Н. Г. ЧУДАКОВ

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ L-ФУНКЦИЙ ДИРИХЛЕ

ОГИЗ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1947 ЛЕНИНГРАД

Редактор *А. Д. Горбунов.* Техн. редактор *Н. А. Тумаркина.*

Подписано к печати 18/VII 1947 г. 12¾ п. л. А 06662. 11,6 уч.-изд. л. 36300 тип. зн. в 1 п. л. Тираж 5000 экз. Цена книги 7 р. Заказ № 374

4-я типография им. Евг. Соколовой треста «Полиграфкнига» ОГИЗа при Совете Министров СССР. Ленинград, Измайловский пр., 29.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предметом настоящей монографии является теория функций Дирихле, играющая исключительно важную роль в современной аналитической и аддитивной теории чисел. Главная цель автора заключается в изложении вопроса о распределении нулей L-функций Дирихле на комплексной плоскости. Поэтому основное место в монографии занимают результаты, достигнутые в этой области за последнее десятилетие: теорема Page'а и теорема Siegel'я [1]).

Однако наряду с этим, в первых главах книги содержатся сведения об элементах теории рядов Дирихле и L-функций Дирихле в таком объёме, что читателю нет необходимости обращаться к специальным сочинениям по данному вопросу.

Глава первая излагает теорию некоторых числовых функций, которые носят название характеров. Изложение этой теории проведено новым единым методом, отличающимся от существующих в литературе.

Глава вторая содержит элементарную теорию L-функций Дирихле, включая вопрос об их аналитическом продолжении и функциональном уравнении.

Глава третья излагает вопрос о нулях L-функций. Здесь, между прочим, доказываются теоремы Page'а и Siegel'я. Последняя доказывается без помощи теории алгебраических полей (теорема Siegel'я).

В главе четвёртой указываются некоторые приложения изложенных в предыдущих главах результатов к вопросам аналитической теории чисел: аппроксимаций функции $\pi(x, k, l)$ и теорема Виноградова-Гольдбаха о простых числах.

---

[1]) Идеи, лежащие в основе теорем Page'а и Siegel'я основываются на замечаниях, принадлежащих Remak'у и Landau.

У читателя предполагается знание элементов теории чисел в объёме, например, книги: акад. И. М. Виноградов «Основы теории чисел», Москва, ГТТИ, 1940.

Настоящую монографию можно рассматривать как дополнение к книге: Ингам А. Е. «Распределение простых чисел», ОНТИ, 1936. В последней книге излагается теория функции Римана — функции $\zeta(s)$, — которая является частным случаем L-ряда.

В заключение приношу глубокую благодарность моим ученикам К. А. Родосскому и В. М. Архангельской, которые помогли мне при чтении гранок этой книги своими ценными советами и участием.

Наконец, приятным долгом я считаю поблагодарить А. Д. Горбунова, который много поработал над рукописью этой книги.

Н. Чудаков

1/IX 1943 г.

ГЛАВА I

ХАРАКТЕРЫ

§ 1. Определение и основные свойства

Характером мы будем называть числовую функцию $\chi(n)$, определённую для всех целых чисел n и удовлетворяющую следующим требованиям:

1° $\chi(n)$ не равна тождественно 0;

2° $\chi(n)$ вполне мультипликативна, т. е.

$$\chi(mn) = \chi(m)\chi(n)$$

для любой пары целых m и n;

3° $\chi(n)$ — функция, имеющая целый период.

Легко видеть, что

$$\chi(1) = 1.$$

В самом деле, по определению существует такое целое a, что $\chi(a) \neq 0$.

Далее, $\chi(a) = \chi(a)\chi(1)$, ибо $a = a \cdot 1$; следовательно, $\chi(1) = 1$.

Пусть k — период двух характеров $\chi(n)$ и $\chi_1(n)$. Нетрудно видеть, что, в силу периодичности обеих функций $\chi(n)$ и $\chi_1(n)$, они будут тождественны между собой тогда и только тогда, когда их значения совпадают на некоторой полной системе вычетов по модулю k, т. е. характер однозначно определяется заданием его значений для полной системы вычетов по модулю k.

Если число k — период $\chi(n)$, то и число $-k$ также период; поэтому функция $\chi(n)$ всегда имеет положительные периоды.

Если целые числа k и k' — периоды функции $\chi(n)$, то и число $k-k'$ также является периодом $\chi(n)$. В самом деле, пусть n — любое целое; тогда можно написать, что

$$\chi(n+k-k')=\chi(n-k')=\chi((n-k')+k')=\chi(n).$$

Следовательно, всё множество целых периодов функции $\chi(n)$ образует модуль в смысле теории чисел. Поэтому, в силу известного свойства модуля, все периоды $\chi(n)$ кратны наименьшему положительному периоду $\chi(n)$.

Этот наименьший из положительных периодов характера называется **основным модулем** характера; все периоды характера, имеющие одинаковые с основным модулем простые делители, называются **модулями характера**.

Чтобы указать, что число k является основным модулем функции $\chi(n)$, мы будем сам характер записывать символом $\chi(n, k)$.

Примеры:

1. Характером является, очевидно, функция

$$\chi(n)\equiv 1.$$

Эту функцию мы будем называть единичной функцией. Её основной модуль равен числу 1; поэтому её можно записывать символом $\chi(n, 1)$.

2. Нетрудно видеть, что характером является функция, определённая условиями

$$\chi(n)=\begin{cases}0, & \text{если } (n, k)>1,\\ 1, & \text{если } (n, k)=1,\end{cases}$$

где k — заданное натуральное число >1. Такие функции могут быть построены для любого натурального k. Их мы будем называть **главными** характерами.

3. Пусть k — нечётное натуральное число >1; положим

$$\chi(n)=\begin{cases}0, & \text{если } (n, k)>1,\\ \left(\frac{n}{k}\right), & \text{если } (n, k)=1,\end{cases}$$

где $\left(\frac{n}{k}\right)$ — символ Якоби. Опираясь на известные свойства символа Якоби, легко доказать, что $\chi(n)$ — характер. Эту функцию мы будем называть **обобщённым символом**

Якоби и обозначать символом $\left(\frac{n}{k}\right)$. Основной модуль $\left(\frac{n}{k}\right)$ равен делителю числа k.

В частности, если $k = p$, где p — простое число, обобщённый символ Якоби переходит в обобщённый символ Лежандра. Основной модуль его равен, очевидно, числу p.

4. Пусть p — нечётное простое число, α — натуральное $\geqslant 1$, g — первообразный корень по модулю p^α, $\nu = \operatorname{ind} n$, если $p \nmid n$, наконец, пусть число ρ — любой корень уравнения

$$\rho^h = 1,$$

где $h = \varphi(p^\alpha)$. Определим функцию $\chi(n)$ условиями

$$\chi(n) = \begin{cases} 0, & \text{если } p/n \\ \rho^\nu, & \text{если } p \nmid n \text{ и } \nu = \operatorname{ind} n. \end{cases}$$

Докажем, что $\chi(n)$ — характер. Прежде всего ясно, что $\chi(1) = 1$; далее пусть целые числа n и n' таковы, что $p \nmid nn'$; тогда

$$\operatorname{ind} nn' \equiv \operatorname{ind} n + \operatorname{ind} n' \pmod h;$$

поэтому

$$\chi(nn') = \rho^{\operatorname{ind} nn'} = \rho^{\operatorname{ind} n} \cdot \rho^{\operatorname{ind} n'} = \chi(n)\chi(n').$$

Если же p/nn', то или p/n, или p/n', т. е.

$$\chi(n)\chi(n') = 0 = \chi(nn').$$

Наконец, если $n \equiv n' \pmod{p^\alpha}$ и $p \nmid n$, то

$$\operatorname{ind} n \equiv \operatorname{ind} n' \pmod h,$$

$$\chi(n) = \rho^{\operatorname{ind} n} = \rho^{\operatorname{ind} n'} = \chi(n');$$

если же p/n, то $\chi(n) = \chi(n') = 0$.

Функцию такого вида мы будем называть элементарным характером. Очевидно, что основной модуль её равен $p^{\alpha'}$, где

$$\alpha' \leqslant \alpha.$$

Теорема 1. *Пусть $\chi(n, k)$ — любой характер, основной модуль которого равен числу $k > 1$; тогда*

$$\chi(n, k) \begin{cases} = 0, \text{ если } (n, k) > 1, \\ \neq 0, \text{ если } (n, k) = 1. \end{cases}$$

Примечание. Теорему можно считать справедливой и для случая, когда $k = 1$, ибо тогда все числа взаимно просты с $k = 1$.

Пусть $(n, k) = 1$, тогда, как известно, существуют такие дв целых числа x и y, что

$$nx + ky = 1.$$

Следовательно,

$$\chi(nx) = 1, \quad \chi(n)\chi(x) = 1, \text{ т. е. } \chi(n) \neq 0.$$

Пусть теперь $(n, k) = d > 1$; полагаем $n = n'd$, $k = k'd$. Так как $k' < k$, то существует такое целое a, что

$$\chi(a + k') - \chi(a) \neq 0,$$

ибо в противном случае k' было бы периодом $\chi(n, k)$. Но

$$\chi(d)(\chi(a + k') - \chi(a)) = \chi(ad + k) - \chi(ad) = 0,$$

$$\text{т. е. } \chi(d) = 0,$$

$$\chi(n) = \chi(n')\chi(d) = 0.$$

Следствие. Период k характера $\chi(n)$ тогда и только тогда совпадает с одним из модулей этой функции, когда $\chi(n) = 0$ для всех целых n, имеющих общие делители с k.

В самом деле, если n имеет общие делители с k, то оно имеет общие делители и с основным модулем $\chi(n)$, по определению модуля. Обратно, если $\chi(p) = 0$ для всех целых n, имеющих общие делители с k, то $\chi(n) = 0$, где p — любой простой делитель k. А по теореме 1 это возможно только в том случае, если p является делителем и основного модуля. Но последний есть сам делитель k; поэтому число k должно иметь те же делители, что и основной модуль, т. е. k есть модуль.

Лемма I, 1. *Пусть $k | k_1 \ldots k_\nu$; тогда $k = k_1' k_2' \ldots k_\nu'$, где $k_1' | k_1, \ldots, k_\nu' | k_\nu$.*

Пусть сначала $\nu=2$. Полагаем $k_1'=(k, k_1)$, $k_2'=kk_1'^{-1}$; так как k/k_1k_2, то

$$k_2'=\frac{k}{k_1'}/k_2.$$

Обратимся к общему случаю. Так как

$$k/k_1k_2\ldots k_\nu,$$

то, в силу только что доказанного, имеем:

$$k=k'k_\nu',$$

где

$$k'/k_1\ldots k_{\nu-1}, \quad k_\nu'/k_\nu.$$

Но для случая $\nu-1$ сомножителей лемму мы можем считать уже справедливой; поэтому

$$k'=k_1'k_2'\ldots k_{\nu-1}',$$

т. е.

$$k=k_1'k_2'\ldots k_{\nu-1}'k_\nu'.$$

Теорема 2. *Произведение конечного числа характеров есть также характер, основной модуль которого равен делителю наименьшего кратного основных модулей сомножителей; основной модуль произведения конечного числа характеров равен произведению основных модулей сомножителей, если последние попарно взаимно просты.*

Пусть

$$\chi(n)=\chi_1(n)\chi_2(n)\ldots\chi_\nu(n),$$

где $\chi_1(n), \chi_2(n), \ldots, \chi_\nu(n)$ суть заданные характеры, а числа $k_1, k_2, \ldots, k_\nu$ — соответственно их основные модули. Непосредственная проверка убеждает нас в том, что функция $\chi(n)$ удовлетворяет условиям 1° и 2° определения характера. Далее пусть

$$k'=\text{наим. кратн. }(k_1k_2\ldots k_\nu).$$

Очевидно, что

$$\chi(n+k')=\chi_1(n+k')\chi_2(n+k')\ldots\chi_\nu(n+k')=$$
$$=\chi_1(n)\chi_2(n)\ldots\chi_\nu(n)=\chi(n),$$

Таким образом $\chi(n)$ — характер, среди периодов которого находится число k'. Если обозначим буквой k основной модуль $\chi(n)$, то по свойству последнего имеем:

$$k \mid k'.$$

Пусть теперь все числа $k_1 \ldots k_\nu$ попарно взаимно просты. Докажем, что

$$k = k_1 \ldots k_\nu.$$

Выше мы видели, что $k \mid k_1 k_2 \ldots k_\nu$. В силу предшествующей леммы имеем:

$$k = k_1' k_2' \ldots k_\nu',$$

где

$$k_1' \mid k_1, \quad k_2' \mid k_2, \ldots, k_\nu' \mid k_\nu.$$

Пусть дано произвольное целое n; определим числа n' и n условиями:

$$n' \equiv n \pmod{k_1}, \qquad n_1' \equiv n + k_1' \pmod{k_1},$$
$$n' \equiv 1 \pmod{k_i}, \qquad n_1' \equiv 1 \pmod{k_i},$$
$$i = 2, \ldots, \nu.$$

(Такие два числа всегда можно найти, ибо написанная система сравнений всегда совместна.) Очевидно, что

$$\chi(n') = \chi_1(n), \quad \chi(n_1') = \chi_1(n + k_1'). \tag{2.1}$$

С другой стороны, сопоставление написанных выше сравнений показывает, что

$$n' \equiv n_1' \pmod{k_1'},$$
$$n' \equiv n_1' \pmod{k_i}, \quad i = 2, 3, \ldots, \nu,$$

а это значит, что

$$n' \equiv n_1' \pmod{k_1' k_2 \ldots k_\nu}.$$

Но

$$k \mid k_1' k_2 \ldots k_\nu;$$

следовательно,

$$\chi(n') = \chi(n_1'). \tag{2.2}$$

Равенства (2.1) и (2.2) показывают, что

$$\chi_1(n+k_1')=\chi_1(n),$$

т. е. k_1' — период $\chi_1(n)$. А это возможно только в том случае, если

$$k_1'=k_1.$$

Аналогичным образом убеждаемся, что

$$k_2'=k_2, \ldots, k_\nu'=k_\nu,$$

т. е.

$$k=k_1k_2\ldots k_\nu.$$

Справедлива и следующая, в известном смысле слова, обратная теорема.

Теорема 3. *Пусть k — основной модуль характера $\chi(n)$ и*

$$k=k_1k_2\ldots k_\nu,$$

где все k_i попарно взаимно просты, тогда существует единственная система характеров

$$\chi_1(n), \chi_2(n), \ldots, \chi_\nu(n),$$

основные модули которых соответственно равны k_1, $k_2, \ldots, k_\nu$ и такие, что

$$\chi(n)=\chi_1(n)\chi_2(n)\ldots\chi_\nu(n).$$

При этом области значений функций $\chi_1(n), \ldots, \chi_\nu(n)$ суть части области значений $\chi(n)$.

Пусть дано произвольное целое число $i \leqslant \nu$.

Для каждого n определим число n_i условиями

$$n_i \equiv n \pmod{k_i}, \quad n_i \equiv 1 \pmod{k_j}, \quad \text{если } j \neq i.$$

Полагаем теперь

$$\chi_i(n)=\chi(n_i).$$

Все n_i для данного n образуют один класс вычетов по mod k, поэтому функция $\chi_i(n)$ определена однозначно. Далее очевидно, что если $n\equiv 1$, то $n_i \equiv 1 \pmod k$, т. е.

$$\chi_i(1)=\chi(1)=1.$$

Пусть теперь m и n — два произвольных целых числа. Тогда, по определению чисел m_i и n_i, имеем:

$$m_i \equiv m \pmod{k_i}, \quad m_i \equiv 1 \pmod{k_j},$$
$$n_i \equiv n \pmod{k_i}, \quad n_i \equiv 1 \pmod{k_j}, \quad j \neq i.$$

Почленным перемножением получаем:

$$m_i n_i \equiv mn \pmod{k_i}; \quad m_i n_i \equiv 1 \pmod{k_j}, \quad j \neq i.$$

Значит

$$\chi_i(mn) = \chi(m_i n_i) = \chi(m_i)\chi(n_i) = \chi_i(m)\chi_i(n).$$

Наконец, нетрудно убедиться в том, что

$$n_i' \equiv n_i \pmod{k},$$

где n_i' — число, соответствующее $n+k_i$ указанным выше способом; поэтому

$$\chi_i(n+k_i) = \chi(n_i') = \chi(n_i) = \chi_i(n),$$

т. е. k_i является периодом функции $\chi_i(n)$. Следовательно, функция $\chi_i(n)$—характер. Выполняя указанное выше построение для всех $i = 1, 2, \ldots, \nu$, мы получим ν функций:

$$\chi_1(n), \ \chi_2(n), \ldots, \chi_\nu(n).$$

Докажем теперь, что

$$\chi(n) = \chi_1(n)\chi_2(n)\ldots\chi_\nu(n).$$

В самом деле

$$\chi_1(n)\chi_2(n)\ldots\chi_\nu(n) = \chi(n_1)\chi(n_2)\ldots\chi(n_\nu) = \chi(n_1\ldots n_\nu);$$

но непосредственное вычисление показывает, что

$$n_1 n_2 \ldots n_\nu \equiv n \pmod{k_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, \nu,$$

т. е.

$$n_1 n_2 \ldots n_\nu \equiv n \pmod{k},$$
$$\chi(n_1 n_2 \ldots n_\nu) = \chi(n).$$

Так как все $k_1, k_2, \ldots, k_\nu$ попарно просты, то и основные модули — обозначим их буквами $k_1', k_2', \ldots, k_\nu'$ — функций

$\chi_1(n), \chi_2(n), \ldots, \chi_\nu(n)$ также попарно взаимно просты, ибо они равны соответственно делителям чисел $k_1, k_2, \ldots, k_\nu$. Но тогда, в силу теоремы 2, имеем:

$$k = k_1' k_2' \ldots k_\nu',$$

при дополнительном условии, что $k_1'/k_1, k_2'/k_2, \ldots, k_\nu'/k_\nu$. Последнее же равенство возможно только при условии, что

$$k_1' = k_1, \quad k_2' = k_2, \quad \ldots, \quad k_\nu' = k_\nu,$$

ибо $k = k_1 k_2 \ldots k_\nu$. Итак, $k_1, k_2, \ldots, k_\nu$ соответственно равны основным модулям $\chi_1(n), \chi_2(n), \ldots, \chi_\nu(n)$.

Допустим затем, что существует другая система характеров

$$\chi_1'(n), \chi_2'(n), \ldots, \chi_\nu'(n),$$

имеющих соответственно $k_1 k_2, \ldots, k_\nu$ своими периодами, и таких, что

$$\chi(n) = \chi_1'(n)\, \chi_2'(n) \ldots \chi_\nu'(n).$$

Но, в силу определения числа n_i, имеем:

$$\chi(n_i) = \chi_i'(n),$$

т. е.

$$\chi_i'(n) = \chi_i(n)$$

при произвольном n. Таким образом функции $\chi_1'(n), \chi_2'(n), \ldots, \chi_\nu'(n)$ тождественно совпадают соответственно с функциями $\chi_1(n), \chi_2(n), \ldots, \chi_\nu(n)$, чем доказывается единственность представления характера $\chi(n)$ в форме произведения указанного типа.

Наконец, в силу самого способа построения функций $\chi_1(n), \chi_2(n), \ldots, \chi_\nu(n)$, очевидно, что области их значений не выходят за пределы области значений данной функции $\chi(n)$. Таким образом теорема полностью доказана.

Пусть k обозначает целое число, удовлетворяющее условиям $k \geqslant 1$, $k = k_1 k_2$, где $(k_1, k_2) = 1$. Из теоремы 3 вытекает, что любой характер $\chi(n, k)$ может быть представлен единственным способом в форме

$$\chi(n, k) = \chi(n, k_1)\, \chi(n, k_2);$$

функции $\chi(n, k_1)$ и $\chi(n, k_2)$ называются делителями $\chi(n, k)$. То, что характер $\chi(n, k_1)$ является делителем $\chi(n, k)$, мы будем обозначать так:

$$\chi(n, k_1)/\chi(n, k).$$

Легко теперь проверить, опираясь на теоремы 2 и 3, что если

$$\chi(n, k_1')/\chi(n, k_1) \quad \text{и} \quad \chi(n, k_1)/\chi(n, k),$$

то

$$\chi(n, k_1')/\chi(n, k).$$

Далее, если

$$\chi(n, k')/\chi(n, k)\,\chi(n, k_1), \qquad (k_1', k) = 1, \quad (k, k_1) = 1,$$

то

$$\chi(n, k_1')/\chi(n, k_1).$$

Без труда устанавливаются следующие факты:

1. Все делители единичной функции суть сами единичные функции.

2. Делителями любого характера $\chi(n, k)$ являются функции $\chi(n, 1)$ и $\chi(n, k)$.

3. Всякая функция вида $\chi(n, p^\alpha)$ имеет только два делителя:

$$\chi(n, 1) \quad \text{и} \quad \chi(n, p^\alpha).$$

Пусть основной модуль k функции $\chi(n, k)$ имеет следующее каноническое представление:

$$k = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_\nu^{\alpha_\nu},$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$ — различные простые делители числа k. Тогда, в силу теоремы 3, характер $\chi(n, k)$ единственным образом представляется в форме

$$\chi(n, k) = \chi(n, p_1^{\alpha_1})\,\chi(n, p_2^{\alpha_2}) \ldots \chi(n, p_\nu^{\alpha_\nu}).$$

Это последнее равенство мы будем называть *каноническим представлением* характера $\chi(n, k)$, а сами множители

$$\chi(n, p_1^{\alpha_1}), \chi(n, p_2^{\alpha_2}), \ldots, \chi(n, p_\nu^{\alpha_\nu})$$

каноническими делителями $\chi(n, k)$.

Исследуем, что представляет собой функция $\chi(n, p^\alpha)$, где p — простое. Пусть p — нечётное простое; g_p — первообразный корень по модулю p^2, например, наименьший положительный. Если $(n, k) = 1$, то найдётся такое μ, что

$$n \equiv g_p^\mu \pmod{p^\alpha},$$

причём число μ определено с точностью до модуля, равного $\varphi(p^\alpha)$. Следовательно,

$$\chi(n, p^\alpha) = \rho^\mu,$$

где $\rho = \chi(g_p, p^\alpha)$. С другой стороны,

$$g_p^{\varphi(p^\alpha)} \equiv 1 \pmod{p^\alpha};$$

значит

$$\rho^{\varphi(p^\alpha)} = 1.$$

Далее известно, что для каждого нечётного n найдутся такие два числа μ' и μ'', что

$$n \equiv (-1)^{\mu'} 5^{\mu''} \pmod{2^\alpha},$$

причём n пробегает полную систему вычетов, когда μ' и μ'' пробегают полные системы вычетов соответственно по модулям h' и h'', где

$$h' = \begin{cases} 1 & \text{для } \alpha = 0,1, \\ 2 & \text{для } \alpha \geqslant 2, \end{cases} \qquad h'' = \begin{cases} 1 & \text{для } \alpha = 0,1, \\ 2^{\alpha-2} & \text{для } \alpha \geqslant 2. \end{cases}$$

Следовательно, для нечётного n имеем:

$$\chi(n, 2^\alpha) = \rho'^{\mu'} \rho''^{\mu''},$$

где

$$\rho' = \chi(-1, 2^\alpha); \quad \rho'' = \chi(5, 2^\alpha).$$

Далее заметим, что

$$(-1)^{h'} \equiv 1 \pmod{2^\alpha}, \quad 5^{h''} \equiv 1 \pmod{2^\alpha};$$

следовательно,

$$\rho'^{h'} = 1, \quad \rho''^{h''} = 1.$$

Обратно, пусть p — нечётное простое, ρ — любой корень уравнения $\rho^{\varphi(p^\alpha)} = 1$, функция $\chi(n)$ определена условиями:

$$\chi(n) = \begin{cases} 0, & \text{если } p/n, \\ \rho^\mu, & \text{если } n \equiv g_p^\mu \pmod{p^\alpha}. \end{cases}$$

Простой проверкой нетрудно убедиться, что функция $\chi(n)$ является характером, имеющим число p^α одним из своих модулей. Конечно, в общем случае p^α не равно основному модулю $\chi(n)$. Все построенные для различных ρ функции сами различны между собой, ибо $\chi(g) = \rho$. Следовательно, существует ровно $\varphi(p^\alpha)$ характеров, имеющих число p^α своим модулем.

Далее пусть ρ' и ρ'' — два любых корня соответственно уравнений

$$\rho'^{h'} = 1, \quad \rho''^{h''} = 1,$$

где величины h' и h'' имеют значения, указанные выше. Определяем функцию $\chi(n)$ условиями:

$$\chi(n) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ — чётное}, \\ \rho'^{\mu'}\rho''^{\mu''}, & \text{если } n \equiv (-1)^{\mu'} 5^{\mu''} \pmod{2^\alpha}. \end{cases}$$

Опять легко непосредственно проверить, что эта функция является характером, имеющим число 2^α своим модулем (вообще говоря, неосновным). Меняя ρ' и ρ'', мы получим $h'h'' = \varphi(2^\alpha)$ различных характеров, ибо

$$\chi(-1) = \rho', \quad \chi(5) = \rho''.$$

Итак, существует ровно $\varphi(2^\alpha)$ характеров, имеющих данное число 2^α своим модулем.

Теперь мы можем высказать следующую общую теорему.

Теорема 4. *Каково бы ни было натуральное число k, существует ровно $\varphi(k)$ различных характеров, имеющих число k своим модулем. Значениям независимого переменного, взаимно простым с k, соответствуют такие значения функции, которые все являются корнями уравнения*

$$x^{\varphi(k)} = 1.$$

Для $k=1$ наша теорема очевидна: существует только одна функция, именно $\chi(n, 1)$, которая имеет число 1 своим модулем.

Пусть $k>1$ и $k=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_\nu^{\alpha_\nu}$.

Построим все функции $\chi_1(n), \chi_2(n), \ldots, \chi_\nu(n)$, имеющие соответственно числа $p_1^{\alpha_1}, \ldots, p_\nu^{\alpha_\nu}$ своими модулями; тогда произведение ν каких-нибудь из них

$$\chi(n)=\chi_1(n)\chi_2(n)\ldots\chi_\nu(n) \tag{4.1}$$

имеет своим модулем число k. Беря различные возможные сочетания из функций типа $\chi_1(n)\chi_2(n), \ldots, \chi_\nu(n)$, мы получаем

$$\varphi(p_1^{\alpha_1})\varphi(p_2^{\alpha_2})\ldots\varphi(p_\nu^{\alpha_\nu})=\varphi(k)$$

произведений вида (4.1). Все эти произведения $\chi(n)$ различны между собой, иначе одна и та же функция $\chi(n)$ имела бы по крайней мере два разных канонических представления. Итак, существует ровно $\varphi(k)$ характеров, имеющих число k своим модулем.

Пусть далее $(n, k)=1$, т. е. $(n, p_i^{\alpha_i})=1$, $i=1,2, \ldots, \nu$.

В силу сказанного выше, число $\chi_i(n)$ равно одному из корней уравнения $x^{\varphi(p_i^{\alpha_i})}=1$, т. е. число $\chi(n)$ заведомо удовлетворяет уравнению

$$x^{\varphi(k)}=1.$$

Эта теорема позволяет распределить все характеры на следующие 3 класса.

К первому классу мы отнесём все характеры, принимающие только два значения: 0, 1. Все такие функции будем называть *главными* характерами и обозначать символом

$$\chi_0(n, k).$$

Главные характеры ещё называют характерами 1-го рода.

Ко второму классу отнесём все характеры, принимающие только действительные значения, т. е. значения 0, -1 и 1. Такие характеры мы будем называть *действительными* или характерами 2-го рода.

К третьему классу относятся характеры, принимающие хотя бы одно комплексное значение. Такие характеры называются комплексными или 3-го рода.

Вне этих классов оказывается только одна функция — единичная функция, которую по целому ряду соображений удобнее не причислять к другим категориям характеров.

Рассмотрим теперь некоторые основные свойства главных характеров. Прежде всего ясно, что произведение конечного числа главных характеров есть опять главный характер.

Обратно, все делители главных характеров суть сами главные характеры, что следует из теоремы 3. В частности, это справедливо для канонических делнтелей главного характера.

Что касается основных модулей главных характеров, то ясно, что таковыми не могут быть числа вида p^α для $\alpha > 1$; значит, если среди периодов главного характера имеется p^α, то основным модулем в рассматриваемом случае будет число p. Значит, переходя к общему случаю, можно сказать, что *основной модуль всякого главного характера не содержит среди своих делителей точного квадрата*, ибо основные модули всех канонических делителей этой функции суть простые числа.

Наконец, заметим, что абсолютная величина любого характера равна главному характеру, основной модуль которого делит основной модуль данного характера.

Теорема 5. *Пусть для всех натуральных чисел n определена функция $f(n)$, удовлетворяющая всем требованиям определения характера, т. е.*

1. $f(n) \not\equiv 0$.
2. $f(mn) = f(m) f(n)$ для любых $m \geqslant 1$, $n \geqslant 1$.
3. $f(n+k) = f(n)$, где k — целое.
4. $f(n) = 0$ для n, имеющих общих делителей с k.

Эту функцию единственным способом можно дополнить до характера, т. е. существует такой $\chi(n, k')$, что $\chi(n, k') = f(n)$ для $n \geqslant 1$, причём k равно модулю $\chi(n, k')$.

Прежде всего заметим, что

$$f(1) = 1;$$

это равенство доказывается совершенно так же, как и для характеров.

Определим теперь новую функцию $\chi(n)$, положив её равной для данного n общему значению $f(n')$ для всех положительных n', находящихся с данным n в одном классе по mod k. Этим условием $\chi(n)$ однозначно определяется; покажем теперь, что эта функция является характером с модулем k. В самом деле:

1. Очевидно, что $\chi(1)=f(1)=1$.

2. Пусть даны два любых целых числа m и n, пусть далее m' и n' — какие-нибудь два положительных вычета по mod k соответственно чисел m и n. Тогда по определению имеем:

$$\chi(mn)=f(m'n')=f(m')f(n')=\chi(m)\chi(n),$$

ибо число $m'n'$ является положительным вычетом mn по mod k.

3. То, что k равен одному из периодов $\chi(n)$, следует непосредственно из определения, ибо если $m\equiv n \pmod{k}$, то оба числа m и n имеют одинаковые положительные вычеты.

4. k равно одному из модулей $\chi(n)$, ибо если n имеет общих делителей с k, то те же общие делители с k имеют и все положительные вычеты n по mod k, значит:

$$\chi(n)=f(n')=0,$$

где n' — положительный вычет n по mod k.

Построенный указанным выше способом характер $\chi(n)$ — единственный, ибо его значения заданы для полной системы вычетов по mod k.

§ 2. Первообразные и производные характеры

Если среди делителей характера $\chi(n, k)$ имеется хотя бы один главный характер, нетождественный с $\chi(n, 1)$, то сам характер $\chi(n, k)$ называется производным характером; если же среди делителей $\chi(n, k)$ не встречается главных характеров, то такой характер называется первообразным.

Примечание. Единичная функция $\chi(n, 1)$ хотя и может быть причислена к первообразным характерам, но по целому ряду соображений её удобнее поставить вне указанной классификации характеров, подобно числу 1 в теории чисел.

Примеры. 1. Все элементарные характеры вида $\chi(n, p^\alpha)$, где p — простое число, суть первообразные характеры, если $\chi(n, p^\alpha)$ нетождественно с каким-либо главным характером.

2. Все главные характеры производны, ибо среди их делителей находятся они сами.

3. Пусть $k = 2k'$, где k' — нечётное число, $\chi(n, k)$ — любой характер, основной модуль которого равен k. Тогда

$$\chi(n, 2)/\chi(n, k).$$

Но $\varphi(2) = 1$; поэтому $\chi(n, 2)$ должно совпадать с $\chi_0(n, 2)$. Следовательно, все характеры, основные модули которых удовлетворяют сравнению

$$k \equiv 2 \pmod{4},$$

суть производные характеры.

Мы видели выше, что всякий характер $\chi(n, k)$ допускает каноническое представление

$$\chi(n, k) = \prod_{p/k} \chi(n, p^\alpha).$$

Нетрудно теперь показать, что характер $\chi(n, k)$ тогда и только тогда будет производным, если среди его канонических делителей найдутся главные характеры. В самом деле, пусть

$$\chi_0(n, k')/\chi(n, k).$$

Но главный характер $\chi_0(n, k')$ имеет среди своих делителей функцию $\chi_0(n, p)$, где p — простое число. Значит $\chi_0(n, p)/\chi(n, k)$, откуда следует, что p входит в каноническое представление числа k с показателем 1. В силу же единственности канонического представления $\chi(n, k)$ фун ия $\chi_0(n, p)$ является каноническим делителем $\chi(n, k)$. О атное утверждение очевидно.

Теорема 6. *Произведение конечного числа первообразных характеров, основные модул которых попарно взаимно просты, есть снова первообразный характер.*

Пусть $\chi(n, k_1), \ldots, \chi(n, k_\nu)$ — первообразные характеры, а

$$\chi(n, k) = \chi(n, k_1) \ldots \chi(n, k_\nu),$$

где $k_1, \ldots, k_\nu$ взаимно просты попарно. Допустим, что $\chi(n, k)$ — производный характер, тогда найдётся такое простое p, что

$$\chi_0(n, p) / \chi(n, k).$$

Пусть p/k_1, т. е. $(p, k_2, \ldots, k_\nu) = 1$. Но мы можем написать, что

$$\chi(n, k) = \chi(n, k_1)\, \chi(n, k_2 \ldots k_\nu),$$

где $(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) = 1$; поэтому по свойству делителей мы будем иметь

$$\chi_0(n, p) / \chi(n, k_1),$$

что противоречит условию.

Пусть теперь $\chi(n, k)$ — любой производный характер; отберём среди всех его канонических делителей все те, которые являются главными характерами. Пусть их произведение равно функции $\chi(n, k')$, а произведение всех остальных канонических делителей обозначим через $\chi(n, k'')$ (если таковых нет, то полагаем $\chi(n, k'') = \chi(n, 1)$). В силу теоремы 6 очевидно, что если $k'' > 1$, то характер $\chi(n, k'')$ — первообразный, ибо он равен произведению тех элементарных делителей, которые не являются главными характерами, а таковые, как было выше замечено, суть первообразные характеры. Итак,

$$\chi(n, k) = \chi_0(n, k')\, \chi(n, k''), \tag{1}$$

где $\chi(n, k'')$ или равно $\chi(n, 1)$, или является первообразным характером.

Докажем теперь, что функцию $\chi(n, k)$ только единственным способом можно представить в форме (1). В самом деле, пусть существует ещё представление

$$\chi(n, k) = \chi_0(n, k_1')\, \chi(n, k_1''),$$

где $\chi(n, k_1'')$ — первообразный характер, $(k_1', k_1'') = 1$. Если бы $k' \neq k_1'$, то среди делителей или k', или k_1' нашлось бы такое простое p, что $p \not/ (k', k_1')$. Без ограничения общности допустим, что p/k'. Но в таком случае p/k_1''. Следовательно, канонический делитель $\chi_0(n, p)$ функции $\chi_0(n, k')$ являлся бы делителем и функции $\chi(n, k_1'')$, что противоречит первообразности этого характера. Значит $k' = k_1'$, $k'' = k_1''$,

$$\chi_0(n, k') = \chi_0(n, k_1'),$$
$$\chi(n, k'') = \chi(n, k_1'').$$

Итак, всякий характер единственным способом представим в форме (1); мы будем говорить, что $\chi(n, k'')$ порождает характер $\chi(n, k)$.

Теорема 7. *Среди характеров, имеющих число k своим модулем, существует только один, который порождён данным первообразным характером.*

В самом деле, пусть имеются два характера $\chi(n)$ и $\tilde{\chi}(n)$, для которых число k является модулем и которые оба порождены данным характером $\chi(n, k_1)$, пусть K — основной модуль $\chi(n)$, а $\tilde{K}$ — основной модуль $\tilde{\chi}(n)$, наконец, пусть

$$\chi(n) = \chi_0(n, k')\chi(n k_1), \quad (k', k_1) = 1,$$
$$\tilde{\chi}(n) = \chi_0(n, k'')\chi(n, k_1), \quad (k'', k_1) = 1.$$

В силу теоремы 2 между основными модулями наших функций имеют место соотношения:

$$K = k' k_1, \quad \tilde{K} = k'' k_1.$$

Пусть простое $p|k'$, т. е. p/K, $p|k$. Но по определению модуля это значит, что $p|\tilde{K}$; т. е. p/k''. Аналогичным образом убеждаемся, что всякий простой делитель числа k'' является и делителем числа k', а так как k' и k'' суть числа, не содержащие точных квадратов, то они должны быть равны, т. е.

$$\chi_0(n, k') = \chi_0(n, k''), \quad \tilde{\chi}(n) = \chi(n).$$

Теорема 8. *Чтобы характер $\chi(n, k)$ был первообразным, необходимо и достаточно, чтобы для всякого $d|k$, $d < k$ существовало целое число a, удовлетворяющее условиям*

$$\chi(a, k) \neq 0,1 \qquad a \equiv 1 \pmod{d}.$$

Докажем сначала необходимость условия. Пусть $\chi(n, k)$ — первообразный характер. Рассмотрим прежде всего такое d, в котором отсутствует хотя бы один простой делитель k;

пусть таковым простым числом будет число p и $k=p^{\alpha}k'$, $p\not| k'$. Очевидно, что

$$d|k'.$$

Следовательно (теорема 3), можно написать:

$$\chi(n, k)=\chi(n, p^{\alpha})\ \chi(n, k');$$

но, в силу предположения, $\chi(n, p^{\alpha})$ — неглавный характер; поэтому найдётся такое число b, что

$$\chi(b, p^{\alpha})\neq 0,1.$$

Далее подберём число a, удовлетворяющее сравнениям:

$$a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ p^{\alpha}),$$

$$a\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ k').$$

Ясно, что

$$\chi(a, k)=\chi(b, p^{\alpha})\ \chi(1, k')\neq 0,1$$

$$a\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ d).$$

Допустим теперь, что все простые делители k входят и в d. Так как $d<k$, то оно не является периодом $\chi(n, k)$; поэтому существует такое число b, что

$$\chi(b+d, k)\neq\chi(b, k).$$

Числа b и $b+d$ должны быть взаимно просты с k, ибо в противном случае они оба имели бы общий делитель с k, что влекло бы за собой равенство

$$\chi(b, k)=\chi(b+d, k)=0,$$

противоречащее определению числа b.

Выберем число a так, чтобы

$$b+d\equiv ab\ (\mathrm{mod}\ k);$$

следовательно,

$$b\equiv ab\ (\mathrm{mod}\ d),$$

$$a\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ d).$$

Кроме того,

$$\chi(b+d, k)=\chi(a, k)\chi(b, k),$$

т. е.

$$\chi(a, k) = \frac{\chi(b+d, k)}{\chi(b, k)} \neq 0,1$$

в силу свойств числа b.

Докажем теперь достаточность условия теоремы. Пусть для каждого делителя d числа k, $d < k$ найдётся такое число a, что

$$\chi(a, k) \neq 0,1, \quad a \equiv 1 \pmod{d}.$$

Допустим, что $\chi(n, k)$ — производный характер; тогда найдётся такое простое число p, что

$$\chi(n, k) = \chi_0(n, p)\,\chi(n, k'), \ \ p \nmid k'.$$

При этом можно написать (теорема 2), что

$$k = pk'.$$

Полагая $d = k'$, мы заключаем, что существует число a, для которого справедливы соотношения

$$\chi(a, k) \neq 0,1, \quad a \equiv 1 \pmod{k'}.$$

А это значит, что

$$\chi(a, k) = \chi_0(a, p)\,\chi(1, k') = \chi_0(a, p) \neq 0,1,$$

что противоречит определению главного характера. Значит $\chi(n, k)$ — первообразный характер.

§ 3. Действительные характеры

В этом параграфе будут указаны некоторые особенности действительных характеров.

Теорема 9. *Основной модуль действительного характера $\chi(n, k)$ всегда имеет вид*:

$$k = 2^{\alpha} P,$$

где $\alpha = 0, 1, 2, 3$, а P равно либ 1, либо нечётному числу, не содержащему точного квадрата (если $P = 1$, то $\alpha > 0$).

Пусть $k = 2^{\alpha} p_1^{\alpha_1} \ldots p_{\lambda}^{\alpha_{\lambda}}$, где p_i — различные нечётные простые делители k. Тогда сам характер может быть представлен в канонической форме

$$\chi(n, k) = \chi(n, 2^\alpha)\ \chi(n, p_1^{\alpha_1})\ \ldots\ \chi(n, p_\lambda^{\alpha_\lambda}). \tag{9.1}$$

Рассмотрим сначала, какие значения может принимать показатель α. Докажем, что α не может быть больше 3. Всякий характер $\chi(n, 2^\alpha)$ имеет модуль, равный $2^{\alpha'}$, где $\alpha' \geqslant 3$. Докажем, что в таком случае число 8 является также периодом $\chi(n, 2^\alpha)$. В самом деле, если $2/n$, то

$$\chi(n+8, 2^\alpha) = \chi(n, 2^\alpha) = 0;$$

если же $2 \not/ n$, то найдётся такое ξ, что

$$n + 8 \equiv n\xi \pmod{2^{\alpha'}}.$$

Значит $\xi \equiv 1 \pmod 8$, т. е. ξ — квадратический вычет по модулю 8. Но, как известно из теории чисел, в этом случае ξ является квадратическим вычетом и по любому модулю, равному $2^{\alpha'}$ для $\alpha' \geqslant 3$. Следовательно, существует такое число η, что

$$\xi \equiv \eta^2 \pmod{2^{\alpha'}}.$$

Но в таком случае

$$\chi(n+8, 2^\alpha) = \chi(n, 2^\alpha)\ \chi(\xi, 2^\alpha) =$$
$$= \chi(n, 2^\alpha)\ \chi^2(\eta, 2^\alpha) = \chi(n, 2^\alpha),$$

т. е. число 8 действительно является периодом функции

$$\chi(n, 2^\alpha) \text{ и } 2^\alpha/8,\ \alpha \leqslant 3.$$

Пусть теперь p — нечётный простой делитель k. Докажем аналогичным же образом, что p — период $\chi(n, p^\alpha)$. В самом деле, если p/n, то

$$\chi(n+p, p^\alpha) = \chi(n, p^\alpha) = 0.$$

Пусть $p \not/ n$; в таком случае найдётся число ξ, удовлетворяющее сравнению

$$n + p \equiv n\xi \pmod{p^\alpha};$$

значит $\xi \equiv 1 \pmod p$, т. е. ξ — квадратический вычет по модулю p. Но, как известно из теории чисел, в этом случае

найдётся такое η, что
$$\xi \equiv \eta^2 \pmod{p^\alpha}.$$
Значит
$$\chi(n+p,\ p^\alpha) = \chi(n,\ p^\alpha)\,\chi(\xi,\ p^\alpha) = \\ = \chi(n, p^\alpha)\,\chi^2(\eta, p^\alpha) = \chi(n, p^\alpha),$$

т. е. число p действительно равно периоду $\chi(n, p^\alpha)$. А это возможно только в том случае, когда $\alpha = 1$. Итак, в каноническом представлении числа k все показатели должны быть подчинены соотношениям

$$\alpha \leqslant 3,\ \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_\lambda = 1,$$
что и требовалось доказать.

Среди чисел, которые могут быть основными модулями действительных характеров, особое значение будут иметь числа, равные основным модулям действительных первообразных характеров. Такие числа мы будем называть фундаментальными числами. В начале § 2 было показано, что фундаментальное число не может иметь вид:

$$k \equiv 2 \pmod 4.$$

Значит, фундаментальными числами могут быть лишь числа вида:
$$k = 2^\alpha P, \tag{9.2}$$
где $\alpha = 0, 2, 3$, а P равно либо 1, либо нечётному числу, которое не содержит точного квадрата (если $P = 1$, то $\alpha > 0$).

Докажем теперь теорему, которая в известном смысле является обращением теоремы 9.

Теорема 10. *Всякое число вида* (9.2) *является фундаментальным числом, причём если* $8 \nmid k$, *то числу* k *соответствует единственный первообразный характер, если же* $8 | k$, *то числу* k *соответствуют два действительных первообразных характера.*

Рассмотрим сначала частные случаи. Пусть $k = 4$. Так как для этого модуля первообразный корень $g = -1$, то первообразный характер получится только тогда, когда

$$\chi(-1,\ 4) = -1,$$

что даёт только единственный характер.

Пусть теперь $k=8$. Как мы видели, если $2 \not| \, n$, то

$$\chi(n,8)=\rho'^{\mu'}\rho''^{\mu''},$$

где $\rho'=\chi(-1,8)$, $\rho''=\chi(5,8)$. Очевидно, что ρ' может принимать в нашем случае только значения 1 и -1, а $\rho''=-1$, ибо в противном случае мы получили бы или главный характер или $\chi(n, 4)$. Оба значения

$$\rho'=1,-1$$

дают неглавные характеры, основные модули которых равны 8. Условимся обозначать их символами:

$$\chi(n, 8), \quad \text{если} \quad \rho'=1$$

и

$$\chi'(n, 8), \quad \text{если} \quad \rho'=-1.$$

Нетрудно видеть, что

$$\chi(n, 8)\,\chi'(n, 8)=\chi(n, 4).$$

Далее пусть $k=p$, где p — нечётное простое число. Обозначим буквой g первообразный корень по модулю p. Очевидно, что

$$\chi(g, p)=-1,$$

ибо в противном случае мы имели бы главный характер. С другой стороны, заметим, что все квадратические вычеты имеют чётные индексы в любой системе индексов, а индексы квадратических невычетов нечётны. Поэтому, если $p \not| \, n$, то

$$\chi(n, p)=(-1)^{\operatorname{ind} n}=\begin{cases} \;\;\,1, & \text{если } n \text{ — квадр. вычет} \\ -1, & \text{если } n \text{ — квадр. невычет.}\end{cases}$$

А это значит, что $\chi(n, p)$ совпадает с обобщённым символом Лежандра.

Наконец, обратимся к общему случаю. Пусть k — любое число вида (2), т. е.

$$k=2^{\alpha}p_1\,\ldots\,p_{\lambda}.$$

Тогда, в силу теоремы 6, функция

$$\chi(n, 2^{\alpha})\;\chi(n, p_1)\,\ldots\,\chi(n, p_{\lambda})$$

должна быть действительным первообразным характером, основной модуль которого равен k. Обратно, всякий действительный первообразный характер, имеющий число k своим основным модулем, распадается на канонические делители вида:

$$\chi(n, 2^\alpha),\ \chi(n, p_1),\ \ldots,\ \chi(n, p_\lambda).$$

Если $8 \nmid k$, то эта система канонических делителей однозначно определена; если же $8/k$, то функция $\chi(n, 2^\alpha)$ может совпадать или с $\chi(n, 8)$, или с $\chi'(n, 8)$, что даёт две разные системы канонических делителей, из которых составляются два разных действительных первообразных характера.

Теорему 10, очевидно, можно формулировать ещё и так: действительный первообразный характер, соответствующий фундаментальному числу k, равен

$$\left(\frac{n}{P}\right), \text{ если } k = P,$$

$$\chi(n, 4)\left(\frac{n}{P}\right), \text{ если } k = 4P,$$

$$\left.\begin{matrix}\chi(n, 8)\\ \chi'(n, 8)\end{matrix}\right\}\left(\frac{n}{P}\right), \text{ если } k = 8P,$$

где $\left(\frac{n}{P}\right)$ — обобщённый символ Якоби.

В тесной связи с теорией действительных характеров естественно рассматривать так называемый символ Кронекера.

Он определяется следующим образом. Пусть число $d \equiv 0$ или $1 \pmod 4$ и не равно точному квадрату. Тогда положим

$$\left(\frac{d}{1}\right) = 1,$$

$$\left(\frac{d}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \text{если } d \text{ чётно,} \\ \left(\frac{2}{|d|}\right), & \text{если } d \text{ нечётно, где } \left(\frac{2}{|d|}\right) \text{ — символ Ле-} \end{cases}$$

жандра.

Если p — нечётное простое число, то

$$\left(\frac{d}{p}\right)=\begin{cases} 0 \text{ для } p/d, \\ \left(\frac{d}{p}\right) \text{для } p\not| \, d, \text{ где } \left(\frac{d}{p}\right) \text{— символ Лежандра.} \end{cases}$$

Если же положительное число $n=p_1p_2\ldots p_k$, то

$$\left(\frac{d}{n}\right)=\left(\frac{d}{p_1}\right)\left(\frac{d}{p_2}\right)\ldots\left(\frac{d}{p_k}\right).$$

Таким образом символ Кронекера будет определён для всех натуральных чисел.

Из определения символа Кронекера следует, что если p — нечётное число, взаимно простое с d, то величина $\left(\frac{d}{n}\right)$ совпадает со значением символа Якоби $\left(\frac{d}{n}\right)$.

Теорема 11. *Символ Кронекера* $\left(\frac{d}{n}\right)$ *совпадает для всех натуральных n со значениями некоторого действительного характера, один из модулей которого равен числу*

$$k=|d|.$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что символ Кронекера удовлетворяет всем условиям теоремы 5. Что касается условий первого и четвёртого этой теоремы, то они справедливы в силу определения. Также непосредственно из определения следует и условие второе, ибо если

$$m=p_1p_2\ldots p_k,$$
$$n=p'_1p'_2\ldots p'_{k'},$$

то

$$\left(\frac{d}{mn}\right)=\left(\frac{d}{p_1}\right)\ldots\left(\frac{d}{p_k}\right)\left(\frac{d}{p'_1}\right)\ldots\left(\frac{d}{p'_{k'}}\right)=\left(\frac{d}{m}\right)\left(\frac{d}{n}\right).$$

Докажем теперь, что

$$\left(\frac{d}{n+k}\right)=\left(\frac{d}{n}\right),$$

где n — любое натуральное число. Пусть, во-первых $(n, k)>1$, т. е. $(n, d) > 1$, а следовательно, и $(n+k, d) > 1$. Поэтому

$$\left(\frac{d}{n+k}\right) = \left(\frac{d}{n}\right) = 0.$$

Пусть теперь $(n, k) = 1$ и k — число нечётное. Пусть $n = 2^\lambda n'$, где n' нечётно. Тогда по определению имеем:

$$\left(\frac{d}{n}\right) = \left(\frac{d}{2}\right)^\lambda \left(\frac{d}{n'}\right) = \left(\frac{2}{k}\right)^\lambda \left(\frac{d}{n'}\right),$$

где $\left(\frac{d}{n'}\right)$ — символ Якоби; следовательно, если положим $d = \varepsilon k$, то будем иметь:

$$\left(\frac{d}{n'}\right) = \varepsilon^{\frac{n'-1}{2}} \left(\frac{k}{n'}\right) = \varepsilon^{\frac{n'-1}{2}} (-1)^{\frac{k-1}{2}\frac{n'-1}{2}} \left(\frac{n}{k}\right).$$

Так как по условию $d \equiv 1 \pmod 4$, то непосредственной проверкой легко убедиться, что равенство

$$\varepsilon^{\frac{n'-1}{2}} (-1)^{\frac{k-1}{2}\frac{n'-1}{2}} = 1$$

всегда справедливо. Поэтому

$$\left(\frac{d}{n}\right) = \left(\frac{2}{k}\right)^\lambda \left(\frac{n'}{k}\right) = \left(\frac{2^\lambda n'}{k}\right) = \left(\frac{n}{k}\right),$$

откуда, опираясь на известные свойства символа Якоби, заключаем, что

$$\left(\frac{d}{n+k}\right) = \left(\frac{n+k}{k}\right) = \left(\frac{n}{k}\right) = \left(\frac{d}{n}\right).$$

Наконец, пусть k — число чётное, $k = 2^\alpha k'$, где k' — нечётное число. По условию $4/d$, т. е. $\alpha \geqslant 2$. Числа n и $n' = n+k$ должны быть в этом случае нечётными. Поэтому величины $\left(\frac{d}{n+k}\right)$ и $\left(\frac{d}{n}\right)$ являются символами Якоби, и следовательно, мы можем писать:

$$\left(\frac{d}{n'}\right) = \left(\frac{2}{n'}\right)^\alpha \varepsilon^{\frac{n'-1}{2}} \left(\frac{k'}{n'}\right) =$$

$$= (-1)^{\alpha\frac{n'^2-1}{8}} \varepsilon^{\frac{n'-1}{2}} (-1)^{\frac{n'-1}{2}\frac{k'-1}{2}} \left(\frac{n'}{k'}\right) =$$

$$= (-1)^{\alpha\frac{n'^2-1}{8}} \varepsilon^{\frac{n'-1}{2}} (-1)^{\frac{n'-1}{2}\frac{k'-1}{2}} \left(\frac{n}{k'}\right),$$

где опять положено, что $d = \varepsilon k$. Аналогично имеем:

$$\left(\frac{d}{n}\right) = (-1)^{\alpha\frac{n^2-1}{8}} \varepsilon^{\frac{n-1}{2}} (-1)^{\frac{n-1}{2}\frac{k'-1}{2}} \left(\frac{n}{k'}\right).$$

Так как $4/k$, то $n' \equiv n \pmod 4$ и поэтому

$$\frac{n'-1}{2} \equiv \frac{n-1}{2} \pmod 2,$$

$$\varepsilon^{\frac{n'-1}{2}} (-1)^{\frac{n'-1}{2}\frac{k'-1}{2}} = \varepsilon^{\frac{n-1}{2}} (-1)^{\frac{n-1}{2}\frac{k'-1}{2}}.$$

Далее, если $\alpha = 2$, то $(-1)^{\alpha\frac{n'^2-1}{8}} = (-1)^{\alpha\frac{n^2-1}{8}} = 1$; если же $\alpha \geqslant 3$, то $n' \equiv n \pmod 8$, т. е.

$$\frac{n'^2-1}{8} \equiv \frac{n^2-1}{8} \pmod 2, \quad (-1)^{\alpha\frac{n'^2-1}{8}} = (-1)^{\alpha\frac{n^2-1}{8}}.$$

Значит всегда

$$\left(\frac{d}{n+k}\right) = \left(\frac{d}{n'}\right) = \left(\frac{d}{n}\right).$$

Все условия теоремы 5 выполнены.

Среди чисел d, определённых выше, особый интерес для приложений имеют такие, которые удовлетворяют дополнительным условиям:

1. d не содержит точного нечётного квадрата.
2. Если d чётно, то $d \equiv 8$ или $12 \pmod{16}$.

Такие числа d мы будем называть **фундаментальными дискриминантами**. Если далее положим $k = |d|$, то непосредственная проверка убеждает нас в том, что число k всегда будет фундаментальным числом. Верно и обратное: если k — фундаментальное число, то $\pm k$ при соответствующем выборе знака равно фундаментальному дискриминанту.

Теорема 12. *Если d — фундаментальный дискриминант, то символ $\left(\frac{d}{n}\right)$ для всех натуральных n совпадает с действительным первообразным характером, основной модуль k которого равен $|d|$, причём между числами d и k имеет место соотношение*

$$d = \chi(-1, k) \cdot k. \tag{12.1}$$

Покажем сначала, что каждому первообразному действительному характеру $\chi(n, k)$ можно поставить в однозначное соответствие символ Кронекера $\left(\frac{d}{n}\right)$, где d определяется условием (12.1).

В силу следствия теоремы 10 имеет место равенство

$$\chi(-1, k)=\begin{cases} (-1)^{\frac{P-1}{2}}, & \text{если } k=P, \\ -(-1)^{\frac{P-1}{2}}, & \text{если } k=4P, \\ \rho'(-1)^{\frac{P-1}{2}}, & \text{если } k=8P, \end{cases}$$

где $\rho'=1$ или -1. Далее простой проверкой можно убедиться в том, что число

$$d=\chi(-1, k)k$$

всегда равно фундаментальному дискриминанту. В самом деле, в силу данного выше выражения для $\chi(-1, k)$ имеем: если $k=P$,

то $d=\chi(-1, P)\cdot P=(-1)^{\frac{P-1}{2}}\cdot P\equiv 1 \pmod 4$,
если $k=4P$,

то $d=\chi(-1, 4P)\cdot 4P=-(-1)^{\frac{P-1}{2}}\cdot 4P\equiv 12 \pmod{16}$,
если $k=8P$,

то $d=\chi(-1, 8P)\cdot 8P\equiv 8 \pmod{16}$.

Поставим теперь в соответствие характеру $\chi(n, k)$ символ $\left(\frac{d}{n}\right)$, для которого d определяется равенством (12.1).

Наоборот, если дан фундаментальный дискриминант d, то, как мы уже замечали, число $k=|d|$ будет фундаментальным числом, т. е. ему соответствует некоторый действительный первообразный характер $\chi(n, k)$. Докажем, что для этого характера справедливо равенство (12.1).

Если $k=P$ или $4P$, то члену k принадлежит только один действительный первообразный характер $\chi(n, k)$, причём, как выше было замечено, число

$$d_1=\chi(-1, k)k$$

равно фундаментальному дискриминанту. Но из двух чисел k и $-k$ только одно может быть равно фундаментальному дискриминанту; значит

$$d_1 = d.$$

Если же $k \equiv 8 \pmod{16}$, то в этом случае существуют два действительных первообразных характера, значения которых при $n = -1$ отличаются знаком. Из этих двух характеров всегда можно выбрать такой, который удовлетворит условию (12.1). Этот характер мы и поставим в соответствие $\left(\frac{d}{n}\right)$. Итак, между действительными первообразными характерами и символами $\left(\frac{d}{n}\right)$ установлено однозначное соответствие. Докажем теперь, что соответствующие друг другу функции $\chi(n, d)$ и $\left(\frac{d}{n}\right)$ совпадают тождественно друг с другом для всех натуральных n. Так как эти функции вполне мультипликативны, то для установления их тождества достаточно показать, что

$$\chi(q, |d|) = \left(\frac{d}{q}\right)$$

для любого простого q.

Последнее равенство очевидно для $q|d$; поэтому в дальнейшем мы будем полагать, что $q \nmid d$. Разберём частные случаи.

1. $k = |d| = P$ — нечётное число; использовав теорему 10, условие (12.1) и применив закон взаимности для символов Якоби, имеем:

$$\left(\frac{d}{q}\right) = \left(\frac{\chi(\ 1)}{q}\right)\left(\frac{P}{q}\right) = (-1)^{\frac{P-1}{2}\,\frac{q-1}{2}}\left(\frac{P}{q}\right) = \left(\frac{q}{P}\right) = \chi(q, k)$$

для q — нечётного. Если же $q = 2$, то по определению имеем

$$\left(\frac{d}{2}\right) = \left(\frac{2}{k}\right) = \chi(2, k).$$

2. $k = 4P$, q — нечётное. Рассуждая аналогично, получаем:

$$\left(\frac{d}{q}\right) = \left(\frac{\chi(-1)}{q}\right)\left(\frac{P}{q}\right) = \left(\frac{-1}{q}\right)(-1)^{\frac{P-1}{2}\,\frac{q-1}{2}}\left(\frac{P}{q}\right) =$$
$$= \chi(q, 4)\left(\frac{q}{P}\right) = \chi(q, k).$$

3. $k=8P$, q нечётное. Опять заключаем, что

$$\left(\frac{d}{q}\right)=\left(\frac{\chi(-1)}{q}\right)\left(\frac{8P}{q}\right)=\left(\frac{\rho'}{q}\right)\left(\frac{2}{q}\right)(-1)^{\frac{P-1}{2}\frac{q-1}{2}}\left(\frac{P}{q}\right)=$$
$$=\rho'^{\mu'}(-1)^{\mu''}\left(\frac{q}{P}\right)=$$
$$=\chi(q,8)\left(\frac{q}{P}\right)=\chi(q,k),$$

ибо, как нетрудно видеть, справедливы равенства:

$$\left(\frac{\rho'}{q}\right)=\rho'^{\mu'},\quad (-1)^{\mu''}=\left(\frac{2}{q}\right),\quad \rho'^{\mu'}(-1)^{\mu''}=\chi(q,8).$$

Итак, во всех случаях требуемое равенство доказано.

Лемма I, 2. *Если $\chi(n,p^\alpha)$ и $\chi(n,p^{\alpha'})$ — два действительных характера и p — простое число, то произведение*

$$\chi(n,p^\alpha)\,\chi(n,p^{\alpha'})$$

равно главному характеру или единичной функции, тогда и только тогда, когда

$$\chi(n,p^\alpha)=\chi(n,p^{\alpha'}).$$

В самом деле, пусть $\chi(n,p^\alpha)\neq\chi(n,p^{\alpha'})$. Это значит, что существует такое число n, что

$$(n,p)=1,\quad \chi(n,p^{\alpha'})\neq\chi(n,p^{\alpha'}),$$

т. е.

$$\chi(n,p^\alpha)\,\chi(n,p^{\alpha'})=-1,$$

а это и значит, что $\chi(n,p^\alpha)\cdot\chi(n,p^{\alpha'})$ не является главным характером.

Теорема 13. *Пусть $\chi(n,k)$ и $\chi(n,k_1)$ суть два действительных первообразных характера, которые не тождественны между собой; тогда функция*

$$\chi(n,k)\,\chi(n,k_1)$$

не может быть главным характером. Далее, если $\chi(n,k_2)$ обозначает тот первообразный характер, который порождает упомянутое произведение, то

$$1+\chi(n,k)+\chi(n,k_1)+\chi(n,k_2)\geqslant 0.$$

Выше мы видели, что

$$k = 2^{\alpha}P, \quad k_1 = 2^{\alpha_1}P_1,$$

где α, $\alpha_1 = 0, 2, 3$; P и P_1 — нечётные числа, не содержащие точных квадратов. Полагаем:

$$d = (P, P_1) \quad P = dP', \quad P_1 = dP_1'.$$

В силу сказанного выше числа d, P' и P_1' взаимно просты попарно. Поэтому

$$\chi(n, k) = \chi(n, 2^{\alpha})\,\chi(n, d)\,\chi(n, P'),$$

$$\chi(n, k_1) = \chi(n, 2^{\alpha_1})\,\chi(n, d)\,\chi(n, P_1'),$$

$$\chi(n, k)\,\chi(n, k_1) = \chi(n, 2^{\alpha_2}) \prod_{p/d} \chi_0(n, P) \prod_{p/P'P_1'} \chi(n, P),$$

где

$$\chi(n, 2^{\alpha_2}) = \chi(n, 2^{\alpha})\,\chi(n, 2^{\alpha_1}).$$

Соберём теперь вместе все те канонические делители функции $\chi(n, k)\,\chi(n, k_1)$, которые суть главные характеры; в результате получим такое тождество:

$$\chi(n, k)\,\chi(n, k_1) = \chi_0(n, k')\,\chi(n, k_2). \tag{13.1}$$

Докажем теперь, что характер $\chi(n, k_2)$ не может быть единичной функцией. Рассмотрим два возможных случая.

Пусть, во-первых, $\chi(n, 2^{\alpha}) \neq \chi(n, 2^{\alpha_1})$. Тогда, в силу предыдущей леммы, функция $\chi(n, 2^{\alpha_2})$ не может быть главным характером и единичной функцией, а следовательно, не может быть таковым и характер $\chi(n, k_2)$, ибо $\chi(n, 2^{\alpha_2})$ является его делителем.

Пусть теперь $\chi(n, 2^{\alpha}) = \chi(n, 2^{\alpha_1})$, т. е. $\chi(n, 2^{\alpha_2})$ — главный характер или единичная функция. В таком случае отлична от единичной функции одна из функций $\chi(n, P')$ или $\chi(n, P_1')$, ибо в противном случае имело бы место тождество $\chi(n, k) = \chi(n, k_1)$. Следовательно, отлично от единичной функции и произведение

$$\prod_{P/P'P_1'} \chi(n, P) = \chi(n, P')\,\chi(n, P_1'),$$

и тем более функция $\chi(n, k_2)$, делителем которой является это произведение.

Итак, функция $\chi(n, k_2)$ всегда отлична от единичной, но, по построению, она может быть или единичной функцией, или произведением первообразных канонических делителей; поэтому функция $\chi(n, k_2)$ всегда равна первообразному характеру.

Возвращаемся к тождеству (1); оно показывает, что функция $\chi(n, k)\chi(n, k_1)$ не может быть главным характером, ибо в противном случае все канонические делители этого произведения были бы главными характерами, что противоречит первообразности характера $\chi(n, k_2)$.

Наконец, заметим, что если $(n, k')=1$, то, в силу тождества (13.1),

$$\begin{aligned}1+\chi(n, k)+\chi(n, k_1)+\chi(n, k_2)&=\\=1+\chi(n, k)+\chi(n, k_1)+\chi(n, k)\chi(n, k_1)&=\\=(1+\chi(n, k))(1+\chi(n, k_1))&\geqslant 0.\end{aligned}$$

Если же $(n, k')>1$, то заметим прежде всего, что

$$k'=\begin{cases} d, & \text{если } \chi(n, 2^{\alpha_2}) \neq \chi_0(n, 2),\\ 2d, & \text{если } \chi(n, 2^{\alpha_2})=\chi_0(n, 2).\end{cases}$$

А это значит, что всегда

$$k'/(k, k_1);$$

поэтому

$$\chi(n, k)=\chi(n, k_1)=0,$$

т. е.

$$1+\chi(n, k)+\chi(n, k_1)+\chi(n, k_2)=1+\chi(n, k_2)\geqslant 0.$$

§ 4. Некоторые суммы, содержащие характеры

В этом параграфе будут рассмотрены некоторые суммы, содержащие характеры, которые все имеют общий модуль k. Эти суммы имеют большое значение в приложениях теории характеров.

Условимся о некоторых обозначениях. Пусть дано натуральное число k. Рассмотрим все характеры $\chi(n)$, для которых число k является модулем. Как мы видели выше, таких различных характеров будет ровно $h=\varphi(k)$.

Пусть символ

$$\sum_{(\chi)}$$

обозначает суммирование, распространённое на всю указанную совокупность характеров. Символ же

$$\sum_{(n)}$$

пусть обозначает суммирование, распространённое на полную систему вычетов по модулю k.

Теорема 14. *Всегда имеет место равенство*

$$\sum_{(n)} \chi(n) = \begin{cases} h, & \text{если } \chi = \chi_0, \\ 0, & \text{если } \chi \neq \chi_0. \end{cases}$$

Если $\chi(n)$ — *неглавный характер, то*

$$\left| \sum_{n=u}^{v} \chi(n) \right| \leqslant \frac{h}{2},$$

где u *и* v — *произвольные целые числа.*

Для главного характера $\chi_0(n)$ имеем:

$$\sum_{(n)} \chi_0(n) = \sum_{(n,k)=1} 1 = \varphi(k) = h.$$

Если же $\chi(n)$ — неглавный характер, то найдётся такое число a, что $\chi(a) \neq 0,1$. Очевидно, что $(a,k) = 1$.

Полагаем

$$n \equiv an' \pmod{k}.$$

Так как n и n' одновременно пробегают полную систему вычетов, то

$$\sum_{(n)} \chi(n) = \sum_{(n')} \chi(an') = \chi(a) \sum_{(n')} \chi(n') = \chi(a) \sum_{(n)} \chi(n),$$

т. е.

$$(1 - \chi(a)) \sum_{(n)} \chi(n) = 0, \quad \sum_{(n)} \chi(n) = 0.$$

Пусть теперь даны два целых числа u и v. Без ограничения общности полагаем, что $u<v$. Если $v-u+1 \geqslant k$, то из суммы

$$\sum_{n=u}^{v} \chi(n)$$

можно удалить все слагаемые $\chi(u), \chi(u+1), \ldots, \chi(u+k-1)$, ибо по предыдущему

$$\sum_{n=u}^{u+k-1} \chi(n)=0.$$

Если после выполнения этой операции число слагаемых всё же ещё $\geqslant k$, то подобную же операцию можно проделать ещё раз, и т. д. В конце концов число слагаемых сделается меньше k. Поэтому для доказательства нашей теоремы достаточно рассмотреть лишь случай, когда $v-u<$ $<k-1$. А так как, с другой стороны,

$$\sum_{n=u}^{u+k-1} \chi(n)=0, \quad \sum_{n=u}^{u+k-1}|\chi(n)|=h,$$

то

$$\left|\sum_{n=u}^{v} \chi(n)\right|=\left|\sum_{n=v+1}^{u+k-1} \chi(n)\right| \leqslant \min (\nu, h-\nu) \leqslant \frac{h}{2},$$

где ν — число тех слагаемых $\chi(n)$ в первой сумме, которые отличны от 0.

Теорема 15. *Всегда имеет место равенство*

$$\sum_{(\chi)} \chi(a)= \begin{cases}h, & \textit{если } a \equiv 1 \pmod k, \\ 0, & \textit{если } a \not\equiv 1 \pmod k.\end{cases}$$

Если $a \equiv 1 \pmod k$, то

$$\sum_{(\chi)} \chi(a)=\sum_{(\chi)} 1=h.$$

Далее пусть $(a, k)>1$; тогда

$$\sum_{(\chi)} \chi(a)=\sum_{(\chi)} 0=0.$$

Наконец, пусть

$$(a,k) = 1; \quad a \not\equiv 1 \pmod{k}, \quad k = 2^\alpha p_1^{\alpha_1} \ldots p_\nu^{\alpha_\nu}.$$

Тогда можно представить заданный характер $\chi(n)$ в форме

$$\chi(n) = \chi'(n)\chi_1(n)\ldots\chi_\nu(n),$$

где функции $\chi'(n), \chi_1(n), \ldots, \chi_\nu(n)$ имеют своими модулями соответственно числа 2^α, $p_1^{\alpha_1}, \ldots, p_\nu^{\alpha_\nu}$.

Далее в § 1 было доказано, что если $(a, k) = 1$, то

$$\chi'(a) = \rho'^{\mu'}\rho''^{\mu''},$$

$$\chi_i(a) = \rho_i^{\mu_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, \nu,$$

где числа $\rho', \rho'', \rho_1, \ldots, \rho_\nu, \mu', \mu'', \mu_1, \ldots, \mu_\nu$ имеют такое же значение, как и в § 1. Следовательно,

$$\chi(a) = \rho'^{\mu'}\rho''^{\mu''}\rho_1^{\mu_1}\ldots\rho_\nu^{\mu_\nu}.$$

Чтобы теперь вычислить $\sum\limits_{(\chi)} \chi(n)$, достаточно только, как это опять было выяснено в § 1, заставить все величины $\rho', \rho'', \rho_1, \ldots, \rho_\nu$ независимо друг от друга пробежать все корни соответственно уравнений

$$x^{h'} = 1; \ x^{h''} = 1, \ x^{h_1} = 1, \ldots, x^{h_\nu} = 1.$$

Поэтому мы получаем:

$$\sum_{(\chi)} \chi(a) = \sum_{(\rho')} \rho'^{\mu'} \sum_{(\rho'')} \rho''^{\mu''} \sum_{(\rho_1)} \rho_1^{\mu_1} \ldots \sum_{(\rho_\nu)} \rho_\nu^{\mu_\nu},$$

где символ $\sum\limits_{(\rho')}$ обозначает суммирование по всем корням уравнения $\rho'^{h'} = 1$ и т. д.

В нашем случае $a \not\equiv 1 \pmod{k}$; значит, один из показателей μ', μ'', $\mu_1, \ldots, \mu_\nu$ не делится на соответствующее ему число из системы показателей h', h'', $h_1, \ldots, h_\nu$. Не нарушая общности, положим, что $\mu' \not\equiv 0 \pmod{h'}$; тогда

$$\sum_{(\rho')} \rho'^{\mu'} = \sum_{a=0}^{h'-1} e^{2\pi i \frac{a\mu'}{h'}} = \frac{e^{2\pi i\mu'} - 1}{e^{2\pi i \frac{\mu'}{h'-1}}} = 0,$$

т. е.

$$\sum_{(l)} \chi(a) = 0.$$

Следствие. Пусть $(l, k) = 1$, тогда

$$\sum_{(\chi)} \frac{\chi(a)}{\chi(l)} = \begin{cases} h, & \text{если } a \equiv l \pmod{k}, \\ 0, & \text{если } a \not\equiv l \pmod{k}. \end{cases}$$

В самом деле, определим a' так, что $a \equiv a'l \pmod{k}$; тогда имеем:

$$a' \begin{cases} \equiv 1 \pmod{k}, & \text{если } a \equiv l \pmod{k}, \\ \not\equiv 1 \pmod{k}, & \text{если } a \not\equiv l \pmod{k}, \end{cases}$$

и следовательно, в силу предыдущей теоремы получим:

$$\sum_{(l)} \frac{\chi(a)}{\chi(l)} = \sum_{(\chi)} \frac{\chi(a'l)}{\chi(l)} = \sum_{(\chi)} \chi(a') = \begin{cases} h, & \text{если } a \equiv l \pmod{k}, \\ 0, & \text{если } a \not\equiv l \pmod{k}. \end{cases}$$

В дальнейшем будем рассматривать суммы вида:

$$S(\xi) = \sum_{(n)} \chi(n) \xi^n,$$

где ξ — корень уравнения $x^k = 1$, n пробегает полную систему вычетов по модулю k. Если ξ — первообразный корень уравнения $x^k = 1$, а ξ_1 — любой корень того же уравнения, то, как известно, найдётся такое натуральное число a, что

$$\xi_1 = \xi^a.$$

Теорема 16. *Пусть $\chi(n, k)$ — первообразный характер, ξ — первообразный корень уравнения $x^k = 1$, ξ_1 — любой корень того же уравнения. Тогда*

$$S(\xi_1) = \bar{\chi}(a) S(\xi),$$

где

$$\xi_1 = \xi^a.$$

Пусть сначала $(a, k) = 1$; тогда существует такое a', что $aa' \equiv 1 \pmod{k}$. Полагаем

$$m = an;$$

тогда

$$n \equiv a'm \pmod{k}.$$

Переменные m и n, как известно, пробегают одновременно полные системы вычетов по $\bmod\, k$.

Следовательно,

$$S(\xi_1) = \sum_{(n)} \chi(n)\xi_1^n = \sum_{(n)} \chi(n)\,\xi^{na} = \sum_{(m)} \chi(a'm)\,\xi^m =$$
$$= \chi(a') \sum_{(m)} \chi(m)\,\xi^m = \bar{\chi}(a)\,S(\xi),$$

ибо

$$\chi(a') = (\chi(a))^{-1} = \bar{\chi}(a).$$

Пусть далее $(a, k) > 1$; так как в этом случае $\bar{\chi}(a) = 0$, то достаточно показать, что $S(\xi_1) = 0$. В нашем случае ξ_1 — непервообразный корень уравнения $x^k = 1$. Пусть ξ_1 — корень степени $k' < k$; известно, что k'/k. В силу теоремы 8 найдётся число a', удовлетворяющее условиям:

$$\chi(a', k) \neq 0,\ 1, \quad a' \equiv 1 \pmod{k'}.$$

Следовательно, $(a', k) = 1$; положим

$$n \equiv a'm \pmod{k}.$$

Число m пробегает одновременно с n полную систему вычетов по $\bmod\, k$; значит

$$S(\xi_1) = \sum_{(n)} \chi(n)\,\xi_1^n = \sum_{(m)} \chi(a'm)\,\xi_1^{a'm} =$$
$$= \chi(a') \sum_{(m)} \chi(m)\,\xi_1^m = \chi(a')\,S(\xi_1),$$

т е.

$$(1 - \chi(a'))\,S(\xi_1) = 0; \quad S(\xi_1) = 0.$$

Теорема 17. *Пусть относительно* $\chi(n, k)$, *выполнены те же требования, что и в теореме* 16; *тогда*

$$|S(\xi)| = \begin{cases} 0, & \text{если } \xi \text{ — непервообразный корень уравнения } x^k = 1, \\ \sqrt{k}, & \text{если } \xi \text{ — первообразный корень уравнения } x^k = 1. \end{cases}$$

Пусть ξ — непервообразный корень; значит $\xi = e^{2\pi i \frac{a}{k}}$, причём $(a, k) > 1$. Но в таком случае $\overline{\chi}(a) = 0$. С другой стороны, в силу теоремы 16, можно написать:

$$S(\xi) = \overline{\chi}(a)\, S\left(e^{\frac{2\pi i}{k}}\right), \text{ т. е. } S(\xi) = 0.$$

Если же ξ — первообразный корень, то $(a, k) = 1$, значит

$$S(\xi^m) = \overline{\chi}(m)\, S(\xi),$$

т. е.

$$\sum_{m=0}^{k-1} |S(\xi^m)|^2 = h\,|S(\xi)|^2. \tag{17 1}$$

С другой стороны,

$$\sum_{m=0}^{k-1} |S(\xi^m)|^2 = \sum_{m=0}^{k-1} \sum_{n=0}^{k-1} \chi(n)\, \xi^{mn} \sum_{n'=0}^{k-1} \overline{\chi}(n')\, \xi^{-mn'} =$$
$$= \sum_{n=0}^{k-1} \sum_{n'=0}^{k-1} \chi(n)\, \overline{\chi}(n') \sum_{m=0}^{k-1} \xi^{m(n-n')}. \tag{17.2}$$

Но ξ — первообразный корень; поэтому, если $n \neq n'$, то

$$\xi^{n-n'} \neq 1;$$

следовательно,

$$\sum_{m=0}^{k-1} \xi^{m(n-n')} = \begin{cases} k, & \text{если } n = n', \\ 0, & \text{если } n \neq n'. \end{cases} \tag{17.3}$$

Равенства (17.1), (17.2) и (17.3) дают нам:

$$h\,|S(\xi)|^2 = k \sum_{n=0}^{k-1} \chi(n)\, \overline{\chi}(n) = kh,$$

т. е.

$$|S(\xi)|^2 = k, \quad |S(\xi)| = \sqrt{k}.$$

Теорема доказана.

Положим теперь

$$\tau(\chi) = \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{n=0}^{k-1} \chi(n)\, e^{\frac{2\pi i n}{k}}.$$

Во всём дальнейшем изложении этого параграфа мы будем предполагать, что $\chi(n, k)$ — первообразный характер, основной модуль которого равен k. Легко далее видеть, что, в силу периодичности функций $\chi(n, k)$ и $e^{2\pi i \frac{n}{k}}$, можно написать:

$$\tau(\chi) = \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{(n)} \chi(n) e^{2\pi i \frac{n}{k}},$$

где n пробегает любую полную систему вычетов по $\operatorname{mod} k$. В силу теоремы 16 имеем также:

$$S(\xi) = \tau(\chi) \sqrt{k}\, \overline{\chi}(a), \tag{17.3'}$$

где $\xi = e^{2\pi i \frac{a}{k}}$. В силу же теоремы 17 имеет место равенство

$$|\tau(\chi)| = 1. \tag{17.4}$$

В настоящем параграфе мы найдём истинное значение $\tau(\chi)$ для действительных характеров, но для этого необходимо установить некоторые вспомогательные предложения из анализа.

Л е м м а I, 3. *Пусть $f(x)$ — функция, непрерывная вместе со своими производными* 1 *и* 2-*го порядков внутри отрезка* $0 \leqslant x \leqslant 1$; тогда

$$\frac{f(0) + f(1)}{2} = \lim_{N \to \infty} \sum_{m=-N}^{N} \int_0^1 f(\alpha)\, e^{2\pi i m \alpha}\, d\alpha,$$

причём $f(\alpha)$ может принимать и комплексные значения.

Предположим сначала, что $f(\alpha)$ принимает только действительные значения; как известно из анализа, функцию $f(x)$, удовлетворяющую условиям теоремы, можно разложить в ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos 2\pi m x + b_m \sin 2\pi m x, \tag{1}$$

где

$$0 < x < 1, \quad a_m = 2\int_0^1 f(\alpha)\cos 2\pi m\alpha\, d\alpha;$$

$$b_m = 2\int_0^1 f(\alpha)\sin 2\pi m\alpha\, d\alpha.$$

Кроме того известно, что первая часть равенства (1) даёт в пределе при $x \to 0$ величину

$$\frac{f(1)+f(0)}{2};$$

значит

$$\frac{f(1)+f(0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m.$$

Заметим далее, что выражения для a_m и b_m имеют смысл при любых целых m, и, кроме того,

$$a_{-m} = a_m; \quad b_{-m} = b_m.$$

Поэтому последнее равенство можно переписать так:

$$\frac{f(1)+f(0)}{2} = \frac{1}{2}\left(a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m + \sum_{m=-\infty}^{-1} a_m\right) + \frac{i}{2}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} b_m =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m + i\sum_{m=-\infty}^{+\infty} b_m\right) =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\int_0^1 f(\alpha)(\cos 2\pi m\alpha + i\sin 2\pi m\alpha)\, d\alpha =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\sum_{m=-N}^{N}\int_0^1 f(\alpha)\, e^{2\pi i m\alpha}\, d\alpha.$$

Если же $f(x)$ принимает и комплексные значения, то доказываемое тождество тотчас же получается в силу аддитивности обеих частей этого тождества относительно $f(x)$ и в силу справедливости его отдельно для действительной и мнимой частей $f(x)$.

В дальнейшем мы будем рассматривать суммы вида:

$$G(n)=\sum_{s=0}^{n-1} e^{2\pi i \frac{s^2}{n}}.$$

Эти суммы носят название сумм Гаусса; Гаусс первый нашёл точное значение $G(n)$.

Лемма I, 4. *Число* $G(n)=\dfrac{\sqrt{n}(1+i)(1+i^{-n})}{2}$

для любого натурального $n\geqslant 1$.

Очевидно, что

$$G(n)=\sum_{s=0}^{n-1} e^{2\pi i \frac{s^2}{n}}=\sum_{m=0}^{n-1}\frac{e^{2\pi i \frac{s^2}{n}}+e^{2\pi i \frac{(s+1)^2}{n}}}{2}. \tag{1}$$

Полагаем в лемме I, 3

$$f_s(x)=e^{2\pi i \frac{(s+x)^2}{n}}.$$

Тогда, в силу этой леммы и равенства (1), имеем:

$$G(n)=\sum_{s=0}^{n-1}\frac{f_s(0)+f_s(1)}{2}=\sum_{s=0}^{n-1}\lim_{N\to\infty}\sum_{m=-N}^{N}\int_0^1 f_s(\alpha)\,e^{2\pi i m\alpha}\,d\alpha=$$

$$=\sum_{s=0}^{n-1}\lim_{N\to\infty}\sum_{m=-N}^{N}\int_0^1 e^{2\pi i\left(\frac{(s+\alpha)^2}{n}+m\alpha\right)}\,d\alpha.$$

В последнем интеграле делаем подстановку $y=s+\alpha$ и получаем:

$$G(n)=\sum_{s=0}^{n-1}\lim_{N\to\infty}\sum_{m=-N}^{N}\int_s^{s+1} e^{2\pi i\left(\frac{y^2}{n}+my\right)}\,dy=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\sum_{m=-N}^{N}\int_0^n e^{2\pi i\left(\frac{y^2}{n}+my\right)}\,dy.$$

Полагаем далее

$$z=\frac{y}{\sqrt{n}}+\frac{m\sqrt{n}}{2}.$$

Следовательно,

$$\frac{y^2}{n}+my=z^2-\frac{m^2n}{4}$$

и значит

$$G(n)=\sqrt{n}\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{-2\pi i\frac{m^2n}{4}}\int\limits_{\frac{m}{2}\sqrt{n}}^{\left(\frac{m}{2}+1\right)\sqrt{n}}e^{2\pi iz^2}\,dz=$$

$$=\sqrt{n}\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\mu\sqrt{n}}^{(\mu+1)\sqrt{n}}e^{2\pi iz^2}\,dz+\sqrt{n}\,i^{-n}\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\left(\mu-\frac{1}{2}\right)\sqrt{n}}^{\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\sqrt{n}}e^{2\pi iz^2}\,dz=$$

$$=\sqrt{n}\,(1+i^{-n})\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{2\pi iz^2}\,dz.$$

Полагая в последнем равенстве $n=1$, получим:

$$1=G(1)=(1-i)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{2\pi iz^2}\,dz,$$

т. е.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{2\pi iz^2}\,dz=\frac{1}{1-i}=\frac{1+i}{2},$$

значит

$$G(n)=\frac{\sqrt{n}\,(1+i)(1+i^{-n})}{2}.$$

Лемма I, 5. (Закон взаимности действительных характеров.) *Пусть* $\chi(n, k_1)$ и $\chi(n, k_2)$ — *два первообразных действительных характера, основные модули которых соответственно равны* k_1 и k_2; *пусть далее* $(k_1, k_2)=1$; *тогда*

$$\chi_1(k_2)\,\chi_2(k_1)=\chi_1(\chi_2(-1)).$$

Из двух чисел k_1 и k_2 одно должно быть нечётным; пусть k_1 — нечётно. Так как по условию k_1 и k_2 суть фундаментальные числа, то по теореме 10 они должны иметь вид:

$$k_1 = P_1; \quad k_2 = 2^\alpha P_2,$$

где P_1 и P_2 — нечётные числа, не содержащие точных квадратов; $\alpha = 0, 2, 3$. Далее, в силу той же теоремы 10, имеем:

$$\chi_1(n) = \left(\frac{n}{k_1}\right),$$

$$\chi_2(n) = \chi(n, 2^\alpha)\left(\frac{n}{P_2}\right).$$

Значит

$$\chi_1(k_2)\,\chi_2(k_1) = \left(\frac{2^\alpha P_2}{k_1}\right)\chi(k_1, 2^\alpha)\cdot\left(\frac{k_1}{P_2}\right) =$$

$$= \left(\frac{2}{k_1}\right)^\alpha \chi(k_1, 2^\alpha)\left(\frac{P_2}{k_1}\right)\left(\frac{k_1}{P_2}\right)\ldots \tag{1}$$

Но, в силу взаимности символов Якоби, имеем:

$$\left(\frac{P_2}{k_1}\right)\left(\frac{k_1}{P_2}\right) = (-1)^{\frac{k_1-1}{2}\,\frac{P_2-1}{2}}. \tag{2}$$

Пусть далее

$$k_1 \equiv (-1)^{\mu'} 5^{\mu''} \pmod{2^\alpha}.$$

Простой проверкой нетрудно установить справедливость равенства

$$\left(\frac{2}{k_1}\right) = (-1)^{\mu''}. \tag{3}$$

С другой стороны,

$$\chi(k_1, 2^\alpha) = \left(\chi(-1, 2^\alpha)\right)^{\mu'}\left(\chi(5, 2^\alpha)\right)^{\mu''};$$

но $\chi(5, 4) = 1$, если же $\alpha = 3$, то, как было выяснено в § 3,

$$\chi(5, 8) = \chi'(5, 8) = (-1)^{\mu''}.$$

Значит во всех случаях имеем:

$$\chi(k_1, 2^\alpha) = \left(\chi(-1, 2^\alpha)\right)^{\mu'}(-1)^{\alpha\mu''}. \tag{4}$$

Сопоставляя равенства (1), (2), (3) и (4), заключаем, что

$$\chi_1(k_2)\chi_2(k_1) = (-1)^{\alpha\mu''}\left(\chi(-1, 2^\alpha)\right)^{\mu'} \times$$

$$\times(-1)^{\alpha\mu''}(-1)^{\frac{k_1-1}{2}\frac{P_2-1}{2}} = \left(\chi(-1, 2^\alpha)\right)^{\mu'}(-1)^{\frac{k_1-1}{2}\frac{P_2-1}{2}}. \quad (5)$$

С другой стороны,

$$\chi_1(\chi_2(-1)) = \chi_1\left(\chi(-1, 2^\alpha)\left(\frac{-1}{P_2}\right)\right) =$$

$$= \left(\frac{\chi(-1, 2^\alpha)}{k_1}\right)\left(\frac{(-1)^{\frac{P_2-1}{2}}}{k_1}\right) = \left(\chi(-1, 2^\alpha)\right)^{\frac{k_1-1}{2}}(-1)^{\frac{k_1-1}{2}\frac{P_2-1}{2}} =$$

$$= \left(\chi(-1, 2^\alpha)\right)^{\mu'}(-1)^{\frac{k_1-1}{2}\frac{P_2-1}{2}}, \quad (6)$$

ибо

$$\mu' = \frac{k_1-1}{2}.$$

Равенства (5) и (6) дают доказательство леммы.

Теорема 18. *Пусть $\chi(n, k)$ — действительный первообразный характер; тогда*

$$\tau(\chi) = \begin{cases} 1, & \textit{если } \chi(-1) = 1, \\ i, & \textit{если } \chi(-1) = -1. \end{cases}$$

Проведём доказательство сначала для элементарных характеров. Рассмотрим различные возможные случаи.

1. Пусть $k = 4$.

Заметив, что $\chi(-1) = -1$, путём непосредственного подсчёта получим:

$$\tau(\chi) = \frac{1}{2}\left(\chi(1)\, i - \chi(-1)\, i\right) = \frac{1}{2}(1i + 1i) = i.$$

2. При $k = 8$, в силу теоремы 10, существуют два действительных первообразных характера $\chi(n)$ и $\chi'(n)$, отвечающих соответственно значениям $\rho' = 1$ и $\rho' = -1$.

Заметим, что

$$\chi(3)=\chi(5)=-1; \quad \chi(-1)=1; \quad \chi'(3)=1;$$
$$\chi'(5)=-1, \quad \chi'(-1)=-1.$$

Тогда непосредственные вычисления показывают, что

$$\tau(\chi)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\chi(1)\frac{1+i}{\sqrt{2}}+\chi(3)\frac{-1+i}{\sqrt{2}}-\chi(5)\frac{1+i}{\sqrt{2}}+\chi(7)\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)=1,$$

$$\tau(\chi')=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\chi'(1)\frac{1+i}{\sqrt{2}}+\chi'(3)\frac{-1+i}{\sqrt{2}}-\chi'(5)\frac{1+i}{\sqrt{2}}+\chi'(7)\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)=i.$$

3. При $k=p$, p — нечётное простое число; в силу теоремы 10 имеем:

$$\chi(n, p)=\left(\frac{n}{p}\right),$$

и стало быть

$$\tau(\chi)=\frac{1}{\sqrt{p}}\sum_{n=0}^{p-1}\chi(n)\,e^{2\pi i\frac{n}{p}}=\frac{1}{\sqrt{p}}\sum_{(\alpha)}e^{2\pi i\frac{\alpha}{p}}-\frac{1}{\sqrt{p}}\sum_{(\beta)}e^{2\pi i\frac{\beta}{p}},$$

где α пробегает все квадратические вычеты по модулю p, а переменная β пробегает квадратические невычеты по тому же модулю. Но

$$\sum_{(\alpha)}e^{2\pi i\frac{\alpha}{p}}+\sum_{(\beta)}e^{2\pi i\frac{\beta}{p}}=\sum_{n=1}^{p-1}e^{2\pi i\frac{n}{p}}=-1.$$

Следовательно,

$$\tau(\chi)=\frac{1}{\sqrt{p}}+\frac{2}{\sqrt{p}}\sum_{(\alpha)}e^{2\pi i\frac{\alpha}{p}}=\frac{1}{\sqrt{p}}+\frac{1}{\sqrt{p}}\sum_{n=1}^{p-1}e^{2\pi i\frac{n^2}{p}}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{p}}\sum_{n=0}^{p-1}e^{2\pi i\frac{n^2}{p}}.$$

Так как очевидно

$$\sum_{n=0}^{p-1}e^{2\pi i\frac{n^2}{p}}=G(p),$$

то, прилагая лемму I, 4 получим:

$$\tau(\chi)=\frac{G(p)}{\sqrt{p}}=\frac{1}{2}(1+i)(1+i^{-p})=\begin{cases}1, \text{ если } p\equiv 1 \pmod 4,\\ i, \text{ если } p\equiv -1 \pmod 4.\end{cases}$$

Наконец, заметим, что

$$\chi(-1)=\left(\frac{-1}{p}\right)=\begin{cases}1, \text{ если } p\equiv 1 \pmod 4,\\ -1, \text{ если } p\equiv -1 \pmod 4;\end{cases}$$

следовательно,

$$\tau(\chi)=\begin{cases}1, \text{ если } \chi(-1)=1,\\ i, \text{ если } \chi(-1)=-1.\end{cases}$$

4. Пусть теперь даны два действительных первообразных характера

$$\chi_1(n)=\chi(n, k_1), \quad \chi_2(n)=\chi(n, k_2),$$

основные модули которых, т. е. числа k_1 и k_2, взаимно просты; далее предположим, что

$$\tau(\chi_1)=\begin{cases}1, \text{ если } \chi_1(-1)=1,\\ i, \text{ если } \chi_1(-1)=-1,\end{cases}$$

$$\tau(\chi_2)=\begin{cases}1, \text{ если } \chi_2(-1)=1,\\ i, \text{ если } \chi_2(-1)=-1.\end{cases}$$

Положим:

$$\chi(n)=\chi_1(n)\,\chi_2(n);$$

в силу теорем 3 и 6 функция $\chi(n)$ будет опять равна действительному первообразному характеру, причём

$$k=k_1 k_2,$$

где k — основной модуль $\chi(n)$. Вычислим значение $\tau(\chi)$. По определению мы имеем:

$$\tau(\chi)=\frac{1}{\sqrt{k_1 k_2}}\sum_{(n)}\chi(n)\,e^{2\pi i\frac{n}{k_1 k_2}},$$

где n пробегает полную систему вычетов по модулю k_1k_2; но известно, что если положить

$$n=k_2n_1+k_1n_2$$

и если n_1 будет пробегать полную систему вычетов по модулю k_1, а n_2 — полную систему вычетов по модулю k_2, то n будет пробегать полную систему вычетов по модулю $k_1 k_2$. Следовательно,

$$\tau(\chi) = \frac{1}{\sqrt{k_1 k_2}} \sum_{(n_1)} \sum_{(n_2)} \chi(k_2 n_1 + k_1 n_2)\, e^{2\pi i \frac{k_2 n_1 + k_1 n_2}{k_1 k_2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k_1 k_2}} \sum_{(n_1)} \chi_1(k_2 n_1)\, e^{2\pi i \frac{n_1}{k_1}} \sum_{(n_2)} \chi_2(k_1 n_2)\, e^{2\pi i \frac{n_2}{k_2}} = \chi_1(k_2)\, \chi_2(k_1) \times$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{k_1}} \sum_{(n_1)} \chi_1(n_1)\, e^{2\pi i \frac{n_1}{k_1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{k_2}} \sum_{(n_2)} \chi_2(n_2)\, e^{2\pi i \frac{n_2}{k_2}} =$$

$$= \chi_1(k_2)\, \chi_2(k_1)\, \tau(\chi_1)\, \tau(\chi_2).$$

Но, в силу леммы I, 5

$$\chi_1(k_2)\, \chi_2(k_2) = \chi_1(\chi_2(-1));$$

значит

$$\tau(\chi) = \chi_1(\chi_2(-1))\, \tau(\chi_1)\, \tau(\chi_2).$$

Нетрудно теперь видеть, что

$$\tau(\chi) = \begin{cases} 1, & \text{если } \chi(-1) = 1, \\ i, & \text{если } \chi(-1) = -1. \end{cases}$$

Чтобы в этом убедиться, достаточно просмотреть следующую таблицу, в которой представлены всевозможные случаи, которые могут иметь место:

$\chi_1(-1)$	$\chi_2(-1)$	$\chi_1(\chi_2(-1))$
1	1	1
1	-1	1
-1	1	1
-1	-1	-1

$\tau(\chi_1)$	$\tau(\chi_2)$	$\tau(\chi)$	$\chi(-1)$
1	1	1	1
1	i	i	-1
i	1	i	-1
i	i	1	1

5. Только сейчас доказанное свойство функции $\tau(\chi)$ может быть обобщено на любое число сомножителей, т. е. если функции

$$\chi_1(n)=\chi(n, k_1),\ \chi_2(n)=\chi(n, k_2), \ldots, \chi_\nu(n)=\chi(n, k_\nu)$$

суть действительные первообразные характеры, основные модули которых попарно взаимно просты, а

$$\tau(\chi_1)=\begin{cases} 1, & \text{если } \chi_1(-1)=1, \\ i, & \text{если } \chi_1(-1)=-1, \end{cases}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\tau(\chi_\nu)=\begin{cases} 1, & \text{если } \chi_\nu(-1)=1, \\ i, & \text{если } \chi_\nu(-1)=-1, \end{cases}$$

то и

$$\tau(\chi)=\begin{cases} 1, & \text{если } \chi(-1)=1, \\ i, & \text{если } \chi(-1)=-1, \end{cases}$$

где

$$\chi(n)=\chi_1(n)\,\chi_2(n)\ldots\chi_\nu(n);$$

для доказательства достаточно применить закон полной индукции.

6. Наконец, пусть $\chi(n, k)$ — любой действительный первообразный характер. Так как все его канонические делители обладают доказываемыми свойствами, как это было выяснено выше, то, в силу пункта 5 этого доказательства, и сам характер $\chi(n, k)$ должен обладать этим свойством.

В заключение этой главы докажем ещё следующую теорему:

Теорема 19. *Пусть* $\chi(n, k)$ — *действительный характер*, тогда

$$12\sum_{n=1}^{k} n\,\chi(n)\equiv 0 \pmod{k}.$$

Пусть

$$S=\sum_{n=0}^{k-1} n\,\chi(n);$$

a — целое число, подчинённое только условию: $(a, k)=1$, r — наименьший положительный вычет числа an по модулю k.

Если величина n пробегает полную систему вычетов по модулю k, то величина r пробегает последовательность чисел $0, 1, 2, \ldots, k-1$ в порядке, который в общем случае отличен от натурального, следовательно,

$$a\chi(a)S = \sum_{n=0}^{k-1} an\chi(an) \equiv \sum_{r=0}^{k-1} r\chi(r) = S,$$

т. е.

$$(a\chi(a)-1)S \equiv 0 \pmod{k}.$$

Пусть

$$k = 2^{\alpha}k',$$

где k' — нечётное; выберем число a так, чтобы

$$a \equiv 3 \pmod{2^{\alpha}},$$
$$a \equiv 2 \pmod{k'}.$$

Тогда

$$a\chi(a)-1 \equiv 2 \quad \text{или} \quad -4 \pmod{2^{\alpha}},$$

соответственно значениям: $\chi(a)=1$ и -1.

Аналогично

$$a\chi(a)-1 \equiv 1 \quad \text{или} \quad -3 \pmod{k'},$$

соответственно значениям: $\chi(a)=1$ и -1.

Два последних сравнения относительно $a\chi(a)-1$ показывают, что это целое число имеет с k только такие общие делители, которые являются и делителями числа 12. Значит

$$12S \equiv 0 \pmod{k}.$$

ГЛАВА II

РЯДЫ И ФУНКЦИИ ДИРИХЛЕ

§ 1. Обобщённые ряды Дирихле

В этой главе будут даны определения и основные свойства рядов и функций Дирихле; в частности, конец этой главы будет посвящён рассмотрению вопроса об аналитическом продолжении функций Дирихле с помощью функционального уравнения, которому эти функции удовлетворяют.

Начало главы содержит краткое изложение теории как общих, так и обыкновенных рядов Дирихле.

В дальнейшем сохраняются все прежние обозначения и, кроме того, добавляются новые.

Буква s обозначает комплексное число, причём $s = \sigma + it$, где $\sigma = \Re s$ — действительная часть s; $t = \Im s$ — коэффициент мнимой части s. Аналогично: $s_0 = \sigma_0 + it_0$.

Если z — комплексное число, то символом $\lg z$ будем обозначать «главную ветвь» логарифма z, т. е. такую, которая принимает действительные значения для $z > 0$.

Следовательно, если $z = x + iy = re^{\varphi i}$, то $\lg z = \lg r + \varphi i$, где

$$0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

Чтобы избегнуть многозначности $\lg z$, будем считать, что на плоскости изменения z проведён «разрез» вдоль луча $z = r$; $0 \leqslant r < \infty$. Мы будем говорить, что точки $z = re^{0i}$ образуют «верхний край разреза», а точки $z = re^{2\pi i}$ — «нижний край разреза». Саму плоскость z будем называть разрезанной плоскостью. Движение через разрез не допускается, т. е. все кривые, вдоль которых меняется z, не пересекают разреза.

Положим далее по определению

$$z^s = e^{s \lg z} \quad \text{для} \quad z \neq 0;$$

z^s — функция, целая относительно переменной s; она правильна и однозначна на всей разрезанной плоскости относительно переменной z.

Очевидно, что

$$z^s = e^{(\sigma+it)(\lg r + i\varphi)} = r^\sigma e^{-\varphi t + i(\sigma\varphi + t \lg r)}.$$

Значит

$$|z^s| = r^\sigma e^{-\varphi t}.$$

В частности, если $z > 0$, то $|z^s| = z^\sigma$.

Теорема A. *Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ — неубывающая последовательность вещественных чисел, стремящаяся к бесконечности, и пусть*

$$C(x) = \sum_{\lambda_n \leqslant x} c_n,$$

где c_n — вещественные или комплексные числа и суммирование производится по конечному множеству натуральных индексов n, для которых $\lambda_n \leqslant x$; тогда, если $X \geqslant \lambda_1$ и $\Phi(x)$ обладает непрерывной производной, имеем:

$$\sum_{\lambda_n \leqslant X} c_n \Phi(\lambda_n) = -\int_{\lambda_1}^{X} C(x)\Phi'(x)\,dx + C(X)\Phi(X).$$

Если, кроме того, $C(X)\Phi(X) \to 0$ при $X \to \infty$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \Phi(\lambda_n) = -\int_{\lambda_1}^{\infty} C(x)\Phi'(x)\,dx,$$

в предположении, что хотя бы одна часть этого равенства сходится [1]).

Следствие. Пусть $C(x)$ ограничена для всех значений $x \geqslant \lambda_1$, т. е. $|C(x)| < C$. Кроме того, пусть $\Phi(x) \geqslant 0$ для тех же значений x.

---

[1]) Доказательство см. Ингам, Распределение простых чисел, ОНТИ, 1936, стр. 28, теорема А.

Тогда

$$\left|\sum_{\lambda_n\leqslant x} c_n \Phi(\lambda_n)\right| \leqslant \begin{cases} C\Phi(\lambda_1), \text{ если } \Phi(x) \text{ монотонно убывает для } x\geqslant\lambda_1, \\ 2C\Phi(x), \text{ если } \Phi(x) \text{ монотонно возрастает для } x\geqslant\lambda_1. \end{cases}$$

Кроме того, $\left|\sum_{n=1}^{\infty} c_n \Phi(\lambda_n)\right| \leqslant C\Phi(\lambda_1)$, если $\Phi(x)\geqslant 0$ и монотонно убывает для $x\geqslant\lambda_1$.

В самом деле, если $\Phi(x)$ монотонно убывает, то

$$\left|\sum_{\lambda_n\leqslant x} c_n \Phi(\lambda_n)\right| \leqslant -C\int_{\lambda_1}^{x} \Phi'(u)\,du + C\Phi(x) = C\Phi(\lambda_1).$$

Если же $\Phi(X)$ монотонно возрастает, то

$$\left|\sum_{\lambda_u\leqslant x} c_n \Phi(\lambda_n)\right| \leqslant C\int_{\lambda_1}^{x} \Phi'(u)\,du + C\Phi(x) \leqslant 2C\Phi(x).$$

Пусть теперь $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ обладают свойствами, указанными в теореме A, и пусть, кроме того, $\lambda_1>0$.

Рядом Дирихле называется ряд, имеющий вид:

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n^{-s}, \qquad (1)$$

где $a_n\,(n=1, 2, 3, \ldots)$ — заданная последовательность комплексных чисел; $f(s)$ равна значению ряда (1), если он сходится в точке s.

Обыкновенным рядом Дирихле называется ряд Дирихле, получающийся для $\lambda_n=n$ $(n=1, 2, \ldots)$, т. е. ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}. \qquad (2)$$

Лемма II, 1. *Пусть a_n и λ_n имеют указанные выше значения; s и s_0 — пара таких комплексных чисел, что $\sigma>\sigma_0$; u и v — натуральные числа; $x\geqslant\lambda_u$;*

$$S(s, x, u)=\sum_{\lambda_u\leqslant\lambda_n\leqslant x} a_n \lambda_n^{-s},$$

где $\lambda_u\leqslant\lambda_v\leqslant x<\lambda_{v+1}$.

Тогда

$$S(s, x, u) = (s - s_0)\int\limits_{\lambda_u}^{x} S(s_0, y, u)\, y^{s_0 - s - 1} dy + S(s_0, x, u) x^{s_0 - s}.$$

Если же $S(s_0, y, u)$ *ограничено для* $y \geqslant \lambda_u$, *то*

$$|S(s, x, u)| \leqslant \frac{|s - s_0|}{\sigma - \sigma_0} \lambda_u^{\sigma_0 - \sigma} \max_{y \geqslant \lambda_u} |S(s_0, y, u)|.$$

Применим к сумме $S(s, x, u)$ теорему A, положив $c_n = 0$ для $n = 1, 2, \ldots, u - 1$; $c_n = a_n \lambda_n^{-s_0}$ для $n = u, u + 1, \ldots, v$;

$$\Phi(x) = x^{s_0 - s}.$$

Тогда получим:

$$S(s, x, u) = (s - s_0) \int\limits_{\lambda_1}^{x} C(y)\, y^{s_0 - s - 1} dy + S(s_0, x, u)\, x^{-s},$$

где

$$C(y) = \sum_{\lambda_n \leqslant y} c_n.$$

Но

$$C(y) = \begin{cases} 0 \text{ для } y < \lambda_u, \\ S(s_0, y, u) \text{ для } y \geqslant \lambda_u; \end{cases}$$

следовательно,

$$S(s, x, u) = (s - s_0)\int\limits_{\lambda_u}^{x} S(s_0, y, u)\, y^{s_0 - s - 1}\, dy + S(s_0, x, u)\, x^{s_0 - s}.$$

Если теперь $S(s_0, y, u)$ — ограничена для всех $y \geqslant \lambda_u$, то

$$|S(s, x, u)| \leqslant |s - s_0| \max_{y \geqslant \lambda_u} |S(s_0, y, u)| \int\limits_{\lambda_u}^{x} y^{\sigma_0 - \sigma - 1}\, dy +$$

$$+ \max |S(s_0, x, u)|\, x^{\sigma_0 - \sigma};$$

$$|S(s, x, u)| \leqslant |s - s_0| \max_{y \geqslant \lambda_u} |S(s_0, y, u)| \int\limits_{\lambda_u}^{\infty} y^{\sigma_0 - \sigma - 1}\, dy =$$

$$= \frac{|s - s_0|}{\sigma - \sigma_0} \lambda_u^{\sigma_0 - \sigma} \max_{y \geqslant \lambda_u} |S(s_0, y, u)|.$$

Лемма II, 2.

1. *Если частичные суммы ряда Дирихле для* $s = s_0$ *ограничены, то сам ряд сходится внутри полуплоскости*

$$\sigma > \sigma_0.$$

2. *Если ряд Дирихле сходится для* $s = s_0$, *то он сходится равномерно в области*

$$|t - t_0| \leqslant A(\sigma - \sigma_0) H^{\sigma - \sigma_0}, \quad \sigma \geqslant \sigma_0,$$

где A *и* H — *произвольные наперёд заданные положительные числа. Кроме того, в этом случае ряд Дирихле изображает функцию, правильную в полуплоскости*

$$\sigma > \sigma_0.$$

1. Если частичные суммы ряда (1) ограничены, то ограничена и величина $S(s_0, y, u)$ для $y \geqslant \lambda_u$; значит, в силу леммы II, 1, мы можем написать:

$$|S(s, x, u)| \leqslant \frac{|s - s_0|}{\sigma - \sigma_0} \lambda_u^{\sigma_0 - \sigma} \max_{y \geqslant \lambda_u} |S(s_0, y, u)|.$$

Но по условию $\sigma > \sigma_0$; значит $\lambda_u^{\sigma_0 - \sigma} \to 0$ при $u \to \infty$, ибо $\lambda_u \to \infty$. А так как $S(s, x, u)$ представляет собой отрезок ряда Дирихле между произвольными λ_u и λ_v, то доказанное выше убеждает нас в том, что для нашего ряда выполнен критерий сходимости Коши, т. е. этот ряд сходится.

2. Если ряд (1) сходится для $s = s_0$, то, в силу критерия сходимости Коши, можно найти такое большое u_0, что

$$\max_{y \geqslant \lambda_u} |S(s_0, y, u)| < \frac{\varepsilon}{2A} \text{ для } u \geqslant u_0,$$

где ε — произвольное наперёд заданное положительное число.

Кроме того, пусть u_0 так велико, что

$$\lambda_u \geqslant H \text{ для } u \geqslant u_0.$$

Тогда, в силу леммы II, 1, мы можем написать:

$$|S(s, x, u)| \leqslant \frac{|s-s_0|}{\sigma-\sigma_0} \lambda_u^{\sigma_0-\sigma} \frac{\varepsilon}{2A} \leqslant \frac{|s-s_0|}{\sigma-\sigma_0} H^{\sigma_0-\sigma} \frac{\varepsilon}{2A}.$$

Далее заметим, что по самому смыслу задачи доказательство достаточно дать для случая, когда $A>1$ и $H>1$; поэтому

$$|s-s_0| \leqslant \sigma-\sigma_0+|t-t_0| \leqslant (1+AH^{\sigma-\sigma_0})(\sigma-\sigma_0) \leqslant \leqslant 2AH^{\sigma-\sigma_0}(\sigma-\sigma_0).$$

Следовательно,

$$|S(s, x, u)| \leqslant 2AH^{\sigma_0-\sigma}H^{\sigma-\sigma_0}\frac{\varepsilon}{2A}=\varepsilon,$$

т. е.

$$\left|\sum_{\lambda_u \leqslant \lambda_n \leqslant x} a_n\lambda_n^{-s}\right| < \varepsilon \text{ для } x \geqslant \lambda_u; \quad u \geqslant u_0(\varepsilon).$$

Полагая $x \to \infty$, получаем:

$\left|\sum_{n=u}^{\infty} a_n\lambda_n^{-s}\right| \leqslant \varepsilon$ для $u \geqslant u_0(\varepsilon)$ и для s внутри рассматриваемой области. Значит ряд (1) сходится равномерно в этой области.

3. В силу доказанного в предыдущем пункте функция, изображаемая рядом (1), правильна в области

$$D_{A,H}: \quad |t-t_0| \leqslant A(\sigma-\sigma_0)H^{\sigma-\sigma_0}, \quad \sigma \geqslant \sigma_0.$$

Пусть теперь s — любая точка, принадлежащая полуплоскости $\sigma>\sigma_0$. Если положить $A>\frac{t-t_0}{\sigma-\sigma_0}$, $H=1$, то точка s вместе с некоторой своей окрестностью окажется внутри области $D_{A,1}$, а это значит, что функция $f(s)$ правильна в окрестности точки s.

Введём теперь необходимые в дальнейшем определения: пусть s — любая точка плоскости, в которой ряд (1) сходится; σ — проекция s на действительную ось. Нижняя граница всех таких σ, которую мы обозначаем символом α, называется абсциссой сходимости ряда (1), полуплоскость $\sigma>\alpha$ называется полуплоскостью сходимости ряда (1). Если ряд (1) сходится в любой точке плоскости, то мы будем полагать $\alpha=-\infty$. Если же этот ряд всюду расходится, то полагаем $\alpha=+\infty$.

Теорема 20. *Ряд* (1) *сходится внутри полуплоскости сходимости и изображает там правильную функцию; вне же этой полуплоскости он расходится.*

Пусть $\sigma > \alpha$ (т. е. точка принадлежит полуплоскости сходимости). Тогда по определению α найдётся такое значение $s_0 = \sigma_0 + it_0$, для которого ряд (1) сходится и $\sigma > \sigma_0 > \alpha$. В силу леммы II, 2 ряд (1) сходится в полуплоскости $\sigma > \sigma_0$ и изображает в ней правильную функцию. Но этой полуплоскости принадлежит и взятая точка вместе с её окрестностью. Таким образом в окрестности любой точки полуплоскости $\sigma > \alpha$ функция $f(s)$ — правильная функция; а это значит, что $f(s)$ правильна во всей полуплоскости $\sigma > \alpha$.

Если же s находится вне полуплоскости сходимости, то $\sigma < \alpha$, и значит в точке s ряд (1) расходится, ибо в противном случае мы получили бы противоречие с определением числа α.

Поведение функции $f(s)$ на самой границе полуплоскости сходимости, т. е. на прямой $\sigma = \alpha$, зависит от задания чисел λ_n и a_n, и поэтому здесь могут иметь место различные случаи: на этой прямой ряд может как сходиться, так и расходиться, в чём мы убедимся позже на конкретных примерах.

Кроме обычной сходимости, ряд (1) может обладать в отдельных точках плоскости абсолютной сходимостью. Та точка s плоскости, в которой ряд (1) сходится абсолютно, называется **точкой абсолютной сходимости** (кратко «точка А. С.»).

Пусть s — точка А. С.; пусть σ — проекция s на действительную ось. Нижняя граница всех σ — обозначим её буквой β — называется **абсциссой абсолютной сходимости** (кратко «абсцисса А. С.»), а полуплоскость $\sigma > \beta$ называется полуплоскостью абсолютной сходимости (кратко «полуплоскость А. С.») ряда (1). Если ряд (1) абсолютно сходится в любой точке плоскости, то мы полагаем $\beta = -\infty$; если же этот ряд всюду расходится, то полагаем $\beta = +\infty$.

Теорема 21. *Ряд* (1) *сходится абсолютно внутри полуплоскости* А. С. *и не сходится абсолютно вне этой полуплоскости.*

Пусть $\sigma > \beta$; тогда по определению β можно найти такую точку $s_0 = \sigma_0 + it_0$, что, будучи точкой А. С., она удовлетворяет условию $\beta < \sigma_0 < \sigma$, и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \lambda_n^{-\sigma_0}$$

сходится.

С другой стороны, в силу того, что $\lambda_n \to \infty$ при $n \to \infty$, можно найти такое n_0, что $\lambda_n \geqslant 1$ при $n \geqslant n_0$; но в таком случае имеем:

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n| \lambda_n^{-\sigma} \leqslant \sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n| \lambda_n^{-\sigma_0}.$$

Следовательно, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \lambda_n^{-\sigma}$$

сходится в точке s, т. е. эта последняя является точкой А. С. ряда (1).

Если же $\sigma < \beta$, то по определению β точка $s = \sigma + it$ не может быть точкой А. С.

Теорема 22. *Для любого ряда Дирихле, т. е. ряда вида* (1) *справедливо неравенство*: $0 \leqslant \beta - \alpha \leqslant \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \dfrac{\lg n}{\lg \lambda_n}$.

Замечание. Чтобы достигнуть полной общности этой теоремы, мы условимся разность $\beta - \alpha$ считать равной 0, если $\alpha = \beta = \pm \infty$; во всех остальных случаях, когда одна или обе величины α и β имеют значения $\pm \infty$ и $\alpha \neq \beta$, мы будем полагать $\beta - \alpha = +\infty$.

Из самого определения чисел α и β следует, что $\alpha \leqslant \beta$. Полагаем далее

$$L = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\lg n}{\lg \lambda_n}.$$

Теорема очевидна, если $L = +\infty$. Поэтому полагаем $L < +\infty$. Так как при достаточно большом n величины $\lg n$ и $\lg \lambda_n \geqslant 0$, то $L \geqslant 0$.

Пусть теперь $\varepsilon > 0$; тогда имеем:

$$\frac{\lg n}{\lg \lambda_n} < L + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{для} \quad n \geqslant n_0(\varepsilon),$$

т. е.

$$\lambda_n > n^{\frac{1}{L+\varepsilon/2}}. \tag{22.1}$$

С другой стороны, при $s > \alpha$ рассматриваемый ряд сходится; значит

$$\left|\frac{a_n}{\lambda_n^s}\right| < 1 \quad \text{для} \quad n \geqslant n_0(\varepsilon),$$

т. е.

$$|a_n| < \lambda_n^s. \tag{22.2}$$

Докажем теперь, что наш ряд сходится абсолютно в точке $s_1 = s + L + \varepsilon$; в самом деле, в силу неравенства (22.1) и (22.2) имеем:

$$\frac{|a_n|}{\lambda_n^{s+L+\varepsilon}} \leqslant \frac{1}{\lambda_n^{L+\varepsilon}} < n^{-\frac{L+\varepsilon}{L+\varepsilon/2}} \quad \text{для} \quad n \geqslant n_0,$$

но

$$\frac{L+\varepsilon}{L+\varepsilon/2} > 1;$$

значит, ряд

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} n^{-\frac{L+\varepsilon}{L+\varepsilon/2}}$$

сходится абсолютно, и следовательно, сходятся абсолютно ряды

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{|a_n|}{\lambda_n^{s+L+\varepsilon}} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{\lambda_n^{s+L+\varepsilon}}.$$

Значит, при $s_1 = \alpha + L + \varepsilon$ ряды сходятся абсолютно, т. е.

$$\beta \leqslant s + L + \varepsilon.$$

Если $\alpha = -\infty$, то s, а следовательно, и $s + L + \varepsilon$ могут быть взяты где угодно на действительной оси, т. е. $\beta = -\infty$. Если же $\alpha > -\infty$, то в этом случае можно положить $s = \alpha + \varepsilon$; тогда

$$\beta \leqslant \alpha + L + 2\varepsilon,$$

т. е.

$$\beta - \alpha \leqslant L + 2\varepsilon.$$

Так как ε — произвольно, то

$$\beta - \alpha \leqslant L.$$

Следствие. Для обыкновенных рядов Дирихле

$$\lambda_n = n,$$

поэтому абсцисса сходимости обыкновенных рядов Дирихле всегда удовлетворяет неравенству

$$\beta \leqslant \alpha + 1.$$

Это значит, что всякий сходящийся обыкновенный ряд Дирихле обладает и полуплоскостью абсолютной сходимости, т. е. полуплоскостью, сплошь состоящей из значений, для которых этот ряд сходится абсолютно.

В дальнейшем мы ограничимся только изложением теории обыкновенных рядов Дирихле[1]).

§ 2. Обыкновенные ряды Дирихле

Теорема 23. *Пусть*

$$f(s) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{a_l}{l^s}$$

и

$$f_1(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{m^s}$$

— два сходящихся ряда; тогда в той части плоскости, где оба ряда сходятся абсолютно, имеет место тождество

$$f(s) f_1(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s},$$

[1]) Интересующихся общей теорией рядов Дирихле отсылаем к книге E. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, 1909, Berlin, Bd. 2.

где

$$c_n = \sum_{n=lm} a_l b_m.$$

(*Суммирование распространено на всевозможные представления числа n в виде произведения двух натуральных чисел.*)

Пусть абсциссы абсолютной сходимости $f(s)$ и $f_1(s)$ соответственно равны β и β_1; выше мы видели, что β и β_1 существуют.

Тогда в полуплоскости $\sigma \geqslant \max(\beta, \beta_1)$ оба ряда сходятся абсолютно. Следовательно, их можно перемножить, сгруппировав слагаемые произведения в любом порядке. Собирая вместе все слагаемые, содержащие в знаменателе одно и то же n^s, мы получим доказательство теоремы.

§ 3. Асимптотические формулы для суммы коэффициентов рядов Дирихле

Для степенных рядов, как известно, существуют формулы, связывающие значения функций, заданных на некотором контуре, с величинами коэффициентов этих степенных рядов — формулы Коши.

Аналогом этих формул Коши для рядов Дирихле служат формулы, связывающие значения функции, изображаемой рядом Дирихле, с суммой коэффициентов этого ряда. Эти формулы играют исключительно важную роль в приложениях рядов Дирихле к теории чисел. К выводу этих формул мы и переходим.

Лемма II, 3. *Пусть a и T — два положительных числа,*

$$H(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-iT}^{a+iT} \frac{y^s}{s}\, ds,$$

$$\varepsilon(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 < y < 1, \\ \dfrac{1}{2}, & \text{если } y = 1, \\ 1, & \text{если } y > 1, \end{cases}$$

$$\rho_T(y) = H(y) - \varepsilon(y).$$

Тогда

$$|\rho_T(y)| < \begin{cases} \dfrac{y^a}{\pi T|\lg y|}, & \textit{если } y \neq 1, \\ \dfrac{a}{\pi T}, & \textit{если } y = 1, \end{cases}$$

$$|H(y)| \leqslant \begin{cases} 1/2, & \textit{если } 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 5, & \textit{если } 1 \leqslant y \leqslant 2 \\ & \text{и } a \leqslant 2. \end{cases}$$

1°. Пусть $y \neq 1$ и b — действительное число, подчинённое условиям:

$$b > a, \text{ если } y < 1;$$

$$b < 0, \text{ если } y > 1.$$

Функция

$$y^s s^{-1}$$

имеет полюс 1-го порядка в точке $s = 0$, причём

$$\underset{s=0}{\Re} \frac{y^s}{s} = 1.$$

Поэтому теорема о вычетах даёт равенство

$$H(y) = \varepsilon(y) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-iT}^{b-iT} \frac{y^s}{s}\,ds + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b-iT}^{b+iT} \frac{y^s}{s}\,ds + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b+iT}^{a+iT} \frac{y^s}{s}\,ds.$$

Следовательно,

$$|\rho_T(y)| \leqslant 2 \cdot \frac{1}{2\pi}\int\limits_a^b \frac{y^\sigma}{|s|}\,d\sigma + \frac{1}{2\pi}\frac{y^b}{|b|} \cdot 2T = \frac{y^a - y^b}{\pi T|\lg y|} + \frac{Ty^b}{\pi|b|}.$$

Число b было произвольным; положим $|b| \to \infty$; тогда во всех случаях

$$y^b \to 0,$$

и следовательно, в последнем неравенстве после перехода к пределу получаем:

$$|\rho_T(y)| \leqslant \frac{y^a}{\pi T|\lg y|}.$$

2°. Пусть $y=1$; в таком случае имеем:

$$\rho_T(1)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-iT}^{a+iT}\frac{ds}{s}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-T}^{+T}\frac{a-it}{a^2+t^2}\,dt-\frac{1}{2}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{T}\frac{a\,dt}{a^2+t^2}-\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{a\,dt}{a^2+t^2}-\frac{1}{\pi}\int\limits_{T}^{\infty}\frac{a\,dt}{a^2+t^2}-\frac{1}{2}=-\frac{a}{\pi}\int\limits_{T}^{\infty}\frac{dt}{a^2+t^2}.$$

Следовательно, $|\rho_T(1)|\leqslant\frac{a}{\pi T}$.

3°. Пусть $0\leqslant y\leqslant 1$. Заменим интегрирование по отрезку $(a-iT,\ a+iT)$ интегрированием по дуге C окружности, опирающейся на этот отрезок как на диаметр и имеющий центром начало координат; причём дуга C взята справа от нашего отрезка. Радиус дуги, очевидно, равен:

$$R=\sqrt{a^2+T^2}.$$

В силу теоремы Коши тогда будем иметь:

$$|H(y)|=\frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_C\frac{y^s\,ds}{s}\right|\leqslant\frac{1}{2\pi R}\left|\int\limits_C ds\right|\leqslant\frac{1}{2}.$$

4°. Пусть $1<y\leqslant 2$, $a\leqslant 2$. Заменим опять отрезок $(a-iT,\ a+iT)$ дугой окружности, опирающейся на этот отрезок как на диаметр. Однако на этот раз дугу возьмём слева от нашего отрезка. Тогда, в силу теоремы Коши, будем иметь:

$$|H(y)|\leqslant 1+\frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_C\frac{y^s}{s}\,ds\right|\leqslant 1+\frac{2^a}{2\pi R}\left|\int\limits_C ds\right|\leqslant 1+\frac{2^a}{2\pi R}\cdot 2\pi R\leqslant 5.$$

Таким образом лемма полностью доказана.

Теорема 24. *Пусть числа a, T и x удовлетворяют неравенствам:* $1<a\leqslant 2$, $T\geqslant 1$, $x\geqslant 3$, *и последовательность чисел* $a_1, a_2, \ldots$ *подчинена условиям:*

(A) $$|a_n|\leqslant c_1\lg n \quad \text{для } n\geqslant 2,$$

(B) $$(\sigma-1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n^\sigma}\leqslant c_2 \quad \text{для } 1<\sigma\leqslant 2.$$

(c_1, c_2 зависят только от последовательности $a_1, a_2, \ldots$). Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

сходится абсолютно в полуплоскости $\sigma > 1$, и изображаемая этим рядом функция $f(s)$ удовлетворяет соотношению

$$\sum_{n \leqslant x} a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-iT}^{a+iT} \frac{x^s f(s)\, ds}{s} + R_T(x),$$

где

$$|R_T(x)| \leqslant c_3\left(\frac{x^a}{T(a-1)} + \frac{x \lg^2 x}{T} + \lg x\right),$$

$$c_3 = 6{,}4 \max(c_1, c_2).$$

Из условия (А) следует абсолютная сходимость ряда в полуплоскости $\sigma > 1$, поэтому его можно почленно интегрировать. Следовательно,

$$R_T(x) = \sum_{n \leqslant x} a_n - \frac{1}{2\pi i} \int_{a-iT}^{a+iT} \frac{x^s f(s)\, ds}{s} =$$

$$= \sum_{n \leqslant x} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi i} \int_{a-iT}^{a+iT} \frac{1}{s}\left(\frac{x}{n}\right)^s ds =$$

$$= \sum_{n=1}^{[x]} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n H\left(\frac{x}{n}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{[x]-1} a_n \rho_T\left(\frac{x}{n}\right) + a_{[x]}\left(1 - H\left(\frac{x}{[x]}\right)\right) -$$

$$- a_{[x]+1} H\left(\frac{x}{[x]+1}\right) - \sum_{n=[x]+2}^{\infty} a_n H\left(\frac{x}{n}\right). \quad (24.1)$$

Из предыдущей леммы следует, что

$$\left| a_{[x]}\left(1 - H\left(\frac{x}{[x]}\right)\right) - a_{[x]+1} H\left(\frac{x}{[x]+1}\right)\right| < 6c_1 \lg x +$$

$$+ \frac{c_1}{x} \lg(x+1) \leqslant 7c_1 \lg x. \quad (24.2)$$

Аналогичное рассуждение приведёт нас к неравенству

$$\left| -\sum_{n=1}^{[x]-1} a_n \rho_T\left(\frac{x}{n}\right) - \sum_{n=[x]+2}^{\infty} a_n \rho_T\left(\frac{x}{n}\right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{x^a}{\pi T}\left(\sum_{n=1}^{[x]-1} \frac{|a_n|}{n^a \lg \frac{x}{n}} + \sum_{n=[x]+2}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^a \lg \frac{n}{x}} \right). \qquad (24.3)$$

Замечая, что

$$\left|\lg \frac{x}{n}\right| \geqslant \begin{cases} \lg 2, & \text{если } 1 \leqslant n \leqslant \left[\frac{x}{2}\right], \\ \lg {}^3/_2, & \text{если } n \geqslant [{}^3/_2 n] + 1, \end{cases}$$

получим, в силу условия (B):

$$\sum_{n=1}^{\left[\frac{x}{2}\right]} \frac{|a_n|}{n^a \lg \frac{x}{n}} + \sum_{[{}^3/_2 x+1]}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^a \lg \frac{x}{n}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\lg {}^3/_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^a} < \frac{3{,}4\, c_2}{a-1}. \qquad (24.4)$$

Далее заметим также, что

$$\left.\begin{aligned} -\lg(1-z) &> z \text{ для } 0<z<1, \\ \lg(1+z) &\geqslant \frac{z}{2} \text{ для } 0<z\leqslant\frac{1}{2}, \end{aligned}\right\} \qquad (24.5)$$

в чём можно убедиться, разлагая левые части этих неравенств в бесконечные степенные ряды.

Положим теперь $\nu = [x] - n$ и используя первое из неравенств (24.5) вместе с условием (A), получаем:

$$\sum_{n=\left[\frac{x}{2}\right]+1}^{[x]-1} \frac{|a_n|}{n^a \lg \frac{x}{n}} < c_1 \lg x \sum_{\nu=1}^{[x]-[x/_2]-1} \frac{1}{-\left(\frac{x}{2}\right)^a \lg\left(1-\frac{\nu}{[x]}\right)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4c_1 \lg x}{x^a} \sum_{\nu=1}^{[x]} \frac{[x]}{\nu} \leqslant \frac{4c_1 \lg x}{x^a}\, x \lg([x]+1) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{8c_1 x \lg^2 x}{x^a}. \qquad (24.6)$$

Положим

$$\nu = n - [x] - 1.$$

Аналогично, используя второе из неравенств (24.5), имеем:

$$\sum_{n=[x]+2}^{[^3/_2 x]} \frac{|a_n|}{n^a \lg \frac{n}{x}} \leqslant 1{,}5c_1 \frac{\lg x}{x^a} \sum_{n=[x]+2}^{[^3/_2 x]} \left(\lg \frac{n}{[x]+1}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{1{,}5c_1 \lg x}{x^a} \sum_{\nu=1}^{[^3/_2 x]-[x]-1} \frac{1}{\lg\left(1+\frac{\nu}{[x]+1}\right)} <$$

$$< \frac{1{,}5c_1 \lg x}{x^a} \sum_{\nu=1}^{[x]-1} \frac{2([x]+1)}{\nu} \leqslant \frac{12c_1 x \lg^2 x}{x^a}. \tag{24.7}$$

Наконец, сопоставляя семь неравенств (24.1) — (24.7), получим окончательно:

$$R_T(x) \leqslant 7c_1 \lg x + \frac{x^a}{\pi T}\left(\frac{3{,}4c_2}{a-1} + \frac{8c_1 x \lg^2 x}{x^a} + \frac{12c_1 x \lg^2 x}{x^a}\right) =$$

$$= \frac{3{,}4c_2 x^a}{\pi T(a-1)} + \frac{20\, c_1 x \lg^2 x}{\pi T} + 7c_1 \lg x <$$

$$< c_3\left(\frac{x^a}{T(a-1)} + \frac{x \lg^2 x}{T} + \lg x\right).$$

Теорема 25. *Пусть ряд*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

имеет своей абсциссой абсолютной сходимости число β; пусть далее положительное число $a > \beta$. Тогда справедливо соотношение

$$\sum_{n \leqslant x}{}' a_n = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-iT}^{a+iT} \frac{x^s f(s)}{s}\, ds,$$

где x — произвольное положительное число, а символ $\sum'$ обозначает, что последнее слагаемое левой части равенства *нужно брать с коэффициентом, равным* $\frac{1}{2}$, *если* x — *целое число.*

Пусть $a > \beta$, где β — абсцисса абсолютной сходимости. В таком случае интеграл, стоящий в правой части доказываемого равенства, можно вычислить почленным интегрированием данного ряда. Поэтому

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-iT}^{a+iT}\frac{x^s f(s)\,ds}{s}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{1}{2\pi i}\int_{a-iT}^{a+iT}\frac{1}{s}\left(\frac{x}{n}\right)^s ds=\sum_{n=1}^{\infty}a_n H\left(\frac{x}{n}\right)=$$

$$=\sum_{n\leqslant x}{}' a_n+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\rho_T\left(\frac{x}{n}\right).$$

Но, в силу леммы II, 3 мы имеем:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}a_n\rho_T\left(\frac{x}{n}\right)\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^a\,|a_n|}{\pi T n^a\left|\lg\frac{x}{n}\right|}+\frac{a a_{[x]}}{\pi T},$$

причём второе слагаемое в правой части присутствует только тогда, когда x — целое число, а ряд в первом слагаемом сходится потому, что

$$\left|\lg\frac{x}{n}\right|\geqslant 1 \text{ для } n\geqslant ex.$$

Следовательно,

$$\lim_{T\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\rho_T\left(\frac{x}{n}\right)=0,$$

что доказывает нашу теорему.

§ 4. Ряды Дирихле, коэффициенты которых суть значения мультипликативной функции

Рассмотрим теперь некоторые частные случаи рядов Дирихле. Во всём дальнейшем мы будем предполагать, что $a_n \not\equiv 0$, т. е. существует такое n_0, что

$$a_{n_0}\neq 0.$$

Предположим теперь, что a_n представляет собой «мультипликативную» функцию от n, т. е. для любой пары взаимно простых целых чисел m и n имеет место равенство

$$a_{mn} = a_m a_n;$$

в частности, $a_{n_0} = a_{n_0} a_1$, ибо $(n_0, 1) = 1$, т. е. $a_1 = 1$ для любой мультипликативной функции.

В дальнейшем символ $\prod\limits_p$ будет обозначать бесконечное произведение, распространённое на все простые числа натурального ряда.

Теорема 26. *Если a_n — мультипликативная функция индекса n, то в полуплоскости* А. С. *ряда*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \tag{26.1}$$

имеет место тождество

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = \prod_p \left(1 + \frac{a_p}{p} + \frac{a_{p^2}}{p^{2s}} + \dots\right),$$

причём произведение $\prod\limits_p$ *сходится абсолютно.*

В полуплоскости А. С. ряда (26.1) произведение $\prod\limits_p$ сходится абсолютно, ибо ряд

$$\sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{p^m}}{p^{ms}}$$

сходится абсолютно как часть ряда (26.1).

Тем более последнее утверждение об абсолютной сходимости справедливо по отношению к ряду

$$1 + \frac{a_p}{p^s} + \frac{a_{p^2}}{p^{2s}} + \dots, \tag{26.2}$$

где p — любое простое число.

Пусть теперь $p_1, p_2, \dots, p_n$ — первые n простых чисел; многократно применяя теорему об умножении абсолютно сходящихся рядов к рядам вида (26.2) для $p = p_1, p_2, \dots, p_n$, получаем после раскрытия скобок и приведения подобных членов:

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{a_{p_k}}{p_k^s}+\ldots\right)=\sum_{\alpha_1\ldots\alpha_n}\frac{a_{p_1^{\alpha_1}}\ldots a_{p_n^{\alpha_n}}}{(p_1^{\alpha_1}\ldots p_n^{\alpha_n})^s}, \qquad (26.3)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, , \ldots, \alpha_n$ независимо друг от друга пробегают все целые значения от 0 до ∞.

В силу мультипликативности a_n мы можем написать:

$$a_{p_1^{\alpha_1}}\ldots a_{p_n^{\alpha_n}}=a_{p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_n^{\alpha_n}};$$

далее среди всех чисел вида

$$p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_n^{\alpha_n}$$

встречаются все натуральные числа от 1 до p_n и каждое только один раз. Поэтому равенство (26.3) можно переписать так:

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{a_{p_k}}{p_k^s}+\frac{a_{pk}}{p_k^{2s}}+\ldots\right)=\sum_{m\leqslant p_n}\frac{a_m}{m^s}+\sum_{m>p_n}{}'\frac{a_m}{m^s}, \qquad (26.4)$$

где символ $\sum'$ обозначает пропуск при суммировании всех индексов m, имеющих простые делители $> p_n$.

Перейдём теперь в равенстве (26.4) к пределу при $n\to\infty$; тогда получим:

$$\prod_{p}\left(1+\frac{a_p}{p^s}+\frac{a_{p^2}}{p^{2s}}+\ldots\right)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{m^s}=f(s),$$

ибо

$$\left|\sum_{m>p_n}{}'\frac{a_m}{m^s}\right|\leqslant\sum_{m>p_n}{}'\frac{|a_m|}{m^\sigma}\leqslant\sum_{m=p_n+1}^{\infty}\frac{|a_m|}{m^\sigma}\to 0$$

при $n\to\infty$,

где $\sum\limits_{m=p_n+1}^{\infty}\frac{|a_m|}{m^\sigma}$ равно остаточному члену абсолютно сходящегося ряда (26.1).

Пусть теперь a_n «вполне мультипликативная» функция от n, т. е. такая, что для любой пары целых чисел m и n имеет место равенство $a_{mn}=a_m a_n$.

Для этого случая теорема 26 может быть формулирована так:

Теорема 27. *В полуплоскости* А. С. *ряда* (26.1) *справедливо тождество*

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}=\prod_p\left(1-\frac{a_p}{p^s}\right)^{-1},$$

причём бесконечное произведение сходится абсолютно.

Выше (см. доказательство теоремы 26) мы убедились в том, что ряд

$$1+\frac{a_p}{p^s}+\frac{a_{p^2}}{p^{2s}}+\ldots$$

сходится абсолютно; значит для достаточно больших m имеем

$$\left|\frac{a_{p^m}}{p^{ms}}\right|<1.$$

Но по условию

$$a_{p^m}=(a_p)^m \quad \text{для } m=1,\ 2,\ \ldots;$$

значит

$$\left|\frac{a_p}{p^s}\right|<1$$

и, следовательно,

$$1+\frac{a_p}{p^s}+\frac{a_{p^2}}{p^{2s}}+\ldots=1+\frac{a_p}{p^s}+\left(\frac{a_p}{p^s}\right)^2+\ldots=\left(1-\frac{a_p}{p^s}\right)^{-1}.$$

Значит, в силу теоремы 26, имеем:

$$f(s)=\prod_p\left(1-\frac{a_p}{p^s}\right)^{-1}.$$

Абсолютная сходимость бесконечного произведения следует также из теоремы 26.

Пусть далее $f(s)$ — функция, правильная в заданной односвязной области G и не имеющая в этой области нулей;

условимся символом $\lg f(s)$ обозначать главную ветвь логарифма.

Тогда величина

$$\frac{f'(s)}{f(s)}$$

равна производной от $\lg f(s)$. (Она называется «логарифмической производной» $f(s)$.)

Теорема 28. *Если коэффициент a_n удовлетворяет тем же требованиям, что и в теореме 27, то в полуплоскости* А. С. *ряда* (26.1) *справедливы тождества*:

$$\frac{1}{f(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)\,a_n}{n^s},$$

$$\lg f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(n)\,a_n}{n^s},$$

$$\frac{f'(s)}{f(s)}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)\,a_n}{n^s},$$

где $\mu(n)$ — *функция Мёбиуса* [1]),

$$\lambda(n)=\begin{cases}0 \text{ для } n=1 \text{ и для } n, \text{ имеющих два разных простых делителя},\\ \dfrac{1}{m} \text{ для } n=p^m, \text{ где } p \text{ — простое число};\end{cases}$$

$$\Lambda(n)=\begin{cases}0 \text{ для } n=1 \text{ и для } n, \text{ имеющих два разных простых делителя},\\ \lg p \text{ для } n=p^m, \text{ где } p \text{ — простое число}.\end{cases}$$

$\Lambda(n)$ называется функцией Мангольдта (Mangoldt).

1. В полуплоскости абсолютной сходимости ряда (26.1) сходится абсолютно и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)\,a_n}{n^s},$$

[1]) См. Виноградов, [1], стр. 26.

ибо
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\mu(n)a_n}{n^s}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n^\sigma};$$
но в таком случае, в силу теоремы 23, имеем:
$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{m^s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)a_n}{n^s}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{c_\nu}{\nu^s},$$
где
$$c_\nu=\sum_{mn=\nu}a_m a_n\mu(n)=\sum_{mn=\nu}a_\nu\mu(n)=a_\nu\sum_{mn=\nu}\mu(n),$$
ибо по условию
$$a_m a_n = a_{mn} = a_\nu.$$
С другой стороны, известно [1]), что
$$\sum_{mn=\nu}\mu(n)=\begin{cases}1 \text{ для } \nu=1,\\ 0 \text{ для } \nu>1;\end{cases}$$
следовательно,
$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{m^s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)a_n}{n^s}=c_1=1,$$
т. е.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)a_n}{n^s}=\frac{1}{f(s)}.$$

2. В силу теоремы 27 в полуплоскости абсолютной сходимости имеем:
$$f(s)=\prod_p\left(1-\frac{a_p}{p^s}\right)^{-1};$$
значит
$$\lg f(s)=-\sum_p \lg\left(1-\frac{a_p}{p^s}\right).$$
С другой стороны, мы видели выше (доказательство теоремы 27), что
$$\left|\frac{a_p}{p^s}\right|<1;$$

[1]) См. Виноградов, [1], стр. 27.

значит

$$-\lg\left(1-\frac{a_p}{p^s}\right)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left(\frac{a_p}{p^s}\right)^m=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\frac{a_{p^m}}{p^{ms}},$$

ибо по условию

$$(a_p)^m=a_{p^m}.$$

Но в таком случае

$$\lg f(s)=\sum_{p}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\frac{a_{p^m}}{p^{ms}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(n)a_n}{n^s}.$$

3. В достаточно малой окрестности точки s, принадлежащей полуплоскости А. С. ряда (26.1), ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(n)a_n}{n^s}$$

сходится абсолютно и равномерно, ибо

$$\left|\frac{\lambda(n)a_n}{n^s}\right|\leqslant\frac{|a_n|}{n^\sigma}.$$

Значит его можно почленно дифференцировать, что даёт нам:

$$\frac{f(s)}{f(s)}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(n)a_n\lg n}{n^s},$$

но простая проверка показывает, что

$$\lambda(n)\lg n=\Lambda(n).$$

Значит

$$\frac{f'(s)}{f(s)}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)a_n}{n^s}.$$

§ 5. Ряды с периодическими коэффициентами

Пусть последовательность

$$a_1,\ a_2,\ \ldots$$

состоит из значений периодической функции, т. е. существует такое целое положительное k, что

$$a_{n+k}=a_n \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots);$$

число k будем называть периодом данной последовательности.

Ясно, что в этом случае a_n является ограниченной величиной, т. е.

$$|a_n|\leqslant a \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Докажем теперь, что в этом случае абсцисса А. С. обыкновенного ряда Дирихле, т. е. число $\beta\leqslant 1$.

В самом деле, как известно из анализа, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\sigma}}$$

сходится абсолютно при $\sigma>1$ и расходится при $\sigma\leqslant 1$, но

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n^{\sigma}}\leqslant a\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\sigma}}.$$

Значит ряд (26.1) тоже сходится абсолютно для $\sigma>1$, т. е. $\beta\leqslant 1$.

Теорема 29. *Если последовательность a_n состоит из значений периодической функции, то в полуплоскости* А. С. *ряда* (26.1) *справедливо тождество*

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}=k^{-s}\sum_{l=1}^{k}a_l\sum_{m=0}^{\infty}\left(m+\frac{l}{k}\right)^{-s}$$

для $\sigma>1$.

В самом деле, используя, с одной стороны, периодичность a_n, а, с другой стороны, тот факт, что в абсолютно сходящемся ряду изменение порядка слагаемых не меняет суммы ряда, получаем:

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}=\sum_{l=1}^{k}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_{mk+l}}{(mk+l)^s}=\sum_{l=1}^{k}a_l\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(mk+l)^s}=$$

$$=k^{-s}\sum_{l=1}^{k}a_l\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\left(m+\frac{l}{k}\right)^s}.$$

Дальнейшее развитие теории рядов Дирихле с периодическими коэффициентами связано со свойствами функции $\zeta(s, w)$, к определению и свойствам которой мы перейдём сейчас. Пусть попрежнему число $s = \sigma + it$ — любое комплексное число, w — действительное число, подчинённое условию: $0 < w \leqslant 1$. Тогда по определению полагаем:

$$\zeta(s, w) = \sum_{n=0} \frac{1}{(n+w)^s}.$$

Этот ряд сходится абсолютно и равномерно в полуплоскости $\sigma > 1$ и, следовательно, изображает правильную в этой плоскости функцию.

Мы займёмся теперь вопросом об аналитическом продолжении $\zeta(s, w)$ на всю плоскость.

Теорема 30. *В полуплоскости $\sigma > 1$ справедливо тождество:*

$$\Gamma(s)\,\zeta(s, w) \equiv \int_0^\infty \frac{x^{s-1}e^{-wx}\,dx}{1-e^{-x}}.$$

Известно, что если $\sigma > 0$, то

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx.$$

Заменим теперь в этом интеграле переменную x на $(n+w)\,x$. Эта замена даст равенство:

$$\Gamma(s)\,(n+w)^{-s} = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-(n+w)\,x}\,dx.$$

Пусть n пробегает значения $n = 0, 1, 2, \ldots$; суммируя полученные при этом выражения для $\Gamma(s)\,(n+w)^{-s}$ при различных n и полагая $\sigma > 1$, получаем:

$$\Gamma(s)\,\zeta(s, w) = \Gamma(s)\sum_{n=0}^{\infty}(n+w)^{-s} =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\int_0^\infty x^{s-1}e^{-(n+w)\,x}\,dx =$$

$$=\lim_{N\to\infty}\int_0^\infty x^{s-1}\,dx\sum_{n=0}^{N}e^{-(n+w)x}=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\int_0^\infty x^{s-1}\,dx\frac{e^{-wx}-e^{-(\quad+w+1)x}}{1-e^{-x}}=$$

$$=\int_0^\infty\frac{x^{s-1}e^{-wx}\,dx}{1-e^{-x}}-\lim_{N\to\infty}\int_0^\infty\frac{x^{s-1}e^{-(N+w+1)x}\,dx}{1-e^{-x}}.$$

Но

$$\left|\frac{x^{s-1}e^{-(N+w+1)x}}{1-e^{-x}}\right|\leqslant x^{\sigma-2}e^{-(N+w)x}\frac{x}{e^{x}-1}\leqslant x^{\sigma-2}e^{-(N+w)x},$$

и следовательно,

$$\left|\int_0^\infty\frac{x^{s-1}e^{-(N+w+1)x}}{1-e^{-x}}\,dx\right|\leqslant\int_0^\infty x^{\sigma-2}e^{-(N+w)x}\,dx\leqslant$$

$$\leqslant(N+w)^{1-\sigma}\int_0^\infty x^{\sigma-2}e^{-x}\,dx=(N+w)^{1-\sigma}\Gamma(\sigma-1).$$

А в таком случае

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^\infty\frac{x^{s-1}e^{-(N+w+1)x}\,dx}{1-e^{-x}}=0,$$

ибо

$$\lim_{N\to\infty}(N+w)^{1-\sigma}\Gamma(\sigma-1)=0,$$

т. е. теорема доказана.

Теорема 30 позволяет найти аппарат для аналитического продолжения $\zeta(s,w)$.

Для этого попытаемся «деформировать» путь интеграции в интеграле

$$\int_0^\infty\frac{x^{s-1}e^{-wx}\,dx}{1-e^{-x}}.$$

Первоначально этот путь представляет собой положительный луч действительной прямой. Сделаем вдоль этого луча разрез плоскости от $s=0$ до $s=\infty$; далее возьмём положительное число r, подчинённое условию

$$0<r<2\pi,$$

и построим сложный контур, состоящий из кусков C_1, C_2 и C_3, где C_1 обозначает луч, начинающийся в бесконечности и идущий до точки $s=r$ вдоль верхнего края разреза плоскости; C_3 — луч, начинающийся в точке $s=r$ и идущий в бесконечность вдоль нижнего края разреза плоскости; наконец, C_2 — окружность радиуса r с центром в точке $s=0$; эта окружность проходится в положительном направлении. Контур, последовательно составленный из частей C_1, C_2 и C_3, называется контуром Ханкеля (Hankel). Мы его будем обозначать буквой C.

Нашей ближайшей задачей будет рассмотрение свойств интеграла

$$\int\limits_C \frac{z^{s-1}e^{-wz}}{1-e^{-z}}\,dz,$$

который формально получается из интеграла

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^{s-1}\,e^{-wx}}{1-e^{-x}}\,dx$$

путём деформирования пути интеграции в описанный выше контур C и замены x на $z=xe^{\varphi i}$.

Теорема 31.

1°. *Интеграл*

$$F(s)=\int\limits_C \frac{z^{s-1}\,e^{-wz}}{1-e^{-z}}\,dz$$

всюду сходится и изображает целую функцию.

2°. *Для любого* $s\neq 1$ *справедливо тождество*

$$F(s)=(e^{2\pi si}-1)\,\Gamma(s)\,\zeta(s,\,w).$$

3°. *Функция* $\zeta(s,\,w)$ *(будучи продолженной) правильна во всей плоскости, кроме точки* $s=1$, *где она имеет полюс 1-го порядка, причём*

$$\operatorname*{Res}_{s=1}\zeta(s,\,w)=1.$$

4°. *В полуплоскости* $\sigma > 1$ *справедливо тождество:*

$$\zeta(1-s, w) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)\left(e^{\frac{\pi}{2}si}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-2\pi nwi}}{n^s} + \right.$$
$$\left. + e^{-\frac{\pi}{2}si}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi nwi}}{n^s}\right).$$

Прежде всего заметим, что та часть рассматриваемого интеграла, которая распространена на контур C_2, уже даёт целую функцию. Поэтому достаточно доказать равномерную сходимость интегралов на контурах C_1 и C_3. Но

$$\left|\frac{z^{s-1}e^{-wz}}{1-e^{-z}}\right| \leqslant \begin{cases} \dfrac{x^{\sigma-1}e^{-wx}}{1-e^{-x}} & \text{на контуре } C_1, \\ \dfrac{x^{\sigma-1}e^{-wx}}{1-e^{-x}}e^{2\pi|t|} & \text{на контуре } C_3, \end{cases}$$

а интеграл

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{\sigma-1}e^{-wx}}{1-e^{-x}}\,dx,$$

как мы видели выше, сходится. Следовательно, функция

$$\frac{z^{s-1}e^{-wz}}{1-e^{-z}}$$

абсолютно и равномерно интегрируется на контурах C_1 и C_2, что доказывает первую половину нашей теоремы.

Далее полагаем $\sigma > 1$; тогда

$$\int_{C_1}\frac{z^{s-1}e^{-wz}\,dz}{1-e^{-z}} = \int_{\infty}^{r}\frac{x^{s-1}e^{-wx}}{1-e^{-x}}\,dx,$$

$$\int_{C_3}\frac{z^{s-1}e^{-wz}}{1-e^{-z}}\,dz = \int_{r}^{\infty}\frac{x^{s-1}e^{2\pi is}e^{-wx}}{1-e^{-x}}\,dx = e^{2\pi is}\int_{r}^{\infty}\frac{x^{s-1}e^{-wx}}{1-e^{-x}}\,dx.$$

Далее, так как выражение $\left|\dfrac{z}{1-e^{-z}}\right| \leqslant a$ в круге $|z| \leqslant r$, то

$$\left| \int\limits_{C_1} \frac{z^{s-1}e^{-wz}}{1-e^{-z}}\,dz \right| \leqslant ar^{\sigma-2}e^{2\pi|t|}e^{\pi}\cdot 2\pi r \to 0 \text{ при } r\to 0.$$

Следовательно, если деформировать контур Ханкеля так, чтобы $r\to 0$, то в пределе будем иметь:

$$F(s) = \lim_{r\to 0}\,(e^{2\pi si}-1)\int\limits_0^\infty \frac{x^{s-1}e^{-wx}}{1-e^{-x}}\,dx =$$

$$= (e^{2\pi si}-1)\,\Gamma(s)\,\zeta(s, w).$$

Это тождество доказано в полуплоскости $\sigma>1$; но функции $F(s)$, $e^{2\pi is}$ и $\Gamma(s)$ определены во всей плоскости. Поэтому и последнее тождество, в силу принципа аналитического продолжения, можно распространить на всю плоскость, причём функция $\zeta(s, w)$ в плоскости $\sigma\leqslant 1$ определяется равенством

$$\zeta(s, w) = \frac{F(s)}{(e^{2\pi si}-1)\,\Gamma(s)}.$$

Полученное выражение для $\zeta(s, w)$ позволяет исследовать особенности этой функции. В самом деле, тождество

$$\zeta(s, w) = \frac{F(s)}{(e^{2\pi si}-1)\,\Gamma(s)}$$

убеждает нас в том, что особенности функции $\zeta(s, w)$, если таковые вообще существуют, могут находиться только в точках $s=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Но в точках $s=2, 3, \ldots$ особенностей быть не может, ибо во всей плоскости $\sigma>1$ функция $\zeta(s, w)$ изображается абсолютно сходящимся рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+w)^s}.$$

Далее, в точках $s=0, -1, -2, \ldots$ нули функции $e^{2\pi si}-1$ «гасят» полюсы функции $\Gamma(s)$; поэтому эти точки также не являются особыми точками для $\zeta(s, w)$. Остаётся только точка

$s=1$. Для неё имеем:

$$\operatorname*{Res}_{s=1} \zeta(s, w) = \lim_{s=1} \frac{s-1}{e^{2\pi i s}-1} \cdot \frac{F(1)}{\Gamma(1)} = \\ = \frac{F(1)}{2\pi i} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{-wz}\,dz}{1-e^{-z}}.$$

Но в рассматриваемом случае

$$\int_{C_1} \frac{e^{-wz}\,dz}{1-e^{-z}} + \int_{C_3} \frac{e^{-wz}\,dz}{1-e^{-z}} = 0;$$

следовательно,

$$\int_C \frac{e^{-wz}\,dz}{1-e^{-z}} = \int_{C_2} \frac{e^{-wz}\,dz}{1-e^{-z}} = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{e^{-wz}}{1-e^{-z}} = 2\pi i,$$

т. е.

$$\operatorname*{Res}_{s=1} \zeta(s, w) = 1.$$

Таким образом, функция $\zeta(s, w)$ мероморфна на всей плоскости и имеет единственную особенность в точке $s=1$; эта особенность есть полюс первого порядка, причём вычет $\zeta(s, w)$ при $s=1$ равен 1. Тем самым одновременно доказано, что тождество

$$F(s) = (e^{2\pi s i}-1)\,\Gamma(s)\,\zeta(s, w)$$

справедливо всюду вне точки $s=1$.

Чтобы проводить дальнейшие оценки, заметим, что функция $\frac{e^{-wz}}{1-e^{-z}}$ ограничена во всей той части плоскости, где $|z-2\pi ik| \geqslant \frac{\pi}{2}$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ В самом деле, дробь $(1-e^{-z})^{-1}$ является периодической функцией с периодом, равным $2\pi i$. Поэтому её значения вполне определяются теми значениями, которые эта функция принимает в полосе $|t| \leqslant \pi$. Если из этой полосы удалить внутренность круга $|z| \leqslant \frac{\pi}{2}$, то в оставшейся части, как показывают элементарные оценки, функция $(1-e^{-z})^{-1}$ будет ограниченной. Но область, где $|z-2\pi ik| \geqslant \frac{\pi}{2}$, получается путём периодического повторения только что описанной части полосы $|t| \leqslant \pi$.

Значит $(1-e^{-z})^{-1}$ ограничена для z, подчинённого условию $|z-2\pi ik|\geqslant\frac{\pi}{2}$. Пусть $|1-e^{-z}|^{-1}\leqslant a_1$ в области, где $|z-2\pi ik|\geqslant\frac{\pi}{2}$. Если $\Re z\geqslant 0$, то

$$\left|\frac{e^{-wz}}{1-e^{-z}}\right|\leqslant\left|\frac{1}{1-e^{-z}}\right|\leqslant a_1;$$

если же $\Re z<0$, то, заменив переменное z на $-z$, мы сведём этот случай к предыдущему. Таким образом, при любом z, удовлетворяющем условию, упомянутому выше, имеет место неравенство

$$\left|\frac{e^{-wz}}{1-e^{-z}}\right|\leqslant a_1.$$

Функция $F(s)$ была определена как интеграл, взятый вдоль описанного выше контура C. Деформируем теперь этот контур, заменив в нём окружность радиуса r окружностью радиуса $R=(2n+1)\pi$, где n — любое натуральное число. (Лучи, входившие в состав контура, теперь соответственно заменяются лучами, начинающимися в точках $z=R$ и $z=Re^{2\pi i}$.) Эту новую окружность для краткости обозначим символом C_R. Заметим теперь, что между окружностями C и C_R функция

$$\frac{z^{s-1}e^{-wz}}{1-e^{-z}}$$

имеет особенности только в точках

$$z=2\pi i\nu,\ \nu=\pm 1, \pm 2, \ldots \pm n.$$

Эти точки являются полюсами первого порядка для неё и

$$\operatorname*{Res}_{z=2\pi i\nu}\frac{z^{s-1}e^{-wz}}{1-e^{-z}}=(2\pi i\nu)^{s-1}e^{-2\pi i\nu w};$$

поэтому, если в интеграле

$$F(s)=\int_C\frac{z^{s-1}e^{-wz}}{1-e^{-z}}\,dz$$

перейдём от контура C к контуру C_R, то, в силу теоремы Коши, получим:

$$-F(s)=-\int\limits_{C_R}\frac{z^{s-1}e^{-wz}}{1-e^{-z}}dz+$$

$$+(2\pi)^s\left[e^{\frac{\pi}{2}si}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{e^{-2\pi\nu wi}}{\nu^{1-s}}-e^{-\frac{1}{2}\pi si}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{e^{2\pi\nu wi}}{\nu^{1-s}}\right]. \quad (31.1)$$

Положим теперь $r\leqslant\frac{\pi}{2}$ и $\sigma<0$; простые геометрические соображения показывают, что окружность C_R целиком лежит в области, где $|z-2\pi ik|\geqslant\frac{\pi}{2}$ $(k=0,\ \pm1, \pm2,\ \ldots)$. Поэтому

$$\left|\int\limits_{C_R}\frac{z^{s-1}\,e^{-wz}\,dz}{1-e^{-z}}\right|\leqslant R^{\sigma-1}e^{2\pi|t|}a_1\cdot 2\pi R.$$

Следовательно, равенство (31.1) даёт в пределе при $n\to\infty$ такое соотношение:

$$-F(s)=(2\pi)^s\left[e^{\frac{\pi}{2}si}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-2\pi nwi}}{n^{1-s}}-e^{-\frac{1}{2}\pi si}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi nwi}}{n^{1-s}}\right].$$

Но выше мы видели, что

$$\zeta(s,\ w)=\frac{F(s)}{(e^{2\pi si}-1)\,\Gamma(s)}\ .$$

Кроме того, известно, что

$$\Gamma(s)\,\Gamma(1-s)=\pi\,(\sin\pi s)^{-1}\ [1].$$

Последние три соотношения дают нам:

$$\zeta(s,\ w)=i\,(2\pi)^{s-1}\Gamma(1-s)\left[e^{-\frac{\pi}{2}si}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-2\pi nwi}}{n^{1-s}}-\right.$$

$$\left.-e^{\frac{\pi}{2}si}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi nwi}}{n^{1-s}}\right].$$

Это тождество иногда называется формулой Гурвитца.

---

[1]) См. Е. Уиттекер и Г. Ватсон [1], стр. 12—14.

Если $\sigma > 1$, то $\Re(1-s) < 0$. В этом случае в формуле Гурвитца, чтобы она осталась справедливой, нужно заменить s на $1-s$. Но тогда мы будем иметь:

$$\zeta(1-s, w) =$$
$$= (2\pi)^{-s}\Gamma(s)\left(e^{\frac{\pi}{2}si}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-2\pi nwi}}{n^s} + e^{-\frac{\pi}{2}si}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi nwi}}{n^s}\right).$$

Доказанная нами теорема позволяет рассмотреть свойства рядов Дирихле с периодическими коэффициентами.

Теорема 32.

1°. *Пусть*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s},$$

причём $a_{n+k} = a_n$ *для* $n = 1, 2, \ldots$; *функция* $f(s)$ *будет целой функцией, если*

$$\sum_{l=1}^{k'} a_l = 0;$$

если же последняя сумма не равна 0, *то* $f(s)$ *правильна всюду вне* $s=1$, *в точке* $s=1$ *имеет полюс* 1-*го порядка, причём*

$$\operatorname*{Res}_{s=1} f(s) = \frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k} a_l,$$

и всюду вне точки $s=1$ *справедливо тождество*

$$f(s) = k^{-s}\sum_{l=1}^{k} a_l\zeta\left(s, \frac{l}{k}\right).$$

2°. *Всюду, кроме изолированных точек* $s = 1, 0, -1, -2, -3, \ldots$, *справедливо тождество*:

$$f(1-s) = (2\pi)^{-s}k^{-1}\Gamma(s)\left(e^{\frac{\pi}{2}si}\sum_{l'=1}^{k}s_2(l')\zeta\left(s, \frac{l'}{k}\right) + \right.$$
$$\left. + e^{-\frac{\pi}{2}si}\sum_{l'=1}^{k}s_1(l')\zeta\left(s, \frac{l'}{k}\right)\right),$$

где

$$s_1(l')=\sum_{l=1}^{k} a_l e^{2\pi i \frac{ll'}{k}}, \quad s_2(l')=\sum_{l=1}^{k} a_l e^{-2\pi i \frac{ll'}{k}}.$$

В самом деле, доказанное в теореме 29 тождество можно переписать так:

$$f(s)=k^{-s}\sum_{l=1}^{k} a_l \zeta\left(s, \frac{l}{k}\right).$$

Это тождество первоначально было доказано только для полуплоскости $\sigma>1$; однако, как мы знаем из теоремы 31, функция $\zeta(s, w)$ имеет смысл всюду, где $s\neq 1$. Поэтому правую часть последнего тождества можно рассматривать как аппарат для аналитического продолжения функции $f(s)$ иа всю плоскость переменного s; следовательно, и само рассматриваемое тождество оказывается справедливым всюду, кроме, может быть, значения $s=1$. Но отсюда следует, что

$$\lim_{s\to 1}(s-1)f(s)=k^{-1}\sum_{l=1}^{k} a_l \lim_{s\to 1}(s-1)\zeta\left(s, \frac{l}{k}\right)=$$

$$=k^{-1}\sum_{l=1}^{k} a_l,$$

следовательно, если $\sum\limits_{l=1}^{k} a_l=0$, то $f(s)$ — целая функция. В противном же случае она имеет полюс 1-го порядка в точке

$$s=1 \text{ и } \operatorname*{Res}_{s=1} f(s)=k^{-1}\sum_{l=1}^{k} a_l.$$

Заменяя в доказанном тождестве s на $1-s$, получим:

$$f(1-s)=k^{s-1}\sum_{l=1}^{k} a_l \zeta\left(1-s, \frac{l}{k}\right).$$

При $\sigma>1$ применим к настоящему случаю теорему 31, положив $w=\frac{l}{k}$; тогда после элементарных преобразований имеем:

$$f(1-s)=k^{s-1}(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\left(e^{\frac{\pi}{2}si}\sum_{l=1}^{k}a_l\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-2\pi in\frac{l}{k}}}{n^s}+\right.$$
$$\left.+e^{-\frac{\pi}{2}si}\sum_{l=1}^{k}a_l\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi in\frac{l}{k}}}{n^s}\right).$$

Положим, затем

$$n=k\nu+l',\quad \nu=0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\quad l'=1,\ 2,\ \ldots,\ k;$$

тогда, в силу периодичности показательной функции, будет:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-2\pi i n\frac{l}{k}}}{n^s}=\sum_{l'=1}^{k}e^{-2\pi ni\frac{ll'}{k}}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(k\nu+l')^s}=$$
$$=k^{-s}\sum_{l'=1}^{k}e^{-2\pi i\frac{ll'}{k}}\zeta\left(s,\ \frac{l'}{k}\right).$$

Аналогичным способом получим и следующее равенство:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi ni\frac{l}{k}}}{n^s}=k^{-s}\sum_{l'=1}^{k}e^{+\pi i\frac{ll'}{k}}\zeta\left(s,\ \frac{l'}{k}\right).$$

Следовательно,

$$f(1-s)=(2\pi)^{-s}k^{-1}\Gamma(s)\left(e^{\frac{\pi}{2}si}\sum_{l'=1}^{k}\zeta\left(s,\ \frac{l'}{k}\right)\sum_{l=1}^{k}a_le^{-2\pi i\frac{ll'}{k}}+\right.$$
$$\left.+e^{-\frac{\pi}{2}si}\sum_{l'=1}^{k}\zeta\left(s,\ \frac{l'}{k}\right)\sum_{l=1}^{k}a_le^{\frac{2\pi ill'}{k}}\right)=$$
$$=(2\pi)^{-s}k^{-1}\Gamma(s)\left(e^{\frac{\pi}{2}si}\sum_{l'=1}^{k}s_2(l')\cdot\zeta\left(s,\ \frac{l'}{k}\right)+\right.$$
$$\left.+e^{-\frac{\pi}{2}si}\sum_{l'=1}^{k}s_1(l')\,\zeta\left(s,\ \frac{l'}{k}\right)\right).$$

Это тождество доказывалось в предположении, что $\sigma > 1$. Но все входящие в него функции имеют смысл всюду на плоскости переменного s вне точек $s = 1, 0, -1, -2, \ldots$ Поэтому законно аналитически продолжить его на всю плоскость, исключая указанные изолированные особенности.

§ 6. L-ряды и L-функции Дирихле

В этом параграфе мы начнём теорию тех функций, изучение свойств которых составляет основную цель этой книги. Именно, мы займёмся теорией так называемых L-рядов (или L-функций) Дирихле, которые играют исключительно важную роль в современной аналитической теории чисел.

Пусть $\chi(n)$ обозначает характер, основной модуль которого равен числу k; пусть $h = \varphi(k)$.

Определение. L-рядом Дирихле называется ряд такого вида:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}.$$

L-функцией Дирихле (или просто L-функцией) называется функция, изображаемая L-рядом Дирихле. Эту функцию мы в дальнейшем будем обозначать символом $L(s, \chi)$.

Среди L-функций как частный случай находится функция $\zeta(s, 1)$, соответствующая значению $w = 1$. (Определение см. в § 5.) Мы в дальнейшем будем полагать:

$$\zeta(s, 1) = \zeta(s).$$

Функция $\zeta(s)$ называется функцией Римана[1]).

Всё предшествующее изложение теории рядов Дирихле позволяет теперь получить следующие теоремы, касающиеся основных свойств L-функций:

Теорема 33.

1°. *Функция $\zeta(s)$ правильна всюду, кроме точки $s = 1$, где она имеет полюс первого порядка, причём* $\operatorname{Res}_{s=1} \zeta(s) = 1$.

---

[1]) Подробная теория функции $\zeta(s)$ изложена в книге Titchmarsh'a The Zeta — Function of Riemann, Cambridge, 1930.

Далее, если $\chi(n) = \chi_0(n)$ — *главный характер, то функция* $L(s, \chi_0)$ *также правильна всюду, кроме точки* $s = 1$, *где она имеет полюс первого порядка, причём*

$$\operatorname*{Res}_{s=1} L(s, \chi_0) = \frac{h}{k} = \prod_{p/k}\left(1 - \frac{1}{p}\right);$$

если же $\chi(n)$ — *неглавный характер, то* $L(s, \chi)$ — *целая функция.*

2°. *Всюду вне изолированных особенностей* $s = 1$, 0, $-1, -2, \ldots$ *справедливо функциональное уравнение*:

$$\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\cos\frac{\pi}{2}s\,\zeta(s)$$

(*функциональное уравнение Римана*).

3°. *Если* $\chi(n, k)$ — *первообразный характер, то во всей плоскости переменного* s, *кроме изолированных точек* $s = 0, -1, -2, \ldots$, *справедливо функциональное уравнение*:

$$L(1-s, \chi) = \tau(\chi)(2\pi)^{-s}k^{s-\frac{1}{2}}\Gamma(s)\left(e^{\frac{\pi}{2}si}\chi(-1) + e^{-\frac{\pi}{2}si}\right)L(s, \bar{\chi}).$$

Первая часть утверждения, касающаяся функции $\zeta(s)$, является частным случаем теоремы 31. Соответствующие утверждения для функции $L(s, \chi_0)$ и $L(s, \chi)$ являются прямым следствием теорем 14 и 32, если в последней положить $a_l = \chi(l)$.

Вторая часть утверждения, касающаяся функция $\zeta(s)$, является прямым следствием теоремы 32, если заметить, что для $\zeta(s)$ имеют место равенства

$$s_1(l') = 1; \quad s_2(l') = 1.$$

Наконец, пусть $\chi(n, k)$ — первообразный характер и пусть $a_l = \chi(l)$; тогда, применяя теорему 32 и замечая, что, в силу теоремы 17, имеют место равенства

$$s_1(l')=\sum_{l=1}^{k}\chi(l)e^{\frac{2\pi i l l'}{k}}=\sqrt{k}\,\tau(\chi)\overline{\chi}(l'),$$

$$s_2(l')=\sum_{l=1}^{k}\chi(l)e^{-\frac{2\pi i l l'}{k}}=\sqrt{k}\,\tau(\chi)\chi(-1)\overline{\chi}(l'),$$

получим:

$$L(1-s,\ \chi)=$$
$$=(2\pi)^{-s}k^{-1}\Gamma(s)\,k^{1/2}\,\tau(\chi)\Big(\chi(-1)\,e^{\frac{\pi}{2}si}\sum_{l'=1}^{k}\overline{\chi}(l')\zeta\Big(s,\ \frac{l'}{k}\Big)+$$
$$+e^{-\frac{\pi}{2}si}\sum_{l'=1}^{k}\overline{\chi}(l')\zeta\Big(s,\ \frac{l'}{k}\Big)\Big).$$

С другой стороны, в силу теоремы 32, имеем:

$$\sum_{l'=1}^{k}\overline{\chi}(l')\,\zeta\Big(s,\ \frac{l'}{k}\Big)=k^sL(s,\ \overline{\chi}).$$

Поэтому

$$L(1-s,\ \chi)=$$
$$=\tau(\chi)(2\pi)^{-s}k^{s-\frac{1}{2}}\,\Gamma(s)\big(\chi(-1)\,e^{\frac{\pi}{2}si}+e^{-\frac{\pi}{2}si}\big)L(s,\ \overline{\chi}).$$

Это тождество, справедливое на всей плоскости, кроме, может быть, изолированных особых точек, носит название функционального уравнения функции $L(s,\ \chi)$.

Функциональным уравнениям для функций $\zeta(s)$ и $L(s,\ \chi)$ можно придать более симметричный вид, если ввести следующие обозначения. Положим:

$$\delta=\begin{cases}0, & \text{если } \chi(-1)=1,\\ 1, & \text{если } \chi(-1)=-1,\end{cases}$$

$$\varepsilon(\chi)=\begin{cases}\tau(\chi), & \text{если } \chi(-1)=1,\\ -i\tau(\chi), & \text{если } \chi(-1)=-1,\end{cases}$$

и введём в рассмотрение следующие функции:

$$\xi(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s),$$

$$\xi(s, \chi) = \left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right) L(s, \chi).$$

Теорема 34. *Функция $\xi(s)$ правильна всюду в плоскости переменного s, кроме точек $s=0$ и 1, где она имеет полюса 1-го порядка. Для любого $s \neq 0,1$ справедливо функциональное уравнение:*

$$\xi(1-s) = \xi(s).$$

Если $\chi(n, k)$ — первообразный характер, то $\xi(s, \chi)$ — целая функция, удовлетворяющая всюду в плоскости переменного s функциональному уравнению:

$$\xi(1-s, \chi) = \varepsilon(\chi)\, \xi(s, \bar{\chi}).$$

В самом деле, в силу своего определения, функция $\xi(s)$ правильна в полуплоскости $\sigma \geqslant \frac{1}{2}$, кроме точки $s=1$, где она имеет полюс 1-го порядка. Далее всюду, кроме изолированных особых точек, можно, применяя теорему 33, написать:

$$\xi(1-s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s) =$$

$$= \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \cdot 2(2\pi)^{-s} \Gamma(s) \cos\frac{\pi}{2} s\, \zeta(s) =$$

$$= \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) 2(2\pi)^{-s} \Gamma(s) \cos\frac{\pi}{2} s \times$$

$$\times \pi^{\frac{s}{2}} \Gamma^{-1}\left(\frac{s}{2}\right) \xi(s). \qquad (34.1)$$

Но, как известно, имеют место тождества:

$$\Gamma(s) = 2^{s-1}\pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right),$$

$$\sin\frac{\pi s}{2} = \pi\Gamma^{-1}\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma^{-1}\left(1-\frac{s}{2}\right)^{1)}. \tag{34.2}$$

Если во втором из этих тождеств заменить s на $1+s$, то получится:

$$\cos\frac{\pi}{2}s = \pi\Gamma^{-1}\left(\frac{s+1}{2}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{1-s}{2}\right).$$

Перемножив это равенство с выражением для $\Gamma(s)$, получим:

$$\Gamma(s)\cos\frac{\pi}{2}s = 2^{s-1}\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{1-s}{2}\right).$$

Но последнее выражение вместе с равенством (34.1) доказывает нужное тождество:

$$\xi(1-s) = \xi(s). \tag{34.3}$$

Это тождество было установлено всюду вне некоторого множества изолированных точек. Но, как было уже отмечено выше, наша функция имеет единственную особенность в полуплоскости $\sigma \geqslant \frac{1}{2}$, именно полюс 1-го порядка в точке $s=1$. Следовательно, в силу принципа аналитического продолжения, тождество (34.3) должно иметь место всюду в симметричной полуплоскости $\sigma \leqslant \frac{1}{2}$, кроме точки $s=0$, где $\xi(s)$ должна иметь тоже полюс 1-го порядка. Этим доказывается первая часть утверждения.

Пусть теперь $\chi(n, k)$ — первообразный характер. Всюду вне некоторого множества изолированных точек, в силу

---

1) См., например, Е. Уиттекер и Г. Ватсон [1], стр. 10 и 12.

теоремы 33, можем написать:

$$\xi(1-s,\chi)=\left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s+\delta}{2}\right)L(1-s,\chi)=$$

$$=\left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s+\delta}{2}\right)\tau(\chi)\,(2\pi)^{-s}k^{s-\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\Gamma(s)\left(e^{\frac{\pi}{2}si}\chi(-1)+e^{-\frac{\pi}{2}si}\right)L(s,\overline{\chi})=$$

$$=\tau(\chi)\,2^{-s}\pi^{-\frac{s+1}{2}}k^{\frac{s}{2}}\times$$

$$\times\Gamma(s)\,\Gamma\left(\frac{1-s+\delta}{2}\right)\left(e^{\frac{\pi}{2}si}\chi(-1)+e^{-\frac{\pi}{2}si}\right)L(s,\overline{\chi}).$$

С другой стороны,

$$L(s,\overline{\chi})=\left(\frac{\pi}{k}\right)^{\frac{s}{2}}\Gamma^{-1}\left(\frac{s+\delta}{2}\right)\xi(s,\overline{\chi}),$$

ибо величина δ не меняется от замены χ на $\overline{\chi}$. Поэтому

$$\xi(1-s,\chi)=\tau(\chi)\,2^{-s}\pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma(s)\,\Gamma\left(\frac{1-s+\delta}{2}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{s+\delta}{2}\right)\times$$

$$\times\left(e^{\frac{\pi}{2}si}\chi(-1)+e^{-\frac{\pi}{2}si}\right)\xi(s,\overline{\chi}).$$

Заменим во втором из тождеств (34.2) s на $s+1-\delta$; тогда получим:

$$\sin\frac{\pi}{2}(s+1-\delta)=\pi\Gamma^{-1}\left(\frac{s+1-\delta}{2}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{1-s+\delta}{2}\right).$$

Перемножая последнее равенство почленно с первым из тождеств (34.2), убедимся, что правая часть полученного произведения при любом из двух возможных значений δ равна:

$$2^{s-1}\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma^{-1}\left(\frac{1-s+\delta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right).$$

Следовательно,

$$\Gamma(s)\sin\frac{\pi}{2}(s+1-\delta)=2^{s-1}\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma^{-1}\left(\frac{1-s+\delta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right).$$

Далее при любом из указанных двух значений δ справедливо тождество:

$$\tau(\chi)\left(e^{\frac{\pi}{2}si}\chi(-1)+e^{-\frac{\pi}{2}si}\right)=2\varepsilon(\chi)\sin\frac{\pi}{2}(s+1-\delta).$$

Сопоставляя два последних равенства с выражением для $\xi(1-s, \chi)$, получим окончательно:

$$\xi(1-s, \chi)=\varepsilon(\chi)\,\xi(s, \overline{\chi}).$$

Это тождество было установлено всюду вне упомянутого выше множества изолированных точек. Но, в силу своего определения, функция $\xi(s, \chi)$ правильна всюду в плоскости $\sigma\geqslant\frac{1}{2}$. Но в таком случае принцип аналитического продолжения требует, чтобы последнее равенство имело место всюду и в симметрично расположенной полуплоскости $\sigma\leqslant\frac{1}{2}$, т. е. это тождество имеет место всюду и, следовательно, $\xi(s, \chi)$ — целая функция.

§ 7. Оценка модуля функции $L(s, \chi)$ в критической полосе

Дальнейшая теория функции $L(s, \chi)$ в большой степени зависит от оценки роста модуля этой функции в критической полосе и в окрестности прямой $\sigma=1$. A priori ясно, что мажоранту для этого модуля нужно выбрать так, чтобы она зависела только от параметров t и k и нижней границы σ, ибо параметр σ ограничен с обеих сторон в рассматриваемой части плоскости. Исходным фактом для дальнейших рассуждений будет служить следующее тождество (1).

Пусть

$$a_1, a_2, \ldots$$

— некоторая последовательность чисел, N — натуральное число, s — комплексное число; имея в виду теорему A, положим:

$$\lambda_n=n,\quad c_1=c_2=\ldots=c_{N-1}=0,\quad c_n=a_n \text{ для } n\geqslant N,$$
$$\Phi(x)=x^{-s};$$

тогда будем иметь:

$$\sum_{N \leqslant n \leqslant \infty} \frac{a_n}{n^s} = s \int_N^\infty C(u)\, u^{-s-1}\, du + C(x)\, x^{-s}, \tag{1}$$

где

$$C(u) = \sum_{N \leqslant n \leqslant u} a_n,$$

причём

$$C(u) = 0 \text{ для } u < N.$$

Из этого тождества при частных предположениях получим ряд новых соотношений.

1. Пусть $a_n = 1$ при любом n и пусть $\sigma > 1$; тогда тождество (1) перепишется так:

$$\sum_{N \leqslant n \leqslant \infty} \frac{1}{n^s} = s \int_N^\infty ([u] - N + 1)\, u^{-s-1}\, du + ([x] - N + 1)\, x^{-s} =$$

$$= s \int_N^\infty (u - (u) - N + 1)\, u^{-s-1}\, du + ([x] - N + 1) x^{-s} =$$

$$= s\, \frac{N^{1-s} - x^{1-s}}{s-1} + [x]\, x^{-s} - (N-1)\, N^{-s} - s \int_N^x (u)\, u^{-s-1}\, du,$$

где $[x]$ и (x) обозначают целую и дробную части числа x. Заметим теперь, что при наших предположениях $[x]\, x^{-s} \to 0$, если $x \to \infty$; поэтому, переходя к пределу при $x \to \infty$, получим:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^s} + s\, \frac{N^{1-s}}{s-1} - (N-1)\, N^{-s} - s \int_N^\infty (u)\, u^{-s-1}\, du.$$

В частности, полагая $N = 1$ в этом тождестве, будем иметь:

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_1^\infty (u)\, u^{-s-1}\, du.$$

Два последних тождества были доказаны в предположении, что $\sigma > 1$. Но

$$|(u)\, u^{-s-1}| \leqslant u^{-\sigma-1},$$

причём функция $u^{-\sigma-1}$ абсолютно интегрируема; следовательно, в этих тождествах правые части имеют смысл и изображают правильные функции во всей плоскости $\sigma>0$, а сами тождества аналитически продолжаемы на всю эту полуплоскость.

Второе из рассматриваемых тождеств показывает, что $\zeta(\bar{s})=\overline{\zeta(s)}$ для $\sigma>0$, где $\bar{s}$ — число, комплексно сопряжённое с s.

2. Пусть $a_n=\chi(n)$, где $\chi(n)$ — неглавный характер, основной модуль которого равен числу k. В этом случае тождество (1) представится в такой форме:

$$\sum_{N\leqslant n\leqslant x}\frac{\chi(n)}{n^s}=s\int_N^x H(u)\,u^{-s-1}\,du+H(x)\,x^{-s},$$

где

$$H(u)=\sum_{N\leqslant n\leqslant u}\chi(n).$$

Но, в силу теоремы 14,

$$|H(u)|\leqslant\frac{h}{2},\quad \text{где}\quad h=\varphi(k).$$

Следовательно, полагая $\sigma>0$ и замечая, что $H(x)\,x^{-s}\to 0$ при $x\to\infty$, получим после перехода к пределу:

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{N-1}\frac{\chi(n)}{n^s}+s\int_N^\infty H(u)\,u^{-s-1}\,du.$$

В частности,

$$L(s,\chi)=s\int_1^\infty H(u)\,u^{-s-1}\,du.$$

Последнее тождество убеждает нас в том, что

$$L(\bar{s},\chi)=\overline{L(s,\bar{\chi})}\ \text{для}\ \sigma>0.$$

Теорема 35. *Пусть* $1/2\leqslant\sigma_0<1$, χ_0 *и* χ — *соответственно главный и неглавный характеры, основные модули которых равны числу* k. *Существует такая положительная величина* C_1, *зависящая только от* σ_0, *что*

1°.

$$|\zeta(s)| \leqslant c_1 |t|^{1-\sigma_0} \quad \text{и} \quad |L(s, \chi_0)| < c_1 (k|t|)^{1-\sigma_0}$$

в области $\sigma \geqslant \sigma_0$, $|t| \geqslant \frac{1}{2}$.

2°.

$$|L(s, \chi)| \leqslant c_1 k (|t| + 1)^{1-\sigma_0}$$

в полуплоскости $\sigma \geqslant \sigma_0$.

3°.

$$|L(s, \chi)| \leqslant c_1 \lg k$$

в области

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{1}{\lg k}, \quad |t| \leqslant 2.$$

Так как

$$\zeta(\overline{s}) = \overline{\zeta(s)} \quad \text{и} \quad L(\overline{s}, \chi) = \overline{L(s, \overline{\chi})}$$

и так как основной модуль $\overline{\chi}(n)$ также равен k, то нашу теорему достаточно доказать только для $t \geqslant 0$. Далее заметим, что если $\sigma \geqslant 2$, то

$$|\zeta(s)|, \quad |L(s, \chi)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}; \tag{35.1}$$

поэтому доказательство достаточно провести только для случая, когда $\sigma_0 \leqslant \sigma \leqslant 2$. Это мы и будем предполагать в дальнейшем.

Пусть теперь $t \geqslant \frac{1}{2}$. Выше мы видели, что

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^s} + s\frac{N^{1-s}}{s-1} - (N-1)N^{-s} - s\int_N^{\infty} (u)\, u^{-s-1}\, du.$$

Полагая в этом равенстве $N = [t] + 1$, получим:

$$|\zeta(s)| \leqslant \sum_{n=1}^{[t]} \frac{1}{n^{\sigma_0}} + \left(\left|\frac{s}{s-1}\right| + 1\right) N^{1-\sigma_0} +$$

$$+ (t+2)\int_N^{\infty} u^{-\sigma_0-1}\, du < \int_1^t \frac{du}{u^{\sigma_0}} + 1 + \left(\left|\frac{s}{s-1}\right| + 1\right) N^{1-\sigma_0} +$$

$$+ \frac{t+1}{\sigma_0 N^{\sigma_0}} < c_3 t^{1-\sigma_0}. \tag{35.2}$$

Рассмотрим теперь функцию $L(s, \chi_0)$. Нетрудно видеть, что в полуплоскости $\sigma > 1$ справедливо тождество:

$$L(s, \chi_0) = \prod_p \left(1 - \frac{\chi_0(p)}{p^s}\right)^{-1} =$$

$$= \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \prod_{p/k} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \zeta(s) \prod_{p/k} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right). \qquad (35.3)$$

Но, в силу принципа аналитического продолжения, это тождество можно распространить на всю плоскость, исключая точку $s = 1$. Следовательно, принимая во внимание (35.2), убеждаемся в справедливости неравенства:

$$|L(s, \chi_0)| \leqslant |\zeta(s)| \prod_{p/k} \left(1 + \frac{1}{p^{\sigma_0}}\right) \leqslant c_3 t^{1-\sigma_0} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^{\sigma_0}} \leqslant$$

$$\leqslant c_4 t^{1-\sigma_0} \int_1^k \frac{du}{u^{\sigma_0}} < c_5 (tk)^{1-\sigma_0} \qquad (35.4)$$

в полуполосе $\sigma_0 \leqslant \sigma \leqslant 2$, $t \geqslant \frac{1}{2}$.

Далее рассмотрим функцию $L(s, \chi)$ в полуполосе $2 \geqslant \sigma \geqslant \sigma_0$, $t \geqslant 0$. Выше мы видели, что

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\chi(n)}{n^s} + s \int_N^\infty H(u) u^{-s-1} du. \qquad (35.5)$$

Положим опять $N = [t] + 1$; тогда получим:

$$|L(s, \chi)| \leqslant \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^{\sigma_0}} + \frac{(t+2)h}{2} \int_N^\infty u^{-\sigma_0 - 1} du \leqslant$$

$$\leqslant \int_1^t \frac{du}{u^{\sigma_0}} + \frac{(t+2)h}{2\sigma_0 N^{\sigma_0}} < c_6 h (t+1)^{1-\sigma_0}. \qquad (35.6)$$

Наконец, пусть $2 \geqslant \sigma \geqslant 1 - \frac{1}{\lg k}$; $|t| \leqslant 2$ и $N = k$; тогда из равенства (35.5) следует, что

$$|L(s,\chi)| \leqslant \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n^\sigma} + |s| \int_k^\infty |H(u)|\, u^{-\sigma-1}\, du \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{k-1} \frac{k^{\frac{1}{\lg k}}}{n} + \frac{|s|\, k}{\sigma k^\sigma} \leqslant c_7 \left(\lg k + k \cdot k^{-1+\frac{1}{\lg k}} \right) \leqslant c_8 \lg k. \quad (35.7)$$

Полагая теперь

$$c_1 = \max\left(\frac{\pi^2}{6},\ c_3,\ c_5,\ c_6,\ c_8\right)$$

и сопоставляя неравенства (35.1), (35.2), (35.4), (35.6), (35.7), убедимся в справедливости теоремы.

Теорема 36. *На отрезке действительной оси* $1 < \sigma \leqslant 2$ *имеет место неравенство*:

$$\frac{1}{\sigma - 1} < \zeta(\sigma) < \frac{1}{\sigma - 1} + 1 \leqslant \frac{2}{\sigma - 1}.$$

В прямоугольнике $1 \leqslant \sigma \leqslant 2$, $|t| \leqslant 2$ *справедливы оценки:*

$$\left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1} \right| \leqslant c_2, \qquad -\Re \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} < c_2 + \Re \frac{1}{s-1},$$

$$-\Re \frac{L'(s,\chi_0)}{L(s,\chi_0)} < \Re \frac{1}{s-1} + c_2 + \lg k.$$

Для доказательства заметим, что

$$\frac{1}{(n+1)^\sigma} < \int_n^{n+1} \frac{du}{u^\sigma} < \frac{1}{n^\sigma};$$

поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^\sigma} < \int_1^\infty \frac{du}{u^\sigma} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma},$$

т. е.

$$\zeta(\sigma) - 1 < \frac{1}{\sigma - 1} < \zeta(\sigma),$$

что доказывает первую половину утверждения.

Вторая половина утверждения непосредственно следует из того факта, что функция $\zeta(s)$ в указанном прямоугольнике не имеет нулей, а в точке $s=1$ имеет плюс 1-го порядка. Далее, как мы видели выше (35.3),

$$L(s, \chi_0)=\zeta(s)\prod_{p/k}\left(1-\frac{1}{p^s}\right),$$

откуда, логарифмируя и дифференцируя, получаем:

$$\frac{L'}{L}(s, \chi_0)=\frac{\zeta'}{\zeta}(s)+\sum_{p/k}\frac{\lg p}{p^s-1};$$

следовательно,

$$\left|\frac{L'(s, \chi_0)}{L(s, \chi_0)}+\frac{1}{s-1}\right| \leqslant \left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}+\frac{1}{s-1}\right|+\left|\sum_{p/k}\frac{\lg p}{p^s-1}\right| \leqslant$$

$$\leqslant c_2+\sum_{p/k}\frac{\lg p}{p-1} \leqslant c_2+\sum_{p/k}\lg p \leqslant c_2+\lg k.$$

Отсюда

$$-\Re\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}<\Re\frac{1}{s-1}+c_2,$$

$$-\Re\frac{L'(s, \chi_0)}{L(s, \chi_0)}<\Re\frac{1}{s-1}+c_2+\lg k.$$

ГЛАВА III

НУЛИ ФУНКЦИЙ ДИРИХЛЕ

§ 1. Первая теорема Пейджа

В теории функций Дирихле наиболее загадочным пунктом являются законы распределения их нулей на плоскости комплексного переменного. Несмотря на большие усилия крупнейших математиков преодолеть трудности, возникающие на пути к установлению этих законов, вопрос о них и в настоящее время ещё очень далёк от сколько-нибудь исчерпывающего решения. Собственно говоря, все трудности связаны только с теми нулями L-функции, которые лежат в полосе $0<\sigma<1$; эту полосу ради краткости мы будем называть «критической».

Риман (B. Riemann, 1) высказал гипотезу, что все нули функции $\zeta(s)$, принадлежащие критической полосе, лежат на прямой $\sigma=\frac{1}{2}$. Это предложение, известное под именем гипотезы Римана, не доказано до сих пор.

Харди и Литтльвуд (Hardy, 1) высказали гипотезу, ещё более смелую: они считают, что высказанное Риманом предположение о нулях $\zeta(s)$ распространяется на все $L(s, \chi)$, т. е. что нули всех L-функций в критической полосе также имеют действительную часть, равную $^1/_2$. Эта гипотеза как идущая ещё далее, чем гипотеза Римана, разумеется, ещё менее исследована и оправдана.

В чём причина загадочного поведения нулей интересующих нас функций? Как это было уже ясно самому Риману, распределение этих нулей тесно связано с целым рядом чисто арифметических фактов, касающихся распределения простых чисел в ряду всех натуральных чисел. Эта связь так тесна, что всякий успех в теории L-функций так или иначе отражается и на проблемах чисто арифметических и обратно.

В настоящей главе излагаются два очень важных результата, представляющих собой наиболее далеко идущие сведения о нулях L-функций. Это — теорема Пейджа и теорема Зигеля. Обе эти теоремы позволят нам получить впоследствии серьёзные результаты, касающиеся законов распределения простых чисел (см. главу IV). Мы начнём изложение с теоремы Пейджа. Установим сначала один достаточно общий результат. Пусть величины a_n равны значениям ограниченной и вполне мультипликативной функции индексов n; тогда, как мы видели выше, справедливы неравенства:

$$|a_n| \leqslant 1, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Пусть далее

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \quad f_1(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{n^s},$$

причём обе функции в рассматриваемом случае будут правильными в полуплоскости $\sigma > 1$. Относительно таких функций справедливо следующее предложение:

Теорема 37.

1° *$f(s)$ и $f_1(s)$ не имеют нулей в полуплоскости $\sigma > 1$.*

2° *Если функция $f(s)$ правильна в окресткости точки $s = 1 + ti$, а функция $f_1(s)$ — в окрестности $s_1 = 1 + 2ti$, то*

$$f(1 + ti) \neq 0.$$

В силу теоремы 27 имеют место равенства

$$f(s) = \prod_p \left(1 - \frac{a_p}{p^s}\right)^{-1} \quad \text{или} \quad \frac{1}{f(s)} = \prod_p \left(1 - \frac{a_p}{p^s}\right),$$

и ряд

$$\sum_p \frac{a_p}{p^s}$$

абсолютно сходится для $\sigma > 1$ как часть ряда, изображающего $f(s)$. Поэтому бесконечное произведение, стоящее в правой части последнего равенства, также сходится абсолютно. Следовательно, изображаемая им функция $(f(s))^{-1}$

правильна для $\sigma > 1$, и стало быть $f(s) \neq 0$ в полуплоскости $\sigma > 1$. Аналогично доказывается отсутствие нулей и у функции $f_1(s)$.

Далее, в силу теоремы 28, имеем:

$$-\frac{f'(s)}{f(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n) a_n}{n^s} \quad \text{и} \quad -\frac{f_1'(s)}{f_1(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n) a_n^2}{n^s},$$

и, полагая

$$a_n = \rho_n e^{\varphi_n i}, \quad \psi_n = \varphi_n - t \lg n,$$

получим в результате непосредственных подсчётов:

$$-3\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} - 4\Re\frac{f'(\sigma+it)}{f(\sigma+it)} - \Re\frac{f_1'(\sigma+2it)}{f_1(\sigma+2it)} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma}(3 + 4\rho_n \cos\psi_n + \rho_n^2 \cos 2\psi_n) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma}(1 - \rho_n^2 + 2(1 + \rho_n \cos\psi_n)^2) \geqslant 0. \quad (37.1)$$

Умножая обе части последнего равенства на $\sigma - 1$, перейдём к пределу при $\sigma \to 1$. Так как, по предположению, в точках $s = 1 + ti$ и $s_1 = 1 + 2ti$ обе функции $f(s)$ и $f_1(s)$ соответственно правильны, то существуют пределы

$$m = \lim_{\sigma \to 1} (\sigma - 1)\frac{f'(\sigma+it)}{f(\sigma+it)},$$

$$m_1 = \lim_{\sigma \to 1} (\sigma - 1)\frac{f_1'(\sigma+2it)}{f_1(\sigma+2it)},$$

причём m равно или 0, или порядку нуля в точке $s = 1 + ti$, $m_1 \geqslant 0$. Поэтому в результате перехода к пределу неравенство (37.1) примет вид:

$$3 - 4m - m_1 \geqslant 0, \quad \text{т. е.} \quad m \leqslant \frac{3}{4},$$

откуда следует, что $m = 0$ и что

$$f(1 + ti) \neq 0.$$

Приложим эту теорему к L-функциям. Здесь придётся рассмотреть отдельные частные случаи.

1. Если $\chi(n)$ — характер 3-го рода, то наша теорема приложима для всех значений t, т. е. в этом случае $L(1+ti)\neq 0$ при любом значении t.

2. Если $\chi_0(n)$ — характер главный, то наши рассуждения приложимы при любом $t\neq 0$ и неприложимы при $t=0$, но в точке $s=1$ функция $L(s, \chi_0)$, так же как и $\zeta(s)$, имеет полюс 1-го порядка. Поэтому опять $L(1+ti)\neq 0$ при любом $t\neq 0$.

3. Наконец, если χ — действительный характер, то указанные рассуждения применимы всюду, кроме $t=0$, а для этого значения t приходится применить совсем другие рассуждения, чтобы показать, что $L(1, \chi)\neq 0$. Эти последние мы разовьём в следующей теореме:

Теорема 38. *Пусть χ — действительный характер, основной модуль которого равен k: тогда $L(1, \chi)>0$.*

Для доказательства положим:

$$f(n)=\sum_{d/n}\chi(d);\quad h=\varphi(k),\ m=(4h)^6;\quad z=\sum_{n=1}^{m}2(m-n)f(n).$$

Нетрудно проверить, что $f(n)$ — мультипликативная функция; в самом деле, пусть $(n, n')=1$; тогда

$$f(n)f(n')=\sum_{d/n}\chi(d)\cdot\sum_{d'/n'}\chi(d')=\sum_{dd'/nn'}\chi(dd')=$$
$$=\sum_{d''/nn'}\chi(d'')=f(nn'),$$

ибо каждый делитель числа nn' единственным способом может быть представлен как произведение делителей соответственно n и n'.

Далее очевидно, что

$$f(p^l)=\begin{cases}1+1+\ldots+1=l+1, & \text{если } \chi(p)=1,\\ 1-1+1-\ldots+1=1, & \text{если } \chi(p)=-1,\ l\text{—чётное},\\ 1-1+1-\ldots-1=0, & \text{если } \chi(p)=-1,\ l\text{—нечётное}.\end{cases}$$

Следовательно,

$$f(n)\geqslant\begin{cases}1, & \text{если } n \text{ — точный квадрат},\\ 0 & \text{всегда}.\end{cases}$$

Поэтому, оценивая z снизу, имеем:

$$z \geqslant \sum_{b^2 \leqslant m} 2(m-b^2) = \sum_{b=1}^{\sqrt{m}} 2(m-b^2) \geqslant \sum_{b=1}^{\frac{1}{2}\sqrt{m}} 2\left(m-\frac{m}{4}\right) =$$

$$= \frac{3}{4} m^{3/2}. \qquad (38.1)$$

Чтобы оценить z сверху, заметим прежде всего, что

$$z = \sum_{ab \leqslant m} 2(m-ab)\chi(b) = z_1 + z_2, \qquad (38.2)$$

где

$$z_1 = \sum_{a=1}^{m^{1/3}} 2(m-ab) \sum_{b=m^{2/3}}^{\left[\frac{m}{a}\right]} \chi(b),$$

$$z_2 = \sum_{b=1}^{m^{2/3}} \chi(b) \sum_{1 \leqslant a \leqslant \left[\frac{m}{b}\right]} 2(m-ab).$$

Но

$$z_1 = \sum_{a=1}^{m^{1/3}} 2(m-ab) \left| \sum_{b=m^{2/3}}^{\left[\frac{m}{a}\right]} \chi(b) \right| \leqslant \sum_{b=1}^{m^{1/3}} 2m \cdot \frac{h}{2} =$$

$$= m^{1/3} \cdot mh = m^{4/3} h. \qquad (38.3)$$

С другой стороны,

$$\sum_{a=1}^{\left[\frac{m}{b}\right]} 2(m-ab) = 2m\left[\frac{m}{b}\right] - b\left(\left[\frac{m}{b}\right]+1\right)\left[\frac{m}{b}\right] =$$

$$= 2m\left(\frac{m}{b}-\vartheta\right) - b\left(\frac{m}{b}-\vartheta+1\right)\left(\frac{m}{b}-\vartheta\right) = \frac{m^2}{b} - m + b\theta,$$

где ϑ и θ — величины, абсолютные значения которых $\leqslant 1$,

следовательно,

$$z_2 \leqslant m^2 \sum_{b=1}^{m^{2/3}} \frac{\chi(b)}{b} + m \left| \sum_{b=1}^{m^{2/3}} \chi(b) \right| + \left| \sum_{b=1}^{m^{2/3}} \chi(b)\,\theta\, b \right| \leqslant$$

$$\leqslant m^2 \left(L(1, \chi) - \sum_{m^{2/3}+1}^{\infty} \frac{\chi(b)}{b} \right) + m\,\frac{h}{2} + m^{2/3} m^{2/3} <$$

$$< m^2 \left(L(1, \chi) - \sum_{m^{2/3}+1}^{\infty} \frac{\chi(b)}{b} \right) + m^{4/3}\,\frac{h}{2} + m^{4/3}.$$

Далее, в § 7 предшествующей главы мы видели, что

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = s \int_N^{\infty} H(u)\, u^{-s-1}\, du;$$

значит

$$\left| \sum_{b=m^{2/3}+1}^{\infty} \frac{\chi(b)}{b} \right| \leqslant \int_{m^{2/3}+1}^{\infty} \left| H(u) \right| u^{-2}\, du \leqslant \frac{h}{2} m^{-2/3}.$$

Поэтому

$$z_2 \leqslant m^2 L(1, \chi) + \frac{h}{2} m^{4/3} + m^{4/3} + \frac{h}{2}\, m^{4/3} \leqslant$$

$$\leqslant m^2 L(1, \chi) + (2h+1)\, m^{4/3}. \qquad (38.4)$$

Сопоставляя теперь четыре неравенства (38.1) — (38.4), получим:

$$^{3}/_{4}\, m^{3/2} < m^2 L(1, \chi) + (2h+1)\; m^{4/3},$$

или

$$4^{12} h^{12} L(1, \chi) > 3h \cdot 4^8 h^8 - (2h+1)\, 4^8 h^8 = (h-1)\, 4^8 h^8 \geqslant 4^8 h^8.$$

$$L(1, \chi) > 4^{-4} h^{-4} > 0.$$

Перейдём теперь к исследованию распределения нулей в остальной части плоскости, т. е. для $\sigma < 1$. При этом исследовании приходится различать два случая. Пусть сначала $\chi(n)$ — первообразный характер. Рассмотрим соответствующие ему функции $L(s,\chi)$ и $\xi(s,\chi)$, определение которых было дано в прошлой главе.

Теорема 39.

1° $\xi(s,\chi)$ *может иметь нули только в полосе* $0<\sigma<1$, *где она обращается в нуль одновременно с* $L(s,\chi)$.

2° $L(s,\chi)$ *имеет нули в полуплоскости* $\sigma<0$ *в точках* $s=-2\nu-\delta$, *где* $\nu=0,1,2,\ldots$,

$$\delta=\begin{cases} 0, & \textit{если } \chi(-1)=1, \\ 1, & \textit{если } \chi(-1)=-1. \end{cases}$$

В самом деле $\left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right)$ — функция правильная и не обращается в 0 в полуплоскости $\sigma>0$. Поэтому $\xi(s,\chi)$ и $L(s,\chi)$ обращаются в 0 одновременно для этих значений σ. Если же $\sigma\leqslant 0$, то

$$\xi(s,\chi)=\varepsilon(\chi)\,\xi(1-s,\ \bar{\chi}).$$

А так как в этом случае $1-\sigma>1$, то $\xi(1-s,\bar{\chi})\neq 0$; тем самым и $\xi(s,\chi)\neq 0$.

Что касается функции $L(s,\chi)$, то заметим прежде всего, что

$$L(s,\chi)=\left(\frac{\pi}{k}\right)^{\frac{s}{2}}\Gamma^{-1}\left(\frac{s+\delta}{2}\right)\xi(s,\chi).$$

Следовательно, согласно сказанному выше, единственными нулями функции $L(s,\chi)$ могут быть только нули функции $\Gamma^{-1}\left(\frac{s+\delta}{2}\right)$. Таковыми, как известно из теории функции $\Gamma(s)$, являются точки $\frac{s+\delta}{2}=0,-1,-2,\ldots$ Значит нулями $L(s,\chi)$ являются точки $s=-2\nu-\delta$, $\nu=0,1,2,\ldots$ Кратность всех этих нулей равна 1.

Обратимся теперь к случаю, когда $\chi(n,k)$ представляет собой производный характер.

В этом случае, как известно из § 2 гл. I, имеет место разложение:

$$\chi(n,k)=\chi_0(n,k')\,\chi(n,k''),$$

где $(k',k'')=1$, $\chi_0(n,k')$ — главный и $\chi(n,k'')$ — первообразный характер. И стало быть для любого $\sigma > 1$ будем иметь:

$$L(s, \chi) = \prod_{p} \left(1 - \frac{\chi(p, k)}{p^s}\right)^{-1} = \prod_{p/k'} \left(1 - \frac{\chi(p, k'')}{p^s}\right) \times$$
$$\times \prod_{p} \left(1 - \frac{\chi(p, k'')}{p^s}\right)^{-1} = \prod_{p/k'} \left(1 - \frac{\chi(p, k'')}{p^s}\right) L(s, \chi(n, k'')).$$

Но последнее тождество можно распространить на всю плоскость (s), а это показывает, что функция $L(s, \chi)$ имеет те же нули, что и $L(s, \chi(n, k''))$ и кроме того, все нули произведения

$$\prod_{p/k'} \left(1 - \frac{\chi(p, k'')}{p^s}\right),$$

которые все лежат на прямой $\sigma = 0$ и могут быть вычислены совершенно элементарными методами.

Подводя итог сказанному, заключаем, что распределение нулей функции $L(s, \chi)$ в полуплоскости $\sigma \leqslant 0$ вполне выяснено и точное расположение их может быть вычислено. Поэтому все нули функции $L(s, \chi)$, расположенные в полуплоскости $\sigma \leqslant 0$, будем называть *тривиальными*.

Но, в силу теоремы 37, функция $L(s, \chi)$ не обращается в нуль для $\sigma \geqslant 1$. Поэтому все нули $L(s, \chi)$, которые не принадлежат к числу тривиальных, должны находиться в полосе $0 < \sigma < 1$. Эти нули мы будем называть *нетривиальными*, а полосу $0 < \sigma < 1$ — *критической* полосой функции $L(s, \chi)$.

Такие нетривиальные нули существуют и даже в бесконечном числе для любой функции $L(s, \chi)$, в том числе и для $\zeta(s)$[1]. В общем случае этот вопрос будет рассмотрен во 2-ой части этой книги, гл. VI.

Выше мы показали, что L-функции, соответствующие производным характерам, отличаются от таковых же функций для первообразных характеров множителем, имеющим только тривиальные нули; поэтому достаточно исследовать закон распределения нетривиальных нулей только для L-функций, которые соответствуют первообразным характерам.

---

[1]) См. *Ингам*, теорема 18.

Этой именно проблеме мы посвящаем всю остальную часть этой главы. Но предварительно необходимо рассмотреть некоторые вспомогательные предложения, лежащие в основе всего дальнейшего исследования.

Теорема B. *Пусть в круге* $|z-z_0|<R$ *функция*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$

правильна и удовлетворяет неравенству:

$$\Re f(z)\leqslant U;$$

тогда

$$|c_n|\leqslant\frac{2(U-\Re c_0)}{R^n}\qquad(n=1,2,3,\ldots),$$

и во всём круге $|z-z_0|<r<R$ *имеем:*

$$|f(z)-f(z_0)|\leqslant\frac{2r}{R-r}\left\{U-\Re f(z_0)\right\},$$

$$\left|\frac{f^{\nu}(z)}{\nu!}\right|\leqslant\frac{2R}{(R-r)^{\nu+1}}\left\{U-\Re f(z_0)\right\},\quad\nu=1,2,\ldots\text{[1]}$$

Теорема B′. *Пусть в круге* $|s-s_0|\leqslant R$ *функция* $f(s)$ *правильна и* $f(s_0)\neq 0$. *Тогда в любом круге* $|s-s_0|\leqslant r<\frac{R}{2}$ *имеет место неравенство*

$$\left|\frac{f'(s)}{f(s)}+\sum_{\rho}\frac{1}{\rho-s}\right|\leqslant\frac{R}{\left(\frac{R}{2}-r\right)^2}\lg\frac{M}{|f(s_0)|}.$$

Для значения $s=s_0$, *кроме того, имеем:*

$$-\Re\frac{f'(s)}{f(s)}\leqslant\frac{4}{R}\lg\frac{M}{|f(s_0)|}+\sum_{\rho}\Re\frac{1}{\rho-s_0},$$

где $M=\max\limits_{|s-s_0|\leqslant R}|f(s)|$, *а* ρ *пробегает все нули функции* $f(s)$, *лежащие в круге* $|s-s_0|\leqslant\frac{R}{2}$ *(если таких нулей нет,*

[1]) Доказательство см. Ингам, стр. 66, теорема E.

то соответственные суммы в двух последних неравенствах отсутствуют).

Функция

$$\lg f(s) \prod_{\rho}\left(1-\frac{s-s_0}{\rho-s_0}\right)^{-1}$$

правильна в круге $|s-s_0| \leqslant \frac{R}{2}$, если ρ пробегает все нули $f(s)$, лежащие в этом круге (кратные нули повторяются столько раз, какова их кратность). Функция же

$$f(s) \prod_{\rho}\left(1-\frac{s-s_0}{\rho-s_0}\right)^{-1}$$

правильна в круге $|s-s_0| \leqslant R$; поэтому её модуль достигает своего максимума на самой окружности $|s-s_0|=R$. Значит

$$\max_{|s-s_0| \leqslant R}\left|f(s) \prod_{\rho}\left(1-\frac{s-s_0}{\rho-s_0}\right)^{-1}\right| \leqslant$$

$$\leqslant M \times \max_{|s-s_0|=R} \prod_{\rho}\left|1-\frac{s-s_0}{\rho-s_0}\right|^{-1}.$$

Но

$$\left|1-\frac{s-s_0}{\rho-s_0}\right| \geqslant \frac{|s-s_0|}{|\rho-s_0|}-1 \geqslant 1;$$

следовательно, мы имеем:

$$\max_{|s-s_0| \leqslant R}\left|f(s) \prod_{\rho}\left(1-\frac{s-s_0}{\rho-s_0}\right)^{-1}\right| \leqslant M.$$

Заменим теперь в теореме B букву

$$R \text{ на } \frac{R}{2}, \; z \text{ на } s, \; z_0 \text{ на } s_0,$$

$$f(s) \text{ — на } \lg f(s) \prod_{\rho}\left(1-\frac{s-s_0}{\rho-s_0}\right)^{-1};$$

тогда можно положить:

$$U=\max_{|s-s_0| \leqslant \frac{R}{2}} \Re \lg f(s) \prod_{\rho}\left(1-\frac{s-s_0}{\rho-s_0}\right)^{-1}.$$

Легко проверить, что функция

$$\lg f(s)\prod_{\rho}\left(1-\frac{s-s_0}{\rho-s_0}\right)$$

удовлетворяет всем требованиям теоремы B в круге $|s-s_0|\leqslant\frac{R}{2}$. Следовательно, в силу этой последней мы имеем:

$$\left|\frac{d}{ds}\lg f(s)\prod_{\rho}\left(1-\frac{s-s_0}{\rho-s_0}\right)^{-1}\right|\leqslant\frac{R}{\left(\frac{R}{2}-r\right)^2}\quad(U-\Re\lg f(s_0)).$$

Но

$$\frac{d}{ds}\lg f(s)\prod_{\rho}\left(1-\frac{s-s_0}{\rho-s_0}\right)^{-1}=\frac{f'(s)}{f(s)}+\sum_{\rho}\frac{1}{\rho-s}.$$

С другой стороны, в силу сказанного выше,

$$U\leqslant\max_{|s-s_0|\leqslant R}\Re\lg f(s)\prod_{\rho}\left(1-\frac{s-s_0}{\rho-s_0}\right)^{-1}\leqslant\lg M.$$

Наконец, заметим, что

$$\Re\lg f(s_0)=\lg|f(s_0)|.$$

Сопоставляя между собой 4 последних соотношения, получим:

$$\left|\frac{f'(s)}{f(s)}+\sum_{\rho}\frac{1}{\rho-s_0}\right|\leqslant\frac{R}{\left(\frac{R}{2}-r\right)^2}\lg\frac{M}{|f(s_0)|}.$$

В частности, для $s=s_0$ имеем:

$$-\Re\frac{f'(s_0)}{f(s_0)}-\Re\sum_{\rho}\frac{1}{\rho-s_0}\leqslant\left|\frac{f'(s_0)}{f(s_0)}+\sum_{\rho}\frac{1}{\rho-s_0}\right|\leqslant\frac{4}{R}\lg\frac{M}{|f(s_0)|},$$

т. е.

$$-\Re\frac{f'(s_0)}{f(s_0)}\leqslant\frac{4}{R}\lg\frac{M}{|f(s_0)|}+\Re\sum_{\rho}\frac{1}{\rho-s_0}.$$

По целому ряду соображений нетривиальные нули удобнее рассматривать одновременно для всех функций, характеры которых имеют один и тот же основной модуль k. Множество нулей всех таких функций, очевидно, однозначно определяется заданием числа k. Это множество мы будем ради сокращения обозначать символом $\mathfrak{A}_k$.

Далее, в главе III, § 7 мы видели, что

$$L(\bar{s}, \chi) = \overline{L(s, \bar{\chi})} \quad \text{для} \quad \sigma > 0.$$

Кроме того, нетрудно убедиться в том, что $\chi(n)$ и $\bar{\chi}(n)$ имеют одинаковые основные модули. Поэтому множество $\mathfrak{A}_k$ расположено симметрично относительно действительной оси, т. е. каждому нулю ρ, находящемуся в полуплоскости $t \geqslant 0$, соответствует комплексно сопряжённый с ним нуль $\bar{\rho}$, лежащий в полуплоскости $t \leqslant 0$.

Далее, в силу теоремы 39, функции $L(s, \chi)$ и $\xi(s, \chi)$ в критической полосе обращаются в нуль одновременно. Что же касается самой функции $\xi(s, \chi)$, то, как мы видели выше, она удовлетворяет функциональному уравнению:

$$\xi(1-s, \chi) = \varepsilon(\chi)\, \xi(s, \bar{\chi});$$

поэтому нули функций $\xi(s, \chi)$ и $\xi(s, \bar{\chi})$, а следовательно, и функций $L(s, \chi)$ и $L(s, \bar{\chi})$ расположены симметрично относительно прямой $\sigma = {}^1/_2$, т. е. множество $\mathfrak{A}_k$ имеет вторую ось симметрии — прямую $\sigma = {}^1/_2$.

Вследствие этого достаточно рассмотреть распределение нулей, принадлежащих $\mathfrak{A}_k$, только в полуполосе $\frac{1}{2} \leqslant \sigma < 1$, $t \geqslant 0$. Этим обстоятельством мы будем часто пользоваться.

В дальнейшем изложении буквой k мы будем обозначать основной модуль характера; таким образом

$k = 1$ для $\zeta(s)$,

$k \geqslant 2$ для $L(s, \chi_0)$,

$k \geqslant 3$ для $L(s, \chi)$, если χ — первообразный характер.

Теорема 40. *Существует такая абсолютная положительная постоянная μ_1, что $\zeta(s)$ не имеет нулей в области*

$$\sigma \geqslant 1 - \mu_1\, (\lg(|t|+3))^{-1}, \; -\infty < t < +\infty;$$

$L(s, \chi)$ не имеет нулей в области

$$\sigma \geqslant 1 - \mu_1\, (\lg k(|t|+3))^{-1}, \; -\infty < t < +\infty,$$

если $\chi(n)$ — *первообразный характер 3-го рода;* $L(s,\chi)$ *не имеет нулей в области*

$$\sigma \geqslant 1-\mu_1\ (\lg k(|t|+3))^{-1},\ |t|\geqslant 1,$$

если $\chi(n)$ — *действительный первообразный характер.*

В силу указанной выше причины, доказательство нашей теоремы достаточно провести только для случая $t\geqslant 0$. Итак, пусть t — произвольное неотрицательное число. Введём обозначения:

$\gamma=|t|+3$; пусть постоянная μ_1' так мала, что

$$\mu_1'\left(3c_2+40\left(\lg 4c_1+1+\frac{1}{e}+\lg\frac{1}{\mu_1'}\right)\right)<\frac{1}{2}$$

(следовательно, $\mu_1'<{}^1/_2$); $\eta=\mu_1'(\lg k\gamma)^{-1}$,

$$\sigma_0=1+\eta,\quad s_0=1+\eta+ti,\qquad s_1=1+\eta+2ti;$$

$$f(s)=\zeta(s)\text{ или }L(s,\chi),\qquad f_1(s)=L(s,\chi^2).$$

Легко убедиться, что функция $f(s)$ удовлетворяет условиям теоремы B' в круге $|s-s_0|\leqslant\frac{1}{2}$, а функция $f_1(s)$ — в круге $|s-s_1|\leqslant\frac{1}{2}$, если положить $t\geqslant 1$, когда $f(s)=\zeta(s)$ или $L(s,\chi)$ с действительным характером $\chi(n)$ и $t\geqslant 0$, если $L(s,\chi)$ построена для характера $\chi(n)$ третьего рода.

Тогда, прилагая к функции $f(s)$ теорему B' в указанных кругах, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned}-\Re\frac{f'(s_0)}{f(s_0)}&\leqslant 8\lg\frac{M}{|f(s_0)|}+\sum_{\rho}\Re\frac{1}{\rho-s_0},\\ -\Re\frac{f_1'(s_1)}{f(s_1)}&\leqslant 8\lg\frac{M}{|f_1(s_1)|}+\sum_{\rho_1}\Re\frac{1}{\rho_1-s_1},\end{aligned}\right\}\qquad(40.1)$$

где $M=\max\limits_{|s-s_0|\leqslant\frac{1}{2}}|f(s)|$, $M_1=\max\limits_{|s-s_1|\leqslant\frac{1}{2}}|f_1(s)|$, ρ — пробегает все нули $f(s)$ в круге $|s-s_0|\leqslant\frac{1}{4}$, а ρ_1 — все нули $f_1(s)$ в круге $|s-s_1|\leqslant\frac{1}{4}$.

Оценим теперь M. Пусть $s'=\sigma'+it'$ — любая точка круга $|s-s_0|\leqslant\frac{1}{2}$; очевидно, что

$$\sigma'\geqslant\frac{1}{2},\quad |t'|+1\leqslant|t|+\frac{3}{2}\leqslant 2t+\frac{3}{2}<2\gamma.$$

Поэтому, в силу теоремы 35, имеем:

$$|f(s)|\leqslant c_1k(|t'|+1)^{1/2}\leqslant 2c_1k\gamma^{1/2},$$

т. е.

$$M\leqslant 2c_1k\gamma^{1/2}.$$

Далее, в силу теоремы 28, имеют место равенства

$$(f(s))^{-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\mu(n)}{n^s},\quad (f_1(s))^{-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2\mu(n)}{n^s},$$

где

$$a_n=\begin{cases}1, & \text{если } f(s)=\zeta(s),\\ \chi(n), & \text{если } f(s)=L(s,\chi).\end{cases}$$

Поэтому, принимая во внимание теорему 36, имеем:

$$\left|\frac{1}{f(s_0)}\right|\leqslant\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\mu(n)}{n^{s_0}}\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\sigma_0}}=\zeta(\sigma_0)<\frac{2}{\sigma_0-1}=\frac{2}{\eta},$$

и значит,

$$\frac{M}{|f(s_0)|}<\frac{4c_1k\gamma^{\frac{1}{2}}}{\eta}. \tag{40.2}$$

Аналогично доказывается, что

$$\frac{M_1}{|f(s_1)|}\leqslant\frac{4c_1k\gamma^{\frac{1}{2}}}{\eta}. \tag{40.2}$$

С другой стороны, в силу той же теоремы 36, имеем:

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma_0)<c_2+\frac{2}{\sigma_0-1}=c_2+\frac{1}{\eta}. \tag{40.3}$$

Сопоставляя неравенства (40.1), (40.2), (40.3), убеждаемся в справедливости неравенства:

$$-3\frac{\zeta'(\sigma_0)}{\zeta(\sigma_0)}-4\Re\frac{f'(s_0)}{f(s_0)}-\Re\frac{f_1'(s_1)}{f_1(s_1)}\leqslant\frac{3}{\eta}+3c_2+$$

$$+40\lg\frac{4c_1\gamma^{\frac{1}{2}}k}{\eta}+4\sum_{\rho}\Re\frac{1}{\rho-s_0}+\sum_{\rho_1}\Re\frac{1}{\rho_1-s_1}. \qquad (40.4)$$

Но вследствие теоремы 37 обнаружено, что действительные части нулей $\zeta(s)$ и $L(s,\chi)$ меньше 1; поэтому

$$\Re\frac{1}{\rho-s_0}<0,$$

$$\Re\frac{1}{\rho_1-s_1}<0.$$

А это значит, что мы не нарушим неравенства (40.4), если отбросим в нём все слагаемые $\Re\frac{1}{\rho-s_0}$ и $\Re\frac{1}{\rho_1-s_1}$, кроме одного, специальным образом подобранного.

Выбор этого последнего осуществим следующим образом. Пусть $\rho=\beta+it$ — тот из рассматриваемых нами нулей $f(s)$, который имеет наибольшую действительную часть (если $f(s)$ не имеет нулей на прямой, ордината которой равна числу t, то нашу теорему можно уже считать доказанной).

Далее в процессе доказательства теоремы 37 было обнаружено, что

$$-3\frac{\zeta'(\sigma_0)}{\zeta(\sigma_0)}-4\Re\frac{f'(s_0)}{f(s_0)}-\Re\frac{f_1'(s_1)}{f_1(s_1)}\geqslant 0,$$

поэтому

$$0\leqslant\frac{3}{\eta}+3c_2+40\lg\frac{4c_1\gamma^{\frac{1}{2}}k}{\eta}+\frac{4}{\beta-\sigma_0}.$$

Следовательно,

$$\frac{4}{\sigma_0-\beta} \leqslant \eta^{-1}\left(3+\eta\left(3c_2+40\lg\frac{4c_1\gamma^{\frac{1}{2}}k}{\eta}\right)\right) \leqslant$$
$$\leqslant \eta^{-1}\left(3+(\lg k\gamma)^{-1}\mu_1'\left(3c_2+40\lg 4c_1+40\lg\gamma k+\right.\right.$$
$$\left.\left.+40\lg\lg k\gamma+40\lg\frac{1}{\mu_1'}\right)\right) \leqslant$$
$$\leqslant \eta^{-1}\left(3+\mu_1'\left(3c_2+40\left(\lg 4c_1+1+\frac{1}{e}+\lg\frac{1}{\mu_1'}\right)\right)\right) < 3{,}5\eta^{-1},$$

и стало быть

$$\sigma_0-\beta = 1-\beta+\eta > \frac{4}{3{,}5}\eta,$$
$$1-\beta > \frac{\mu_1'}{7}(\lg k\gamma)^{-1}.$$

Далее, как мы видели выше, $\zeta(s)$ не имеет нулей на отрезке прямой $\sigma=1$, $|t|\leqslant 1$; поэтому, в силу непрерывности этой функции, можно найти такую постоянную μ_1'', что

$$\zeta(s)\neq 0 \text{ для } \sigma\geqslant 1-\mu_1'', \ |t|\leqslant 1.$$

Положим теперь

$$\mu_1 = \min\left(\frac{\mu_1'}{7}, \ \mu_1''\right);$$

выбранная таким образом постоянная μ_1 удовлетворяет всем требованиям нашей теоремы.

Теорема 41. *Пусть $\chi(n)$ — действительный первообразный характер; существует такая абсолютная положительная постоянная μ_2, что $L(s,\chi)\neq 0$ в области*

$$\sigma\geqslant 1-\mu_2(\lg k)^{-1}, \quad 0<|t|\leqslant 1.$$

Доказательство опять проведём только для $t>0$.

Пусть постоянная μ_2' так мала, что

$$\mu_2'\left(4c_2+32\lg 4c_1+33+\frac{32}{e}+32\lg\frac{1}{\mu_2'}\right)<0{,}5$$

и

$$\mu_2' < \frac{1}{8\sqrt{2}}; \quad \mu_2 = \frac{\mu_2'}{15}.$$

Положим:

$$\eta = \mu_2' (\lg k)^{-1}, \quad \sigma_0 = 1 + \eta, \quad s_0 = \sigma_0 + it_0, \quad s_1 = \sigma_0 + 2ti.$$

В круге $|s - s_0| \leqslant \frac{1}{2}$ функция $L(s, \chi)$ удовлетворяет условиям теоремы B'; поэтому

$$-\Re \frac{L'(s_0, \chi)}{L(s_0, \chi)} \leqslant 8 \lg \frac{M}{|L(s_0, \chi)|} + \sum_\rho \Re \frac{1}{\rho - s_0},$$

где ρ пробегает все нули $L(s, \chi)$ в круге

$$|s - s_0| \leqslant \frac{1}{4}, \quad M = \max_{|s - s_0| \leqslant \frac{1}{2}} |L(s, \chi)|.$$

Далее, в силу теоремы 36,

$$-\frac{\zeta'(\sigma_0)}{\zeta(\sigma_0)} < c_2 + \frac{1}{\eta},$$

$$-\Re \frac{L'(s_1, \chi_0)}{L(s_1, \chi_0)} < \Re \frac{1}{s_1 - 1} + c_2 + \lg k = \frac{\eta}{\eta^2 + 4t^2} + c_2 + \lg k.$$

Поэтому

$$-3 \frac{\zeta'(\sigma_0)}{\zeta(\sigma_0)} - 4\Re \frac{L'(s_0, \chi)}{L(s_0, \chi)} - \Re \frac{L'(s_1, \chi_0)}{L(s_1, \chi_0)} < 4c_2 + \\ + \frac{3}{\eta} + 32 \lg \frac{M}{|L(s_0, \chi)|} + 4 \sum_\rho \Re \frac{1}{\rho - s_0} + \\ + \frac{\eta}{\eta^2 + 4t^2} + \lg k. \qquad (41.1)$$

Оценим теперь M. Пусть $s' = \sigma' + it'$ — любая точка круга $|s' - s_0| \leqslant \frac{1}{2}$; очевидно, что $\sigma' \geqslant \frac{1}{2}$,

$$|t'| \leqslant |t| + \frac{1}{2} \leqslant 1{,}5,$$

и стало быть, в силу теоремы 35, имеем:

$$|L(s',\chi)| \leqslant c_1 k (|t'|+1)^{\frac{1}{2}} \leqslant c_1 k (2{,}5)^{\frac{1}{2}} \leqslant 2c_1 k,$$

т. е.

$$M \leqslant 2c_1 k.$$

Далее, принимая во внимание теорему 36, получим:

$$\frac{1}{|L(s_0,\chi)|} \leqslant \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)\chi(n)}{n^{s_0}} \right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma_0}} =$$

$$= \zeta(\sigma_0) < \frac{2}{\sigma_0 - 1} = \frac{2}{\eta};$$

значит

$$\frac{M}{|L(s_0,\chi)|} < \frac{4c_1 k}{\eta} = \frac{4c_1 k \lg k}{\mu_2'}. \tag{41.2}$$

Выше было также упомянуто, что

$$-3\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma_0) - 4\Re \frac{L'}{L}(s_0,\chi) - \Re \frac{L'}{L}(s_1,\chi_0) \geqslant 0. \tag{41.3}$$

Сопоставляя (41.1), (41.2) и (41.3), убедимся в справедливости неравенства

$$0 \leqslant \frac{3}{\eta} + 4c_2 + 32 \lg \frac{4c_1 k \lg k}{\mu_2'} + 4\sum_{\rho} \Re \frac{1}{\rho - s_0} +$$

$$+ \frac{\eta}{\eta^2 + 4t^2} + \lg k. \tag{41.4}$$

Выберем теперь $\rho = \beta + it$ аналогично тому, как в теореме 40. В дальнейшем нас будет интересовать лишь случай, когда

$$1 - \beta \leqslant \eta,$$

ибо если $1 - \beta > \eta$, то теорему можно считать доказанной.

Рассмотрим теперь две возможности. Пусть сначала $0 < t \leqslant \eta$. Так как

$$|\bar{\rho} - s_0|^2 = (1 - \beta + \eta)^2 + 4t^2 \leqslant 8\eta^2 \leqslant 8\mu_2'^2 \leqslant \frac{1}{16},$$

то нуль функции $L(s,\chi)$, равный ρ, лежит также в круге $|s-s_0|\leqslant\frac{1}{4}$.

Далее,

$$(\sigma_0-\beta)^2+4t^2\leqslant(\sigma_0-\beta)^2+4\eta^2\leqslant 5(\sigma_0-\beta)^2.$$

Поэтому неравенство (41.4) можно переписать так:

$$0\leqslant\frac{3}{\eta}+4c_2+32\lg\frac{4c_1k\lg k}{\mu_2'}+\frac{4}{\beta-\sigma_0}+\frac{4(\beta-\sigma_0)}{(\sigma_0-\beta)^2+4t^2}+$$
$$+\frac{\eta}{\eta^2+4t^2}+\lg k\leqslant\frac{3}{\eta}+4c_2+32\lg\frac{4c_1k\lg k}{\mu_2'}+$$
$$+\frac{4}{\beta-\sigma_0}+\frac{4}{5(\beta-\sigma_0)}+\frac{1}{\eta}+\lg k,$$

откуда, в силу определения числа μ_2', имеем:

$$\frac{4{,}8}{\sigma_0-\beta}\leqslant\eta^{-1}\Bigl(4+\eta\Bigl(4c_2+32\lg 4c_1+33\lg k+$$
$$+32\lg\lg k+32\lg\frac{1}{\mu_2'}\Bigr)\Bigr)\leqslant\eta^{-1}\Bigl(4+\mu_2'\Bigl(4c_2+32\lg 4c_1+$$
$$+33+\frac{32}{e}+32\lg\frac{1}{\mu_2'}\Bigr)\Bigr)\leqslant 4{,}5\eta^{-1};$$

$$1-\beta+\eta\geqslant\frac{48}{45}\eta;$$

$$1-\beta\geqslant\frac{1}{15}\eta=\frac{\mu_2'}{15}(\lg k)^{-1}=\mu_2(\lg k)^{-1}.$$

Пусть теперь $\eta<t\leqslant 1$; тогда неравенство (41.4) можно переписать так:

$$0\leqslant\frac{3}{\eta}+4c_2+32\lg\frac{4c_1k\lg k}{\mu_2'}+\frac{4}{\beta-\sigma_0}+\frac{\eta}{\eta^2+4\eta^2}+\lg k,$$

т. е.

$$\frac{4}{\sigma_0-\beta}\leqslant\eta^{-1}\Bigl(3{,}2+\eta\Bigl(4c_2+32\lg 4c_1+33\lg k+$$
$$+32\lg\lg k+32\lg\frac{1}{\mu_2'}\Bigr)\Bigr)\leqslant 3{,}7\eta^{-1};$$

$$1-\beta+\eta\geqslant\frac{4}{3{,}7}\eta,\quad 1-\beta\geqslant\frac{3}{3{,}7}\eta>\frac{1}{15}\eta=\mu_2(\lg k)^{-1}.$$

Переходим теперь к рассмотрению действительных нулей L-функций, соответствующих действительным характерам. Этот вопрос уже не поддаётся решению с помощью тех методов, которые до сих пор применялись. Дело в том, что до сих пор мы опирались в своих рассуждениях на неравенство

$$-3\frac{\zeta'(\sigma_0)}{\zeta(\sigma_0)}-4\Re\frac{f'(s_0)}{f(s_0)}-\Re\frac{f_1'(s_1)}{f_1(s_1)}\geqslant 0,$$

причём только первое слагаемое имело особенность в точке $s=1$. В рассматриваемом же случае полюс 1-го порядка появляется и у последнего слагаемого $\frac{f_1'(s)}{f_1(s)}$ и потому уже не поддаётся вместе с полюсом первого слагаемого нейтрализации слагаемым $\frac{4}{\sigma_0-\beta}$, на чём основывались доказательства теорем 40 и 41. Всё, что нам удаётся сделать по вопросу о действительных нулях L-функций, — это показать, что все рассматриваемые нули, кроме, может быть, одного, подчинены определённым закономерностям в их распределении. Но относительно этого единственного «исключительного» нуля мы знаем очень мало.

Теорема 42. *Пусть функция* $L(s,\chi)$, *где* $\chi(n,k)$ — *действительный первообразный характер, имеет действительные нули между* $^1/_2$ *и* 1 *и пусть* β — *наибольший из этих нулей*[1]. *Существует такая абсолютная положительная постоянная* μ_3, *что если* β *имеет кратность* $\geqslant 2$, *то*

$$1-\beta\geqslant\mu_3(\lg k)^{-1}.$$

Далее, для всякого другого действительного нуля β' *той же функции* $L(s,\chi)$, *который* $\neq\beta$, *справедливо аналогичное неравенство:*

$$1-\beta'\geqslant\mu_3(\lg k)^{-1}.$$

Пусть постоянная μ_3' так мала, что

$$\mu_3'\left(c_2+8\lg 4c_1+8+\frac{8}{e}+8\lg\frac{1}{\mu_3'}\right)<0{,}5,\qquad \mu_3=\frac{\mu_3'}{3};$$

---

[1]) Наибольший нуль существует, ибо $L(s,\chi)$ — целая функция.

положим

$$\eta = \mu_8' (\lg k)^{-1}, \quad \sigma_0 = 1 + \eta.$$

В круге $|s - \sigma_0| \leqslant \frac{1}{2}$ функция $L(s, \chi)$ удовлетворяет условиям теоремы B'; поэтому

$$-\frac{L'(\sigma_0, \chi)}{L(\sigma_0, \chi)} \leqslant 8 \lg \frac{M}{|L(\sigma_0, \chi)|} + \sum_{\rho} \Re \frac{1}{\rho - \sigma_0},$$

где, как и прежде, $M = \max\limits_{|s-\sigma_0| \leqslant \frac{1}{2}} |L(s, \chi)|$, ρ пробегает все нули $L(s, \chi)$ в круге $|s - \sigma_0| \leqslant \frac{1}{4}$. В сумме, стоящей в первой части последнего неравенства, сохраним только два слагаемых, содержащих β и β', где

$$\beta' = \begin{cases} \beta, \text{ если } \beta \text{ — кратный нуль,} \\ \text{наибольшему нулю среди всех действительных} \\ \text{нулей} < \beta, \text{ если } \beta \text{ не кратный нуль.} \end{cases}$$

Мы получим, таким образом, неравенство

$$-\frac{L'(\sigma_0, \chi)}{L(\sigma_0, \chi)} \leqslant 8 \lg \frac{M}{|L(\sigma_0, \chi)|} + \frac{1}{\beta - \sigma_0} + \frac{1}{\beta' - \sigma_0} \tag{42.1}$$

Нетрудно далее видеть, что для оценки величины

$$\frac{M}{|L(\sigma_0, \chi)|}$$

достаточно повторить те же самые рассуждения, которые были проведены в предыдущей теореме при доказательстве неравенства (41.2), и мы получим нужную оценку:

$$\frac{M}{|L(\sigma_0, \chi)|} < \frac{4c_1 k \lg k}{\mu_8'}. \tag{42.2}$$

С другой стороны, в силу теоремы 36, имеем:

$$\frac{L'(\sigma_0, \chi)}{L(\sigma_0, \chi)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n) \Lambda(n)}{n^{\sigma_0}} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma_0}} =$$

$$= -\frac{\zeta'(\sigma_0)}{\zeta(\sigma_0)} < c_2 + \frac{1}{\eta}. \tag{42.3}$$

Сопоставляя (42.1), (42.2) и (42.3), получим:

$$\frac{1}{\sigma_0-\beta}+\frac{1}{\sigma_0-\beta'}\leqslant c_2+8\lg\frac{4c_1k\lg k}{\mu_3'}+\frac{1}{\eta}=$$

$$=\eta^{-1}\left(1+\eta\left(c_2+8\lg 4c_1+8\lg k+8\lg\lg k+\lg\frac{1}{\mu_3'}\right)\right)\leqslant$$

$$\leqslant\eta^{-1}\left(1+\mu_3'\left(c_2+8\lg 4c_1+8+\frac{8}{e}+\lg\frac{1}{\mu_3'}\right)\right)\leqslant 1{,}5\eta^{-1},$$

ибо $k\geqslant 3$.

Наконец, замечая, что

$$\sigma_0-\beta'\geqslant\sigma_0-\beta,$$

имеем:

$$\frac{2}{\sigma_0-\beta'}\leqslant\frac{1{,}5}{\eta},$$

т. е.

$$1-\beta'+\eta\geqslant\frac{2}{1{,}5}\eta,$$

$$1-\beta'\geqslant\frac{1}{3}\eta=\mu_3(\lg k)^{-1}.$$

Теорема 43. *Пусть $\chi_1(n, k_1)$ и $\chi_2(n, k_2)$ — два различных действительных первообразных характера. $L(s,\chi_1)$ и $L(s,\chi_2)$ соответствующие им функции; пусть, далее, обе эти функции имеют действительные нули между $^1/_2$ и 1. Наконец, пусть β и β' суть наибольшие действительные нули соответственно функций $L(s,\chi_1)$ и $L(s,\chi_2)$, причём $\beta\geqslant\beta'$. Существует такая абсолютная положительная постоянная μ_4, что*

$$1-\beta'\geqslant\mu_4(\lg k)^{-1},$$

где $k=\max\ (k_1$ *и* $k_2)$.

Выберем μ_4' столь малым, что

$$\mu_4'\left(c_2+24\lg 4c_1+48+\frac{24}{e}+24\lg\frac{1}{\mu_4'}\right)<0{,}5,$$

и положим:

$$\mu_4=\frac{1}{3}\mu_4',\qquad \eta=\mu_4'(\lg k)^{-1},\qquad \sigma_0=1+\eta.$$

Прежде всего, в силу теоремы 13, заключаем, что $\chi(n) = \chi_1(n)\chi_2(n)$ — действительный характер, основной модуль которого k' подчинён условию:

$$k'/k_1k_2.$$

Следовательно, функции $L(s, \chi_1)$, $L(s, \chi_2)$ и $L(s, \chi)$ удовлетворяют условиям теоремы B' в круге $|s - \sigma_0| \leqslant \frac{1}{2}$; поэтому, рассуждая так же, как и в предыдущих теоремах, имеем:

$$\begin{aligned} -\frac{L'(\sigma_0, \chi_1)}{L(\sigma_0, \chi_1)} &< 8 \lg \frac{M_1}{|L(\sigma_0, \chi_1)|} + \frac{1}{\beta - \sigma_0}, \\ -\frac{L'(\sigma_0, \chi_2)}{L(\sigma_0, \chi_2)} &< 8 \lg \frac{M_2}{|L(\sigma_0, \chi_2)|} + \frac{1}{\beta' - \sigma_0}, \\ -\frac{L'(\sigma_0, \chi)}{L(\sigma_0, \chi)} &< 8 \lg \frac{M}{|L(s_0, \chi)|}, \end{aligned} \tag{43.1}$$

где

$$M_1 = \max_{|s-\sigma_0| \leqslant \frac{1}{2}} |L(s, \chi_1)|, \quad M_2 = \max_{|s-\sigma_0| \leqslant \frac{1}{2}} |L(s, \chi_2)|,$$

$$M = \max_{|s-\sigma_0| \leqslant \frac{1}{2}} |L(s, \chi)|;$$

в правых частях первых двух неравенств сохранены только те слагаемые, которые относятся к интересующим нас нулям β и β', а в последнем неравенстве все слагаемые, содержащие нули, отброшены.

Для оценки первых слагаемых правых частей неравенств (43.1) воспользуемся пригодным и в настоящем случае неравенством (42.2) предыдущей теоремы; оно даёт нам:

$$\left.\begin{aligned} \frac{M_1}{|L(\sigma_0, \chi_1)|} &\leqslant \frac{4c_1k_1}{\eta} \leqslant \frac{4c_1k_1 \lg k}{\mu_4'} \leqslant \frac{4c_1k^2 \lg k}{\mu_4'}, \\ \frac{M_2}{|L(\sigma_0, \chi_2)|} &\leqslant \frac{4c_1k_2}{\eta} \leqslant \frac{4c_1k_2 \lg k}{\mu_4'} \leqslant \frac{4c_1k^2 \lg k}{\mu_4'}, \\ \frac{M}{|L(\sigma_0, \chi)|} &\leqslant \frac{4c_1k'}{\eta} \leqslant \frac{4c_1k' \lg k}{\mu_4'} \leqslant \frac{4c_1k^2 \lg k}{\mu_4'}. \end{aligned}\right\} \tag{43.2}$$

Присоединим теперь к этим оценкам ещё неравенство, которое неоднократно встречалось у нас раньше:

$$-\frac{\zeta'(\sigma_0)}{\zeta(\sigma_0)} < c_2 + \frac{1}{\eta}. \tag{43.3}$$

Складывая почленно (43.1) и (43.3) и принимая во внимание (43.2), получим:

$$-\frac{\zeta'(\sigma_0)}{\zeta(\sigma_0)} - \frac{L'(\sigma_0,\chi_1)}{L(\sigma_0,\chi_1)} - \frac{L'(\sigma_0,\chi_2)}{L(\sigma_0,\chi_2)} - \frac{L'(\sigma_0,\chi)}{L(\sigma_0,\chi)} <$$
$$< 24\lg\frac{4c_1k^2\lg k}{\mu_4'} + c_2 + \frac{1}{\eta} + \frac{1}{\beta-\sigma_0} + \frac{1}{\beta'-\sigma_0}.$$

С другой стороны,

$$-\frac{\zeta'(\sigma_0)}{\zeta(\sigma_0)} - \frac{L'(\sigma_0,\chi_1)}{L(\sigma_0,\chi_1)} - \frac{L'(\sigma_0,\chi_2)}{L(\sigma_0,\chi_2)} - \frac{L'(\sigma_0,\chi)}{L(\sigma_0,\chi)} =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma_0}} (1 + \chi_1(n) + \chi_2(n) + \chi(n) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma_0}} (1 + \chi_1(n))(1 + \chi_2(n)) \geqslant 0.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\sigma_0-\beta} + \frac{1}{\sigma_0-\beta'} \leqslant$$
$$\leqslant \eta^{-1}\left(1 + \eta\left(c_2 + 24\lg 4c_1 + 48\lg k + 24\lg\lg k + \right.\right.$$
$$\left.\left. + 24\lg\frac{1}{\mu_4'}\right)\right) \leqslant$$
$$\leqslant \eta^{-1}\left(1 + \mu_4'\left(c_2 + 24\lg 4c_1 + 48 + \frac{24}{e} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + 24\lg\frac{1}{\mu_4'}\right)\right) \leqslant 1{,}5\eta^{-1}.$$

Далее заметим, что по условию $\sigma_0 - \beta' \geqslant \sigma_0 - \beta$; значит

$$\frac{2}{\sigma_0-\beta'} \leqslant 1{,}5\,\eta^{-1},$$

т. е.

$$1-\beta' + \eta \geqslant \frac{2}{1{,}5}\eta, \quad 1-\beta' \geqslant \frac{1}{3}\eta = \mu_4\ (\lg\ k)^{-1}.$$

Пусть теперь дано натуральное число k; рассмотрим множество нулей функций $L(s, \chi)$ для всех характеров, основные модули которых $\leqslant k$; это множество обозначим символом $\mathfrak{B}_k$. Очевидно, что

$$\mathfrak{B}_k = \sum_{k'=1}^{k} \mathfrak{A}_{k'},$$

причём числу $k' = 1$ соответствует единственная функция — функция $\zeta(s)$.

Далее, обозначим символом $\tilde{\beta}_k$ — наибольший действительный нуль из множества $\mathfrak{B}_k$.

Теорема 44. (Первая теорема Пейджа, Page, 1.)

Существует такая абсолютная положительная постоянная $\mu < 1$, что все числа множества $\mathfrak{B}_k$, кроме, быть может, $\tilde{\beta}_k$, лежат вне области

$$\sigma \geqslant 1 - \mu (\lg k\gamma)^{-1}, \quad \gamma = |t| + 3, \quad -\infty < t < +\infty,$$

причём $\tilde{\beta}_k$ может лежать внутри указанной области только тогда, когда оно является однократным нулем.

Выберем положительное число $\mu < \min(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$; тогда все нули функций $\zeta(s)$ и $L(s, \chi)$, где $\chi(n)$ — характер 3-го рода, удовлетворяют, очевидно, утверждению доказываемой теоремы (см. теорему 40); то же самое нужно сказать и о комплексных нулях $L(s, \chi)$, когда $\chi(n)$ — действительный характер (см. теорему 41). Пусть теперь $\tilde{\beta}_k$ является действительным нулём функции $L(s, \tilde{\chi})$. Так как $\tilde{\beta}_k$ — наибольший среди нулей этой функции, то по теореме 42

$$1 - \beta' \geqslant \mu_3 (\lg k)^{-1} > \mu (\lg k\gamma)^{-1},$$

где β' — любой другой нуль $L(s, \tilde{\chi})$.

Наконец, пусть действительный характер $\chi \neq \tilde{\chi}$ и пусть β — любой нуль $L(s, \chi)$. По определению, $\tilde{\beta}_k$ наибольший из действительных нулей обеих функций $L(s, \chi)$ и $L(s, \tilde{\chi})$; поэтому, в силу теоремы 43, мы имеем:

$$1 - \beta \geqslant \mu_4 (\lg k)^{-1} > \mu (\lg \gamma k)^{-1}.$$

Если число $\tilde{\beta}_k \geqslant 1 - \mu\ (\lg 3k)^{-1}$, то оно не может быть кратным нулём $L\ (s, \tilde{\chi})$, ибо, в силу теоремы 42, кратные действительные нули этой функции должны быть

$$< 1 - \mu_3\ (\lg k)^{-1}, \text{ т. е. } < 1 - \mu\ (\lg 3k)^{-1}.$$

Число $\tilde{\beta}_k$ в том случае, когда оно $\geqslant 1 - \mu (\lg\ 3\ k)^{-1}$, называется «исключительным» нулём для заданного значения параметра k. Пусть далее $\tilde{\chi}\ (n)$ — тот первообразный характер, который соответствует функции $L\ (s, \tilde{\chi})$, имеющей своим «исключительным» нулём число $\tilde{\beta}_k$; характер $\tilde{\chi}\ (n)$ и соответствующую ему функцию $L\ (s,\ \tilde{\chi})$ назовём «исключительным» характером и «исключительной» функцией для данного значения параметра k.

Рассмотрим теперь множество $\mathfrak{L}_k$ всех L-функций, основные модули которых не превосходят заданного k; поставим в соответствие каждой из $L\ (s, \chi)$, принадлежащей $\mathfrak{L}_k$, вспомогательную функцию $f\ (s) = f\ (s,\ \chi)$ по следующему правилу:

1. Функциям вида $L\ (s, \chi_0)$, где χ_0 — главный характер, ставится в соответствие $f\ (s) = (s - 1)\ L\ (s, \chi_0)$.

2. Если $\chi\ (n)$ — неглавный характер, который не совпадает с «исключительным» характером и не порождён последним, то

$$f\ (s) = L\ (s, \chi).$$

3. Если же $\chi\ (n)$ совпадает с исключительным характером или порождён им, то

$$f\ (s) = \frac{L\ (s, \chi)}{s - \tilde{\beta}_k}.$$

Очевидно, что все $f\ (s)$ — правильные функции и не имеют нулей в области

$$\sigma \geqslant 1 - \mu\ (\lg k\gamma)^{-1}, \quad -\infty < t < +\infty.$$

В дальнейшем мы будем употреблять символы O, $\ll$ и o, которые в настоящее время стали классическими. Напомним их определение и некоторые свойства. Пусть независимые переменные x, y, ... изменяются в области D; X и Y — функции x, y, ..., определённые в D, причём

$$X \geqslant 0.$$

Мы пишем, что

$$Y = O(X) \quad (\text{Landau})$$

или

$$Y \ll X \quad (\text{Виноградов}),$$

если

$$|Y| \leqslant c\,X \quad \text{для } X > 0,$$

и

$$Y = 0 \quad \text{для } X = 0,$$

где c — постоянная, не зависящая от x, y...

Легко установить следующие элементарные свойства символа O.

1. Если X и Y — неотрицательные и $Z = O(Y)$, $Y = O(X)$, то

$$Z = O(X).$$

2. Если $Y_1 = O(X_1)$, $Y_2 = O(X_2)$, ..., $Y_\nu = O(X_\nu)$, то

$$Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_\nu = O(X_1 + X_2 + \ldots + X_\nu);$$

в частности, если $Y_1 = O(X)$, $Y_2 = O(X)$, ..., $Y_\nu = O(X)$, то

$$Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_\nu = O(X).$$

3. Если $Y_1 = O(X_1)$; $Y_2 = O(X_2)$, ..., $Y_\nu = O(X_\nu)$ то

$$Y_1 Y_2 \ldots Y_\nu = O(X_1 X_2 \ldots X_\nu).$$

4. Если $Y = O(X)$ и $|Z| \geqslant a > 0$, где a — постоянная, не зависящая от x, y, ..., то

$$\frac{Y}{Z} = O(X).$$

Доказательство всех этих утверждений оставим читателю.

Пусть далее $y = f(x)$, $z = f_1(x)$, где x — независимая переменная, изменяющаяся по определённому заданному закону, и пусть $y > 0$; тогда мы пишем, что

$$z = o(y),$$

если

$$\frac{|z|}{y} \to 0$$

в процессе изменения x.

Лемма III, 1. *В полуполосе*

$$3 \geqslant \sigma \geqslant \frac{1}{2}$$

все функции $f(s)$, *соответствующие заданному* k, *удовлетворяют соотношению:*

$$f(s) = O(k\gamma^{3/2}),$$

где

$$\gamma = |t| + 3.$$

Для доказательства рассмотрим различные возможные здесь случаи. Пусть сначала $f(s) = (s-1) L(s, \chi_0)$, причём основной модуль χ_0 равен $k' \leqslant k$. Если $|t| \geqslant 1$, то, в силу теоремы 35, имеем:

$$f(s) = O(\gamma)\, O(\gamma^{\frac{1}{2}} k') = O(\gamma^{3/2} k).$$

Если же $|t| \leqslant 1$, то

$$f(s) = (s-1)\zeta(s) \prod_{p/k'} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = O(1) O\left(\prod_{p/k} \left(+ \frac{1}{\sqrt{p}}\right)\right) =$$

$$= O\left(\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = O(\sqrt{k}) = O(k\gamma^{3/2}),$$

ибо

$$L(s, \chi_0) = \zeta(s) \prod_{p/k'} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right).$$

Пусть далее $k' \leqslant k$, $\chi(n, k')$ — неглавный характер, который не совпадает с исключительным и не порождён последним; тогда, в силу теоремы 35, имеем:

$$f(s) = L(s, \chi) = O(k'\gamma^{1/2}) = O(k\gamma^{3/2}).$$

Наконец, пусть опять $k' \leqslant k$, а $\chi(n, k')$ — характер или совпадающий с исключительным, или порождённый последним.

В этом случае

$$f(s)=\frac{L(s,\chi)}{s-\tilde{\beta}_k}.$$

Выберем положительное число r так, чтобы $r<\frac{1}{4}-\frac{\mu}{2}$, и опишем около точки $\tilde{\beta}_k$ как центра круг радиуса r. Вне этого круга оценка функции $f(s)$ проводится совершенно так же, как и в предыдущем случае, и даёт результат такой же, как и раньше, т. е. $f(s)=O(k\gamma^{3/2})$. Пусть теперь $|s-\tilde{\beta}_k|\leqslant r$. Ясно, что

$$\frac{L(s,\chi)}{s-\tilde{\beta}_k}=\frac{1}{s-\tilde{\beta}_k}\int\limits_{\tilde{\beta}_k}^{s} L'(s,\chi)\,ds, \tag{1}$$

причём интеграция ведётся по отрезку прямой между точками s и $\tilde{\beta}_k$. Но, как известно,

$$L'(s,\chi)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{L(s',\chi)\,ds'}{(s'-s)^2},$$

где в качестве контура C выбрана окружность $|s'-s|=r$. Так как

$$\sigma'\geqslant\tilde{\beta}_k-2r\geqslant 1-\mu-2r\geqslant\frac{1}{2},$$

то, в силу теоремы 35, имеем:

$$L(s',\chi)=O(k).$$

Следовательно,

$$L'(s,\chi)=O\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_C\frac{|L(s',\chi)\,ds'|}{|s'-s|^2}\right)=O(k). \tag{2}$$

Соотношения (1) и (2) дают нам:

$$\frac{L(s,\chi)}{s-\tilde{\beta}_k}=O(k)=O(k,\gamma^{3/2}).$$

Теорема 45. *Если* $\gamma=|t|+3$, *то в области*

$$\sigma\geqslant 1-\frac{1}{4}\mu(\lg k\gamma)^{-1}$$

имеет место оценка:

$$\frac{f'(s)}{f(s)} = O(\lg^2 k\gamma)$$

равномерно относительно переменной σ.

Пусть сначала

$$\sigma \geqslant 1 + \frac{\mu}{4}(\lg k\gamma)^{-1}.$$

Функция $f(s)$ может иметь три следующих значения:

$$(s-1)L(s, \chi_0),\ L(s,\chi) \text{ и } \frac{L(s,\chi)}{s-\tilde{\beta}_k};$$

выбор одного из них зависит от свойств характера $\chi(n)$ в отношении к числу k. В оответствии с этим

$$\frac{f'(s)}{f(s)} = \frac{L'(s,\chi_0)}{L(s,\chi_0)} + \frac{1}{s-1},\quad \frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)},\quad \frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} - \frac{1}{s-\beta_k}.$$

Во всех этих трёх случаях пригодна оценка:

$$\left|\frac{f'(s)}{f(s)}\right| \leqslant \left|\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}\right| + \frac{1}{\sigma-1} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^\sigma} + \frac{1}{\sigma-1} = -\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} + O(\lg k\gamma) =$$
$$= O(\lg k\gamma) + O(\lg k\gamma) = O(\lg k\gamma) = O(\lg^2 k\gamma),$$

ибо на отрезке $1 < \sigma \leqslant 2$ функция $(\sigma-1)\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)}$ ограничена, а для $\sigma \geqslant 2$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^\sigma}$ сходится. Пусть теперь $\sigma < 1 + \frac{\mu}{4}(\lg k\gamma)^{-1}$. Как было уже выше замечено, функция $f(s)$ правильна и не имеет нулей в односвязной области

$$\sigma' \geqslant 1 - \mu(\lg k\gamma')^{-1},$$

где

$$s' = \sigma' + it',\quad \gamma' = |t'| + 3.$$

Поэтому в этой области можно однозначно определить функцию

$$L(s)=\lg f(s),$$

выбрав такую ветвь этой многозначной функции, чтобы

$$0\leqslant \Im \lg f(s)<2\pi.$$

Эта ветвь функции $L(s)$ будет правильна во всей рассматриваемой области.

Введём обозначения:

$$H=\frac{\mu}{2}(\lg k\gamma)^{-1},\ \sigma_0=1+H,\ s_0=\sigma_0+it,\ r=\tfrac{3}{2}H,$$
$$R=2H.$$

Круг $|s'-s_0|\leqslant R$ целиком принадлежит куску нашей области, для которого $|t'|\leqslant|t|+1$. В самом деле:

$$t-R\leqslant t'\leqslant t+R,\quad |t'|\leqslant|t|+R\leqslant|t|+1;$$

далее заметим, что

$$k(\gamma+1)\leqslant 2k^2\gamma\leqslant(k\gamma)^2;$$

поэтому

$$\sigma'\geqslant\sigma_0-R=1-H=1-\frac{\mu}{2}(\lg k\gamma)^{-1}\geqslant$$
$$\geqslant 1-\mu(\lg k(\gamma+1))^{-1}\geqslant 1-\mu(\lg k\gamma')^{-1}.$$

Следовательно, в этом круге функция $L(s)$ удовлетворяет всем требованиям теоремы B; применяя её к кругам $|s'-s_0|\leqslant \leqslant R$ и $|s'-s_0|\leqslant r$, получим:

$$\left|\frac{f'(s')}{f(s')}\right|=|L'(s')|\leqslant\frac{4H}{\frac{1}{4}H^2}\lg\frac{M}{|f(s_0)|},$$

где $M=\max\limits_{|s-s_0|\leqq R}|f(s)|$. Но так как $H<\frac{\mu}{2}<\frac{1}{2}$, то круг $|s'-s_0|\leqslant R$ должен целиком лежать в полосе $\frac{1}{2}\leqslant\sigma'\leqslant 3$; следовательно, предыдущая лемма даёт:

$$M=O(k\gamma'^{1/2})=O(k\gamma^{3/2}).$$

С другой стороны, в соответствии с различными случаями имеем:

$$\frac{1}{f(s_0)}=\frac{1}{(s_0-1)L(s_0,\chi_0)},\quad \frac{1}{L(s_0,\chi)},\quad \frac{s_0-\widetilde{\beta}_k}{L(s_0,\chi)}.$$

Но, в силу теоремы 36,

$$\left|\frac{1}{(s_0-1)L(s_0,\chi_0)}\right|\leqslant\frac{1}{\sigma_0-1}\left|\sum_1^\infty\frac{\mu(n)}{n^{s_0}}\right|\leqslant\frac{\zeta(\sigma_0)}{\sigma_0-1}=$$

$$=O\left(\frac{1}{(\sigma_0-1)^2}\right)=O\left(\frac{1}{H^2}\right);$$

аналогично

$$\left|\frac{1}{L(s_0,\chi)}\right|=O\left(\frac{1}{H}\right),$$

$$\left|\frac{s_0-\beta_k}{L(s_0,\chi)}\right|=O(\gamma)\,O\left(\frac{1}{H}\right)=O\left(\frac{\gamma}{H}\right).$$

Следовательно, во всех случаях

$$\frac{1}{|f(s_0)|}=O\left(\frac{\gamma}{H^2}\right)=O(\gamma\lg^2k\gamma).$$

Поэтому, возвращаясь к оценке модуля функции $\frac{f'(s)}{f(s)}$, имеем:

$$\left|\frac{f'(s')}{f(s')}\right|=O\left(\frac{1}{H}\right)O(\lg k\gamma^3/_2\gamma\lg^2k\gamma)=$$

$$=O(\lg k\gamma)\,O(\lg k\gamma)=O(\lg^2k\gamma)$$

внутри круга $|s'-s_0|\leqslant r$.

Но отрезок прямой, определяемый условиями:

$$1-\frac{\mu}{4}(\lg k\gamma)^{-1}\leqslant\sigma\leqslant 1+\frac{\mu}{4}(\lg k\gamma)^{-1},\ t'=t,$$

целиком лежит внутри круга $|s'-s_0|\leqslant r$; следовательно, и на этом отрезке имеет силу оценка:

$$\left|\frac{f'(s)}{f(s)}\right|=O(\lg^2k\gamma),$$

что доказывает нашу теорему полностью.

Теорема 46. *Пусть k и T — два произвольных положительных числа, подчинённых только условиям: $k \geqslant 1$, $T \geqslant 2$; существует положительное число δ, удовлетворяющее условиям:*

1°. *Вдоль ломаной*

$$P(\infty + iT,\quad 1-\delta+iT,\quad 1-\delta-iT,\quad \infty - iT)$$

справедлива оценка

$$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = O(\lg^2 kT),$$

где $L(s,\chi)$ — любая функция из $\mathfrak{L}_k$.

2°.

$$\delta \geqslant \frac{\mu}{12}(\lg k(T+3))^{-1}.$$

3°. ***Внутри области, ограниченной ломаной P, нет нулей из множества $\mathfrak{B}_k$, кроме, может быть, исключительного нуля $\tilde{\beta}_k$.***

Сохраним все обозначения предыдущей теоремы и положим:

$$\eta = \frac{\mu}{4}\ (\lg k(T+3))^{-1},$$

$$\delta = \begin{cases} {}^1/_3\eta, & \text{если } 1-\eta \leqslant \tilde{\beta}_k \leqslant 1 - {}^2/_3\eta, \\ \eta, & \text{если } \tilde{\beta}_k > 1 - {}^2/_3\eta. \end{cases}$$

По построению ломаная P вместе с полуполосой, которая ею ограничена, лежит внутри области

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{\mu}{4}\ (\lg k\gamma)^{-1},\quad |t| \leqslant T.$$

Значит, в силу теоремы 45, имеем вдоль всей ломаной P

$$\frac{f'(s)}{f(s)} = O(\lg^2 k\gamma) = O(\lg^2 kT).$$

Но функция $\dfrac{f'(s)}{f(s)}$ имеет три значения:

$$\frac{L'(s,\chi_0)}{L(s,\chi_0)} + \frac{1}{s-1},\quad \frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)},\quad \frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} - \frac{1}{s-\tilde{\beta}^k};$$

поэтому

$$\left|\frac{L'(s,\chi_0)}{L(s,\chi_0)}\right| \leqslant \left|\frac{f'(s)}{f(s)}\right| + \max\left(\frac{1}{\delta};\frac{1}{T}\right) =$$
$$= O(\lg^2 kT) + O\left(\frac{1}{\eta}\right) = O(\lg^2 kT) + O(\lg kT) = O(\lg^2 kT);$$
$$\left|\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}\right| = \left|\frac{f'(s)}{f(s)}\right| = O(\lg^2 kT),$$

если χ — неглавный характер и не порождён «исключительным» характером $\widetilde{\chi}(n)$.

Далее заметим, что вдоль ломаной P справедливо неравенство:

$$|s - \widetilde{\beta_k}| \geqslant \min(T, |1 - \widetilde{\beta_k} - \delta|) \geqslant \frac{1}{3}\eta;$$

поэтому, если характер χ порождён «исключительным» характером $\widetilde{\chi}$, то

$$\left|\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}\right| = \frac{(s)}{J(s)}\Bigg| + \frac{1}{|s - \widetilde{\beta_k}|} =$$
$$= O(\lg^2 kT) + O\left(\frac{1}{\eta}\right) = O(\lg^2 kT).$$

Итак, во всех случаях справедлива оценка

$$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = O(\lg^2 kT)$$

вдоль ломаной P.

Наконец, в силу теоремы 44, в области

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{\mu}{4}(\lg k\gamma)^{-1}, \quad |t| \leqslant T$$

может лежать только $\widetilde{\beta_k}$ из всего множества $\mathfrak{B}_k$, следовательно, то же самое можно сказать и о полуполосе, ограниченной ломаной P.

§ 2. Вторая теорема Пейджа

В этом параграфе мы займёмся оценкой местоположения наибольшего действительного нуля $L(s,\chi)$ для действительного первообразного характера $\chi(n)$. Развитый в § 1 метод не даёт никаких сведений об этом нуле. Поэтому для решения указанной проблемы требуются новые средства, которые и будут указаны здесь.

Лемма III, 2. *Пусть* $\chi(n, k)$ — *действительный характер; тогда*

$$0 < L(1, \chi) < 3 \lg k,$$

$$|L'(s, \chi)| < c_9 \lg^2 k \quad \text{для} \quad s \geqslant 1 - \frac{1}{\lg k},$$

где c_9 — *абсолютная положительная постоянная, которая* > 6.

То, что $L(1, \chi) > 0$, было уже доказано (см. теорему 38). Далее

$$|L(1, \chi)| \leqslant \left| \sum_{n=1}^{k} \frac{\chi(n)}{n} \right| + \left| \sum_{k+1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n} \right|;$$

но, в силу теоремы A,

$$\left| \sum_{n=1}^{k} \frac{\chi(n)}{n} \right| \leqslant \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} = \int_1^k [x] \frac{dx}{x^2} + \frac{[k]}{k} \leqslant \int_1^k \frac{dx}{x} + 1 = \lg k + 1;$$

замечая далее, что

$$\left| \sum_{n=k+1}^{\infty} \chi(n) \right| < \frac{h}{2},$$

и, применяя следствие теоремы A, получим:

$$\left| \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n} \right| < \frac{h}{2(k+1)} < 1 < \lg k,$$

ибо $k \geqslant 3$. Таким образом

$$L(1, \chi) < \lg k + 1 + \lg k < 3 \lg k.$$

Перейдём теперь к оценке $L'(s, \chi)$.

Прежде всего заметим, что достаточно рассмотреть случай, когда $k \geqslant 8 > e^2$, ибо для конечного числа значений k наша лемма непосредственно очевидна.

В силу леммы II, 2 ряд

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}$$

равномерно сходится внутри любого угла, вершина которого лежит на положительной части действительной оси и для которого последняя является биссектрисой. Поэтому в частности этот ряд можно почленно дифференцировать для

$$s\geqslant 1-\frac{1}{\lg k}>\frac{1}{2}.$$

Таким образом

$$L'(s,\chi)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)\lg n}{n^s},$$

$$|L'(s,\chi)|\leqslant\left|\sum_{n=1}^{k}\frac{\chi(n)\lg n}{n^s}\right|+\left|\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{\chi(n)\lg n}{n^s}\right|.$$

Но

$$\left|\sum_{n=1}^{k}\frac{\chi(n)\lg n}{n^s}\right|\leqslant\lg k\sum_{n=1}^{k}\frac{n^{1-s}}{n}\leqslant\lg k\sum_{n=1}^{k}\frac{k^{\frac{1}{\lg k}}}{n}=$$

$$=e\lg k\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n}<2e\lg^2 k.$$

С другой стороны, в силу следствия теоремы A, имеем:

$$\left|\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{\chi(n)\lg n}{n^s}\right|\leqslant\frac{h}{2}\frac{\lg(k+1)}{(k+1)^s}<\frac{k}{2}\frac{\lg k}{k^s}=$$

$$=\frac{1}{2}k^{1-s}\lg k<\frac{e}{2}\lg^2 k,$$

ибо функция $\frac{\lg x}{x^s}$ монотонно убывает для $s\geqslant\frac{1}{2}$ и $x\geqslant 8$.

Следовательно,

$$|L'(s,\chi)|<3{,}5\,e\lg^2 k,\quad k\geqslant 8,$$

т. е. существует такая положительная постоянная c_9, что

$$|L'(s,\chi)| < c_9 \lg^2 k$$

для $s \geqslant 1-(\lg k)^{-1}$, $k=1,2,\ldots$

Теорема 47. (Вторая теорема Пейджа, Page, 1.)

Пусть $\chi(n,k)$ — действительный первообразный характер, $L(s,\chi)$ — соответствующая ему L-функция, β — наибольший действительный нуль функции $L(s,\chi)$. Существует такая абсолютная положительная постоянная μ', что

$$1-\beta \geqslant \mu' k^{-\frac{1}{2}} \lg^{-2} k.$$

Пусть $\xi = e^{\frac{2\pi i}{k}}$. Выше было показано (17.4), что

$$\sum_{n=1}^{k} \chi(n)\xi^{mn} = \tau(\chi) k^{\frac{1}{2}} \chi(m).$$

Следовательно,

$$\tau(\chi) k^{\frac{1}{2}} L(1,\chi) = \tau(\chi) k^{\frac{1}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)}{m} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{k-1} \chi(n)\xi^{mn} =$$

$$= \sum_{n=1}^{k-1} \chi(n) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\xi^{mn}}{m};$$

если $(n,k)=1$, то

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\xi^{mn}}{m} = -\lg(1-\xi^n),$$

где символ $\lg$ обозначает главную ветвь логарифма. Таким образом

$$-\tau(\chi) k^{\frac{1}{2}} L(1,\chi) = \sum_{n=1}^{k-1} \chi(n) \lg(1-\xi^n). \qquad (47.1)$$

Рассмотрим теперь два случая.

1. Пусть $\chi(-1)=-1$. В сумме

$$\sum_{n=1}^{k-1} \chi(n) \lg(1-\xi^n)$$

сделаем подстановку, положив $n=k-n'$; тогда

$$\sum_{n=1}^{k-1} \chi(n) \lg(1-\xi^n) = \sum_{n'=1}^{k-1} \chi(k-n') \lg(1-\xi^{k-n'}) =$$

$$= -\sum_{n'=1}^{k-1} \chi(n') \lg(1-\xi^{-n'}).$$

Следовательно, в силу теоремы 14, имеем:

$$-2\tau(\chi) k^{\frac{1}{2}} L(1,\chi) = \sum_{n=1}^{k-1} \chi(n) \lg(1-\xi^n) -$$

$$-\sum_{n=1}^{k-1} \chi(n) \lg(1-\xi^{-n}) = \sum_{n=1}^{k-1} \chi(n) \lg \frac{1-\xi^n}{1-\xi^{-n}} =$$

$$= \frac{2\pi i}{k} \sum_{n=1}^{k-1} n\chi(n) + \pi i \sum_{n=1}^{k-1} \chi(n) = \frac{2\pi i}{k} S,$$

где

$$S = \sum_{n=1}^{k-1} n\chi(n) = \sum_{n=1}^{k} n\chi(n).$$

Но, с другой стороны, было доказано (теорема 19), что

$$12S = 12\sum_{n=1}^{k} n\chi(n) \equiv 0 \pmod{k};$$

кроме того, выше (теорема 38) было упомянуто, что $L(1,\chi)>0$. Значит и $S\neq 0$, т. е. $12S \geqslant k$.

$$L(1,\chi) = \left|\frac{-\pi i S}{\tau(\chi)}\right| k^{-3/2} \geqslant \frac{\pi}{12\sqrt{k}}. \tag{47.2}$$

2. $\chi(-1)=1$.

Пусть r пробегает приведённую систему вычетов по модулю k; тогда числа ξ^r являются первообразными нулями уравнения $x^k = 1$. Как известно из высшей алгебры, многочлен

$$\Phi_n(x) = \prod_{(r,\,k)=1} (x - \xi^r)$$

имеет целые рациональные коэффициенты и неприводим в поле рациональных чисел[1]).

Пусть далее $(n, k) = 1$, $nn' \equiv 1 \pmod k$. Очевидно, что $1 - \xi = 1 - \xi^{nn'} = (1 - \xi^n)(1 + \xi^n + \xi^{2n} + \ldots + \xi^{(n'-1)n})$. Положим

$$F_1(x) = 1 + x^n + x^{2n} + \ldots + x^{(n'-1)n};$$

тогда

$$1 - \xi = (1 - \xi^n) F_1(\xi).$$

Но в силу того, что $\Phi_n(x)$ неприводим, все ξ^r должны также удовлетворять последнему равенству, если в нём ξ заменить на ξ^r. Поэтому

$$1 - \xi^r = (1 - \xi^{rn}) F_1(\xi^r). \tag{47.3}$$

Аналогичным способом доказывается, что

$$1 - \xi^{rn} = (1 - \xi^r) F_2(\xi^r), \tag{47.4}$$

где

$$F_2(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}.$$

Равенство (47.1) можно переписать так:

$$-\tau(\chi)\, k^{\frac{1}{2}} L(1, \chi) = \lg a, \tag{47.5}$$

где

$$a = \prod_{n=1}^{k=1} (1 - \xi^n)^{\chi(n)}.$$

Докажем, что число $a + a^{-1}$ — целое число. Прежде всего ясно, что

$$\prod_{1 \leqslant n \leqslant k-1} (1 - \xi^{nr})^{\chi(n)} = \Bigl(\prod_{1 \leqslant n \leqslant k-1} (1 - \xi^{nr})^{\chi(nr)}\Bigr)^{\chi(r)} = a^{\chi(r)},$$

[1]) См. Сушкевич, Основы высшей алгебры, §§ 115, 116, ГТТИ, 1941.

ибо nr пробегает полную систему вычетов вместе с n. Аналогично

$$\prod_{1\leqslant n\leqslant k-1} (1-\xi^{nr})^{-\chi(n)} = \alpha^{-\chi(r)}.$$

С другой стороны, в силу равенств (47.3) и (47.4), имеем:

$$\prod_{1\leqslant n\leqslant k-1} (1-\xi^{nr})^{\chi(n)} = \prod_{\chi(n)=1} (1-\xi^{nr}) \prod_{\chi(n)=-1} (1-\xi^{nr})^{-1} =$$
$$= \prod_{\chi(n)=1} (1-\xi^{r}) F_2(\xi^r) \cdot \prod_{\chi(n)=-1} (1-\xi^{r})^{-1} F_1(\xi^r) =$$
$$= (1-\xi^r)^{\sum\limits_{n=1}^{k}\chi(n)} \prod_{\chi(n)=1} F_2(\xi^r) \prod_{\chi(n)=-1} F_1(\xi^r) = g_1(\xi^r),$$

где положено

$$g_1(x) = \prod_{\chi(n)=1} F_2(x) \prod_{\chi(n)=-1} F_1(x).$$

Также легко показать, что

$$\prod_{1\leqslant n\leqslant k-1} (1-\xi^{nr})^{-\chi(n)} = \prod_{\chi(n)=1} F_1(\xi^r) \prod_{\chi(n)=-1} F_2(\xi^r) = g_2(\xi^r),$$

где положено

$$g_2(x) = \prod_{\chi(n)=1} F_1(x) \prod_{\chi(n)=-1} F_2(x).$$

Следовательно,

$$g_1(\xi^r) + g_2(\xi^r) = \alpha^{\chi(r)} + \alpha^{-\chi(r)} = \alpha + \alpha^{-1},$$

или, положив $g(x) = g_1(x) + g_2(x)$, можно записать:

$$g(\xi^r) = \alpha + \alpha^{-1}.$$

Это уравнение можно, очевидно, заменить таким:

$$r(\xi^r) = \alpha + \alpha^{-1},$$

где $r(x)$ равно остатку от деления $g(x)$ на $\Phi_n(x)$. Так как степень $r(x)$ меньше степени $\Phi_n(x)$, и так как, с другой стороны, все корни $\Phi_n(x)$ являются в то же время корнями $r(x) - \alpha - \alpha^{-1}$, то это значит, что

$$r(x) \equiv \alpha + \alpha^{-1},$$

т. е. $\alpha + \alpha^{-1}$ — целое число.

Покажем далее, что $\alpha > 0$. Заметим, что, в силу периодичности ξ^n и $\chi(n)$, переменное n в выражении для α может пробегать любую приведённую систему вычетов; в частности, пусть n пробегает такие значения, абсолютные величины которых $< \frac{k}{2}$.

Так как $\chi(-n) = \chi(-1)\chi(n) = \chi(n)$, то

$$\alpha = \prod_{\substack{1 \leqslant n < \frac{k}{2} \\ (n,\, k)=1}} (1-\xi^n)^{\chi(n)} \cdot \prod_{\substack{-\frac{k}{2} < n \leqslant -1 \\ (n,\, k)=1}} (1-\xi^n)^{\chi(n)} =$$

$$= \prod_{\substack{1 \leqslant n < \frac{k}{2} \\ (n,\, k)=1}} ((1-\xi^n)(1-\xi^{-n}))^{\chi(n)} = \prod_{\substack{1 \leqslant n < \frac{k}{2} \\ (n,\, k)=1}} |1-\xi^n|^{\chi(n)} > 0.$$

Теперь оценим снизу величину $\alpha + \alpha^{-1}$. Прежде всего ясно, что для $\alpha > 0$ число $\alpha + \alpha^{-1} > 1$. Так как $L(1, \chi) \neq 0$, то равенство (47.5) показывает, что

$$\alpha \neq 1.$$

Следовательно,

$$\alpha + \alpha^{-1} \neq 2.$$

Но выше мы доказали, что $\alpha + \alpha^{-1}$ — целое число; поэтому

$$\alpha + \alpha^{-1} \geqslant 3,$$

или $\alpha^2 - 3\alpha + 1 \geqslant 0$. Решая это последнее неравенство и вспомнив равенство (47.5), заключаем, что или $\alpha \leqslant \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, или $\alpha \geqslant \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, т. е. всегда

$$|\lg \alpha| \geqslant \lg \frac{3+\sqrt{5}}{2} > 0{,}91$$

и

$$L(1, \chi) = \frac{|\lg \alpha|}{\sqrt{k}} > \frac{0{,}91}{\sqrt{k}}. \tag{47.6}$$

Сопоставляя неравенства (47.2) и (47.6), видим, что всегда

$$L(s, \chi) > \frac{\pi}{12\sqrt{k}}.$$

Это неравенство в соединении с леммой III, 2 даёт:

$$1-\beta > \frac{L(1, \chi)}{L'(\bar{s}, \chi)} > \frac{\pi}{12C_9\sqrt{k}\lg^2 k} = \mu' k^{-\frac{1}{2}} \lg^{-2} k,$$

если $1-\beta < \frac{1}{\lg k}$, где $\beta < \bar{s} < 1$, $\mu' = \frac{\pi}{12C_9} < 1$. В случае же, когда $1-\beta \geqslant \frac{1}{\lg k}$, доказываемое неравенство непосредственно очевидно при указанном значении μ'.

§ 3. Теорема Зигеля

Результаты в вопросе о действительных нулях L-функции $L(s, \chi)$ для действительных характеров χ, более далеко идущие по сравнению с тем, что до сих пор было достигнуто, даёт теорема Зигеля (Siegel, 1). Доказательству её будет посвящён этот параграф. Предварительно докажем ряд вспомогательных предложений.

Лемма III, 3. *Пусть функции*

$$f(s, x_1, \ldots, x_q) \text{ и } \frac{\partial f}{\partial s}(s, x_1, \ldots, x_q)$$

непрерывны по совокупности переменных $s, x_1, \ldots, x_q$, когда $|s-s_0| \leqslant r$, а система $(x_1, x_2, \ldots, x_q)$ принадлежит D, *где D — конечная замкнутая область в пространстве q измерений. Тогда*

$$F(s) = \int\int_D \ldots \int f(s, x_1, \ldots, x_q)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_q$$

— функция, правильная в круге $|s-s_0| \leqslant r$.

Пусть s и $s+h$ принадлежат внутренности круга $|s-s_0| < r$; тогда

$$\frac{F(s+h)-F(s)}{h} =$$

$$= \int\int_D \ldots \int \frac{f(s+h, x_1, \ldots, x_q) - f(s, x_1, \ldots, x_q)}{h}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_q =$$

$$= \int\int_D \ldots \int \frac{1}{h} \int_s^{s+h} f'_s(z, x_1, \ldots, x_q)\, dz\, dx_1 dx_2 \ldots dx_q,$$

где внутреннее интегрирование совершается по прямолинейному отрезку, который соединяет точки s и $s+h$. Полагаем далее

$$F_1(s)=\int\int_D\ldots\int f_s'(s, x_1, \ldots, x_q)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_q=$$

$$=\int\int_D\ldots\int\frac{1}{h}\int_s^{s+h} f_s'(z, x_1, \ldots, x_q)\,dz\,dx_1\,dx_2\ldots dx_q;$$

следовательно

$$\frac{F(s+h)-F(s)}{h}-F_1(s)=$$

$$=\int\int_D\ldots\int\frac{1}{h}\int_s^{s+h}\left(f_s'(z, x_1, \ldots, x_q)-f_s'(s, x_1, \ldots, x_q)\right)dz\,dx_1, \ldots, dx_q.$$

В силу равномерной непрерывности функции

$$f_s'(s, x_1, \ldots, x_q)$$

для данного $\varepsilon>0$ можно выбрать $\eta(\varepsilon)$ так, что из неравенства

$$|s'-s|<\eta$$

следует неравенство:

$$|f_s'(s', x_1, \ldots, x_q)-f_s'(s, x_1, \ldots, x_q)|<\frac{\varepsilon}{\operatorname{mes} D},$$

где $\operatorname{mes} D$ обозначает объём области D. Если $|h|<\eta$, то

$$\left|\frac{F(s+h)-F(s)}{h}-F_1(s)\right|\leqslant\operatorname{mes} D\cdot\frac{1}{|h|}\cdot\frac{\varepsilon|h|}{\operatorname{mes} D}=\varepsilon,$$

т. е.

$$F'(s)=F_1(s),$$

и таким образом $F(s)$ имеет производную в каждой точке s круга $|s-s_0|<r$, а это значит, что она правильна в этом круге.

В дальнейшем мы будем предполагать, что $x_1, x_2, \ldots, x_q$ обозначают независимые переменные, которые подчинены лишь условиям:

$$x_i\geqslant 0\qquad (i=1, 2, \ldots, q).$$

Постоянные $C_{10}, \ldots$ суть абсолютные постоянные; B_1, $B_2, \ldots$ — постоянные, зависящие от заданных параметров

$$\alpha,\ \beta,\ B,\ R.$$

Кроме того, пусть

$$Nx = x_1 x_2 \ldots x_q, \quad S(x) = x_1 + x_2 + \ldots + x_q.$$

Лемма III, 4. *Пусть* $\alpha \geqslant 0$, $\beta > 0$, $B > 0$; *последовательность чисел* a_n *подчинена условию*:

$$a_n = O(n^{\alpha}), \qquad n = 1,\ 2,\ \ldots$$

Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int\limits_{Nx \geqslant 1} (Nx)^s\, e^{-Bn^{\beta} S(x)}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_q \tag{1}$$

абсолютно сходится при любом s *и изображает целую функцию аргумента* s, *которая при* $\sigma \to -\infty$ *обращается в* 0.

Введём обозначения:

D — область, где $Nx \geqslant 1$,

D_{ρ} — область, где $Nx \geqslant 1$, $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_q^2 \leqslant \rho$,

$$I(s,\ B) = \int\int\limits_{D} \ldots \int (Nx)^s\, e^{-BS(x)}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_q,$$

$$I(s,\ B,\ \rho) = \int\int\limits_{D_{\rho}} \ldots \int (Nx)^s\, e^{-BS(x)}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_q.$$

Прежде всего, полагая в лемме III, 3

$$f(s) = (Nx)^s\, e^{-BS(x)},$$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = (Nx)^s \lg Nx \cdot e^{-BS(x)},$$

убеждаемся, что эти функции непрерывны по совокупности всех переменных s, $x_1, \ldots, x_q$. Значит $I(s,\ B,\ \rho)$ — целая функция аргумента s.

Далее, заметим, что в круге $|s| \leqslant R$ имеет место:

$$|(Nx)^s\, e^{-BS(x)}| \leqslant (Nx)^R\, e^{-BS(x)} =$$

$$= e^{-\frac{B}{2} S(x)} \prod_{i=1}^{q} x_i^R\, e^{-\frac{B}{2} x_i} \leqslant B_1 e^{-\frac{B}{2} S(x)};$$

поэтому интеграл

$$\iint\limits_{D}\ldots\int (Nx)^{s} e^{-BS(x)}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_q$$

имеет своей мажорантой абсолютно сходящий интеграл

$$\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\ldots\int\limits_0^\infty e^{-\frac{B}{2}S(x)}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_q=\Bigl(\int\limits_0^\infty e^{-\frac{B}{2}x}\,dx\Bigr)^q=\frac{2^q}{B^q}.$$

Значит $I(s, B, \rho)$ равномерно сходится к $I(s, B)$, когда $\rho\to\infty$, т. е. $I(s, B)$ — целая функция, ибо R можно взять произвольно большим.

Ряд (1) представим в форме

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n I(s,\ Bn^\beta); \tag{2}$$

его мажорантой в круге $|s|\leqslant R$ является ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\,I(R,\ Bn^\beta)=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}|a_n|\iint\limits_{D}\ldots\int (Nx)^R e^{-Bn^\beta S(x)}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_q=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\iint\limits_{D}\ldots\int (Nx)^R e^{-\frac{B}{2}S(x)}\sum_{n=1}^{N}|a_n|\,e^{-\frac{B}{2}n^\beta S(x)}dx_1\,dx_2\ldots dx_q.$$

Но в области D должно соблюдаться неравенство:

$$S(x)\geqslant 1,$$

ибо в противном случае $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant q} x_i<1$, т. е. $Nx<1$; следовательно,

$$\sum_{n=1}^{N}|a_n|\,e^{-\frac{B}{2}n^\beta S(x)}\leqslant\sum_{n=1}^{N}\frac{n^2|a_n|\,e^{-\frac{B}{2}n^\beta}}{n^2}=$$

$$=\sum_{n=1}^{N}\frac{O(n^{\alpha+2})\,e^{-\frac{B}{2}n^\beta}}{n^2}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_2'}{n^2}=B_2,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\,I(R, Bn^\beta)\leqslant B_2\iint\limits_{D}\ldots\int (Nx)^R e^{-\frac{B}{2}S(x)}dx_1\,dx_2\ldots dx_q. \tag{2'}$$

Это последнее неравенство показывает, что ряд (2) абсолютно и равномерно сходится в круге $|s| \leqslant R$; а так как все функции $I(s, Bn^\beta)$ — целые функции, а R — произвольно, то изображаемая рядом (1) функция является целой функцией.

С другой стороны, при любом s мы имеем в силу (2′):

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n I(s, Bn^\beta)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \int\int_D \ldots \int (Nx)^\sigma e^{-Bn^\beta S(x)}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_q =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} |a_n| \int\int_D \ldots \int (Nx)^\sigma e^{-Bn^\beta S(x)}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_q =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \int\int_D \ldots \int (Nx)^\sigma \sum_{n=1}^{N} |a_n|\, e^{-Bn^\beta S(x)}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_q =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \int\int_D \ldots \int (Nx)^\sigma e^{-\frac{B}{2} S(x)} \sum_{n=1}^{N} |a_n|\, e^{-\frac{B}{2} n^\beta S(x)}\, dx_1 dx_2 \ldots dx_q \leqslant$$

$$\leqslant B_2 \int\int_D \ldots \int (Nx)^\sigma e^{-\frac{B}{2} S(x)}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_q.$$

Пусть δ — произвольное наперёд заданное положительное число; тогда имеет место неравенство:

$$\int\int_D \ldots \int (Nx)^\sigma e^{-\frac{B}{2} S(x)}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_q \leqslant I_1 - I_2, \qquad (3)$$

где

$$I_1 = \int\int_{1 \leqslant Nx \leqslant 1+\delta} \ldots \int (Nx)^\sigma e^{-\frac{B}{2} S(x)}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_q,$$

$$I_2 = \int\int_{Nx \geqslant 1+\delta} \ldots \int (Nx)^\sigma e^{-\frac{B}{2} S(x)}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_q.$$

Если $\sigma<0$, то

$$I_2\leqslant(1+\delta)^\sigma\int\int\underset{Nx\geqslant1+\delta}{\ldots}\int e^{-\frac{B}{2}S(x)}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_q\leqslant$$

$$\leqslant(1+\delta)^\sigma\int\int\overset{\infty}{\underset{0}{\ldots}}\int e^{-\frac{B}{2}S(x)}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_q=$$

$$=(1+\delta)^\sigma\left(\int\limits_0^\infty e^{-\frac{B}{2}x}\,dx\right)^q=\frac{2^q(1+\delta)^\sigma}{B^q}. \tag{4}$$

Далее

$$I_1\leqslant\int\int\underset{1\leqslant Nx\leqslant1+\delta}{\ldots}\int e^{-\frac{B}{2}S(x)}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_q=$$

$$=\int\limits_0^\infty e^{-\frac{B}{2}x_1}dx_1\ldots\int\limits_0^\infty e^{-\frac{B}{2}x_{q-1}}dx_{q-1}\int\limits_{\frac{1}{x_1\ldots x_{q-1}}}^{\frac{1+\delta}{x_1\ldots x_{q-1}}}e^{-\frac{B}{2}x_q}dx_q.$$

Но для $y\geqslant0$ справедливо неравенство $ye^{-y}\leqslant e^{-1}$; поэтому

$$\int\limits_{\frac{1}{x_1\ldots x_{q-1}}}^{\frac{1+\delta}{x_1\ldots x_{q-1}}}e^{-\frac{B}{2}x_q}\,dx_q\leqslant e^{-\frac{B}{2x_1\ldots x_{q-1}}}\cdot\frac{\delta}{x_1\ldots x_{q-1}}\leqslant\frac{2\delta}{Be},$$

и значит

$$I_1\leqslant\frac{2\delta}{Be}\left(\int\limits_0^\infty e^{-\frac{B}{2}x}\,dx\right)^{q-1}=\frac{2^q\delta}{B^qe}. \tag{5}$$

Сопоставляя (3), (4) и (5), получим:

$$\int\int\underset{D}{\ldots}\int(Nx)^\sigma e^{-\frac{B}{2}S(x)}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_q\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2^q}{B^q}\left(\frac{\delta}{e}+(1+\delta)^\sigma\right),$$

$$\lim_{\sigma\to-\infty}\int\int\underset{D}{\ldots}\int(Nx)^\sigma e^{-\frac{B}{2}S(x)}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_q\leqslant\frac{2^q\delta}{{}^qe}.$$

Но число δ может быть взято как угодно малым; поэтому левая часть последнего неравенства должна быть равна 0, т. е.

$$\lim_{\sigma\to-\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_n J(s, Bn^{\beta}) = 0.$$

Лемма III, 5. *Пусть все обозначения предшествующей леммы сохраняют своё прежнее значение, тогда ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int\limits_{Nx\leqslant 1} (Nx)^s e^{-Bn^{\beta}S(x)}\, dx_1 \ldots dx_q \tag{6}$$

сходится абсолютно для достаточно больших σ, и его сумма обращается в 0 при $\sigma\to+\infty$.

Положим

$$\sigma_0 = \frac{\alpha+1}{\beta q};$$

тогда в полуплоскости $\sigma \geqslant \sigma_0$ имеем:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int\int\limits_{Nx\leqslant 1}\ldots\int (Nx)^s e^{-Bn^{\beta}S(x)}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_q\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1} |a_n| \int\int\limits_{Nx\leqslant 1}\ldots\int (Nx)^{\sigma} e^{-Bn^{\beta}S(x)}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_q \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\ldots\int_0^{\infty} (Nx)^{\sigma} e^{-Bn^{\beta}S(x)}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \left(\int_0^{\infty} x^{\sigma} e^{-Bn^{\beta}x}\, dx\right)^q =$$

$$= B^{-q(\sigma+1)}\Gamma^q(\sigma+1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{O(n^{\alpha})}{n^{\beta q(\sigma+1)}}.$$

Но ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\alpha}}{n^{\beta q(\sigma+1)}} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\alpha}}{n^{\beta q(\sigma_0+}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\beta q}}$$

сходится, а это значит, что ряд (6) в полуплоскости $\sigma \geqslant \sigma_0$ сходится абсолютно.

Далее, пусть δ — произвольное число, подчинённое условию:

$$0 < \delta < \frac{1}{2}.$$

Тогда в полуплоскости $\sigma \geqslant \sigma_0$ имеем:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a^n \int\int_{N\ x \leqslant 1} \ldots \int (Nx)^s e^{-Bn^\beta S(x)} dx_1 dx_2 \ldots dx_q\right| \leqslant$$

$$\leqslant S_1 + S_2, \qquad (7)$$

где

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \int\int_{Nx \leqslant 1-\delta} \ldots \int (Nx)^\sigma e^{-Bn^\beta S(x)} dx_1 dx_2 \ldots dx_q,$$

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \int\int_{1-\delta \leqslant Nx \leqslant 1} \ldots \int (Nx)^\sigma e^{-Bn^\beta S(x)} dx_1 dx_2 \ldots dx_q.$$

Но если $Nx \leqslant 1 - \delta$, то $(Nx)^\sigma \leqslant (1-\delta)^{\sigma-\sigma_0} (Nx)^{\sigma_0}$; поэтому

$$S_1 \leqslant (1-\delta)^{\sigma-\sigma_0} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \int\int_{Nx \leqslant 1} \ldots \int (Nx)^{\sigma_0} e^{-Bu^\beta S(} dx_1 dx_2 \ldots dx_q =$$

$$= B_3 (1-\sigma)^{\sigma-\sigma_0}. \qquad (8)$$

С другой стороны, заметим, что если $Nx \geqslant \frac{1}{2}$, то $S(x) \geqslant \frac{1}{2}$, ибо в противном случае $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant q} x_i < \frac{1}{2}$, т. е $Nx < \frac{1}{2}$. Поэтому для S_2 при условии, что $Nx \geqslant 1 - \delta > \frac{1}{2}$, справедлива оценка:

$$S_2 = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} |a_n| \int\int_{1-\delta \leqslant Nx \leqslant 1} \ldots \int (Nx)^\sigma e^{-Bn^\beta S(x)} dx_1 dx_2 \ldots dx_q =$$

$$= \lim_{N \to \infty} \int\int_{1-\delta \leqslant Nx \leqslant 1} \ldots \int (Nx)^\sigma e^{-\frac{B}{2} S(x)} \sum_{n=1}^{N} |a_n| e^{-\frac{B}{4} u^\beta} dx_1 dx_2 \ldots dx_q.$$

Но

$$\sum_{n=1}^{N} |a_n| e^{-\frac{B}{4} n^\beta} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{O(n^{\alpha+2}) e^{-\frac{B}{4} n^\beta}}{n^2} \leqslant B_4' \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = B_4,$$

т. е.

$$S_2 \leqslant B_4 \int\int\limits_{1-\delta \leqslant Nx \leqslant 1} \ldots \int (Nx)^\sigma e^{-\frac{B}{2} S(x)} dx_1 dx_2 \ldots dx_q.$$

Далее

$$\int\int\limits_{1-\delta \leqslant Nx \leqslant 1} \ldots \int (Nx)^\sigma e^{-\frac{B}{2} S(x)} dx_1 dx_2 \ldots dx_q \leqslant$$

$$\leqslant \int\int\limits_{1-\delta \leqslant Nx \leqslant 1} \ldots \int e^{-\frac{B}{2} S(x)} dx_1 dx_2 \ldots dx_q =$$

$$= \int_0^\infty e^{-\frac{B}{2} x_1} dx_1 \ldots \int_0^\infty e^{-\frac{B}{2} x_{q-1}} dx_{q-1} \cdot \int\limits_{\frac{1-\delta}{x_1 \ldots x_{q-1}}}^{\frac{1}{x_1 \ldots x_{q-1}}} e^{-\frac{B}{2} x_q} dx_q.$$

Замечая, что для $y \geqslant 0$ справедливо неравенство $ye^{-y} \leqslant \leqslant e^{-1}$, получим;

$$\int\limits_{\frac{1-\delta}{x_1 \ldots x_{q-1}}}^{\frac{1}{x_1 \ldots x_{q-1}}} e^{-\frac{B}{2} x_q} dx_q \leqslant e^{-\frac{B(1-\delta)}{2x_1 \ldots x_{q-1}}} \frac{\delta}{x_1 \ldots x_{q-1}} \leqslant \frac{2\delta}{B(1-\delta) e}.$$

Таким образом

$$S_2 \leqslant B_4 \frac{2\delta}{B(1-\delta) e} \left(\int_0^\infty e^{-\frac{B}{2} x} dx \right)^{q-1} = \frac{B_4 2^q \delta}{B^q (1-\delta) e}. \tag{9}$$

Сопоставляя (7), (8) и (9), получим:

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int\int\limits_{Nx \leqslant 1} \ldots \int (Nx)^s e^{-Bn^\beta S(x)} dx_1 dx_2 \ldots dx_q \right| \leqslant$$

$$\leqslant B_3 (1-\delta)^{\sigma-\sigma_0} + B_4 \frac{2^q \delta}{B_q (1-\delta) e}.$$

Если $\sigma \to +\infty$, то первое слагаемое правой части последнего неравенства обращается в 0, а второе — может быть сделано заранее как угодно малым соответствующим выбором числа δ. Значит сумма ряда (6) стремится к 0, если $\sigma \to +\infty$.

Лемма III, 6. *Пусть* $\sigma_1 \geqslant 1$ *в области* $-1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_1$; $|t| \geqslant 1$; *тогда справедлива оценка*:

$$|\Gamma(s)| < C(\sigma_1)\, e^{-\frac{\pi}{2}|t|}\, |t|^{\sigma - \frac{1}{2}};$$

величина $C(\sigma_1)$ *зависит только от* σ_1.

Доказательство достаточно провести только для случая, когда $t \geqslant 1$, ибо

$$|\Gamma(s - it)| = |\Gamma(s + it)|.$$

Пусть сначала $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$, тогда, как известно,

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = s e^{Cs} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{n}\right) e^{-\frac{s}{n}},$$

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s),$$

где C — постоянная Эйлера [1]). Поэтому

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(1+s)} = e^{Cs} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{n}\right) e^{-\frac{s}{n}},\\
&\left|\frac{1}{\Gamma(1+s)}\right|^2 = e^{2C\sigma} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{\sigma}{n}\right)^2 + \frac{t^2}{n^2}\right) e^{-\frac{2\sigma}{n}},\\
&\left(\frac{1}{\Gamma(1+\sigma)}\right)^2 = e^{2C\sigma} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\sigma}{n}\right)^2 e^{-\frac{2\sigma}{n}},\\
&\left|\frac{\Gamma(1+\sigma)}{\Gamma(1+s)}\right|^2 = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(n+\sigma)^2 + t^2}{(n+\sigma)^2} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{t^2}{(n+\sigma)^2}\right).
\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

[1]) См. Е. Уиттекер и Г. Ватсон [1], 12.1.

Рассмотрим теперь функцию

$$f(\sigma)=\lg\left(1+\frac{t^2}{(n+\sigma)^2}\right)$$

(t — постоянная).

Так как

$$f'(\sigma)=\frac{-2t^2}{(n+\sigma)\left((n+\sigma)^2+t^2\right)}$$

монотонно возрастает от $\sigma=0$ до $\sigma=1$, то дуга кривой $f(\sigma)$, соединяющая точки $(0, f(0))$ и $(1, f(1))$, находится под стягивающей её хордой. Поэтому

$$f(\sigma)\leqslant(1-\sigma)f(0)+\sigma f(1),$$

т. е.

$$\lg\left(1+\frac{t^2}{(n+\sigma)^2}\right)\leqslant(1-\sigma)\lg\left(1+\frac{t^2}{n^2}\right)+\sigma\lg\left(1+\frac{t^2}{(n+1)^2}\right),$$

$$1+\frac{t^2}{(n+\sigma)^2}\leqslant\left(1+\frac{t^2}{n^2}\right)^{1-\sigma}\left(1+\frac{t^2}{(n+1)^2}\right)^{\sigma}.$$

В силу равенства (10) и принимая во внимание, что $\Gamma(2)=\Gamma(1)=1$, получим:

$$\frac{\Gamma(1+\sigma)}{|\Gamma(1+\sigma+ti)|}\leqslant\frac{1}{|\Gamma(1+ti)|^{1-\sigma}}\,\frac{1}{|\Gamma(2+ti)|^{\sigma}}=$$

$$=\frac{1}{|\Gamma(1+ti)|^{1-\sigma}|1+ti|^{\sigma}|\Gamma(1+ti)|^{\sigma}}=\frac{1}{|1+ti|^{\sigma}|\Gamma(1+ti)|},$$

т. е.

$$\frac{1}{|\Gamma(1+\sigma+ti)|}\leqslant\frac{1}{|1+ti|^{\sigma}\Gamma(1+\sigma)|\Gamma(1+ti)|}. \qquad (11)$$

Пусть теперь $-1\leqslant\sigma\leqslant 0$, $t\geqslant 1$. Как известно, $\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin\pi s}$ [1]); поэтому, в силу неравенства (11), имеем:

$$\left|\frac{\Gamma(s)\sin\pi s}{\pi}\right|=\frac{1}{|\Gamma(1-s)|}=\frac{1}{|\Gamma(1-\sigma-ti)|}=\frac{1}{|\Gamma(1-\sigma+ti)|}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{|1+ti|^{-\sigma}\Gamma(1-\sigma)|\Gamma(1+ti)|}=O\left(t^{\sigma}\frac{1}{|\Gamma(1+ti)|}\right),$$

---

[1]) См. Е. Уиттекер и Г. Ватсон [1] 12.14.

т. е.

$$\Gamma(s)=O\left(\frac{t^{\sigma}}{|\Gamma(1+ti)||\sin\pi s|}\right). \tag{12}$$

Но для $t\geqslant 1$

$$|\sin\pi s|\leqslant\frac{e^{\pi t}+e^{-\pi t}}{2}\leqslant e^{\pi t},$$

$$|\sin\pi s|\geqslant\frac{e^{\pi t}-e^{-\pi t}}{2}=e^{\pi t}\frac{1-e^{-2\pi t}}{2}\geqslant e^{\pi t}\frac{1-e^{-2\pi}}{2}.$$

Кроме того,

$$|\Gamma(1+ti)|^2=|\Gamma(1+ti)\Gamma(1-ti)|=|ti\Gamma(ti)\Gamma(1-ti)|=$$

$$=\frac{|\pi ti|}{|\sin\pi ti|}=\frac{\pi t}{|\sin\pi ti|};$$

значит,

$$|\Gamma(1+ti)||\sin\pi s|\geqslant(\pi t)^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{\pi}{2}t}e^{\pi t}\frac{1-e^{-2\pi}}{2}. \tag{13}$$

Сопоставляя (12) и (13), заключаем, что

$$\Gamma(s)=O\left(t^{\sigma-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\pi}{2}t}\right). \tag{14}$$

Наконец, пусть $0\leqslant\sigma\leqslant\sigma_1$; $t\geqslant 1$. Как известно,

$$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)\ ^{1});$$

поэтому

$$\Gamma(s)=(s-1)(s-2)\ldots(s-[\sigma]-1)\Gamma(s-[\sigma]-1). \tag{15}$$

Но

$$-1\leqslant\sigma-[\sigma]-1\leqslant 0;$$

следовательно, применяя соотношение (14), имеем:

$$\Gamma(s-[\sigma]-1)=O\left(t^{\sigma-[\sigma]-3/2}e^{-\frac{\pi}{2}t}\right). \tag{16}$$

С другой стороны,

$$|(s-1)(s-2)\ldots(s-[\sigma]-1|\leqslant$$

$$\leqslant(\sigma-1+t)(\sigma-2+t)\ldots(\sigma-[\sigma]+t)(1+t)\leqslant$$

$$\leqslant 2\sigma(\sigma-1)\ldots(\sigma-[\sigma]+1)t^{[\sigma]+1}\leqslant 2\sigma_1^{\sigma_1}t^{[\sigma]+1}. \tag{17}$$

---

[1]) См. Е. Уиттекер и Г. Ватсон [1], 12.12.

Сопоставляя (15), (16) и (17), заключаем, что

$$|\Gamma(s)| \leqslant C(\sigma_1)\, t^{[\sigma]+1} t^{\sigma-[\sigma]-3/2} e^{-\frac{\pi}{2}t} = C(\sigma_1)\, t^{\sigma-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}t}.$$

Теорема 48 (Heilbronn, 1).

Пусть ряд Дирихле

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

сходится в некоторой полуплоскости, а изображаемая им функция удовлетворяет условиям:

1°. *$f(s)$ — мероморфная функция, имеющая конечное число полюсов.*

2°. *Существуют такие числа $\lambda > 0$, $A > 0$ и натуральное число q, что функция*

$$F(s) = A^s \Gamma^q(\lambda s) f(s)$$

удовлетворяет функциональному уравнению $F(1-s) = F(s)$.

3°. *В полуплоскости $\sigma \geqslant \frac{1}{2}$ (вне полюсов) справедлива оценка:*

$f(s) = O(|t|^m)$, $m > 0$ (равномерно относительно σ).

Тогда

$$F(s) - F_0(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int\int\limits_{Nx \geqslant 1} \ldots \int [(Nx)^{\lambda s-1} + (Nx)^{\lambda(1-s)-1}]\, e^{-A^{-\tau} n^{\tau} S(x)} dx_1\, dx_2 \ldots dx_q, \qquad (48.1)$$

где $F_0(s)$ — главная часть $F(s)$; $\tau = (q\lambda)^{-1}$.

Пусть величина $\rho(s)$ равна разности между левой и правой частями (48.1); так как числа a_n суть коэффициенты сходящегося ряда Дирихле, то $a_n = O(n^\alpha)$ для соответствующего значения α. Поэтому, в силу леммы III, 4, $\rho(s)$ — целая функция.

Докажем далее, что $\rho(s)$ ограничена во всей плоскости переменного s. Положим $F(s)=F_0(s)+F_1(s)$, где $F_1(s)$ — целая функция. Тогда, в силу функционального уравнения для $F(s)$, имеем:

$$F_0(1-s)-F_0(s)=F_1(s)-F_1(1-s),$$

что возможно только в том случае, если $F_1(1-s)\equiv F_1(s)$. Из этого тождества и (48.1) следует, что

$$\rho(1-s)=\rho(s).$$

Поэтому ограничимся оценкой $\rho(s)$ только в полуплоскости $\sigma\geqslant\frac{1}{2}$.

В силу леммы III, 5 существует такое $\sigma_0>0$, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int\int\underset{Nx\leqslant 1}{\dots}\int (Nx)^{\lambda s-1} e^{-A^{-\tau}n^{\tau}S(x)}\,dx_1\,dx_2\dots dx_q$$

сходится абсолютно для $\sigma\geqslant\sigma_0$; далее, выберем σ_1 столь большим, чтобы $\sigma_1\geqslant\sigma_0$ и чтобы в полуплоскости $\sigma\geqslant\sigma_1$ функции $f(s)$ и $F(s)$ не имели полюсов. Оценим $\rho(s)$ в этой полуплоскости.

Прежде всего ясно, что

$$A^s\Gamma^q(\lambda s)\,n^{-s}=\left(\int_0^{\infty} x^{\lambda s-1}e^{-A^{-\tau}n^{\tau}x}\,dx\right)^q=$$

$$=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\dots\int_0^{\infty}(Nx)^{\lambda s-1}e^{-A^{-\tau}n^{\tau}S(x)}\,dx_1\,dx_2\dots dx_q,$$

$$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\dots\int_0^{\infty}(Nx)^{\lambda s-1}e^{-A^{-\tau}n^{\tau}S(x)}dx_1\,dx_2\dots dx_q=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\int\int\underset{Nx\geqslant 1}{\dots}\int(Nx)^{\lambda s-1}e^{-A^{-\tau}n^{\tau}S(x)}\,dx_1\,dx_2\dots dx_q+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\int\int\underset{Nx<1}{\dots}\int(Nx)^{\lambda s-1}e^{-A^{-\tau}n^{\tau}S(x)}\,dx_1\,dx_2\dots dx_q,$$

ибо все ряды, входящие в последнее тождество, абсолютно сходятся для $\sigma \geqslant \sigma_1$. Поэтому

$$\rho(s) = -F_0(s) - $$
$$-\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int\int_{Nx \geqslant 1} \ldots \int (Nx)^{\lambda(1-s)-1} e^{-A^{-\tau} n^{\tau} S(x)} dx_1 \, dx_2 \ldots dx_q +$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int\int_{Nx < 1} \ldots \int (Nx)^{\lambda s-1} e^{-A^{-\tau} n^{\tau} S(x)} dx_1 \, dx_2 \ldots dx_q,$$

т. е.

$$|\rho(s)| \leqslant |F_0(s)| +$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \int\int_{Nx \geqslant 1} \ldots \int (Nx)^{\lambda(1-\sigma_1)-1} e^{-A^{-\tau} n^{\tau} S(x)} dx_1 \, dx_2 \ldots dx_q +$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \int\int_{Nx < 1} \ldots \int (Nx)^{\lambda\sigma_1-1} e^{-A^{-\tau} n^{\tau} S(x)} dx_1 \, dx_2 \ldots dx_q = B_5.$$

Рассмотрим теперь $\rho(s)$ в полосе $\frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant \sigma_1$. Возьмём $T \geqslant 1$ и столь большим, чтобы все полюсы $f(s)$ и $F(s)$ оказались заключёнными в прямоугольнике $\left(\frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant \sigma_1, |t| \leqslant T\right)$. Внутри этого прямоугольника $\rho(s)$ ограничена, будучи целой функцией переменного s. Вне этого прямоугольника $F_0(s)$ — правильная и ограниченная функция. Поэтому

$$|\rho(s)| \leqslant B_6 \Big(|\Gamma(\lambda s)|^q |t|^m + 1 +$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \int\int_{Nx \geqslant 1} \ldots \int [(Nx)^{\lambda\sigma_1-1} +$$
$$+ (Nx)^{\frac{1}{2}\lambda-1}] \, e^{-A^{-\tau} n^{\tau} S(x)} dx_1 \, dx_2 \ldots dx_q \Big).$$

Но, в силу леммы III, 6, имеем:

$$|\Gamma(\lambda s)|^q \leqslant B_7 \, e^{-\frac{\pi}{2} q\lambda|t|} \cdot |t|^{\lambda q \sigma_1} \leqslant B_8;$$

значит

$$|\rho(s)| \leqslant B_9.$$

Сопоставляя все полученные оценки для $\rho(s)$, устанавливаем, что $\rho(s)$ в самом деле ограничена во всей плоскости переменного s.

Но $\rho(s)$ — целая функция; поэтому $\rho(s) = \mathrm{const.}$, как этого требует теорема Лиувилля.

С другой стороны, в силу лемм III, 4 и III, 5, из тождества (48.2) получим:

$$\lim_{s \to \infty} \rho(s) = 0,$$

если s пробегает только действительные положительные значения. Этим окончательно устанавливается, что

$$\rho(s) \equiv 0.$$

Поставим теперь в соответствие каждому натуральному числу k число β, которое определим следующим образом. Если k не равно фундаментальному числу, т. е. не является основным модулем действительного первообразного характера, то $\beta = \frac{1}{2}$. Если же k — фундаментальное число, то этому числу отвечают один или два действительных первообразных характера $\chi(n)$ $\left(\text{или } \chi(n) \text{ и } \chi'(n)\right)$, основные модули которых равны k. Пусть $L(s, \chi)$ $\left(\text{или } L(s,\chi) \text{ и } L(s, \chi')\right)$ — соответствующие этим характерам L-функции. Положим β в этом случае равным наибольшему из действительных нулей этих L-функций.

Теорема 49 (Siegel'я). *Пусть* ε — *произвольное положительное число; тогда существует такое* μ'', *зависящее от* ε, *что*

$$1 - \beta > \mu'' k^{-\varepsilon} \quad \text{для} \quad k = 1, 2, \ldots$$

В процессе доказательства буквы $K_1, K_2, \ldots$ будут обозначать величины, зависящие только от ε и некоторого определённого натурального k_1, которое будет выбрано позднее.

Пусть

$$k_0 = \max\left(e^{\frac{1}{\varepsilon}},\ 4\pi^2\right).$$

Рассмотрим сначала такие натуральные k, которые или не превосходят k_0 или для которых справедливо неравенство

$$1-\beta \geqslant \frac{1}{\lg k};$$

для этих k можно написать, что

$$1-\beta \geqslant K_1 k^{-\varepsilon},$$

где K_1 — наименьшее среди чисел

$$(1-\beta)k^{\varepsilon}, \quad \text{где} \quad k \leqslant k_0,$$

и

$$\frac{k^{\varepsilon}}{\lg k}, \quad \text{где} \quad k > k_0.$$

Теперь обратимся к рассмотрению таких k, которые характеризуются условиями:

$$1-\beta < \frac{1}{\lg k}, \qquad k > k_0.$$

Если таковые k вообще существуют — это в настоящее время является нерешённой проблемой в науке, — то среди них есть наименьшее, которое мы обозначим буквой k_1. Таким образом

$$1-\beta_1 < \frac{1}{\lg k_1}.$$

Очевидно, что для значений k между k_0 и k_1 справедливо неравенство:

$$1-\beta \geqslant K_2 k^{-\varepsilon},$$

где

$$k_2 = \min_{k_0 \leqslant k \leqslant k_1} (1-\beta) k^{\varepsilon}.$$

Следовательно, остаётся рассмотреть только такие k, для которых выполнены условия

$$1-\beta < \frac{1}{\lg k}; \qquad k > k_1.$$

Только такие значения k мы и будем иметь в виду до конца этого рассуждения.

Любое из таковых чисел k является фундаментальным, ибо

$$\beta > 1 - \frac{1}{\lg k} > 1 - \frac{1}{\lg k_0} > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Пусть теперь $\chi(n, k)$ — тот действительный первообразный характер, который соответствует числу k и нулём которого является число β.

Аналогично пусть $\chi(n, k_1)$ — первообразный действительный характер, соответствующий числу k_1 и имеющий своим нулём число β_1. Очевидно, что $\chi(n, k)$ и $\chi(n, k_1)$ не тождественны между собой. В силу теоремы 13 существует такой действительный первообразный характер $\chi(n, k_2)$, что

$$\begin{gathered}\chi(n, k)\,\chi(n, k_1) = \chi_0(n, k')\,\chi(n, k_2),\\ 1 + \chi(n, k) + \chi(n, k_1) + \chi(n, k_2) \geqslant 0, \qquad (49.1)\\ k_2 / k k_1.\end{gathered}$$

Пусть

$$L(s, \chi),\ L(s, \chi_1) \text{ и } L(s, \chi_2)$$

ряды Дирихле, построенные соответственно для наших характеров:

$$\chi = \chi(n, k), \qquad \chi_1 = \chi(n, k_1), \qquad \chi_2 = \chi(n, k_2).$$

Положим далее

$$q = \frac{1}{2}\big(5 + \chi(-1) + \chi_1(-1) + \chi_2(-1)\big), \quad \lambda = \frac{2}{q},$$

$$A = 2^{q-4}\pi^{-2}(k k_1 k_2)^{\frac{1}{2}},$$

$$f(s) = \zeta(s)\,L(s, \chi)\,L(s, \chi_1)\,L(s, \chi_2), \quad F(s) = A^s \Gamma^q(\lambda s) f(s).$$

В силу первого из тождеств (49.1)

$$\chi(-1)\,\chi_1(-1)\,\chi_2(-1) = 1,$$

т. е. значение -1 может встречаться только чётное число раз среди чисел $\chi(-1)$, $\chi_1(-1)$ и $\chi_2(-1)$. Значит $q = 2$ или 4, $\lambda = 1$ или $1/2$.

Наконец, пусть, как и в гл. II, § 6, положено:

$$\xi(s)=\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s),$$

$$\xi(s,\chi)=\left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right)L(s,\chi),\qquad \delta=\frac{1}{2}(1-\chi(-1)),$$

$$\xi(s,\chi_1)=\left(\frac{\pi}{k_1}\right)^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s+\delta_1}{2}\right)L(s,\chi_1),\quad \delta_1=\frac{1}{2}(1-\chi_1(-1)),$$

$$\xi(s,\chi_2)=\left(\frac{\pi}{k_2}\right)^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s+\delta_2}{2}\right)L(s,\chi_2),\quad \delta_2=\frac{1}{2}(1-\chi_2(-1)).$$

Нетрудно проверить, что функции $f(s)$ и $F(s)$ удовлетворяют всем условиям теоремы 48. В самом деле $f(s)$, будучи произведением конечного числа рядов Дирихле, сама представляется абсолютно сходящимся рядом Дирихле при

$$\sigma>1.$$

Далее, $f(s)$ имеет на плоскости переменной s единственную особенность — полюс 1-го порядка в точке $s=1$. Относительно $F(s)$ легко установить тождество

$$F(s)=(2\sqrt{\pi})^{q-4}\,\xi(s)\,\xi(s,\chi)\,\xi(s,\chi_1)\,\xi(s,\chi_2).$$

Для этого достаточно рассчитать обе части этого тождества для двух единственно возможных случаев: когда $\chi(-1)=\chi_1(-1)=\chi_2(-1)=1$ и когда два из чисел $\chi(-1)$, $\chi_1(-1)$, $\chi_2(-1)$ равны -1, а одно равно 1. Но, в силу следствия теоремы 34, последнее тождество влечёт за собой функциональное уравнение:

$$F(1-s)=F(s).$$

Наконец, в силу теоремы 35, в полуплоскости $\sigma\geqslant 1$ справедлива оценка:

$$f(s)=O(|t|^{\frac{1}{2}})\,O(|t|^{\frac{1}{2}})\,O(|t|^{\frac{1}{2}})\,O(|t|^{\frac{1}{2}})=O(|t|^{2}).$$

Прилагая теперь к функциям $f(s)$ и $F(s)$ предыдущую теорему, получим:

$$F(s)-F_0(s_0)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int\int\cdots\int_{Nx\geqslant 1} [(Nx)^{\lambda s-1}+$$

$$+(Nx)^{\lambda(1-s)-1}]\, e^{-A^{-\tau} n^{\tau} S(x)}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_q, \qquad (49.2)$$

где

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}.$$

Но

$$\lg f(s)=\lg\zeta(s)+\lg L(s,\chi)+\lg L(s,\chi_1)+\lg L(s,\chi_2)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n^s},$$

где

$$b_n=\lambda(n)\bigl(1+\chi(n,k)+\chi(n,k_1)+\chi(n,k_2)\bigr);$$

в силу второго из тождеств (49.1) очевидно, что $b_n\geqslant 0$ $(n=1, 2, \ldots)$. Но, с другой стороны

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}=e^{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n^s}}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n^s}\right)^m,$$

откуда заключаем, что и все $a_n\geqslant 0$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$.

Что касается $F(s)$, то эта функция имеет только два полюса в точках $s=0$ и 1, т. е.

$$F_0(s)=\frac{\gamma}{s(1-s)},$$

причём, в силу определения $F(s)$, имеем:

$$\gamma=-\operatorname*{Res}_{s=1} F(s)=-A\Gamma^q(\lambda)\,L(1,\chi)\,L(1,\chi_1)\,L(1,\chi_2).$$

Наконец, полагая $0 < s < 1$ и отбрасывая в правой части (49.2) все слагаемые, начиная со второго, получаем:

$$F(s) - \frac{\gamma}{s(1-s)} >$$
$$> \int\limits_{Nx \geqslant 1} \ldots \int [(Nx)^{\lambda s - 1} + (Nx)^{\lambda(1-s)-1}] e^{-A^{-\tau} S(x)} dx_1 \ldots dx_q \geqslant$$
$$\geqslant \int\limits_{Nx \geqslant 1} \ldots \int (Nx)^{\lambda s - 1} e^{-A^{-\tau} S(x)} dx_1 \ldots dx_q.$$

Положим теперь $s = \beta_1$; тогда последнее неравенство даёт:

$$K_3 AL(1, \chi) L(1, \chi_2) \geqslant$$
$$\geqslant \int\limits_{Nx \geqslant 1} \ldots \int (Nx)^{\lambda\beta_1 - 1} e^{-A^{-\tau} S(x)} dx_1 \ldots dx_q, \qquad (49.3)$$

ибо всегда $\Gamma^q(\lambda) < \pi^2$.

Заметим далее, что

$$A \geqslant (2\pi)^{-2} (kk_1)^{\frac{1}{2}} > (2\pi)^{-2} k_1 \geqslant (2\pi)^{-2} 4\pi^2 = 1;$$

поэтому область D, определённая неравенствами

$$A^\tau \leqslant x_i \leqslant 2A^\beta \qquad (i = 1, 2, \ldots, q),$$

целиком лежит в области, где $Nx \geqslant 1$.

Кроме того, в этой области

$$S(x) \leqslant 2qA^\tau, \qquad Nx \leqslant 2^q A^{\tau q} \leqslant 16 A^{\tau q},$$

причём $\lambda\beta_1 - 1 \leqslant \beta_1 - 1 < 0$. Значит, ограничивая интегрирование областью D, будем иметь:

$$\int\int\limits_{Nx \geqslant 1} \ldots \int (Nx)^{\lambda\beta_1 - 1} e^{-A^{-\tau} S(x)} dx_1 dx_2 \ldots dx_q \geqslant$$
$$\geqslant (16 A^{\tau q})^{\lambda\beta_1 - 1} e^{-2qA^{\tau q}} \geqslant K_4 A^{\beta_1},$$

откуда, принимая во внимание (49.3) и третье из неравенств

(49.7), получим:

$$K_3 L(1,\chi) L(1,\chi_2) \geqslant K_4 A^{\beta_1-1} \geqslant K_4(kk_1\cdot k_2)^{\frac{\beta_1-1}{2}} \geqslant K_5 k^{\beta_1-1}. \quad (49.4)$$

С другой стороны, в силу леммы III, 2, имеем:

$$L(1,\chi)L(1,\chi_2)=$$

$$=(1-\beta)L'(\bar{s},\chi)L(1,\chi_2)<K_6(1-\beta)\lg^3 k, \quad (49.5)$$

ибо

$$1-\frac{1}{\lg k}<\rho<\bar{s}<1.$$

Сопоставляя (49.4) и (49.5), заключаем, что

$$(1-\beta)\lg^3 k > K_7 k^{\beta_1-1}.$$

Но, согласно выбору β_1, k_0 и k_1, должно выполняться неравенство

$$1-\beta_1<\frac{1}{\lg k_1}<\varepsilon;$$

значит

$$1-\beta > K_7\frac{k^{\beta_1-1}}{\lg^3 k} > K_8 k^{-\varepsilon} \quad \text{для} \quad k>k_1,$$

где

$$K_8=\min_{k>k_1}\frac{K_7 k^{\varepsilon+\beta_1-1}}{\lg^3 k}.$$

Таким образом

$$1-\beta \geqslant \mu'' k^{-\varepsilon},$$

где

$$\mu''=\min(K_1, K_2, K_8).$$

Примечание. Постоянная μ'' не может быть вычислена «эффективно», т. е. численно оценена, если пользоваться изложенным выше методом доказательства. Причина заключается в том, что μ'' зависит от неизвестно где расположенного числа k_1, которое даже может не существовать вообще. Вопрос о численной оценке μ'' является трудной проблемой в современной теории L-функций.

ГЛАВА IV

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ L-ФУНКЦИЙ К ПРОБЛЕМАМ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

§ 1. Аппроксимация функции $\pi(x, k, l)$

Изложенная выше теория L-функций позволяет исследовать вопрос о распределении простых чисел в натуральном ряду и даже, значительно общее, в любой арифметической прогрессии. Точная формулировка этой проблемы такова. Пусть дана арифметическая прогрессия:

$$l, \ l+k, \ l+2k, \ \ldots,$$

где l и k — два произвольных натуральных числа; обозначим символом $\pi(x, k, l)$ число простых чисел, принадлежащих этой прогрессии и не превосходящих наперёд заданного положительного числа x.

Очевидно, что если $(l, k)>1$, то $\pi(x, k, l)=0$ или 1, ибо наша прогрессия может содержать самое большее одно простое число — именно число l, если оно простое.

Поэтому интересен только тот случай, когда $(l, k)=1$, что мы всё время и будем предполагать. Кроме того, не уменьшая общности получаемых результатов, достаточно предполагать, что $l<k$, что мы также всегда будем делать.

Наша задача теперь состоит в том, чтобы выяснить асимптотическое поведение функции $\pi(x, k, l)$ при $x \rightarrow \infty$. Мы докажем следующую теорему, принадлежащую Пэйджу.

Теорема 50. (Третья теорема Пэйджа, Page, 1.)

Пусть x — любое положительное, k и l — натуральные числа, подчинённые упомянутым выше условиям. Тогда *справедливо тождество:*

$$\pi(x, k, l) = \\ = \frac{1}{h}\sum_{n=2}^{[x]}\frac{1}{\lg n} - E\,\frac{\tilde{\chi}(l)}{h}\sum_{n=2}^{[x]}\frac{n^{\beta-1}}{\lg n} + O\left(xe^{-\mu_6\sqrt{\lg x}}\right), \qquad (50.1)$$

где $h = \varphi(k)$, *символ* $E = 0$ *или* 1 *и зависит только от* x *и* k; $\tilde{\chi}(n)$ *и* β — *исключительный характер и нуль для данного значения* k.

Положительная постоянная μ_6 *не зависит от* x, k, l; *равным образом и символ* O *обозначает оценку, равномерную относительно* x, k *и* l.

Очевидно, что доказательство достаточно проводить только для больших значений x, ибо в конечном промежутке изменения x все величины, входящие в (50.1), ограничены. Предположим поэтому, что $x \geqslant e^4$. Рассмотрим теперь два возможных случая:

1. $k > e^{\sqrt{\lg x}}$. Прежде всего ясно, что

$$\pi(x, k, l) \leqslant \sum_{l+k\nu\leqslant x} 1 \leqslant \frac{x-l}{k} + 1 \leqslant \frac{x}{k} + 1 = O\left(xe^{-\sqrt{\lg x}}\right);$$

далее известно [1]), что

$$\prod_{d\leqslant k}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1} = O(\lg k) \quad \text{для} \quad k > 0.$$

Поэтому, принимая во внимание, что $\frac{\lg x}{x}$ монотонно убывает при возрастании x, имеем:

$$h^{-1} = k^{-1}\prod_{p/k}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1} \leqslant k^{-1}\prod_{p\leqslant k}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1} = \\ = O(k^{-1}\lg k) = O\left(\sqrt{\lg x}\; e^{-\sqrt{\lg x}}\right).$$

Наконец, непосредственная оценка даёт:

$$\sum_{n=2}^{[x]}\frac{1}{\lg n} \leqslant \sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\frac{1}{\lg 2} + 2\sum_{n>\sqrt{x}}\frac{1}{\lg x} = \\ = O(\sqrt{x}) + O\left(\frac{x}{\lg x}\right) = O\left(\frac{x}{\lg x}\right).$$

1) См. Ингам. стр. 33, соотношение 24.

Для рассматриваемого случая положим $E=0$; тогда, собирая все полученные оценки, имеем:

$$\left|\pi(x, k, l)-\frac{1}{h}\sum_{n=2}^{[x]}\frac{1}{\lg n}-E\,\frac{\overline{\widetilde{\chi}}(l)}{h}\sum_{n=2}^{[x]}\frac{n^{\beta-1}}{\lg n}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\pi(x, k, l)+h^{-1}\sum_{n=2}^{[x]}\frac{1}{\lg n}=O\left(xe^{-\sqrt{\lg x}}\right)+$$

$$+O\left(\sqrt{\lg x}\,e^{-\sqrt{\lg x}}\cdot\frac{x}{\lg x}\right)=O\left(xe^{-\sqrt{\lg x}}\right). \qquad (50.2)$$

2. $k\leqslant e^{\sqrt{\lg x}}$. Введём обозначения:

$$a_n=\begin{cases}1, & \text{если}\quad n\equiv l\,(\operatorname{mod} k),\\ 0, & \text{если}\quad n\not\equiv l\,(\operatorname{mod} k);\end{cases}$$

$$S(x)=\sum_{n\leqslant x}a_n\Lambda(n),$$

$$S_1(x)=\sum_{p\leqslant x}a_p\lg p,$$

$$r(x)=S(x)-S_1(x).$$

В силу следствия теоремы 15 имеем:

$$\frac{1}{h}\sum_{(\chi)}\overline{\chi}(l)\,\chi(n)=\frac{1}{h}\sum_{(\chi)}\frac{\chi(n)}{\chi(l)}=a_n, \qquad (50.3)$$

где суммирование распространяется на все $\chi(n)$, имеющие число k своим модулем.

Далее, из определения a_n вытекает, что

$$\pi(x, k, l)=\sum_{p\leqslant x}a_p=\sum_{n=2}^{[x]}\frac{S_1(n)-S_1(n-1)}{\lg n}=$$

$$=\sum_{n=2}^{[x]}\frac{S(n)-S(n-1)}{\lg n}-\sum_{n=2}^{[x]}\frac{r(n)-r(n-1)}{\lg n}. \qquad (50.4)$$

И, кроме того,

$$\left|\sum_{n=2}^{[x]} \frac{r(n)-r(n-1)}{\lg n}\right| = \sum_{n=2}^{[x]} |r(n)| \left(\frac{1}{\lg n} - \frac{1}{\lg(n+1)}\right) + \frac{|r([x])|}{\lg([x])+1} \leqslant \frac{1}{\lg 2} \max_{1 \leqslant n \leqslant x} |r(n)|. \qquad (50.5)$$

Оценим теперь $r(x)$. Очевидно, что

$$r(x) = \sum_{\substack{p^\lambda \leqslant x \\ \lambda \geqslant 2}} a_n \Delta(n) \leqslant \sum_{p^2 \leqslant x} \lg p + \sum_{\lambda=3}^{\left[\frac{\lg x}{\lg 2}\right]} \sum_{p^\lambda \leqslant x} \lg p \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\sqrt{x} \lg x + \sum_{\lambda=3}^{\left[\frac{\lg x}{\lg 2}\right]} \frac{1}{\lambda} \sqrt[\lambda]{x} \lg x =$$

$$= O(\sqrt{x} \lg x) + O\left(\frac{\lg x}{\lg 2} \cdot \frac{1}{3} \sqrt[3]{x} \lg x\right) = O(\sqrt{x} \lg x). \qquad (50.6)$$

Сопоставляя (50.4), (50.5) и (50.6), заключаем, что

$$\pi(x, k, l) = \sum_{n=2}^{[x]} \frac{S(n) - S(n-1)}{\lg n} + O(\sqrt{x} \lg x). \qquad (50.7)$$

Займёмся теперь исследованием суммы $S(x)$. Рассмотрим ряд:

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \Lambda(n)}{n^s};$$

заметив, что $a_n \Delta(n) \leqslant \lg n$ для $n = 2, 3, \ldots$ и что

$$(\sigma - 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \Lambda(n)}{n^\sigma} \leqslant (\sigma - 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma} =$$

$$= -(\sigma - 1) \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) = O(1)$$

в промежутке $1 < \sigma \leqslant 2$, мы убеждаемся в приложимости теоремы 24 к функции $f(s)$.

Поэтому, полагая в этой теореме $a = 1 + \frac{1}{\lg x}$, $T = e^{\sqrt{\lg x}}$, $3 \leqslant y \leqslant x$, получаем, после несложных упрощений

$$S(y) = \sum_{n \leqslant y} a_n \Lambda(n) =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{a-iT}^{a+iT} \frac{y^s f(s)}{s} ds + O(xe^{-\sqrt{\lg x}} \lg^2 x). \qquad (50.8)$$

С другой стороны, принимая во внимание (50.3), имеем:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-iT}^{a+iT} \frac{y^s f(s)}{s} ds =$$
$$= \frac{1}{h} \sum_{(\chi)} \bar{\chi}(l) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{a-iT}^{a+iT} \frac{y^s}{s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^s} ds =$$
$$= h^{-1} \sum_{(\chi)} \bar{\chi}(l) \cdot \frac{-1}{2\pi i} \int_{a-iT}^{a+iT} \frac{y^s}{s} \frac{L'}{L}(s, \chi) ds. \qquad (50.9)$$

(Заметим, что здесь все операции с бесконечными рядами законны, ибо последние сходятся абсолютно для $\sigma = a$.)

Так как $T = e^{\sqrt{\lg x}} \geqslant e^2 > 3$, то к заданным числам k и T применима теорема 46; последняя утверждает существование такой положительной величины δ, которая обладает следующими свойствами:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \frac{1}{2} \geqslant \delta \geqslant \frac{\mu}{12}(\lg k(T+3))^{-1}, \\ 2.\ \frac{L'}{L}(s, \chi) = O(\lg^2 kT) \end{array}\right\} \qquad (50.10)$$

вдоль ломаной $P(\infty + iT, 1 - \delta + iT, 1 - \delta - iT, \infty - iT)$ для всех характеров данного модуля k.

3. Внутри области D, ограниченной ломаной P, может лежать только один нуль рассматриваемых функций $L(s, \chi)$ — именно исключительный нуль для данного значения k. Этот исключительный нуль будем обозначать буквой β.

Поэтому, применяя теорему Коши, имеем:

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-iT}^{a+iT}\frac{y^s}{s}\frac{L'}{L}(s,\chi)\,ds=$$

$$=\eta(\chi)-\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{a-iT}^{1-\delta-iT}+\int\limits_{1-\delta-iT}^{1-\delta+iT}+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{1-\delta+iT}^{a+iT}\right)\frac{y^s}{s}\frac{L'}{L}(s,\chi)\,ds,\qquad(50.11)$$

где символ $\eta(\chi)$ определяется следующими условиями:

1. $\eta(\chi)=y$, если $\chi=\chi_0$, т. е. главному характеру.

2. $\eta(\chi)=-\frac{y^\beta}{\beta}$, если χ порождён исключительным характером для значения k и если β попадает в область, ограниченную ломаной P.

3. $\eta(\chi)=0$ во всех остальных случаях.

Далее очевидно, что, в силу оценки (50.10), имеем:

$$\left|\int\limits_{a-iT}^{1-\delta-iT}\frac{y^s}{s}\frac{L'}{L}(s,\chi)\,ds\right|;\left|\int\limits_{1-\delta+iT}^{a+iT}\frac{y^s}{s}\frac{L'}{L}(s,\chi)\,ds\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{x^a}{T}O(\lg^2 kT)=O\left(xe^{-\sqrt{\lg x}}\lg x\right),\qquad(50.12)$$

ибо $kT\leqslant T^2=e^{2\sqrt{\lg x}}$.

Аналогично, в силу той же оценки (50.10), имеет место неравенство:

$$\left|\int\limits_{1-\delta-iT}^{1-\delta+iT}\frac{y^s}{s}\frac{L'}{L}(s,\chi)\,ds\right|\leqslant x^{1-\delta}O(\lg^2 kT)\int\limits_0^T\frac{dt}{\sqrt{(1-\delta)^2+t^2}}=$$

$$=O\left(x^{1-\frac{\mu}{36\sqrt{\lg x}}}\right)O(\lg x)\,O(\lg T)=$$

$$=O\left(xe^{-\mu_5\sqrt{\lg x}}\lg^{3/2}x\right),\qquad(50.13)$$

ибо $T\geqslant e^2$ и $k(T+3)\leqslant T\cdot 2T\leqslant T^3$.

Сопоставляя (50.8), (50.9), (50.11), (50.12) и (50.13), мы видим, что

$$S(y) = \frac{y}{h} - E\tilde{\tilde{\chi}}(l)\frac{y^\beta}{h\beta} + O(xe^{-\mu_6\sqrt{\lg x}}), \quad (50.14)$$

где символ $E = 0$ и 1 и зависит только от k и x. Положим теперь

$$S(n) = \frac{n}{h} - E\tilde{\tilde{\chi}}(l)\frac{n^\beta}{h\beta} + \rho_n \text{ для } n = 2, 3, \ldots, [x]. \quad (50.15)$$

В силу равенства (50.14)

$$\max_{2 \leqslant n \leqslant [x]} |\rho_n| = O(xe^{-\mu_6\sqrt{\lg x}}). \quad (50.16)$$

Сопоставляя (50.7), (50.15) и (50.16), имеем:

$$\left| \pi(x, k, l) - \frac{1}{h}\sum_{n=2}^{[x]}\frac{1}{\lg n} + E\frac{\tilde{\tilde{\chi}}(l)}{\beta h}\sum_{n=2}^{[x]}\frac{n^\beta - (n-1)^\beta}{\lg n} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \sum_{n=2}^{[x]}\frac{\rho_n - \rho_{n-1}}{\lg n} \right| + O(\sqrt{x \lg x}) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=2}^{[x]}|\rho_n|\left(\frac{1}{\lg n} - \frac{1}{\lg(n+1)}\right) + \frac{\rho_{[x]}}{\lg([x]+1)} + O(\sqrt{x}\lg x) \leqslant$$

$$\leqslant \max_{2 \leqslant n \leqslant x}|\rho_n| \cdot \frac{1}{\lg 2} + O(\sqrt{x}\lg x) = O(xe^{-\mu_6\sqrt{\lg x}}). \quad (50.17)$$

С другой стороны, в силу теоремы о конечных приращениях, получим:

$$\sum_{n=2}^{[x]}\frac{n^\beta - (n-1)^\beta}{\lg n} - \sum_{n=2}^{[x]}\frac{\beta n^{\beta-1}}{\lg n} = \sum_{n=2}^{[x]}\frac{\beta(n-\theta_n)^{\beta-1} - \beta n^{\beta-1}}{\lg n} =$$

$$= \beta(\beta-1)\sum_{n=2}^{[x]}\frac{-\theta_n(n-\theta_n')^{\beta-2}}{\lg n} = O\left(\sum_{n=2}^{[x]}\frac{(n-1)^{-1}}{\lg n}\right) =$$

$$= O\left(\sum_{n=2}^{[x]}\frac{1}{n\lg n}\right) = O\left(\int_2^x \frac{dx}{x\lg x}\right) = O(\lg\lg x) =$$

$$= O(xe^{-\mu_6\sqrt{\lg x}}). \quad (50.18)$$

Соотношения (50.17) и (50.18) дают желаемый результат:

$$\pi(x, k, l) = \frac{1}{h}\sum_{n=2}^{[x]}\frac{1}{\lg n} - E\frac{\tilde{\tilde{\chi}}(l)}{h}\sum_{n=2}^{[x]}\frac{n^{\beta-1}}{\lg n} + O\left(xe^{-\mu_6\sqrt{\lg x}}\right).$$

Рассмотрим некоторые частные случаи асимптотических законов для $\pi(x, k, l)$.

1. Пусть число k не зависит от x; в таком случае и величина β не зависит от x. Следовательно,

$$\sum_{n=2}^{[x]}\frac{n^{\beta-1}}{\lg n} = O\left(x^\beta\sum_{n=2}^{[x]}\frac{1}{n\lg n}\right) = O\left(x^\beta\int_2^x\frac{dx}{x\lg x}\right) =$$

$$= O(x^\beta\lg\lg x) = O\left(xe^{-\mu_6\sqrt{\lg x}}\right),$$

т. е.

$$\pi(x, k, l) = \frac{1}{h}\sum_{n=2}^{[x]}\frac{1}{\lg n} + O\left(xe^{-\mu_6\sqrt{\lg x}}\right),$$

где символ O подразумевает постоянную, зависящую от k. В частности, если $k = l = 1$, то, полагая $\pi(x) = \pi(x, 1, 1)$, мы получим:

$$\pi(x) = \sum_{n=2}^{[x]}\frac{1}{\lg n} + O\left(xe^{-\mu_6\sqrt{\lg x}}\right).$$

2. Пусть M — произвольное положительное число и

$$k \leqslant (\lg x)^M.$$

В силу теоремы 49

$$\beta < 1 - \mu' k^{-\varepsilon},$$

где ε — произвольное малое положительное число. В частности, полагаем $\varepsilon = \frac{1}{2}M$; тогда

$$\beta \leqslant 1 - \mu' k^{-\varepsilon} \leqslant 1 - \mu'(\lg x)^{-\varepsilon M} = 1 - \mu'(\lg x)^{-\frac{1}{2}}.$$

Значит

$$\sum_{n=2}^{[x]} \frac{n^{\beta-1}}{\lg n} \leqslant x^{\beta} \sum_{n=1}^{[x]} \frac{1}{n \lg n} = O\left(xe^{-\mu' \sqrt{\lg x}} \lg \lg x\right),$$

т. е.

$$\pi(x, k, l) = \frac{1}{h} \sum_{n=2}^{[x]} \frac{1}{\lg n} + O\left(xe^{-\mu_7 \sqrt{\lg x}}\right).$$

Это равенство показывает, что простые числа асимптотически равномерно распределены во всех арифметических прогрессиях, разности которых не превышают любой наперёд заданной положительной степени $\lg x$. Так как функция $\frac{1}{\lg x}$ монотонно убывает при $x \to \infty$, то

$$\sum_{n=2}^{[x]} \frac{1}{\lg n} = \int_2^x \frac{dx}{\lg x} + O(1) = \operatorname{li} x + O(1),$$

где $\operatorname{li} x$ — интегральный логарифм.

Следовательно,

$$\pi(x, k, l) = \frac{1}{h} \operatorname{li} x + O\left(xe^{-\mu_7 \sqrt{\lg x}}\right).$$

В заключение заметим, что

$$\operatorname{li} x \sim \frac{x}{\lg x} \text{ для } x \to \infty,$$

ибо

$$\int_2^x \frac{dx}{\lg x} = \frac{x}{\lg x} + \int_2^x \frac{dx}{\lg^2 x} + O(1) =$$

$$= \frac{x}{\lg x} + O\left(\int_2^{\sqrt{x}} dx + \frac{1}{\lg^2 x} \int_{\sqrt{x}}^x dx\right) = \frac{x}{\lg x} + O\left(\frac{x}{\lg^2 x}\right),$$

а это значит, что

$$\pi(x, k, l) \sim \frac{x}{h \lg x} \qquad \text{при } x \to \infty.$$

§ 2. Теорема Виноградова-Гольдбаха

Этот параграф посвящён изложению доказательства одного из самых замечательных фактов «аддитивной» теории чисел — теоремы Виноградова-Гольдбаха. Она была доказана в 1937 г. акад. И. М. Виноградовым [1]), который базировался в своих рассуждениях на новой, им полученной, оценке тригонометрических сумм специального вида (см. лемму IV, 5 настоящего параграфа).

Введём следующие обозначения:

Пусть n — произвольное натуральное число, $\nu = \lg n$, r — фиксированное число > 12, $2\varepsilon = r - 12$, $\xi = \nu^r$, $\tau = n\xi^{-1}$,

$\delta = \tau^{-1}$, $L = \dfrac{\nu^r}{(\lg \nu)^7}$, $T = e^{\sqrt{\nu}}$, k — натуральное число $\geqslant 1$,

$1 \leqslant l < k$, $(l, k) = 1$, $-\delta \leqslant \alpha \leqslant 1 - \delta$, $\alpha = \dfrac{l}{k} + \vartheta$, p — простое, $h = \varphi(k)$, $\mu(k)$ — функция Мёбиуса,

$$F_n(\alpha) = \sum_{3 \leqslant p \leqslant n} e^{2\pi i p\alpha},$$

$$\psi_n(\vartheta) = \frac{\mu(k)}{h} \sum_{m=3}^{n} \frac{e^{2\pi i m\vartheta}}{\lg m},$$

β — «исключительный» нуль для значения ξ (см. гл. III, § 1),

$$\tilde{\psi}_n(\vartheta) = \frac{-1}{h^\beta} \sum_{m=3}^{n} \frac{m^\beta - (m-1)^\beta}{\lg m} e^{2\pi i m\vartheta}.$$

Лемма IV, 1. *Если n — нечётное число, то*

$$R_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{h^3} \sum_{\substack{(l, k) = 1 \\ 1 \leqslant l \leqslant k}} e^{-2\pi i \frac{ln}{k}} \geqslant \frac{1}{2}.$$

(*Ряд, стоящий в левой части неравенства, называется сингулярным.*)

---

[1]) См. И. М. Виноградов [3].

В самом деле слагаемые R_n, соответствующие значениям $k=1$ и 2, равны 1; поэтому

$$R_n \geqslant 2-\sum_{k=3}^{\infty}\frac{|\mu(k)|}{h^3}\left|\sum_{(l,k)=1} e^{-2\pi i\frac{ln}{k}}\right| \geqslant$$

$$\geqslant 2-\sum_{k=3}^{\infty}\frac{|\mu(k)|}{h^2}=4-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\mu(k)|}{h^2},$$

ибо

$$\left|\sum_{(l,k)=1} e^{-2\pi i\frac{ln}{k}}\right| \leqslant h.$$

Но

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\mu(k)|}{h^2}=\prod_p\left(1+\frac{1}{(p-1)^2}\right),$$

где p пробегает все простые числа (равенство доказывается путём вычисления значения бесконечного произведения). Далее,

$$\prod_p\left(1+\frac{1}{(p-1)^2}\right)=\frac{5}{2}\prod_{p\geqslant 5}\left(1+\frac{1}{(p-1)^2}\right)<\frac{5}{2}\prod_{m=4}^{\infty}\left(1+\frac{1}{m^2}\right)<$$

$$<\frac{5}{2}e^{\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}}<2{,}5\ e^{\frac{1}{3}}<3{,}5;$$

следовательно,

$$R_n \geqslant 4-3{,}5=\frac{1}{2}.$$

Лемма IV, 2 (дополнение к теореме 17). *Пусть*

$$S=(\chi,\ k,\ l)=\sum_{a=1}^{k}\chi(a)e^{2\pi i\frac{la}{k}},$$

где k — модуль χ; далее пусть $\chi_1(a)$ — первообразный характер, порождающий $\chi(a)$, причём основной модуль χ_1 равен числу k_1. Тогда:

1°. *Если* $(l, k)=1$ *и* k — *неосновной модуль* $\chi(a)$, *то*

$$S(\chi, k, l)=0.$$

2°. *Если* k — *основной модуль* $\chi(a)$, *то*

$$S(\chi, k, l)=\overline{\chi}_1(l)\,\chi_1(k_0)\,\tau(\chi_1)\,\varphi(k_0')\,\mu(k_0'')\sqrt{k},$$

где

$$k_0=\frac{k}{k_1},\quad k_0'=(k_0, l),\quad k_0'k_0''=k_0.$$

3°. *Если* $\chi=\chi_0$, *т. е. главному характеру, то*

$$S(\chi_0, k_0, l)=\varphi(k_0')\,\mu(k_0''),$$

где k_0 — *основной модуль* χ_0, $k_0'=(k_0, l)$, $k_0'k_0''=k_0$. *Кроме того, если* $(l, k)=1$, *то*

$$S(\chi_0, k, l)=\mu(k),$$

где k — *любой модуль* χ_0.

Рассмотрим сначала случай, когда k не равно основному модулю $\chi(a)$. Пусть k' — основной модуль $\chi(a)$; тогда

$$S(\chi, k, l)=\sum_{b=1}^{k'}\chi(b)\sum_{\nu=0}^{d-1}e^{2\pi i\frac{b+\nu k'}{k}l}=$$

$$=\sum_{b=1}^{k'}\chi(b)\,e^{2\pi i\frac{bl}{k}}\sum_{\nu=0}^{d-1}e^{2\pi i\frac{\nu l}{d}}=0,$$

где $k=k'd$.

В частности, в этом случае

$$S(\chi_0, k, l)=\mu(k)=0,$$

ибо если число k — неосновной модуль $\chi_0(a)$, то оно делится на точный квадрат.

Пусть теперь k — основной модуль $\chi(a)$ и пусть $k=k_1, k_2\ldots k_\nu$, причём все k_i $(i=1, 2,\ldots, \nu)$ попарно взаимно просты; тогда, в силу теоремы 3, можем положить:

$$\chi(n)=\chi_1(n)\,\chi_2(n)\ldots\chi_\nu(n)$$

причём k_1 — основной модуль $\chi_1(n)$, k_2 — основной модуль $\chi_2(n)$ и т. д. Положим далее:

$$\overline{k}_i = kk_i^{-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Известно, что величина

$$a = \overline{k}_1 a_2 + \overline{k}_2 a_2 + \ldots + \overline{k}_\nu a_\nu$$

пробегает полную систему вычетов по модулю k, если $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ пробегают полные системы вычетов соответственно по модулям $k_1, \ldots, k_\nu$ [1]); поэтому

$$S(\chi, k, l) = \sum_{a_1 \ldots a_\nu} \chi(\overline{k}_1 a_1 + \ldots + \overline{k}_\nu a_\nu) e^{2\pi i l\left(\frac{a_1}{k_1} + \ldots + \frac{a_\nu}{k_\nu}\right)} =$$

$$= \sum_{a_1 \ldots a_\nu} \chi_1(\overline{k}_1 a_1) \chi_2(\overline{k}_2 a_2) \ldots \chi_\nu(\overline{k}_\nu a_\nu) e^{2\pi i l\left(\frac{a_1}{k_1} + \ldots + \frac{a_\nu}{k_\nu}\right)} =$$

$$= \chi_1(\overline{k}_1) \ldots \chi_\nu(\overline{k}_\nu) S(\chi_1, k_1, l) \ldots S(\chi_\nu, k_\nu, l). \qquad (1)$$

Применим тождество (1) сначала к тому случаю, когда $(l, k) = 1$ и $\chi = \chi_0$, т. е. главному характеру; пусть основной модуль χ_0 равен числу k_0. В главе I мы видели, что k_0 состоит из различных простых делителей; поэтому, в силу тождества (1), имеет место равенство:

$$S(\chi_0, k_0, l) = \prod_{p/k_0} S(\chi_{0p}, p, l),$$

где χ_{0p} — главный характер, основной модуль которого равен p. Но

$$S(\chi_{0p}, p, l) = \sum_{a=1}^{p-1} e^{2\pi i \frac{la}{p}} = -1;$$

следовательно,

$$S(\chi_0, k_0, l) = \mu(k_0). \qquad (2)$$

Рассмотрим далее общий случай. Согласно определению имеем:

$$\chi(a, k) = \chi_0(n, k_0) \chi_1(n, k_1),$$

---

[1]) См. И. М. Виноградов, [1] стр. 43.

где χ_1 — первообразный характер, $(k_0, k_1)=1$, $k=k_0k_1$.

Далее, положим:

$$k_0'=(k_0, l),\quad k_0'k_0''=k_0.$$

Следовательно, $(k_0', k_0'')=1$, $(l, k_0'')=1$. Тождество (1) даёт в этом случае:

$$S(\chi, k, l)=\chi_1(k_0)\,S(\chi_0', k_0', l)\,S(\chi_0'', k_0'', l)\,S(\chi_1, k_1, l).$$

Но, в силу (2), имеем:

$$S(\chi_2'', k_0'', l)=\mu(k_0'').$$

Далее,

$$S(\chi_0', k_0', l)=\sum_{a=1}^{k_0'}\chi_0'(a)\,e^{2\pi i\frac{la}{k_0'}}=\sum_{a=1}^{k_0'}\chi_0'(a)=\varphi(k_0').$$

Наконец, в силу теоремы 17,

$$S(\chi_1, k_1, l)=\overline{\chi}_1(l)\sqrt{k_1}\,\tau(\chi_1).$$

Следовательно,

$$S(\chi, k_1, l)=\overline{\chi}_1(l)\,\chi_1(k_0)\sqrt{k_1}\,\tau(\chi_1)\,\varphi(k_0')\,\mu(k_0'').$$

Аналогично доказывается, что

$$S(\chi_0, k_0, l)=\varphi(k_0')\,\mu(k_0'').$$

Лемма IV, 3. *Пусть*

$$A_1,\ A_2, \ldots$$

— монотонно убывающая последовательность положительных чисел, причём $A_m\ll(\lg m)^{-1}$ *для* $m=2, 3, \ldots$

$$f_n(\vartheta)=\sum_{m=m_0}^{n}A_m e^{2\pi i m\vartheta},\quad 0\leqslant|\vartheta|\leqslant\frac{1}{2};$$

тогда

$$f_n(\vartheta)\ll\min\left(\frac{n}{\nu};\ \frac{1}{|\vartheta|\lg\frac{1}{|\vartheta|}}\right).$$

В частности, если $\frac{1}{n}\leqslant|\vartheta|\leqslant\delta$, *то*

$$f_n(\vartheta)\ll\frac{1}{|\vartheta|^{\nu}};$$

Очевидно, что лемму достаточно доказывать для $\vartheta > 0$, ибо

$$f_n(-\vartheta) = \overline{f_n(\vartheta)}.$$

Нам известно, что $\sum\limits_{m \leqslant x} \frac{1}{\lg m} \ll \frac{x}{\lg x}$ (см. доказательство теоремы 50); поэтому

$$|f_n(\vartheta)| \leqslant \sum_{m=m_0}^{n} A_m \ll \sum_{m=2}^{n} \frac{1}{\lg m} \ll \frac{n}{\lg n},$$

что доказывает нашу лемму для $\vartheta \leqslant \frac{1}{n}$.

Пусть теперь $\frac{1}{n} \leqslant \vartheta \leqslant \frac{1}{2}$. Положим $m_1 = \left[\frac{1}{\vartheta}\right]$; тогда

$$|f_n(\vartheta)| \leqslant \sum_{m=m_0}^{m_1} \frac{1}{\lg m} + \left| \sum_{m=m_1+1}^{n} A_m e^{2\pi i m \vartheta} \right|. \tag{1}$$

Но

$$\sum_{m=m_0}^{m_1} \frac{1}{\lg m} \ll \frac{m_1}{\lg m_1} \ll \frac{1}{\vartheta \lg \frac{1}{\vartheta}}. \tag{2}$$

С другой стороны, применяя следствие теоремы A ко второму слагаемому (1), будем иметь:

$$\left| \sum_{m=m_1+1}^{n} A_m e^{2\pi i m \vartheta} \right| \leqslant A_{m_1+1} \max_{m \leqslant n} \left| \sum_{m'=m_1+1}^{m} e^{2\pi i n \vartheta} \right| \ll$$

$$\ll \frac{1}{\lg (m_1 + 1) \sin \pi\vartheta} \ll \frac{1}{\vartheta \lg \frac{1}{\vartheta}}, \tag{3}$$

ибо

$$\sin \pi x \geqslant 2x \quad \text{для} \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}.$$

Сопоставляя (1), (2) и (3), убеждаемся в том, что

$$f_n(\vartheta) \ll \frac{1}{\vartheta \lg \frac{1}{\vartheta}},$$

что доказывает нашу лемму при сделанном предположении относительно ϑ, ибо $\frac{1}{\vartheta \lg \frac{1}{\vartheta}} < \frac{n}{\lg n}$. Таким образом первая половина утверждения леммы доказана.

Пусть теперь $\frac{1}{n} \leqslant |\vartheta| \leqslant \delta$; тогда

$$f_n(\vartheta) \ll \frac{1}{|\vartheta| \lg \frac{1}{|\vartheta|}} \ll \frac{1}{|\vartheta| \lg \frac{1}{\delta}};$$

но

$$\lg \frac{1}{\delta} = \lg \tau \sim \lg n, \text{ если } n \to \infty;$$

поэтому

$$\left(\lg \frac{1}{\delta}\right)^{-1} \ll (\lg n)^{-1},$$

т. е.

$$f_n(\vartheta) \ll \frac{1}{\nu |\vartheta|}.$$

Обозначим теперь, как и в гл. III, § 1, буквой $\mathfrak{B}_\xi$ множество нулей всех L-функций, основные модули которых $\leqslant \xi$. Пусть β — наибольший из действительных нулей, принадлежащих $\mathfrak{B}_\xi$, причём $L(\beta, \tilde{\chi}) = 0$; $\tilde{\chi} = \chi(n, \tilde{k})$. Полагаем в теореме 46

$$k = \xi, \quad T = e^{\sqrt{\nu}};$$

в силу этой теоремы найдётся такая ломаная линия $P(\infty + iT,\ 1 - \eta + iT,\ 1 - \eta - iT,\ \infty - iT)$, на которой справедлива оценка:

$$\frac{L'}{L}(s, \chi) \ll \lg^2 kT \ll \nu,$$

причём

$$\eta \geqslant \frac{\mu}{12} (\lg k\,(T+3))^{-1} \geqslant \frac{\mu_8}{\sqrt{\nu}},$$

а L — любая из рассматриваемых функций. Пусть D — область, ограниченная ломаной P; если β лежит в D, то оно является «исключительным» нулём для значения ξ; тогда $\tilde{\chi}$ будет «исключительным» характером. В этом случае, как утверждает теорема 46, область D содержит только единственный элемент из $\mathfrak{B}_\xi$ — именно β; во всех других случаях D не содержит нулей L-функций нашего множества.

Рассмотрим подробнее случай, когда $1-\eta<\beta$, т. е. β — исключительный нуль; пусть $\tilde{k}/k$. Докажем, что среди характеров, имеющих k своим модулем, всегда существует один, который или совпадает с $\tilde{\chi}$, или порождён последним. В самом деле, могут представиться два случая: или k имеет те же простые делители, что и $\tilde{k}$; тогда $\tilde{\chi}$ имеет k своим модулем. В противном случае пусть k_0 равно произведению всех простых делителей k, не входящих в $\tilde{k}$; тогда функция

$$\chi_1(a)=\chi_0(a, k_0)\,\tilde{\chi}(a)$$

будет характером, порождённым $\tilde{\chi}$ и имеющим число k своим модулём. Единственность такого характера доказана в теореме 7.

Лемма IV, 4. *Пусть* $k\leqslant\xi$.

На интервале $\frac{l}{k}-\delta\leqslant\vartheta\leqslant\frac{l}{k}+\delta$ *имеет место оценка*

$$F_n\left(\frac{l}{k}+\vartheta\right)-\psi_n(\vartheta)-E_kS(\chi_1, k, l)\,\tilde{\psi}_n(\vartheta)\ll ne^{-\mu\vartheta\sqrt{\nu}},$$

где символ E_k *определён условиями*: $E_k=1$, *если* $\beta>1-\delta$ и $\tilde{k}/k$; $E_k=0$ *во всех остальных случаях.* Прежде всего ясно, что

$$F_n\left(\frac{l}{k}+\vartheta\right)-\sum_{m=3}^{n}\frac{\Lambda(m)\chi_0(m)e^{2\pi im\left(\frac{l}{k}+\vartheta\right)}}{\lg m}=$$

$$=\sum_{p/k}e^{2\pi i\left(\frac{l}{k}+\vartheta\right)p}-\sum_{p^2\leqslant n}\frac{\chi_0(p)e^{2\pi i\left(\frac{l}{k}+\vartheta\right)p^2}}{2}-$$

$$-\sum_{\lambda=3}^{\left[\frac{\lg n}{\lg 2}\right]}\sum_{p^\lambda\leqslant n}\frac{\chi_0(m)e^{2\pi i\left(\frac{l}{k}+\vartheta\right)p^\lambda}}{\lambda};$$

поэтому

$$\left| F_n\left(\frac{l}{k}+\theta\right)-\sum_{m=3}^{n}\frac{\Lambda(m)\chi_0(m)e^{2\pi i m\left(\frac{l}{k}+\theta\right)}}{\lg m}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{p/k} 1+\frac{1}{2}\sqrt{n}+\sum_{\lambda=3}^{\left[\frac{\lg n}{\lg 2}\right]}\frac{1}{\lambda}\sqrt[\lambda]{n} \ll \lg k+\sqrt{n}+\nu\sqrt[3]{n} \ll$$

$$\ll \lg \xi+\sqrt{n} \ll \sqrt{n}.$$

Полагаем теперь

$$S(m)=\sum_{a\leqslant m}\chi_0(m)\,\Lambda(a)\,e^{2\pi i\frac{la}{k}}.$$

Предыдущее неравенство после этого можно переписать так:

$$F_n\left(\frac{l}{k}+\theta\right)-\sum_{m=3}^{n}\frac{S(m)-S(m-1)}{\lg m}\,e^{2\pi i m\theta} \ll \sqrt{n}. \tag{1}$$

Займёмся исследованием суммы $S(m)$. Ряд

$$f(s)=\sum_{a=1}^{\infty}\frac{\chi_0(a)\,\Lambda(a)\,e^{2\pi i\frac{la}{k}}}{a^s}$$

удовлетворяет всем требованиям теоремы 24, если положить

$$x=m,\quad 3\leqslant m\leqslant n,\quad T=e^{\sqrt{\nu}},\quad a=1+\frac{1}{\nu}.$$

Названная теорема даёт оценку:

$$S(m)-\frac{1}{2\pi i}\int_{1+\frac{1}{\nu}-iT}^{1+\frac{1}{\nu}+iT}\frac{m^s f(s)\,ds}{s} \ll$$

$$\ll m^{1+\frac{1}{\nu}}\nu e^{-\sqrt{\nu}}+m\lg^2 m e^{-\sqrt{\nu}}+\lg m \ll ne^{-\sqrt{\nu}}\nu^2. \tag{2}$$

С другой стороны, в силу следствия теоремы 15,

$$\chi_0(a)\,e^{2\pi i\frac{la}{k}}=\frac{1}{h}\sum_{b=1}^{k}e^{2\pi i\frac{bl}{k}}\sum_{(\chi)}\bar{\chi}(b)\,\chi(a),$$

где суммирование распространяется на все характеры, имеющие число k своим модулем.

Значит

$$f(s)=\frac{1}{h}\sum_{(\chi)}\sum_{b=1}^{k} e^{2\pi i\frac{lb}{k}}\,\overline{\chi}(b)\sum_{a=1}^{\infty}\frac{\Lambda(a)\chi(a)}{a^s}=$$

$$=-\frac{1}{h}\sum_{(\chi)}\cdot\sum_{b=1}^{k} e^{2\pi i\frac{bl}{k}}\,\overline{\chi}(b)\cdot\frac{L'}{L}(s,\chi)=$$

$$=-\frac{1}{h}\sum_{(\chi)}\frac{L'}{L}(s,\chi)\cdot S(\overline{\chi},k,l).$$

Функция $f(s)$ в прямоугольнике, ограниченном ломаной P и отрезком $\left(1+\frac{1}{\nu}-iT,\ 1+\frac{1}{\nu}+iT\right)$, имеет полюсы 1-го порядка в точках $s=1$ и $s=\beta$ (если $\beta>1-\eta$), причём, в силу леммы IV, 2,

$$\operatorname*{Res}_{s=1} f(s)=\frac{1}{h}S(\chi_0,k,l)=\frac{\mu(k)}{h},$$

$$\operatorname*{Res}_{s=\beta} f(s)=-E_k\cdot\frac{1}{h}\cdot S(\chi_1,k,l),$$

где $\chi_1(a)$ — характер, порождённый «исключительным» характером $\widetilde{\chi}(a)$ (в силу замечания, сделанного выше, существует только один такой характер для данного k).

Поэтому классическая теорема Коши даёт:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1+\frac{1}{\nu}-iT}^{1+\frac{1}{\nu}+iT}\frac{m^s f(s)\,ds}{s}=\frac{\mu(k)}{h}m-E_k\frac{m^\beta}{\beta h}\cdot S(\chi_1,k,l)+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{1+\frac{1}{\nu}-iT}^{1-\eta-iT}+\int\limits_{1-\eta+iT}^{1+\frac{1}{\nu}+iT}\right)\frac{m^s f(s)\,ds}{s}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1-\eta-iT}^{1-\eta+iT}\frac{m^s f(s)\,ds}{s}. \quad (2)$$

Но на ломаной P справедлива оценка функции $\frac{L'}{L}(s, \chi)$, которая была указана выше; следовательно, вдоль нового пути интегрирования мы имеем:

$$f(s) \ll h\nu \ll \xi\nu \ll \nu^{r+1}.$$

Поэтому, вспоминая оценку для η, имеем:

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{1+\frac{1}{\nu}-iT}^{1-\eta-iT} + \int\limits_{1-\eta-iT}^{1-\eta+iT} + \int\limits_{1-\eta+iT}^{1+\frac{1}{\nu}+iT}\right)\frac{m^s f(s)\,ds}{s} \ll$$

$$\ll m^{1-\eta}\nu^{r+1}\int\limits_0^T \frac{dt}{\sqrt{(1-\eta)^2+t^2}} + \frac{m^{1+\frac{1}{\nu}}\nu^{r+1}}{T} \ll$$

$$\ll n^{1-\eta}\nu^{r+3/2} + n\nu^{r+1}e^{-\sqrt{\nu}} \ll ne^{-\eta_3\sqrt{\nu}}\nu^{r+3/2} +$$

$$+ n\nu^{r+1}e^{-\sqrt{\nu}} \ll ne^{-\mu_3\sqrt{\nu}}\nu^{r+3/2}. \qquad (4)$$

Полагаем теперь

$$S(m) = \frac{\mu(k)}{h}m - E_k\frac{m^\beta}{\beta h}S(\chi_1, k, l) + \Delta(m); \qquad (5)$$

сопоставляя неравенства (2), (3) и (4), убеждаемся в том, что

$$\Delta(m) \ll ne^{-\sqrt{\nu}}\nu^2 + ne^{-\mu_3\sqrt{\nu}}\nu^{r+3/2} \ll ne^{-\mu_3\sqrt{\nu}}\nu^{r+3/2} \qquad (6)$$

для $m \leqslant n$.

С другой стороны, сопоставляя (1) и (5), получаем после несложных преобразований:

$$F_n\left(\frac{l}{k}+\vartheta\right) - \psi_n(\vartheta) - E_k S(\chi_1, k, l)\tilde{\psi}_n(\vartheta) \ll$$

$$\ll \left|\sum_{m=3}^{n}\frac{\Delta(m)-\Delta(m-1)}{\lg m}e^{2\pi i m\vartheta}\right| + \sqrt{n}. \qquad (7)$$

Но

$$\sum_{m=3}^{n} \frac{\Delta(m)-\Delta(m-1)}{\lg m} e^{2\pi i m\vartheta} =$$

$$= -\Delta(2)\frac{e^{6\pi i\vartheta}}{\lg 3} + \sum_{m=3}^{n} \Delta(m)\left(\frac{e^{2\pi i n\vartheta}}{\lg m} - \frac{e^{2\pi i (m+1)\vartheta}}{\lg(m+1)}\right) +$$

$$+ \Delta(n)\frac{e^{2\pi i (n+1)\vartheta}}{\lg(n+1)};$$

поэтому, замечая, что

$$\frac{e^{2\pi i n\vartheta}}{\lg m} - \frac{e^{2\pi i (m+1)\vartheta}}{\lg(m+1)} \ll \frac{2\pi|\vartheta|}{\lg m} + \frac{1}{m\lg^2 m}$$

и учитывая неравенство (6), имеем:

$$\sum_{m=3}^{n} \frac{\Delta(m)-\Delta(m-1)}{\lg m} e^{2\pi i m\vartheta} \ll$$

$$\ll ne^{-\mu_8\sqrt{\nu}}\nu^{r+3/2}\left(|\vartheta|\sum_{m=3}^{n}\frac{1}{\lg m}+1\right) \ll$$

$$\ll ne^{-\mu_8\sqrt{\nu}}\nu^{r+3/2}\left(\delta\frac{n}{\nu}+1\right) \ll ne^{-\mu_8\sqrt{\nu}}\nu^{2r+\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll ne^{-\mu_9\sqrt{\nu}}. \qquad (8)$$

Сопоставляя (7) и (8), убеждаемся в справедливости доказываемой леммы.

Лемма IV, 5. *Пусть все буквы сохраняют значения, указанные в начале параграфа: кроме того,*

$$\xi \leqslant k \leqslant \tau; \quad \alpha = \frac{l}{k} + \frac{\theta}{k\tau}.$$

Тогда

$$F_n(\alpha) \ll n\,\nu^2\xi^{-\frac{1}{3}}\text{ [1]}.$$

---

[1]) Доказательство см. И. М. Виноградов, [2], стр. 113.

Лемма IV, 6.

$$\sum_{m_1+m_2+m_3=n} \frac{1}{\lg m_1 \lg m_2 \lg m_3} - \frac{n^2}{2\nu^3} \ll \frac{n^2 \lg \nu}{\nu^4}.$$

Здесь суммирование распространяется на всевозможные представления числа n как суммы трёх натуральных чисел, удовлетворяющих условию:

$$m_1, m_2, m_3 \geqslant 3.$$

Все решения в целых числах уравнения

$$m_1 + m_2 + m_3 = n, \tag{1}$$

где $m_1, m_2, m_3 \geqslant 3$, распределим на две группы; в первую группу отнесём те из них, для которых хотя бы одно из чисел $m_1, m_2, m_3 \leqslant \tau$. Во вторую группу отнесём все остальные решения.

Оценим число тех решений I группы, для которых

$$m_1 \leqslant \tau;$$

m_1 может принимать $[\tau]-2$ значения; для фиксированного значения m_1 величина m_2 может принимать $n-m_1-5$ значений. Если же m_1 и m_2 фиксированы, то m_3 получает определённое значение. Таким образом оцениваемое число решений $\leqslant \tau n$. Аналогично оцениваются числа решений, для которых $m_2 \leqslant \tau$ или $m_3 \leqslant \tau$. Следовательно,

$$\sum_{(\mathrm{I})} \frac{1}{\lg m_1 \lg m_2 \lg m_3} \ll \tau n, \tag{2}$$

где символ $\sum\limits_{(\mathrm{I})}$ указывает на суммирование, распространённое на все решения I группы.

Рассмотрим теперь решения II группы; для них $m_1, m_2, m_3 \geqslant [\tau]+1 = n_1$; положим $m' = m_1 + m_2$. Очевидно, что величина m' может принять все значения от $m' = 2n_1$ до $m' = n - n_1$. Если значение m' фиксировано, то величина m_1 может принять все значения от $m_1 = n_1$ до $m_1 = m' - n_1$; при фиксированном m' величина m_3 имеет определённое значение. Поэтому число решений II группы равно:

$$\sum_{(II)} 1 = \sum_{m'=2n_1+2}^{n-n_1} (m' - 2n_1 + 1) = \frac{n-3n_1+1}{2} (n - 3n_1 + 2),$$

где символ $\sum\limits_{(II)}$ указывает на суммирование, распространённое на все решеиия II группы. Следовательно,

$$\sum_{(II)} 1 - \frac{n^2}{2} \ll \tau n. \tag{3}$$

С другой стороиы, полагая

$$\frac{1}{\lg m_1} = \frac{1}{\nu} + \eta_1, \quad \frac{1}{\lg m_2} = \frac{1}{\nu} + \eta_2, \quad \frac{1}{\lg m_3} = \frac{1}{\nu} + \eta_3,$$

имеем:

$$\frac{1}{\lg m_1 \lg m_2 \lg m_3} - \frac{1}{\nu^3} \ll \frac{1}{\nu^2}\eta + \frac{1}{\nu}\eta^2 + \eta^3,$$

где $\eta = \max(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$. Но если $m > \tau$, то, принимая во внимание, что $\lg \tau \sim \nu$, имеем:

$$\frac{1}{\lg m} - \frac{1}{\nu} = \frac{\lg \frac{n}{m}}{\lg m \lg n} \ll \frac{\lg \nu}{\nu^2}.$$

Значит

$$\frac{1}{\lg m_1 \lg m_2 \lg m_3} - \frac{1}{\nu^3} \ll \frac{\lg \nu}{\nu^4} + \frac{\lg^2 \nu}{\nu^5} + \frac{\lg^3 \nu}{\nu^6} \ll \frac{\lg \nu}{\nu^4}. \tag{4}$$

Сопоставляя (3) и (4), видим, что

$$\sum_{(II)} \frac{1}{\lg m_1 \lg m_2 \lg m_3} - \frac{1}{\nu^3}\sum_{(II)} 1 \ll \frac{\lg \nu}{\nu^4} \sum_{(II)} 1 \ll$$

$$\ll \frac{\lg \nu}{\nu^4}\left(\frac{n^2}{2} + \tau n\right) \ll \frac{n^2 \lg \nu}{\nu^4}.$$

В силу того же соотношения (3)

$$\frac{1}{\nu^3}\sum_{(II)} 1 - \frac{n^2}{2\nu^3} \ll \frac{\tau n}{\nu^3} \ll \frac{n^2}{\nu^{r+3}} \ll \frac{n^2 \lg \nu}{\nu^4}.$$

Последние два неравенства дают:

$$\sum_{(\mathrm{II})} \frac{1}{\lg m_1 \lg m_2 \lg m_3} - \frac{n^2}{2\nu^3} \gg \frac{n^2 \lg \nu}{\nu^4}. \qquad (5)$$

Но из неравенств (2) и (5) следует, что:

$$\sum_{m_1+m_2+m_3=n} \frac{1}{\lg m_1 \lg m_2 \lg m_3} - \frac{n^2}{2\nu^3} \ll \frac{n^2 \lg \nu}{\nu^4} + \tau n \ll \frac{n^2 \lg \nu}{\nu^4},$$

т. е. лемма доказана.

Теорема 51 (Виноградов, 3). *Существует столь большое число n_0, что все нечётные натуральные числа $n \geqslant n_0$ равны сумме трёх нечётных простых.*

Положим:

$$F_n^3(\alpha) = \sum_{m=9}^{3n} a_m e^{2\pi i m\alpha}.$$

Элементарный подсчёт показывает, что коэффициент a_n равен числу представлений числа n как суммы трёх нечётных простых. Значит для доказательства теоремы достаточно показать, что $a_n > 0$ для $n \geqslant n_0$. Для этого мы выделим в a_n главный член при $n \to \infty$ и оценим величину разности между a_n и этим главным членом.

Дадим теперь величине a_n другое выражение. Заметим прежде всего, что функции $F_n^3(\alpha)$, $e^{2\pi i m\alpha}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ имеют период, равный 1, а показательные функции, кроме того, ортогональны друг другу; поэтому

$$a_n = \int_0^1 F_n^3(\alpha)\, e^{-2\pi i n\alpha}\, d\alpha = \int_{-\delta}^{1-\delta} F_n^3(\alpha)\, e^{-2\pi i n\alpha}\, d\alpha.$$

Внутри интервала $(-\delta, 1-\delta)$ рассмотрим совокупность всех правильных несократимых дробей $\frac{l}{k}$, знаменатели которых $\leqslant \xi$. Включим в это множество и число 0. Поместим каждую точку $\frac{l}{k}$ в средину интервала длины 2δ. Этот интервал для краткости будем обозначать символом $i(k, l)$. Так как при достаточно больших n

$$\left|\frac{l}{k} - \frac{l'}{k'}\right| \geqslant \frac{1}{kk'} \geqslant \frac{1}{\xi^2} > \frac{2}{\tau} = 2\delta,$$

то два таких интервала не могут иметь попарно общих точек и не выходят за пределы $(-\delta,\ 1-\delta)$.

Обозначим далее буквой E множество всех точек интервала $(-\delta,\ 1-\delta)$, попадающих в рассматриваемые интервалы, а буквой C — множество всех прочих точек. Тогда ясно, что

$$a_n = \sum_{k\leqslant\xi}\ \sum_{(l,\,k)=1}\ \int\limits_{\frac{l}{k}-\delta}^{\frac{l}{k}+\delta} F_n^3(\alpha)\, e^{-2\pi i n\alpha}\, d\alpha + \int\limits_C F_n^3(\alpha)\, e^{-2\pi i n\alpha}\, d\alpha =$$

$$= \sum_{k\leqslant\xi}\ \sum_{(l,\,k)=1}\ \int\limits_{-\delta}^{+\delta} F_n^3\left(\frac{l}{k}+\vartheta\right) e^{-2\pi i n\left(\frac{l}{k}+\vartheta\right)} d\vartheta +$$

$$+ \int\limits_C F_n^3(\alpha)\, e^{-2\pi i n\alpha}\, d\alpha. \qquad (51.1)$$

Рассмотрим сначала последнее слагаемое (51.1). Пусть $\alpha < C$. Как известно, можно положить

$$\alpha = \frac{l}{k} + \frac{\theta}{k\tau}, \quad (l,\,k)=1, \quad k\leqslant\tau\ ^{1)}.$$

Нетрудно видеть, что в рассматриваемом случае $k>\xi$; в самом деле, если бы было иначе, то

$$\left|\alpha - \frac{l}{k}\right| \leqslant \frac{1}{k\tau} \leqslant \frac{1}{\tau} = \delta,$$

т. е. точка α принадлежала бы к множеству E. Применим поэтому к $F_n(\alpha)$ лемму IV, 5; эта последняя даёт нам:

$$\max_{\alpha\subset C} |F_n(\alpha)| \ll n\nu^2\xi^{-\frac{1}{3}} \ll n\nu^{-2-\varepsilon}. \qquad (51.2)$$

С другой стороны,

$$\int\limits_C |F_n(\alpha)|^2\, d\alpha \leqslant \int\limits_{-\delta}^{1-\delta} |F_n(\alpha)|^2\, d\alpha \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{-\delta}^{1-\delta}\ \sum_{3\leqslant p\leqslant n}\ \sum_{3\leqslant p'\leqslant n} e^{2\pi i(p-p')\alpha}\, d\alpha = \sum_{3\leqslant p\leqslant n} 1 \ll \frac{n}{\nu}, \quad (51.3)$$

[1]) См. И. М. Виноградов, [1] стр. 16.

ибо, как мы видели в предшествовавшем параграфе, число простых чисел $\leqslant n$ есть величина порядка $\frac{n}{\nu}$.

Наконец,

$$\left|\int\limits_C F_n^3(\alpha)\,e^{-2\pi i n\alpha}\,d\alpha\right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{\alpha\subset C}|F_n(\alpha)|\int\limits_C |F_n(\alpha)|^2\,d\alpha. \tag{51.4}$$

Сопоставляя (51.2), (51.3) и (51.4), мы видим, что

$$\int\limits_C F_n^3(\alpha)\,e^{-2\pi i n\alpha}\,d\alpha \ll n^{2}\nu^{-2-\varepsilon}. \tag{51.5}$$

Обратимся теперь к рассмотрению интеграла, взятого по множеству E. Исследование этого интеграла можно вести двумя путями. Можно, во-первых, опираться на теорему 49; в этом случае все расчёты проводятся проще. Однако, идя таким путём, мы не имеем, по крайней мере в настоящее время, никакой возможности численно оценить постоянную n_0, упомянутую в формулировке доказываемой теоремы.

Другой путь доказательства, опирающийся на более слабую теорему 47, даёт возможность оценить верхнюю границу n_0. Мы изложим оба варианта доказательства.

Первый вариант. В силу леммы IV, 4

$$F_n\left(\frac{l}{k}+\vartheta\right)-\psi_n(\vartheta) \ll$$

$$\ll \frac{1}{h\beta}|S(\chi_1, k, l)|\sum_{m=3}^{n}\frac{m^\beta-(m-1)^\beta}{\lg m}+ne^{-\mu_0\sqrt{\nu}} \ll$$

$$\ll \sum_{m=3}^{n}\frac{(m-\theta)^{\beta-1}}{\lg m}+ne^{-\mu_0\sqrt{\nu}} \ll$$

$$\ll n^\beta\sum_{m=3}^{n}\frac{1}{m\lg m}+ne^{-\mu_0\sqrt{\nu}} \ll n^\beta\lg\nu+ne^{-\mu_0\sqrt{\nu}}. \tag{51.6}$$

Положим теперь в теореме 49 число $\varepsilon = \frac{1}{2r}$; применяя эту теорему, получаем:

$$\beta < 1 - \mu'' k^{-\frac{1}{2r}} \leqslant 1 - \mu'' \xi^{-\frac{1}{2r}} = 1 - \frac{\mu''}{\sqrt{\nu}}.$$

Следовательно,

$$F_n\left(\frac{l}{k} + \vartheta\right) - \psi_n(\vartheta) \ll n\left(e^{-\mu''\sqrt{\nu}} \lg \nu + e^{-\mu_3\sqrt{\nu}}\right). \qquad (51.7)$$

Далее обратим внимание на то, что вследствие периодичности $F_n(\alpha)$ оценка (51.3) справедлива для любого интервала интеграции, длина которого равна 1; в частности,

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \left|F_n\left(\frac{l}{k} + \vartheta\right)\right|^2 d\vartheta \ll \frac{n}{\nu}. \qquad (51.8)$$

Аналогично можно показать, что

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} |\psi_n(\vartheta)|^2\, d\vartheta \ll \frac{1}{h^2} \sum_{m=3}^{n} \frac{1}{\lg^2 m} \ll \frac{n}{h^2 \nu}. \qquad (51.9)$$

Наконец, заметим, что

$$\left|F_n^3\left(\frac{l}{k} + \vartheta\right) - \psi_n^3(\vartheta)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|F_n\left(\frac{l}{k} + \vartheta\right) - \psi_n(\vartheta)\right| \left(|F_n|^2 + |F_n| \cdot |\psi_n| + |\psi_n|^2\right) \ll$$

$$\ll \frac{3}{2}\left|F_n\left(\frac{l}{k} + \vartheta\right) - \psi_n(\vartheta)\right| \left(\left|F_n\left(\frac{l}{k} + \vartheta\right)\right|^2 + \right.$$

$$\left. + |\psi_n(\vartheta)|^2\right). \qquad (51.10)$$

Сопоставляя четыре неравенства (51.7) — (51.10), заключаем, что

$$\int_{-\delta}^{+\delta} F_n^3\left(\frac{l}{k}+\vartheta\right)e^{-2\pi in\alpha}\,d\vartheta - \int_{-\delta}^{+\delta} \psi_n^3(\vartheta)\,e^{-2\pi in\alpha}\,d\vartheta \ll$$

$$\ll \max_{|\vartheta|\leqslant\delta}\left|F_n\left(\frac{l}{k}+\vartheta\right)-\psi_n(\vartheta)\right|\left(\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}\left|F_n\left(\frac{l}{k}+\vartheta\right)\right|^2 d\vartheta +\right.$$

$$\left. + \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} |\psi_n(\vartheta)|^2\,d\vartheta\right) \ll ne^{-\mu_0'\sqrt{\nu}}.$$

Если же почленно сложить все полученные сейчас неравенства для всех интервалов $i(k, l)$, то получим:

$$\sum_{k\leqslant\xi}\sum_{(l,k)=1}\left(\int_{-\delta}^{+\delta} F_n^3\left(\frac{l}{k}+\vartheta\right)e^{-2\pi in\alpha}\,d\vartheta - \int_{-\delta}^{+\delta}\psi_n^3(\vartheta)e^{-2\pi in\alpha}d\vartheta\right)\ll$$

$$\ll n^2\xi^2 e^{-\mu_0'\sqrt{\nu}} \ll n^2\nu^{2r}e^{-\mu_0'\sqrt{\nu}} \ll n^2 e^{-\mu_0''\sqrt{\nu}}. \quad (51.11)$$

Второй вариант. Излагаемое ниже доказательство является видоизменением доказательства, принадлежащего К. К. Марджанишвили (см. Марджанишвили, 1).

Пусть $\tilde{k}$, $\tilde{\chi}$ имеют такой же смысл, как и в лемме IV, 4. Рассмотрим два случая. Пусть сначала $\tilde{k}\leqslant L$. Опираясь на теорему 47, заключаем, что

$$\beta\leqslant 1-\mu'\left(\tilde{k}^{\frac{1}{2}}\lg^2\tilde{k}\right)^{-1}\leqslant 1-\mu' L^{-\frac{1}{2}}\lg^{-2}L\leqslant 1-$$

$$-\mu_{10}\frac{(\lg\nu)^{3/2}}{\nu}.$$

Но в таком случае неравенство (51.6) даёт:

$$F_n\left(\frac{l}{k}+\vartheta\right)-\psi_n(\vartheta) \ll n\left(e^{-\mu_{10}(\lg\nu)^{3/2}}\lg\nu+e^{-\mu_9\sqrt{\nu}}\right) \ll$$
$$\ll ne^{-\mu_{10}(\lg\nu)^{3/2}}\lg\nu.$$

Рассуждая так же, как и при доказательстве неравенства (51.11), получим:

$$\sum_{k\leqslant\xi}\ \sum_{(k,l)=1}\left(\int_{-\delta}^{+\delta}F_n^3\left(\frac{l}{k}+\vartheta\right)e^{-2\pi in\alpha}\,d\vartheta-\int_{-\delta}^{+\delta}\psi_n^3(\vartheta)\,e^{-2\pi in\alpha}\,d\vartheta\right)\ll$$
$$\ll \xi^2 n^2 e^{-\mu_{10}(\lg\nu)^{3/2}}\frac{\lg\nu}{\nu} \ll n^2\nu^{2r}e^{-\mu_{10}(\lg\nu)^{3/2}} \ll$$
$$\ll n^2 e^{-\mu_{10}'(\lg\nu)^{3/2}}. \qquad (51.12)$$

Обратимся теперь к случаю, когда $\tilde{k}>L$. При этом предположении необходимо в свою очередь рассмотреть две возможности. Пусть во-первых, $\tilde{k}\not\mid k$. Для такого значения k оценка проводится ещё проще, чем это делалось при доказательстве (51.11), ибо в этом случае $E_k=0$, и лемма IV, 4 дает:

$$F_n\left(\frac{l}{k}+\vartheta\right)-\psi_n(\vartheta)\ll ne^{-\mu_9\sqrt{\nu}};$$

поэтому, опуская несложные промежуточные вычисления, запищем окончательный результат:

$$\sum_{k\leqslant\xi}{}'\ \sum_{(l,k)=1}\left(\int_{-\delta}^{+\delta}F_n^3\left(\frac{l}{k}+\vartheta\right)e^{-2\pi in\alpha}\,d\vartheta-\right.$$
$$\left.-\int_{-\delta}^{+\delta}\psi_n^3(\vartheta)\,e^{-2\pi in\alpha}\,d\vartheta\right)\ll\xi^2n^2e^{-\mu_9\sqrt{\nu}}\ll n^2\nu^{2r}e^{-\mu_9\sqrt{\nu}}. \quad (51.13)$$

(Здесь символ $\sum'$ указывает на суммирование, распространённое на все k, которые не делятся на $\tilde{k}$.) Аналогичная оценка справедлива и для случая, когда для данного значения k исключительного нуля нет вовсе.

Пусть теперь $\widetilde{k}/k$. Полагаем:

$$F_n\left(\frac{l}{k}+\vartheta\right)=\psi_n(\vartheta)+S(\chi_1,k,l)\widetilde{\psi}_n(\vartheta)+R_n(\vartheta).$$

В силу леммы IV, 4 имеем:

$$R_n(\vartheta)\ll ne^{-\mu_2\sqrt{\nu}}. \tag{51.14}$$

Возводя обе части последнего равенства в куб, имеем:

$$F_n^3\left(\frac{l}{k}+\vartheta\right)=\psi_n^3+3S\psi_n^2\widetilde{\psi}_n+3S^2\psi_n\widetilde{\psi}_n^2+S^3\widetilde{\psi}_n^3+T_n(\vartheta),$$

где

$$T_n(\vartheta)=R_n(3\psi_n^2+6S\psi_n\widetilde{\psi}_n+3\psi_nR_n+3S^2\widetilde{\psi}_n^2+3S\widetilde{\psi}_nR_n+R_n^2),$$

причём ради сокращения положено:

$$\psi_n=\psi_n(\vartheta),\quad \widetilde{\psi}_n=\widetilde{\psi}_n(\vartheta),\quad R_n=R_n(\vartheta),\quad S=S(\chi_1,k,l).$$

Следовательно,

$$\sum_{(l,\,k)=1}\left(\int_{-\delta}^{+\delta}F_n^3\left(\frac{l}{k}+\vartheta\right)e^{-2\pi in\alpha}\,d\vartheta-\int_{-\delta}^{+\delta}\psi_n^3(\vartheta)\,e^{-2\pi in\alpha}\,d\vartheta\right)=$$

$$=3\sigma_1\int_{-\delta}^{+\delta}\psi_n^2\widetilde{\psi}_ne^{-2\pi in\alpha}\,d\vartheta+3\sigma_2\int_{-\delta}^{+\delta}\psi_n\widetilde{\psi}_n^2e^{-2\pi in\alpha}\,d\vartheta+$$

$$+\sigma_3\int_{-\delta}^{+\delta}\widetilde{\varphi}_n^3e^{-2\pi in\alpha}\,d\vartheta+\sum_{(l,\,k)=1}\int_{-\delta}^{+\delta}T_ne^{-2\pi in\alpha}\,d\vartheta, \tag{51.15}$$

где

$$\sigma_1=\sum_{(l,\,k)=1}e^{-2\pi i\frac{ln}{k}}S(\chi_1,k,l);\quad \sigma_2=\sum_{(l,\,k)=1}e^{-2\pi i\frac{ln}{k}}S^2(\chi_1,k,l);$$

$$\sigma_3=\sum_{(l,\,k)=1}e^{-2\pi i\frac{ln}{k}}S^3(\chi_1,k,l).$$

Но, в силу лемм IV, 2 и IV, 3, имеют место неравенства

$$|S|\leqslant\sqrt{\widetilde{k}};\quad |\psi_n|;\ |\widetilde{\psi}_n|\ll\frac{n}{\nu};$$

поэтому, принимая во внимание (51.14), имеем:

$$|T_n| \ll ne^{-\mu_9\sqrt{\nu}}\left(\frac{n^2}{\nu^2}+\sqrt{\tilde{k}}\frac{n^2}{\nu^2}+\frac{n^2}{\nu^2}+\tilde{k}\frac{n^2}{\nu^2}+\sqrt{\tilde{k}}\frac{n^2}{\nu^2}+\frac{n^2}{\nu^2}\right) \ll$$

$$\ll n^3\tilde{k}\,e^{-\mu_9\sqrt{\nu}}\,\nu^{-2} \ll n^3\xi e^{-\mu_9\sqrt{\nu}}\,\nu^{-2};$$

следовательно,

$$\sum_{(l,\,k)=1}\int_{-\delta}^{+\delta} T_n e^{-2\pi i n\alpha}\,d\vartheta \ll h\delta n^3\xi e^{-\mu_9\sqrt{\nu}}\,\nu^{-2} \ll$$

$$\ll n^2 e^{-\mu_9\sqrt{\nu}}\,\nu^{8r-2}. \qquad (51.16)$$

Пусть теперь k — неосновной модуль $\chi(a)$. Так как $(l, k)=1$, то, в силу леммы IV, 2,

$$S(\chi_1, l, k)=0,$$

и следовательно, в этом случае

$$\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=0. \qquad (51.17)$$

Если же k — основной модуль, то, в силу той же леммы

$$S(\chi_1, l, k)=\tilde{\chi}(k_0)\,\tau(\tilde{\chi})\,\mu(k_0)\sqrt{\tilde{k}}\,\tilde{\chi}(l)=$$

$$=\tilde{\chi}(k_0)\,\tau(\tilde{\chi})\,\mu(k_0)\sqrt{\tilde{k}}\,\chi_1(l), \qquad (51.18)$$

ибо $\chi_1(l)=\tilde{\chi}(l)$ для $(l, k)=1$.

Следовательно,

$$\sigma_1=\tilde{\chi}(k_0)\,\tau(\tilde{\chi})\,\mu(k_0)\sqrt{\tilde{k}}\sum_{(l,\,k)=1}\chi_1(l)\,e^{-2\pi i\frac{ln}{k}}=$$

$$=\tilde{\chi}(k_0)\,\tau(\tilde{\chi})\,\mu(k_0)\sqrt{\tilde{k}}\,S(\chi_1, k, -n).$$

Но опять-таки, в силу леммы IV, 2,

$$|S(\chi_1, k, -n)| \leqslant \varphi(n')\sqrt{\tilde{k}}, \qquad (51.19)$$

где $n'=(k_0, n)$.

Следовательно,

$$|\sigma_1| \leqslant \varphi(n')\,\tilde{k} \leqslant \varphi(k_0)\,\tilde{k}, \qquad (51.20)$$

ибо $\varphi(n')/\varphi(k_0)$.

Далее, используя равенство (51.17), имеем:

$$|\sigma_2| \leqslant \sum_{(l,k)=1} |S(\chi_1, k, l)|^2 \leqslant h\widetilde{k}. \qquad (51.21)$$

Наконец, используя это же равенство и неравенство (52.19), получим:

$$\sigma_3 = \widetilde{\chi}(k_0)\,\tau(\widetilde{\chi})\,\mu(k_0)\,\widetilde{k}^{3/2} \sum_{(l,\,k)=1} \chi_1(l)\, e^{-2\pi i \frac{ln}{k}} =$$

$$= \widetilde{\chi}(k_0)\,\tau(\widetilde{\chi})\,\mu(k_0)\,\widetilde{k}^{3/2} S(\chi_1, k, -n);$$

$$|\sigma_3| \leqslant \widetilde{k}^{3/2}\varphi(n')\sqrt{\widetilde{k}} \leqslant \widetilde{k}^2\varphi(k_0). \qquad (51.22)$$

С другой стороны, замечая, что величина $m^\beta - (m-1)^\beta$ монотонно убывает при возрастании m, и применяя лемму IV, 3, имеем:

$$|\psi_u^2 \widetilde{\psi}_n|, \ |\psi_n \widetilde{\psi}_n^2|, \ |\widetilde{\psi}_n^3| \ll \frac{n^3}{h^3\gamma^3}$$

в интервале $\left(-\frac{1}{n} \leqslant \vartheta \leqslant +\frac{1}{n}\right)$ и

$$\ll \frac{1}{h^3\gamma^3|\vartheta|^3}$$

в интервалах $\left(-\delta \leqslant \vartheta \leqslant -\frac{1}{n}\right)$ и $\left(\frac{1}{n} \leqslant \vartheta \leqslant \delta\right)$.

Следовательно,

$$\int_{-\delta}^{+\delta} \psi_n^2 \widetilde{\psi}_n e^{-2\pi i n^\alpha} d\vartheta \ll \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{n^3}{h^3\gamma^3}\, d\vartheta + \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \frac{d\vartheta}{\vartheta^3\gamma^3 h^3} \ll$$

$$\ll \frac{n^2}{h^3\gamma^3} + \frac{1}{h^3\gamma^3}\int_{\frac{1}{n}}^{\infty} \frac{d\vartheta}{\vartheta^3} \ll \frac{n^2}{h^3\gamma^3}; \qquad (51.23)$$

аналогично получим:

$$\int_{-\delta}^{+\delta} \psi_n \widetilde{\psi}_n^2\, e^{-2\pi i n^\alpha} d\vartheta \ll \frac{n^2}{h^3\gamma^3}; \qquad (51.23')$$

$$\int_{-\delta}^{+\delta} \widetilde{\psi}_n^3\, e^{-2\pi i n^\alpha} d\vartheta \ll \frac{n^2}{h^3\gamma^3}. \qquad (51.23'')$$

Следовательно, суммируя равенства (51.15) для всех k, кратных $\tilde{k}$, и учитывая соотношения (51.16), (51.17), (51.20), (51.21), (51.22), (51.23), (51.23′) и (51.23″), имеем:

$$\sum_{\substack{k\leqslant\xi\\ \tilde{k}/k}}\sum_{(l,k)=1}\left(\int_{-\delta}^{+\delta}F_n^3\left(\frac{l}{k}+\vartheta\right)e^{-2\pi i n\alpha}\,d\vartheta-\int_{-\delta}^{+\delta}\psi_n^3(\vartheta)\,e^{-2\pi i n\alpha}\,d\vartheta\right)\ll$$

$$\ll\sum_{\substack{1\leqslant k_0\leqslant\left[\frac{\xi}{\tilde{k}}\right]\\ (k_0,\tilde{k})=1\,k}}\left(\varphi(k_0)\,\tilde{k}+\tilde{h}k+\tilde{k}^2\varphi(k_0)\right)\frac{n^2}{h^3\nu^3}+n^2e^{-\mu_0\sqrt{\nu}}\xi\nu^{3r-2}\ll$$

$$\ll\frac{n^2}{\nu^3k}\sum_{k_0=1}^{\infty}\frac{1}{\varphi^2(k_0)}+n^2e^{-\mu_0\sqrt{\nu}}\nu^{4r-2}\ll\frac{n^2(\lg\nu)^7}{\nu^5},\quad(51.24)$$

ибо

$$h=\varphi(k)=\varphi(k_0)\,\varphi(\tilde{k})\leqslant\tilde{k}\varphi(k_0),\quad\tilde{k}>L=\frac{\nu^2}{(\lg\nu)^7},$$

$$\frac{1}{\varphi(k_0)}\ll\frac{\lg k_0}{k_0}$$

Сопоставляя (51.13) и (51.24), усматриваем, что

$$\sum_{k\leqslant\xi}\sum_{(l,k)=1}\left(\int_{-\delta}^{+\delta}F_n^3\left(\frac{l}{k}+\vartheta\right)e^{-2\pi i n\alpha}d\vartheta-\int_{-\delta}^{+\delta}\psi_n^3(\vartheta)\,e^{-2\pi i n\alpha}\,d\vartheta\right)\ll$$

$$\ll n^2\nu^{2r}e^{-\mu_0\sqrt{\nu}}+\frac{n^2(\lg\nu)^7}{\nu^5}\ll\frac{n^2(\lg\nu)^7}{\nu^5}.\qquad(51.25)$$

С другой стороны, принимая во внимание лемму IV, 3, имеем:

$$\psi_n(\vartheta)\ll\frac{1}{h\,|\vartheta|\lg\frac{1}{|\vartheta|}}\ll\frac{1}{h\,|\vartheta|}\quad\text{для}\quad\delta\leqslant|\vartheta|\leqslant\frac{1}{2};$$

следовательно,

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{-\delta} \psi_n^3(\vartheta)\, e^{-2\pi i n\alpha}\, d\vartheta + \int_{\delta}^{\frac{1}{2}} \psi_n^3(\vartheta)^{-2\pi i n\alpha} \ll \frac{1}{h^3}\int_{\delta}^{\frac{1}{2}} \frac{d\vartheta}{\vartheta^3} \ll$$

$$\ll \frac{1}{h^3}\int_{\delta}^{\infty}\frac{d\vartheta}{\nu^3} \ll \frac{1}{h^3\delta^2} \ll \frac{n^2}{h^3\xi^2},$$

и

$$\sum_{k\leqslant\xi}\ \sum_{(l,\,k)=1} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{-\delta} \psi_n^3(\vartheta)\, e^{-2\pi i n\alpha}\, d\vartheta + \int_{\delta}^{\frac{1}{2}} \psi_n^3(\vartheta)\, e^{-2\pi i n\alpha}\, d\vartheta\right) \ll$$

$$\ll \frac{n^2}{\xi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{h^3} \ll n^2\nu^{-2r}, \qquad (51.26)$$

ибо, как указано было в предшествующем параграфе, величина $h^{-1} \ll \frac{\lg k}{k}$, и следовательно, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{h^3}$ сходится.

Сопоставляя (51.1), (52.5), (51.11) и (51.25), получим:

$$a_n - \sum_{k\leqslant\xi}\ \sum_{(l,\,k)=1}\ \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \psi_n(\vartheta)\, e^{-2\pi i n\alpha}\, d\vartheta \ll \frac{n^2}{\nu^{3+\varepsilon}} + n^2 e^{-\mu_9''\sqrt{\nu}} + \frac{n^2}{\nu^{2r}}$$

или

$$\ll \frac{n^2}{\nu^{3+\varepsilon}} + \frac{n^2(\lg\nu)^7}{\nu^5} + \frac{n^2}{\nu^{2r}},$$

т. е. во всех случаях рассматриваемая разность

$$\ll \frac{n^2}{\nu^{3+\varepsilon}} + \frac{n^2(\lg\nu)^7}{\nu^5}. \qquad (51.27)$$

С другой стороны,

$$\sum_{k\leqslant\xi}\sum_{(l,k)=1}\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}\psi_n^3(\vartheta)\,e^{-2\pi i n\alpha}\,d\vartheta=$$

$$=\sum_{k\leqslant\xi}\frac{\mu(k)}{h^3}\sum_{(l,k)=1}e^{-2\pi i\frac{ln}{k}}\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}\left(\sum_{m=3}^{n}\frac{e^{2\pi i m\vartheta}}{\lg m}\right)^3 e^{-2\pi i n\vartheta}\,d\vartheta=\lambda_n b_n, \quad (51.28)$$

где

$$b_n=\sum_{m_1+m_2+m_3=n}\frac{1}{\lg m_1\lg m_2\lg m_3},$$

$$\lambda_n=\sum_{k\leqslant\xi}\frac{\mu(k)}{h^3}\sum_{(l,k)=1}e^{-2\pi i\frac{ln}{k}}.$$

(Здесь суммирование распространяется на всевозможные представления числа n как суммы трёх натуральных чисел.)

Но, в силу леммы IV, 1 и леммы IV, 6, для достаточно больших нечётных чисел n имеют место неравенства:

$$\lambda_n\geqslant c_9>0,$$
$$b_n>\frac{n^2}{4\nu^3}. \quad (51.29)$$

Наконец, сравнивая (51.27), (51.28) и (51.29), имеем:

$$a_n>\lambda_n b_n-c_{10}\left(\frac{n^2}{\nu^{3+\varepsilon}}+\frac{n^2(\lg\nu)^7}{\nu^5}\right)>$$
$$>\frac{n^2}{\nu^3}\left(\frac{c_9}{4}-\frac{c_{10}}{\nu^{\varepsilon}}-\frac{c_{10}(\lg\nu)^7}{\nu^2}\right)>c_{11}\frac{n^2}{\nu^3},$$

для $n\geqslant n_0$, что доказывает теорему 51 [1]).

---

[1]) В неопубликованной ещё диссертации К. Г. Бороздкина, К вопросу о постоянной акад. И. М Виноградова, (1939) показано, что

$$n_0\leqslant e^{e^{e^{41,96}}}.$$

Можно получить следующий результат, идущий дальше того, что утверждает теорема 51. Пусть $\nu(x)$ равно числу тех чётных чисел $\leqslant x$, которые не разлагаются на сумму двух нечётных простых; в настоящее время показано, что $\nu(x) = o(x)$ для $x \to \infty$ [1]).

Что касается старой гипотезы Эйлера о том, что $\nu(x) \equiv 0$, т. е. что всякое чётное число равно сумме двух простых, то в настоящее время не известны пути оправдания этой гипотезы. Наоборот, некоторые факты вызывают опасение, что она не отвечает действительности (см. Линник, 1). Историю вопроса см. Чудаков, 1.

---

[1]) См. Н. Г. Чудаков [2].

ЛИТЕРАТУРА

Указанная ниже литература только дополняет обширный список, помещённый в конце книги: И н г а м, Распределение простых чисел.

1. И. М. Виноградов
   1) Основы теории чисел, ГТТИ, 1940.
   2) Новый метод в аналитической теории чисел, Труды Математического института им. В. А. Стеклова, т. X (1937).
   3) Представление нечётного числа суммой трёх простых чисел, ДАН СССР, т. XV, № 6—7 (1937).
2. Ю. В. Линник
   1) Пример одной последовательности, не образующей бинарного базиса, ДАН СССР[1]) т. XXXVI, № 6 (1942).
3. К. К. Марджанишвили
   1) К доказательству теоремы Гольдбаха, ДАН СССР[1]), т. XXX, № 8 (1941).
4. Е. Т. Уиттекер и Г. И. Ватсон
   1) Курс современного анализа, Москва, ГТТИ, т. II (1933).
5. Н. Г. Чудаков
   1) О проблеме Гольдбаха, Успехи математических наук, вып. IV (1938).
   2) О плотности совокупности чётных чисел, непредставимых как сумма двух простых, Известия Академии Наук СССР, математическая серия, № 1 (1938).
6. E. Landau
   1) Über die Klassenzahl imaginär — quadratischer Zahlkörper, Göttingener Nachrichten, 1918, S. 285—295.
7. A. Page
   1) On the number of primes in an arithmetic progression, Proceedings of London Math. Soc. (2), 39 (1935), p. 116.
8. C. Siegel
   1) Uber die Klassenzahl quadratischer Zahlkörper, Acta Arithmetica, 1, (1935), p. 83—86.
9. B. Riemann
   1) Gesammelte mathematische Werke, 1892, стр. 145.
10. Hardy (and Littlewood)
   1) Some problems of «Partitio numerorum» III, Acta Mathematica Bd. 44 (1922).
11. H. Hailbronn
   1) On Dirichlet's series which satisfy a certain functional equations, Quarterly j. of Mathematics, Oxf., ser., 9 (1938), 194—195.

[1]) ДАН СССР — Доклады Академии Наук СССР.