}^{\cdot\nu} = \delta_{\mu}^{\nu} L - U_{,\mu}^{\alpha\beta} \frac{\partial L}{\partial U_{,\nu}^{\alpha\beta}} = U_{,\mu}^{\alpha\beta} U_{\alpha\beta}^{\cdot\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\nu} U_{,\rho}^{\alpha\beta} U_{\alpha\beta}^{\cdot\rho}. \quad (24)$$

Из (22) и (23) следуют уравнения поля

$$\square U^{\mu\nu} = 0, \quad (25)$$

не учитывающие взаимодействия поля с самим собой, соответствующего уравнениям (21а). Уравнения (21а) можно получить, добавляя к плотности лагранжиана (22) новый член  $f_1$ :

$$L' = -\frac{1}{2} U_{,\alpha}^{\mu\nu} U_{\mu\nu}^{\cdot\alpha} + f_1. \quad (26)$$

Новый член  $f_1$  в лагранжиане (26) приводит к новому выражению для  $t_{\mu}^{\cdot\nu}$ , которое мы обозначим через  $t_{\mu}^{\prime\nu}$ , так что должно быть

$$\square U^{\mu\nu} = t^{\prime\mu\nu}. \quad (21б)$$

Чтобы получить из принципа действия уравнения (21б), к выражению (26) нужно добавить слагаемое  $f_2$ , но это приведет к  $t_{\mu}^{\prime\prime\nu}$  и, следовательно, к новым уравнениям поля

$$\square \dot{U}^{\mu\nu} = t^{\prime\prime\mu\nu}. \quad (21в)$$

Продолжая так и дальше, мы получим плотность лагранжиана в виде бесконечного ряда слагаемых. Это сделал Гупта [6] и нашел, что плотность лагранжиана в виде бесконечного ряда, конечно, равна скалярной

кривизне, т. е. именно тому выражению, которое следует взять для вывода уравнений общей теории относительности из принципа действия.

Повторим, что уравнения общей теории относительности могут быть получены на основании тех же общих соображений, что и уравнения других полей. Разница состоит лишь в том, что здесь мы имеем дело с частицами со спином 2 и в качестве источника гравитационного поля берем энергию. Но гравитационное поле само создает часть энергии, также являющейся его источником. Это ведет к нелинейности и к выражению плотности лагранжиана в виде бесконечного ряда, из которого можно получить скалярную кривизну.

### Запись теории электромагнетизма в произвольных координатах и геометризация электродинамики

Электродинамика описывается четырехмерным потенциалом, который подчиняется в лоренцовых системах уравнениям (14) и (15). Тензор напряженности  $F_{\mu\nu}$  имеет вид

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu, \mu} - A_{\mu, \nu}, \quad (27)$$

и уравнения Максвелла записываются как

$$F^{\mu\nu}_{; \nu} = j^{\mu}, \quad (28)$$

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial F_{\gamma\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}} = 0 \quad (29)$$

(в этом разделе мы поднимаем и опускаем индексы с помощью метрического тензора  $g_{\mu\nu}$  и обратного ему  $g^{\mu\nu}$ ). Уравнения (29) тождественно выполняются для всех  $F_{\mu\nu}$ , определенных через четырехмерный потенциал в соответствии с (27), так как  $(\nabla[\nabla\mathbf{A}])$  тождественно равняется нулю. В произвольных координатах уравнения (28) принимают вид

$$F^{\mu\nu}_{; \nu} = j^{\mu}. \quad (30)$$

Точка с запятой означает ковариантное дифференцирование.

Уравнение (29) можно привести к виду

$$[\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} (-g)^{-1/2} F_{\alpha\beta}]_{;\delta} = 0. \quad (31)$$

Здесь  $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$  — тензорная плотность Леви-Чивита, для которой  $\epsilon^{0123} = 1$  и которая меняет знак при перестановке любой пары индексов, обращаясь в нуль при совпадении двух или более индексов;  $g$  — детерминант  $g_{\mu\nu}$ . Из обычной формулы для ковариантной дивергенции антисимметричного тензора следует, что уравнения (29) сохраняют силу в произвольных координатах. Эти же формулы ковариантного дифференцирования дают

$$A_{\nu, \mu} - A_{\mu, \nu} = A_{\nu; \mu} - A_{\mu; \nu} = F_{\mu\nu}. \quad (32)$$

В произвольных координатах обобщенное условие Лоренца имеет вид

$$A^{\mu}_{;\mu} = 0, \quad (33)$$

а уравнения (30) при учете правила изменения порядка ковариантного дифференцирования принимают вид

$$A^{\mu; \alpha}_{;\alpha} - R_{\mu\alpha} A^{\alpha} = -j_{\mu}. \quad (34)$$

Здесь  $R_{\mu\nu}$  — снова тензор Риччи. Поэтому можно считать, что электродинамика весьма естественно вписывается в рамки общей теории относительности. Но Эйнштейну казалось, что этого недостаточно. Ввиду успеха геометрического истолкования гравитации он полагал, что, возможно, удастся геометризировать и электромагнетизм.

Стремление к геометризации объясняется отчасти тем, что в общей теории относительности гравитационные силы полностью выражаются через геометрию пространства. Но в присутствии электромагнитных сил бесспиновые частицы, если они несут заряд, уже не движутся по геодезическим.

Долгое время считалось, что частичная геометризация гравитации и электромагнитного поля в отсутствие зарядов может быть осуществлена путем исключения максвелловского тензора напряженности [7, 8] из системы уравнений Максвелла — Эйнштейна. Это оказы-

вается возможным благодаря наличию у тензора энергии поля Максвелла некоторых весьма специальных свойств, а именно:

$$T_{\alpha}^{\alpha} = 0, \quad (35)$$

$$T_{\mu}^{\alpha} T_{\alpha}^{\nu} = \frac{1}{4} \delta_{\mu}^{\nu} T_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta}, \quad (36)$$

$$T_{00} > 0. \quad (37)$$

Из указанных соотношений следуют уравнения

$$R = 0, \quad (38)$$

$$R_{\alpha}^{\beta} R_{\beta}^{\gamma} = \frac{1}{4} \delta_{\alpha}^{\gamma} R_{\sigma\tau} R^{\sigma\tau}, \quad (39)$$

$$\left( \frac{\varepsilon_{\beta\lambda\mu\nu} R^{\lambda\gamma};{}^{\mu} R_{\gamma}^{\nu} \sqrt{-g}}{R^{\sigma\tau} R_{\sigma\tau}} \right)_{, \alpha} = \left( \frac{\varepsilon_{\alpha\lambda\mu\nu} R^{\lambda\gamma};{}^{\mu} R_{\gamma}^{\nu} \sqrt{-g}}{R_{\sigma\tau} R^{\sigma\tau}} \right)_{, \beta}. \quad (40)$$

Метрика, удовлетворяющая этим уравнениям, имеет в качестве источника тензор энергии — импульса — натяжений поля, удовлетворяющего уравнениям Максвелла. Как показали Виттен [9] и независимо от него Пенроз, необходимые для интегрирования этих уравнений условия Коши могут отвечать одновременно более чем одному полю максвелловского типа. Таким образом, данный метод описания является неоднозначным, и тензор энергии Максвелла невозможно исключить, не отбрасывая, по крайней мере частично, физического содержания теории.

Попытки проведения полной геометризации [10] теории растянулись на многие годы. Когда эта проблема только появилась, думали, что вся физика сводится к гравитации и электромагнетизму. Теперь же геометризация должна была бы касаться и квантовых эффектов, равно как сильных и слабых взаимодействий. Исключительная трудность решения такой проблемы привела к тому, что ее забросили все, за исключением очень немногих математиков и физиков.



## Квантование системы взаимодействующих полей Максвелла — Эйнштейна

Как электродинамику, так и теорию гравитации можно представить в гамильтоновой форме и проводить квантование методом приближений [11]. В случае слабого поля

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \quad (41)$$

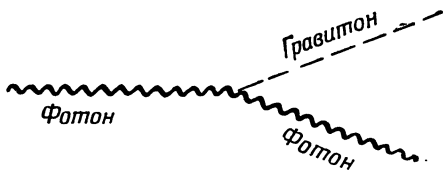
Пространственные значения индексов 1, 2 и 3 мы будем обозначать латинскими буквами. Можно выбрать такую систему координат, что

$$g_{\mu 0} = \delta_{\mu 0}. \quad (42)$$

В этих предположениях гамильтониан системы взаимодействующих полей Эйнштейна — Максвелла может быть приближенно записан как

$$H = H_G + H_M + \int \left( \frac{1}{8} h_{rs} \eta_r \eta_s - 2h_{lj} F_{ml} F_{dj} \delta^{md} \right) d^3x. \quad (43)$$

Здесь  $H_G$  содержит лишь канонические координаты (полевые переменные) и импульсы гравитационного поля, тогда как  $H_M$  содержит лишь полевые переменные (канонические координаты) максвелловского поля  $A_k$  и канонические импульсы  $\eta_k$ . Рассмотрим в уравнении (43)



Фиг. 11.3. Распад фотона на фотон и гравитон.

члены взаимодействия при квантовании теории. Эти члены имеют вид сумм произведений, в каждом из которых содержится один оператор гравитационного поля и два оператора поля Максвелла. Подобный вид взаимодействия означает, что фотон может распасться на новый

фотон и гравитон (фиг. 11.3). Детальный анализ такого процесса показывает, что матричные элементы в этом случае отличны от нуля, если только все три частицы не движутся в одном и том же направлении. Но массы покоя всех трех частиц равны нулю, и закон сохранения энергии и импульса может точно выполняться только тогда, когда все частицы движутся в одном направлении. Поэтому такой процесс невозможен, разве что при исключительно высоких энергиях, при которых закон сохранения энергии может несколько нарушаться. Это энергии, намного превышающие  $10^{28}$  эв. Поэтому такого рода процессами нельзя объяснить красного смещения частоты света внегалактических объектов как «усталость света» при весьма длительном путешествии фотонов.

Дальнейшее исследование этого взаимодействия показывает, что гравитоны могут возникать при прохождении фотонов в кулоновском или статическом магнитном поле. Но соответствующие эффективные сечения ничтожно малы. Для кулоновского рассеивателя, содержащего однородное электрическое или магнитное поле, линейные размеры которого превышают длину волны падающего фотона, эффективное сечение этого процесса равно

$$S = \frac{8\pi^2 G U l}{c^4}. \quad (44)$$

Здесь  $U$  — энергия рассеивателя, а  $l$  — его протяженность в направлении распространения фотона. В лабораторных условиях это сечение оказывается слишком малым — для  $1 \text{ м}^3$  рассеивателя, содержащего  $10^{15}$  эрг электрической энергии, сечение  $S \approx 10^{-30} \text{ см}^2$ . Для галактики, обладающей магнитным полем  $\sim 10^{-6}$  э, эффективное сечение должно составлять  $\sim 10^{-28} \text{ см}^2$ , так что в результате указанного процесса превращаться в гравитон будет один из  $10^{16}$  попадающих в нее фотонов. Отметим, что в выражение (44) не входит постоянная Планка. Таким образом, формула (44) выражает тот факт, что взаимодействие двух бозе-полей существует в классическом пределе.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Soldner, Berliner Astronomisches Jahrbuch für 1804, Berlin, S. 161.
2. Corinaldesi E., Параретру А., Proc. Roy. Soc., **A209**, 259 (1951).
3. Fierz M., Pauli W., Proc. Roy. Soc., **173**, 211 (1939).
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, М., 1960.
5. Weber J., General Relativity and Gravitational Waves, New York, 1961, p. 73 (имеется перевод: Дж. Вебер, Общая теория относительности и гравитационные волны, ИЛ, 1962).
6. Gupta S. N., Phys. Rev., **46**, 1683 (1954).
7. Rainich G. Y., Trans. Am. Math. Soc., **27**, 106 (1927).
8. Misner C. W., Wheeler J. A., Ann. Phys., **2**, 525 (1957).
9. Witten L., Phys. Rev., **120**, 635 (1960).
10. Hlavaty V., Geometry of Einstein's Unified Field Theory, Groningen, The Netherlands, 1957.
11. Weber J., Hinds G., Phys. Rev., **28**, 2414 (1962).

# 12

## *Возможные воздействия на Солнечную систему со стороны $\varphi$ -волн (если они существуют)*

Р. ДИККЕ

### **Свойства скалярного поля далекого радиуса действия**

Под  $\varphi$ -волной понимается волна скалярного поля далекого радиуса действия, т. е. нейтрального скалярного поля с массой покоя квантов, равной нулю. В названии настоящей лекции важнее всего, по-видимому, вопрос о существовании таких волн, и именно об этом мы меньше всего можем сказать. В то же время основные свойства этих волн могут быть описаны с достаточной уверенностью на основании известных экспериментальных наблюдений и требования релятивистской инвариантности. Таким образом, положение несколько необычное — мы знаем о свойствах поля больше, чем о его действительном существовании.

Я кратко остановлюсь на некоторых из этих свойств, уже обсуждавшихся в гл. 7 и 8. В этих двух главах в теорию тяготения было введено скалярное поле далекого радиуса действия, чтобы изменить общую теорию относительности и привести ее в большее соответствие с требованиями принципа Маха. Уравнения поля могут принимать в такой модифицированной теории две математические формы. В первом случае вещество ведет себя обычным образом, т. е. масса покоя и размерные константы одинаковы во всех точках. При этом, однако, уравнения поля Эйнштейна недействительны. Во втором случае уравнения поля Эйнштейна сохраняют свою силу, но скалярное поле уже не является одной из величин, описывающих тяготение, а оказывается обычным полем вещества (подобно электромагнитному полю). Это ска-

лярное поле обладает тем любопытным свойством, что от него зависят массы покоя элементарных частиц, и в силу этого размеры атомов оказываются непостоянными.

В первом случае (теория типа Йордана) вариационный принцип имеет вид

$$0 = \delta \int \left( \varphi R + \frac{16\pi}{c^4} L - \frac{\omega \varphi_{,i} \varphi^{,i}}{\varphi} \right) \sqrt{-g} d^4x. \quad (1)$$

В первом члене, который дает нам уравнения поля метрического тензора, стоит скалярная кривизна  $R$ , умноженная на потенциал скалярного поля  $\varphi$ . Из-за наличия в этом члене  $\varphi$  уравнения отличаются от эйнштейновских. Второй же член, содержащий только лагранжиан вещества  $L$ , дает обычные уравнения геодезической, описывающей движение частиц. Из последнего члена с учетом вклада первого мы получаем волновое уравнение для скалярного поля  $\varphi$

$$\square \varphi = \frac{8\pi}{2\omega + 3} T, \quad (2)$$

где  $\square \varphi$  — даламбертиан  $\varphi$ ,  $T$  — свернутый тензор энергии — импульса всех частиц и полей, а  $\omega$  — безразмерная константа связи скалярного поля. Величина  $\omega$  — порядка 1. Сравнение с данными наблюдений показывает, что  $\omega$  должно быть равно по крайней мере 6. Гравитационная постоянная  $G$ , явно не фигурирующая в вариационном принципе, дается величиной  $\varphi$  ( $G \sim 1/\varphi$ ).

Вторую (альтернативную) форму теории можно получить из первой путем преобразования — соответствующего переопределения масштабов измерений. При таком преобразовании единицы длины, времени и обратной массы приобретают масштабный множитель, зависящий от  $\varphi$ , а вариационный принцип принимает вид

$$0 = \delta \int \left[ \bar{R} + \frac{16\pi G}{c^4} (\bar{L} + \bar{L}_\varphi) \right] \sqrt{-g} d^4x. \quad (3)$$

Новая скалярная кривизна  $\bar{R}$  получается из первоначальной путем ее конформного преобразования. Новая плотность лагранжиана вещества  $\bar{L}$  изменила свой вид вследствие перехода к новым единицам измерения, а через  $\bar{L}_\varphi$  обозначена новая плотность лагранжиана скалярного поля «вещества». В этом варианте теории

действительны уравнения Эйнштейна для компонент метрического тензора, но зато модифицированы уравнения движения частиц. Вместо того чтобы, как прежде, быть одной из величин, описывающих гравитационное поле (а значит, и геометрию), скалярное поле теперь фигурирует в качестве поля взаимодействия вещества с далеким радиусом действия. С физической точки зрения обе формы теории равнозначны, но для целей исследования свойств  $\varphi$ -волн удобнее придерживаться теории, вытекающей из уравнения (3). Результаты обычного взаимодействия вещества на больших расстояниях проще себе представить, чем следствия наличия сложной связи между  $\varphi$ -полем и метрическим тензором, определяемой уравнением (1). Волновое уравнение для  $\varphi$ -поля, вытекающее из вариационного принципа (3), имеет вид

$$\square (\ln \varphi) = \frac{8\pi G \bar{T}}{c^4 (3 + 2\omega)}, \quad (4)$$

где  $\bar{T}$  — свернутый тензор энергии — импульса, полученный с помощью одного только лагранжиана  $\bar{L}$ . В этом варианте теории масса частицы является функцией потенциала  $\varphi$ :

$$m = m_0 \varphi^{-1/2}, \quad (5)$$

где  $m_0$  — константа. Этот результат можно подставить в уравнение (4), взяв след тензора энергии — импульса вещества в виде

$$\bar{T} = \bar{T}_0 \varphi^{-1/2}, \quad (6)$$

где  $\bar{T}_0$  уже не зависит от  $\varphi$ . Тогда уравнение (4) переписется как

$$\square (\ln \varphi) = \frac{8\pi G}{c^4 (3 + 2\omega)} \bar{T}_0 \varphi^{-1/2}. \quad (7)$$

### Астрономические источники $\varphi$ -волн

Плотность большинства астрономических объектов достаточно мала, и при исследовании создаваемого ими гравитационного и скалярного поля (если оно существует) можно с полным правом пользоваться приближением слабого поля. Далее во всей этой лекции мы

будем проводить все рассуждения в приближении слабого поля, причем нулевое приближение дается в локально лоренцевой системе координат (система Минковского).

Уравнение (4) обладает следующим любопытным свойством. Если вещество локализовано в замкнутой системе, занимающей в среднем за большой промежуток времени некоторый фиксированный объем, то из теоремы о вириале следует, что  $\bar{T}$  равно полной энергии системы, проинтегрированной по этому объему.

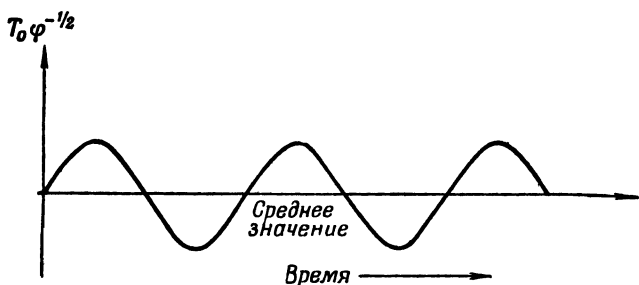
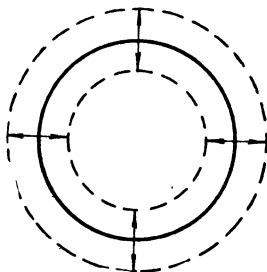
Поэтому в случае статических систем интенсивность источника скалярного поля будет той же, что и в случае гравитации. В такой теории величина  $\bar{T}$  в точности не сохраняется. Например, для звезды, испытывающей радиальные колебания, интеграл от этой величины по объему звезды также осциллирует во времени. Колебания его совершаются около среднего значения, равного полной энергии этой звезды (фиг. 12.1).

Такая осциллирующая звезда представляет собой колеблющийся источник-монополь, излучающий ф-волны, которые в принципе можно принимать в других местах космоса. Этот эффект не свойствен обычному гравитационному полю. В общей теории относительности хорошо известно, что отдельная пульсирующая звезда не излучает гравитационных волн, так как гравитационное излучение представляет собой поляризованное квадрупольное излучение. Пульсирующая звезда обладает сферической симметрией и не может генерировать поляризованного квадрупольного излучения. Мы вернемся к этому вопросу, когда будем говорить о коллапсе звезды.

Другое явление, связанное со скалярными полюсными гравитационными волнами, изучалось Бриллом, который рассматривал излучение планет, движущихся по эллиптическим орбитам. Возможно, что монопольное излучение скалярного поля окажется настолько сильным, что приведет к явлению торможения движения планет, противоречащему данным наблюдений. Планета, движущаяся по вытянутой эллиптической орбите, вносит вклад в колебательные изменения величины следа тензора энергии — импульса, проинтегрированного по всей Солнечной системе (фиг. 12.2). Это должно приводить к излучению монопольных волн. Но такое излучение ока-

зывается примерно столь же слабым, как и обычное гравитационное излучение, вызываемое колебаниями квадрупольного момента Солнечной системы.

*Пульсирующая звезда*



Фиг. 12.1. Колебания интеграла от свернутого тензора энергии — импульса  $T_0 \varphi^{-1/2}$  радиально осциллирующей звезды.

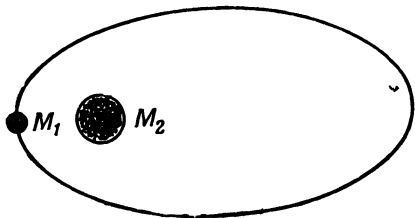
Значительно более мощным источником ф-волн может оказаться коллапсирующая звезда. Считается, что при определенных условиях возможен коллапс ядра массивной звезды вследствие быстрого изменения его термодинамического состояния в конце термоядерной эволюции звезды. В настоящее время предполагают, что в результате такого рода коллапса происходят взрывы сверхновых звезд. На стадии коллапса квазистатическое состояние равновесия ядра внезапно нарушается и вещество звезды начинает свободно падать к ее центру. Интеграл следа тензора энергии — импульса  $\bar{T}$  может тогда измениться примерно на 100%. Энергия, которую может из-



лучить в виде ф-волн звезда во время коллапса, по порядку величины равна

$$\frac{\text{Энергия ф-волны}}{\text{Полная энергия звезды}} \sim \frac{1}{3 + 2\omega} \frac{GM}{Rc^2}, \quad (8)$$

где  $M$  — масса звезды, а  $R$  — ее радиус в начале коллапса. Радиус может быть весьма малым, так как при приближении массы ядра к критической оно сжимается и становится вырожденным телом весьма малого радиуса.



Фиг. 12.2. Монопольное излучение системы двух тел, связанных силами тяготения.

(Более полно свойства вырожденных звезд разбираются в гл. 10.) Величина  $GM/Rc^2$  может быть порядка  $10^{-4}$  и даже больше. Поэтому не менее одной миллионной части энергии звезды, а может быть, и намного больше должно быть излучено в виде волн рассматриваемого типа.

Во Вселенной — в ее теперешнем состоянии — крайне трудно найти процессы, в результате которых могли бы излучаться значительно большие количества этой энергии. Интересна в этом отношении открытая недавно яркая компактная галактика ЗС48 [1]. Если это действительно галактика, а причиной ее необычайно интенсивного оптического излучения является выделение энергии при гравитационном коллапсе, то такой объект мог бы быть мощным источником ф-волн. Трудно, однако, ожидать, чтобы в наше время существовали такие источники ф-поля, которые создавали бы в пространстве плотность энергии, сравнимую с плотностью обычного вещества.

Но если в начале своего развития Вселенная была очень сильно сжата, то на первом этапе эволюции Вселенной могли бы быть генерированы ф-волны с большой

плотностью энергии, которые могли сохраниться и поныне. Тогда значительная часть плотности энергии, содержащаяся в пространстве, находилась бы в форме волн скалярного поля.

### Влияние $\phi$ -волн на галактики

Средняя плотность энергии для волн скалярного поля связана со скоростью изменения этого поля следующим образом:

$$\bar{u} \sim \frac{3 + 2\omega}{16\pi G} c^2 \left( \frac{\dot{\phi}}{\phi} \right)^2, \quad (9)$$

где  $\dot{\phi}$  — производная по времени от потенциала  $\phi$ .

Наибольшее возможное значение  $\dot{\phi}/\phi$  можно оценить, полагая, что плотность энергии этих волн равна средней плотности энергии в случае космологической модели для Вселенной, расширяющейся со скоростью, соответствующей величине постоянной Хаббла. Эта плотность энергии составляет около  $10^{-29}$  г/см<sup>3</sup>. Подставив ее в уравнение (9), получим

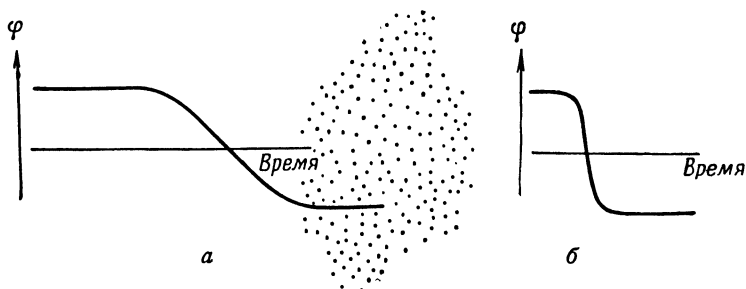
$$\sqrt{\left( \frac{\dot{\phi}}{\phi} \right)^2} \approx \frac{1}{2 \cdot 10^{10} \text{ лет}}. \quad (10)$$

Это значит, что среднее относительное изменение нашего поля имеет порядок  $10^{-10}$  в год. Тогда при приблизительно равномерном распределении соответствующей плотности энергии ее проявления должны быть очень слабыми и малодоступными для наблюдения. Правда, неясно, необходимо ли предполагать, что распределение плотности энергии однородно.

Если бы в начале расширения мира появилось первоначальное скалярное поле, то оно должно было бы быть весьма неоднородным. Характер же уравнения поля (7) таков, что оно допускает дальнейшее увеличение крутизны фронта волны. Качественно это можно показать таким образом: на фиг. 12.3, *a* потенциал  $\phi$  изображен в некоторой точке пространства в виде фронта волны во времени. При прохождении этой волны через вещество, когда локально величина  $\phi$  увеличивается, энергия, свя-

занная с веществом, уменьшается благодаря тому, что массы частиц зависят от  $\phi$  [см. выражение (5)]. Ввиду сохранения полной энергии эта энергия, прежде связанная с веществом, переходит от вещества к фронту  $\phi$ -волны (фиг. 12.3, б).

Другой гипотетический, но любопытный эффект, связанный с прохождением  $\phi$ -волны через вещество, — это эффект « $\phi$ -волнового мазера». Такой мазер мог бы дей-



Фиг. 12.3. Увеличение крутизны волнового фронта при прохождении волны через вещество.

ствовать в масштабах галактик. Если Галактика содержит примерно  $10^{11}$  звезд, то среди этих звезд найдется много таких, выгоревшие ядра которых близки к пределу Чандрасекара, перейдя через который соответствующие звезды вступают в область неустойчивости по отношению к коллапсу. Незначительное увеличение гравитационной постоянной понижает величину критической массы, так что приблизившиеся к коллапсу звезды внезапно перейдут через критический предел и будет развязан коллапс. При коллапсе звезда излучает  $\phi$ -волны, добавляющиеся к падающей волне и увеличивающие крутизну ее фронта, как это было уже описано. Таким образом,  $\phi$ -волна, проходящая через Галактику, обнаруживается в том, что она вызывает коллапс ряда белых карликов, в результате чего возникают новые небольшие волны, увеличивающие крутизну фронта волны.

На основе описанной модели можно объяснить предположение о совместном появлении сверхновых, принятое для объяснения существования весьма мощных внегалактических источников радиоизлучения. Мощность

этих источников слишком велика для одной-единственной сверхновой звезды. Бэрбридж утверждает, что в центре Галактики имеется много звезд, достигших критического состояния и готовых превратиться в сверхновые. Сначала случайно вспыхивает одна из них и вызывает появление ударной волны, зажигающей затем другие. Но, к сожалению, пока что не ясно, как одна сверхновая может стимулировать появление других.

Во всяком случае, модель с  $\phi$ -волнами дает возможный механизм совместного появления сверхновых. Галактика, содержащая  $10^5$  или  $10^6$  почти готовых взорваться звезд, встречается с  $\phi$ -волной, соответствующей очень резкому всплеску гравитационной постоянной. Сразу же зажигаются все звезды, готовые к вспышке, и каждая из них генерирует  $\phi$ -волны, способные в свою очередь вызвать дальнейшие взрывы сверхновых. Действуя сообща, все взрывы сверхновых могут возбудить ионизированный газ в Галактике настолько, что получится очень сильный источник радиоизлучения.

Имеется и другой довольно любопытный эффект, который может произвести вырожденная звезда с массой, очень близкой к критической. В этих условиях ее равновесный радиус и энергия весьма сильно зависят от величины гравитационной постоянной. Изменение этой постоянной на  $10^{-4}\%$  уже может привести к изменению полной энергии звезды примерно на  $1\%$ . Если такая сильно сжатая звезда окажется на пути  $\phi$ -волны, соответствующей ослаблению тяготения, то эта звезда расширится до нового равновесного состояния, поглотив при этом часть энергии  $\phi$ -поля. Если же, напротив,  $\phi$ -волна соответствует увеличению гравитационной постоянной, то она приведет к дальнейшему сжатию звезды и уменьшению ее энергии. Таким образом, могло бы оказаться, что равновесное значение энергии звезды весьма сильно зависит от величины  $\phi$ -поля. При достаточно крутом фронте  $\phi$ -волны звезда не сможет следовать за изменением поля квазистатически, т. е. проходя через последовательность равновесных состояний, а вместо этого будет пульсировать некоторое время вокруг нового положения равновесия, когда фронт волны уже прошел. Это может привести к излучению  $\phi$ -волны.

Мы говорили главным образом о воздействии фронта ф-волны, не рассматривая диапазон частот, которыми эти волны характеризуются. Каким должен быть этот диапазон, сказать трудно. Масштабы процессов, приводящих к генерированию этих волн, вряд ли могут быть атомными масштабами. Сила связи ф-поля составляет примерно  $10^{-40}$  прочих атомных связей. Поэтому конкурирующие процессы, также связанные с излучением и энергетическим обменом, вытеснят в атомной области излучение ф-волн из числа существенных эффектов.

Более правдоподобно, что ф-волны излучаются при процессах, при которых в совместном движении находится множество частиц. Системы же частиц, достигающие размеров Солнца, могут двигаться совместно только достаточно медленно. Тогда разумным нижним пределом, ограничивающим период ф-волн, будет время свободного спада (коллапса) вырожденной звезды. Это время исчисляется секундами. Если же главная часть ф-волн излучалась в основном лишь в начале расширения Вселенной, то к настоящему моменту это излучение должно было подвергнуться действию красного смещения и периоды, исчисляемые секундами, могли перейти в периоды порядка часов и дней. Другие же процессы могли привести к волнам, периоды которых теперь стали порядка десятков лет. Мы не можем ничего сказать о возможной величине периода ф-волн, кроме того, что он должен лежать в интервале от часов до десятилетий. Несомненно лишь то, что если такие поля существуют, они могут оказывать интересное действие на галактики и на звезды.

### **Волны ф-поля в Солнечной системе**

Другой интересный вопрос: будет ли поле такого рода влиять на Солнечную систему, в отношении которой мы располагаем весьма точными данными наблюдений? Я полагаю, что заключить о существовании такого типа поля на основании того, что мы видим в Солнечной системе, вряд ли возможно. Земля и другие планеты являются настолько сложными образованиями, что для всякого малого эффекта, который мы смогли бы обнару-

жить, почти всегда можно подыскать другое объяснение. Но мы можем сначала выяснить, к каким последствиям должны приводить  $\varphi$ -волны, падающие на Солнечную систему, а потом посмотреть, позволяет ли совокупность имеющихся данных наблюдения исключить влияние этого поля.

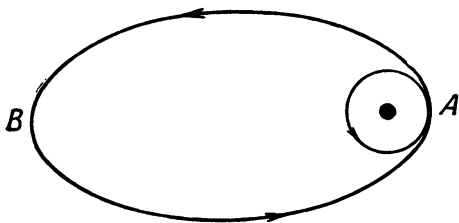
Возьмем сначала наибольшую величину изменения  $G$ , которая могла ускользнуть от обнаружения при современных методах измерения. Эта величина, взятая в виде относительного изменения за 1 год, равна

$$\frac{\Delta G}{G} \approx 10^{-8}. \quad (11)$$

Она значительно превышает ту величину, которая соответствует вековому изменению  $\varphi$  порядка  $3 \cdot 10^{-11}$ , связанному с космологическим решением в скалярной теории для расширяющейся замкнутой Вселенной (гл. 8). В самом деле, если бы пространство было заполнено  $\varphi$ -полем, изменяющимся во времени со скоростью, соответствующей этой вариации  $G$ , плотность энергии поля превышала бы в  $10^4$  раз величину, допустимую из астрономических соображений [см. формулу (9)]. Таким образом, в среднем  $\varphi$ -волнами такой интенсивности не может быть занято более  $10^{-4}$  всего пространства. Поэтому вероятность того, что на протяжении 1 года на Солнечную систему упадет такая волна, априори равна  $10^{-4}$ . Такая вероятность очень мала. Главный вывод, следующий отсюда, состоит в том, что из отсутствия данных наблюдения о волнах такой интенсивности нельзя заключить, что  $\varphi$ -волны не существуют. Кроме того, если мы не можем на основании наблюдений исключить столь значительные вариации  $G$ , то уж, конечно, мы не можем исключить и более вероятные меньшие вариации.

Какое действие оказывают сильные  $\varphi$ -волны на орбиты планет? Во-первых, при прохождении фронта  $\varphi$ -волны должна изменяться вытянутость орбиты (фиг. 12.4). Если, например,  $\varphi$ -волна вызывает внезапное уменьшение  $G$  в тот момент, когда планета находилась в точке  $A$  на круговой орбите, то в дальнейшем планета будет двигаться по новой, вытянутой орбите  $B$ . Изменение величины эксцентриситета, вызванное изменением  $G$  за

время, малое по сравнению с периодом обращения планеты, должно быть порядка  $10^{-8}$ , если исходить из принятых выше предположений. За год должно происходить



Ф и г. 12.4. Изменение формы планетной орбиты при резком уменьшении  $G$ .

около  $10^{-4}$  таких возмущений. Тогда за  $4,5 \cdot 10^9$  лет существования Солнечной системы должно было бы произойти  $4,5 \cdot 10^5$  таких скачков эксцентриситета. Скачки происходят беспорядочно. Поэтому средняя за  $10^9$  лет величина отклонения эксцентриситета планеты, первоначально двигавшейся по почти круговой орбите, должна составить

$$\Delta \epsilon \approx \sqrt{4,5 \cdot 10^5 \cdot 10^{-8}} \approx 7 \cdot 10^{-6}. \quad (12)$$

Это намного меньше наблюдаемых эксцентриситетов планетных орбит, так что рассмотрение указанного эффекта не исключает возможности существования  $\phi$ -волн. Не обнаружил я и других эффектов, поддающихся наблюдению, которые могли бы существенно повлиять на форму орбит в Солнечной системе за исторические времена.

В то же время существуют неопределенности, вариации или систематические нарушения планетных орбит, не получившие еще своего объяснения. Тот факт, что поведение орбит не соответствует в точности предсказаниям обычной теории, оставляет лазейку для допущения существования такого рода возмущений. Например, Клименс указал на возможность корреляции между нарушениями орбит Сатурна и Юпитера. Было бы интересно проверить, нельзя ли все такие корреляции свести к одной общей причине?

## Загадка неправильностей движения Луны

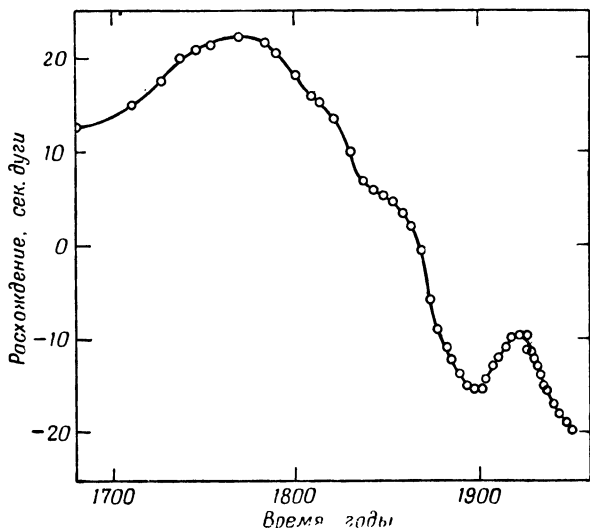
Можно спросить также: к каким эффектам приводят ф-волны, при которых период изменения гравитационной постоянной превышает период обращения планеты по орбите? При таком медленном (адиабатическом) изменении орбита как бы «дышит», увеличиваясь и уменьшаясь, но ее эксцентриситет не изменяется. Эффект такого рода интереснее всего искать в движении Луны. Если гравитационная постоянная медленно изменяется на  $10^{-8}$  за 200 лет, то скорость обращения Луны должна быть теперь иной, чем прежде, если измерять ее с помощью атомных часов. К сожалению, на протяжении последних 200 лет мы не располагали атомными часами. Но можно сравнивать движение Луны с вращением Земли за тот же период. На фиг. 12.5 показаны нарушения в движении Луны за последние 200 лет: разность наблюдавшихся и предвычисленных положений в секундах дуги. Начало (расхождение, равное нулю) условно отнесено к 1870 г. Кроме того, сюда входит еще произвольная постоянная, равная исходному отношению скорости обращения Луны к ходу земных часов. С ее помощью можно исключить из кривой линейную составляющую зависимости. Остающиеся после этого изгибы и искривления оказываются истинными, и их невозможно исключить произвольным выбором констант.

До 1900 г. точки довольно хорошо ложатся на параболическую кривую. Это говорит о том, что за указанный период Луна равномерно ускорялась с небольшими вариациями. Сравнительно недавно, в 1900 г., когда уже производились довольно точные наблюдения различными методами, произошло весьма заметное возмущение. На кривой расхождений этому возмущению соответствует большой горб. Его можно объяснить двояко: либо тем, что слегка изменилась скорость вращения Земли, либо тем, что изменился период обращения Луны.

Могла ли Земля изменить скорость своего вращения настолько, чтобы образовался подобный горб на кривой, и как это могло произойти? Этот вопрос довольно полно рассмотрен Мунком и Мак-Доналдом [2]. Вопрос этот очень старый, и им занимались многие



астрономы еще до того, как было обнаружено очень большое расхождение 1900 г. Чтобы показать масштабы данной проблемы, приведу высказывание широко



Фиг. 12.5. Расхождения между наблюдавшимися и теоретическими значениями лунной долготы за последние 250 лет.

известного специалиста по орбитам — астронома Ньюкомба (1902 г. [3]), цитируемое Мунком и Мак-Доналдом:

«Я считаю эти флуктуации наиболее загадочным явлением в движении светил, ибо их настолько трудно объяснить действием какого бы то ни было известного фактора, что остается лишь предполагать, что они вызваны какими-то процессами в природе, нам еще не известными».

После этого Мунк и Мак-Доналд пишут:

«Причиной флуктуаций не могут быть ни изменения уровня океана, ни движение материков, ни таяние льдов Антарктики, ни другие наблюдаемые процессы. Есть лишь одна надежда — ядро Земли. К такому выводу мы пришли, пользуясь, как сказал сэр Эдвард Буллард, методом Шерлока Холмса, — исключая одну за другой все возможности».

Чтобы можно было объяснить столь сильное изменение скорости вращения Земли, нужны были бы слишком большие возмущения на Земле. Уровень океана, например, должен был бы измениться на много десятков сантиметров.

Свести указанные вариации к известным нам причинам трудно еще и потому, что в данный период времени положение полюса Земли не изменилось сколько-нибудь заметно. Если бы, например, уровень океана изменился на 1 м вследствие таяния льдов Антарктики, то при этом северный полюс Земли должен был бы сместиться на 30—60 м, так как масса антарктических льдов несимметрична относительно оси вращения Земли. Устойчивое же положение земной оси в течение последнего времени говорит о том, что действие любого фактора, привлекаемого для объяснения изменений момента инерции Земли, должно быть достаточно симметричным, чтобы оно не оказывало влияния на положение земной оси.

Можно было бы сказать, что причиной изменения скорости вращения Земли является изменение момента импульса, переносимого атмосферой. Но это изменение примерно на два порядка меньше, чем требуется для объяснения наблюдаемого изменения скорости вращения.

Может быть, удастся свести все к всплыванию и опусканию материковых глыб? По данным наблюдений за вариациями уровня океана мы можем в какой-то мере судить о том, насколько сдвигаются материки по вертикали. Эти сдвиги также оказываются на целые порядки меньше тех, которые могли бы произвести требуемое воздействие на скорость вращения Земли. Кроме того, при объяснении с точки зрения движения континентальных глыб мы снова сталкиваемся с трудностями, связанными с перемещением полюса Земли.

Ни один процесс, который мог бы происходить вблизи поверхности Земли, не подходит для объяснения. Остается одна-единственная возможность: изменение момента импульса ядра Земли. Но к ядру трудно подобраться.

Есть все же некоторые данные о том, что магнитное поле Земли, которое, как полагают, связано с токами в

ядре, совершает дрейф с востока на запад. Имеются также указания на изменение скорости дрейфа магнитного поля в период большого горба на фиг. 12.5. Следовательно, ядро Земли могло получить (хотя и не ясно, каким образом) дополнительный момент импульса, что и привело к изменению скорости вращения нашей планеты.

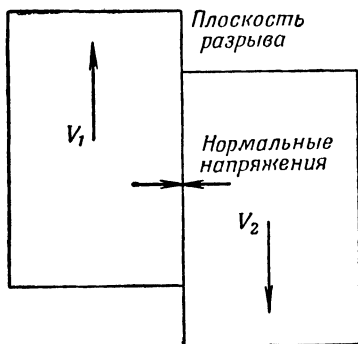
Теперь посмотрим, нельзя ли указанное расхождение, хотя бы частично, объяснить вариациями периода обращения Луны. Интересно, что изменение ее периода за 1900 г., составившее  $4 \cdot 10^{-8}$ , даже превышает ту скорость изменения, о которой мы говорили при обсуждении действия ф-волн. Поэтому было бы затруднительным полностью исключить вариации  $G$  как причину такого расхождения. Возможно даже, что ф-волна — единственная причина возмущения, отмеченного за период с 1900 по 1920 г.

### Не вызывают ли ф-волны землетрясений?

Возникает вопрос: если изменения в движении Луны действительно вызваны изменением  $G$ , а не изменением скорости вращения Земли, то каких других эффектов следует еще ожидать? Мы пришли к заключению, что изменения  $G$  должны весьма заметно сказываться на частоте землетрясений. Дело вот в чем. Обычные тектонические процессы приводят к медленному нарастанию напряжений в плоскости разрыва. За год происходят параллельные сдвиги порядка 1 см. Размеры плоскости разрыва могут достигать порядка тысячи километров, так что напряжения нарастают со скоростью  $1 \cdot 10^{-8}$  в год. Напряжения накапливаются до тех пор, пока не будет превзойден предел прочности породы. Тогда порода начинает течь или скользить вдоль плоскости разрыва, и происходит землетрясение.

Из фиг. 12.6 видно, что легкость движения в плоскости разрыва зависит от величины нормальных напряжений, существующих в этой плоскости. Поэтому малые изменения нормальных напряжений могут вызывать или, наоборот, задерживать землетрясения. При небольшом уменьшении  $G$  Земля слегка расширится и нормальные

напряжения уменьшатся вне зависимости от ориентации поверхности разрыва. При изменении  $G$  на  $1 \cdot 10^{-8}$  в год соответствующее расширение Земли будет на один



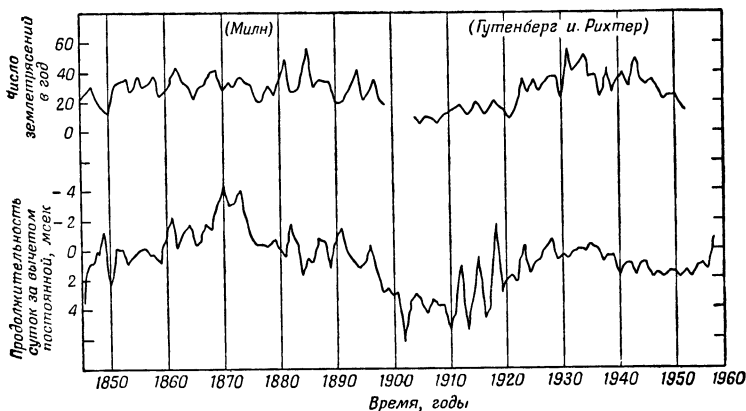
Фиг. 12.6. Иллюстрация к возможности задержки землетрясений, возникающих в связи со смещением в плоскости тектонического разрыва, при наличии в этой плоскости нормальных напряжений.

порядок меньше, т. е. примерно  $1 \cdot 10^{-9}$ . Накапливаются же напряжения в плоскости разрыва со скоростью  $1 \cdot 10^{-8}$  в год. Таким образом, вариация нормальных напряжений вполне заметна по сравнению с той скоростью, с которой они накапливаются, и от вариаций  $G$  в таких масштабах вполне может зависеть, произойдет ли землетрясение или нет.

Как же тогда должен был сказаться на землетрясениях подъем кривой расхождения движений Луны — Земли в 1900 г.? Если Луна стала в тот период двигаться быстрее, то, значит, «постоянная»  $G$  увеличилась. Это привело бы к росту нормальных напряжений, в результате чего землетрясения должны были задержаться. Годами двадцатью позднее  $G$  вновь уменьшилась, нормальные напряжения ослабли, и землетрясения должны были участиться. Поэтому должен наблюдаться 20-летний период с очень редкими землетрясениями, а после этого увеличение частоты землетрясений вслед за уменьшением величины  $G$ .

На фиг. 12.7 (верхняя кривая) показано изменение частоты землетрясений в рассматриваемый период вре-

мени. Кривая действительно весьма заметно падает, а затем следует подъем, примерно совпадающий по времени с периодом подъема кривой на фиг. 12.5. Такое совпадение побудило нас более подробно сравнить изменение частоты землетрясений и движения Луны.



Фиг. 12.7. Изменение числа землетрясений за год и вариации в движении Луны (длительность дня измерялась путем сравнения периода вращения Земли с периодом Луны, так что данные содержат всю информацию об изменениях периода Луны).

Нижняя кривая на фиг. 12.7 дает среднегодовые характеристики движения Луны. Движение Луны согласно данной кривой значительно менее равномерно, чем согласно кривой на фиг. 12.5, так как здесь усреднение было менее сглаживающим. В период с 1904 по 1952 г. данные получались на основании сейсмометрических наблюдений<sup>1)</sup>, а данные до 1900 г. почерпнуты из газетных сообщений. До 1900 г. невозможно усмотреть непосредственной связи между фигурировавшими в газетных сообщениях землетрясениями и движением Луны. Но, с другой стороны, я не думаю, чтобы газетные сообщения

<sup>1)</sup> Данные о всех землетрясениях с  $M \geq 6,5$  собраны в книге [4].

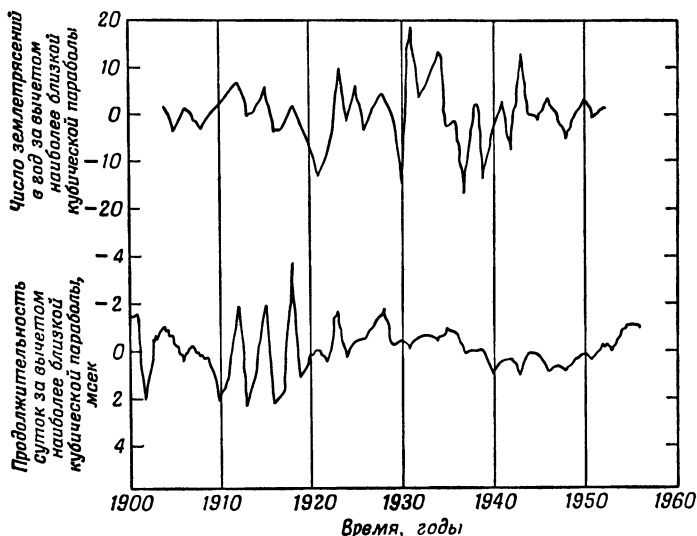
представляли собой источник информации с высоким отношением сигнала к шуму.

Один из моих студентов, Морган, вычислил корреляцию между частотой землетрясений и неправильностями в движении Луны за данный период. Все полученные коэффициенты корреляции имели правильный знак и вполне приемлемый уровень значимости. Этот студент нашел, что коэффициент корреляции до 1900 г. равен 0,26. Вероятность случайно получить такую корреляцию между величинами, совершенно не связанными друг с другом, имеет порядок всего 3%. Корреляция же за период после 1900 г., когда данные о землетрясениях черпались из сейсмометрических наблюдений, равна 0,71. Вероятность случайно прийти к такой корреляции между совершенно не связанными друг с другом величинами чрезвычайно мала и составляет всего около  $10^{-6}$ .

Морган подробно исследовал данные за период после 1900 г., чтобы выяснить, где возникает эта корреляция. Имеется ли она только в низкочастотных флуктуациях, или ее можно найти и для высокочастотных вариаций? На кривой движения Луны фиг. 12.7 (нижняя кривая) видно несколько очень значительных всплесков. Можно ли установить корреляцию между этими всплесками и подъемами на верхней кривой? Оказывается, что можно.

При обработке данных находились такие кривые третьей степени, которые больше всего соответствовали этим двум графикам, а затем такие кубические кривые вычитались из этих последних с тем, чтобы остались одни лишь «шумовые» флуктуации, для которых и вычислялась корреляция. Эти две разностные кривые приведены на фиг. 12.8. Сами кубические кривые отлично коррелируются друг с другом (коэффициент корреляции равен 0,94). Корреляция разностных кривых составляет 0,20. Вероятность получить такую корреляцию для совершенно не связанных (случайных) чисел равна 8%. Таким образом, знак всех корреляций одинаков, а сами они заметно выше того уровня, при котором могли бы появиться случайно. Эти корреляции очень хорошо согласуются с гипотезой о том, что 1) возмущения в кривой нарушений скоростей вращения Земли и Луны свя-

заны с вариациями лунного периода, 2) что эти вариации и вариации частоты землетрясений вызваны одной



Фиг. 12.8. Длительность дня и частота землетрясений после вычитания кривой третьей степени.

и той же причиной — флуктуациями величины гравитационной постоянной и 3) что все это может вызываться прохождением ф-волн.

### Вариации во вращении Земли — тоже влияние ф-волн?

Не будут ли указанные корреляции согласовываться и с гипотезой о том, что в движении Луны нет собственных возмущений, но происходят вариации во вращении Земли, вызванные какими-то неизвестными причинами? Я думаю, что такое согласие можно получить, хотя и не в столь убедительной форме, как это было для гипотезы о неправильном движении Луны. При увеличении скорости вращения Земля расширяется под действием центробежных сил, а это приводит к ослаблению напряжений. Нормальные напряжения уменьшаются на 0,1% относи-

тельно изменения скорости вращения (так как центробежные силы составляют всего около 0,1%  $g$  на поверхности Земли). Если мы склонны считать, что наличие сильной корреляции объясняется именно этим, то необходимо предположить, что землетрясения крайне чувствительны к малым вариациям нормальных натяжений. Но получающееся при этом относительное изменение напряжений по порядку величины равно лишь  $10^{-10}$ , что составляет около  $10^{-3}$  приливных вариаций напряжений. Тогда, видимо, приливные эффекты должны доминировать и подавлять слабые влияния изменяющейся скорости вращения Земли. Однако периодичность приливов не сказывается заметно на частоте землетрясений.

Наличие корреляции между частотой землетрясений и изменениями скорости вращения Земли можно объяснить также вариациями тангенциальных напряжений на границе между ядром и мантией. Но в таком случае частота землетрясений должна бы быть максимальной тогда, когда изменяется угловая скорость Земли, а не в период минимальной угловой скорости Луны, как оказывается в действительности.

В последние несколько лет у нас появились новые возможности получать данные для обнаружения вариаций скорости вращения Земли. Это — весьма перспективный метод сравнения скорости вращения Земли с ходом атомных часов. Но пока что такое сравнение не производилось для достаточно большого периода времени, за который можно было бы точно измерить движение Луны. Это объясняется тем, что точность наблюдений положения Луны низка, а ее период обращения намного превышает время оборота Земли вокруг своей оси. Поэтому данные о движении Луны за короткий промежуток времени содержат большие статистические флуктуации и не представляют большой ценности по сравнению с данными очень точных новейших измерений скорости вращения Земли. Чтобы получить ход изменения лунного периода с достаточной точностью, необходимо усреднить данные за большой срок.

Изменение гравитационной постоянной должно слабо сказываться на скорости вращения Земли. При умень-



шении  $G$  Земля расширяется. Сжимаемость же Земли такова, что изменение скорости вращения Земли, вызванное изменением  $G$ , должно составлять около 0,1 соответствующего изменения в движении Луны. Морган рассмотрел корреляцию между частотой землетрясений и изменениями в скорости вращения Земли, обнаруженными за последние 6 лет при сравнении этой скорости с ходом атомных часов. Он обнаружил корреляцию того же знака, что и предыдущие корреляции, если этот эффект интерпретировать как результат изменения  $G$ . Если же его истолковывать лишь с точки зрения вращения Земли, то знак получается обратный.

Тот факт, что при проведенном в последнее время сравнении хода атомных часов с вращением Земли обнаружены вариации скорости ее вращения, указывает либо на то, что несоответствие в движении Луны частично или полностью вызвано вращательными флуктуациями геофизического происхождения, либо на то, что за последние 6 лет произошли довольно значительные вариации  $G$ , повлекшие изменения во вращении Земли. Сейчас еще рано исключать какую-либо из этих возможностей, но в течение ближайших 5 лет новый метод, основанный на использовании атомных часов, позволит, по-видимому, решить этот вопрос.

Хотя и рассмотренный эффект, и обсуждавшиеся до него не доказывают существования ф-волн и соответствующих вариаций  $G$ , все сказанное побуждает к дальнейшим исследованиям гипотезы скалярных волн. Во всяком случае, эти эффекты не дают никаких оснований для того, чтобы отрицать существование таких волн.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Greenstein J. L., Matthews T. A., Nature, 197, 1041 (1963).
2. Munk W. H., MacDonald G. J. F., The Rotation of the Earth, Cambridge, 1960.
3. Newcomb S., Monthly Notices, Roy Astron. Soc., 69, 164 (1909).
4. Gutenberg B., Richter C. F., Seismicity of the Earth, Princeton, N. J., 1954.

# 13

## *Мир Литтлтона — Бонди и равенство зарядов*

В. ХЬЮЗ

### **Вопрос о равенстве зарядов электрона и протона**

Вопрос о том, в точности ли равны друг другу абсолютные величины зарядов электрона и протона, весьма интересен и имеет принципиальное значение в физике. В данной лекции я хотел бы остановиться на теории этого вопроса, указать некоторые физические, астрономические и космологические следствия возможного отклонения от взаимного равенства этих зарядов и рассказать о самых последних экспериментах по определению отношения зарядов электрона и протона.

Как известно, экспериментальные открытия конца XIX и начала XX веков, нашедшие свое окончательное выражение в опыте Милликена с капельками масла, привели к заключению, что электрические заряды всегда оказываются целыми кратными некоторой наименьшей «единицы», причем эта наименьшая единица положительного заряда (заряд протона) совпадает с наименьшей единицей отрицательного заряда (заряд электрона). Поэтому атом или молекула, содержащие одинаковое число электронов и протонов, должны быть электрически нейтральными. В 1932 г. был открыт нейтрон, и оказалось, что у него нет заряда. Сейчас уже известно около 30 так называемых элементарных частиц, причем оказывается, что заряд каждой из них равен  $+1$ ,  $0$  или  $-1$  заряду электрона.

## Следствия возможного различия зарядов

Идеальная теория элементарных частиц должна предсказывать весь наблюдаемый спектр элементарных частиц и отношения их зарядов и масс. Современная теория квантованных полей может описывать дискретные частицы, но неспособна предсказать величины масс и зарядов этих частиц, которые приходится определять опытным путем. Инвариантность этой теории относительно зарядового сопряжения (замены частиц на античастицы, и наоборот) приводит к теоретическому предсказанию того факта, что заряды частиц и соответствующих им античастиц должны быть в точности равными по абсолютной величине, но противоположными по знаку. Например, абсолютные величины зарядов электрона и позитрона должны быть одинаковыми. Одинаковыми должны быть и абсолютные величины зарядов протона и антипротона. Но теория не дает отношения абсолютных величин зарядов двух различных частиц, например электрона и протона.

В свете современной теории перенормировки заряда вопрос об отношении зарядов электрона и протона оказывается весьма сложным и несколько неопределенным. Если бы «голые» заряды электрона и протона совпадали, то из общепринятой теории перенормировки с учетом калибровочной инвариантности следовало бы, что и перенормированные заряды электрона и протона тоже должны быть одинаковыми. Однако Гелл-Манн и Намбу [1] заметили, что если бы наряду с фотоном существовала другая нейтральная векторная частица, которая взаимодействовала бы с протоном, но не с электроном, то тогда даже при равенстве друг другу «голых» зарядов электрона и протона их перенормированные заряды выражались бы через неоднозначно определенные квадратически расходящиеся интегралы и могли бы оказаться различными.

Фейнберг и Голдхабер [2] рассматривали вопрос о связи законов сохранения с фактом совпадения зарядов частиц. В настоящее время абсолютные законы сохранения заряда, барионного числа и лептонного числа взаимно независимы и считается, что они выполняются при

всех взаимодействиях частиц. Ввиду существования независимых законов сохранения для барионов и лептонов применение закона сохранения заряда к известным реакциям для элементарных частиц само по себе еще не определяет отношений зарядов всех элементарных частиц. Например, видимое отсутствие реакции  $p \rightarrow e^+ + \pi^0$  не позволяет определить отношение зарядов электрона и протона. Обратное, если бы абсолютные величины зарядов электрона (лептон) и протона (барион) были разными, то отсутствие такой реакции и, в более общем аспекте, закон сохранения числа барионов следовали бы из закона сохранения заряда, а не составляли самостоятельного принципа.

В XX веке строилось много гипотез о проявлениях в больших масштабах малой разницы  $\delta q$  в абсолютных значениях зарядов электрона и протона. Рассматривалась возможная роль этой разницы для гравитации, для магнитных полей небесных тел и для космологии.

Говоря о связи неравенства зарядов с гравитацией, полезно сравнить электрическую и гравитационную силы, действующие между двумя протонами. Отношение этих сил равно

$$\frac{F_{\text{эл}}}{F_{\text{грав}}} = \frac{e^2/r^2}{Gm_p^2/r^2} = 1,2 \cdot 10^{36}, \quad (1)$$

величине, конечно, весьма значительной. Если заряд электрона равен  $q_e = -e$ , а величина заряда протона слегка отличается от него и равна

$$q_p = (1 + y)e, \quad (2)$$

то заряд атома водорода был бы равен  $+ye$ , и отношение между электростатической и гравитационной силами, действующими между двумя атомами водорода, было бы равно

$$\frac{F_{\text{эл}}}{F_{\text{грав}}} = \frac{(ye)^2}{Gm_H^2} = 1,2 \cdot 10^{36} y^2. \quad (3)$$

Это отношение равно 1 при  $y = 0,9 \cdot 10^{-18}$ . Таким образом, если бы абсолютные значения зарядов протона и электрона отличались друг от друга на  $10^{-18}$ , то электростатическая сила, действующая между двумя

атомами водорода, сравнялась бы по своей абсолютной величине с гравитационной силой между ними.

Очень большое различие в величине сил электрического и гравитационного взаимодействия наряду с одинаковой обратной квадратичной зависимостью от расстояния между частицами дает основание для гипотезы о том, что гравитационные силы появляются как следствие небольшой неточности обычной теории электрических сил. Так, Лоренц высказал предположение, что гравитационная сила возникает вследствие ничтожной разницы между силой отталкивания между двумя частицами, обладающими зарядами одного знака, и силой притяжения между двумя частицами с одинаковыми по модулю, но противоположными по знаку зарядами. Сванн [3] также говорил о такой возможности, причем он рассматривал ее в связи с вопросом о веществе и антивеществе.

Возможное небольшое неравенство зарядов может сыграть важную роль и в вопросе о происхождении магнитных полей небесных тел. Эйнштейн<sup>1)</sup> отметил, что малая разница между абсолютными величинами зарядов электрона и протона привела бы, конечно, к появлению результирующего объемного заряда у объектов, содержащих одинаковое число протонов и электронов. Тогда такой вращающийся объект, например Земля, приобрел бы соответствующее магнитное поле дипольного типа. В районе полюса напряженность поля была бы равна

$$H_{\text{полюс}} = \frac{2P}{R^3}. \quad (4)$$

Здесь  $R$  — радиус Земли, а  $P$  — ее магнитный дипольный момент, равный

$$P = \frac{0,2\omega MR^2}{c} \frac{\sigma}{\rho}, \quad (5)$$

где  $\omega$  — угловая скорость вращения Земли,  $M$  — ее масса,  $\sigma$  — плотность заряда, а  $\rho$  — плотность массы. Если заряд протона определить по формуле (2), то

$$\frac{\sigma}{\rho} = \frac{ye}{m_H}, \quad (6)$$

<sup>1)</sup> Замечания Эйнштейна приведены в работе [4].

где  $m_H$  — масса атома водорода. Принимая, что магнитное поле Земли, равное на полюсе 0,6 э, полностью обусловлено этим неравенством зарядов, мы получаем  $y = 2 \cdot 10^{-19}$ .

Блэккетт [5] в 1947 г. заметил, что отношение магнитного дипольного момента, вычисленного с помощью формулы (4), к моменту импульса примерно одинаково для трех астрономических объектов — Земли, Солнца и звезды 78 Девы:

$$\left(\frac{P}{I}\right)_{\text{астр}} \approx 1 \cdot 10^{-15}. \quad (7)$$

Кроме того, отношение орбитального магнитного момента к орбитальному моменту импульса для электрона равно

$$\left(\frac{P}{I}\right)_{\text{эл}} = \frac{e}{2m_e c} \approx 0,9 \cdot 10^7, \quad (8)$$

а отношение этих двух величин равно

$$\frac{(P/I)_{\text{астр}}}{(P/I)_{\text{эл}}} \approx 10^{-22}. \quad (9)$$

Это безразмерное отношение почти совпадает с безразмерной постоянной

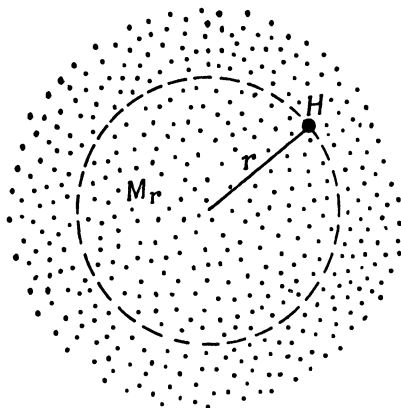
$$\frac{G^{1/2} m_e}{e} = 4,9 \cdot 10^{-22}. \quad (10)$$

По мнению Блэккетта, такое приблизительное численное совпадение вряд ли может быть случайным. Он предположил поэтому, что в общем случае должно выполняться равенство

$$\left(\frac{P}{I}\right)_{\text{астр}} = \left(\frac{P}{I}\right)_{\text{эл}} \frac{G^{1/2} m_e}{e} = \frac{G^{1/2}}{2c}. \quad (11)$$

Вскоре после опубликования статьи Блэккетта было установлено, что магнитное поле Солнца ближе к 5 э, чем к 50 э (значение, которым пользовался Блэккетт), так что для Солнца отношение  $P/I$  в действительности не соответствует величине, приведенной в формуле (7). К настоящему времени определено магнитное поле еще многих звезд, и было бы интересно сравнить новые данные с выражением (11), которое согласуется с моделью

вращающейся заряженной Земли, предложенной Эйнштейном. Но простейшая модель вращающегося заряженного тела дает слишком большую величину электрической напряженности на поверхности Земли, так что эту теорию нужно переработать и наряду с объемным зарядом ввести еще и поверхностный, с тем чтобы получить приемлемые значения как магнитного, так и электрического полей.



Фиг. 13.1. Модель равномерно заряженной Вселенной.

Возможное неравенство зарядов электрона и протона может привести также к интересным космологическим выводам. Литтлтон и Бонди [6] высказали предположение, что наблюдаемое расширение Вселенной объясняется электрическим отталкиванием, обусловленным слабым неравенством зарядов. Это предположение первоначально обсуждалось ими в рамках простой ньютоновской теории на основе сферического мира (фиг. 13.1), равномерно заполненного атомами водорода, с плотностью массы  $\rho$  и соответствующей плотностью заряда  $\sigma$ :

$$\sigma = \rho \frac{ye}{m_H}, \quad (6)$$

причем величина  $y$  считалась положительной. Электростатическая сила, действующая на атом водорода,

находящийся на расстоянии  $r$  от центра этого распределения заряда, равна

$$F_{\text{эл}} = \frac{ye^2}{r^2 m_{\text{H}}} M_r, \quad (12)$$

где  $M_r$  — полная масса, заключенная в сфере радиусом  $r$ . Гравитационная сила равна

$$F_{\text{грав}} = \frac{M_r m_{\text{H}} G}{r^2}. \quad (13)$$

Отсюда отношение электростатической силы отталкивания к гравитационной силе притяжения равно

$$\mu = \left( \frac{ye}{m_{\text{H}} \sqrt{G}} \right)^2 = (1.1 \cdot 10^{18} y)^2, \quad (14)$$

т. е. то же самое, что и в формуле (3). Тогда результирующая сила отталкивания равна

$$\begin{aligned} F &= F_{\text{эл}} - F_{\text{грав}} = (\mu - 1) F_{\text{грав}}, \\ F &= (\mu - 1) \cdot \frac{4}{3} \pi r m_{\text{H}} G r = kr. \end{aligned} \quad (15)$$

При  $\mu - 1 > 0$  мы действительно получим силу отталкивания, пропорциональную  $r$  и приводящую к расширению Вселенной.

Чтобы, несмотря на расширение, плотность массы во Вселенной оставалась постоянной, Литтлтон и Бонди ввели предположение о непрерывном творении вещества (атомов водорода), а значит, и о непрерывном творении заряда<sup>1)</sup>. Ими был предложен новый вариант уравнений Максвелла, допускающий несохранение заряда и позволяющий решить задачу о стационарной расширяющейся Вселенной при творении массы и заряда. Они получили следующую связь между плотностью массы  $\rho$ , постоянной Хаббла  $T^{-1}$  и скоростью творения вещества  $Q$ :

$$\rho = \frac{1}{3} m_{\text{H}} Q T. \quad (16)$$

Взяв  $T = 3 \cdot 10^{17}$  сек и  $\rho = 10^{-29}$  г/см<sup>3</sup>, они нашли  $Q = 6 \cdot 10^{-23}$  (атом водорода/см<sup>3</sup> · сек), что соответствует

<sup>1)</sup> Таким образом, это типичная гипотеза «ad hoc». — Прим ред.



скорости творения, равной 1 атому водорода на куб с ребром 250 км в 1 сек.

При постоянной плотности массы  $\rho$  сила отталкивания, выраженная формулой (15), соответствует скорости, линейно возрастающей с расстоянием по закону

$$v = \sqrt{K}r, \quad (17)$$

где

$$K = (\mu - 1) \cdot \frac{4}{3} \pi \rho G.$$

Наблюдаемое расширение Вселенной дает

$$v = \frac{r}{T}, \quad (18)$$

и из сравнения (17) и (18) следует

$$T = \frac{1}{\left[ (\mu - 1) \cdot \frac{4}{3} \pi \rho G \right]^{1/2}}, \quad (19)$$

так что

$$\mu = 5$$

и

$$y = 2 \cdot 10^{-18}. \quad (20)$$

Такова величина неравенства зарядов, необходимая, по мнению Литтлтона и Бонди, для объяснения наблюдаемого расширения Вселенной в теории, в которой допускается творение заряда и изменение уравнений Максвелла. Эти авторы сформулировали свою теорию и в более общем виде, используя пространство—время Де Ситтера с тем, чтобы удовлетворить космологическому принципу, согласно которому вид Вселенной одинаков при рассматривании ее из любой точки. Но в более общей теории не возникает существенных отклонений от выводов, уже полученных в рамках ньютоновской механики.

В результате ионизации на фоне равномерно распределенного неионизированного вещества должны возникать электрически нейтральные участки. Эти участки отождествляются с галактиками или со скоплениями галактик. Ионы, выталкиваемые из этих участков электростатическими силами, — в основном протоны — отождествляются с жесткой компонентой космических лучей

Хойл [7] заметил ошибку в подходе Литтлтона и Бонди к видоизмененной теории Максвелла. Главное отличие в выводах Хойла состоит в том, что потенциал отдельного заряда должен иметь вид

$$\varphi = \frac{e}{r} \cos [(-\lambda)^{1/2} r], \quad (21)$$

где  $r$  — расстояние от этого заряда, а  $\lambda$  — космологическая величина, определяемая соотношением

$$(-\lambda)^{1/2} \approx \frac{1}{\text{Радиус Вселенной}}.$$

Из формулы (21) видно, что на достаточно больших расстояниях потенциал изменяет свой знак, так что сила отталкивания, действующая между двумя одинаковыми зарядами, переходит в силу притяжения.

На этом основании Хойл заключает, что в космологических масштабах электростатическая сила не будет силой отталкивания и приводит к расширению Вселенной типа предполагаемого Литтлтоном и Бонди, а будет в основном силой притяжения. Но он указывает, что если вещество и антивещество творятся с одинаковой скоростью и если атом водорода обладает зарядом  $ye$ , а атом антиводорода — зарядом  $-ye$ , причем вещество и антивещество в достаточной степени удалены друг от друга, то, согласно формуле (21), будет происходить отталкивание вещества и антивещества и будет наблюдаться расширение Вселенной. Из теории Хойла также следует, что  $y \approx 2 \cdot 10^{-18}$ .

### Экспериментальная проверка предполагаемого неравенства зарядов

Я хотел бы теперь остановиться на том, что говорят о равенстве зарядов электрона и протона опыты в земных лабораториях.

Одним из самых первых опытов в этом направлении был эксперимент Милликена с масляными каплями [8]. Милликен исследовал движение капелек различных жидкостей, заряженных различными способами, например путем трения, под действием рентгеновских лучей или

при захвате ионов из воздуха. Наблюдая движение таких капель под действием силы тяжести, вязкого трения и электрического поля, Милликен показал, что во всех случаях заряд каждой капельки является целым кратным некоторой наименьшей «единицы». Рассмотрев заряды обоих знаков, он нашел, что

$$\frac{\text{Единица положительного заряда}}{\text{Единица отрицательного заряда}} = 1 \pm \frac{1}{1500}.$$

Макроскопически этот результат можно объяснить тем, что заряды электрона и протона не равны друг другу [11]. Типичная капелька масла представляет собой шарик радиусом около  $10^{-4}$  см с плотностью порядка  $1 \text{ г/см}^3$ . Число пар протонов и электронов в одной такой капельке равно  $N \approx 2,5 \cdot 10^{12}$ . Результаты наблюдений Милликена соответствуют требованию

$$Nye < \frac{e}{1500},$$

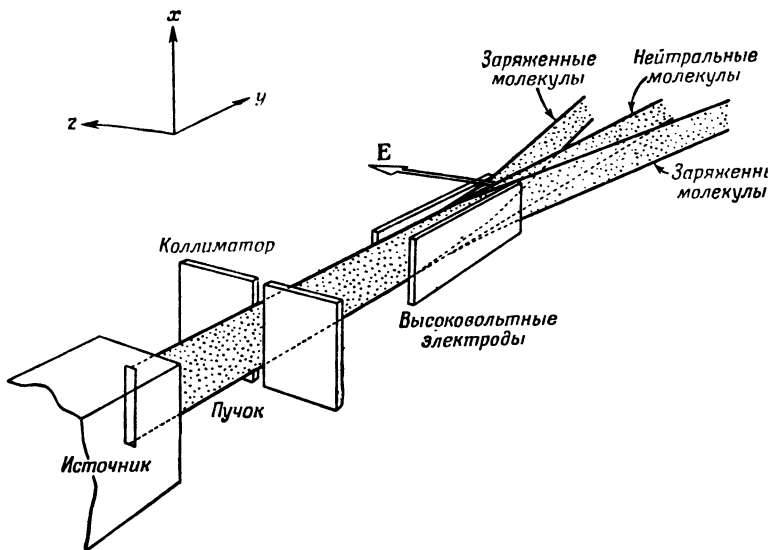
откуда

$$y < 3 \cdot 10^{-16}.$$

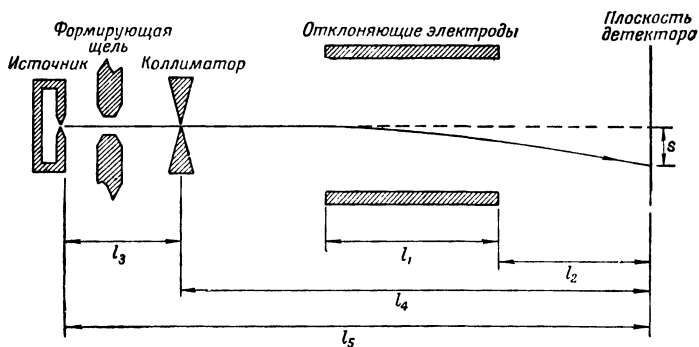
Другой макроскопический опыт был впервые произведен Пиккардом и Кесслером [4] по методу истечения газа; он будет рассмотрен позднее.

Теперь я хотел бы остановиться на эксперименте с атомным пучком, недавно произведенным Цорном, Чемберленом и мною [9—11]. В этом эксперименте исследовалось отклонение молекулярного пучка в однородном электрическом поле. Если атом нейтрален, он не будет отклонен, но если различие между абсолютной величиной заряда электрона и протона действительно существует, то атом будет заряжен и подвергнется отклонению. Мы использовали классический метод молекулярного пучка [12], соответствующий схеме фиг. 13.2. С помощью щели источника и коллимирующей щели пучок формировался в виде ленты, сечение которой вытянуто в вертикальном направлении. Пучок пропусклся через однородное электрическое поле, в котором он должен отклониться, если атомы обладают зарядом.

На фиг. 13.3 представлена более подробная схема горизонтального сечения той же установки. В обозначен-



Ф и г. 13.2. Измерение заряда атомов или молекул методом молекулярного пучка.



Ф и г. 13.3. Схема установки и траектория атома, отклоненного под действием электрического поля.

ниях, принятых на фиг. 13.3, величина отклонения заряженной молекулы, движущейся со скоростью  $v$ , под действием электрического поля выражается как

$$s_v = \frac{qE}{2mv^2} l_1 (l_1 + 2l_2), \quad (22)$$

где  $q$ ,  $m$  и  $v$  — заряд, масса и скорость частицы в пучке, а  $E$  — напряженность электрического поля. В частности, молекула, обладающая наиболее вероятной для данного источника скоростью  $\alpha$  ( $\alpha = \sqrt{2kT/m}$ ), отклонится на величину

$$s_\alpha = \frac{qE}{4kT} l_1 (l_1 + 2l_2), \quad (23)$$

где  $T$  — температура источника, а  $k$  — постоянная Больцмана.

В нашем последнем эксперименте

$$l_1 = 200 \text{ см}, \quad l_2 = 30 \text{ см}$$

и

$$E = 10^5 \text{ в/см.}$$

Исследовались пучки атомов цезия и калия, причем температура печи составляла около  $500^\circ \text{К}$ . Чувствительность нашего детектора была достаточной для того, чтобы отметить отклонение на  $10^{-5} \text{ см}$ . Таким образом, наименьший заряд атома, который можно было обнаружить, составлял

$$q \approx 3 \cdot 10^{-17} e.$$

Атомный номер цезия равен 55, так что наименьший подающийся обнаружению заряд пары электрон — протон  $\delta q$  должен быть меньше указанного значения в 55 раз:

$$\delta q \sim 6 \cdot 10^{-19} e.$$

При такой чувствительности уже можно надеяться обнаружить разность зарядов, предсказываемую теорией Литтлтона — Бонди.

В описываемом опыте имеются существенные усложняющие обстоятельства. Величина наблюдаемого отклонения настолько мала, что значительную долю откло-

нения могут создавать неоднородности электрического поля за счет поляризации атомов. Хотя атомы калия и цезия и не обладают постоянными электрическими дипольными моментами, в присутствии электрического поля у них такие моменты индуцируются. Если же поле неоднородно, то на индуцированный электрический дипольный момент атома будет действовать сила. В нашем опыте имеются неоднородности поля на границе той области, где поддерживается поле. Обозначая потенциальную энергию атома, помещенного в это поле, через  $W(E)$ , можно записать силу, возникающую благодаря появлению индуцированного дипольного момента, в виде

$$\mathbf{F} = -\nabla W(E) = -\frac{\partial W}{\partial E} \nabla |E|. \quad (24)$$

Из этой формулы видно, что направление силы не изменяется при перемене направления поля. Поэтому действие силы, обусловленной поляризуемостью диполей, можно отличить от действия силы, вызванной наличием результирующего заряда, меняя знак разности потенциалов на электродах на обратный.

Истолкование измеренных отклонений затрудняется еще и разбросом скоростей атомов. Скорости частиц, вылетающих из щели в печи, подчиняются распределению Максвелла

$$I_v dv = \frac{2I}{\alpha^4} v^3 e^{-v^2/\alpha^2} dv, \quad (25)$$

где  $I$  — полная интенсивность пучка. Наблюдаемое отклонение соответствует среднему, взятому по этому распределению скоростей.

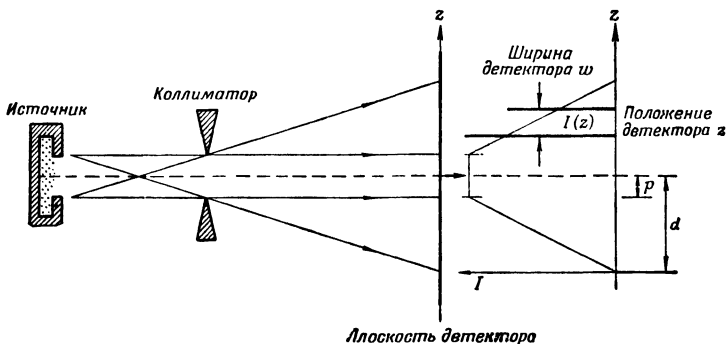
Следует учитывать и еще одно (третье) усложняющее обстоятельство (фиг. 13.4). Щели источника и коллиматора имеют конечную ширину, и поэтому в плоскости детектора мы имеем трапециевидное распределение интенсивности пучка. К тому же и ширина детектора конечна.

Чтобы связать с  $s_\alpha$  наблюдаемые величины интенсивностей, необходимо произвести интегрирование по всей ширине пучка и по распределению скоростей. Если детектор расположен в том месте, где интенсивность пучка

равна половине максимального значения, то соотношение между  $s_\alpha$  и изменением интенсивности таково:

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{2s_\alpha}{d-p}. \quad (26)$$

Здесь  $d$  и  $p$  — размеры, указанные на фиг. 13.4, и  $d-p=W$ . Были также выведены и другие формулы, не



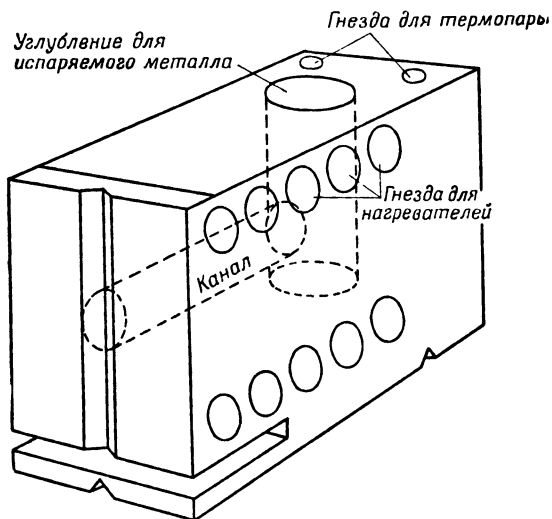
Фиг. 13.4. Влияние конечной ширины щелей на распределение интенсивности пучка.

требующие, чтобы заранее была известна геометрия щелей и их расположение, а основанные лишь на наблюдаемом распределении интенсивностей.

Рассмотрим теперь некоторые технические стороны эксперимента и конструкцию установки. Выбор цезия и калия в значительной мере был продиктован существующими способами получения атомных пучков. Величина отклонения атомов [соотношение (23)] зависит только от температуры, при которой они испущены. Эта температура должна быть возможно более низкой. В описываемом опыте желательно использовать атомы, содержащие возможно большее число пар электронов и протонов. Атомы же щелочных металлов использовались по той причине, что их пучки легко получать при сравнительно низких температурах и легко обнаруживать, пользуясь детектором, основанным на ионизации атомов на поверхности раскаленной проволоочки. На

фиг. 13.5 изображена печь, использованная для получения пучков атомов калия и цезия. В ней поддерживалась температура около  $500^{\circ}\text{K}$ .

На фиг. 13.6 показаны экспериментальное и вычисленное теоретически распределения интенсивности

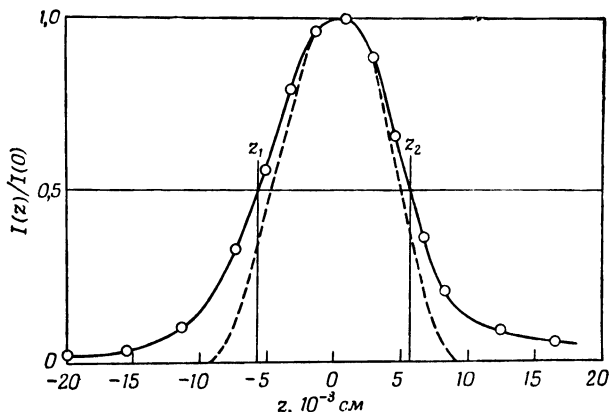


Фиг. 13.5. Печь, используемая обычно для получения пучков атомов щелочных металлов.

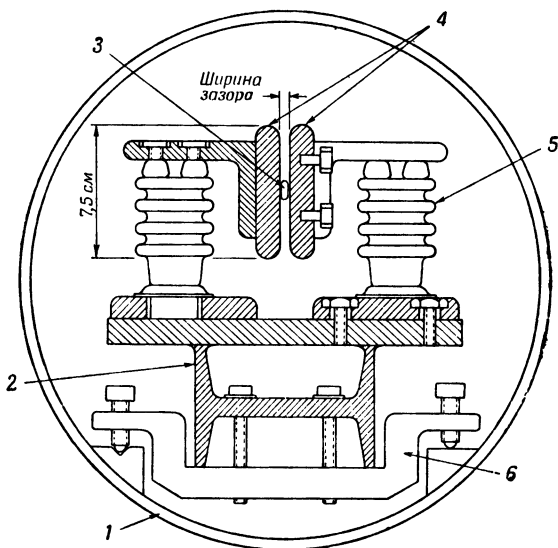
пучка при ширине щелей печи и коллиматора  $0,004\text{ см}$ . Ширина детектора также была равна  $0,004\text{ см}$ . Обе кривые хорошо согласуются. Малое расхождение между ними вызвано рассеянием в атомном пучке, неточностью юстировки щелей и неточностью в определении их размеров. Детектор был расположен в одной из двух точек половинной интенсивности, с тем чтобы получить максимальное изменение интенсивности при данном  $s_{\alpha}$ .

На фиг. 13.7 изображена в разрезе по вертикали система электродов, создающих электрическое поле. Параллельные пластины выполнены из алюминия, их длина примерно  $2\text{ м}$ , зазор между ними  $1\text{—}2\text{ мм}$ . Такая





Фиг. 13.6. Кривая формы пучка, вычисленная теоретически (пунктирная линия) для случая классических траекторий и идеальной геометрии прибора и полученная экспериментально (сплошная линия) для пучка атомов калия в отсутствие электрического поля. Кривая формы представляет собой зависимость интенсивности пучка  $I(z)/I(0)$ , регистрируемой детектором, от положения детектора  $z$ .

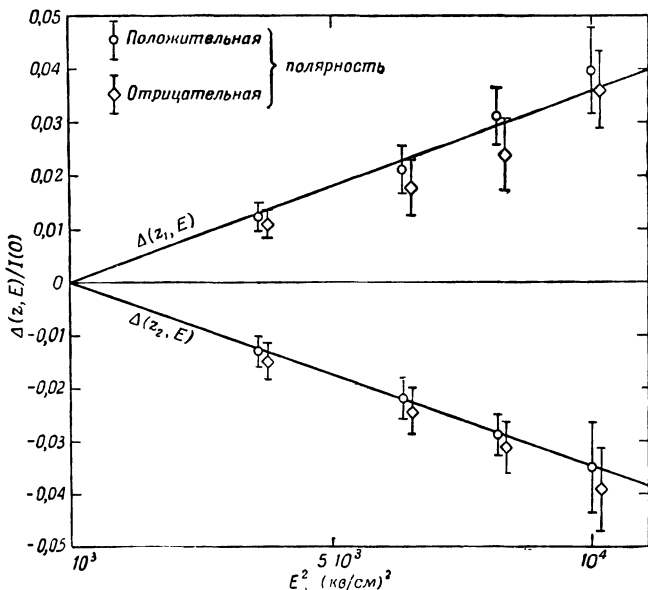


Фиг. 13.7. Система электродов в поперечном разрезе.

1 — вакуумная камера; 2 — алюминиевая двутавровая балка; 3 — молекулярный пучок; 4 — алюминиевые электроды; 5 — высоковольтный изолятор; 6 — опорная плита.

система позволяла получать поле напряженностью  $100 \text{ кВ/см}$ , после чего наступал пробой.

На фиг. 13.8 приведены некоторые результаты наблюдений. Изменение интенсивности пучка  $\Delta I$ , зарегистрированное детектором, помещенным в обе точки половинной интенсивности ( $z_1$  и  $z_2$ ), изображено здесь как функция напряженности электрического поля при обеих полярностях поля.



Фиг. 13.8. Зависимость изменения интенсивности в точках  $z_1$  и  $z_2$ , где интенсивность равна половине максимальной напряженности поля.

Отклонение пучка, соответствующее полному заряду атомов, прямо пропорционально напряженности  $E$ , а отклонение, вызванное индуцированным дипольным моментом, пропорционально  $E^2$ . Наблюдавшийся ход  $\Delta I(z_i, E)$  показан на фиг. 13.8. Легко видеть, что функция  $\Delta I(z_i, E)$  пропорциональна  $E^2$  вплоть до значений напряженности  $E$  около  $10^5 \text{ в/см}$ , как этого следовало

ожидать на основании одной только дипольной поляризуемости. При еще бóльших напряженностях  $\Delta I$  уже не пропорционально  $E^2$ : и  $\Delta I(z_1, E)$  и  $\Delta I(z_2, E)$  падают с ростом напряженности  $E$  при достаточно больших значениях последней. Такое поведение не соответствует ни отклонению из-за наличия заряда у атомов, ни отклонению из-за поляризуемости диполей, но относится скорее к эффекту ослабления пучка при таких сильных полях. Пучок, по-видимому, ослабляется пропорционально увеличивающемуся току между электродами, что приводит к зависящему от напряженности поля изменению сигнала  $D(z_i, E)$ , не связанному с электростатическим отклонением атомов в пучке.

В табл. 13.1 представлены данные, вычисленные на основании результатов измерений с пучками атомов калия и цезия и молекул водорода и дейтерия. В ней даются верхние границы возможных зарядов. Для водорода и дейтерия верхние границы возможного полного

Таблица 13.1

Сводные данные измерений заряда методом атомных пучков<sup>1)</sup>

Результаты	Истолкование <sup>2)</sup>
Газы	
$ q_{H_2}  < 2 \cdot 10^{-15} q_e$	$ \delta q  < 1 \cdot 10^{-15} q_e$
$ q_{D_2}  < 2,8 \cdot 10^{-15} q_e$	$ q_n  < 2,4 \cdot 10^{-15} q_e$
Щелочные металлы	
$q_K = (-3,8 \pm 11,8) \cdot 10^{-17} q_e$	$q_K = 19 \delta q + 20 q_n$
$q_{Cs} = (+1,3 \pm 5,7) \cdot 10^{-17} q_e$	$q_{Cs} = 55 \delta q + 78 q_n$

<sup>1)</sup> Обозначения:  $\delta q$  — разность зарядов электрона и протона;  $q_n$  — заряд нейтрона;  $q_e$  — абсолютная величина заряда электрона.

<sup>2)</sup> Если считать, что величина  $\delta q$  не зависит от  $q_n$ , то уравнения для щелочных металлов составляют систему уравнений с двумя неизвестными. Их решение определяет пределы  $\delta q = (-0,85 \pm 2,7) \cdot 10^{-17} q_e$  и  $q_n = (+0,61 \pm 2,0) \cdot 10^{-17} q_e$ .

Однако реакция распада нейтрона  $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$  приводит к равенству  $\delta q = q_n$ , так что  $\delta q = (1,0 \pm 4,2) \cdot 10^{-19} q_e$ .

заряда намного выше, чем для щелочных металлов. Это объясняется тем, что эффективность детектора Пирани, использовавшегося при работе с пучками водорода, меньше эффективности детектора для щелочных металлов, основанного на поверхностной ионизации. По этой причине установка для газов была короче и менее чувствительной к малым отклонениям, чем установка для щелочных металлов.

Мы принимали, что заряд атома или молекулы полностью определяется скалярной суммой  $q = Z\delta q + Nq_n$ , где  $Z$  — число пар электрон — протон,  $\delta q = q_p - q_e$  — разность зарядов электрона и протона,  $N$  — число нейтронов, а  $q_n$  — заряд нейтрона. Предельное значение  $\delta q$  можно определить непосредственно из данных измерения результирующего заряда молекулы водорода:

$$|\delta q| = \frac{|q_{\text{H}_2}|}{2} < 1 \cdot 10^{-15} q_e. \quad (27)$$

При этом результат для дейтерия дает предельное значение  $q_n$ :

$$|q_n| < 2,4 \cdot 10^{-15} q_e. \quad (28)$$

Еще ниже оказываются границы, полученные из опытных значений зарядов цезия и калия:

$$q_{\text{Cs}} = 55\delta q + 78q_n = (13 \pm 56) \cdot 10^{-18} q_e, \quad (29)$$

$$q_{\text{K}} = 19\delta q + 20q_n = (-38 \pm 118) \cdot 10^{-18} q_e. \quad (30)$$

Рассматривая (29) и (30) как систему уравнений для  $\delta q$  и  $q_n$ , получаем решение в виде

$$\delta q = (-8,5 \pm 27) \cdot 10^{-18} q_e \quad (31)$$

независимо от значения  $q_n$  и

$$q_n = (6,1 \pm 20) \cdot 10^{-18} q_e \quad (32)$$

независимо от значения  $\delta q$ .

Если же принять, что  $\delta q = q_n$ , то верхняя граница разности зарядов электрона и протона оказывается еще меньше. Соотношение  $\delta q = q_n$  следует из обычного предположения о сохранении заряда в  $\beta$ -распаде нейтрона

$(n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu})$  и равенстве нулю заряда антинейтрино<sup>1)</sup>. Тогда  $\delta q = q_{\text{атом}} / (Z + N)$ , и из  $q_{\text{Cs}}$  мы получим

$$\delta q = (1,0 \pm 4,2) \cdot 10^{-19} q_e. \quad (33)$$

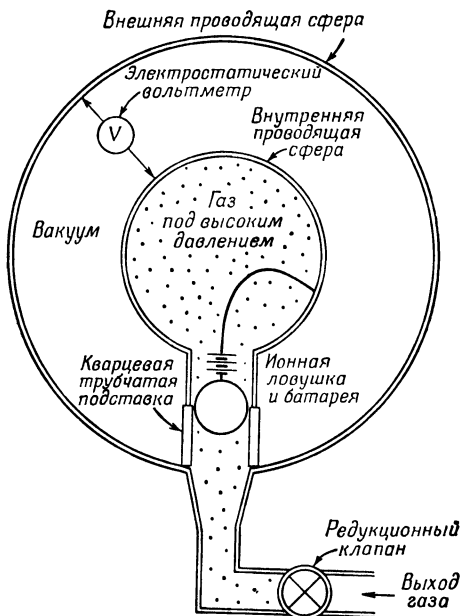
Улучшив вакуум, характер электрического поля и стабильность детектора, мы надеемся повысить чувствительность нашей установки с пучком атомов щелочных металлов еще примерно в 100 раз. Опыт с атомным пучком, проделанный Шапиро и Эстулиным [14], дал верхний предел для заряда нейтрона, равный  $6 \cdot 10^{-12} q_e$ .

Теперь я кратко расскажу о макроскопическом эксперименте с истечением газа, впервые проведенном Пиккардом и Кесслером [4], в котором измеряется полный заряд  $Q$  большого числа  $N$  молекул газа по изменению потенциала металлического сосуда относительно наружного электрода при истечении из него газа. Установка упомянутых авторов показана на фиг. 13.9. Она состоит из двух концентрических проводящих сфер, образующих сферический конденсатор. Внутренняя сфера может быть заполнена газом. Разность потенциалов между этими двумя сферами зависит от емкости, от поверхностного заряда на внутренней сфере и от объемного заряда, который переносится газом.

Пиккард и Кесслер наполняли внутреннюю сферу газами  $\text{CO}_2$  или  $\text{N}_2$  до давления 20—30 атм. Затем они позволяли газу вытекать из внутренней сферы и измеряли при этом изменение потенциалов на обкладках конденсатора. Если газ нейтрален, а размеры сферы не изменяются, то разность потенциалов должна оставаться постоянной. Если же газ несет некоторый заряд, обусловленный неравенством зарядов электрона и протона, то при истечении газа из внутренней сферы ее потенциал должен изменяться. Чтобы исключить или хотя бы уменьшить истечение ионов или электронов, в горловине

<sup>1)</sup> Верхний предел допустимого заряда для нейтрино можно получить, считая, что нейтрино представляет собой дираковскую частицу с массой 500 эв (верхний предел допустимой массы нейтрино), и вычисляя тот верхний предел заряда, который еще согласуется со значениями сечений для нейтрино (см. [13]). Найденный таким путем предельный заряд нейтрино равен примерно  $10^{-9} q_e$ .

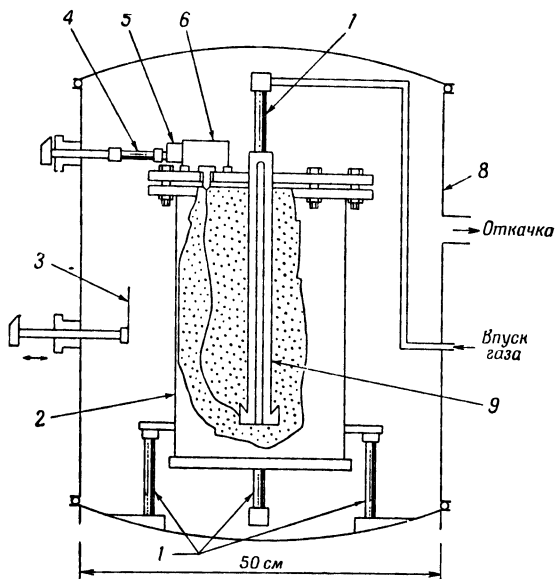
выпускной трубы во внутренней сфере был установлен небольшой электрод, на который подавалось такое напряжение относительно сферы, что ионы задерживались и не выходили вместе с нейтральными молекулами газа.



Фиг. 13.9. Схема установки Пиккарда — Кесслера для опыта по истечению газа.

Результаты измерений показали, что  $\delta q \leq 5 \cdot 10^{-21} q_e$ . На фиг. 13.10 изображена конструкция современной установки, использовавшейся Кингом [15] для проведения такого же опыта с водородом и гелием. Округляя с завышением, мы можем сказать, что его результаты дают верхний предел заряда  $H_2$ , меньший  $10^{-19} q_e$ .

Для достижения еще более высокой чувствительности при определении  $\delta q$  предлагался современный вариант опыта Милликена, в котором вместо масляных капель использовался бы миниатюрный металлический шарик с магнитным подвесом.



Фиг. 13.10. Установка Кинга для опыта по истечению газа.

1 — кварцевые изоляторы; 2 — внутренняя камера; 3 — электрометр; 4 — кварцевый стержень; 5 — выключатель; 6 — коробка с аккумуляторами; 7 — кварцевая трубка; 8 — внешняя камера; 9 — деионизатор.

Экспериментальные данные о величине возможной разности зарядов электрона и протона сведены в табл. 13.2.

### Истолкование результатов

Измерения отклонения пучков атомов щелочных металлов дают в качестве предела для  $\delta q$  величину  $5 \cdot 10^{-19} q_e$ . Это составляет примерно четверть значения, требуемого теорией расширяющейся вселенной Литтлтона и Бонди. Макроскопическое исследование по методу свободного истечения газа дает еще более низкий предел — от  $10^{-21} q_e$  до  $10^{-20} q_e$ . Все эти данные убедительно свидетельствуют против теории Литтлтона — Бонди в том варианте, в котором требуется  $\delta q = 2 \cdot 10^{-18} q_e$ , но они недостаточны для проверки другого, хотя и менее

Результаты измерения предельных зарядов молекул<sup>1)</sup>

Метод	Молекулы	$q_{\text{мод}}$ в единицах $q_e$	$\delta q = \frac{q_{\text{мол}}}{Z + N}$	Исследователи
Истечение газа	CO <sub>2</sub>	$< 2,2 \cdot 10^{-19}$	$< 5 \cdot 10^{-21}$	Пиккард и Кесслер [4]
	Ag	$(4 \pm 4) \cdot 10^{-20}$	$(1 \pm 1) \cdot 10^{-21}$	
	N <sub>2</sub>	$(6 \pm 6) \cdot 10^{-20}$	$(2,1 \pm 2,1) \cdot 10^{-21}$	Кинг [15]
	H <sub>2</sub>	$(-2,5 \pm 1,5) \cdot 10^{-20}$	$(-1,3 \pm 0,8) \cdot 10^{-20}$	
	He	$(4 \pm 2) \cdot 10^{-20}$	$(1 \pm 0,5) \cdot 10^{-20}$	
Отклонение лучка	CsI	$< 4 \cdot 10^{-13}$	$< 1,5 \cdot 10^{-15}$	Хьюз [11] Шапиро и Эстулин [14]
	Свободные нейтроны	$< 6 \cdot 10^{-12}$	—	
	CsF	$< 2 \cdot 10^{-14}$	$< 1,3 \cdot 10^{-16}$	Цорн, Чемберлен и Хьюз [9, 10]
	KF	$< 1 \cdot 10^{-13}$	$< 1,7 \cdot 10^{-15}$	
	H <sub>γ</sub>	$< 2 \cdot 10^{-15}$	$< 1 \cdot 10^{-15}$	
	D <sub>2</sub>	$< 2,8 \cdot 10^{-15}$	$< 0,7 \cdot 10^{-15}$	
	K	$(-3,8 \pm 11,8) \cdot 10^{-17}$	$(-1 \pm 3) \cdot 10^{-18}$	
Cs	$(1,3 \pm 5,6) \cdot 10^{-17}$	$(1 \pm 4,2) \cdot 10^{-19}$		

<sup>1)</sup> С помощью эффекта Мессбауэра Гродзинсом, Энгельбергом и Бертоши [18] была установлена верхняя граница заряда фотона, равная  $1 \cdot 10^{-15} q_e$ .



привлекательного варианта теории Литтлтона—Бонди, в котором предполагается, что протонов во Вселенной больше, чем электронов.

В описанных и других проведенных недавно экспериментах с необычайно высокой степенью точности подтверждено равенство абсолютных величин зарядов электрона и протона. Таким образом, опыт не подтверждает предположения о том, что закон сохранения числа барионов является просто следствием закона сохранения заряда. Более того, по-видимому, любой вариант теории элементарных частиц должен требовать равенства абсолютных величин перенормированных зарядов электрона и протона.

Как указали Цзю и Гоффман (см. введение), опыты, подтверждающие предположение об электрической нейтральности атомов, одновременно доказывают, что электрический заряд электрона не зависит от его скорости. Конечно, независимость заряда от скорости можно вывести из того факта, что электроны на разных орбитах в различных атомах движутся с различными средними скоростями. Так, если внешний электрон в атоме с атомным номером  $Z$  движется со средней скоростью, приблизительно равной  $\alpha c$  ( $c$  — скорость света, а  $\alpha$  — постоянная тонкой структуры, равная  $1/137$ ), то внутренний электрон движется со средней скоростью, приблизительно равной  $Z\alpha c$ . Отсюда видно, что электрическая нейтральность таких легких атомов и молекул, как He или  $N_2$  (заряд которых меньше  $10^{-19} q_e$ ), указывает на равенство зарядов электрона и протона при нерелятивистских скоростях или в состоянии покоя. Если предположить, что заряд электрона изменяется со скоростью по закону

$$q_e(v) = q_e(0) \left[ 1 + a \left( \frac{v}{c} \right)^2 \right], \quad (34)$$

и в дальнейшем приписывать результирующий заряд атомов с большими  $Z$  (например, Ag,  $Z=18$ , причем заряд  $< 10^{-19} q_e$ ) существованию такой зависимости заряда от скорости, проявляющейся у внутренних электронов, то мы получим  $a < 3 \cdot 10^{-18}$ . Такова максимальная точность, с которой к настоящему моменту проверено

утверждение о независимости заряда электрона от скорости. Независимость же величины заряда от скорости является основной предпосылкой лоренц-инвариантности электродинамики.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Gell-Mann M., Proc. of the Tenth Annual International Conference on High-Energy Physics, New York, 1960, p. 792.
2. Feinberg G., Goldhaber M., Proc. Natl. Acad. Sci. U. S., **45**, 1301 (1959).
3. Swann W. F. G., Phil. Mag., **3**, 1088 (1927); Astrophys. Journ., **133**, 733 (1961).
4. Piccard A., Kessler E., Arch. Sci. Phys. et Nat. (Geneva), **7**, 340 (1925).
5. Blackett P. M. S., Nature, **159**, 658 (1947).
6. Littleton R. A., Bondi H., Proc. Roy. Soc., **A252**, 313 (1959).
7. Hoyle F., Proc. Roy. Soc., **A257**, 431 (1960).
8. Millikan R. A., The Electron, 1st ed., Chicago, 1917, p. 80 (имеется перевод: Р. Милликен, Электрон, М., 1924).
9. Zorn J. C., Chamberlain G. E., Hughes V. W., Bull. Am. Phys. Soc., **6**, 63 (1961); Proceedings of the Tenth Annual International Conference on High-Energy Physics, New York, 1960, p. 790; Bull. Am. Phys. Soc., **5**, 36 (1960).
10. Zorn J. C., Chamberlain G. E., Hughes V. W., Phys. Rev., **129**, 2566 (1963).
11. Hughes V. W., Phys. Rev., **76**, 474 (1949); **105**, 170 (1957).
12. Kusch P., Hughes V. W., в книге Handbuch der Physik, **37/I**, Heidelberg, 1959.
13. Allen J. S., The Neutrino, Princeton, N. J., 1958 (имеется перевод: Дж. Аллен, Нейтрино, ИЛ, 1960).
14. Шапиро И. С., Эстулин И. В., ЖЭТФ, **3**, 626 (1956).
15. King J. G., Phys. Rev. Lett., **5**, 562 (1960).
16. Hillas A. M., Cranshaw T. E., Nature, **184**, 892 (1959); **186**, 459 (1960).
17. Bondi H., Littleton R. A., Nature, **184**, 974 (1959).
18. Grodzins, Engelberg, Bertozzi, Bull. Am. Phys. Soc., **6**, 63 (1961).

## Квантование общей теории относительности

Д Ж. А Н Д Е Р С О Н

### Историческая перспектива

С самых первых дней существования квантовой механики многие понимали, что в полную квантованную теорию материи должна входить и теория гравитации. Поэтому прилагались большие усилия для объединения этих двух важнейших аспектов физического мировоззрения. Одна из самых первых попыток такого объединения была предпринята Бергманом [1] в 1947 г. За время, протекшее с тех пор, было выдвинуто много других предложений<sup>1)</sup>.

До настоящего времени разработка квантовой теории гравитации ограничивается главным образом поисками лучшего варианта классической формулировки общей теории относительности, к которому затем применяется один из существующих методов квантования. Исторически сложившийся и самый обычный метод квантования некоторой данной классической системы основывается на гамильтоновой формулировке теории. Если даны канонические координаты и импульсы, описывающие состояние системы, а также гамильтониан как функция этих переменных, то тем самым более или менее однозначно определен алгоритм построения соответствующей квантовой теории системы. Поэтому усилия по разработке квантовой теории относительности в зна-

---

<sup>1)</sup> За подробной библиографией читатель отсылается к работам [2, 3].

чительной мере направлены на получение гамильтоновой формулировки этой теории.

Трудности введения в общую теорию гамильтонова формализма вынуждают, однако, к попыткам применения и других методов квантования. Один из них, разрабатываемый Бергманом и Комаром [4], а также Де-Виттом [5], состоит в том, что берутся инвариантные относительно преобразований координат величины, которые можно построить из переменных общей теории относительности, и отыскиваются их коммутаторы<sup>1)</sup> в классической теории. Когда найдены такие коммутаторы для полного набора инвариантов, можно попытаться найти для них операторное представление, соответствующее классической алгебре коммутаторов. Для этой цели Де-Витт воспользовался обобщенным методом построения коммутаторов, разработанным Пайерлсом [6], тогда как Бергман и Комар использовали расширенную ими теорию бесконечно малых канонических преобразований.

Другой метод квантования, разрабатываемый в настоящее время Уилером и его группой [7, 8], основывается на фейнмановской формулировке квантовой механики, в которой оперируют с интегралами по путям. Арновитт и Дезер [9] применили в общей теории относительности также швингеровский вариационный принцип.

Все перечисленные методы, альтернативные по отношению к обычному гамильтонову методу квантования, разрабатывались в надежде обойти трудности, связанные с последним. Но надежды не оправдались, и трудности гамильтонова метода квантования то и дело снова появляются в той или иной форме. Поскольку здесь не представляется возможным подробно разобрать каждый из применяемых в общей теории относительности методов квантования, мы сосредоточим свое внимание главным образом на гамильтоновом методе. Ему

---

<sup>1)</sup> Речь идет, конечно, не о перестановочных соотношениях, а о классических скобках Пуассона. Квантовые коммутаторы мы будем называть здесь просто перестановочными соотношениями. — *Прим. перев.*

присущи все основные трудности, характерные для квантования общей теории относительности. В то же время схема квантования при таком методе наиболее нам понятна.

### Необходимость квантования гравитационного поля

Прежде чем подробно рассматривать трудности теории, я хотел бы отметить некоторые «за» и «против», относящиеся к самой идее квантования гравитации.

Многие утверждают, что никаких гравитационных эффектов в микроскопическом (атомном или ядерном) масштабе не может быть, так как гравитационное поле чрезвычайно слабое, примерно в  $10^{40}$  раз слабее электромагнитного. Следовательно, гравитация не должна сказываться на процессах, происходящих с элементарными частицами, или на каких-либо других явлениях микромира. На этом основании многие считают, что в квантовании гравитационного поля нет необходимости. Однако имеется ряд соображений, говорящих о том, что указанное возражение, основанное лишь на учете слабости гравитационного взаимодействия, по-видимому, неверно.

Прежде всего общая теория относительности является нелинейной теорией, и притом нелинейной по существу, в противоположность электродинамике, нелинейность которой связана лишь с взаимодействием с полем Дирака. Гравитационное поле нелинейно само по себе независимо от взаимодействий с другими полями. Поэтому нет гарантий, что представления и методы, разработанные в электродинамике, сохраняют свою силу в применении к общей теории относительности. Нам неизвестно даже, существует ли гравитационный аналог фотона.

Правда, Фейнман недавно высказал мысль, что было бы интересно посмотреть, насколько далеко можно продвинуться, применяя в общей теории относительности представления и методы, используемые обычно в квантовой теории поля, если рассматривать при этом теорию относительности как линейную теорию, а ее нели-

нейность — как результат взаимодействия поля с самим собой. При таком подходе он получил классические результаты общей теории относительности для всех трех релятивистских эффектов<sup>1)</sup>.

Тем не менее можно утверждать, что в данном случае существенна полная нелинейность задачи, и ее нельзя рассматривать как малое возмущение. Не исключено, что в непосредственной близости к элементарной частице гравитационное поле становится достаточно сильным для того, чтобы нелинейность стала играть существенную роль, и вся картина качественно меняется. Это соответствует тому, что мы имеем в теории дифференциальных уравнений: для нелинейной задачи существуют решения, которых нельзя получить методом линейных приближений.

Приведем пример из классической теории поля. Речь идет об электродинамике Борна — Инфельда. Борн и Инфельд нашли точное решение, описывающее точечный заряд. В полной нелинейной теории собственная энергия заряда конечна и существует автоматическое обречение для взаимодействия заряда с электрическими полями сколь угодно высокой частоты. В электродинамике Максвелла, которая является линейным приближением этой теории, такие выводы не имеют места, даже если учитывать нелинейные члены в качестве возмущения. Как видно из данного примера, в некоторых отношениях нелинейная теория качественно отличается от ее линеаризованного варианта. Это обстоятельство тесно связано с проблемой, рассматривавшейся Фуллером и Уилером [10], которые ввели в теорию неевклидову топологию. Пока топология остается евклидовой, мы имеем право пользоваться линейным приближением уравнений гравитационного поля и рассматривать нелинейные члены в качестве слабого возмущения. Если же всерьез

---

<sup>1)</sup> Фейнман сообщил об этом в неопубликованной лекции, прочитанной 24 сентября 1963 г. в Университете Йешива. [Первые работы в этом направлении были выполнены в СССР задолго до работ Фейнмана, причем был получен из квантовых соображений один из эффектов общей теории относительности (см. И. Пийр, Труды института физики и астрономии АН Эст. ССР, 5, 41 (1957); Н. В. Мицкевич, ЖЭТФ, 34, 1656 (1958). — Прим. перев.]

допустить возможность отклонения топологии от евклидовой вблизи элементарных частиц, то гравитационное поле уже нельзя рассматривать как слабое. Тогда оказывается, что никакого приемлемого приближения первого порядка не существует, и мы приходим к необходимости производить квантование всей полной теории.

Квантование гравитационного поля необходимо и по другим соображениям. Считается, что все частицы являются источниками гравитационного поля. Если бы их гравитационные поля были по-настоящему классическими, то, одновременно измеряя все компоненты таких полей, можно было бы определить сразу и координаты и скорости частиц, нарушив тем самым принцип неопределенности. Следовательно, гравитационное поле не может быть классическим, но должно флуктуировать так, чтобы не было противоречия с принципами квантовой физики.

С точки зрения Паули, такие флуктуации гравитационного поля могут сгладить световой конус. В свою очередь это обстоятельство может в принципе привести к появлению обрезания в теории. Но было бы рано говорить, что все вышеизложенные предположения соответствуют действительности.

## Процедура квантования

Уравнения общей теории относительности обычно выводятся из принципа действия, о котором уже говорилось в гл. 4:

$$S = \int R \sqrt{-g} d^4x. \quad (1)$$

Но, как было сказано выше, такая формулировка неудобна с точки зрения квантования, и более желательно использование гамильтонова формализма. Таким образом, при квантовании гравитационного поля в первую очередь необходимо привести общую теорию относительности к гамильтоновой форме; иначе говоря, требуется определить гамильтониан данной теории, найти соответствующие канонические переменные и получить

собственные решения, применяя обычные перестановочные соотношения. Однако проблема гамильтоновой формулировки этой теории уже сама по себе является трудной задачей в силу общей ковариантности теории.

### Гамильтонова формулировка общей теории относительности

Для системы, которая описывается каноническими переменными  $q_i$  и  $p_i$ , уравнения Гамильтона имеют вид

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{и} \quad \dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (2)$$

где гамильтониан  $H$  является функцией всех  $q$  и  $p$ .

Если заданы начальные значения  $q_i$  и  $p_i$ , то с помощью уравнений (2) можно алгебраически выразить через них первые производные канонических переменных по времени. Путем последовательного дифференцирования можно выразить через начальные значения и все высшие производные. Поэтому представляется возможным разложить решение  $q_i(t)$  в степенной ряд около значения  $t = t_0$ :

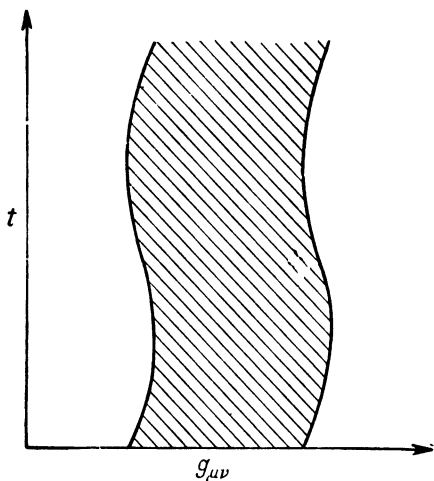
$$q_i(t) = q_{i0} + \dot{q}_{i0}t + \dots = q_{i0} + \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} \right)_0 t + \dots, \quad (3)$$

и точно так же

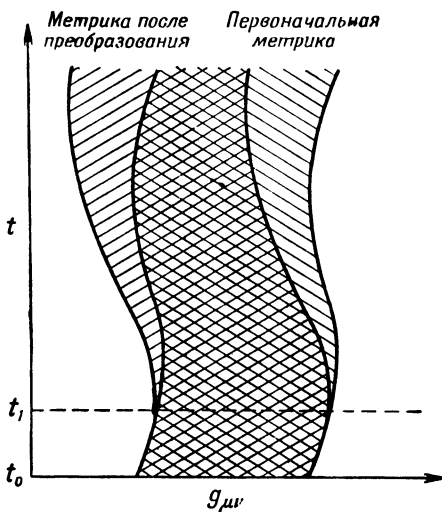
$$p_i(t) = p_{i0} + \dot{p}_{i0}t + \dots = p_{i0} - \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} \right)_0 t + \dots \quad (4)$$

Таким образом, в обычной гамильтоновой формулировке теории, задавая начальные значения всех  $q$  и  $p$ , мы однозначно определяем значения этих переменных во все последующие моменты времени. Но в общей теории относительности это невозможно, и вот почему. Предположим, что заданными в начальный момент значениями всех десяти компонент метрики и всех их первых производных по времени на основании уравнений поля однозначно определяется поведение метрики в будущем. Схематически это показано на фиг. 14.1, где метрика представлена как функция времени. По оси





Фиг. 14.1. Схематическое изображение зависимости компонент метрики от времени.



Фиг. 14.2. Схематическое изображение зависимости компонент метрики от времени при преобразовании координат, которое само зависит от времени.

абсцисс схематически откладывается функциональное пространство метрики.

Мы можем произвести преобразование координат, ничего не изменяющее вплоть до момента времени  $t_1 > t_0$ , но в более поздние моменты отличающееся от тождественного преобразования. Такое преобразование допустимо, так как его коэффициенты будут дифференцируемы до любого наперед заданного порядка. Мы получим тогда метрику, которая будет представляться новым решением уравнений поля, отличным от предыдущего и отвечающим тем же начальным значениям. Ясно, что эти два решения соответствуют не двум различным физическим ситуациям, а одной и той же, но представленной в двух различных системах координат. Результат такого преобразования изображен на фиг. 14.2, где график преобразованной метрики наложен на исходный график. Область, в которой графики перекрываются, изображает ту часть метрики, которая описывает данную физическую ситуацию и не изменяется при преобразовании координат.

Изложенное нами позволяет заключить, что уравнения поля не определяют однозначно изменения метрики во времени. В гамильтоновой формулировке теории такая неоднозначность отражается в неоднозначности функции Гамильтона. Если бы последняя была определена однозначно, то для метрики, конечно, имелось бы лишь единственное решение типа (3) и (4).

Гамильтонова формулировка общей теории относительности содержит в силу общей ковариантности теории еще и другую трудность. Дифференцируя плотность лагранжиана гравитационного поля по  $g_{\mu\nu}$ , можно построить плотность канонического импульса  $p^{\mu\nu}$ , сопряженную по отношению к  $g_{\mu\nu}$ :

$$p^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}}. \quad (5)$$

Использованная здесь плотность лагранжиана  $\mathcal{L}$  не равна  $\sqrt{-g} R$ , но отличается от этой величины на частную дивергенцию  $\phi^{\mu}_{\mu}$ , выбранную так, чтобы новая плотность лагранжиана не зависела от вторых производных

метрики. Ясно, что оба лагранжиана приводят к одним и тем же уравнениям поля метрического тензора. Таким образом, величина  $p^{\mu\nu}$  является точно определенной функцией  $g_{\mu\nu}$ ,  $\dot{g}_{\mu\nu}$  и производных по пространственным координатам:

$$p^{\mu\nu} = p^{\mu\nu}(g_{\alpha\beta}, \dot{g}_{\alpha\beta}). \quad (6)$$

Из ковариантности теории следует, однако, что канонические переменные  $g_{\mu\nu}$  и  $p^{\mu\nu}$  не являются независимыми, но подчинены четырем уравнениям связей, именуемым первичными связями и имеющим вид

$$p^{0\mu} + \Gamma^\mu(g_{\alpha\beta}) = 0. \quad (7)$$

Поэтому оказывается, что уравнения (6) невозможно обратить, чтобы однозначно выразить величины  $\dot{g}_{\mu\nu}$  через  $p^{\mu\nu}$  и  $g_{\mu\nu}$ . Таким образом, при попытке получить плотность гамильтониана  $\mathcal{H}$  по правилу

$$\mathcal{H} = p^{\mu\nu} \dot{g}_{\mu\nu} - \mathcal{L}(g_{\alpha\beta}, \dot{g}_{\alpha\beta}) \quad (8)$$

оказывается невозможным исключить величины  $\dot{g}_{\alpha\beta}$  в правой части (8), а значит, и получить  $\mathcal{H}$  как функцию одних только канонических переменных. Это одна из главных проблем, с которыми столкнулись теоретики при формулировке гамильтонова формализма в общей теории относительности. Она была различными способами решена Пирани и Шилдом [11] и Дираком [12].

В электродинамике наблюдается та же самая картина, но там все выглядит проще. Электромагнитное поле описывается векторным потенциалом  $\mathbf{A}$  и скалярным потенциалом  $\varphi$ , а также переменными, характеризующими поля частиц (например, поле Дирака). Эта теория инвариантна относительно группы преобразований калибровки

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \nabla\lambda \quad (9)$$

и

$$\bar{\varphi} = \varphi + \dot{\lambda}, \quad (10)$$

где  $\lambda$  — произвольная функция пространственных координат и времени.

В общей теории относительности подобная группа определяется четырьмя функциями — это четыре новые координаты, представленные как функции старых координат. В электродинамике же имеется всего одна произвольная функция, но многие следствия в обеих теориях совпадают. Таким образом, на основании тех же соображений, что и в случае общей теории относительности, мы можем прийти к выводу, что задания начальных значений переменных поля  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$  вместе с их первыми производными по времени недостаточно, чтобы получить единственное решение, определяющее поведение системы в будущем. Поэтому все наши выводы о гамильтоновой формулировке общей теории относительности в полной мере применимы и здесь.

В электродинамике плотность лагранжиана имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{A}} + \nabla\varphi)^2 - \frac{1}{2} [\nabla\mathbf{A}]^2 - \rho\varphi + \mathbf{j} \cdot \mathbf{A}. \quad (11)$$

Определяя плотность канонического импульса  $\mathbf{p}$ , сопряженного  $\mathbf{A}$ , как производную  $\mathcal{L}$  по  $\dot{\mathbf{A}}$ , получаем

$$\mathbf{p} = \dot{\mathbf{A}} + \nabla\varphi. \quad (12)$$

Заметим, однако, что  $\mathcal{L}$  не зависит от  $\dot{\varphi}$ , так что  $\pi$  — импульс, сопряженный  $\varphi$ , удовлетворяет уравнению

$$\pi = 0. \quad (13)$$

Это и есть уравнение первичной связи, вытекающее из калибровочной вариантности теории и аналогичное уравнениям первичных связей (7). Здесь непосредственно видно, что величину  $\dot{\varphi}$  невозможно выразить через плотности канонических импульсов. Величины же  $\dot{\mathbf{A}}$  выражаются через канонические переменные, и мы получим гамильтониан  $H$  в виде

$$H = \int \mathcal{H} d^3x, \quad (14)$$

где его плотность равна

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \mathbf{p}^2 + \frac{1}{2} [\nabla\mathbf{A}]^2 - \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} + \varphi(\nabla\mathbf{p} + \rho) + \dot{\varphi}\pi. \quad (15)$$

В данном выражении величина  $\dot{\phi}$  рассматривается как некоторая произвольная функция пространственных и временной координат. Ее наличие в гамильтониане отражает его неоднозначность, неизбежную в том случае, если канонические уравнения движения не определяют однозначно канонические переменные через их начальные значения.

К сожалению, дело этим не ограничивается. Имеется и другое уравнение связи, вытекающее из требования, чтобы  $\dot{\pi}$  равнялось нулю и, следовательно, равенство (13) выполнялось на протяжении всей эволюции физической системы. Производная по времени от  $\pi$  находится, как обычно, путем взятия скобок Пуассона для  $\pi$  и  $H$ . Это дает

$$\dot{\pi} = (\pi, H) = \nabla \mathbf{p} + \rho, \quad (16)$$

откуда получаем требование

$$\nabla \mathbf{p} + \rho = 0. \quad (17)$$

Это не что иное, как одно из уравнений Максвелла, ибо  $\mathbf{p}$  равно  $-\mathbf{E}$ , т. е. напряженности электрического поля. Уравнение (17) называется уравнением вторичной связи. Все высшие производные  $\pi$  по времени и все производные по времени от  $\nabla \mathbf{p} + \rho$  равны нулю, так что никаких связей сверх уже упомянутых в теории не появляется.

Перевод общей теории относительности на язык гамильтонова формализма производится аналогичным образом. Но ввиду сложности уравнений первичных связей (7) окончательные выражения для гамильтониана и вторичных связей оказываются практически бесполезными. Лишь недавно Дираку, Де-Витту и мне — всем независимо друг от друга — удалось ввести в теорию новый набор канонических переменных таким образом, что новые уравнения первичных связей приняли простой вид

$$p^{0\mu} = 0. \quad (18)$$

В этих новых переменных плотность гамильтониана несколько упростилась:

$$\mathcal{H} = (g^{00})^{-1/2} \mathcal{H}_L + g_{0r} \mathcal{H}^r. \quad (19)$$

Здесь  $\mathcal{H}_L$  и  $\mathcal{H}^r$  — определенные функции  $g_{rs}$ ,  $p^{rs}$  и их производных по пространственным координатам (латинские индексы пробегают значения 1, 2, 3) <sup>1)</sup>.

Так как уравнение  $p^{0\mu}$  должно выполняться все время, то величина  $p^{0\mu}$  должна быть всегда равна нулю. Она вычисляется путем подстановки в скобки Пуассона  $p^{0\mu}$  и гамильтониана  $H$ . Поскольку ни  $\mathcal{H}_L$ , ни  $\mathcal{H}^r$  не зависят от  $g_{0\mu}$  и  $p^{0\mu}$ , вычисление коммутатора для  $\mathcal{H}$  и  $p^{0\mu}$  приводит к вторичным связям вида

$$\mathcal{H}_L = \mathcal{H}^r = 0. \quad (20)$$

Связь, наложенная на  $\mathcal{H}^r$ , известна как продольная связь, тогда как связь, наложенная на  $\mathcal{H}_L$ , называется гамильтоновой. Эти уравнения связей представляют собой основной источник трудностей при построении квантового варианта общей теории относительности. Существование этих связей является прямым следствием инвариантности теории относительно произвольных преобразований координат. Поэтому трудности, связанные с гамильтоновой формулировкой теории, по всей видимости, должны так или иначе появляться и при любой другой ее формулировке. В данной формулировке их содержание состоит в том, что канонические переменные  $g_{rs}$  и  $p^{rs}$  не являются взаимно независимыми. В то же время при гамильтоновом формализме квантования существенно, чтобы канонические переменные, для которых пишутся перестановочные соотношения, были независимыми. В конечном счете это означает, что у нас слишком много переменных и что часть их необходимо исключить из теории. К сожалению, обычные методы исключения лишней части  $g_{0\mu}$  и  $p^{0\mu}$  не могут быть здесь применены непосредственно ввиду сложности уравнений связей (20).

Дирак первым сформулировал упрощенный вид этих связей. Уравнение для  $\mathcal{H}^r$  сводится к

$$\mathcal{H}^r = p_{|s}^{sr}. \quad (21)$$

Обозначение  $|s$  принято для ковариантного дифференцирования относительно метрики  $g_{rs}$  и обратной ее мет-

<sup>1)</sup> Т. е. осуществлено так называемое (3+1)-разбиение пространства — времени, и тем самым теория предполагает привилегированные системы координат. — *Прим. ред.*

рики  $g^{rs}$ . Это не полная четырехмерная, а лишь трехмерная ковариантная производная.

Уравнение (21) очень напоминает соответствующее уравнение электродинамики для случая плотности заряда, равной нулю:

$$\nabla \rho = 0. \quad (22)$$

В правой части (21) стоит обобщенная дивергенция в применении к симметричному тензору в искривленном пространстве. В электродинамике же мы писали просто частную дивергенцию вектора. В этом различии причина многих трудностей.

Связь  $\mathcal{H}_L$  имеет вид

$$\mathcal{H}_L = \frac{1}{K} \left( -g_{ra} g_{sb} - \frac{1}{2} g_{rs} g_{ab} \right) p^{rs} p^{ab} + {}^3R(g_{ab}), \quad (23)$$

где

$$K^2 = |g_{rs}|, \quad (24)$$

а  ${}^3R(g_{ab})$  — скалярная кривизна, построенная из метрики  $g_{rs}$  и обратной ей метрики. Первое слагаемое напоминает здесь кинетическую энергию, второе — потенциальную. И действительно, в линейризованном варианте теории эти члены на самом деле интерпретируются как кинетическая и потенциальная энергия.

Чтобы лучше понять, какого рода трудности возникают в теории из-за наличия уравнений связи (20), вернемся к примеру электродинамики. Там были переменные  $\mathbf{A}$  и  $\rho$ . Они не являются полностью независимыми, так как удовлетворяют уравнению (18). Это означает, что не все переменные, фигурирующие в теории, являются независимыми каноническими переменными. Если бы мы сумели произвести такое преобразование, что в этой теории новой плотностью канонического момента стала бы величина  $\nabla \rho + \rho$ , то тогда она вместе с канонически сопряженной ей канонической координатой играла бы ту же роль, что  $\pi$  и  $\phi$ , и обе новые величины также могли бы быть исключены из рассмотрения.

Это очень просто сделать, вводя продольные и поперечные компоненты векторов  $\mathbf{A}$  и  $\rho$ . Пусть

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^L + \mathbf{A}^T, \quad (25)$$

где  $\mathbf{A}^L$  и  $\mathbf{A}^T$  удовлетворяют следующим условиям:

$$(\nabla \mathbf{A}^T) \equiv 0, \quad (26)$$

$$[\nabla \mathbf{A}^L] \equiv 0. \quad (27)$$

Аналогичным образом можно записать и  $\rho$ :

$$\rho = \rho^L + \rho^T.$$

Тогда уравнение (19) сведется к

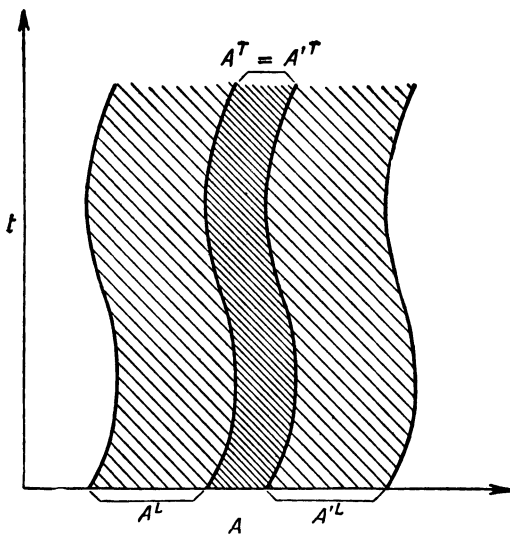
$$\nabla \rho^L + \rho = 0. \quad (28)$$

Так как компоненты  $\rho^T$  не фигурируют в уравнении связи, мы вправе выбрать  $\rho^T$  и  $\mathbf{A}^T$  в качестве основных динамических переменных. Величина  $\rho^L$  выражается через  $\rho$  и равна нулю, если  $\rho = 0$ . Вектор  $\mathbf{A}^L$  можно обратить в нуль соответствующим выбором калибровочного преобразования. Таким образом, гамильтониан удастся построить с помощью одних  $\mathbf{A}^T$  и  $\rho^T$ , являющихся в этом случае каноническими переменными.

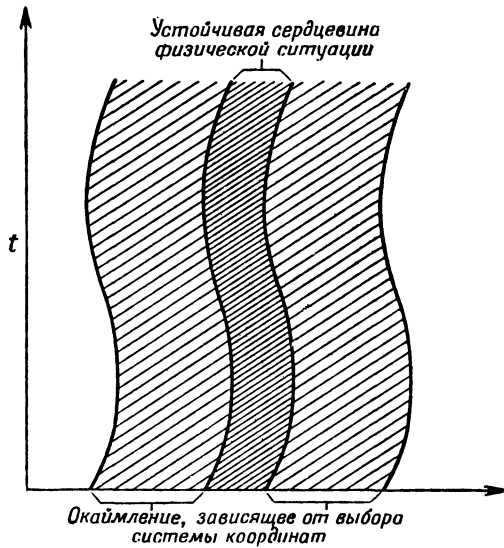
В коммутационных соотношениях для  $\mathbf{A}^T$  и  $\rho^T$  фигурируют члены, отличающиеся от величин в обычных коммутационных соотношениях с  $\delta$ -функциями. Но эти члены не зависят от  $\mathbf{A}^T$  и  $\rho^T$  и не приводят к новым условиям. Сами величины  $\mathbf{A}^T$  и  $\rho^T$  инвариантны относительно преобразования калибровки, и при калибровочных преобразованиях изменяется лишь  $\mathbf{A}^L$ . Мы схематически изобразили на фиг. 14.3 два различных поля  $A$ , описывающих одну и ту же физическую ситуацию, т. е. приводящих к одним и тем же напряженностям  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ . Средняя часть этой фигуры изображает поперечные части обоих полей  $A$ , общие для них обоих. Две боковые полосы изображают различные продольные части этих полей.

Полученный результат почти без изменения применим и к случаю гравитационного поля. Это значит, что в представлении  $r^{rs}$  и  $g_{rs}$  имеет место некоторая инвариантность относительно преобразований координат. Она выражает собой «внутреннюю геометрию». На фиг. 14.4 инвариантная часть этого представления изображена полосами с редкой штриховкой по обе стороны инвариантной сердцевины. Форма этих полос зависит





Ф и г. 14.3 Представление поля  $A$  при калибровочном преобразовании.



Ф и г. 14.4. Схематическое изображение инвариантной сердцевины внутренней геометрии и окаймления, зависящего от выбора системы координат.

от выбора системы координат. Сердцевина же остается без изменения при любом преобразовании координат.

Как и в случае электродинамики, хотелось бы выделить из  $g_{rs}$  и  $p^{rs}$  ту физическую часть, которая остается неизменной при преобразованиях координат. Степень трудности такого выделения зависит от вида уравнений связи. В случае электродинамики это выделение осуществлялось путем разделения  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{p}$  на продольные и поперечные части. Как мы видели, продольная часть  $\mathbf{p}$  определяется однозначно уравнением связи (28). Вектор же  $\mathbf{A}^L$  может быть оттрансформирован путем выбора соответствующего условия калибровки.

Величины  $g_{rs}$  и  $p^{rs}$  удастся разделить на части подобно тому, как это делалось в случае электродинамики. Но лишние переменные все же затруднительно исключить из рассмотрения.

В лучшем случае удастся довести это решение до конца методом приближений, основанным на предположении о слабом поле. Но на сегодня, насколько мне известно, никому не удалось предложить схему разделения  $g_{rs}$  и  $p^{rs}$ , в которой физическая часть поля не фигурировала бы в уравнениях связей, или схему, которая бы позволила непосредственно решить уравнения связей и выразить лишние переменные через другие — канонические — переменные теории.

## Квантовый вариант теории

Обсудив вопрос о классической гамильтоновой формулировке общей теории относительности и электродинамики, мы можем теперь заняться квантовыми вариантами этих теорий. Я, как и прежде, буду часто обращаться к случаю электромагнетизма, поскольку картина здесь для нас ясна. В рамках гамильтонова формализма возможны два пути квантования обеих теорий. Наиболее прямой из них был использован Бергманом и Комаром [4] и Де-Виттом [5]. Он состоит в рассмотрении лишь физической части переменных поля как операторов, действующих в гильбертовом пространстве. Остальные переменные должны быть исключены из рассмотрения с

помощью уравнений связей и калибровочных или координатных условий. Тогда в случае электромагнетизма следует рассматривать как операторы лишь  $\mathbf{A}^T$  и  $\mathbf{p}^T$ , а  $\mathbf{p}^L$  заменить на  $-\nabla(1/\nabla^2)\rho$ . Задавшись определенной калибровкой (например, положив  $\mathbf{A}^L=0$ ), можно получить гамильтониан, выраженный прямо через эти поперечные части поля. Тогда можно записать уравнение Шредингера. Наконец, из скобок Пуассона обычным образом следуют перестановочные соотношения для поперечных частей поля. Избрав представление, подобное  $x$ -представлению обычной квантовой механики, можно следующим образом определить операторы  $A^T$  и  $p^T$ :

$$\mathbf{A}^T\varphi = \mathbf{A}^T\varphi, \quad \mathbf{p}^T\varphi = i\hbar \frac{\delta}{\delta\mathbf{A}^T} \varphi. \quad (29)$$

В этом случае векторы состояния должны зависеть от  $\mathbf{A}^T$ .

Такой же метод был использован и в случае гравитационного поля, когда  $g_{rs}^{TT}$  и  $p^{rsTT}$  соответствуют поперечным частям канонических координат и импульсов<sup>1)</sup>. Избирая представление, подобное записанному в уравнениях (29), возьмем

$$g_{rs}^{TT}\varphi = g_{rs}^{TT}\varphi, \quad p^{rsTT}\varphi = i\hbar \frac{\delta}{\delta g_{rs}^{TT}} \varphi. \quad (30)$$

Векторы состояния зависят при этом от  $g_{rs}^{TT}$ . Но поскольку мы не смогли получить решение уравнения связей относительно хотя бы одной из четырех лишних переменных в замкнутом виде, то не располагаем и замкнутым выражением для гамильтониана, выраженного через  $g_{rs}^{TT}$  и  $p^{rsTT}$ . Поэтому мы вынуждены перейти к разложению для слабого поля. Это возвращает нас к линеаризованной теории, уже рассмотренной Фейнманом.

При таком подходе к квантованию возникает новая трудность. Изложенная схема выделения физической части поля никоим образом не однозначна ни в электродинамике, ни в теории гравитации. Можно построить

<sup>1)</sup> См. работу [13] и другие работы этих же авторов, указанных в [13].

разные схемы, позволяющие определять эту физическую часть многими различными способами. Так, в электродинамике можно выбрать калибровку, накладывая условия на отдельные компоненты вектора  $\mathbf{A}$ . Остальные компоненты  $\mathbf{A}$  сохраняют тогда свою калибровочную инвариантность. Например, выбор калибровки может быть фиксирован требованием

$$\mathbf{A}_1 = 0, \quad (31)$$

$$\mathbf{A}_2(x=0) = 0, \quad (32)$$

$$\mathbf{A}_3(x=y=0) = 0. \quad (33)$$

При такой калибровке величины  $\mathbf{A}_2(x \neq 0)$  и  $\mathbf{A}_3(x \neq 0, y \neq 0)$  являются калибровочно-инвариантными и могут быть использованы вместе с канонически сопряженными им импульсами для описания физического состояния электромагнитного поля. Такой способ описания, конечно, весьма сильно отличается от разобранных выше условия  $\mathbf{A}^L = 0$ . Следовательно, в электродинамике существует множество способов выбора калибровки. При каждой такой калибровке мы получаем новый набор выражений, играющих роль физических переменных.

В общей теории относительности положение совершенно аналогично. Как только мы определяем координаты с помощью соответствующих условий, наложенных на  $g_{rs}$  и  $p^{rs}$ , остальные переменные автоматически становятся инвариантными относительно координатных преобразований и могут служить физическими переменными. Обычно их называют тогда наблюдаемыми. Интересно, эквивалентен ли один вариант квантовой теории, в котором используется один набор наблюдаемых, другому варианту, в котором используется другой набор. Я хотел бы охарактеризовать некоторые трудности, возникающие при попытке ответить на этот вопрос.

Представим себе, что найдены два различных разбиения величин  $g_{rs}$  и  $p^{rs}$ . Символически можно записать

$$\{g_{rs}, p^{rs}\} = \{y_{\text{физ}}, y_{\text{коорд}}\} \quad (34)$$

и

$$\{g_{rs}, p^{rs}\} = \{y'_{\text{физ}}, y'_{\text{коорд}}\}. \quad (35)$$

Величины  $y$  имеют смысл физических или координатных условий. Поскольку и  $y_{\text{физ}}$  и  $y'_{\text{физ}}$  соответствуют одной и той же физической картине, они должны выражаться друг через друга. Но, вообще говоря, величина  $y'_{\text{коорд}}$  должна зависеть как от  $y_{\text{коорд}}$ , так и от  $y_{\text{физ}}$ , и наоборот. Так, например, при формулировке уравнения (21) мы склонны рассматривать в качестве операторов лишь физические части поля, а к координатным частям подходить как к  $c$ -числам (т. е. как к классическим или взаимно коммутирующим величинам — не операторам). Этот раздельный подход к физическим и к координатным частям приводит к следующей трудности. Величины, рассматриваемые при одном подходе как  $c$ -числа, становятся при другом подходе операторами, и наоборот. Конечно, можно себе представить, что указанные трудности удастся как-то преодолеть и изобрести общий критерий физической эквивалентности различных схем разбиения, встречающихся в рамках обсуждавшейся процедуры квантования. Я, однако, очень сомневаюсь в возможности этого, и вот почему.

Мы уже упоминали, что в рамках гамильтонова формализма возможны два способа квантования. При том способе, о котором говорилось выше, лишь физические части полей должны рассматриваться как операторы, действующие в гильбертовом пространстве. Эти физические части инвариантны относительно калибровочного или координатного преобразования. Тогда из квантования, производимого с использованием гильбертова пространства, исключается группа калибровки или группа координатных преобразований, что затрудняет проверку рассматривавшейся выше эквивалентности.

При другом подходе к квантованию все полевые переменные рассматриваются как операторы. Такие операторы — либо  $A$  и  $p$ , либо  $g_{rs}$  и  $p^{rs}$  — должны давать обычные перестановочные соотношения между каноническими переменными. Мы имеем тогда, например,

$$[g_{rs}, g'_{ab}] = [p^{rs}, p'^{ab}] = 0, \quad (36)$$

$$[g_{rs}, p'^{ab}] = i\hbar \delta_{rs}^{ab} \delta(x - x'). \quad (37)$$

Штрих при соответствующей переменной указывает, что она берется в точке  $x'$  пространства. Эти операторы действуют в линейном векторном пространстве, элементы которого зависят от  $g_{rs}$ . В таком представлении наши операторы имеют вид

$$g_{rs}\varphi(x) = g_{rs}\varphi(x), \quad p^{rs}\varphi(x) = i\hbar \frac{\delta}{\delta g_{rs}} \varphi(x). \quad (38)$$

При этом операторами оказываются все канонические координаты и импульсы, а не только их поперечные (физические) части. Ввиду существования уравнений связей (20) подобное векторное пространство не поддается нормировке, а потому не является гильбертовым пространством.

Спрашивается теперь, как наличие связей изменит вид квантовой теории. При квантовании с использованием гильбертова пространства связи не представляют проблемы, так как исключаются из рассмотрения еще до квантования. Теперь же их приходится учитывать. Но уравнения связей невозможно непосредственно рассматривать просто как операторные уравнения. Если бы мы это сделали, то пришли бы в противоречие с перестановочными соотношениями (38). Именно, ковариантно дифференцируя обе стороны уравнения (37) по  $x'^b$  и имея в виду, что повсюду выполняется равенство  $\mathcal{H}'^{ia} = p'_{|b}{}^{ab} = 0$ , мы должны будем тождественно приравнять нулю левую часть равенства, тогда как правая его часть будет отлична от нуля во многих точках пространства. Есть один способ избежать эту трудность: при описании физических состояний гравитационного поля следует пользоваться лишь такими элементами линейного векторного пространства  $\psi$ , которые удовлетворяют условиям

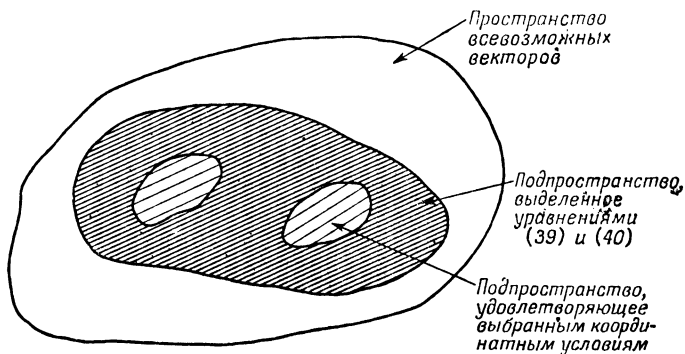
$$\mathcal{H}^a \psi = 0 \quad (39)$$

и

$$\mathcal{H}_L \psi = 0. \quad (40)$$

Можно показать, что при наложении подобных ограничений на векторы состояния квантовый вариант теории в соответствующем пределе переходит в ее классический вариант. При отсутствии же указанных ограничений этого не происходит.

Чтобы получить законченную формулировку теории, нужно наложить дополнительные условия калибровки или координатные условия. Но, так же как и в случае уравнений связей, эти условия нельзя рассматривать как операторные уравнения, а следует считать, что они справедливы лишь для подкласса векторов состояния,



Ф и г. 14.5. Векторное пространство.

удовлетворяющих условиям (39) и (40). Поэтому подпространство исходного линейного векторного пространства, натянутое на векторы, удовлетворяющие этим условиям, в свою очередь разбивается на подпространства при наложении различных видов калибровочных или координатных условий. Мы изображили схематически пространство всех векторов, определенных уравнениями (36) и (37), на фиг. 14.5. Область, покрытая частой штриховкой, изображает подпространство векторного пространства, векторы которого удовлетворяют условиям (39) и (40). Две меньшие области (с редкой штриховкой) изображают подпространства, в которых выполняются два различных набора координатных условий.

С тем же успехом можно нарисовать подобную схему и в классической теории, только тогда все пространство будет фазовым пространством с координатами  $A$  и  $p$  для  $g_{rs}$  и  $p^{rs}$ . В этом случае область с частой штриховкой будет изображать подпространство точек, удовлетворяющих уравнениям связей, а две меньшие обла-

сти (с редкой штриховкой) — точки, удовлетворяющие двум различным наборам калибровочных или координатных условий. Как мы видели, точки большой (часто заштрихованной) области являются в определенном смысле лишними, и многие из них изображают одну и ту же физическую ситуацию. Они различны лишь потому, что для описания одного и того же состояния поля используются разные системы координат. Поэтому вся совокупность точек в любой из областей с редкой штриховкой должна стоять во взаимно однозначном соответствии с возможными состояниями системы. Это означает также, что между точками одной и другой областей с редкой штриховкой должно быть взаимно однозначное соответствие. И действительно, в классической теории было показано, что всегда имеется каноническое преобразование, взаимно однозначным образом переводящее точки одной области с редкой штриховкой в точки другой такой же области [14].

Подобные преобразования генерируются линейными комбинациями связей. Так как преобразования, переводящие точки одной области с редкой штриховкой в точки другой, являются, очевидно, конечными калибровочными или координатными преобразованиями, то ясно, что линейные комбинации связей образуют генераторы группы преобразований симметрии (инвариантности) нашей теории. Правда, нужно еще показать, что данные генераторы действительно образуют группу. Для этого необходимо и достаточно, чтобы скобки Пуассона для двух связей равнялись линейной комбинации связей. Связи действительно обладают этим свойством. Отсюда следует, что подпространство, натянутое на те точки фазового пространства, в которых выполняются уравнения связей (область с частой штриховкой на фиг. 14.5), является односвязным. Поэтому в нашей теории невозможен физический эксперимент, который показал бы существование предпочтительной системы координат. Это говорит о том, что принцип общей ковариантности не нарушается.

Из сказанного явствует, что между группой преобразований симметрии и уравнениями связей имеется прямое соответствие. Это соответствие носит общий характер и существует всегда, когда уравнения поля могут



быть получены из вариационного принципа и обладают группой преобразований симметрии, элементы которой определяются одной или несколькими функциями пространственно-временных координат.

Данный вывод лучше всего проиллюстрировать примером теории электромагнетизма. Включая в число канонических переменных наряду с  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{p}$  также  $\varphi$  и  $\pi$ , можно построить следующий генератор бесконечно малого калибровочного преобразования:

$$c = \int d^3x \{ \dot{\gamma} \pi + \gamma (\nabla \cdot \mathbf{p} + \rho) \}. \quad (41)$$

В интересующем нас подпространстве, в котором вместе с тем выполняются уравнения связей, могут быть без труда получены вариации потенциалов поля  $\varphi$  и  $\mathbf{A}$ . Эти вариации равны

$$\bar{\delta} \varphi = \{ \varphi, c \} = \dot{\gamma} \quad (42)$$

и

$$\bar{\delta} \mathbf{A} = \{ \mathbf{A}, c \} = - \nabla \gamma. \quad (43)$$

Уравнения (42) и (43) описывают бесконечно малое преобразование калибровки. Легко убедиться также, что генераторы  $\pi$  и  $\nabla \mathbf{p} + \rho$  дают друг с другом равные нулю скобки Пуассона, так что генераторы типа (41) действительно образуют инфинитезимальную группу. Суммирование элементов этой инфинитезимальной группы приводит к конечному калибровочному преобразованию. В общей теории относительности мы имеем то же самое, и линейная комбинация связей генерирует бесконечно малое преобразование координат.

Вернемся теперь к квантовому аспекту теории электромагнетизма. Сказанное в случае классической теории сохраняет свою силу и в применении к квантовому варианту, если мы возьмем вместо канонических преобразований унитарные, а скобки Пуассона заменим перестановочными соотношениями. В случае электромагнетизма сделать это просто: при рассмотрении канонических переменных как операторов интеграл  $c$  становится генератором бесконечно малого унитарного преобразования. Перестановочное соотношение для двух таких преобразований дает вновь унитарное преобразование того же типа.

Нетрудно показать, что оба изложенных нами метода квантования эквивалентны. Мы можем исходить из классической теории, наложить условия калибровки, а потом квантовать поле, рассматривая лишь его физические части в качестве операторов в гильбертовом пространстве, но можем и сразу рассматривать все полевые переменные как операторы, действующие в некотором линейном векторном пространстве, а затем уже наложить условия калибровки, сужая класс векторов, используемых для описания физического состояния системы. В последней формулировке существенно, что мы можем произвести унитарное преобразование, осуществляющее переход от одной системы координат к другой. На этом основании мы можем доказать эквивалентность всех вариантов калибровки. Ввиду эквивалентности обоих методов мы тем самым показали и эквивалентность рассмотрений, исходящих из двух различных вариантов калибровки.

Нам нужно преодолеть еще одну трудность, возникающую в связи с уравнениями (42) и (43). Чтобы генерировать преобразование одного набора потенциалов поля в другой набор потенциалов, удовлетворяющий определенной системе условий калибровки, скалярная функция калибровки  $\gamma$  должна, вообще говоря, сама зависеть от этих потенциалов. Следовательно, для того чтобы перейти от некоторого произвольного набора потенциалов к потенциалам, удовлетворяющим кулоновой калибровке ( $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ ), необходимо воспользоваться функцией калибровки, имеющей вид

$$\Gamma = (\nabla^2)^{-1} \nabla \cdot \bar{\mathbf{A}}, \quad (44)$$

где  $\bar{\mathbf{A}}$  — исходный потенциал. Из этого следует, что если  $\bar{\mathbf{A}}$  и  $\bar{\mathbf{p}}$ , по предположению, удовлетворяют обычным перестановочным соотношениям

$$[\bar{A}_r, \bar{p}'^s] = i\hbar \delta_r^s \delta(x - x'), \quad (45)$$

то тогда новые величины

$$\mathbf{A} = \bar{\mathbf{A}} - \nabla (\nabla^2)^{-1} \nabla \cdot \bar{\mathbf{A}} \quad (46)$$

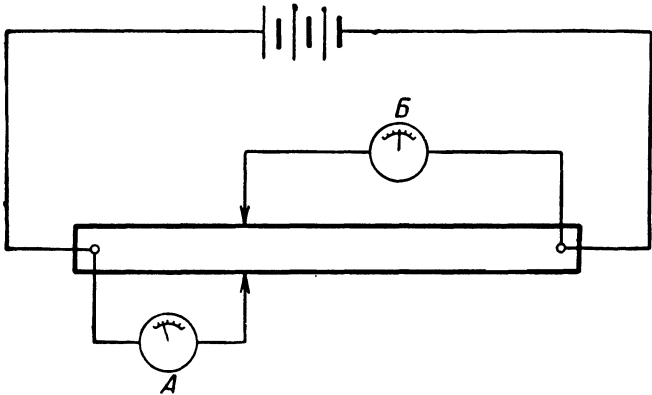
и

$$\mathbf{p} = \bar{\mathbf{p}} \quad (47)$$

не будут удовлетворять соотношениям (45). Чтобы обойти эту трудность, при генерировании калибровочных преобразований следует воспользоваться уравнениями (42) и (43). Так как  $s$  является генератором бесконечно малого унитарного преобразования, то преобразованные переменные должны удовлетворять перестановочным соотношениям (45). Уравнения (42) и (43) имеют силу лишь в подпространстве линейного векторного пространства, где справедливы уравнения связей. В остальном векторном пространстве в выражениях для  $\bar{\delta}\varphi$ ,  $\bar{\delta}A$ ,  $\bar{\delta}\lambda$  и  $\bar{\delta}p$  появляются дополнительные члены, являющиеся линейными комбинациями связей. Эти члены следуют из отличных от нуля коммутаторов между  $\varphi$ ,  $\lambda$ ,  $A$  и  $p$  и величинами  $\dot{\gamma}$  и  $\dot{\gamma}$ . Благодаря наличию этих членов перестановочные соотношения между преобразованными полевыми переменными сохраняют силу. Тогда можно непосредственно доказать инвариантность теории при произвольном калибровочном преобразовании ( $s$   $q$ -числами, т. е. не коммутирующими друг с другом квантовыми операторами) даже в присутствии поля Дирака.

Сказанное выше можно проиллюстрировать на простом примере (фиг. 14.6). Пусть два наблюдателя  $A$  и  $B$  исследуют электрические свойства сопротивления. Оба они понимают, что реальное значение имеет лишь понятие разности потенциалов между двумя точками, но что намного проще приписать потенциалу в некоторой точке какое-то произвольное фиксированное значение, а затем определять потенциалы во всех других точках относительно выбранной первой точки. Пусть  $A$  решил считать равным нулю потенциал на левом конце сопротивления, а  $B$  — потенциал на его правом конце. Если данное сопротивление является идеальным, то при сравнении результатов их наблюдений не возникает никаких трудностей. Чтобы сравнить свои результаты с результатами другого наблюдателя, наблюдателю  $B$  достаточно прибавить ко всем результатам своих измерений потенциала величину полной разности потенциалов между двумя концами сопротивления, т. е. произвести калибровочное преобразование. После этого результаты обоих наблюдателей можно непосредственно сравнивать.

Допустим теперь, что сопротивление неидеальное. Тогда потенциалы в этом сопротивлении будут флуктуировать вследствие температурных шумов. С точки зрения *A* флуктуирует потенциал на правом конце, а с точки зрения *B* — на левом. Это несколько озадачит



Фиг. 14.6. Иллюстрация к явлению флуктуирующего калибровочного преобразования при измерении разности потенциалов на сопротивлении.

обоих, ибо каждый из них положил потенциал одного из концов сопротивления равным нулю, а нулевое значение по определению не подвержено флуктуациям. Для сравнения своих результатов с результатами *A* наблюдатель *B* должен будет теперь производить калибровочное преобразование, флуктуирующее во времени. Такое преобразование аналогично калибровочному преобразованию с  $q$ -числами в квантовой теории.

В общей теории относительности дело обстоит примерно так же, как и в электродинамике, но имеется одно очень важное отличие. Хотя здесь и можно построить генератор бесконечно малого преобразования координат с  $q$ -числами, но конечного преобразования получить уже нельзя ввиду невозможности интегрирования. Оказывается такие бесконечно малые генераторы не образуют группы. В самом деле, можно показать, что не существует такого упорядочения сомножи-

телей в классических формах связей, которое привело бы к выражению перестановочного соотношения для  $\mathcal{H}_L$  и  $\mathcal{H}'_L$  снова в виде линейной комбинации этих связей. Таким образом, область с частой штриховкой на фиг. 14.5, не является односвязной, и использование различных координатных условий приводит к существенным неэквивалентным вариантам квантовой теории гравитации. Это заключение резко противоречит принципу общей ковариантности. Если бы оно было справедливо, то это означало бы, что можно (по крайней мере в принципе) определить, какая из всего бесчисленного множества координатных систем является наиболее подходящей для описания нашего мира.

### Концептуальные проблемы квантованной общей теории относительности

Полевые переменные общей теории относительности  $g_{\mu\nu}$  выполняют двойную роль<sup>1)</sup>. С одной стороны, они описывают гравитационное поле, с другой — служат в качестве метрики, определяя таким образом геометрию пространства — времени и, следовательно, влияя на все другие поля, существующие в данном пространственно-временном многообразии. Если рассматривать теперь  $g_{\mu\nu}$  как полевые переменные квантовой теории, то они должны быть подвержены обычным квантовым флуктуациям. Поскольку  $g_{\mu\nu}$  рассматриваются как переменные гравитационного поля, это дополнительное усложнение как будто не приводит к каким-либо новым трудностям в понимании физического смысла теории по сравнению со случаем квантования электромагнитного поля. Но если  $g_{\mu\nu}$  используются и для описания метрики, то возникает множество новых концептуальных проблем, и не последняя из них — как понимать флуктуации геометрии. В заключение обзора мы коротко остановимся на некоторых из этих проблем.

---

<sup>1)</sup> Возможна иная концепция: компоненты  $g_{\mu\nu}$  несомненно, определяющие геометрию, должны быть функциями полевых переменных; это повлияет на построение теории конструктивно. — *Прим. ред.*

Многие концептуальные проблемы, связанные с квантованием общей теории относительности, касаются процесса измерения. Поскольку общая теория относительности это прежде всего геометрическая теория, то самые естественные виды измерений должны включать определение пространственно-временных интервалов, измерение гравитационного поля  $g_{\mu\nu}$  и величины символов Кристоффеля  $\left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ \mu\nu \end{smallmatrix} \right\}$  в данной системе координат. Вопрос об измерении интервалов времени в общей теории относительности был исследован Вигнером [15], который пришел к заключению о противоречивости этой процедуры.

Ход рассуждений Вигнера таков. При измерении временного интервала в некоторой пространственной области по существу измеряется длительность протекания какого-то явления. Для этого требуются точные часы. Точность измерения времени подчинена квантовому соотношению неопределенности

$$\Delta E \Delta t \gtrsim \hbar. \quad (48)$$

Поэтому точной работе часов (малому  $\Delta t$ ) соответствует неопределенность их энергии, а такая неопределенность энергии связана с неопределенностью их массы соотношением

$$(\Delta m) c^2 = \Delta E. \quad (49)$$

Итак, чем меньше  $\Delta t$ , тем больше должно быть  $\Delta m$ . Отсюда следует, что флуктуации массы часов должны быть очень велики, а в предельном случае абсолютно точных часов флуктуации их массы должны стать бесконечными. Флуктуации же массы должны вызывать соответствующие флуктуации гравитационного поля. В частной теории относительности, в которой метрика раз и навсегда задана, такие флуктуации не вызывают затруднений, поскольку гравитационное поле не требуется включать в рассмотрение. В общей же теории относительности уже нельзя пренебрегать такими флуктуациями, ибо гравитационное поле одновременно является полем метрическим и, следовательно, влияет на все другие поля. В результате само понятие пространственно-временного интервала, а вместе с ним и поня-

тие точки в пространстве — времени ставится под вопрос, и вся природа пространственно-временного многообразия становится неопределенной. На этом основании высказывались даже предположения, что в теории не должно быть понятия точки, ибо точка — ненаблюдаемый элемент. И уж по меньшей мере ставится под вопрос процесс установления системы координат и измерения расстояний.

Возможный выход из этой дилеммы состоит в том, чтобы отказаться от требования точно измерять время в конкретной точке пространства и встать на точку зрения теории  $S$ -матрицы, в которой рассматривается лишь асимптотическое поведение взаимодействующих систем. Такой метод был предложен Мизнером. Но я думаю, что о структуре пространства и времени мы можем узнать, лишь исследуя характер системы координат. Это не значит, что мы должны действительно наблюдать эти координаты, но тип координат, которые мы можем ввести, в значительной мере будет определяться структурой нашего пространства — времени. Например, если бы пространство — время было дискретным, нам пришлось бы пользоваться иными координатами, чем в случае непрерывного пространства — времени. Это в свою очередь скажется на тех типах теории, которые можно будет построить в нашем пространстве и времени. Таким образом, даже если мы никогда не сможем произвести локальное измерение в пространстве — времени, вроде того измерения, которое рассматривал Вигнер, мы все же могли бы говорить о пространственно-временном многообразии с известными нам свойствами, определяемыми существующими в нем системами координат.

Другая трудность появляется при попытке применить к измерению гравитационного поля соображения Бора — Розенфельда (см. [16]). Бор и Розенфельд отметили, что в теории электромагнетизма для того, чтобы очень точно измерить электрическое поле, нужны очень большие заряды. Кроме того, поскольку напряженность поля измеряется по величине импульса, передаваемого им частице, необходимо как-то свести к минимуму неопределенность такого измерения. Неопределенность  $x$ -компоненты электрического поля  $\Delta E_x$  связана с неопределенностью

$x$ -компоненты импульса пробной частицы  $\Delta p_x$  соотношением

$$\Delta E_x = \frac{\Delta p_x}{\varepsilon \Delta t}, \quad (50)$$

где  $\varepsilon$  — заряд пробной частицы, а  $\Delta t$  — время, необходимое для измерения  $E_x$ . Неопределенность при измерении импульса сама определяется соотношением неопределенностей  $\Delta p_x \Delta x \geq \hbar$ , так что

$$\Delta E_x \geq \frac{\hbar}{\varepsilon \Delta x \Delta t}, \quad (51)$$

где  $\Delta x$  — неопределенность положения пробной частицы в пространстве. Поскольку нам нужно, чтобы все три величины  $\Delta E_x$ ,  $\Delta x$ ,  $\Delta t$  были малы, придется взять пробную частицу с очень большим зарядом. Но тогда мы снова сталкиваемся с трудностью, так как измеряем все поле, включая и поле, создаваемое пробной частицей, а большая величина заряда  $\varepsilon$  приводит к сильному собственному полю  $\mathcal{E}$ . К тому же в силу принципа неопределенности мы не знаем точного положения и точного значения импульса пробной частицы, а потому не знаем ничего определенного и о самом ее поле. Тем не менее Бор и Розенфельд показали, что с помощью таких чисто механических приспособлений, как пружины, можно обеспечить автоматическую компенсацию влияния собственного поля, и поэтому можно с полным правом говорить о величине напряженности электрического поля в пространственно-временной точке.

В случае гравитации можно записать выражение, подобное (35). Предметом измерения являются теперь компоненты символов Кристоффеля  $\left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ \mu\nu \end{smallmatrix} \right\}$ . Электрической напряженности  $E_x$  аналогичен символ  $\left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 44 \end{smallmatrix} \right\}$ . Предполагая, что пробное тело движется по геодезической, можно совершенно аналогично (35) вывести величину неопределенности для  $\left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 44 \end{smallmatrix} \right\}$ :

$$\Delta \left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 44 \end{smallmatrix} \right\} \geq \frac{\hbar}{m \Delta x \Delta t}, \quad (52)$$



где  $m$  — гравитационная масса пробного тела. Чтобы измерить гравитационное поле в точке, требуется снова сделать исчезающе малыми сразу три величины —  $\Delta \left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 44 \end{smallmatrix} \right\}$ ,  $\Delta x$  и  $\Delta t$ . Так как символ  $\Delta \left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 44 \end{smallmatrix} \right\}$  должен иметь малое значение, масса  $m$  должна быть очень велика. Большая масса порождает и большое поле, но теперь его влияние не может быть скомпенсировано, как в случае электромагнетизма. Дело в том, что, во-первых, не существует приспособлений (скажем, пружин), которые не создавали бы гравитационного поля; во-вторых, нет никакого способа определить величину силы, необходимой в этом случае для компенсации; в-третьих, при больших значениях массы пробного тела оно движется уже не по геодезической в том поле, которое нам нужно измерить, а по геодезической в результирующем поле; наконец, в-четвертых, оба поля — внешнее и собственное — неаддитивны ввиду нелинейности теории, так что уравнение геодезической уже непригодно для целей измерения  $\left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ \mu\nu \end{smallmatrix} \right\}$ .

В обоих рассмотренных нами случаях мы сталкиваемся с новой ситуацией, не имеющей места в обычных лоренц-инвариантных теориях. Чтобы измерить гравитационное поле в точке, нам обязательно приходится иметь дело с весьма тяжелыми пробными телами, с тем чтобы устранить влияние принципа неопределенности. Но при использовании в качестве измерительных приборов тяжелых тел мы неконтролируемым образом искажаем результаты наблюдения.

Еще одна трудность связана с постановкой задачи начальных значений. Начальные значения задаются на пространственноподобных поверхностях. Но для нахождения таких поверхностей нужно уже знать геометрию пространства — времени. В классическом случае можно устранить эту трудность, выбирая некоторую поверхность, определенную условием, наложенным на координаты, скажем  $t=0$ , так что эта поверхность и в самом деле будет пространственноподобной. Например, можно задать  $g_{rs}$  в такой системе координат, где  $g_{0\mu} = -\delta_{0\mu}$ , так что на поверхности  $t=0$  будет выполняться следую-

щее соотношение:

$$ds^2 = g_{rs} dx^r dx^s - dt^2 > 0.$$

Лишнеровиц и Фурэ-Брюа показали, что в ходе эволюции системы соседняя поверхность  $t=dt$  будет также пространственноподобной.

Переходя к квантовому варианту теории, мы сталкиваемся с той же проблемой. Начальное состояние определяется через функцию от  $g_{rs}$ . Мы можем использовать систему координат, в которой  $g_{0\mu} = -\delta_{0\mu}$ , и выбрать начальную поверхность, задавая ее уравнением  $t=0$ . Затем следует выбрать систему гравитационных полей, такую, что их собственным состояниям отвечает  $ds^2 > 0$ . Это сделать просто, хотя тем самым на наши функции начального состояния будут накладываться довольно сложные ограничения. Теперь спрашивается: можно ли утверждать, что выбранные вначале пространственноподобными наши гиперповерхности останутся пространственноподобными и в будущем для всех членов системы? В классическом случае заданному набору  $g_{rs}$  можно сопоставить набор канонических импульсов  $p^{rs}$ , удовлетворяющих уравнениям связей, которые приводят к тому, что поверхность  $t+dt$  будет пространственноподобной. В квантовом же случае может оказаться, что первоначально пространственноподобная поверхность станет затем временноподобной или изотропной. Это объясняется тем, что, как уже упоминалось, невозможно найти такие квантовые выражения для связей (20), чтобы перестановочные соотношения для любой пары связей давали линейную комбинацию связей, причем коэффициенты располагались слева от этих связей. Поскольку гамильтониан сам является линейной комбинацией связей, они не будут обязательно равны нулю в случае физических состояний  $\psi$ , для которых выполняются уравнения (39) и (40). Поэтому канонические импульсы  $p^{rs}$  могут испытывать флуктуации, не удовлетворяющие уравнениям связей в будущем, и тогда гиперповерхности не будут пространственноподобными.

Таким образом, с квантованием тяготения связаны серьезные проблемы как формального, так и концеп-

туального характера. Во всех наших примерах обнаруживаются противоречия между требованиями квантовой механики, которые нам известны, и требованиями общей теории относительности. Возможно, конечно, что в последовательной квантовой гравитации подобные трудности будут каким-то образом устранены. Тогда можно было бы сказать, что процесс измерения имеет смысл рассматривать лишь на основе последовательной теории. Но ведь такой полной теории пока еще нет. Будем надеяться, что анализ разных сторон проблемы, вроде проведенного нами, даже при использовании грубых прикидочных методов поможет найти пути построения такой теории или хотя бы выяснить, стоит ли вообще пытаться ее построить.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Bergmann P. G., Phys. Rev., 75, 680 (1949).
2. Bergmann P. G., Helv. Phys. Acta, Suppl., IV, 79 (1956).
3. Bergmann P. G., в книге Recent Developments in General Relativity, New York, 1962, p. 31.
4. Bergmann P. G., Komar A., Les Théories Relativistes de la Gravitation, Paris, 1962, p. 309.
5. Dewitt B. S., в книге Recent Developments in General Relativity, New York, 1962, p. 175.
6. Peierls R. E., Proc. Roy. Soc., A214, 143 (1952).
7. Wheeler J. A., Ann. of Phys., 2, 604 (1957).
8. Misner C. W., Rev. Mod. Phys., 29, 377 (1957).
9. Arnowitt R., Deser S., Phys. Rev., 113, 745 (1959).
10. Fuller R. W., Wheeler J. A., Phys. Rev., 128, 919 (1962).
11. Pirani F. A. E., Schild A., Phys. Rev., 79, 986 (1950).
12. Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc., A246, 333 (1958) (имеется перевод в сборнике «Новейшие проблемы гравитации», ИЛ, 1961, стр. 139); Phys. Rev., 114, 924 (1959).
13. Arnowitt R., Deser S., Misner C. W., в книге Recent Developments in General Relativity, New York, 1962, p. 127.
14. Anderson J. L., Bergmann P. G., Phys. Rev., 83, 1018 (1951).
15. Wigner E. P., Rev. Mod. Phys., 29, 255 (1957); Journ. Math. Phys., 2, 207 (1961).
16. Anderson J. L., Rev. Mex. Fis., 3, 176 (1954).

## Принцип Маха как граничное условие для уравнений Эйнштейна

Д Ж. У И Л Е Р

### Поиски приемлемой формулировки принципа Маха

#### *Инерция как радиационная компонента гравитационной силы*

Принцип Маха уже рассматривался в гл. 7. В своей простейшей форме он представляет собой утверждение о том, что об ускорении имеет смысл говорить только тогда, когда мы указываем, относительно чего происходит ускорение. Иными словами, ускорение относительно абсолютного пространства, о котором говорит Ньютон, следует понимать как ускорение относительно звезд и вообще вещества, образующего Вселенную. Это приводит к следующей *первой формулировке* принципа Маха: *«Инертные свойства объекта определяются распределением массы — энергии во всем пространстве»*. Данное утверждение рассматривалось в гл. 7 как требование пересмотра теории относительности Эйнштейна. Здесь же принцип Маха рассматривается с иной точки зрения. Он используется не для *модификации* уравнений поля Эйнштейна, а для того, чтобы получить необходимые для них *граничные условия*.

Принцип Маха, а также идея Римана о том, что геометрия пространства соответствует физике и играет в ней существенную роль, это два глубоких русла мысли, которые Эйнштейн объединил с помощью своего мощного принципа эквивалентности, получив в результате современное геометрическое описание тяготения и движения<sup>1)</sup>. (Вопросу о взаимосвязи геометрии и физики

<sup>1)</sup> Принципа эквивалентности недостаточно для обоснования искривленности физического пространственно-временного континуума — это дополнительный и основной постулат в теории Эйнштейна безотносительно к тому, что думал сам создатель теории. — *Прим. ред.*

были посвящены гл. 3 и 9.) В ходе своих исследований Эйнштейн принял, что гравитация сама является тем взаимодействием, благодаря которому (согласно Маху) один объект влияет на инертные свойства другого. Важное значение в этом отношении имеет не статическая компонента гравитационной силы, пропорциональная  $1/r^2$  и хорошо нам знакомая, а радиационная часть взаимодействия, пропорциональная ускорению (табл. 15.1). Этот вопрос Эйнштейн рассматривал в своей

Таблица 15.1

Статистическая и радиационная компоненты электромагнитной и гравитационной сил (смысл величины  $f$  разъясняется в тексте)

Взаимодействие	Электромагнетизм	Гравитация
Часть взаимодействия, являющаяся статической, или относящаяся к близкой зоне	$\frac{e_1 e_2}{r^2}$	$\frac{G m_1 m_2}{r^2}$
Радиационная компонента, или часть, относящаяся к далекой зоне	$\frac{e_1 e_2 a_2 f}{c^2 r}$	$\frac{G m_1 m_2 a_2 f}{c^2 r}$

книге [1] в связи с идеализированным экспериментом Тирринга<sup>1)</sup>). Возможности описания инерции данной частицы как следствия наличия во взаимодействии этой частицы со всеми остальными массами Вселенной радиационной компоненты исследовались далее Сиамой [3, 4] и Дэвидсоном [5]. При таком описании из ньютоновских уравнений движения выбрасывается инерционный член  $ma$ , а вместо него вводится сумма радиационных взаимодействий

$$ma \sum_k \frac{G m_k f}{c^2 r_k}, \quad (1)$$

которая берется по всем массам Вселенной  $m_k$ , расположенным на расстояниях  $r_k$  от  $m$ . Буквой  $f$  обозначена безразмерная функция углов между направлениями ускорения источника и приемника силы и линией, соеди-

<sup>1)</sup> См. также статью [2].

няющей оба эти объекта. Указанный член дает правильный порядок величины инертности, если размеры Вселенной принять по порядку равными  $10^{10}$  световым годам, а эффективную среднюю плотность вещества — порядка  $10^{-29}$  г/см<sup>3</sup><sup>1)</sup>.

*Связь инерции (геометрии) с распределением массы — энергии и потоком энергии*

Анализ, проведенный Тиррингом и Эйнштейном, позволил теснее увязать «инерционные суммы» вида (1) с основными понятиями общей теории относительности. С одной стороны, инертные свойства пробной частицы выражаются через метрический тензор  $g_{\mu\nu}$ . С другой стороны, причины, вызывающие изменение этой меры инертности, можно характеризовать не просто плотностью вещества, а полным тензором энергии — импульса — натяжений  $T_{\mu\nu}$ . Тирринг и Эйнштейн выразили изменение метрики в локально лоренцовой системе, вызванное изменением  $\delta T_{\mu\nu}$ , в виде

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \hat{g}_{\mu\nu}, \quad (2)$$

$$h = \hat{g}^{\mu\nu} h_{\mu\nu}, \quad (3)$$

где  $g_{\mu\nu}$  и  $\hat{g}_{\mu\nu}$  — компоненты новой и старой метрик, а  $h_{\mu\nu}$  вычисляется по формуле

$$h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \hat{g}_{\mu\nu} h = \frac{8\pi G}{c^4} \int \frac{[\delta T_{\mu\nu}]_{\text{зап}}}{r} d^3x. \quad (4)$$

Это выражение будет хорошим приближением для решения уравнений поля Эйнштейна, пока геометрия тех областей, в которых распределена масса — энергия, существенно не отличается от локальной лоренцовой геометрии в месте расположения пробной частицы. Из уравнения (4) и из того факта, что инертные свойства пробной частицы в теории относительности определяются метрикой, мы заключаем, что принцип Маха можно сформулировать еще следующим образом (*вторая фор-*

<sup>1)</sup> Относительно данных о плотности и размерах Вселенной см., например, [6].

мулировка): «Геометрия пространства — времени, а вместе с ней и инертные свойства любой бесконечно малой пробной частицы определяются распределением энергии и потоком энергии сразу во всем пространстве».

### Возражения против принципа Маха

Ряд соображений вызывает сомнения в состоятельности принципа Маха в его второй формулировке, основанной на уравнениях (3) и (4).

#### 1. Уравнения поля Эйнштейна

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (5)$$

нелинейны. Поэтому попытка выразить решение  $g_{\mu\nu}$  в виде линейной суперпозиции тех воздействий на  $g_{\mu\nu}$ , которые обусловлены различными областями пространства, принципиально неверна.

2. Множитель  $1/r$  в подынтегральном выражении не может быть достаточно определенной величиной в беспорядочно искривленном пространстве.

3. При рассмотрении вкладов в инертность в данной точке пространства — времени Вселенной Фридмана, обусловленных распределением вещества во все более и более отдаленных точках, приходится возвращаться ко все более и более ранним моментам времени, соответствующим значениям запаздывания тензора энергии — импульса — натяжений  $(T_{\mu\nu})_{\text{зап}}$ . В конце концов мы приходим к тому моменту, когда наша система находилась в особом состоянии. Можно ли что-нибудь сказать об этом предельном вкладе  $(T_{\mu\nu})_{\text{зап}}$  в инертные свойства?

4. Простейшая сумма (1) в выражении для силы инерции описывает радиационное взаимодействие между парой частиц, распространяющееся мгновенно. Но каким образом звезды, находящиеся от нас на расстоянии  $10^9$ — $10^{10}$  световых лет, могут реагировать на ускорение пробной частицы, происходящее в данный момент и здесь, так, чтобы они успевали в тот же самый момент времени оказать обратное действие на пробную частицу? Одного этого противоречия достаточно, чтобы

отказаться от элементарной формулы (1). Но, обращаясь после этого к выражениям Тирринга — Эйнштейна (2) — (4), мы обнаруживаем еще и неоднозначность, поскольку для того, чтобы получить решение линеаризованного уравнения [выражение (4)], вместо запаздывающих взаимодействий вполне можно было бы взять опережающие или комбинацию тех и других. Поскольку в случае опережения и в случае запаздывания метрика (как следует ожидать) будет выражаться через распределение массы — энергии по-разному, не придется ли на этом основании заключить, что одно из таких выражений неверно? А если неверно одно (из них), то почему будет верным другое?

5. Не окажется ли, что при зависимости предполагаемого инерциального взаимодействия от расстояния типа  $1/r$  зависимость инертных свойств пробной частицы от размеров расширяющейся и снова сжимающейся Вселенной и от находящихся поблизости масс будет неприемлемой с физической точки зрения?

6. Какой смысл говорить о том, что геометрия определяется распределением массы — энергии (и потоком энергии)? Ведь пока не задана геометрия, невозможно сказать, где находится одна масса и тем более целое распределение масс! Что же в таком случае нужно определять?

7. Стоит ли нарушать логическую красоту теории относительности, примешивая к ней такую неопределенную и математически неоформленную вещь, как принцип Маха? К чему все эти попытки выразить на точном языке XX века обтрепанную идею XIX столетия, которую пора выбросить раз и навсегда?

*Принцип Маха — для того, чтобы отбирать нужные решения уравнений Эйнштейна, а не получать их*

Дело в том, что одних уравнений Эйнштейна недостаточно. Сами по себе дифференциальные уравнения еще не определяют решений, их необходимо дополнить соответствующими граничными условиями. Потребность в таких граничных условиях приводит к третьей формулировке принципа Маха. *Принцип Маха указывает*



Граничные условия в электростатике и в теории тяготения в соответствии с третьей формулировкой принципа Маха

	Электростатика	Теория тяготения
Дифференциальные уравнения	$\nabla^2 V = -4\pi\rho$	Четыре уравнения из числа уравнений Эйнштейна, определяющие геометрию на пространственно-подобной гиперповерхности
Источник	Плотность электрических зарядов	Плотность энергии и потока энергии
Общее решение	$V = \int \frac{\rho d^3x}{r} + \sum_{nm} c_{nm} r^n Y_n^m(\theta, \varphi)$	Геометрия, которая а) либо простирается до пространственной бесконечности, б) либо где-то обладает сингулярностью, в) либо свободна от особенностей и соответствует замкнутому миру.
Принцип отбора физических решений	Потенциал $V$ должен стремиться к нулю на больших расстояниях	Геометрия должна относиться к классу «в», так как допустить наличие особенностей это значит допустить существование точек, в которых уравнения в действительности не удовлетворяются
Следствия этого принципа, а также другой способ его формулировки	Потенциал однозначно определяется распределением зарядов	Геометрия <i>пространства</i> — <i>времени</i> должна однозначно определяться распределением энергии и потока энергии первоначальной <i>пространственно-подобной</i> гиперповерхности

*граничные условия, позволяющие отсортировать допустимые решения уравнений Эйнштейна от физически неприемлемых решений.* Такой подход к принципу Маха как к принципу отбора решений уравнений Эйнштейна рассматривался ранее Уилером [7] и позднее Хёнлем [8]. Хёнль выдвинул два положения:

1) Будучи космологическим принципом, принцип Маха представляет собой принцип отбора, т. е. он позволяет выбрать из большого числа возможных решений космологической проблемы малое число решений, представляющих собой разумные физические модели мира.

2) Однозначное применение принципа Маха возможно лишь в случае пространственно замкнутых моделей мира; таким образом, можно думать, что принятие принципа Маха равносильно требованию конечности мира.

В электростатике (табл. 15.2) принцип отбора на основании граничных условий (третья формулировка) настолько обычен, что для него даже нет никакого названия. Уравнение Пуассона дает для потенциала, создаваемого зарядом, зависимость вида  $1/r$  лишь в том случае, если дополнить это уравнение такого рода граничным условием. На том основании, что потенциал изменяется как  $1/r$ , говорят уже, что электрическое поле в пространстве однозначно определяется распределением электрических зарядов.

*Те случаи, в которых данные граничные условия неприменимы, рассматриваются как идеализация случаев, в которых они применимы и имеют смысл*

Следует обратить внимание не только на то, что нам дает граничное условие, требующее, чтобы электростатический потенциал стремился к нулю на больших расстояниях, но и на то, чего оно не дает. Оно не дает способа *вычисления* закона типа  $1/r$ . Мы получаем этот закон из дифференциального уравнения, у которого имеется множество и других решений. Кроме того, в электростатике часто рассматриваются такие задачи, в которых указанное граничное условие не может выполняться. Приведем в качестве примера следующую за-

дачу: задано  $\rho(x, y, z) = \rho_0 \cos kz$ , найти  $V(x, y, z)$ . Здесь приходится выбирать: либо мы сохраним формулировку задачи и откажемся от всеобщности граничного условия, либо примем раз навсегда граничное условие, но видоизменим задачу.

Можно сказать, что распределение плотности заряда в виде бесконечной косинусоиды — не что иное, как математическая идеализация физически реального распределения заряда, близкого к косинусоидальному в большой области, например распределения вида

$$\rho(x, y, z) = \rho_0 \cos kz \cdot \exp\left(-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^2}\right), \quad (6)$$

где ширина гауссовой кривой  $a$  очень велика. При таком понимании условий задачи граничное условие применимо и потенциал однозначно определяется распределением заряда.

### *Асимптотически плоская геометрия как предельный случай замкнутого пространства*

Подобным же образом в общей теории относительности встречаются случаи, несовместимые с граничным условием, указанным в табл. 15.2, а следовательно, и с третьей формулировкой принципа Маха, но которые все же можно свести к случаям, *совместимым* с этим граничным условием. Рассмотрим, например, сферически симметричное распределение масс, окруженное пустым пространством. С таким распределением масс связана обычная четырехмерная геометрия Шварцшильда. На бесконечности соответствующее пространство является асимптотически плоским<sup>1)</sup>. В таком пространстве —

<sup>1)</sup> Автор делает широкие обобщения, исходя фактически из рассмотрения тривиальных полей тяготения (поле Шварцшильда и др.). Существуют мощные классы решений уравнений поля Эйнштейна в пустоте, которые ни на какой поверхности не определяют асимптотически плоской геометрии (поля II и III типов по классификации редактора). Можно, разумеется, их отбросить, но это требует изменения теории Эйнштейна, и, кроме того, именно такие поля в последнее время идентифицируются у многих авторов с понятием гравитационной радиации. — *Прим. ред.*

времени инертные свойства бесконечно малой пробной частицы сколь угодно близки к свойствам, известным из теории Ньютона, если брать соответствующие сколь угодно большие удаления от массы. Поэтому нет оснований полагать, что инертные свойства частицы обусловлены центральной массой. Если допустить, что такое положение возможно, то придется отказаться от принципа Маха как в той форме, какую ему придал превоначально сам Мах, так и в несколько иной форме граничных условий для *отбора* решений уравнений поля Эйнштейна. В самом деле, в случае решения Шварцшильда 1) инертные свойства пробной частицы нельзя связать с центральной массой, т. е. в данном случае со всей совокупностью существующих масс, и 2) это решение описывает незамкнутый мир. Поэтому нам приходится отбросить решение для точечной массы, дающее на бесконечности плоский мир. Иначе говоря, геометрия Шварцшильда исключается на основании геометрического граничного условия, указанного в табл. 15.2. Точно так же, как в электростатике отбрасывается, например, бесконечное косинусоидальное распределение заряда ввиду его несовместимости с граничным условием для электростатического потенциала на бесконечности.

Вытолкнутая с черного хода, физически неприемлемая ситуация снова входит и в электростатику, и в общую теорию относительности (табл. 15.3) через парадный ход в новом, идеализированном виде. Рассмотрим геометрию, *совместную* с данными граничными условиями, т. е. мир, *замкнутый и лишенный особенностей* в некоторый начальный момент времени, говоря точнее, на некоторой начальной пространственноподобной гиперповерхности. Чтобы получить такую геометрию, следует взять не одиночное сферически симметричное распределение масс, а множество подобных центров. Пусть число центров и расстояния между ними подобраны так, чтобы пространство замкнулось ввиду своей кривизны 1) (см. приложение А). Динамика та-

---

1) Подробный, хотя и приближенный анализ динамики такого яичного мира проведен в работе [9]. Подход, более близкий к точному, дан в приложении А для момента временной симметрии.

кой ячеистой Вселенной до и после момента временной симметрии с точностью до нескольких процентов и даже более точно согласуется с динамикой мира Фридмана. Свойства этой ячеистой Вселенной находятся в согласии также с предположениями, лежащими в основе модели Фридмана (равномерно распределенная пыль при отсутствии давления и везде одинаковой кривизне). При расширении и новом сжатии ячеистой Вселенной изменяется положение границы соседних зон, а геометрия внутри каждой шварцшильдовской зоны не изменяется. Граничная поверхность отодвигается от центров притяжения, находящихся по обе стороны от нее, следуя закону движения камня, брошенного в радиальном направлении. Она отходит на некоторое максимальное расстояние, а затем падает, приближаясь одновременно к обоим центрам масс. При этом центры сближаются. Время расширения и последующего сжатия ячеистой Вселенной (и границ каждой из шварцшильдовских зон) выражается следующим образом:

$$\left( \begin{array}{l} \text{Время расширения и но-} \\ \text{вого сжатия в единицах} \\ \text{длины} \end{array} \right) = \pi \times \left( \begin{array}{l} \text{Радиус ячеистой Вселен-} \\ \text{ной при наибольшем рас-} \\ \text{ширении} \end{array} \right) \approx \\ \approx \left( \begin{array}{l} \text{Радиус одной шварцшиль-} \\ \text{довской зоны при макси-} \\ \text{мальном расширении} \end{array} \right)^{3/2} \times \left( \begin{array}{l} \text{Удвоенная масса центра} \\ \text{зоны, выраженная в еди-} \\ \text{ницах длины} \end{array} \right)^{-1/2}$$

Время такого расширения может быть сделано сколь угодно большим по сравнению с тем временем, за которое свет пересекает одну шварцшильдовскую зону. Для этого нужно просто, взять зоны достаточно большого радиуса  $b$ .

В табл. 15.3 геометрия Шварцшильда представлена как предел геометрии замкнутого ячеистого мира, если размеры элементарной ячейки устремить к бесконечности. Такой предельный переход сравнивается в этой таблице с подобным же предельным переходом в электростатике. Мы воспользовались следующими обозначениями. Масса (в сантиметрах), сосредоточенная в центре каждой ячейки, обозначена через  $m^*$ , причем  $m^* = Gm/c^2$ . Объем элементарной ячейки в «момент» максимального расширения (определяемый пространственноподобной

Таблица 15.3

Геометрия Шварцшильда как предельный случай геометрии замкнутой ячеистой Вселенной, когда размеры ячеек устремляются к бесконечности, и аналогичный пример из электростатики

	Пример из электростатики	Пример из общей теории относительности
<p>Источник (в первоначальном виде)</p>	<p>Бесконечное периодическое распределение заряда <math>\rho = \rho_0 \cos kz</math></p>	<p>Одиночная сферически симметричная масса, окруженная пустым пространством</p>
<p>Предмет исследования</p>	<p>Электрический потенциал и, таким образом, электрическое поле</p>	<p>Метрика пространства — времени и, таким образом, инертные свойства любой бесконечно малой пробной частицы</p>
<p>Является ли «эффект» настолько однозначно связанным с «источником», что его можно считать в этом идеализированном случае «рождением» источника?</p>	<p>Нет. К потенциалу можно добавлять любое число гармоник вида <math>r^n Y_n^m(\theta, \varphi)</math></p>	<p>Нет. При таком «распределении» источника уравнениям Эйнштейна удовлетворяют асимптотически плоское поле Шварцшильда и многие другие геометрии пустого пространства</p>
<p>Удовлетворяет ли «эффект» граничным условиям, указанным в табл. 15.2?</p>	<p>Нет. Ни одно из выражений для <math>V</math> не убывает на больших расстояниях как <math>1/r</math></p>	<p>Шварцшильдовская геометрия в ее обычном понимании не описывает замкнутого мира</p>
<p>Видоизмененное распределение, <i>совместимое</i> с граничными условиями</p>	<p><math>\rho = \rho_0 \cos kz \cdot e^{-r^2/a^2}</math></p>	<p>Система большого числа таких масс, распределенных в замкнутой Вселенной в достаточной мере равномерно</p>
<p>Характерные размеры, связанные с новым источником</p>	<p><i>Протяженность</i> распределенного заряда</p>	<p>Эффективный радиус <math>b</math> типичной шварцшильдовской зоны</p>

**Корректно ли определен те-  
перь источник?**

Есть ли основания считать по-  
сле окончательной конкрети-  
зации «источника», что «эф-  
фект» корректно определя-  
ется новым «источником» и  
границными условиями?

**В чем состоит теперь предель-  
ный переход?**

Выполняются ли соответствую-  
щие граничные условия  
для всех конечных значений  
параметров  $a$  и  $b$ ?

**Удовлетворяются ли гранич-  
ные условия при бесконе-  
чном значении этих парамет-  
ров?**

Да

Да. В этом случае можно до-  
казать, что распределение  
электрических зарядов од-  
нозначно определяет по-  
тенциал

Протяженность  $a$  распреде-  
ления заряда стремится  
к  $\infty$

Да. При больших  $r$  потенци-  
ал  $V$  убывает как  $1/r$  или  
быстрее

Нет, потенциал  $V$  не исчезает  
на бесконечности

**Нет. Следует указать, присутствуют ли  
и какой вид имеют гравитационные  
волны. Иначе говоря, следует уточ-  
нить еще не определенные детали  
внутренней трехмерной геометрии, в  
которую погружены массы в момент  
временной симметрии<sup>1)</sup>**

Да. Прочие свойства, внутренние по от-  
ношению к этой трехмерной геомет-  
рии, должны теперь однозначно опре-  
деляться 00-компонентой уравнений  
Эйнштейна и граничным условием за-  
мкнутости<sup>2)</sup>. Принцип Маха выпол-  
нен

**Эффективный радиус  $b$  шварцшильдов-  
ской зоны стремится к  $\infty$**

Да. Шварцшильдовская зона является  
ячейкой замкнутого мира, к которому  
применим принцип Маха

**Нет. Пространство Шварцшильда яв-  
ляется асимптотически плоским**

<sup>1)</sup> См., например, «модифицированный мир Тауба», рассматриваемый в тексте и в приложении В в качестве альтернативы  
ячейкой Вселенной как решение уравнений поля Эйнштейна, также удовлетворяющего условию замкнутости.

<sup>2)</sup> Такая однозначность может быть установлена, как показано в приложении А, для случая ячеистого мира, не содер-  
жащего гравитационных волн. Случай, когда в таком мире имеются гравитационные волны, не был исследован, но в одной  
близкой задаче (при определенном распределении гравитационного излучения) была показана однозначность трехмерной  
геометрии, вытекающая из условия замкнутости [10—12].

гиперповерхностью) равен  $4\pi b^3/3$ . Через  $a$  обозначим радиус кривизны соответствующей Вселенной с однородной плотностью и всюду одинаковой кривизной, взятый также в момент зеркальной симметрии между прошлым и будущим. Этот радиус кривизны можно следующим образом определить через  $m^*$  и  $b$ . Поверхности, разделяющие «шварцшильдовские ячейки», не настолько удалены от центров, чтобы пространство становилось плоским<sup>1)</sup>. Шварцшильдовская кривизна в локально лоренцевой системе координат в плоскости, перпендикулярной радиальной координате данной зоны, определяется как

$$R_{2323} = \frac{2m^*}{b^3}. \quad (7)$$

В типичной же плоскости, соответствующей однородной модели, радиус кривизны входит в выражение для кривизны следующим образом:

$$R'_{2323} = \frac{1}{a^2}. \quad (8)$$

Приравнивая друг другу  $R'_{2323}$  и  $R_{2323}$ , найдем

$$a^2 \approx \frac{b^3}{2m^*}. \quad (9)$$

Вместо этого мы могли бы записать 00-компоненту уравнений поля Эйнштейна (уравнение главных начальных значений по Фурэ-Брюа), имеющую вид

$${}^3R + (\text{Sp } K)^2 - \text{Sp } K^2 = 2 \frac{8\pi G}{c^4} \times (\text{Плотность энергии}). \quad (10)$$

Тензор внутренней кривизны, или «вторая фундаментальная форма»  $K_{ij}$ , обращается в нуль на симметричной во времени пространственноподобной гиперповерхности, а инвариант скалярной кривизны трехмерной сферы радиусом  $a$ , если его выразить через физические

<sup>1)</sup> Вопрос о «склеивке» геометрий, неизбежно здесь возникающий, нельзя рассматривать в такой мере качественно, без отнесения к классу допустимых функций. — *Прим. ред.*



компоненты кривизны (помеченные шляпками), равен

$${}^{(3)}R = {}^{(3)}\hat{R}_{11} + {}^{(3)}\hat{R}_{22} + {}^{(3)}\hat{R}_{33} = (\hat{R}_{1212} + \hat{R}_{1313}) + \\ + (\hat{R}_{2121} + \hat{R}_{2323}) + (\hat{R}_{3131} + \hat{R}_{3232}) = \frac{6}{a^2}. \quad (11)$$

Плотность массы (энергии) в уравнении (10) можно приравнять  $m/(4/3\pi b^3)$ . Тогда из уравнений (10) и (11) следует

$$\frac{6}{a^2} \approx \frac{16\pi G}{c^4} \frac{3mc^2}{4\pi b^3}, \quad (12)$$

откуда, наконец,

$$a^2 \approx \frac{b^3}{2m^*}. \quad (13)$$

Число ячеек  $N$  приближенно определяется как

$$N \approx \frac{\text{Объем однородной модели}}{\text{Объем ячейки}} \approx \frac{2\pi^2 a^3}{4/3\pi b^3} = \\ = \frac{3\pi}{2^{5/2}} \left(\frac{b}{m^*}\right)^{3/2}. \quad (14)$$

Таким образом, число ячеек бесконечно возрастает при неограниченном увеличении размеров элементарной ячейки.

### *Неравномерность стремления ячеистого мира к пределу плоского пространства*

Оказывается, что важное значение имеет порядок, в котором берется предел при увеличении размеров ячеек. Пусть наблюдатель  $A$  выберет 1) произвольное, но конечное расстояние от одного из центров массы, 2) произвольный, но конечный отрезок времени и 3) произвольно малое, но отличное от нуля отклонение от шварцшильдовской геометрии, которое он считает допустимым. Тогда другой наблюдатель  $B$  может выбрать такой достаточно большой эффективный радиус элементарной шварцшильдовской зоны в момент максимального расширения, что геометрия внутри этой зоны будет 1) с заданной степенью точности 2) вплоть до указан-

ного расстояния и 3) для заданного времени совпадать с идеальной геометрией Шварцшильда. Если же сначала *Б* задает радиус зоны в момент максимального расширения, то после этого *А* всегда может указать место, расположенное настолько далеко, что геометрия в нем будет в корне отличаться от продолжения шварцшильдовской геометрии исходной зоны. Наблюдатель *А* может даже сказать, что мир является замкнутым и соответствует требованиям принципа Маха. Получается, что вывод *А* о том, будет ли мир асимптотически плоским или замкнутым, зависит от того, начнет ли он сразу проверять геометрию или подождет, пока наблюдатель *Б* не установит размеры зоны. То, что выводы, получаемые *А*, зависят от порядка его действий, математически можно выразить следующим образом: стремление к предельному случаю бесконечного ячеистого мира является неравномерным.

### *Другие примеры*

Идеальный ячеистый мир это лишь один из возможных примеров, поясняющих возможность рассматривать явно асимптотически плоские геометрии как геометрии замкнутого мира, а значит, вообще говоря, соответствующего принципу Маха. Некоторое представление о том, насколько широк круг допустимых геометрий, могут дать следующие три примера.

### *Ячеистый мир с гравитационным излучением*

В ячеистом мире наряду с «истинными» массами может присутствовать и эффективная масса, связанная с гравитационным излучением. Инертные свойства пробных частиц будут тогда зависеть от обоих источников массы — энергии [10—12].

### *Модифицированный мир Тауба*

Для того чтобы получить замкнутый мир, нет необходимости добавлять к первоначальной массе еще какие-либо «истинные» массы. Требуемое искривление про-

странства может быть вызвано гравитационными волнами достаточной интенсивности. Так, в случае мира Тауба [13] для искривления пространства, приводящего к замыканию, оказывается достаточно одного лишь гравитационного излучения. Рассмотрим в четырехмерной геометрии мира Тауба гиперповерхность, или трехмерную геометрию, определенную моментом временной симметрии или максимального расширения. Внося в эту геометрию такое возмущение, чтобы образовался сферический сгусток вещества, первоначально сколь угодно малый, а в дальнейшем увеличивающийся или уплотняющийся (или и то и другое), мы обнаружим вблизи этой массы геометрию, близкую к шварцшильдовской. Но на расстояниях, сравнимых с эффективным радиусом мира Тауба, отклонения от этой предельной геометрии становятся очень большими<sup>1)</sup>. В таком мире было бы некорректным говорить, что геометрия прежде всего определяется «истинной массой» и только в меньшей степени возмущается гравитационным излучением, — напротив, здесь именно гравитационное излучение в первую очередь определяет четырехмерную геометрию и инертные свойства пробных частиц. Одиочная «истинная масса» привносит лишь небольшое возмущение в геометрию, если не считать ее ближайшей окрестности.

### *Немодифицированный мир Тауба*

Четвертым примером служит сам первоначальный мир Тауба, в котором вообще отсутствуют «истинные массы». Соответствующее решение уравнений Эйнштейна, представляющее замкнутое пустое пространство, толкуется в приложении Б как частный случай наполненного излучением мира Толмена, в котором 1) рассматривавшееся Толменом электромагнитное излучение заменено гравитационным, 2) это гравитационное излучение, вместо того чтобы быть эффективно изотропным, описывается одиночной гиперсферической гармоникой и

---

<sup>1)</sup> Исследование в первом порядке отклонений от геометрии Шварцшильда было проведено в статье [13], но там не делалось попытки сомкнуться с решением Тауба на больших расстояниях.

3) взята такая гармоника наименьшего возможного порядка, т. е. наибольшей длины волны, совместимой с размерами данной модели Вселенной.

*Не приводит ли связь между инерцией в одном месте и гравитационным излучением в других местах к порочному кругу?*

Как бы ни был устроен мир Тауба, он представляет собой замкнутое пространство, в котором инертные свойства любой пробной частицы корректно определены. В то же время в нем нет обычных масс, которым можно было бы приписать инертность пробных частиц. Поэтому, если по-прежнему придерживаться принципа Маха, необходимо заключить, что для полного определения инертности, или, на языке общей теории относительности, для полного определения геометрии пространства — времени, следует задавать не только распределение массы — энергии, но и гравитационное излучение. Но гравитационное излучение само по себе понимается как чистое проявление геометрии. В результате создается впечатление, что попытка сформулировать принцип Маха приводит к порочному кругу. В самом деле, нужно сначала задать *геометрию*, чтобы не только

- 1) корректным образом указать, что следует понимать под «распределением массы — энергии», но и
- 2) конкретизировать, какое имеется гравитационное излучение, чтобы тогда уже быть в состоянии
- 3) определить *геометрию* пространства — времени.

Очевидно, что подобная формулировка принципа Маха, в которой мы возвращаемся к тому, с чего начали, не может дать нам удовлетворения. Поэтому необходимо математически корректно сформулировать принцип Маха, если мы хотим, чтобы он имел хоть какое-нибудь отношение к современной релятивистской физике.

*Порочного круга нет: мы задаем трехмерную геометрию, а определяем четырехмерную*

Обратимся к такой математической формулировке. Порочный круг в рассуждениях устраняется следующим

образом. Мы задаем конкретную трехмерную геометрию, а на ее основании *определяем* четырехмерную геометрию. Кроме того, мы выясняем, какие характеристики гравитационного излучения можно выбирать произвольно (полевые «координаты» и скорости их изменения) и какие определяются этим выбором (полевые «импульсы»).

### **Трехмерная геометрия и скорость ее изменения как база для построения общей теории относительности**

*Каков «план» построения общей теории относительности?*

Чтобы ответить на один вопрос, часто бывает полезно задать другой. Поэтому с точки зрения поисков математической формулировки принципа Маха (оправданных теперь с физической стороны) следует приветствовать то, что в настоящий момент на обсуждение поставлен новый круг вопросов. Это вопросы, которые выдвинул на Варшавской конференции проф. Синг [14]: каков *план* построения общей теории относительности? какие величины можно выбирать произвольно и какие тем самым должны определяться? какова внутренняя структура динамической теории мира, геометрия которого подчинена уравнениям поля Эйнштейна?

*План 1: задание начальных значений на изотропной гиперповерхности*

Один план построения динамики исходит из световой (изотропной) гиперповерхности. В применении к механике систем частиц такой подход требует задания соответствующего числа координат и импульсов в моменты времени, когда соответствующие мировые линии пересекают данную нулевую гиперповерхность. Эта формулировка механики разрабатывалась Дираком и Фоксом [15]. Соответствующая формулировка геометродинамики, особенно в связи с изучением гравитационного излучения, была развита Пенрозом, Бонди, Саксом и

другими и описана в большом докладе Сакса на Варшавской конференции [14]. Но этот подход нельзя считать тесно связанным с наиболее широко используемыми в остальных областях физики формулировками динамики. Его связь с принципом Маха не была исследована.

*План 2: координаты и импульсы — или внутренняя геометрия и внешняя кривизна — задаются на пространственноподобной гиперповерхности*

Более привычным является другой план построения динамики. В качестве начальных условий в динамике частиц берутся координаты и импульсы различных частиц в таких точках на соответствующих мировых линиях, которые отделены друг от друга пространственноподобными интервалами. В электродинамике берутся полевые «координаты» и «импульсы» — напряженность магнитного поля  $\mathbf{B}(x^1, x^2, x^3)$  и напряженность электрического поля  $\mathbf{E}(x^1, x^2, x^3)$  — повсюду на некоторой пространственноподобной гиперповерхности. Полевые координаты и импульсы могут быть взяты на пространственноподобной гиперповерхности и в геометродинамике. Здесь это 1) внутренняя по отношению к данной гиперповерхности трехмерная геометрия, выражаемая с помощью квадрата интервала

$$ds^2 = {}^{(3)}g_{ik}(x^1, x^2, x^3) dx^i dx^k, \quad (15)$$

и 2) «внешняя кривизна», или так называемая «вторая фундаментальная форма»<sup>1)</sup>, указывающая, как искривлена данная гиперповерхность относительно окружающей ее (и еще неизвестной) четырехмерной геометрии. Если четырехмерная геометрия характеризуется формой

$$d\sigma^2 = -d\tau^2 = {}^{(4)}g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = {}^{(3)}g_{ik}(x^0, x^1, x^2, x^3) dx^i dx^k + 2N_i dx^i dx^0 + ({}^{(3)}g^{ik} N_i N_k N_0^2) (dx^0)^2, \quad (16)$$

причем условие

$$x^0 = x^{0*} \quad (17)$$

<sup>1)</sup> См., например, [16].

определяет рассматриваемую пространственноподобную гиперповерхность, то тензор внешней кривизны определяется выражением<sup>1)</sup>

$$K_{ik} = -\frac{1}{2N_0} \left( \frac{\partial}{\partial x^0} ({}^{(3)}g_{ik}) - N_{i|k} - N_{k|i} \right), \quad (18)$$

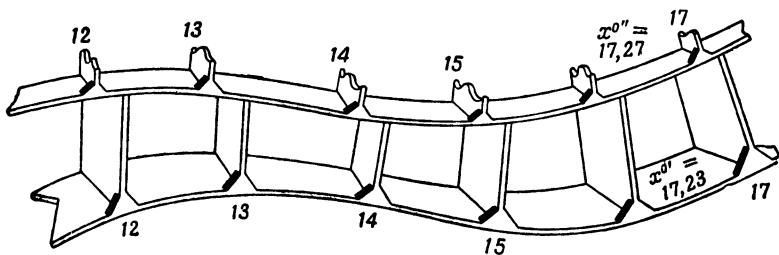
где считается, что координате  $x^0$  придано конкретное значение  $x^{0*}$ . Вертикальная черта использована для обозначения ковариантного дифференцирования относительно трехмерной геометрии на гиперповерхности в отличие от точки с запятой, которая обозначает ковариантное дифференцирование относительно четырехмерной геометрии. Потенциалы Арновитта, Дезера и Мизнера (АДМ)  $N_i$  рассматриваются ниже. Геометродинамические импульсы выражаются [17—21] через тензор внутренней кривизны и его след как

$$\pi^{ik} = -\sqrt{{}^{(3)}g} (K^{ik} - {}^{(3)}g^{ik} \text{Sp } K). \quad (19)$$

*Четырехмерные потенциалы, или метрические коэффициенты,  $N_0$  и  $N_k$  как «функция следования» и «функция сдвига»*

Значение потенциалов АДМ  $N_\alpha$  можно объяснить следующим образом. Представим себе две тонкие стальные ленты, которые характеризуются разными значениями  $x^0$ :  $x^{0'} = 17,23$  и  $x^{0''} = 17,27$  (фиг. 15.1). Решено сделать из таких стальных лент решетчатый занавес. Для этого мастер наносит на одной ленте отрезки, которые могут быть и не одинаковыми, но не должны быть беспорядочными и хаотическими. Он нумерует их числами  $x^1 = \dots, 12, 13, 14, \dots$ . То же самое повторяется и на второй ленте, причем мастер старается, чтобы новая система поперечных линий не сильно отличалась от предыдущей. После этого он приваривает к первой ленте в местах, обозначенных через  $x^1 = \dots, 12, 13, 14, \dots$ , перпендикулярные распорки (отрезки «следования»). Чтобы окончательно получить жесткую

<sup>1)</sup> См. работу Арновитта, Дезера и Мизнера [17] и другие работы этих авторов, на которые они ссылаются в статье [17], а также их работу [18] и работы других авторов [19—21].



Фиг. 15.1. Использование потенциалов АДМ для построения искривленной пространственноподобной поверхности с заданным следованием во времени.

Цифровые данные, использованные при построении этой поверхности, приведены в «таблице мастера».

конструкцию, требуется задать длины распорок и те места, где они смыкаются перпендикулярно с верхней лентой. Мы должны дать мастеру две функции  $N_0(x^1)$  и  $N^1(x^1)$  — «функцию следования» и «функцию

Таблица мастера

$x^1$	$N_0(x^1)$	$N^1(x^1)$	$N_0(x^{0''} - x^{0'})$	$N^1(x^{0''} - x^{0'})$
12	30	10	1,2	0,4
13	25	17	1,0	0,68
14	20	12	0,8	0,48
15	22	9	0,88	0,36
16	...	...	...	...
17	...	...	...	...

сдвига»<sup>1)</sup>. Значения обеих этих функций мастер заносит в таблицу для  $x^1 = \dots, 12, 13, 14, \dots$ .

<sup>1)</sup> Величины  $N_0$  и  $N_i$  были введены в уравнении (16) для описания временно-временной и временно-пространственных компонент метрики (имеется в виду ковариантный тензор с нижними индексами). Контравариантные пространственные компоненты  $N^i$  (21) имеют, однако, более непосредственный смысл и значение как координатные «сдвиги» (см. фиг. 15.1), чем первоначально введенные  $N_i$ .



В двух последних столбцах для соответствующих значений даны значения произведений  $N_0$  и  $N^1$  на число  $(x^{0''} - x^{0'}) = 0,04$ . Один из этих столбцов указывает мастеру, на каком уровне следует срезать распорки, которые он приварил к нижней ленте. Данные другого столбца указывают, насколько в ту или иную сторону он должен *сдвинуть* верхние концы распорок перед тем, как приварить их к верхней ленте. Скажем, при  $x^1 = 18$  та величина, которую можно грубо назвать  $N^1 dx^0$ , равна 0,5. Это значит, что соответствующая распорка должна быть приварена своим основанием к поперечной линии, обозначенной через  $x^1 = 18$ , по верхней же ленте следует сдвинуться на 0,5 *координатной* единицы вправо. Таким образом, этот «отрезок следования» нужно приварить к поперечной линии, характеризующейся  $x^1 = 17,5$ . То, как от места к месту изменяется «сдвиг» и насколько удалены друг от друга последовательные координатные отметки на верхней и нижней стальных лентах, все вместе определяет, какую собственную кривизну мы придали нашему решетчатому занавесу. Обобщая сказанное на случай трех измерений, мы сразу же поймем структуру выражения (18).

### *Потенциалы АДМ как длина нормали и разности пространственных координат на ее концах*

Для того чтобы указать более точно значение величин  $N_0$  и  $N_k$ , вернемся к уравнению (16), определяющему расстояние между точкой  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$ , лежащей на гиперповерхности  $x^0 = \text{const}$ , и точкой  $(x^0 + dx^0, \dots, x^3 + dx^3)$ , лежащей на гиперповерхности  $x^0 + dx^0 = \text{const}$ . Мы рассматриваем здесь приращения  $dx$  как малые, но конечные величины. Закрепим  $dx^0$  (например, взяв значение  $dx^0 = x^{0''} - x^{0'} = 0,04$ ) и будем перебирать на полученной таким образом «верхней» гиперповерхности различные точки в поисках экстремальной величины инвариантного удаления их от некоторой заданной точки на «нижней» гиперповерхности. Варьируя  $d\sigma^2$  по  $dx^k$  и приравнивая множитель при  $\delta dx^k$  нулю, получаем

$$2^{(3)}g_{lk} dx^l + 2N_k dx^0 = 0, \quad (20)$$

откуда

$$dx^i = - {}^{(3)}g^{ik} N_k dx^0 = N^i dx^0. \quad (21)$$

Само экстремальное значение рассматривавшегося удаления

$$d\tau = N_0 dx^0 \quad (22)$$

оказывается, естественно, временноподобным.

Таким образом, «функция следования»  $N_0$  дает расстояние между двумя гиперповерхностями, измеренное по нормали к ним (интервал собственного времени) и отнесенное к единице разности временных координат. Векторная же «функция сдвига» указывает величину разности координат у основания и у вершины нормали, связывающей эти гиперповерхности, причем эта величина опять-таки отнесена к единице разности временных координат, соответствующих взятым гиперповерхностям.

*Для определения четырехмерной геометрии, кроме трехмерной геометрии, необходимо задать функции «следования» и «сдвига»*

Очевидно, что для корректного определения четырехмерной геометрии недостаточно задания трехмерных геометрий с помощью метрик  ${}^{(3)}g_{ik}$ , являющихся внутренними характеристиками однопараметрического семейства гиперповерхностей. Необходимо еще указать, как соотносятся друг с другом эти гиперповерхности, насколько удалены они друг от друга во времени (задать «функции следования») и как они сдвинуты относительно друг друга в пространственном отношении (задать «функции сдвига»).

*Любые функции следования и сдвига при любой геометрии определяют полевой «импульс», но любой наперед заданный полевой «импульс», вообще говоря, не будет совместим с любой наперед заданной трехмерной геометрией*

Исходя из полевой «координаты»  ${}^{(3)}g_{ik}$  и скорости ее изменения относительно параметра  $x^0$  при заданных функциях «следования» и «сдвига», можно определить

«внешнюю кривизну»  $K_{ik}$  и связанный с ней полевой «импульс» [выражения (18) и (19)]. Обратное же утверждение, вообще говоря, несправедливо. Если мы произвольным образом зададим полевую «координату»  ${}^{(3)}g_{ik}$  и полевой «импульс» или внешнюю кривизну  $K_{ik}$ , то они могут оказаться попросту несовместными. *В общей теории относительности независимое задание полевой координаты и полевого импульса не является корректным способом формулировки условий для начальных значений.*

### *Уравнения для начальных значений*

Несовместимость произвольно заданной внутренней геометрии полевых «координат»  ${}^{(3)}g_{ik}$  и произвольно заданной внешней кривизны или полевых «импульсов»  $\pi^{ij}$  следует из той четверки уравнений, которую мы выделим из десяти уравнений Эйнштейна и будем называть *уравнениями для начальных значений* [22—28]:

$${}^{(3)}R + (\text{Sp } \mathbf{K})^2 - \text{Sp } \mathbf{K}^2 = 2 \frac{8\pi G}{c^4} \times (\text{Плотность энергии}), \quad (23)$$

$$(K_i^k - \delta_i^k \text{Sp } \mathbf{K})_{|k} = \frac{8\pi G}{c^4} \times \begin{matrix} (\text{Плотность потока энергии} \\ \text{в направлении } i\text{-й оси}). \end{matrix} \quad (24)$$

Эти уравнения связывают внутреннюю геометрию и внешнюю кривизну на одной и той же пространственно-подобной гиперповерхности. В связи с уравнениями для начальных значений возникает вопрос: какие величины 1) можно задавать произвольным образом и независимо друг от друга, так чтобы 2) их задания было вполне достаточно для определения всей геометрии четырехмерного мира в прошлом и в будущем?

### *План 3: совершенно независимое задание полевых координат на двух гиперповерхностях*

Эти вопросы в свою очередь приводят нас прямо к формулировке динамики с использованием двух поверхностей, когда импульсов не задают, а задают только координаты (или наоборот), но координаты задаются не

Планы построения теории электромагнетизма и общей теории относительности с точки зрения формулировки динамики, основанной на использовании двух поверхностей (полевые «координаты» задаются на двух пространственноподобных гиперповерхностях, в простейшем варианте — на двух бесконечно близких друг к другу гиперповерхностях)

	Электромагнетизм	Гравитация
<p>Полевые величины, существующие с физической точки зрения.</p> <p>Определяемый ими объект, не зависящий от координат</p>	<p>Компоненты напряженности электромагнитного поля</p> <p>Двойственная форма: система силовых трубок в виде пчелиных сот<sup>1)</sup></p>	<p>Компоненты тензора кривизны Римана</p>
<p>Уравнения динамики, выражающие эволюцию этого объекта</p>	<p>Восемь уравнений Максвелла</p>	<p>Внутренняя структура четырехмерной геометрии окрестностей точки [поправки к евклидовым данным о расстояниях между парами точек в обширной таблице локальных (геодезических) расстояний]</p> <p>Уравнения, относящиеся непосредственно к компонентам тензора кривизны</p>
<p>Потенциалы, вводимые обычно для упрощения анализа этих уравнений</p>	<p>Четыре компоненты электромагнитного вектора-потенциала <math>A_\alpha</math></p>	<p>Десять компонент метрического тензора <math>g_{\mu\nu}</math></p>
<p>Обозначение этих потенциалов в случае, когда пространство — время расслоено на пространственноподобные</p>	<p>Магнитный потенциал <math>A</math> с компонентами <math>A_k</math> и электростатический, или скалярный, потенциал <math>\phi = -A_0</math></p>	<p>Шесть компонент трехмерной метрики <math>^{(3)}g_{ik}</math>, внутренней для слоя; расстояние <math>N_0</math> по нормали между двумя гиперповерхностями, выраженное через</p>

собственное время на единицу разности *временных координат*; наконец, разности  $N^i$  (или, что удобнее,  $N_k = {}^{(3)}g_{ki}N^i$ ) между пространственными *координатами* обоих концов та-ких нормалей, отнесенные опять к еди-нице разности временных *координат*, ха-рактеризующих эти две гиперпо-верхности

**Решение задачи динамики для** пространственно-временной области, лежащей между двумя пространственнопо-добными гиперповерхно-стями  $\sigma'$  и  $\sigma''$ , с помощью ва-риационного принципа

Более простой случай этой ва-риационной задачи, связан-ный с формулировкой зада-чи о начальных значениях и с принципом Маха: две ги-перповерхности бесконечно близки друг к другу

Зададим  $A'$  на  $\sigma'$  и  $A''$  на  $\sigma''$ ; возьмем между ними лю-бые пробные функции  $A(x^0, x^1, x^2, x^3)$  и  $\Phi(x^0, x^1, x^2, x^3)$ . Вычислим интеграл действия и будем варьи-ровать наши четыре потен-циала, пока не придем к экстремальному действию

Зададим  $A(x^1, x^2, x^3)$  и  $\partial A/\partial t$ ; получим упрощен-ный принцип действия, при котором варьированию под-лежит лишь  $\Phi(x^1, x^2, x^3)$

Зададим  ${}^{(3)}g'_{jk}(x^1, x^2, x^3)$  (*определяющее*  $\sigma'$ ) и припишем произвольное значе-ние  $x^0$  координате  $x^0$  на этой гипер-поверхности; зададим подобным же образом  ${}^{(3)}g''_{ik}$  и  $x^{0''}$ .

В промежутке выберем любые пробные значения для десяти потенциалов, вы-числим действие и определим его эк-стремум, варьируя потенциалы

Зададим  ${}^{(3)}g_{ik}(x^1, x^2, x^3)$  и  $\partial^3 g_{ik}/\partial t^3$ ; получим упрощенный принцип дейст-вия, при котором варьированию под-лежат лишь «функция следования»  $N_0(x^1, x^2, x^3)$  и «функция сдвига»  $N_k(x^1, x^2, x^3)$

	Электромагнетизм	Гравитация
<p>Корректно ли определяется вариационная задача в <i>открытом</i> пространстве?</p> <p>Преимущество этого принципа действия в <i>замкнутом</i> пространстве</p>	<p>Нет</p> <p>Нахождение величины <math>\Phi</math> на пространственноподобной поверхности, в результате чего можно затем вычислить электрическую напряженность <math>\mathbf{E}</math> — «импульс», сопряженный уже заданной полевой «координате» <math>\mathbf{B}</math></p>	<p>Нет</p> <p>Нахождение величин <math>N_0</math> и <math>N_k</math>, с помощью которых можно вычислить «внешнюю кривизну» <math>K_{ik}</math> тонкого сэндвича или «импульс», сопряженный геометрической «координате» или внутренней геометрии <math>{}^{(3)}g_{ik}</math></p>
<p>Какое уравнение автоматически решается при нахождении этого экстремума?</p>	<p>Уравнение для начальных значений <math>\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho</math>, содержащее на первый взгляд три неизвестные функции точки в пространстве</p>	<p>Уравнения для начальных значений</p> $(K_i^k - \delta_i^k \text{Sp} K)_{ k} = \frac{16\pi G}{c^4} \hat{T}_{ k}$ <p>и</p> ${}^{(3)}R + (\text{Sp } K)^2 - \text{Sp } K^2 = \frac{16\pi G}{c^4} \hat{T}_{\perp\perp}$ <p>в которых, казалось бы, фигурируют шесть неизвестных функций точки в пространстве</p>

**Краткая характеристика сложившейся ситуации**

**Мы получили на исходной пространственноподобной гиперповерхности совместную систему значений полевой координаты и полевого импульса**

**Мы получили на исходной пространственноподобной гиперповерхности совместную систему значений полевой координаты и полевого импульса**

**Дальнейшие преимущества этого метода**

**Мы располагаем теперь полной системой совместимых друг с другом начальных данных, необходимой для определения электромагнитного поля во всем пространстве и во все времена**

**Мы располагаем теперь полной системой совместимых друг с другом начальных данных, необходимых для определения геометрии пространства — времени в прошлом, настоящем и будущем, а значит, и для определения инертных свойств любой бесконечно малой пробной частицы**

**Информация, которая потребовалась для определения эволюции**

- 1) Уравнения Максвелла
- 2) Закон движения зарядов

- 1) Уравнения Эйнштейна
- 2) Закон динамики для полей или объёмов, создающих тензор энергии в правой части уравнений Эйнштейна

- 3) Заданное магнитное поле с равной нулю дивергенцией, а также его производная по времени на замкнутой пространственноподобной гиперповерхности

- 3) Заданная замкнутая пространственноподобная трехмерная геометрия и скорость ее изменения относительно параметра  $x^0$ , в других отношениях лишенного какого бы то ни было физического смысла

	Электромагнетизм	Гравитация
<p>Определяется ли корректным образом взаимосвязь между «эффектом» и «источником»? (Принцип Маха)</p>	<p>4) Заданное расположение и скорости зарядов в тех точках, где их мировые линии пересекают эту гиперповерхность</p> <p>«Эффект» — это электромагнитное поле. Взаимосвязь определяется корректно, если только «источником» считать сразу и 1) заданное распределение зарядов, и 2) заданную напряженность магнитного поля и скорость ее изменения во времени, причем все задается на пространственно-подобной гиперповерхности</p>	<p>4) Заданные начальные данные для полей или объектов, ответственных за <math>T_{\mu\nu}</math></p> <p>«Эффект» — это инертные свойства пробной частицы, т. е. геометрия пространства — времени. Взаимосвязь определяется корректно, если только «источником» считать сразу и 1) заданные плотность и поток массы — энергии, и 2) заданные внутреннюю трехмерную геометрию и скорость ее изменения относительно некоторого параметра <math>x^0</math>, причем последнее вполне естественно, так как иначе невозможна сама задание распределения и потока масс. Все величины задаются на пространственноподобной гиперповерхности</p>

1 Относительно данной структуры см. книгу [30].



на одной гиперповерхности, а на двух<sup>1)</sup>. Более того, полевые координаты на одной поверхности задаются совершенно независимо от координат, задаваемых на другой поверхности. Такая полная свобода задания начальных условий, казалось бы, и есть то, что требуется от реального плана общей теории относительности (табл. 15.4).

*Смысл выражения «независимо задаваемые координаты»*

Необходимо уточнить, в каком смысле следует понимать выражение «задаются на одной поверхности совершенно независимо от координат, задаваемых на другой поверхности». Это зависит, однако, от того, как подходить к данному вопросу — с точки зрения классической или квантовой физики.

*Задача о гармоническом осцилляторе: формулировка с использованием двух поверхностей*

Для иллюстрации рассмотрим простейший гармонический осциллятор. Конечные точки пробного<sup>2)</sup> пути

$$x(t) = x_H(t) \quad (25)$$

фиксируются заданным набором координат  $x'$  в момент  $t'$  и координат  $x''$  в момент  $t''$ . В промежуточные моменты времени классический путь выбирается из числа всех возможных таким образом, чтобы интеграл действия

$$I_H = \int_{x', t'}^{x'', t''} L\left(x_H(t), \frac{dx_H(t)}{dt}, t\right) dt = \frac{m}{2} \int (\dot{x}_H^2 - \omega^2 x_H^2) dt \quad (26)$$

<sup>1)</sup> Дальнейшее изложение основывается на материалах статьи [29], которая в свою очередь основана на диссертации Уилера (1960 г., не опубликована) и на исследовании Байерлайна, которое привело к вариационному принципу [38].

<sup>2)</sup> В вариационном смысле. — Прим. перев.

принял экстремальное значение. Решение этой задачи хорошо известно. Это просто гармонические колебания с круговой частотой  $\omega$ :

$$x_H(t) = x_{H_{\text{класс}}}(t) = \frac{x' \sin \omega(t'' - t) + x'' \sin \omega(t - t')}{\sin \omega(t'' - t')}. \quad (27)$$

С данным «классическим путем» связано следующее значение действия или так называемой «главной функции Гамильтона»:

$$I_{H_{\text{класс}}} = \frac{m\omega}{2 \sin \omega(t'' - t')} [(x'^2 + x''^2) \cos \omega(t'' - t') - 2x'x'']. \quad (28)$$

*Квантовая функция распространения и ее связь с классическим действием*

В квантовой механике произвольным образом задаются не координаты частиц в два различные момента времени, а функция состояния или амплитуда вероятности  $\psi(x', t')$  в один момент времени  $t'$  и отыскивается величина  $\psi(x'', t'')$  в некоторый следующий момент  $t''$ . Искомая функция для нового момента времени может быть найдена путем решения уравнения Шредингера — численными или другими способами. Центральное место в фейнмановской формулировке квантовой механики начинает занимать не это уравнение, а его решение [31—34]. Искомую волновую функцию можно выразить через ее произвольно заданное начальное значение с помощью *функции распространения* или *пропагатора*:

$$\psi(x'', t'') = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle x'', t'' | x', t' \rangle \psi(x', t') dx'. \quad (29)$$

Фейнман записал этот пропагатор в виде суммы элементарных амплитуд распространения по различным путям

$$\langle x'', t'' | x', t' \rangle = \mathcal{N} \sum_H e^{iI_H/\hbar}. \quad (30)$$

Все мыслимые пути дают свой вклад в сумму с одинаковым весом, но с разной фазой. В результате интерференции *полный* вклад всех неклассических путей авто-

матически сводится к нулю. В случае гармонического осциллятора указанная сумма принимает простой вид

$$\langle x'', t'' | x', t' \rangle = \mathcal{N} e^{\frac{i}{\hbar} [I_H]_{\text{класс}}}, \quad (31)$$

причем величина главной функции Гамильтона  $[I_H]_{\text{класс}}$ , фигурирующей в показателе степени экспоненты, дается выражением (28).

*Начальные значения, задаваемые в классической теории на двух поверхностях, обычно совместны и лишь иногда несовместны*

В классической теории трудность возникает в том случае, когда промежуток времени  $t'' - t'$  является целым кратным половины периода колебаний. Через четное число полупериодов координаты должны вернуться к своим исходным значениям, а через нечетное число они должны просто изменить свой знак. 1) Если в первом случае  $x''$  не совпадает с  $x'$ , а во втором случае с  $-x'$ , то следует заключить, что начальные и конечные данные выбраны несовместными. 2) Даже если они были заданы совместным образом, остается совершенно неопределенным тот импульс, с которым движение происходило вначале и к которому оно вернулось в конце. В обоих случаях вариационная задача остается неопределенной.

*Для квантового пропагатора не существует проблемы несовместности*

В квантовой формулировке теории такой проблемы несовместности «данных на двух конечных точках» или «данных на двух поверхностях» не возникает. Если интервал  $t'' - t'$  сводится к полупериоду, то пропагатор приводит к одному типу  $\delta$ -функции Дирака

$$\langle x'', t'' | x', t' \rangle = -i\delta(x'' + x'), \quad (32)$$

а если интервал равен целому периоду, то — к другому типу

$$\langle x'', t'' | x', t' \rangle = i\delta(x'' - x'). \quad (33)$$

Иными словами, *квантовый пропагатор остается корректно определенным при любых значениях, заданных на двух поверхностях*, независимо от того, какие осложнения возникают при этом в классической задаче.

*Квантовая задача всегда лежит в основе классического анализа*

Следует признать неизбежность заключения о том, что геометродинамика, как и динамика частиц, имеет квантовую природу. Поэтому корректно должен быть определен квантовый пропагатор, а не классический путь. Следовательно, нас не должно беспокоить то обстоятельство, что в некоторых случаях при заданных для двух гиперповерхностей внутренних трехмерных геометриях  ${}^{(3)}\mathcal{S}'$  и  ${}^{(3)}\mathcal{S}''$  функционал действия общей теории относительности не будет иметь экстремума. Подобные случаи представляют собой обобщение тех частных случаев, которые были только что обнаружены на примере гармонического осциллятора. Лишь в таком смысле мы имеем право говорить, что трехмерная геометрия на одной гиперповерхности может быть задана совершенно независимо от трехмерной геометрии на другой гиперповерхности.

*Простейший случай двух соседних гиперповерхностей*

Проще всего тот случай, когда две гиперповерхности лежат «совсем рядом». Только этот случай мы и рассмотрим подробно. Здесь наиболее прямым путем можно из значений координат на двух гиперповерхностях определить величину импульсов. Тем самым задача динамики наполовину решена. Найдя совместные и лишние особенностей начальные значения импульсов и координат в начальный момент времени, мы можем получить окончательное решение и вполне однозначно определить историю рассматриваемой системы по крайней мере в течение конечного интервала собственного времени в сторону прошлого и будущего<sup>1)</sup>. Для этого потребуются обычные уравнения динамики:

<sup>1)</sup> Возможность этого в общей теории относительности доказана в книге [25].

- 1) уравнения Гамильтона для системы частиц;
- 2) уравнения Максвелла для электромагнитного поля;
- 3) уравнения Эйнштейна для геометродинамики.

*Альтернативные подходы к формулировке динамики с использованием двух поверхностей*

Альтернативные подходы к использованию двух поверхностей при формулировке механики частиц, электродинамики и общей теории относительности отличаются друг от друга перераспределением той аналитической нагрузки, которую несут вариационный принцип и дифференциальные уравнения.

*Подход 1 к электродинамике: достаточно удаленные друг от друга гиперповерхности и упор на один лишь вариационный метод*

При нахождении истории системы — будь это частица, электромагнитное поле или геометрия — можно вообще не пользоваться дифференциальными уравнениями. Вместо этого можно всецело обратиться к задаче об экстремуме интеграла действия, взятого по всему интервалу времени, на котором требуется определить историю. В случае частицы следует задать  $x'$  при  $t'$  и  $x''$  при  $t''$ . В качестве подвергающейся варьированию функции можно рассматривать либо только  $x(t)$ , как в обычном лагранжевом вариационном принципе для действия (26), либо сразу и  $x(t)$  и  $p(t)$ , взятые независимо друг от друга, как в формулировке Гамильтона

$$\delta \int_{x', t'}^{x'', t''} [p(t) \dot{x}(t) - \mathcal{H}(p(t), x(t), t)] dt = 0. \quad (34)$$

Для того чтобы выразить в вариационной форме электродинамику, пользуются обычными векторным и скалярным потенциалами  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$ :

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad (35)$$

$$\mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi, \quad (36)$$

в результате чего автоматически удовлетворяется половина из числа всех уравнений Максвелла. Остальные два<sup>1)</sup> уравнения Максвелла можно получить из вариационного принципа

$$\delta I = \delta \int \left[ \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) + (\mathbf{j} \cdot \mathbf{A} - \rho\phi) \right] \frac{1}{c} d^4x = 0. \quad (37)$$

Чтобы решить эти уравнения, следует задать величины, перечисленные ниже.

1. Плотности заряда и тока  $\rho$  и  $\mathbf{j}$  (обе величины берутся в единицах *заряд/длина*<sup>3)</sup> во всей четырехмерной области, ограниченной нашими двумя гиперповерхностями.

2. Вектор  $\mathbf{B}$  на каждой из этих двух поверхностей, причем так, чтобы  $\text{div } \mathbf{B}$  равнялась нулю. Этому условию можно удовлетворить, задавая на обеих поверхностях вектор  $\mathbf{A}$  при произвольной калибровке (калибровочное преобразование  $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \text{grad } \lambda$ , где  $\lambda$  — произвольная функция, не изменяет физической ситуации).

Потенциалы  $\phi$  и  $\mathbf{A}$  варьируются независимо друг от друга повсюду между двумя поверхностями, причем ищется экстремум интеграла  $I$ , который зависит лишь от предварительно заданных значений вектора  $\mathbf{A}$  на этих двух гиперповерхностях.

*Подход 1 к общей теории относительности: упор на использование одного только вариационного принципа (нецелесообразный подход)*

С учетом членов, описывающих источники, соответствующая форма принципа действия в общей теории относительности [29] имеет вид

$$\delta I_4 = \delta \int_{x^{0'}, (3)g'_{ij}}^{x^{0''}, (3)g''_{ij}} \left\{ \pi^{ij} \frac{\partial (3)g_{ij}}{\partial x^0} + N_0 (3)g^{1/2} \left[ (3)R - (3)g^{-1} \left( \text{Sp } \pi^2 - \frac{1}{2} (\text{Sp } \pi)^2 \right) \right] + 2N_i \pi^{ij} |_{,j} - N_0 (3)g^{1/2} L^{**}(g'', A \dots) \right\} d^4x = 0. \quad (38)$$

<sup>1)</sup> Точнее: четыре, так как одно уравнение векторное. — *Прим. перев.*

Этот вариационный принцип получается путем добавления к обычной плотности лагранжиана общей теории относительности  $[(4)R + L] \sqrt{-g}$  дивергенциального члена и введения обозначений для потенциалов АДМ. Здесь через  $L^{**}$  обозначен инвариантный или скалярный лагранжиан тех полей, которые обладают энергией и генерируют гравитационное поле; он умножен на  $8\pi G/c^4$ . Его можно выразить 1) через ковариантные компоненты этих полей (например, компоненты электромагнитной напряженности  $F_{\alpha\beta}$ ) и 2) через элементы матрицы  $g^{\mu\nu}$ , обратной  $g_{\alpha\beta}$ :

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} (3)g^{jk} - \frac{N^j N^k}{N_0^2} & \frac{N^k}{N_0^2} \\ \frac{N_j}{N_0^2} & -\frac{1}{N_0^2} \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Здесь  $(3)g^{jk}$  — матрица, обратная  $(3)g_{jk}$ , а

$$N^j \equiv (3)g^{jk} N_k. \quad (40)$$

В соответствии с уравнением (38) мы должны варьировать 16 функций точки в пространстве и времени между двумя поверхностями, так чтобы интеграл достигал экстремума. Из этих 16 величин десять — компоненты метрики: шестерка  $(3)g_{ik}$ , варьируемых свободно повсюду, кроме гиперповерхностей, на которых их значения считаются заданными, и четверка функций следования и сдвига  $N_0$  и  $N_i$  (не  $N^i!$ ), которые свободно варьируются повсюду вообще. Остальные шесть величин — компоненты импульса  $\pi^{ij}$  — также могут задаваться без ограничений. Установление импульсов производится так же, как и в случае импульса частицы  $p(t)$  в выражении (34). Первоначально функция произвольна в такой мере, что даже ее начальное и конечное значения могут быть любыми. Но в случае частицы одно из уравнений,

вытекающих из вариационного принципа, а именно

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H(p, x, t)}{\partial p}, \quad (41)$$

позволяет вполне выразить импульс через скорость. Подобным же образом («философия Палатини») уравнение (38) может рассматриваться как задача на экстремум и относительно  $\pi^{ij}$ . Тогда мы получим из него шесть уравнений, которыми шестерка  $\pi^{ij}$  определяется через  $N_\alpha$  и  ${}^{(3)}g_{ih}$  с их производными. Эти уравнения равнозначны уравнению (19), в котором импульс выражается через внешнюю кривизну, если при этом учитывать, что последняя определяется уравнением (18).

Если мы хотим получить из вариационного принципа (38) дифференциальные уравнения, то нужно 1) варьировать функции следования и сдвига, 2) приравнять коэффициенты при четверке  $\delta N_\alpha$  нулю, 3) найти таким образом четыре уравнения для начальных значений — это будут (23) и (24), — относящихся прежде всего к геометрии на последовательных гиперповерхностях, и 4) получить остальные шесть «динамических» компонент из общего числа десяти уравнений поля Эйнштейна, варьировав шестерку  ${}^{(3)}g_{ih}$  и полагая равными нулю коэффициенты при всех шести  $\delta {}^{(3)}g_{ih}$ .

Использованию дифференциальных уравнений вообще мы предпочитаем вариационный принцип (в духе Релея и Ритца). Для этого следует 1) подставить в уравнение (38) вместо всех шести  $\pi^{ij}$  их выражения через шестерку  ${}^{(3)}g_{ij}$ , четверку  $N_\alpha$  и их производные и 2) воспользоваться численными методами или десятью аналитическими пробными функциями  $({}^{(3)}g_{ij}, N_\alpha)$ , зависящими от подгоночных параметров, позволяющих экстремизировать интеграл действия  $I$ . К сожалению, экстремум часто оказывается седловиной высшего порядка, а не просто минимумом или максимумом, в чем можно убедиться даже на примере элементарной задачи о частице, движущейся в потенциальной яме гармонического осциллятора. В таком случае вариационный принцип обычно не позволяет ни 1) чисто теоретически установить теоремы существования, ни 2) произвести самые вычисления.



*Подход 2 (наиболее предпочтительный): задание значений на двух поверхностях с использованием вариационного принципа в области между двумя бесконечно близкими гиперповерхностями (тонкий сэндвич) для установления этих начальных значений и с использованием уравнений поля для распространения решения на прошлое и будущее; разъяснение на примере электродинамики*

Доказательства теорем существования решений уравнений поля для многообразий с положительно определенной метрикой [35, 36] известны шире, чем для многообразий с метрикой другой сигнатуры. Поэтому было бы выгодно сформулировать вариационную проблему таким образом, чтобы гарантировать положительную определенность метрики. Для этого можно ограничить вариационную проблему областью между двумя бесконечно близкими пространственноподобными гиперповерхностями, на которых заданы начальные значения, а затем распространить полученное решение на остальное пространство — время с помощью дифференциальных уравнений поля. Лишнеровиц [25] показал, что в случае общей теории относительности такого рода продолжение решения может быть осуществлено с помощью десяти уравнений поля Эйнштейна.

В силу сказанного мы сосредоточим свое внимание на задаче начальных значений для тонкого сэндвича. Руководящие идеи проще всего проследить на примере электромагнетизма. Магнитный потенциал задается на двух поверхностях ( $A'$  на  $x^{0'}$  и  $A''$  на  $x^{0''}$ ), но в дальнейшем расстояние между ними устремляется к нулю. В этом пределе величины  $B^2$  и  $jA$  почти постоянны в области между нашими гиперповерхностями, так как их значения в данной области могут лишь бесконечно мало отличаться от величин, заданных на самих поверхностях. Поэтому вариационный принцип принимает вид

$$\delta I = \delta \int \left( \frac{E^2}{8\pi} - \rho\varphi \right) d^3x = 0, \quad (42)$$

и все сводится к варьированию единственного неизвестного потенциала  $\varphi$ . Подобная вариационная задача

хорошо разработана. В результате такой экстремизации, произведенной либо аналитически, либо методом Релея — Ритца, мы получим потенциал  $\varphi$ , удовлетворяющий дифференциальному уравнению

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho - \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{A}. \quad (43)$$

Из этого потенциала следует величина напряженности электрического поля

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi, \quad (44)$$

автоматически удовлетворяющая уравнению для начальных значений

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho. \quad (45)$$

Теперь нам известны  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ , которые могут служить не противоречащими друг другу исходными величинами для исследования динамики. Исходя из этих величин, с помощью остальных шести уравнений Максвелла можно определить весь ход изменения электромагнитного поля в прошлом и будущем.

### *Метод тонкого сэндвича в геометродинамике*

Аналогичным образом в теории относительности путем варьирования отыскивают четверку потенциалов — функцию следования  $N_0$  и три функции сдвига  $N_i$ , — при которых тензор внешней кривизны, соответствующий уравнению (18), удовлетворяет уравнениям для начальных значений (23) и (24). После этого можно считать задачу о начальных значениях решенной. Как и в случае электродинамики, мы получим соответствующий вариационный принцип для тонкого сэндвича, переходя к пределу при неограниченном сближении двух поверхностей, на которых заданы начальные значения. Это можно сделать двумя разными способами [29].

1. Зададим почти одинаковые значения  ${}^{(3)}g'_{ik}$  и  ${}^{(3)}g''_{ik}$ . Выберем для обозначения соответствующих двух гиперповерхностей два совершенно произвольных числа  $x^{0'}$  и  $x^{0''}$ . В определении (18) внешней кривизны  $K_{ik}$  фигурирует слагаемое  $(\partial/\partial x^0) {}^{(3)}g_{ik}$ . Заменим его отношением

разностей  $(^{(3)}g''_{ik} - ^{(3)}g'_{ik})/(x^{0''} - x^{0'})$ . Казалось бы, величина  $K_{ik}$  будет тогда зависеть от  $x^{0''} - x^{0'}$ , но на самом деле это не так, ибо и в  $K_{ik}$  и где бы то ни было существенно лишь *произведение*  $x^{0''} - x^{0'}$  на функцию следования  $N_0$ . Если мы возьмем для разности  $x^{0''} - x^{0'}$  большое значение, то из вариационного принципа получим для  $N_0$  малое, и наоборот.

Это свойство инвариантности произведения можно выразить и следующим образом: интервал *собственного* времени между двумя гиперповерхностями, измеренный по нормали, равен  $N_0(x^{0''} - x^{0'})$  [см. уравнение (22)].

В данной формулировке в качестве варьируемых величин берутся поэтому одни только *произведения*

$$\eta_0 = N_0(x^{0''} - x^{0'}), \quad (46)$$

$$\eta_k = N_k(x^{0''} - x^{0'}), \quad (47)$$

а не величины  $N_0, N_k, x^{0'}, x^{0''}$ , сами по себе произвольные. Этой формулировке, опирающейся на простые понятия, можно противопоставить другой подход, при котором математически более определенно указывается, какие именно элементы остаются закрепленными во время варьирования ( $^{(3)}g'_{ik}$  и  $^{(3)}g''_{ik}$ ).

2. Рассмотрим непрерывное однопараметрическое ( $x^0$ ) семейство трехмерных геометрий  $^{(3)}g_{ik}(x^0, x^1, x^2, x^3)$ . Тогда исследуемая задача начальных значений определится при нахождении для некоторого фиксированного  $x^0$  величин  $^{(3)}g_{ik}$  и  $(\partial/\partial x^0)^{(3)}g_{ik}$ . Соответствующая вариационная задача может быть получена путем простого отбрасывания множителя  $dx^0$ , входящего в дифференциал  $d^4x$  в уравнении (38).

### *Вариационный принцип для случая двух гиперповерхностей в задаче начальных значений в общей теории относительности*

Поскольку теперь мы перешли просто к трехкратному интегрированию, предпоследний член в уравнении (38) можно проинтегрировать по частям; это даст

$$2N_i \pi^{ij}|_j \rightarrow -\pi^{ij}(N_{i1j} + N_{j1i}). \quad (48)$$

В неевклидовой топологии для того, чтобы не внести особенностей, для всего многообразия требуется более одной системы координат. Каждая из них задается на своем собственном координатном участке<sup>1)</sup>. Может показаться, что при интегрировании по частям будет трудно переходить от одного участка к другому. Но на самом деле нет такой трудности, что гарантировано ковариантным характером производной, взятой в уравнении (48). Кроме того, в простейшем случае замкнутого пространства — многообразии с топологией трехмерной сферы  $S^{(3)}$  — поверхностный интеграл обращается в нуль. Пусть тогда интегрирование начинается с окрестностей некоторой точки  $P$  в  $S^{(3)}$ . Будем продолжать его вплоть до границы, обладающей топологией двумерной сферы  $S^{(2)}$ . По мере того как область интегрирования расширяется,  $S^{(2)}$  сначала становится все больше и больше, а затем начинает уменьшаться. Когда же интегрирование распространяется на все трехмерное пространство, граничная поверхность стягивается в нуль в некоторой точке, не совпадающей с  $P$ . Поверхностный интеграл пропадает<sup>2)</sup>. Не остается и производных от  $\pi^{ij}$  в уравнении (38). Ввиду этого, где бы ни фигурировали импульсы, их можно без труда выразить через тензор кривизны  $K_{ij}$  с помощью уравнения (19), а компоненты  $K_{ij}$  при этом выражаются с помощью уравнения (18) только через те величины, которые в самом деле предполагается варьировать, — через функции следования и сдвига. Первая подстановка после простых выкладок приводит к выражению

$$I_3 = \int \{ {}^{(3)}R - (\text{Sp } \mathbf{K})^2 + \text{Sp } \mathbf{K}^2 - \\ - L^{**}(g^{\cdot\cdot}, A \dots) \} ({}^{(3)}g)^{1/2} N_0 d^3x, \quad (49)$$

которое и необходимо исследовать на экстремум. В этом вариационном принципе, как и в других вариантах лагранжева формализма в динамике, «кинетический» член  $(\text{Sp } \mathbf{K})^2 - \text{Sp } \mathbf{K}^2$  стоит со знаком, противоположным знаку «потенциального» члена  ${}^{(3)}R$ , тогда как в уравнении для начальных значений (23) эти члены входят в *плот-*

<sup>1)</sup> См., например, [12, стр. 259].

<sup>2)</sup> См. приложение В.

ность энергии с одним и тем же знаком, что вполне понятно. При второй подстановке величины  $K_{ij}$  и  $g^{\alpha\beta}$  выражаются с помощью уравнений (18) и (39) через четверку подлежащих варьированию функций  $N_\alpha$ . Но одно дело говорить о такой подстановке, а другое проводить ее явным образом!

*Подход 3, также полезный: использование при исследовании динамики общей теории относительности одних только дифференциальных уравнений*

Как и при подходе 2, при подходе 3 к разработке «плана» общей теории относительности мы прежде всего задаем на замкнутой пространственноподобной гиперповерхности значения  ${}^{(3)}g_{ik}$  и  $(\partial/\partial x^0){}^{(3)}g_{ik}$ . Мы задаем две, так сказать, «близкие» трехмерные геометрии  ${}^{(3)}\mathcal{G}'$  и  ${}^{(3)}\mathcal{G}''$ . Затем проверяем, действительно ли они близки, вычисляя функцию  $N_0$ , а из нее уже по уравнению (22) определяем, малó или нет удаление в собственном времени этих двух гиперповерхностей друг от друга (по сравнению с масштабами пространственноподобных различий между  ${}^{(3)}\mathcal{G}'$  и  ${}^{(3)}\mathcal{G}''$ ). Точно так же, как и при подходе 2, должны быть, кроме того, заданы плотность энергии и ее поток. Различие же между двумя указанными подходами состоит лишь в том, что четверка потенциалов  $N_\alpha$  отыскивается путем решения четырех уравнений (23) и (24), а не непосредственным вычислением экстремума интеграла действия в (49). Найдя функции следования и сдвига, мы уже поступаем в дальнейшем точно так же, как при подходе 2: 1) вычисляем внешнюю кривизну  $K_{ik}$ ; 2) вычисляем полевой момент  $\pi^{ik}$ ; 3) с помощью всех десяти уравнений Эйнштейна определяем четырехмерную геометрию в прошлом и будущем.

*Проверка эквивалентности вариационного принципа для случая двух гиперповерхностей и уравнений для начальных значений*

В правой части уравнений для начальных значений стоят плотность энергии и поток энергии — всего четыре величины. Уравнение же вариационного принципа (49)

относится ко *всем* ковариантным компонентам полей, дающих вклад в эту энергию. Это обстоятельство заставляет задуматься над тем, приведут ли указанные два подхода к одному и тому же результату. Чтобы проверить это, следует проварьировать в уравнении вариационного принципа (49) величины  $N_\alpha$  и приравнять коэффициенты при  $\delta N_\alpha$  нулю. После этого можно сравнить получившиеся уравнения с уравнениями для начальных значений. Сложнее всего варьирование лагранжиана полей; для него

$$\delta [N_0 L^{**}(g^{\cdot\cdot}, A \dots)] = L^{**} \delta N_0 + N_0 \frac{\partial L^{**}}{\partial^{(4)} g^{\alpha\beta}} \frac{\partial^{(4)} g^{\alpha\beta}}{\partial N_\gamma} \delta N_\gamma. \quad (50)$$

Производные компонент обратного метрического тензора можно найти, исходя из определяющего его уравнения (39). Сначала мы выразим производные функции Лагранжа через тензор энергии — импульса — натяжений рассматриваемого поля с помощью хорошо известной формулы<sup>1)</sup>

$$T_{\alpha\beta}^{**} = (\sqrt{-g})^{-1} \frac{\partial}{\partial g^{\alpha\beta}} [\sqrt{-g} L^{**}] = \frac{\partial L^{**}}{\partial g^{\alpha\beta}} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} L^{**}. \quad (51)$$

Через  $T_{\alpha\beta}^{**}(m^{-2})$  здесь обозначен умноженный на  $8\pi G/c^4$  обычный тензор энергии — импульса — натяжений (измеряемый в  $кг \cdot м^2/сек^2 \cdot м^3$ ). Заметим теперь, что все те члены в уравнении (50), в которых содержится не-продифференцированный лагранжиан  $L$ , пропадают. Остальные же принимают вид

$$2 [T_{\perp\perp}^{**} \delta N_0 + T_{\perp}^{**k} \delta N_k], \quad (52)$$

где  $T_{\perp\perp}^{**}$  равняется

$$\begin{aligned} T_{\perp\perp}^{**} &\equiv \frac{T_{00}^{**} - 2N^k T_{0k}^{**} + N^i N^k N_{ik}^{**}}{N_0^2} = \\ &= T^{**\perp\perp} = \frac{8\pi G}{c^4} \times (\text{Плотность энергии}). \end{aligned} \quad (53)$$

<sup>1)</sup> См., например, [37].

Здесь плотность энергии содержит поправку, учитывающую используемую нами косоугольную систему координат. По отношению к преобразованиям координат на гиперповерхности эта плотность является скаляром. Величины же  $T_{\perp}^{**k}$  и  $T^{**k\perp}$  определяются следующим образом:

$$T_{\perp}^{**k} \equiv {}^{(3)}g^{km} \frac{T_{0m}^{**} - N^s T_{sm}^{**}}{N_0}; \quad (54)$$

$$T^{**k\perp} = -T_{\perp}^{**k} = \frac{8\pi G}{c^4} \times (\text{Плотность потока энергии}).$$

Величина плотности потока энергии также приведена к косоугольной системе (наклон поверхности к оси  $x^0$ ). Она представляет собой контравариантный вектор по отношению к преобразованиям координат на гиперповерхности.

Дальнейшее преобразование вариационного принципа производится прямым путем, и нетрудно во всех тонкостях проверить согласие результатов с уравнениями для начальных значений.

*Какие же именно свойства энергии задаются на гиперповерхности?*

Наиболее естественным образом энергия задается на гиперповерхности в *уравнениях для начальных значений* с помощью  $T_{\perp\perp}^{**}$  и  $T_{\perp}^{**k}$ , а не через  $T_{\alpha\beta}^{**}$ , в гораздо большей степени зависящее от выбора координат. Что касается самого варьируемого выражения, то его, очевидно, можно изменять в таких рамках, чтобы только сохранялся вид уравнений для начальных значений. Поэтому функцию Лагранжа, которая может быть и сложной и неизвестной, можно заменить на выражение, обладающее тем же самым значением вариации (52). Поэтому следует искать экстремум для выражения

$$I_3^* = \int \{ [ {}^{(3)}R - (\text{Sp } K)^2 + \text{Sp } K^2 - 2T_{\perp\perp}^{**} ] N_0 - \\ - 2T_{\perp}^{**k} N_k \sqrt{{}^{(3)}g} \} d^3x. \quad (55)$$

### Исключение функции следования

Функция следования  $N_0$  входит во временную компоненту (23) уравнений для начальных значений и в интеграл действия лишь алгебраическим образом. Это обстоятельство можно сделать более очевидным, введя обозначение

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2} \left[ N_{i|j} + N_{j|i} - \frac{\partial}{\partial x^0} {}^{(3)}g_{ij} \right] \quad (56)$$

и записав

$$\gamma_2 = (\text{Sp } \gamma)^2 - \text{Sp } \gamma^2, \quad (57)$$

где  $\gamma_2$  можно назвать «сдвиговой аномалией». Тогда

$$K_{ij} = \frac{\gamma_{ij}}{N_0}, \quad (58)$$

где  $K_{ij}$  — мера истинной внешней кривизны, относящаяся к изменению длин пространственноподобных отрезков на единицу *собственного* времени, разделяющего две гиперповерхности. Наоборот,  $\gamma_{ij}$  играет аналогичную роль, когда еще неизвестна функция следования (масштаб собственного времени), так что для нее необходимо использовать чисто номинальную временную координату  $x^0$ . В нашем действии «кинетический» член принимает вид

$$(\text{Sp } K)^2 - \text{Sp } K^2 = \frac{\gamma_2}{N_0^2}, \quad (59)$$

и преобразованное действие, подлежащее варьированию, записывается как

$$I_3^* = \int \left\{ \left( {}^{(3)}R - 2T_{\perp\perp}^{**} N_0 - \frac{\gamma_2}{N_0^2} \right) - 2T_{\perp}^{**k} N_k \right\} V^{(3)}g d^3x. \quad (60)$$

Если экстремум относительно  $N_0$  существует, то он имеет место при

$$N_0 = \pm \left( \frac{\gamma_2}{2T^{**} - {}^{(3)}R} \right)^{1/2}. \quad (61)$$

Оба знака этого корня с физической точки зрения дают одно и то же. Смена знака  $N_0$  приводит к соответствующей перемене знака  $N_k$ . При этом изменяется лишь ус-



ловно взятое направление возрастания времени. Байерлайн и др. [29] так комментируют результат, выраженный в уравнении (61): «Теперь становится определенной не только толщина тонкого сэндвича между  $(^3)\mathcal{S}$  и  $(^3)\mathcal{S}''$  при задании  $(^3)\mathcal{S}'$  и  $(^3)\mathcal{S}''$ , но и его расположение в окружающем  $(^4)\mathcal{S}$ . Именно в этом смысле мы обнаруживаем, что трехмерная геометрия является носителем информации о времени в общей теории относительности».

*Сжатый вариационный принцип для случая двух гиперповерхностей как математическая формулировка принципа Маха*

Подставляя выражение (61) для функции следования в действие (60), мы приходим к «сжатому» вариационному принципу для случая двух гиперповерхностей<sup>1)</sup>.

$$I_{\text{сж}} = -\frac{I_3^*}{2} = \int \{ [\gamma_2(2T_{\perp\perp}^{**} - (^3)R)]^{1/2} + T_{\perp}^{**k} N_k \} \sqrt{(^3)g} d^3x = \text{Экстремум.} \quad (62)$$

В электродинамике такому вариационному принципу для случая двух гиперповерхностей аналогичен принцип действия в форме

$$\int \left( \frac{\mathbf{E}^2}{8\pi} - \rho\varphi \right) d^3x = \text{Экстремум.} \quad (63)$$

В сочетании с определением

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi \quad (64)$$

уравнение (63) равнозначно одному-единственному дифференциальному уравнению

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho - \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathbf{A} \quad (65)$$

<sup>1)</sup> Вопрос о единственности решения задачи начальных значений вполне ясен в случае электродинамики на замкнутом или ориентируемом трехмерном многообразии. Более подробно об этом говорится в приложении В, где рассматривается также возможность существования геометрического аналога электрического заряда.

для одного только потенциала  $\varphi$ . В уравнении (62) заданными все еще считаются значения метрики  ${}^{(3)}g_{ik}$  на гиперповерхности, скорость изменения этой метрики относительно параметра  $x^0$ , инвариант скалярной кривизны  ${}^{(3)}R$  данной геометрии и плотности энергии и потока энергии. Для получения экстремума теперь подлежат варьированию уже не четыре потенциала, а всего лишь три — компоненты векторной функции сдвига  $N_k$ . В уравнение (62) они входят 1) как коэффициенты при потоке энергии и 2) как те функции, ковариантные производные которых дают «сдвиговую аномалию»  $\gamma_2$ .

Вариационный принцип (62) в строгой математической форме выражает нашу четвертую формулировку принципа Маха: *Прошлая, настоящая и будущая геометрия пространства — времени и, следовательно, инертные свойства каждой бесконечно малой пробной частицы определяются заданием достаточно регулярной замкнутой трехмерной геометрии в два непосредственно следующие друг за другом момента времени, а также плотности и потока массы — энергии.* Таким образом, из уравнения (62), если только у него имеется решение, можно найти сдвиг  $N_k$ . Тогда уравнение (61) сразу же даст функцию следования. Зная эти потенциалы, можно с помощью уравнений (56) и (58) получить внешнюю кривизну. В результате в нашем распоряжении окажется весь необходимый и внутренне непротиворечивый набор начальных данных для интегрирования уравнений поля Эйнштейна и получения однозначно определенной четырехмерной геометрии (произвольный характер выбора системы координат в этом пространстве — времени не имеет никакого отношения к его геометрии!)

### *Сжатые уравнения для начальных значений*

Сжатые уравнения для начальных значений можно получить следующим образом. Возьмем малые вариации  $\delta N_k$  компонент сдвига в уравнении (62). Приравняем после этого коэффициенты при этих вариациях нулю. В результате мы придем к трем взаимосвязанным дифференциальным уравнениям второго порядка, служащим для определения векторного поля  $\mathbf{N} =$

$= (N_1, N_2, N_3)$ . Точно такие же уравнения можно получить, решая уравнение (23) относительно  $N_0$  [в согласии с уравнением (61)] и подставляя результат в уравнение (24). Тогда сжатые уравнения для начальных значений будут иметь вид

$$2T^{**} \perp \perp - {}^{(3)}R)^{1/2} \left[ (N_{i|j} + N_{j|i} - {}^{(3)}\dot{g}_{ij}) - \right. \\ \left. - {}^{(3)}g_{ij} {}^{(3)}g^{mn} (N_{m|n} + N_{n|m} - {}^{(3)}\dot{g}_{mn}) \right] \\ \frac{=}{\left[ ({}^{(3)}g^{ab} {}^{(3)}g^{cd} - {}^{(3)}g^{ac} {}^{(3)}g^{bd}) (N_{a|b} + N_{b|a} - {}^{(3)}\dot{g}_{ab}) \times \right.} \\ \left. \times (N_{c|d} + N_{d|c} - {}^{(3)}\dot{g}_{cd}) \right]^{1/2}} \\ = + \frac{8\pi G}{c^4} \times (i\text{-я ковариантная компонента плотности} \quad (66) \\ \text{потока энергии}).$$

### Эквивалентность вариационного принципа системе дифференциальных уравнений и граничных условий

Совместно с граничными условиями данные уравнения образуют систему, эквивалентную рассмотренному вариационному принципу для случая двух гиперповерхностей (62). В геометродинамике, как и в электродинамике, *граничные условия весьма существенны, если мы хотим найти однозначную связь между «источником» [плотность и поток энергии плюс гравитационное излучение, описываемое через  ${}^{(3)}g_{ij}$  и  ${}^{(3)}\dot{g}_{ij} = \partial({}^{(3)}g_{ij})/\partial x^0$  и «эффектом» (вектором сдвига  $\mathbf{N}$ , четырехмерной геометрией и инертными свойствами пробных частиц)*. В замкнутом пространстве граничные условия очевидны: векторное поле  $\mathbf{N}$ , полученное при интегрировании в пространстве по одному пути, должно соответствующим образом смыкаться с этим же векторным полем, полученным при интегрировании в пространстве по другому пути, проще говоря, это векторное поле (с учетом тех изменений, которые происходят при переходе от одной локальной координатной области к другой<sup>1)</sup>) должно 1) быть повсюду *регулярным* и 2) давать *регулярную и однозначно определенную* внешнюю кривизну  $K_{ij}$ . В случае *открытого* пространства дифференциальные уравнения все еще будут корректно определены, но для

<sup>1)</sup> См., например, [12], стр. 259.

них не будет граничных условий. Более того, в случае открытого пространства уже нельзя ожидать, что интеграл действия всегда будет иметь конечное и вполне определенное значение. Таким образом выявляется следствие данной формулировки принципа Маха, которое мы заложили в него, а именно что пространство должно быть *замкнутым*, а его геометрия  ${}^{(3)}\mathcal{G}'$  и  ${}^{(3)}\mathcal{G}''$  или  ${}^{(3)}g_{ik}$  и  $(\partial/\partial x^0){}^{(3)}g_{ik}$  — повсюду регулярной. (Конечно, можно специально *ввести* искусственные граничные условия на двумерной поверхности в пространственной бесконечности, но это не будет оправдано с *физической точки зрения*.)

### Замечания о принципе Маха и о вариационном принципе для случая двух гиперповерхностей

#### *Вопрос о единственности решения*

У нас осталось столько нерешенных вопросов, что для поочередного систематического рассмотрения их потребовалась бы колоссальная работа. Среди этих вопросов один имеет первостепенную важность — вопрос о доказательстве единственности<sup>1)</sup> решений вариационной задачи, описываемой уравнением (62) (когда решение вообще существует).

#### *Зависимость инертности от добавочных масс*

В то же время много вопросов и о физическом содержании принципа Маха, которые следовало бы разобрать. Например, вопрос о том, как влияет на инертные свойства Солнца и планет вещество, находящееся в огромном сферическом слое, окружающем Солнечную систему. При исследовании этой проблемы необходима большая осторожность: например, вывод о том, что инертные свойства изменяются или не изменяются, зависит от того, находятся ли часы, с помощью которых мы измеряем время, внутри сферы или вне ее.

<sup>1)</sup> См. приложение В.

*Мгновенно или с запаздыванием влияет источник на пробную частицу?*

Другой вопрос касается *скорости*, с которой распространяются предполагаемые воздействия на инертность от источников к пробным частицам. Такой вопрос возникает и в электродинамике, где, согласно уравнению (65), воздействие распределения зарядов на потенциал *формально* представляется мгновенно распространяющимся *по* пространственноподобной гиперповерхности. Но мы знаем, что в обычной максвелловской электродинамике все воздействия распространяются не мгновенно, а со скоростью света. Хорошо известно также, что между мгновенным потенциалом уравнения (65) и запаздывающими потенциалами обычной теории излучения нет никаких противоречий [38]. Точно так же и в геометродинамике имеется существенно *эллиптическое* уравнение, которому формально соответствует мгновенное распространение воздействия от точки к точке по пространственноподобной гиперповерхности. Известно, однако, что возмущение при изменении источника в одной точке достигает другой лишь со скоростью света [39]. Как и в электродинамике, характер уравнений в геометродинамике таков, что противоречий между следствиями одних и тех же причин (источников), вычисленными двумя разными путями, не может быть. Поэтому в принципе не может никаких затруднений вызвать вопрос, упомянутый в п. 4 на стр. 473: какой вообще смысл может иметь принцип Маха, если он требует, чтобы и ускоренная пробная масса оказала воздействие на все другие массы Вселенной и те в свою очередь оказали обратное действие на нее? <sup>1)</sup> И здесь, как в фермиевском анализе электродинамики, хотелось бы взглянуть поглубже в самую суть действия того механизма, благодаря которому и 1) замедленное распространение, и 2) формально мгновенное распространение оба с необходимостью приводят к одному и тому же решению уравнений поля Эйнштейна.

<sup>1)</sup> Подробности относительно эквивалентности методов вычисления потенциалов в электродинамике с помощью запаздывающих потенциалов и другими методами см., например, в статьях [40].

*Нужно ли проследивать всю историю источников до того момента, когда модель Вселенной находилась в сингулярном состоянии?*

Формально мгновенное распространение всех эффектов на пространственноподобной гиперповерхности снимает другой вопрос, возникающий в связи с принципом Маха. Предположим, что мы вычисляем инертное воздействие на данную пробную частицу (иначе говоря, воздействие на геометрию в окрестности частицы) в смысле Маха, оказываемое все более и более удаленными источниками массы — энергии. Получается, что нужно все больше и больше отодвигаться в прошлое. В конце концов мы дойдем до таких областей, в которых, согласно модели расширяющейся Вселенной, геометрия имеет особенность и когда уже невозможно продолжать это продвижение в прошлое, описывая динамическую эволюцию геометрии с помощью уравнений поля Эйнштейна лишь классически [41]. И все же это не так. Мы можем конкретизировать динамическую задачу, задавая начальные данные типа «сэндвича» на исходной пространственноподобной гиперповерхности, т. е. задавая  ${}^{(3)}\mathcal{S}$ ,  $(\partial/\partial x^0) {}^{(3)}\mathcal{S}$  и плотность и поток энергии. В этом случае ни действие, подлежащее варьированию, ни три дифференциальных уравнения, которые нам нужно решить, вовсе не имеют отношения ни к какому возврату в прошлое, к тому времени и месту, где (классически описываемая) геометрия могла претерпеть особенность.

*Имеются ли вообще в модели Вселенной интегралы движения?*

Вот еще один вопрос: каковы в общей теории относительности истинные физические константы движения? Хорошо известно, что в замкнутой Вселенной полную энергию невозможно определить, да эта величина и не имеет там смысла<sup>1)</sup>. Недавно был даже задан вопрос [41], не лишена ли такая система в принципе вообще ка-

<sup>1)</sup> См., например, [37].

ких бы то ни было констант движения. В некоторых отношениях модель Вселенной можно сравнить с бильярдным шаром, катающимся по треугольному бильярдному столу со сторонами длиной  $e$ ,  $\pi$  и  $1$ . Движение шара носит квазиэргодический характер — начавшись каким-либо одним образом, оно никогда не повторяется, хотя и может неограниченно приближаться к любому движению, которым обладал бы этот шар, если бы он был первоначально пущен каким-либо другим образом. Но с точки зрения наблюдателя, располагающего лишь приборами с ограниченной разрешающей способностью, единственное различие между такими двумя движениями могло бы состоять в разнице между значениями энергии или скорости шара. В случае же модели Вселенной не сможет проявиться даже такое различие [41]. В каждом из указанных случаев движение можно определить, задавая начальные значения ( $x'$  и  $y'$  при  $t'$ ,  $x''$  и  $y''$  при  $t''$  в случае бильярдного шара или  ${}^{(3)}\mathcal{G}'$  и  ${}^{(3)}\mathcal{G}''$  в случае геометрии), без каких бы то ни было интегралов движения. Говоря иначе, даже если бы констант движения и не было, мы непременно решили бы, что они есть!

### *Разные массы на двух гиперповерхностях*

Перейдем к вопросам, на которые можно ответить более определенно. Во-первых, какой смысл может иметь произвольное задание  ${}^{(3)}\mathcal{G}'$  и  ${}^{(3)}\mathcal{G}''$ ? Не забыли ли мы учесть еще каких-нибудь условий совместности, которым следует удовлетворить? Рассмотрим, например, случай асимптотически плоского пространства. Исходя из того, что это пространство на больших расстояниях стремится к плоскому в соответствии с выражением

$$ds^2 \sim \left(1 + \frac{2m^*}{r}\right) dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (67)$$

можно определить массу такой системы. Если независимо от того, какие гиперповерхности мы выбираем, эта константа  $m^*$  должна быть одной и той же в  ${}^{(3)}\mathcal{G}'$  и  ${}^{(3)}\mathcal{G}''$ , то сколько может оказаться других величин,

которые также должны бы совпадать на разных гиперповерхностях? Чтобы глубже разобраться в этом вопросе, рассмотрим конкретный пример — решение Шварцшильда уравнений Эйнштейна, для которого линейный элемент дается как

$$d\sigma^2 = -d\tau^2 = -\left(1 - \frac{2m^*}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m^*}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (68)$$

В качестве  $(3)\mathcal{G}'$  возьмем гиперповерхность  $t=t'=\text{const.}$  На ней асимптотическая геометрия соответствует ходу (67). Вторую гиперповерхность  $(3)\mathcal{G}''$  выберем так, чтобы на малых расстояниях время  $t$  определялось какой-нибудь подходящей регулярной функцией  $t''(r, \theta, \varphi)$ , которая на больших расстояниях стремилась бы к

$$(8m_1^*r)^{1/2}, \quad (69)$$

причем  $m_1^* = \text{const.}$  Подставляя дифференциал этого выражения в уравнение (68), получаем для асимптотической геометрии на второй гиперповерхности

$$ds^2 \sim \left(1 + 2\frac{m^* - m_1^*}{r}\right) dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (70)$$

Мы видим, что массы не только могут, но (как в данном случае) и должны быть различными. Корни испытываемого нами вначале удивления по этому поводу уходят в семантическую неопределенность термина «плоский». Этот термин употребляется в двух смыслах:

1) *Внутренняя трехмерная геометрия* асимптотически плоская.

2) *Внутренняя трехмерная геометрия* асимптотически плоская, но вместе с тем и *внешняя кривизна* равна нулю.

В случае двух асимптотически плоских геометрий «кажущаяся» масса должна быть одной и той же лишь тогда, когда термин «плоский» употребляется во втором смысле. Но в формулировке теории относительноности с использованием двух поверхностей упор делается на *внутреннюю* трехмерную геометрию, и слово «плос-



кий» употребляется там поэтому в первом смысле. В данном примере просто *не возникает* проблемы совместности двух трехмерных геометрий. Том [42] показал даже, что в промежутке между двумя трехмерными геометриями с разной *топологией* можно установить несингулярную топологию<sup>1)</sup>. Может ли (а если может, то когда) геометрия, наложенная на эту топологию, также быть несингулярной — это другой вопрос, более глубокий.

*Вопрос об эффективно эллиптическом характере задачи для тонкого сэндвича*

Является ли эллиптической природа сжатого вариационного принципа (62) или тройки соответствующих дифференциальных уравнений? В связи с этим вспоминается другой вопрос, а именно: является ли уравнение

$$\frac{d^2\psi}{d\theta^2} + (\lambda - V_0 \cos \theta)\psi = 0 \quad (71)$$

уравнением для собственных значений? Можно было бы думать, что нет, глядя на те значения  $\theta$ , при которых «колебательный член» или «член эффективной кинетической энергии»  $\lambda - V_0 \cos \theta$  отрицателен. Решение отклоняется там от оси  $\theta$ . Но в конечном счете при рассмотрении узлов и собственных значений существенна лишь та область, в которой этот член положителен, а решение осциллирует. *Эффективно* это уравнение имеет колебательную природу (при  $\lambda$ , превышающем  $-V_0$ ). Говоря об уравнениях (62) и (66), сейчас трудно еще давать гарантии, но впечатление таково, что в известном смысле они являются *эффективно эллиптическими*. В задаче для тонкого сэндвича пространство обычно разбивается на области, в которых разность  $2T^{**} \perp \perp - {}^{(3)}R$  положительна и вместе с тем положительной должна быть и сдвиговая аномалия  $\gamma_2$ , и области, в которых вторая величина должна менять свой знак вслед за первой. В промежутке между одной такой областью и

<sup>1)</sup> См. также [43].

другой аномалия  $\gamma_2$  должна менять знак. Это положение напоминает аналогичный случай в теории смятия оболочек, а именно условия на границе между двумя соседними складками.

Поскольку наибольший интерес для нас представляет сдвиговая аномалия  $\gamma_2$ , мы рассмотрим ее более подробно. Возьмем уравнение для собственных значений тензора внешней кривизны  $K_{ik}$  или, лучше, тесно с ним связанного тензора сдвига  $\gamma_{ik} = N_0 K_{ik}$ . Рассмотрим определитель

$$\begin{vmatrix} (\gamma_1^1 - \lambda) & \gamma_1^2 & \gamma_1^3 \\ \gamma_2^1 & (\gamma_2^2 - \lambda) & \gamma_2^3 \\ \gamma_3^1 & \gamma_3^2 & (\gamma_3^3 - \lambda) \end{vmatrix} = \\ = \det(\gamma_i^k) - \left(\frac{\gamma_2}{2}\right)\lambda + (\text{Sp } \gamma)\lambda^2 - \lambda^3. \quad (72)$$

Переходы между системами координат изменяют отдельные компоненты  $\gamma_i^k$ , но не сказываются на собственных значениях  $\lambda$ , а значит, и на коэффициентах при различных степенях  $\lambda$  в правой части уравнения (72). Поэтому рассмотрим такую систему координат, в которой в интересующей нас конкретной точке тензор сдвига  $\gamma$  диагонален. Обозначим его диагональные элементы (собственные значения  $\lambda$ ) через  $A, B, C$ . Тогда коэффициент при  $-\lambda$  в разложении секулярного определителя  $(A - \lambda)(B - \lambda)(C - \lambda)$  равен

$$\begin{aligned} (BC + CA + AB) &= \frac{1}{2} [(A + B + C)^2 - (A^2 + B^2 + C^2)] = \\ &= \frac{1}{2} [(\text{Sp } \gamma)^2 - \text{Sp } \gamma^2] = \\ &= \frac{1}{2} (\text{сдвиговая аномалия}) = \frac{\gamma_2}{2}. \quad (73) \end{aligned}$$

В связи с рассматриваемой точкой введем трехмерное пространство с координатами  $A, B, C$ . В нем тензор сдвига изображается в виде точки, причем эта точка не зависит от выбора системы координат на гиперповерхности. В пространстве  $(A, B, C)$  мы можем провести через начало координат прямую с направляющими косинусами  $(3^{-1/2}, 3^{-1/2}, 3^{-1/2})$ . Мы можем также построить

двойной конус, осью которого является эта прямая, а угол раствора равен  $\theta$ , причем

$$\cos \theta = 3^{-1/2} = [\text{Скалярное произведение вектора } 3^{-1/2}(1, 1, 1) \text{ на } \left. \begin{array}{l} (1, 0, 0), \text{ или} \\ (0, 1, 0), \text{ или} \\ (0, 0, 1) \end{array} \right\}]. \quad (74)$$

Тогда каждая точка координатной оси будет лежать либо на одной, либо на другой половине нашего конуса. Кроме того, для каждой точки, лежащей на координатной оси, сдвиговая аномалия, согласно уравнению (73), равна нулю. Дальше уже нетрудно показать, что сдвиговая аномалия 1) равна нулю в *любой* точке на обоих конусах, 2) положительна в *любой* точке *внутри* каждого конуса и 3) отрицательна в пространстве *вне* конусов.

В каждом из этих трех случаев характер тензора сдвига  $\gamma_i^k$  не таков, как в других случаях. Точное же значение тензора сдвига можно найти лишь с помощью сжатого вариационного принципа (62) или путем интегрирования уравнений для начальных значений при соответствующих граничных условиях, так что оно определяется начальными значениями на всей гиперповерхности сразу. Но для определения *характера* тензора сдвига достаточно знать просто *местное* значение величины  $2T^{**} \perp \perp - {}^{(3)}R$ , определяемое из начальных условий. Перейдем теперь от общего случая к конкретному примеру.

*Пример, когда обе гиперповерхности, ограничивающие тонкий сэндвич, обладают геометрией идеальной трехмерной сферы*

Пусть геометрия обеих гиперповерхностей будет геометрией идеальной сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1,$$

так что для  ${}^{(3)}\mathcal{G}'$  (обозначаемой как  $x^0$ )

$$ds^2 = a'^2 [d\chi^2 + \sin^2\chi (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)] \quad (75)$$

и для  ${}^{(3)}\mathcal{G}''$  (обозначаемой как  $x^0 + \Delta x^0$ )

$$ds^2 = a''^2 [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)], \quad (76)$$

где  $a''$  и  $a'$  — постоянные. Иначе говоря, мы рассматриваем однопараметрическое семейство таких гиперповерхностей с параметром  $x^0$

$$a = a(x^0) \quad (77)$$

и, фиксируя определенное значение  $x^0$ , задаем, таким образом,

$$a \text{ и } \frac{da}{dx^0} \approx \frac{a'' - a'}{\Delta x^0}. \quad (78)$$

(Как уже отмечалось, величина  $\Delta x^0$  в окончательные результаты не войдет.) Остальные начальные данные представляют собой поток энергии, который мы приравняем нулю, и плотность энергии, которую будем считать не зависящей от точки пространства:

$$T^{**\perp\perp} = \text{const} \text{ (не зависит от } \chi, \theta, \varphi). \quad (79)$$

Спрашивается теперь: какую четырехмерную геометрию нужно заложить между двумя гиперповерхностями, чтобы удовлетворить уравнениям для тонкого сэндвича? Мы должны приписать перпендикуляру к  ${}^{(3)}\mathcal{G}'$ , восстановленному в точке  $\chi, \theta, \varphi$ , определенную длину. Кроме того, нам нужно будет указать, в какой точке он встречается с гиперповерхностью  ${}^{(3)}\mathcal{G}''$ , или задать значения величин, отмеченных звездочками в следующей формуле для координат этой точки:

$$\chi - \chi^*, \quad \theta - \theta^*, \quad \varphi - \varphi^*. \quad (80)$$

Учитывая симметрию сферы, проще всего будет взять в качестве пробных величин одни и те же углы для каждой точки из этой пары, т. е. положить все отмеченные звездочками величины равными нулю. Тогда функция сдвига окажется равной нулю:

$$N^\chi = \frac{\chi^*}{\Delta x^0} = 0 \text{ и т. д. (три уравнения)}. \quad (81)$$

Мы можем теперь вычислить тензор сдвига. Он определяется относительным увеличением расстояния ме-

жду парами точек, имеющих одни и те же координаты на обеих гиперповерхностях, скажем  $(\chi, \theta, \varphi)$  и  $(\chi + d\chi, \theta + d\theta, \varphi + d\varphi)$ , при переходе от одной гиперповерхности к другой. Это увеличение расстояния в рассматриваемом случае одинаково для всех направлений и для всех точек и прямо пропорционально относительному увеличению радиуса сферы. Следовательно, собственные значения  $\gamma_i^k$  одинаковы:

$$A = B = C =$$

$$= \frac{\text{Относительное увеличение радиуса}}{\text{Изменение абсолютно произвольного параметра } x^0} = \frac{1}{a} \frac{da}{dx^0} \cdot \quad (82)$$

Эта точка в пространстве  $(A, B, C)$  лежит внутри одной из половин двойного конуса прямо на его оси. Сдвиговая аномалия положительна:

$$\gamma_2 = (\text{Sp } \gamma)^2 - \text{Sp } \gamma^2 = \frac{6}{a^2} \left( \frac{da}{dx^0} \right)^2 \quad (83)$$

и не зависит от точки. Подобным же образом заключим, что ковариантная производная  $\gamma_i^k$  равна нулю, так же как и  $N_i$ . Поэтому сжатые уравнения для начальных значений (66) будут автоматически удовлетворяться. Остается найти функцию следования  $N_0$ :

$$\frac{\gamma_2}{N_0^2} = 2T^{**\perp\perp} - {}^{(3)}R, \quad (84)$$

или

$$\frac{6}{a^2} \left( \frac{1}{N_0} \frac{da}{dx^0} \right)^2 = 2T^{**\perp\perp} - \frac{6}{a^2}. \quad (85)$$

Вместо того чтобы явно решать это уравнение относительно  $N_0$ , мы воспользуемся тем обстоятельством, что величина  $N_0 dx^0$  представляет интервал *собственного* времени  $dt$  между двумя гиперповерхностями, соответствующими значениям нашего параметра  $x^0$  и  $x^0 + dx^0$ . Только  $dt$  и представляет интерес с физической точки зрения. Запишем поэтому

$$\left( \frac{da}{dt} \right)^2 = \frac{a^2}{3} T^{**\perp\perp} - 1. \quad (86)$$

Динамика модели Вселенной полностью определяется уравнением (86), если задать закон изменения плотности энергии при расширении. Этот закон имеет вид

$$T^{**\perp\perp} = \frac{8\pi G}{c^4} \frac{Mc^2}{2\pi^2 a^3} \quad (87)$$

для Вселенной, заполненной первичной пылью (мир Фридмана), и

$$T^{**\perp\perp} = \frac{\text{const}}{a^4} \quad (88)$$

в случае системы, заполненной изотропным излучением (мир Толмена).

### Вопрос о единственности. Линейное приближение

Мы не собираемся здесь заново рассматривать старые задачи, а хотим лишь на простом примере выяснить пути исследования вопроса о *единственности* той четырехмерной геометрии, которая определяется заданием  ${}^{(3)}g_{ik}$ ,  $(\partial/\partial x^0) {}^{(3)}g_{ik}$ ,  $T^{**\perp i}$ ,  $T^{**\perp\perp}$ . Предположим, что мы *не принимаем* векторную функцию сдвига  $N^i = (\chi^*, \theta^*, \varphi^*) \Delta x^0$  равной нулю, а исследуем уравнения, которыми она определяется. Не окажется ли тогда другого решения, существующего *наряду* с уже разобранным привычным решением? К сожалению, три соответствующих взаимосвязанных уравнения второго порядка лишь квазилинейны, а не линейны. Поэтому поставленный вопрос трудно решить, не обращаясь к более глубоким, но и менее очевидным математическим соображениям, так что мы не можем привести здесь решающих доводов. *Практически* был исследован тот случай, когда вклад вектора сдвига  $N_i$  в тензор сдвига

$$\gamma_{ik} = \frac{1}{2} \left( N_{i|k} + N_{k|i} - \frac{\partial}{\partial x^0} {}^{(3)}g_{ik} \right) \quad (89)$$

настолько мал по сравнению с «главным членом» (82), что мы имеем право рассматривать сжатые уравнения

для начальных значений (66) как *линейные* по  $N^i$ . Тогда эти уравнения принимают вид

$$(\sin \chi)^{-2} \left[ \frac{\partial^2 \chi^*}{\partial \theta^2} + (\sin \theta)^{-2} \frac{\partial^2 \chi^*}{\partial \varphi^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \chi^*}{\partial \theta} + 4\chi^* \right] - \\ - \frac{\partial}{\partial \chi} \left[ \frac{\partial \varphi^*}{\partial \varphi} + (\sin \theta)^{-1} \frac{\partial}{\partial \theta} (\theta^* \sin \theta) \right] = 0, \quad (90)$$

$$\sin \chi \frac{\partial}{\partial \chi} \left( \sin \chi \frac{\partial \theta^*}{\partial \chi} \right) + (\sin \theta)^{-2} \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial \varphi^2} + \\ + 2\theta^* - (\sin \chi)^{-3} \frac{\partial}{\partial \chi} \left( \sin^3 \chi \frac{\partial \chi^*}{\partial \theta} \right) - \\ - (\sin \theta)^{-2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin^2 \theta \frac{\partial \varphi^*}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad (91)$$

$$\sin^2 \theta \sin \chi \frac{\partial}{\partial \chi} \left( \sin \chi \frac{\partial \varphi^*}{\partial \chi} \right) + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \varphi^*}{\partial \theta} \right) - \\ - (\sin \chi)^{-3} \frac{\partial}{\partial \chi} \left( \sin^3 \chi \frac{\partial \chi^*}{\partial \varphi} \right) - \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \theta^*}{\partial \varphi} \right) = 0. \quad (92)$$

Можно попытаться получить решение этого уравнения в виде разложения по сферическим гармоникам:

$$\chi^*(\chi, \theta, \varphi) = \sum f_{l, m}(\chi) Y_l^m(\theta, \varphi). \quad (93)$$

Полный анализ в таком плане проведен не был. Однако проф. Мизнер на Варшавской конференции указал, что данное уравнение допускает в принципе *повороты*. Это обстоятельство в дальнейшем было проверено и получило подтверждение. Геометрия трехмерной сферы  $(3)\mathcal{S}''$ , очевидно, не изменится, если для описания положения точек на ней пользоваться не исходной, а повернутой системой гиперсферических координат  $\chi, \theta, \varphi$ . Но при этом изменится вектор сдвига  $N^k$ , зависящий от выбора координат. При заполнении промежутка между  $(3)\mathcal{S}'$  и  $(3)\mathcal{S}''$  тонким сэндвичем  $(4)\mathcal{S}$ , совместным с вариационным принципом для случая двух гиперповерхностей или с уравнениями для начальных значений, значения этих величин сами по себе не фиксируются. Временноподобные нормали, простирающиеся от одной гиперповерхности до другой и начинающиеся на первой гиперповерхности в точке  $(\chi, \theta, \varphi)$ , а кончающиеся на второй гиперповерхности в такой же точке  $(\chi, \theta, \varphi)$  после перехода

к повернутой системе, будут кончатся в точках с *другими* значениями координат

$$(\chi - \chi^*, \theta - \theta^*, \varphi - \varphi^*).$$

### *Сдвиг в результате шести независимых поворотов*

Проще всего вычислить отмеченные звездочками изменения углов при типичном малом повороте, перейдя к декартовым координатам:

$$\begin{aligned}x &= a \sin \chi \sin \theta \cos \varphi, \\y &= a \sin \chi \sin \theta \sin \varphi, \\z &= a \sin \chi \cos \theta, \\w &= a \cos \chi.\end{aligned}\tag{94}$$

Самый общий случай малого поворота можно представить как линейную комбинацию шести независимых малых поворотов. Рассмотрим, например, поворот на малый угол  $\theta_{zw}$  в плоскости  $(z, w)$ :

$$\begin{aligned}dx &= 0, \quad dy = 0, \\dz &= \theta_{zw} w, \\d\omega &= -\theta_{zw} z.\end{aligned}\tag{95}$$

Следующее отсюда изменение полярного угла  $\theta$  равно

$$\begin{aligned}d\theta &= \cos^2 \theta d(\operatorname{tg} \theta) = \cos^2 \theta d \left[ \frac{(x^2 + y^2)^{1/2}}{z} \right] = \\&= -\cos^2 \theta \sqrt{x^2 + y^2} z^{-2} \theta_{zw} w = -\theta_{zw} \operatorname{ctg} \chi \sin \theta.\end{aligned}\tag{96}$$

Подобным же образом можно найти изменения всех трех угловых координат при указанных шести независимых поворотах (табл. 15.5).

Легко проверить, что каждая строка табл. 15.5 представляет собой решение линеаризованных уравнений для начальных значений (90)—(92). Можно предположить, что других независимых решений этих уравнений, которые были бы лишены истинной геометрической особенности на всей поверхности трехмерной сферы в (от-



Таблица 15.5

Изменения угловых координат на трехмерной сфере, вызванные шестью независимыми типами поворотов

	$\chi^*$	$\theta^*$	$\varphi^*$
$\theta_{yz}$	0	$\sin \varphi$	$\operatorname{ctg} \theta \cos \varphi$
$\theta_{zx}$	0	$-\cos \varphi$	$\operatorname{ctg} \theta \sin \varphi$
$\theta_{xy}$	0	0	-1
$\theta_{xw}$	$\sin \theta \cos \varphi$	$\operatorname{ctg} \chi \cos \theta \cos \varphi$	$-\operatorname{ctg} \chi \sin \varphi / \sin \theta$
$\theta_{yw}$	$\sin \theta \sin \varphi$	$\operatorname{ctg} \chi \cos \theta \sin \varphi$	$\operatorname{ctg} \chi \cos \varphi / \sin \theta$
$\theta_{zw}$	$\cos \theta$	$-\operatorname{ctg} \chi \sin \theta$	0

личие от координатной особенности на ней<sup>1)</sup> не существует.

Если даже это предположение подтвердится, вопрос о единственности в случае полных нелинейных уравнений (66) для нашей задачи о двух сферах не снимается. За ним в свою очередь следует вопрос о единственности решений в более общих случаях.

### Окончательный вывод относительно принципа Маха

Хотя еще не решены такие явно сложные математические вопросы, как затронутые выше, по-видимому, все же можно принять в качестве рабочей гипотезы утверждение (четвертая формулировка принципа Маха), что геометрия пространства — времени в прошлом, настоящем и будущем, а тем самым и инертные свойства любой бесконечно малой пробной частицы должны определяться заданием достаточно регулярной замкнутой трехмерной геометрии в два непосредственно следующих друг за другом момента и плотности и потока массы — энергии. В этом смысле принцип Маха предлагается

<sup>1)</sup> Вся проблема разделения координатной сингулярности и чисто геометрической сингулярности в принципе снимается, если использовать две или более координатные области (см., например, [12], стр. 259) и тем самым исключить все особенности в координатных системах, покрывающих трехмерную сферу.

рассматривать как *граничные условия для уравнений поля Эйнштейна* — существенную часть плана построения общей теории относительности. Самое короткое математическое выражение принципа Маха в данной формулировке дается «сжатым вариационным принципом для случая двух гиперповерхностей» [уравнение (62)]. Как мы видели, в этой формулировке подразумевается требование *замкнутости* модели Вселенной.

## Приложение А

### Динамика ячеистого мира

Для того чтобы провести точный анализ динамики ячеистого мира <sup>1)</sup>, мы рассмотрим задачу начальных значений в момент временной симметрии или максимального расширения:  ${}^{(3)}\mathbf{R} = (16\pi G/c^2)\rho$ . Здесь  $\rho$  — плотность массы, равная, например,  $\rho_0$  внутри притягивающего центра и нулю повсюду вне него. Чтобы решить это уравнение, видоизменим геометрию трехмерной сферы постоянной кривизны и радиусом  $a$  с элементом дуги вида

$$ds_{\text{идеальн}}^2 = a^2 [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)], \quad (\text{A. 1})$$

вводя конформный множитель  $\psi$ :

$$ds^2 = \psi^4 ds_{\text{идеальн}}^2. \quad (\text{A. 2})$$

Тогда уравнение для начальных значений принимает вид

$$\nabla^2 \psi + \frac{2\pi G}{c^2} \rho \psi^5 - \frac{3}{4a^2} \psi = 0. \quad (\text{A. 3})$$

Оператор  $\nabla^2$  вычисляется здесь на основании метрики идеальной трехмерной сферы. Это уравнение следует решать для всей элементарной ячейки пространства при следующих условиях: 1) функция  $\psi$  обладает внутри ячейки соответствующей симметрией и 2) нормальная компонента ее градиента обращается в нуль на границе

<sup>1)</sup> Подробный, но приближенный анализ см. в работе [9].

ячейки. Мы пришли к задаче на собственные значения, определяющей радиус  $a$  соответствующей однородной Вселенной. В присутствии гравитационного излучения метрику нельзя представить в таком простом виде. Тогда, однако, все же встает задача отыскания множителя типа  $\psi$ , определяемого не только распределением масс, но также и распределением гравитационного излучения.

## Приложение Б

*Мир Тауба с точки зрения гравитационного излучения максимальной длины волны*

В мире Тауба [13] нет никакого «истинного вещества». Свое решение уравнений Эйнштейна

$$d\sigma^2 = -dt^2 = \gamma_1 dx^2 + (\gamma_1 \sin^2 x + \gamma_3 \cos^2 x) dy^2 + \\ + 2\gamma_3 \cos x dy dz + \gamma_3 dz^2 - \gamma_1^2 \gamma_3 dt^2, \quad (\text{Б. 1})$$

где

$$\gamma_1 = \text{ch } \frac{t}{4} \text{ch}^2 \frac{t}{2}, \\ \gamma_3 = \frac{1}{\text{ch } t},$$

Тауб получил на основе теории групп, не связанной непосредственно с вопросами, рассматривавшимися в настоящей главе. Поэтому интересно посмотреть, как можно получить эти же решения, исходя из физических соображений.

Заменим в мире Фридмана пыль электромагнитным излучением, однородным и изотропным во всем пространстве. Мы придем таким образом к миру Толмена [44]. При его расширении и последующем сжатии длина волны каждой стоячей волны изменяется так же, как и радиус  $a$  этой модели Вселенной. Поэтому плотность массы — энергии изменяется не как  $1/a^3$  (мир Фридмана), а как  $1/a^4$ . Мы можем теперь заменить в мире Толмена электромагнитное излучение гравитационным с малой длиной волны. В правой части уравнений Эйнштейна уже не будет «истинной» плотности массы —

энергии, но мелкая рябь на геометрии приведет примерно к тому же типу искривления в крупных масштабах, какой вызывался «истинным» распределением массы — энергии. Обозначим через  $\delta g$  местную среднеквадратичную амплитуду флуктуаций метрики, а через  $\lambda = \lambda/2\pi$  длину волны, разделенную на  $2\pi$ . Тогда связанная с гравитационным излучением *эффективная* плотность массы — энергии будет порядка

$$\hat{T}_{\perp\perp\text{эфф}} \sim \frac{c^4}{8\pi G} \left(\frac{\delta g}{\lambda}\right)^2. \quad (\text{Б. 2})$$

Для того чтобы искривить и замкнуть пространство, радиус которого при наибольшем расширении равен  $a_0$ , требуется плотность энергии, определяемая соотношением

$${}^{(3)}R = \frac{16\pi G}{c^4} \hat{T}_{\perp\perp}, \quad (\text{Б. 3})$$

т. е.

$$\frac{6}{a_0^2} \approx 2 \left(\frac{\delta g}{\lambda}\right)^2. \quad (\text{Б. 4})$$

Таким образом, амплитуда ряби не должна быть большой:

$$\delta g \text{ (при наибольшем расширении)} \approx \frac{3^{1/2}\lambda}{a_0} \quad (\text{Б. 5})$$

в случае малой длины волны.

В процессе расширения и последующего сжатия плотность энергии, будучи пропорциональна  $(\delta g/\lambda)^2$ , с неизбежностью изменяется как  $1/a^4$ . В результате амплитуда ряби изменяется по закону

$$\delta g(t) \approx \frac{\text{const}_1 \lambda(t)}{a^2(t)} \approx \frac{\text{const}_2}{a(t)} \approx 3^{1/2} \frac{\lambda_0}{a(t)} \approx \frac{\sqrt{3}}{n} \frac{a_0}{a(t)}. \quad (\text{Б. 6})$$

Последнее из этих выражений относится к тому случаю, когда возмущение на фоне в общем идеально сферической геометрии описывается гиперсферической гармоникой [45] порядка  $n$ . На множитель  $3^{1/2}$  в этой формуле, характеризующей порядок величин, обращать внимания не следует.

От очень коротких гравитационных волн естественно перейти к другой крайности, когда порядок гармоник  $n$  принимает свое наименьшее возможное значение, а длина волны максимально велика, насколько это допускается геометрией трехмерной сферы. Свойства симметрии такой гиперсферической гармоник хорошо известны [45]. Этими свойствами симметрии, а также критической амплитудой, требующейся для замыкания мира, определяются свойства той конкретной гравитационной волны, которая и приводит к миру Тауба.

Мир Тауба однороден, но не изотропен, и его кривизна зависит от рассматриваемого направления, хотя ее главные значения повсюду одинаковы.

О возмущениях геометрии гораздо правильнее говорить с точки зрения кривизны, а не величины  $\delta g$ . Причины этого широко известны — невозможно построить не зависящих от выбора координат величин, используя только компоненты метрики и их первые производные. Порядок величины типичных компонент флуктуационной части кривизны можно оценить в локально лоренцевой системе как

$$\hat{R}(t)_{\text{волн}} \sim \frac{\delta g}{\lambda^2} \sim \frac{\delta g}{(a/n)^2} \sim \frac{na_0}{a^3(t)}.$$

В то же время порядок типичной компоненты кривизны геометрии фона таков:

$$\hat{R}_{\text{фон}} \sim \frac{1}{a^2(t)}.$$

Следовательно, порядок наибольшей длины волны и наименьшего  $n$  должен быть таким, чтобы возмущения геометрии, характеризующиеся различием в значениях кривизны по разным направлениям, были не наибольшими (как могло бы показаться из выражения для  $\delta g$ ), а наименьшими.

На своих ранних и поздних этапах это возмущение становится все больше и больше, и в конце концов любая трехмерная пространственноподобная геометрия приобретает бесконечную кривизну, что представляется неким общим принципом <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> См. [12, стр. 61].

## Приложение В

### *Единственность решения задачи начальных значений в электродинамике и геометродинамике*

Вопрос о единственности хорошо изучен в случае задачи начальных значений в электродинамике для замкнутых ориентируемых трехмерных многообразий. Задавая повсюду  $\mathbf{V}$  и  $\dot{\mathbf{V}}$ , мы приходим к однозначно определенному вектору  $\mathbf{E}$ , если зададим скачок  $\Delta_k \phi$  потенциала при обходе по  $k$ -й независимой топологической ручке или «кротовой норе», причем  $k$  пробегает значения от  $k=1$  до  $k=R_1=R_2$  (Второе число Бетти для данного многообразия). Этими числами определяется заряд или поток силовых линий, «провалившихся» в топологию. Требование фиксации чисел  $\Delta_k \phi$  с наибольшей очевидностью следует из того, что при переходе от вариационного принципа (42) к дифференциальному уравнению (43) появляется поверхностный интеграл  $\int \delta \phi (\mathbf{E} d\mathbf{S})$ . Проявляется ли с той же силой топология и в уравнениях для начальных значений общей теории относительности? *Существует ли геометродинамический аналог электрического заряда? Из вариационного принципа, рассматривавшегося в данной главе («координатное представление»), не вытекает никаких доводов в пользу существования такого рода заряда.* При интегрировании по частям уравнения (48) появляется поверхностный интеграл величины  $\pi^{ij} N_i$ . При обсуждении уравнения (48) в настоящей статье было отмечено, что этот поверхностный интеграл обращается в нуль в том случае, когда рассматривается топология обычной, односвязной трехмерной сферы. Но, как показал Мизнер, он равен нулю *и в случае любого замкнутого ориентируемого трехмерного многообразия.* Природа двумерных поверхностей, используемых при таком интегрировании в геометродинамике, такая же, как и в электродинамике. Такого рода поверхность можно представить себе как поверхность двух соприкасающихся надувных «пальцев», которые входят с противоположных сторон в «кротовую нору». Первый сомножитель подинтегрального выраже-

ния (в одном случае  $E$ , а в другом  $\pi^{ij}$ ) в этих двух случаях одинаков в том отношении, что данная величина всегда имеет определенный *физический смысл* и является *полевым импульсом*. Различие обнаруживается во втором сомножителе — в электродинамике это скачок потенциала  $\delta\varphi$ , а в геометродинамике — метрический потенциал  $N_i$ . В теории электромагнетизма смысл имеет лишь градиент  $\varphi$ , так что величина самого потенциала  $\varphi$  может изменяться в результате полного обхода вокруг контура ручки. Этого нельзя сказать о величине  $N_i$ , непосредственно определяющей расстояния между точками на двух соседних гиперповерхностях, на которых заданы системы координат. В противоположность электрическому потенциалу  $\varphi$  величина  $N_i$  должна после обхода контура ручки принимать свое исходное значение. Ввиду этого геометродинамический аналог электрического заряда, если таковой вообще имеется, должен проявить себя в форме сопряженного представления задачи начальных значений, которое мы здесь не рассматривали<sup>1)</sup>.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Einstein A., The Meaning of Relativity, 3rd ed., Princeton, N. J., 1950, p. 107 (имеется перевод: А. Эйнштейна, Сущность теории относительности, ИЛ, 1955).
2. Einstein A., Sci. Am., 38, 209 (1950).
3. Sciama D. W., Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 113, 34 (1953).
4. Sciama D. W., Sci. Am., 45, 99 (1957).
5. Davidson W., Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 117, 212 (1957).
6. Oort J., Wheeler J. A., в книге Onzième conseil de physique Solvay: La Structure et l'évolution de l'univers, Bruxelles, 1959.
7. Wheeler J. A., в книге La Structure et l'évolution de l'univers, Bruxelles, 1959.
8. Hönl H., в книге Physikertagung Wien, Verf. E. Brüche, Mosbach/Baden, 1962, S. 95.
9. Lindquist R. W., Wheeler J. A., Rev. Mod. Phys., 29, 432 (1957).
10. Brill D., Ann. Phys., 7, 466 (1959).
11. Araki H., Ann. Phys., 7, 456 (1959).

<sup>1)</sup> Более подробно этот вопрос рассматривается в статье [46]

12. Wheeler J. A., *Geometrodynamics*, New York, 1962, p. 56.
13. Taub A. H., *Ann., Math.*, **53**, 472 (1951).
14. Труды II Международной гравитационной конференции (июль 1962), Варшава, 1964
15. Dirac P. A. M., Fock V. A., Podolsky B., *Phys. Zs. Sowjetunion*, **2**, 468 (1932) (имеется перевод в книге: В. А. Фок, Работы по квантовой теории поля, Изд. ЛГУ, 1957, стр. 70).
16. Eisenhart L. P., *Riemannian Geometry*, Princeton, N. J., 1926, p. 150.
17. Arnowitt R., Deser S., Misner C. W., *Phys. Rev.*, **122**, 997 (1961).
18. Arnowitt R., Deser S., Misner C. W., в книге *Gravitation: an Introduction to Current Research*, ed. L. Witten, New York, 1962.
19. Dirac P. A. M., *Proc. Roy. Soc.*, **A246**, 333 (1958).
20. Dirac P. A. M., *Phys. Rev.*, **114**, 924 (1959).
21. Dirac P. A. M., *Phys. Rev. Lett.*, **2**, 368 (1959).
22. Stellmacher K., *Math. Ann.*, **115**, 136 (1937).
23. Lichnerowicz A., *Journ. Math. Pure Appl.*, **23**, 37 (1944).
24. Lichnerowicz A., *Helv. Phys. Acta Suppl.*, **4**, 176 (1956).
25. Lichnerowicz A., *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Paris, 1955.
26. Fourès-Bruhat Y., *Acta Math.*, **88**, 141 (1952).
27. Fourès-Bruhat Y., *Journ. Rational Mech. Anal.*, **5**, 951 (1956).
28. Fourès-Bruhat Y., в книге *Gravitation: an Introduction to Current Research*, ed. L. Witten, New York, 1962.
29. Baierlein R. F., Sharp D. H., Wheeler J. A., *Phys. Rev.*, **126**, 1864 (1962).
30. de Rahm G., *Variétés différentiables: formes, courants, formes harmoniques*, Paris, 1955.
31. Feynman R. P., *Rev. Mod. Phys.*, **20**, 367 (1948).
32. Feynman R. P., *Phys. Rev.*, **76**, 769 (1949).
33. Choquard Ph., thesis, École Polytechnique Fédérale, Zurich, 1955.
34. Dyson F. J., *Advanced Quantum Mechanics*, фотопринтное издание (New York), 1954.
35. Morrey C. V., *Pacific Journ. Math.*, **2**, 25 (1952).
36. Danskin J., *Rivista Math. Univ. Parma*, **3**, 43 (1952).
37. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., *Теория поля*, М., 1960.
38. Fermi E., *Rev. Mod. Phys.*, **4**, 87 (1932).
39. Riesz M., *Acta Math.*, **81**, 1, 223 (1949).
40. Wheeler J. A., Feynman R. P., *Rev. Mod. Phys.*, **17**, 157 (1945); **21**, 425 (1949).
41. Wheeler J. A., *The Monist*, **47**, No. 1 (1963).
42. Thom R., *Comment. Math. Helv.*, **28**, 17 (1954), Ch. IV.
43. Smith J. W., *U. S. Natl. Acad. Sci. Proc.*, **46**, 111 (1960).
44. Tolman R. C., *Relativity, Thermodynamics and Cosmology*, Oxford, 1934.
45. Лифшиц Е. М., *Journ. Phys. U.S.S.R.*, **10**, 116 (1946).
46. Wheeler J. A., в книге *Fundamental Topics in Relativistic Fluid Mechanics and Magnetohydrodynamics*, Eds. Ch. P. Wells, R. Wasserman, New York, 1963.



## О Г Л А В Л Е Н И Е

Предисловие редактора перевода . . . . .	5
Предисловие . . . . .	13
<i>Введение (Х. Цю, В. Гоффман)</i> . . . . .	15
Теоретические основы общей теории относительности как теории гравитации . . . . .	16
Опытные основания общей теории относительности и других теорий тяготения . . . . .	25
Проверка теории гравитации на основе экспериментов и наблюдений . . . . .	28
Квантование общей теории относительности . . . . .	46
Л и т е р а т у р а . . . . .	46
<i>Глава 1. Об экспериментальном базисе общей теории относительности (Р. Дикке)</i> . . . . .	49
Экспериментальный и формальный подход к общей теории относительности . . . . .	49
Возможности наблюдения орбитального движения планет . . . . .	50
Эксперимент Этвёша: эквивалентность инертной и гравитационной масс . . . . .	56
Вывод из эксперимента Этвёша: гравитация описывается геодезическими линиями геометрии пространства . . . . .	58
Определение единиц измерения; постоянны ли физические «постоянные»? . . . . .	63
Вариация инертной массы; «сильный» и «слабый» принципы эквивалентности . . . . .	65
Заключение: «знаменитые эффекты»; недостаточное подтверждение теории . . . . .	69
Приложение А. Влияние собственной гравитационной энергии на движение планеты . . . . .	70
Приложение Б. Ограничение, накладываемое опытом Этвёша на величину сил векторного поля Ли—Янга . . . . .	71
Л и т е р а т у р а . . . . .	72

<b>Глава 2. Риманова геометрия (Дж. Андерсон)</b> . . . . .	<b>73</b>
Геометрия как экспериментальная наука . . . . .	73
Начала геометрии: дифференцируемое многообразие; геометрическая структура . . . . .	75
Координаты как удобный способ описания . . . . .	76
Ковариантные и контравариантные тензоры . . . . .	78
Тензорная алгебра . . . . .	80
Тензорные плотности . . . . .	82
Дифференцирование тензоров . . . . .	84
Аффинная геометрия: понятие ковариантного дифференцирования . . . . .	86
Параллельный перенос; геометрический смысл ковариантного дифференцирования . . . . .	88
Введение геодезических линий в отсутствие метрики . . . . .	90
Метрический тензор . . . . .	94
Кривизна в римановой геометрии . . . . .	98
Свойства симметрии в геометрии . . . . .	100
Л и т е р а т у р а . . . . .	106
<b>Глава 3. Гравитация как геометрия (I): геометрия пространства — времени и геометродинамический стандартный метр (Р. Марцке, Дж. Уилер)</b> . . . . .	<b>107</b>
Каков реальный смысл искривленного пустого пространства? . . . . .	107
События — точки в пространстве — времени, определенные независимо от координат . . . . .	110
Аддитивность расстояний . . . . .	112
Перечисление точек упрощается отнесением их к четырем семействам координатных поверхностей . . . . .	112
Вопрос о часах и измерительных линейках, состоящих из атомов . . . . .	115
Классическая общая теория относительности не должна отражать закономерностей квантовой физики . . . . .	118
Вейль и Лоренц . . . . .	118
Методика измерений по Марцке . . . . .	119
Локально инерциальные системы отсчета . . . . .	124
Более общие сравнения . . . . .	129
Отношения длин не зависят от пути переноса . . . . .	132
Резюме . . . . .	136
Конкретное предложение, касающееся введения геометродинамического стандартного метра . . . . .	137
Приложение. Критерий того, что совокупность $(N+1)$ точек определяет $N$ -мерное евклидово пространство . . . . .	138
Л и т е р а т у р а . . . . .	140

Глава 4. Гравитация как геометрия (II) (Дж. Уилер) . . . . .	141
Различие между допустимой геометрией и произвольной геометрией . . . . .	141
Физика как уравнения движения плюс начальные условия	142
Начальные значения в электродинамике . . . . .	143
Внутренняя трехмерная геометрия и внешняя кривизна пространственноподобной гиперповерхности . . . . .	144
Метод формулировки типичных задач общей теории относительности был установлен лишь задним числом . . . . .	144
Содержание лекции . . . . .	145
Вывод эйнштейновских уравнений поля . . . . .	145
Геодезическая как путь, которому соответствует экстремальное собственное время . . . . .	147
Квантовая подоплека классического принципа экстремума	148
Уравнения Эйлера — Лагранжа для геодезической линии .	150
Переход к случаю малых скоростей и мира, мало отличающегося от плоского . . . . .	151
Связь между 00-компонентой метрики и массой — энергией	152
Векторный характер соответствующего источника в электродинамике . . . . .	152
Тензорный характер источника в геометродинамике . . . . .	154
Тензор кривизны как аналог электромагнитной напряженности в геометродинамике . . . . .	156
Кривизна в случае двумерной и трехмерной сферы . . . . .	157
Кривизна расширяющейся Вселенной . . . . .	158
Взаимосвязь материи и геометрии . . . . .	158
Объем, занимаемый скоплением пробных частиц . . . . .	159
Сжатие вещества под действием тяготения . . . . .	160
Первый выбор уравнений гравитационного поля неудачен .	161
Тензоры, ковариантные дивергенции которых равны нулю .	161
Выражение Картана для геометрического тензора с равной нулю ковариантной дивергенцией . . . . .	162
Понятие момента вращения . . . . .	163
Момент вращения может быть определен как скаляр на трехмерном многообразии . . . . .	164
Момент вращения оказывается вектором в четырехмерном многообразии . . . . .	164
Плотность момента вращения определяет тензор Эйнштейна	165
Доводы Гильберта в пользу четырех тождеств, связывающих уравнения Эйнштейна . . . . .	166
Свобода выбора координат проявляется в метрических коэффициентах . . . . .	167

Задача начальных значений в электродинамике и в геометродинамике . . . . .	168
Внутренняя геометрия . . . . .	168
Внешняя кривизна . . . . .	169
Уравнения для начальных значений . . . . .	170
Суть уравнений Эйнштейна — в уравнениях для начальных значений . . . . .	170
Почему существенна кривизна гиперповерхности? . . . . .	171
Приложение к частному случаю геометрии, симметричной во времени . . . . .	171
Дальнейшее ограничение случаем сферической симметрии и отсутствия источников . . . . .	172
Определение начальной трехмерной геометрии . . . . .	172
Неожиданная топология . . . . .	173
Диапазон геометродинамики . . . . .	174
Нерешенные вопросы, касающиеся расстояния, определенного постоянной Планка . . . . .	175
Зависимость угла отклонения от скорости как критерий различения тензорного и векторного полей . . . . .	175
Частный случай: отклонение луча света в поле Солнца . . . . .	176
Л и т е р а т у р а . . . . .	177
<b>Глава 5. Гравитационные волны (Дж. Вебер)</b> . . . . .	179
Возможность гравитационного излучения — нерешенная теоретическая проблема . . . . .	179
Волновые решения уравнений Эйнштейна в приближении слабого поля . . . . .	182
Поляризация гравитационных волн . . . . .	184
Проблема обнаружения гравитационного излучения . . . . .	189
Лабораторный детектор гравитационных волн . . . . .	192
Земля и Луна как детекторы гравитационных волн . . . . .	197
Генерирование гравитационного излучения . . . . .	199
Л и т е р а т у р а . . . . .	201
<b>Глава 6. Принцип Маха и эксперименты по анизотропии массы (В. Хьюз)</b> . . . . .	202
Принцип Маха и возможная анизотропия инертной массы . . . . .	202
Экспериментальная проверка анизотропии массы . . . . .	207
Истолкование экспериментов . . . . .	218
Л и т е р а т у р а . . . . .	219
<b>Глава 7. Многоликий Мах (Р. Дикке)</b> . . . . .	221
Два исторических подхода абсолютное пространство и релятивистское пространство . . . . .	221

Упрощенная модель Сиамы, служащая для истолкования принципа Маха . . . . .	226
Недостатки общей теории относительности . . . . .	230
Каталог полей далекого действия — фермионных полей . . . . .	231
Векторные поля далекого радиуса действия . . . . .	233
Скалярное поле — некоторые малоизвестные свойства . . . . .	235
Тензорное поле — мост между принципом Маха и геометрией . . . . .	240
Проявления принципа Маха в случае скалярного поля . . . . .	244
Л и т е р а т у р а . . . . .	249

### **Глава 8. Влияние переменного во времени гравитационного взаимодействия на Солнечную систему (Р. Дикке) . . . . .**

Изменение теории Эйнштейна в соответствии с принципом Маха . . . . .	251
Второй тензор в теории гравитации — малообещающее нововведение . . . . .	253
Замечательные свойства скалярного поля . . . . .	254
Видоизмененные уравнения Эйнштейна, содержащие скалярное поле . . . . .	258
Следствие видоизмененной теории: переменная во времени гравитационная «постоянная» . . . . .	260
Переменная «константа» $G$ и эволюционный возраст звезд . . . . .	261
Урановый возраст . . . . .	271
Переменная «константа» $G$ и температура Земли в прошлом . . . . .	274
Расширяются ли Земля и Луна? . . . . .	276
Конвекция в мантии Земли . . . . .	280
Аномалии в движении Луны и во вращении Земли . . . . .	285
Происхождение неисчезающего магнитного поля Юпитера . . . . .	290
Л и т е р а т у р а . . . . .	294

### **Глава 9. Принципы относительности и роль координат в физике (Дж. Андерсон) . . . . .**

Вопрос о принципе относительности . . . . .	295
Две формулировки частного принципа относительности . . . . .	297
Общая ковариантность как тривиальное обобщение . . . . .	305
Вывод принципа относительности из группы ковариантности согласно критерию Кречмана . . . . .	308
Другой подход к принципу относительности; абсолютные и динамические элементы теории . . . . .	310
Понятие предпочтительных систем координат . . . . .	315

Свойства инвариантности и законы сохранения . . . . .	316
Следствия из определения принципа относительности посредством абсолютных и динамических элементов . . . . .	320
Абсолютные элементы и свойства симметрии в физике . . . . .	323
Литература . . . . .	324
<b>Глава 10. Сверхплотные звезды и критическое число нуклонов (Дж. Уилер) . . . . .</b>	<b>325</b>
Сверхплотные звезды . . . . .	325
Слишком слабая и незаметная? . . . . .	325
Неизвестно, приводит ли астрофизическая эволюция к состоянию сверхплотной звезды . . . . .	326
Образуются ли они в природе или нет, но сверхплотные звезды — это принципиальная проблема . . . . .	327
Каково может быть число нуклонов, если конечное состояние системы равновесное? . . . . .	327
Не очень большое $A$ : кусок железа . . . . .	328
Первая переломная точка: гравитационные силы больше молекулярных сил в твердом теле . . . . .	329
Вторая переломная точка: гравитационные силы больше ядерных . . . . .	330
Загадка сверхкритического числа нуклонов . . . . .	330
Уравнение состояния . . . . .	330
Превращения, вызванные давлением . . . . .	332
Пренебрежимо малая роль электрического поля . . . . .	335
«Жесткая» сердцевина . . . . .	336
Понижение давления? . . . . .	338
Критическая масса . . . . .	341
Стабильность электронно-железной модели при $\lambda_e < 1$ . . . . .	345
Нерелятивистский предел . . . . .	347
Критическое равновесие при $\lambda_e = 1$ . . . . .	348
Модель нейтронной звезды в нерелятивистском приближении . . . . .	348
Новое свойство, появляющееся в релятивистском пределе . . . . .	350
Критические условия для нейтронной модели . . . . .	351
Точная теория равновесия . . . . .	351
Систематизация всех равновесных состояний по величине плотности в центре . . . . .	352
Сравнение результатов точных вычислений с результатами расчетов на основе простых моделей . . . . .	356
Обе переломные точки даются одним уравнением состояния . . . . .	357
Погрешности и неопределенности . . . . .	361
Нежимаемость — неправдоподобно, но интересно . . . . .	362

Нерелятивистский случай . . . . .	363
Общерелятивистское решение . . . . .	364
Уменьшение просвета между состояниями с положительной и отрицательной энергией . . . . .	366
Расходимость давления . . . . .	368
Критическая масса обязательно должна быть . . . . .	370
Два рода критических точек . . . . .	370
Неясно, должно ли сохраняться число барионов при весь- ма высоких давлениях . . . . .	372
Л и т е р а т у р а . . . . .	372
<b>Глава 11. Гравитация и свет (Дж. Вебер) . . . . .</b>	<b>374</b>
Нерелятивистский эффект отклонения светового луча в гравитационном поле . . . . .	374
Релятивистское отклонение луча света . . . . .	375
Влияние спина фотона . . . . .	377
Гравитационное красное смещение . . . . .	377
Сравнение теории Максвелла и теории Эйнштейна . . . . .	379
Запись теории электромагнетизма в произвольных коорди- натах и геометризация электродинамики . . . . .	382
Квантование системы взаимодействующих полей Максвел- ла — Эйнштейна . . . . .	385
Л и т е р а т у р а . . . . .	387
<b>Глава 12. Возможные воздействия на Солнечную систему со сто- роны <math>\varphi</math>-волн (если они существуют) (Р. Дикке) . . . . .</b>	<b>388</b>
Свойства скалярного поля далекого радиуса действия . . . . .	388
Астрономические источники $\varphi$ -волн . . . . .	391
Влияние $\varphi$ -волн на галактики . . . . .	394
Волны $\varphi$ -поля в Солнечной системе . . . . .	397
Загадка неправильностей движения Луны . . . . .	401
Не вызывают ли $\varphi$ -волны землетрясений? . . . . .	403
Вариации во вращении Земли — тоже влияние $\varphi$ -волн? . . . . .	407
Л и т е р а т у р а . . . . .	409
<b>Глава 13. Мир Литтлтона — Бонди и равенство зарядов (В. Хьюз) . . . . .</b>	<b>410</b>
Вопрос о равенстве зарядов электрона и протона . . . . .	410
Следствия возможного различия зарядов . . . . .	411
Экспериментальная проверка предполагаемого неравенства зарядов . . . . .	418
Истолкование результатов . . . . .	431
Л и т е р а т у р а . . . . .	434

<i>Глава 14. Квантование общей теории относительности (Дж. Андерсон)</i> . . . . .	435
Историческая перспектива . . . . .	435
Необходимость квантования гравитационного поля . . . . .	437
Процедура квантования . . . . .	439
Гамильтонова формулировка общей теории относительности . . . . .	440
Квантовый вариант теории . . . . .	450
Концептуальные проблемы квантованной общей теории относительности . . . . .	461
Литература . . . . .	467
<i>Глава 15. Принцип Маха как граничное условие для уравнений Эйнштейна (Дж. Уилер)</i> . . . . .	468
Поиски приемлемой формулировки принципа Маха . . . . .	468
Трехмерная геометрия и скорость ее изменения как база для построения общей теории относительности . . . . .	485
Замечания о принципе Маха и о вариационном принципе для случая двух гиперповерхностей . . . . .	516
Приложение А. Динамика ячеистого мира . . . . .	530
Приложение Б. Мир Тауба с точки зрения гравитационного излучения максимальной длины волны . . . . .	531
Приложение В. Единственность решения задачи начальных значений в электродинамике и геометродинамике . . . . .	534
Литература . . . . .	535

## ГРАВИТАЦИЯ И ОТНОСИТЕЛЬНОСТЬ

Редактор *Е. Куранский*  
 Художник *С. Бычков* Художественный редактор *Е. Вескова*  
 Технический редактор *Е. Потапенкова*

Слано в производство 15/VII 1965 г. Подписано к печати 18/XI 1965 г.  
 Бумага 84×108<sup>1</sup>/<sub>32</sub> 8,5 бум. л. 28,56 печ. л. Уч.-изд. л. 26,0 Изд. № 2/3044.  
 Цена 1 р. 97 к. Зак. 1740. Темплан 1965 г. изд-ва «Мир» пор. № 41

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой  
 Главполиграфпрома Государственного комитета Совета Министров СССР  
 по печати. Измайловский проспект, 29.