Л. Я. ЦЛАФ

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

517.2
Ц 75
УДК 519.3

АННОТАЦИЯ

Существующие справочники, рассчитанные на инженеров и студентов, не содержат сведений по вариационному исчислению и интегральным уравнениям. Между тем эти разделы высшей математики широко используются в исследовательской работе и вошли уже в число математических дисциплин, изучаемых в ряде высших технических учебных заведений. Данное справочное руководство имеет своей целью восполнить указанный пробел.

Книга содержит основные сведения из вариационного исчисления и теории интегральных уравнений и их приложений к некоторым вопросам механики и математической физики. Даются также краткие сведения о принципе максимума Л. С. Понтрягина, принципе оптимальности Р. Беллмана и др. Отдельные положения теории поясняются примерами и решениями задач.

Книга предназначается для инженеров, экономистов, а также для студентов, аспирантов высших технических учебных заведений.

Лев Яковлевич Цлаф

Вариационное исчисление и интегральные уравнения

(справочное руководство)

М., 1966 г., 176 стр. с илл.

Редактор *А. Ф. Лапко*

Техн. редактор *А. А. Благовещенская* Корректор *О. А. Бутусова*

Сдано в набор 1/VII 1966 г. Подписано к печати 21/X 1966 г. Бумага 84×108/32. Физ. печ. л. 5,5. Условн. печ. л. 9,24. Уч.-изд. л. 10,10. Тираж 25 000 экз. Т-12780. Цена книги 51 коп. Заказ № 1631

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова
Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР
Москва, Ж-54, Валовая, 28

Отпечатано во 2-ой типографии изд-ва «Наука»,
Москва, Шубинский пер., 10.

2-2-3
197-66

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 7

Глава I. **Вариационное исчисление** 9

§ 0. Введение 9

1.0.1. Функционал (9). 1.0.2. Предмет вариационного исчисления (9). 1.0.3. Некоторые определения и обозначения (10).

§ 1. Простейшая задача вариационного исчисления. Необходимые условия экстремума 12

1.1.1. Постановка задачи (12). 1.1.2. Первая и вторая вариации функционала (12). 1.1.3. Первое необходимое условие экстремума. Дифференциальное уравнение Эйлера — Лагранжа. Экстремали (14). 1.1.4. Регулярные (или неособенные) экстремали (15). 1.1.5. Некоторые случаи понижения порядка уравнения Эйлера — Лагранжа (15). 1.1.6. Условия Вейерштрасса — Эрдмана. Ломаные экстремали (16). 1.1.7. Второе необходимое условие экстремума — условие Лежандра (17). 1.1.8. Третье необходимое условие экстремума — условие Вейерштрасса (17). 1.1.9. Четвертое необходимое условие экстремума — условие Якоби (17). 1.1.10. Инвариантность уравнения Эйлера — Лагранжа (18).

§ 2. Вариационные задачи с подвижными концами 19

1.2.1. Постановка задачи (19). 1.2.2. Формула для первой вариации (19). 1.2.3. Условие трансверсальности (20). 1.2.4. Трансверсальность и ортогональность (21).

§ 3. Необходимые условия экстремума для функционала, зависящего от нескольких функций 21

1.3.1. Постановка задачи (21). 1.3.2. Первое необходимое условие экстремума. Уравнения Эйлера — Лагранжа. Экстремали (22). 1.3.3. Условия Вейерштрасса — Эрдмана. Ломаные экстремали (22). 1.3.4. Второе необходимое условие экстремума — условие Лежандра (22). 1.3.5. Третье необходимое условие экстремума — условие Вейерштрасса (23). 1.3.6. Четвертое необходимое условие экстремума — условие Якоби (23). 1.3.7. Условие трансверсальности (23).

§ 4. Необходимые условия экстремума функционала, содержащего производные высших порядков 24

1.4.1. Постановка задачи (24). 1.4.2. Первое необходимое условие экстремума. Дифференциальное уравнение Эйлера — Пуассона. Экстремали (25). 1.4.3. Случаи понижения порядка уравнения Эйлера — Пуассона (25). 1.4.4. Сведение рассматриваемой задачи к задаче на условный экстремум. Дальнейшие необходимые условия (26). 1.4.5. Условие трансверсальности (26).

§ 5. Вариационные задачи в параметрической форме . . . 27

1.5.1. Параметрическое задание линий (27). 1.5.2. Функционалы от линий. Сильные и слабые окрестности (28). 1.5.3. Первое необходимое условие экстремума. Уравнения Эйлера — Лагранжа (29).

1.5.4. Вейерштрассова форма уравнений Эйлера — Лагранжа. Экстремали (29). 1.5.5. Условия Вейерштрасса — Эрдмана (30). 1.5 6. Второе необходимое условие экстремума (аналог условия Лежандра) (30). 1.5.7. Третье необходимое условие экстремума — условие Вейерштрасса (31). 1.5.8. Четвертое необходимое условие экстремума — условие Якоби (31). 1.5.9. Условия трансверсальности (32).

§ 6. Разрывные задачи. Односторонние экстремумы 33

1.6.1. Разрывные задачи первого рода для простейшего функционала (33). 1.6.2. Разрывные задачи второго рода (34). 1.6.3. Разрывные задачи для функционала, зависящего от нескольких функций (35). 1.6.4. Односторонние вариации (36).

§ 7. Канонические уравнения. Теория Гамильтона—Якоби 38

1.7.1. Каноническая или гамильтонова форма уравнений Эйлера (38). 1.7.2. Первые интегралы канонической системы (40). 1.7.3. Теорема Э. Нётер (40). 1.7.4. Уравнение Гамильтона — Якоби. Теорема Якоби (41). 1.7.5. Канонические преобразования (43).

§ 8. Некоторые сведения из теории поля экстремалей . . 44

1.8.1. Геодезическое расстояние и его производные (44). 1.8.2. Поле экстремалей (46). 1.8.3. Выражение геодезического расстояния между двумя точками через инвариантный интеграл Гильберта (46). 1 8.4. Другие определения поля (47). 1.8.5. Достаточные условия Лежандра и Якоби включения экстремали функционала $J(y)=\int\limits_{x_1}^{x_2} F\left(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n'\right) dx$ в поле (48). 1.8.6. Построение полей экстремалей для некоторых вариационных задач с подвижными концами (49). 1.8.7. Определение поля для вариационных задач в параметрической форме (50).

§ 9. Достаточные условия экстремума 50

1.9.1. Достаточное условие Вейерштрасса (50). 1.9.2. Упрощенное достаточное условие сильного экстремума (53). 1.9.3. Достаточные условия сильного экстремума в задачах с подвижными концами (53). 1.9.4. Достаточные условия слабого экстремума функционала, зависящего от нескольких функций (54). 1.9.5. Достаточные условия экстремума для вариационных задач в параметрической форме (55).

§ 10. Вариационные задачи с частными производными . . 56

1.10.1. Первое необходимое условие. Уравнение Эйлера — Остроградского (56). 1.10.2. Инвариантность уравнения Эйлера — Остроградского (57). 1.10.3. Второе необходимое условие для экстремума двойного интеграла (аналог условия Лежандра) (58). 1.10.4. Вариация функционала с переменной областью интегрирования (58). 1.10.5. Инвариантные вариационные задачи. Теорема Э. Нётер (60). 1.10.6. Разрывная задача первого рода (61).

§ 11. Вариационные задачи на условный экстремум . . . 62

1 11.1. Изопериметрическая задача (63). 1.11.2. Правило множителей (64). 1.11.3. Условия трансверсальности (65). 1.11.4. Необходимое условие Клебша (65). 1.11.5. Необходимое условие Якоби (66). 1.11.6. Достаточные условия экстремума в изопериметрической задаче (67). 1.11.7. Задачи Лагранжа, Майера и Больца (68). 1.11.8. Связь задач изопериметрической, Лагранжа, Майера и Больца (72). 1.11.9. Правило множителей для задач Лагранжа, Майера и Больца (73). 1.11.10. Условия трансверсальности (74). 1.11.11. Необходимые условия экстремума Вейерштрасса и Клебша (75). 1.11.12. Вторая вариация в задаче Больца 1 (76). 1·11.13. Присоединенная или акцессорная задача Больца (76). 1.11.14. Достаточные условия сильного относительного миниму-

ма (77). 1.11.15. Условие Якоби положительной определенности второй вариации (78).

§ 12. Оптимальные принципы 78

1.12.1. Принцип максимума Л. С. Понтрягина. Постановка задачи (78). 1.12.2. Формулировка принципа максимума (80). 1.12.3. Принцип максимума и вариационное исчисление (82). 1.12.4. Принцип оптимальности Беллмана (динамическое программирование) (83). 1.12.5. Вариационное исчисление и принцип оптимальности Беллмана (84). 1.12.6. Связь динамического программирования с задачами условного экстремума и принципом максимума (86).

§ 13. Линейное программирование 87

1.13.1. Постановка задачи (87). 1.13.2. Геометрическая интерпретация (88). 1.13.3. Симплекс-метод (88). 1.13.4. Связь с динамическим программированием (90).

§ 14. Прямые методы вариационного исчисления 91

1.14.1. Постановка задачи (91). 1.14.2. Метод Ритца. Примеры (92). 1.14.3. Метод конечных разностей (96).

Глава II. Интегральные уравнения 97

§ 0. Введение 97

2.0.1. Определение. Примеры (97). 2.0.2. Классификация интегральных уравнений (99). 2.0.3. Сведения об интеграле Лебега (100). 2.0.4. Последовательности и ряды ортогональных функций (104).

§ 1. Интегральные уравнения Вольтерра 105

2.1.1. Теоремы существования и единственности (105). 2.1.2. Метод последовательных приближений (106). 2.1.3. Связь уравнения Вольтерра с дифференциальными уравнениями (107). 2.1.4. Уравнения Вольтерра первого рода (108).

§ 2. Интегральные уравнения Фредгольма второго рода 108

2.2.1. Теоремы существования и единственности решения (108). 2.2.2. Метод последовательных приближений (109). 2.2.3. Уравнения Фредгольма с вырожденным ядром (111). 2.2.4. Аппроксимация невырожденного ядра вырожденным (112). 2.2.5. Теоремы Фредгольма (114).

§ 3. Симметричные интегральные уравнения 115

2.3.1. Существование характеристического числа (115). 2.3.2. Ортогональность собственных функций (116). 2.3.3. Действительность характеристических чисел (116). 2.3.4. Ортогонализация собственных функций (118). 2.3.5. Количество собственных функций, соответствующих характеристическому числу, и распределение характеристических чисел (119). 2.3.6. Билинейная формула (120). 2.3.7. Теорема Гильберта – Шмидта (122). 2.3.8. Билинейные ряды итерированных ядер (122). 2.3.9. Решение неоднородного уравнения (123) 2.3.10. Альтернатива Фредгольма для симметричных интегральных уравнений (124). 2.3.11. Экстремальные свойства характеристических чисел и собственных функций (124).

§ 4. Интегральные преобразования и интегральные уравнения 126

2.4.1. Преобразование Фурье (126). 2.4.2. Преобразование Лапласа (130).

§ 5. Уравнения Фредгольма первого рода 131

2.5.1. Теорема Пикара (131). 2.5.2. Метод последовательных приближений (132). 2.5.3. Решение некоторых интегральных уравнений первого рода (132).

§ 6. Приближенные методы решения интегральных уравнений 133

2.6.1. Метод последовательных приближений решения уравнения Фредгольма второго рода (133). 2.6.2. Метод механических квадратур (134). 2.6.3. Метод наименьших квадратов и метод Галёркина (135). 2.6.4. Формулы для нахождения характеристических чисел (136).

§ 7. Некоторые нелинейные интегральные уравнения . . . 137

2.7.1. Нелинейные уравнения Вольтерра (137) 2.7.2. Уравнения типа Гаммерштейна (137). 2.7.3. Бифуркация решений (139).

§ 8. Сингулярные интегральные уравнения 139

2.8.1. Главное значение несобственного интеграла (139). 2.8.2. Преобразование Гильберта — М. Рисса (141). 2.8.3. Сингулярное интегральное уравнение Гильберта (142). 2.8.4. Сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши (143).

Глава III. Некоторые приложения вариационного исчисления и интегральных уравнений 14

§ 0. Введение 14

3.0.1. Содержание главы (144).

§ 1. Задачи о геодезических 14

3.1.1. Задача о геодезических в трехмерном евклидовом пространстве (144). 3.1.2. Отыскание геодезических в случае, когда поверхность задана параметрическими уравнениями (146). 3.1.3. Отыскание геодезических на римановых многообразиях (147).

§ 2. Вариационные принципы механики 14

3.2.1. Принцип Гамильтона—Остроградского (148). 3.2.2. Принцип наименьшего действия в форме Лагранжа и Якоби (151). 3.2.3. Принцип наименьшего действия и его связь с теорией геодезических (152). 3.2.4. Вывод уравнения малых колебаний струны (153). 3.2.5. Вывод уравнения колебаний мембраны (154). 3.2.6. Вывод уравнения колебаний стержня, заделанного на концах (155).

§ 3. Задача Штурма — Лиувилля 15

3.3.1. Постановка задачи (157). 3.3.2. Задача Штурма — Лиувилля (158). 3.3.3. Формула Грина. Самосопряженные краевые задачи (159). 3.3.4. Функция Грина самосопряженной краевой задачи Штурма — Лиувилля (160). 3.3.5. Теорема Гильберта (162). 3.3.6. Эквивалентность самосопряженной задачи Штурма — Лиувилля симметричному интегральному уравнению (163). 3.3.7. Свойства собственных значений и собственных функций самосопряженной задачи Штурма — Лиувилля (163). 3.3.8. Знак собственных значений (164). 3.3.9. Неоднородная краевая задача (165). 3.3.10. Обобщенная функция Грина (166). 3.3.11. Экстремальные свойства собственных значений и собственных функций. Метод Ритца (168).

Литература 17

ПРЕДИСЛОВИЕ

Вариационное исчисление и интегральные уравнения являются быстроразвивающимися разделами анализа, охватить которые с достаточной полнотой в книге небольшого объема невозможно.

В предлагаемое справочное руководство включены прежде всего классические результаты и некоторые новые, уже вошедшие в обиход инженерной исследовательской работы, как например, оптимальные процессы в вариационном исчислении. В подобных случаях приводится лишь постановка задачи, основные результаты и их связь с классическими результатами.

Книга предназначена для инженеров, экономистов, студентов и аспирантов высших технических учебных заведений. Изложение материала проведено на основе обычного курса математического анализа, изучаемого в высших технических учебных заведениях. Исключения составляют весьма краткие сведения об интеграле Лебега и его использовании, а также некоторые начальные сведения из теории функций комплексного переменного.

На русском языке имеется обширная литература по излагаемым в книге вопросам, однако учебных руководств для высших технических учебных заведений по вариационному исчислению и интегральным уравнениям почти нет. Для удобства читателя в книге дан подробный справочный материал по основам теории, причем по каждому излагаемому вопросу указаны литературные источники, а также учебная литература и монографии, в которых содержится дальнейшее развитие теории.

В книге приведены также сведения о некоторых приложениях вариационного исчисления и интегральных уравнений к вопросам, близко примыкающим к дополнительным главам высшей математики, читаемым в настоящее время в высших технических учебных заведениях.

Это относится к выводу некоторых уравнений математической физики, исходя из вариационных принципов механики, а также к изучению задачи Штурма-Лиувилля.

Рамки книги не позволили расширить разделы, связанные с приближенными методами решения вариационных задач и интегральных уравнений. В книге даны лишь простейшие сведения об этих методах и приведены соответствующие примеры. Читатель, интересующийся вычислительными методами, найдет богатый материал в известной книге Л. В. Канторовича и В. И. Крылова «Приближенные методы высшего анализа», изд. 5, М., Физматгиз, 1962, а также в недавно вышедшей книге: С. Г. Михлина «Численная реализация вариационных методов», М., Наука, 1966.

Пользуюсь случаем выразить свою благодарность Л. А. Люстернику, Н. И. Ахиезеру и С. Г. Михлину за большую помощь, оказанную мне их советами и критическими замечаниями при моей работе над рукописью.

Л. Цлаф

ГЛАВА I

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

§ 0. Введение

1.0.1. Функционал. Если M — множество функций и каждой функции $\varphi(x)$, принадлежащей M, $\varphi(x) \in M$, относится определенное число, то говорят, что на множестве M задан *функционал.*

Пример 1 0.1. M — множество функций $y(x)$, определенных на отрезке $[a, b]$ и обладающих на нем непрерывной производной. Длина l линии $y=y(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, $y(x) \in M$, есть функционал

$$l(y)=\int_a^b \sqrt{1+y'^2(x)}\,dx.$$

Пример 1 0 2. M — множество функций $y(x)$, в область определения которых входит точка x_0. Значения функций $y(x)$ в точке x_0 образуют функционал

$$J(y)=y(x_0).$$

1.0.2. Предмет вариационного исчисления. *Вариационное исчисление* устанавливает условия, при которых функционалы достигают своего экстремума.

Одной из первых задач вариационного исчисления была задача Ивана Бернулли о брахистохроне (1696 г).

В вертикальной плоскости даны две точки O и B (рис. 1.0.1). По какой линии скатится тяжелая материальная точка, оставаясь в этой плоскости, из верхней точки в нижнюю в наименьший промежуток времени? Начальная скорость равна нулю. Сопротивление движению также полагается равным нулю.

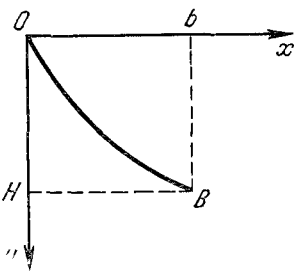

Рис. I 0.1.

Задача сводится к нахождению минимума функционала

$$T=\int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{\sqrt{2gy}}\,dx.$$

Первое решение этой задачи принадлежало Якову Бернулли, второе — Лопиталю, третье — Ньютону.

Наименование «вариационное» исчисление обязано методу вариаций, при помощи которого решаются экстремальные задачи и который будет применен ниже.

1.0.3. Некоторые определения и обозначения. Если функционал $J(y)$ исследуется на экстремум и функция $\bar{y}(x)$ «подозревается» в качестве «точки» экстремума, то значение функционала $J(\bar{y})$ сопоставляется с его значениями на некотором множестве функций (линий) $y(x)$, называемых *функциями* (*линиями*) *сравнения*, к которому принадлежит и $\bar{y}(x)$.

Если имеет место минимум (максимум) $J(y)$ при $\bar{y}(x)$, то положительна (отрицательна) разность

$$\Delta J = J(y) - J(\bar{y})$$

на указанном выше множестве функций сравнения.

Окрестностью нулевого порядка или *сильной окрестностью* $\bar{y}(x)$ называется множество непрерывных функций сравнения $y(x)$ таких, что при некотором числе ε, $\varepsilon > 0$,

$$|y(x) - \bar{y}(x)| < \varepsilon, \qquad x_1 \leqslant x \leqslant x_2$$

Окрестностью первого порядка или *слабой окрестностью* $\bar{y}(x)$ называется множество кусочно-гладких функций сравнения $y(x)$ таких, что при некотором числе ε, $\varepsilon > 0$,

$$|y(x) - \bar{y}(x)| + |y'(x) - \bar{y}'(x)| < \varepsilon, \qquad x_1 \leqslant x \leqslant x_2.$$

Минимум функционала $J(y)$, достигаемый на $\bar{y}(x)$ в ее сильной (слабой) окрестности, называется *сильным* (*слабым*) *минимумом функционала* $J(y)$.

Аналогично определяются *сильный* и *слабый максимум*.

Всякий сильный экстремум является в то же время и слабым экстремумом.

Сильный и слабый экстремумы являются *относительными экстремумами*.

Экстремум функционала $J(y)$ по всей совокупности функций, на которых он определен, называется *абсолютным экстремумом*. Абсолютный экстремум является в то же время и относительным.

В последующем будут использоваться классы функций:

$C[a, b]$ — непрерывных на отрезке $[a, b]$,

$C_1[a, b]$ — гладких (имеющих непрерывную производную) на $[a, b]$,

$C_m[a, b]$ — имеющих непрерывную m-ю производную на $[a, b]$,

$D_1[a, b]$ — непрерывных, имеющих кусочно-непрерывную производную, причем последняя имеет разрывы лишь первого рода.

При постановке задач вариационного исчисления должно указываться, какого характера экстремум разыскивается и в каком классе функций.

Пример 1.0.3. Функционал

$$J(y)=\int_0^{\pi} y^2(1-y'^2)\,dx, \qquad y(0)=y(\pi)=0.$$

Отрезок оси Ox дает слабый минимум, ибо при $|y(x)|+|y'(x)|<\varepsilon$, $\varepsilon<1$, подынтегральное выражение положительно и обращается в нуль лишь при $y=0$.

Сильный минимум не достигается, ибо, положив, например,

$$y=\frac{1}{\sqrt{n}}\sin nx$$

(рис. 1.0.2), получим

$$J(y)=\frac{\pi}{2n}-\frac{\pi}{8}$$

и $J(y)<0$ при $n>4$. При этом линии $y=\frac{1}{\sqrt{n}}\sin nx$ для достаточно больших n лежат в сколь угодно малой окрестности нулевого порядка линии $y=0$.

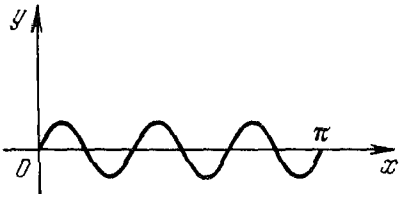

Рис. 1.0.2.

В примере 1.0.3 функционал имеет слабый минимум, принадлежащий классу $C_1[0, \pi]$, но не имеет в этом классе сильного минимума.

Пример 1.0.4 (Вейерштрасс). Функционал

$$J(y)=\int_{-1}^{1} x^2y'^2\,dx, \qquad y(-1)=-1, \qquad y(1)=1$$

положителен. Он не имеет минимума в классе $C_1[-1, 1]$, но достигает его в классе кусочно-гладких функций. Для функций сравнения (рис. 1.0.3)

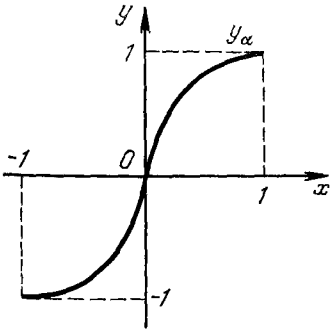

Рис. 1.0 3.

$$y_\alpha=\frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{\alpha}}{\operatorname{arctg}\frac{1}{\alpha}}, \qquad \alpha>0,$$

$$J(y_\alpha)=\int_{-1}^{1} x^2y'^2\,dx<\int_{-1}^{1}(x^2+\alpha^2)\,y'^2\,dx=$$

$$=\frac{\alpha^2}{\operatorname{arctg}^2\frac{1}{\alpha}}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\alpha^2+x^2}=\frac{2\alpha}{\operatorname{arctg}\frac{1}{\alpha}},$$

$$J(y_\alpha)\to 0 \quad \text{при} \quad \alpha\to 0.$$

В классе C_1 минимум не достигается, ибо это могло быть возможным лишь при $y'\equiv 0$, $y=\text{const}$. Однако при этом не выполняются условия $y(-1)=-1$, $y(1)=1$.

§ 1. Простейшая задача вариационного исчисления. Необходимые условия экстремума

1.1.1. Постановка задачи. Требуется найти минимум функционала

$$J(y)=\int_{x_1}^{x_2} F(x,\ y,\ y')\,dx \tag{1.1.1}$$

среди кусочно-гладких линий, соединяющих точки $A(x_1,\ y_1)$ и $B(x_2,\ y_2)$, т. е. $y(x_1)=y_1$, $y(x_2)=y_2$, $x_1\leqslant x\leqslant x_2$.

Обычно предполагается непрерывность подынтегральной функции по совокупности ее аргументов, а также существование и непрерывность всех ее частных производных до третьего порядка включительно.

Считая, что функция $y=y(x)$ доставляет слабый минимум функционалу (1.1.1), находят условия, которым должна удовлетворять указанная функция.

Эти необходимые условия слабого минимума будут тем более необходимыми условиями сильного и абсолютного минимумов.

1.1.2. Первая и вторая вариации функционала. Если $\eta=\eta(x)$ — произвольная кусочно-гладкая функция, удовлетворяющая условиям $\eta(x_1)=\eta(x_2)=0$, то однопараметрическое семейство функций

$$\tilde{y}=y+\alpha\eta(x),$$

при достаточно малых значениях параметра α, принадлежит некоторой окрестности первого порядка функции $y=y(x)$. Функционал

$$J(\tilde{y})=\int_{x_1}^{x_2} F(x,\ \tilde{y},\ \tilde{y}')\,dx,\qquad \tilde{y}(x_1)=y_1,\qquad \tilde{y}(x_2)=y_2,$$

на указанном однопараметрическом семействе функций является функцией параметра α

$$J(\tilde{y})=\Phi(\alpha)=\int_{x_1}^{x_2} F(x,\ y+\alpha\eta,\ y'+\alpha\eta')\,dx,$$

имеющей минимум при $\alpha=0$.

В силу необходимых условий обыкновенного экстремума

$$\Phi'(0)=0,\qquad \Phi''(0)\geqslant 0.$$

Дифференцирование $J(\tilde{y})$ по параметру даст

$$\Phi'(\alpha)=\int_{x_1}^{x_2}[F_y(x,\ \tilde{y},\ \tilde{y}')\,\eta+F_{y'}(x,\ \tilde{y},\ \tilde{y}')\,\eta']\,dx,$$

$$\Phi''(\alpha)=\int_{x_1}^{x_2}[F_{y'y'}(x,\ \tilde{y},\ \tilde{y}')\,\eta'^2+2F_{yy'}(x,\ \tilde{y},\ \tilde{y}')\,\eta\eta'+$$
$$+F_{yy}(x,\ \tilde{y},\ \tilde{y}')\,\eta^2]\,d.$$

Отсюда

$$\Phi'(0)=\int_{x_1}^{x_2}[F_y(x, y, y')\eta+F_{y'}(x, y, y')\eta']\,dx=0, \tag{1.1.2}$$

$$\Phi''(0)=\int_{x_1}^{x_2}[F_{y'y'}(x, y, y')\eta'^2+2F_{yy'}(x, y, y')\eta\eta'+$$
$$+F_{yy}(x, y, y')\eta^2]\,dx\geqslant 0. \tag{1.1.3}$$

К последним результатам можно прийти, исходя из любого другого семейства с параметром α

$$\tilde{y}=\tilde{y}(x, \alpha), \qquad \tilde{y}(x_1, \alpha)=y_1, \qquad \tilde{y}(x_2, \alpha)=y_2, \qquad \tilde{y}(x, 0)=y(x),$$

предполагая, что $\tilde{y}(x, \alpha)$ и $\tilde{y}'_\alpha(x, \alpha)$ — кусочно-гладкие функции x. Тогда

$$J(\tilde{y})=\int_{x_1}^{x_2}F(x, \tilde{y}(x, \alpha), \tilde{y}'(x, \alpha))\,dx$$

опять является некоторой функцией $\Phi(\alpha)$, имеющей минимум при $\alpha=0$. Дифференциал этой функции в точке $\alpha=0$ называется *первой вариацией функционала* (1.1.1) и обозначается символом δJ:

$$\delta J=\left.\frac{d\Phi}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}\alpha.$$

Вторая вариация $\delta^2 J$ функционала (1.1.1) определяется как второй дифференциал функции $\Phi(\alpha)$ в точке $\alpha=0$:

$$\delta^2 J=\left.\frac{d^2\Phi}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=0}\alpha^2.$$

Частный дифференциал функции $\tilde{y}=\tilde{y}(x, \alpha)$ по α при $\alpha=0$ называется *вариацией функции* и обозначается через

$$\delta\tilde{y}=\left.\frac{\partial\tilde{y}}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}\alpha.$$

Необходимые условия минимума (максимума) функционала (1.1.1):

Первая вариация должна обращаться в нуль:

$$\delta J=0.$$

Вторая вариация должна быть в случае минимума неотрицательной:

$$\delta^2 J\geqslant 0;$$

в случае максимума — неположительной:

$$\delta^2 J\leqslant 0.$$

1.1.3. Первое необходимое условие экстремума. Дифференциальное уравнение Эйлера — Лагранжа. Экстремали. Интегрирование по частям первого подынтегрального члена в (1.1.2) дает

$$\delta J=\int_{x_1}^{x_2}\left(F_{y'}-\int_{x_2}^{x}F_y\,dx\right)\eta'\,dx=0, \tag{1.1.4}$$

что, в силу произвольности η, имеет следствием уравнение Эйлера — Лагранжа в интегральной форме

$$F_{y'}-\int_{x_1}^{x}F_y\,dx\equiv C. \tag{1.1.5}$$

Переход от (1.1.4) к (1.1.5) основан на лемме Дю-Буа-Реймона о том, что из соотношения ортогональности

$$\int_{x_1}^{x_2}M(x)\,\eta'(x)\,dx=0,$$

где $M(x)$ — кусочно-непрерывная, а $\eta(x)$ — произвольная кусочно-гладкая функция, $\eta(x_1)=\eta(x_2)=0$, следует $M(x)\equiv\text{const}$.

Дифференцирование уравнения (1.1.5) приводит к дифференциальному уравнению Эйлера — Лагранжа

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0, \tag{1.1.6}$$

впервые полученному в 1744 г. Эйлером и впоследствии (в 1759 г.) Лагранжем.

По вопросу об истории развития вариационного исчисления см. Рыбников [1][1]).

Гладкое решение уравнения (1.1.5) или (1.1.6) называется *экстремалью*.

Замечание. Терминология в курсах вариационного исчисления не единообразна. Так, Н. М. Гюнтер называет экстремалью линию (функцию), фактически доставляющую экстремум исследуемому функционалу, а решения уравнения Эйлера — Лагранжа называет лагранжевыми кривыми.

Аналогично выводу (1.1.5) можно убедиться, что экстремаль удовлетворяет уравнению

$$F-y'F_{y'}-\int_{x_1}^{x_2}F_x\,dx=C, \tag{1.1.7}$$

или, в дифференциальной форме,

$$\frac{d}{dx}[F-y'F_{y'}]-F_x=0. \tag{1.1.8}$$

---

[1]) При ссылках будет указываться автор руководства и номер. Например, см. Лаврентьев и Люстерник [1].

1.1.4. Регулярные (или неособенные) экстремали. Из определения производной и теоремы о среднем значении следует, что

$$\frac{d}{dx}F_{y'}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F_{y'}(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ y'+\Delta y')-F_{y'}(x,\ y,\ y')}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\overline{F}_{xy'}+\frac{\Delta y}{\Delta x}\overline{F}_{yy'}+\frac{\Delta y'}{\Delta x}\overline{F}_{y'y'}\right],\qquad (1.1.9)$$

где $\overline{F}_{xy'}=F_{xy'}(x+\theta_1\Delta x,\ \ y+\theta_2\Delta y,\ \ y'+\theta_3\Delta y')$, $0<\theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3<1$, и аналогично определяются $\overline{F}_{yy'}$, $\overline{F}_{y'y'}$.

Если в точке $(x,\ y)$ экстремали $y=y(x)$

$$F_{y'y'}\neq 0,$$

то из (1.1.9) следует

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y'}{\Delta x}=y''=\frac{\frac{d}{dx}F_{y'}-F_{xy'}-F_{yy'}y'}{F_{y'y'}}.\qquad (1.1.10)$$

Таким образом, в каждой точке экстремали, в которой $F_{y'y'}\neq 0$, экстремаль имеет непрерывную вторую производную.

Точки экстремали $y=y(x)$, в которых $F_{y'y'}\neq 0$, называются *регулярными*. Если все точки экстремали регулярны, то сама экстремаль называется *регулярной* или *неособенной*.

Для регулярных экстремалей уравнению Эйлера—Лагранжа можно придать вид:

$$y''=f(x,\ y,\ y').\qquad (1.1.11)$$

1.1.5. Некоторые случаи понижения порядка уравнения Эйлера — Лагранжа. а) F не зависит от y, т. е. $F_y=0$, тогда $\frac{d}{dx}F_{y'}=0$ и, следовательно,

$$F_{y'}(x,\ y')=\text{const}.\qquad (1.1.12)$$

б) F не зависит от x, т. е. $F=F(y,\ y')$. Уравнение Эйлера — Лагранжа имеет вид

$$F_y-F_{yy'}y'-F_{y'y'}y''=0.$$

Замена $y'=z$, $y''=z\cdot z_y$ дает

$$F_y-F_{yy'}z-F_{y'y'}zz_y=0\quad\text{или}\quad d\,[F(y,z)-zF_{y'}(y,z)]=0,$$

откуда

$$F(y,\ y')-y'F_{y'}(y,\ y')=\text{const}.\qquad (1.1.13)$$

в) F зависит линейно от y', т. е. $F(x,\ y,\ y')=A(x,\ y)+B(x,\ y)\,y'$. Уравнение Эйлера—Лагранжа приводится к виду

$$\frac{\partial A}{\partial y}-\frac{\partial B}{\partial x}=0.\qquad (1.1.14)$$

Если равенство (1.1.14) выполняется тождественно в некоторой области D плоскости Oxy, то $F(x, y, y')\,dx = A(x, y)\,dx + B(x, y)\,dy$ — полный дифференциал и $J(y)$ не зависит от пути интегрирования, имея постоянное значение для всех $y = y(x)$.

Если же соотношение (1.1.14) выполняется не тождественно, то оно определяет одну или несколько экстремалей.

Пример 1.1.1. Найти экстремали функционала

$$J(y) = \int_{-1}^{1} x^2 y'^2\,dx, \qquad y(-1) = -1, \qquad y(1) = 1$$

В силу соотношения (1.1.12) имеем

$$x^2 y' = \text{const},$$
$$y = \frac{C}{x} + D.$$

Отсюда видно, что рассматриваемый функционал экстремалей, т. е. гладких решений уравнения Эйлера — Лагранжа, на отрезке $[-1, 1]$ не имеет (ср. стр. 11).

Пример 1 1 2. Найти экстремали функционала

$$\int_a^b \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}}\,dx$$

(см. задачу о брахистохроне).

В силу соотношения (1.1.13) имеем

$$y(1 + y'^2) = 2K.$$

Подстановка $y' = \operatorname{ctg}\frac{\psi}{2}$ дает $y = 2K\sin^2\frac{\psi}{2} = K(1 - \cos\psi)$, $y' = 2K\cos\frac{\psi}{2}\sin\frac{\psi}{2}\frac{d\psi}{dx}$, $\sin^2\frac{\psi}{2}\,d\psi = \frac{dx}{2K}$, $\quad x = K(\psi - \sin\psi) + C$.

Таким образом, в параметрическом виде экстремаль задается уравнениями

$$x = K(\psi - \sin\psi) + C,$$
$$y = K(1 - \cos\psi).$$

Найденные линии являются *циклоидами*.

1.1.6. Условия Вейерштрасса — Эрдмана. Ломаные экстремали. Если уравнение Эйлера — Лагранжа имеет кусочно-гладкое решение, т. е. $y = y(x)$ имеет угловые точки ($y'(x)$ терпит разрыв), то в каждой точке c, являющейся абсциссой угловой точки, выполняются условия Вейерштрасса — Эрдмана:

$$F_{y'}(c, y(c), y'(c-0)) = F_{y'}(c, y(c), y'(c+0)), \tag{1.1.15}$$

$$F(c, y(c), y'(c-0)) - y'(c-0)\,F_{y'}(c, y(c), y'(c-0)) =$$
$$= F(c, y(c), y'(c+0)) - y'(c+0)\,F_{y'}(c, y(c), y'(c+0)), \tag{1.1.16}$$

вытекающие из уравнений (1.1.5) и (1.1.7), в силу непрерывности входящих в эти формулы интегралов.

Из соотношения (1.1.10) следует, что если $F_{y'y'} \neq 0$, $a \leqslant x \leqslant b$, то уравнение Эйлера — Лагранжа имеет только гладкие решения.

Линии, составленные из кусков экстремалей и удовлетворяющие в угловых точках условиям Вейерштрасса—Эрдмана, называются *ломаными экстремалями*.

По поводу ломаных экстремалей см. п. 1.6.1.

Геометрическое толкование условий Вейерштрасса – Эрдмана см. Ахиезер [1], Гельфанд и Фомин [1].

1.1.7. Второе необходимое условие экстремума — условие Лежандра. В случае минимума функционала (1.1.1) должно выполняться условие: $\delta^2 J \geqslant 0$. Из выражения (1.1.3) для второй вариации вытекает, что во всех точках линии, доставляющей минимум,

$$F_{y'y'}(x, y, y') \geqslant 0, \qquad x_1 \leqslant x \leqslant x_2. \tag{1.1.17}$$

Предполагая противное, можно построить такую слабую окрестность линии $y(x)$, в которой $\delta J(y) < 0$.

Для этого, если $F_{y'y'}(x_0, y(x_0), y'(x_0)) < 0$, $x_1 < x_0 < x_2$, достаточно положить $\eta(x) = \frac{\sin^2 \pi (x_0 - h)}{h}$, $|x - x_0| \leqslant h$; $\eta(x) = 0$, $|x - x_0| > h$ и выбрать h достаточно малым.

В случае максимума на экстремали должно выполняться неравенство

$$F_{y'y'}(x, y, y') \leqslant 0, \qquad x_1 \leqslant x \leqslant x_2. \tag{1.1.18}$$

Условие (1.1.17) (или (1.1.18)) называют *необходимым условием Лежандра* для минимума функционала (1.1.1). Условие Лежандра было найдено в 1786 г.

Вывод см. Лаврентьев и Люстерник [1], [2], а также др. руководства.

1.1.8. Третье необходимое условие экстремума — условие Вейерштрасса. Необходимое условие слабого минимума является в то же время и необходимым условием сильного минимума, но не обратно.

Если линия $y = y(x)$ доставляет сильный минимум (максимум) функционалу (1.1.1), то *функция Вейерштрасса*

$$E(x, y, y', k) = F(x, y, k) - F(x, y, y') - (k - y') F_{y'}(x, y, y') \tag{1.1.19}$$

при произвольных конечных значениях k во всех точках (x, y) экстремали неотрицательна (неположительна).

По поводу доказательства см., например, Лаврентьев — Люстерник [1], [2], Блисс [1]. Условие Лежандра может быть получено в виде следствия условия Вейерштрасса. Последнее было найдено в 1879 г.

1.1.9. Четвертое необходимое условие экстремума — условие Якоби. Если $y = y(x)$ доставляет минимум функционалу (1.1.1), то

$$\delta^2 J = \alpha^2 \int_{x_1}^{x_2} [F_{y'y'} \eta'^2 + 2F_{yy'} \eta\eta' + F_{yy} \eta^2]\, dx \geqslant 0, \tag{1.1.20}$$

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0. \tag{1.1.21}$$

Те из функций $\eta(x)$, для которых $\delta^2 J=0$ и выполняются условия (1.1.21), доставляют минимум функционалу $\delta^2 J$.

Уравнением Эйлера — Лагранжа для последнего является уравнение

$$F_{yy}\eta+F_{yy'}\eta'-\frac{d}{dx}(F_{yy'}\eta+F_{y'y'}\eta')=0, \tag{1.1.22}$$

называемое *уравнением Якоби*.

При выполнении условия Лежандра: $F_{y'y'}\neq 0$, $x_1\leqslant x\leqslant x_2$, из условий $\eta(x_1)=\eta'(x_1)=0$ следует $\eta(x)\equiv 0$. Точки $M_1(x_1, y(x_1))$ и $M'(x_1', y(x_1'))$ на экстремали $y=y(x)$ называются *сопряженными*, если $\eta(x_1)=\eta(x_1')=0$, причем $\eta(x)\not\equiv 0$, $x_1<x<x_1'$.

Условие Якоби. Если экстремаль $y=y(x)$, $x_1\leqslant x\leqslant x_2$, доставляет минимум функционалу (1.1.1), то она не содержит точек, сопряженных точке $(x_1, y(x_1))$.

Условие Якоби было найдено в 1837 г.

В случае существования сопряженной точки $(x_1', y(x_1'))$ можно было бы построить функцию

$$\eta_1=\begin{cases}\eta(x), & x_1\leqslant x\leqslant x_1',\\ 0, & x_1'\leqslant x\leqslant x,\end{cases}$$

являющуюся решением уравнения (1.1.22) и для которой $\delta^2 J=0$, т. е. $\eta_1(x)$ является ломаной экстремалью с возможной угловой точкой $(x_1', \eta(x_1'))$. Условия Вейерштрасса — Эрдмана приводят к равенству $\eta'(x_1')=0$, которое вместе с $\eta_1(x_1')=0$ дает $\eta_1(x)\equiv 0$, вопреки предположению.

Геометрическую теорию сопряженных точек см. Лаврентьев и Люстерник [1], [2], Блисс [1].

1.1.10. Инвариантность уравнения Эйлера — Лагранжа. Если функционал (1.1.1) преобразуется посредством замены переменной или одновременной заменой искомой функции и независимой переменной, то экстремум функционала по-прежнему находится из уравнения Эйлера — Лагранжа, но уже для преобразованного подынтегрального выражения.

Пример 1.1.3. Семейство экстремалей функционала

$$J=\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi$$

определяется уравнением Эйлера — Лагранжа

$$\frac{r}{\sqrt{r^2+r'^2}}+\frac{d}{d\varphi}\frac{r'}{\sqrt{r^2+r'^2}}=0.$$

Замена переменных $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ дает $\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi=\sqrt{1+y'^2}\,dx$. Для функционала

$$J(y)=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

уравнение Эйлера — Лагранжа имеет вид

$$y''=0,$$

откуда

$$y=\alpha x+\beta.$$

Значит, экстремали исходного функционала даются уравнением

$$r\sin\varphi=\alpha r\cos\varphi+\beta.$$

Имеются различные выводы свойства инвариантности уравнения Эйлера — Лагранжа. См. В. И. Смирнов [1], Лаврентьев и Люстерник [1], [2].

§ 2. Вариационные задачи с подвижными концами

1.2.1. Постановка задачи. Рассматривается функционал, зависящий от линий E,

$$J(E)=\int\limits_E F(x, y, y')\,dx, \qquad (1.2.1)$$

где линия E перемещается так, что ее концы движутся вдоль двух заданных линий C и D (рис. 1.2.1). Требуется найти условия, которым должна удовлетворять линия, доставляющая минимум (максимум) функционалу (1.2.1).

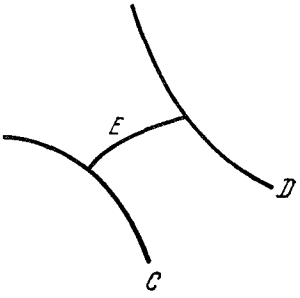

Рис 1 2 1.

Предположения о функции $F(x, y, y')$ такие же, что и в п. 1.1.1. Впервые задача с подвижными концами рассматривалась братьями Бернулли в 1697 г., затем в 1744 г. Эйлером. В 1759 г. Лагранж решил общую задачу с подвижными концами.

1.2.2. Формула для первой вариации. Пусть перемещение линии E описывается при помощи параметра a так, что однопараметрическое семейство линий $y=y(x, a)$ относит каждому значению a одно из возможных положений E. Пусть далее параметр t определяет положение точки на линии C, тогда абсцисса этой точки, а также параметр a становятся функциями t. Это дает возможность считать линии C и D заданными параметрическими уравнениями:

$$\text{линия } C\colon\ x=x_1(t), \qquad y=y(x_1(t),\ a(t))=y_1(t),$$
$$\text{линия } D\colon\ x=x_2(t), \qquad y=y(x_2(t),\ a(t))=y_2(t),$$
$$t_1\leqslant t\leqslant t_2.$$

На рассматриваемом однопараметрическом семействе линий $y=y(x, a)$ функционал (1.2.1) превращается в функцию t

$$J(E)=\Phi(t)=\int\limits_{x_1(t)}^{x_2(t)} F(x, y(x, a), y'(x, a))\,dx, \qquad (1.2.2)$$

откуда

$$\Phi'(t)=F(x, y(x, a), y'(x, a))\frac{dx}{dt}\Big|_{x_1}^{x_2}+\frac{da}{dt}\int_{x_1}^{x_2}\left(F_y y_a+F_{y'}y_a'\right)dx. \quad (1.2.3)$$

Если при $a=0$ (или a_0) линия E доставляет минимум функционалу (1.1.1), то она должна выдерживать сравнение на минимум с линиями, имеющими с ней общие концы, т. е. быть экстремалью. Поэтому

$$F_y y_a+F_{y'}y_a'=\frac{d}{dx}F_{y'}y_a+F_{y'}y_a'=\frac{d}{dx}(F_{y'}y_a),$$

$$\Phi'(t)=F(x, y(x, a), y'(x, a))\frac{dx}{dt}\Big|_{x_1}^{x_2}+$$
$$+F_{y'}(x, y(x, a), y'(x, a))\frac{\partial y}{\partial a}\Big|_{x_1}^{x_2}\frac{da}{dt},$$

и так как

$$\frac{dy}{dt}=y_x\frac{dx}{dt}+y_a\frac{da}{dt}, \qquad y_a\frac{da}{dt}=\frac{dy}{dt}-y'\frac{dx}{dt},$$

то

$$\Phi'(t)=F(x, y, y')\frac{dx}{dt}+F_{y'}\left(\frac{dy}{dt}-y'\frac{dx}{dt}\right)\Big|_{x_1}^{x_2}. \quad (1.2.4)$$

По определению

$$\delta J=d\Phi(t)=\Phi'(t)\,dt. \quad (1.2.5)$$

Тогда из (1.2.4) следует

$$\delta J=F(x, y, y')\,dx+F_{y'}(x, y, y')(dy-y'dx)\Big|_{x_1}^{x_2}; \quad (1.2.6)$$

здесь дифференциалы dx и dy вычисляются вдоль линий C и D, а y' — угловой коэффициент касательной к линии E.

Вывод см. Блисс [1].

1.2.3. Условие трансверсальности. Если линия E доставляет экстремум функционалу (1.2.1), то его первая вариация должна обращаться в нуль:

$$\delta J=0 \quad (1.2.7)$$

при любых dx_1 и dx_2, в частности, когда $dx_1=0$ и $dx_2\neq 0$, или $dx_1\neq 0$, $dx_2=0$.

Из (1.2.6) вытекают условия трансверсальности:

$$\left.\begin{aligned} &F(x_1, y_1, y_1')\,dx_1+F_{y'}(x_1, y_1, y_1')(dy_1-y_1'dx_1)=0,\\ &F(x_2, y_2, y_2')\,dx_2+F_{y'}(x_2, y_2, y_2')(dy_2-y_2'dx_2)=0.\end{aligned}\right\} \quad (1.2.8)$$

Если уравнение линии C есть $y=\varphi(x)$, то $\frac{dy_1}{dx_1}=\varphi'(x)$; аналогично, если уравнение линии D есть $y=\psi(x)$, то $\frac{dy_2}{dx_2}=\psi'(x)$ и

из условий (1.2.8) вытекают уравнения

$$\left.\begin{aligned} &F(x, y, y')+(\varphi'-y')\,F_{y'}(x, y, y')\,|_{(1)}=0,\\ &F(x, y, y')+(\psi'-y')\,F_{y'}(x, y, y')\,|_{(2)}=0. \end{aligned}\right\} \qquad (1.2.9)$$

Если линия C задана уравнением $\omega_1(x, y)=0$, а линия D — уравнением $\omega_2(x, y)=0$, то условия трансверсальности (1.2.8) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{F-y'F_{y'}}{\omega_{1x}}=\frac{F_{y'}}{\omega_{1y}} \text{ — на левом конце экстремали,}\\ &\frac{F-y'F_{y'}}{\omega_{2x}}=\frac{F_{y'}}{\omega_{2y}} \text{ — на правом конце экстремали.} \end{aligned}\right\} \qquad (1.2.10)$$

Если перемещение концов экстремали не обусловлено какими-либо ограничениями, то на обоих концах экстремали выполняются условия

$$F=0, \qquad F_{y'}=0. \qquad (1.2.11)$$

Уравнение Эйлера — Лагранжа есть дифференциальное уравнение второго порядка, его общее решение зависит от двух произвольных постоянных, которые определяются из условий трансверсальности.

1.2.4. Трансверсальность и ортогональность. Трансверсальность есть обобщение понятия ортогональности. Это показывает

Пример 1.2.1. Найти кратчайшее расстояние от точки $A(a, a_1)$ до линии $L: y=\varphi(x)$ (рис. 1.2.2). Исследуем функционал

$$J=\int \sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

экстремали которого суть прямые. Условие трансверсальности

$$\sqrt{1+y'^2}+(\varphi'-y')\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=0$$

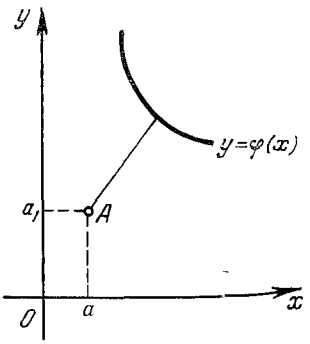

Рис. 1.2.2.

превращается в $1+y'\varphi'=0$, т. е. в условие ортогональности.

Аналогичное соотношение получается для функционала

$$\int A(x, y)\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

§ 3. Необходимые условия экстремума для функционала, зависящего от нескольких функций

1.3.1. Постановка задачи. Рассматривается функционал

$$J=\int_{x_1}^{x_2} F\left(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n'\right)dx, \qquad (1.3.1)$$

$$y_i(x_1)=y_{i1}, \qquad y_i(x_2)=y_{i2} \qquad (i=1, 2, \ldots, n), \qquad (1.3.2)$$

где y_{i1} и y_{i2} — заданные числа, а подынтегральная функция непрерывна и обладает непрерывными частными производными до третьего порядка включительно по всем аргументам. Требуется найти условия, которым удовлетворяет вектор-функция $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, доставляющая функционалу (1.3.1) экстремум при условиях (1.3.2).

В векторных обозначениях функционал (1.3.1) записывается виде

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\, dx.$$

1.3.2. Первое необходимое условие экстремума. Уравнения Эйлера — Лагранжа. Экстремали. Рассмотрения, аналогичные проведенным в пп. 1.1.1.—1.1.3, приводят к первому необходимому условию экстремума — обращению в нуль первой вариации, из которого вытекают уравнения Эйлера — Лагранжа сначала в интегральной форме, а затем в форме дифференциальных уравнений Эйлера — Лагранжа

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i'} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.3.3}$$

Гладкое решение системы (1.3.3) называют *экстремалью*.

Вывод см., например, Лаврентьев и Люстерник [1], [2], Ахиезер [1].

1.3.3. Условия Вейерштрасса — Эрдмана. Ломаные экстремали. Если $x = c$ есть абсцисса угловой точки решения уравнений (1.3.3), доставляющего экстремум функционалу, то должны выполняться условия Вейерштрасса — Эрдмана

$$F - \sum_{i=1}^{n} y_i' F_{y_i'}\Big|_{x=c-0} = F - \sum_{i=1}^{n} y_i' F_{y_i'}\Big|_{x=c+0}, \tag{1.3.4}$$

$$F_{y_i'}\Big|_{x=c-0} = F_{y_i'}\Big|_{x=c+0}. \tag{1.3.5}$$

Они получаются тем же путем, что и в 1.1.6.

Если вектор-функция, доставляющая минимум функционалу (1.3.1), состоит из кусков экстремалей, причем в точках стыка этих кусков выполняются условия Вейерштрасса — Эрдмана, то она называется *ломаной экстремалью*.

Вывод см. Ахиезер [1], Блисс [1].

1.3.4. Второе необходимое условие экстремума — условие Лежандра. Так же, как и в 1.1.7, устанавливается условие минимума (максимума), выражающееся в неотрицательности (неположительности) второй вариации $\delta^2 J$ рассматриваемого функционала.

Из этого условия вытекает необходимое условие Лежандра — неотрицательность (неположительность) квадратичной формы

$$\sum_{i,j} F_{y_i' y_j'} \eta_i \eta_j \tag{1.3.6}$$

в каждой точке экстремали в случае минимума (максимума). В алгебре доказывается (см. также Лаврентьев и Люстерник [2], ч. I), что для неотрицательности формы (1.3.6) должны выполняться неравенства

$$F_{y_1'y_1'} \geqslant 0, \quad \begin{vmatrix} F_{y_1'y_1'} & F_{y_1'y_2'} \\ F_{y_2'y_1'} & F_{y_2'y_2'} \end{vmatrix} \geqslant 0, \ldots, \begin{vmatrix} F_{y_1'y_1'} & F_{y_1'y_2'} & \ldots & F_{y_1'y_n'} \\ F_{y_2'y_1'} & F_{y_2'y_2'} & \ldots & F_{y_2'y_n'} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_{y_n'y_1'} & F_{y_n'y_2'} & \ldots & F_{y_n'y_n'} \end{vmatrix} \geqslant 0.$$

Необходимое условие Лежандра может быть получено из следующего ниже условия Вейерштрасса.

Определение регулярных или неособенных экстремалей (ср. п. 1.1.4) см. Блисс [1], Ахиезер [1].

1.3.5. Третье необходимое условие экстремума — условие Вейерштрасса. В каждой точке экстремали, доставляющей минимум (максимум) функционала (1.3.1), должна быть неотрицательной (неположительной) функция Вейерштрасса

$$E(x, y, y', k) = F(x, y, k) - F(x, y, y') - \\ - \sum_{i=1}^{n} (k_i - y_i') F_{y_i}(x, y, y'), \quad (1.3.7)$$

где k — произвольный конечный вектор.

Доказательство см. Блисс [1], Ахиезер [1].

1.3.6. Четвертое необходимое условие экстремума — условие Якоби. Так же, как и в 1.1.9 вводится понятие сопряженной точки. Именно, *системой дифференциальных уравнений Якоби* называют систему уравнений Эйлера — Лагранжа функционала $\delta^2 J$.

Точка c называется *сопряженной* с точкой a, если существует решение системы Якоби, обращающееся в нуль при $x = a$ и $x = c$ и не равное тождественно нулю между a и c.

Если вектор-функция y доставляет минимум функционалу (1.3.1), то интервал (x_1, x_2) не содержит точек, сопряженных с точкой $x = x_1$.

Подробно см. Блисс [1], Гельфанд и Фомин [1].

1.3.7. Условие трансверсальности. Первая вариация функционала

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n') \, dx \quad (1.3.8)$$

с подвижными концами в случае, если $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — экстремаль, имеет вид

$$\delta J=\left(F-\sum_{i=1}^{n} y_i' F_{y_i'}\right) dx+\sum_{i=1}^{n} F_{y_i'} dy_i \Bigg|_{x_1}^{x_2} \tag{1.3.9}$$

ср. (1.2.6).

Отсюда, как и в п. 1.2.3, на концах экстремали должны выполняться условия трансверсальности

$$\left(F-\sum_{i=1}^{n} y_i' F_{y_i'}\right) dx+\sum_{i=1}^{n} F_{y_i'} dy_i=0. \tag{1.3.10}$$

Если, например, конец $x=x_1$ фиксирован, а второй конец расположен на гиперповерхности $\varphi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)=0$, то условие (1.3.10) означает, что вектор $\left\{F-\sum_{i=1}^{n} y_i' F_{y_i'}, F_{y_1'}, F_{y_2'}, \ldots, F_{y_n'}\right\}$ ортогонален вектору $\{dx, dy_1, \ldots, dy_n\}$ и, следовательно, коллинеарен градиенту функции $\varphi(x, y_1, \ldots, y_n)$. Это дает следующую форму условия трансверсальности:

$$\frac{F-\sum_{i=1}^{n} y_i' F_{y_i'}}{\varphi_x}=\frac{F_{y_1'}}{\varphi_{y_1}}=\ldots=\frac{F_{y_n'}}{\varphi_{y_n}} \tag{1.3.11}$$

(ср. (1.2.10)).

§ 4. Необходимые условия экстремума функционала, содержащего производные высших порядков

1.4.1. Постановка задачи. Исследуется функционал

$$J(y)=\int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})\, dx, \tag{1.4.1}$$

рассматриваемый на функциях класса $C_n[x_1, x_2]$, удовлетворяющих условиям на концах:

$$\begin{aligned} y^{(i)}(x_1)&=A_i, \\ y^{(i)}(x_2)&=B_i \end{aligned} \qquad (i=0, 1, \ldots, n-1). \tag{1.4.2}$$

Требуется найти условия, которым удовлетворяет функция, доставляющая минимум (максимум) функционалу (1.4.1).

Предполагается, что функция F обладает непрерывными по совокупности всех своих аргументов производными до $(n+1)$-го порядка включительно.

1.4.2. Первое необходимое условие экстремума. Дифференциальное уравнение Эйлера — Пуассона. Экстремали. Если $y=y(x)$ доставляет экстремум функционалу (1.4.1), то включение ее в однопараметрическое семейство

$$\tilde{y}=y(x)+\alpha\eta(x),$$

где $\eta(x)$ — произвольная функция, $\eta(x)\in C_n[x_1, x_2]$, $\eta^{(i)}(x_1)=\eta^{(i)}(x_2)=0$ $(i=0, 1, \ldots, n-1)$, приводит к выражению для первой вариации

$$\delta J=\alpha\int_{x_1}^{x_2}\{F_y\eta+F_{y'}\eta'+F_{y''}\eta''+\ldots+F_{y^{(n)}}\eta^{(n)}\}\,dx. \qquad (1.4.3)$$

Необходимое условие минимума — обращение в нуль первой вариации

$$\delta J=0. \qquad (1.4.4)$$

Посредством интегрирования по частям правой части (1.4.3) можно получить, учитывая (1.4.4) в случае, если $y(x)$ имеет производную порядка $2n$, *дифференциальное уравнение Эйлера — Пуассона*

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}-\frac{d^3}{dx^3}F_{y'''}+\ldots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}=0, \qquad (1.4.5)$$

являющееся обобщением уравнения Эйлера — Лагранжа.

Общее решение уравнения (1.4.5) содержит $2n$ произвольных постоянных. Используя граничные условия (1.4.2), эти постоянные можно определить в предположении существования искомой линии.

Вывод уравнения Эйлера — Пуассона в интегральной форме и получение из него уравнения (1.4.5) см. Ахиезер [1], Гюнтер [1].

1.4.3. Случаи понижения порядка уравнения Эйлера — Пуассона. а) Если F не зависит от y, $F_y=0$, то уравнение Эйлера — Пуассона принимает вид

$$-\frac{d}{dx}F_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}+\ldots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}=0,$$

откуда, после интегрирования,

$$F_{y'}-\frac{d}{dx}F_{y''}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}F_{y^{(n)}}=C.$$

б) Если F не зависит от x, то, считая x функцией от y, можно привести рассматриваемый функционал к виду

$$\int_{y_0}^{y_1}\Phi(y, x', x'', \ldots, x^{(n)})\,dy$$

и тогда (см. случай а))

$$\Phi_{x'}-\frac{d}{dy}\Phi_{x''}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}}\Phi_{x^{(n)}}=C.$$

1.4.4. Сведение рассматриваемой задачи к задаче на условный экстремум. Дальнейшие необходимые условия. Если в (1.4.1) положить

$$y' = z_1, \quad y'' = z_1' = z_2, \; y''' = z_2' = z_3, \; \ldots, \; y^{(n)} = (z_{n-1})' = z_n,$$

то задача, сформулированная в п. 1.4.1, примет следующий вид:

Найти условия, которым удовлетворяет вектор-функция $(y, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1})$, доставляющая минимум функционалу

$$J = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, z_{n-1}')\, dx,$$

при дифференциальных условиях

$$y' = z_1, \quad z_1' = z_2, \quad \ldots, \quad z_{n-2}' = z_{n-1}$$

и граничных условиях

$$y(x_1) = A_0, \quad z_1(x_1) = A_1, \quad \ldots, \quad z_{n-1}(x_1) = A_{n-1},$$
$$y(x_2) = B_0, \quad z_1(x_2) = B_1, \quad \ldots, \quad z_{n-1}(x_2) = B_{n-1}.$$

Так сформулированная задача есть *задача Лагранжа* на условный экстремум (см. § 11 этой главы).

Дальнейшие необходимые условия экстремума см. в § 11, посвященной условному экстремуму.

1.4.5. Условие трансверсальности. Задача о минимизации функционала

$$J = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})\, dx,$$

когда за класс линий сравнения принимаются линии, концы которых удовлетворяют соотношениям

$$\varphi(x_1, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}) = 0, \quad \psi(x_2, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(n-1)}) = 0,$$

сводится к общей вариационной задаче на условный экстремум. Можно, однако, решить ее по схеме, примененной в п. 1.3.7, что кратко показано в следующем примере.

Пример 1.4.1. Вывести условия трансверсальности для функционала

$$J = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y', y'')\, dx \tag{1.4.6}$$

при условиях

$$\varphi(x_1, y_1, y_1') = 0, \qquad \psi(x_2, y_2, y_2') = 0, \tag{1.4.7}$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_1'} \neq 0, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial y_2'} \neq 0.$$

Пусть функция $y = y(x)$ доставляет решение поставленной задачи, тогда она удовлетворяет уравнению Эйлера — Пуассона. Если ее включить в семей-

ство экстремалей, однозначно определяемых величинами x_1, y_1, y_1', x_2, y_2, y_2', то на этом семействе данный функционал превращается в функцию переменных x_1, y_1, y_1', x_2, y_2, y_2', а вариация функционала — в дифференциал последней функции:

$$dJ=\left\{\left[F-y'\left(F_{y'}-\frac{d}{dx}F_{y''}\right)-y''F_{y''}\right]dx+\left(F_{y'}-\frac{d}{dx}F_{y''}\right)dy+F_{y''}dy'\right\}_{(1)}^{(2)}. \quad (1\ 4\ 8)$$

Первоначальная задача принимает следующий вид.

Найти минимум (максимум) функции

$$J=J\ (x_1, y_1, y_1', x_2, y_2, y_2')$$

при условиях (1 4 7) Согласно правилу множителей Лагранжа, существуют такие постоянные λ_1 и λ_2, что для любых значений дифференциалов

$$d\ [J+\lambda_1\varphi\ (x_1, y_1, y_1')+\lambda_2\psi\ (x_2, y_2, y_2')]=0 \quad (1\ 4.9)$$

Из (1 4 8) и (1 4 9) следуют условия трансверсальности:

$$\left.\begin{aligned}\frac{F-y'\left(F_{y'}-\frac{d}{dx}F_{y''}\right)-y''F_{y''}\Big|_{(1)}}{\varphi_{x_1}}&=\frac{F_{y'}-\frac{d}{dx}F_{y''}\Big|_{(1)}}{\varphi_{y'}}=\frac{F_{y''}|_{(1)}}{\varphi_{y_1'}},\\ \frac{F-y'\left(F_{y'}-\frac{d}{dx}F_{y''}\right)-y''F_{y''}\Big|_{(2)}}{\psi_{x_2}}&=\frac{F_{y'}-\frac{d}{dx}F_{y''}\Big|_{(2)}}{\psi_{y_2}}=\frac{F_{y''}|_{(2)}}{\psi_{y_2'}}.\end{aligned}\right\} \quad (1\ 4\ 10)$$

Условия (1 4 7) и (1 4 10) позволяют определить неизвестные величины x_1, y_1, y_1', x_2, y_2, y_2', определяющие концы искомой экстремали.

В случае, когда функционал (1 4 6) рассматривается на множестве линий, соединяющих две данные точки $A\ (x_1, y_1)$ и $B\ (x_2, y_2)$, для определения постоянных в общем решении уравнения Эйлера—Пуассона служат условия

$$y\ (x_1)=y_1, \qquad y\ (x_2)=y_2, \qquad F_{y''}\,|_{x_1}=0, \qquad F_{y''}\,|_{x_2}=0.$$

Об условиях трансверсальности в рассматриваемых задачах см Гюнтер [1], Лаврентьев и Люстерник [1]

§ 5. Вариационные задачи в параметрической форме

1.5.1. Параметрическое задание линий. Во многих задачах большие удобства, а иногда единственную возможность рассмотрения представляет параметрическое задание линий. При этом следует иметь в виду, что каждая линия допускает бесчисленное множество параметрических представлений.

Пример 1.5 1. Уравнения эллипса

$$x=a\cos t, \qquad y=b\sin t \qquad (-\pi\leqslant t\leqslant\pi). \quad (1.5\ 1)$$

Этот же эллипс может быть задан уравнениями

$$x=\frac{a\ (1-z^2)}{1+z^2}, \qquad y=\frac{2bz}{1+z^2} \qquad (-\infty<z<+\infty) \quad (1\ 5\ 2)$$

Уравнения (1 5 2) получаются из (1 5 1) посредством преобразования $t=2\ \mathrm{arctg}\ z$, устанавливающего взаимно однозначную связь между z и t Кроме того, благодаря монотонности возрастания функции $t=2\ \mathrm{arctg}\ z$ при возрастании обоих параметров линия проходится в одном и том же направлении.

Ниже рассматриваются линии, задаваемые уравнениями

$$x=\varphi(t), \qquad y=\psi(t), \qquad t_1 \leqslant t \leqslant t_2, \tag{1.5.3}$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — непрерывные функции с кусочно-непрерывными производными, не обращающимися в нуль одновременно: $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t) \neq 0$. При этом t возрастает, когда точка (x, y) пробегает линию в заданном направлении.

При переходе от параметризации (1.5.3) к другой параметризации посредством преобразования $t=\chi(\tau)$ будем считать, что $\chi(\tau)$ обладает непрерывной производной, причем $\chi'(\tau)>0$. Тогда, при возрастании параметра, в любой параметризации точка (x, y) пробегает линии в одном и том же направлении.

1.5.2. Функционалы от линий. Сильные и слабые окрестности. Пусть дан функционал

$$J_C=\int\limits_C F(t, x, y, \dot{x}, \dot{y})\,dt=\int\limits_{t_1}^{t_2} F(t, x, y, \dot{x}, \dot{y})\,dt. \tag{1.5.4}$$

Здесь

$$\dot{x}=\frac{dx}{dt}, \qquad \dot{y}=\frac{dy}{dt}.$$

Для того чтобы функционал (1.5.4) зависел от линии, а не от ее параметризации, подынтегральная функция не должна зависеть от параметра явным образом и должна быть положительно однородной первой степени по второй паре аргументов:

$$F(x, y, k\dot{x}, k\dot{y})=kF(x, y, \dot{x}, \dot{y}), \qquad k>0. \tag{1.5.5}$$

Дифференцируя (1.5.5) по k и полагая затем $k=1$, получим

$$F_{\dot{x}}(x, y, \dot{x}, \dot{y})\,\dot{x}+F_{\dot{y}}(x, y, \dot{x}, \dot{y})\,\dot{y}=F(x, y, \dot{x}, \dot{y}). \tag{1.5.6}$$

Дифференцируя (1.5.6) по $\dot{x}$ и по $\dot{y}$, получим

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}F_{\dot{x}\dot{x}}+\dot{y}F_{\dot{x}\dot{y}}=0,\\ \dot{x}F_{\dot{x}\dot{y}}+\dot{y}F_{\dot{y}\dot{y}}=0,\end{aligned}\right\} \tag{1.5.7}$$

что дает

$$\frac{F_{\dot{x}\dot{x}}}{\dot{y}^2}=\frac{F_{\dot{x}\dot{y}}}{-\dot{x}\dot{y}}=\frac{F_{\dot{y}\dot{y}}}{\dot{x}^2}, \tag{1.5.8}$$

откуда

$$F_{\dot{x}\dot{x}}=\dot{y}^2F_1, \quad F_{\dot{x}\dot{y}}=-\dot{x}\dot{y}F_1, \quad F_{\dot{y}\dot{y}}=\dot{x}^2F_1, \tag{1.5.9}$$

где F_1 — общее значение отношений (1.5.8).

О свойствах, которым должна удовлетворять подынтегральная функция в (1.5.4), см. Ахиезер [1], Блисс [1].

Сильной ε-окрестностью линии γ_0 называется множество линий γ таких, что между всеми точками γ_0 и γ можно установить взаимно

однозначное и взаимно непрерывное соответствие так, чтобы расстояние между соответствующими точками не превосходило ε.

Слабой ε-окрестностью линии γ_0 называется множество линий γ таких, что между всеми точками γ_0 и γ можно установить взаимно однозначное и взаимно непрерывное соответствие так, чтобы расстояние между соответствующими точками и угол между касательными $\left(\text{меньший } \frac{\pi}{2}\right)$ к γ и γ_0, проведенными в соответствующих друг другу точках, не превосходили ε. Определение сильной и слабой ε-окрестностей дает возможность дать классификацию экстремумов, как и на стр. 10.

1.5.3. Первое необходимое условие экстремума. Уравнения Эйлера — Лагранжа. Если линия $\overline{C}$: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, дает функционалу J_C экстремум в классе линий C, идущих из заданной точки (a_1, b_1) в заданную точку (a_2, b_2), то они удовлетворяют уравнениям

$$\left.\begin{aligned} F_{\dot{x}} - \int_{t_1}^{t} F_x\,dt = A, \\ F_{\dot{y}} - \int_{t_1}^{t} F_y\,dt = B, \end{aligned}\right\} \tag{1.5.10}$$

где A и B — константы.

Это — уравнения Эйлера — Лагранжа в интегральной форме. В дифференциальной форме они имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt} F_{\dot{x}} - F_x = 0, \\ \frac{d}{dt} F_{\dot{y}} - F_y = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1.5.11}$$

Одно из этих уравнений есть следствие другого. Это следует из того, что

$$\left.\begin{aligned} F_x - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}} = (\dot{x}F_{x\dot{x}} + \dot{y}F_{x\dot{y}}) - (\dot{x}F_{x\dot{x}} + \dot{y}F_{y\dot{x}} + \\ + \ddot{x}F_{\ddot{x}\dot{x}} + \ddot{y}F_{\ddot{x}\dot{y}}) = \dot{y}\,[F_{x\dot{y}} - F_{\dot{x}y} - F_1(\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y})], \\ F_y - \frac{d}{dt} F_{\dot{y}} = -\dot{x}\,[F_{x\dot{y}} - F_{\dot{x}y} - F_1(\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y})]. \end{aligned}\right\} \tag{1.5.12}$$

1.5.4. Вейерштрассова форма уравнений Эйлера — Лагранжа. Экстремали. Из уравнений (1.5.12) получается вейерштрассова форма уравнений Эйлера — Лагранжа

$$F_{x\dot{y}} - F_{\dot{x}y} - F_1(\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}) = 0, \tag{1.5.13}$$

или, учитывая, что радиус кривизны r выражается для параметрически заданной линии формулой

$$\frac{1}{r}=\frac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}},$$

получим

$$\frac{1}{r}=\frac{F_{x\dot{y}}-F_{y\dot{x}}}{F_1(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}. \qquad (1.5.14)$$

Вейерштрассова форма уравнения Эйлера—Лагранжа остается инвариантной по отношению к преобразованию параметра.

Теорию Вейерштрасса параметрических задач вариационного исчисления см: Гурса [1], Блисс [1].

1.5.5. Условия Вейерштрасса — Эрдмана. Если в качестве параметра взята длина дуги, то

$$\dot{x}=\frac{dx}{ds}=\cos\vartheta, \qquad \dot{y}=\frac{dy}{ds}=\sin\vartheta,$$

где ϑ — угол между касательной к кривой и осью Ox. При этом на каждом гладком куске минимизирующей (максимизирующей) линии

$$\frac{d}{ds}F_{\dot{x}}-F_x=0, \qquad \frac{d}{ds}F_{\dot{y}}-F_y=0, \qquad (1.5.15)$$

а в каждой угловой точке $s=s_0$ выполняются условия Вейерштрасса — Эрдмана

$$F_{\dot{x}}\Big|_{s=s_0-0}^{s=s_0+0}=0, \qquad F_{\dot{y}}\Big|_{s=s_0-0}^{s=s_0+0}=0. \qquad (1.5.16)$$

Гладкое решение уравнений (1.5.15) называют *экстремалью*. Условия (1.5.16) получаются из интегральной формы уравнения Эйлера—Лагранжа.

1.5.6. Второе необходимое условие экстремума (аналог условия Лежандра). Вторая вариация в рассматриваемой задаче имеет вид

$$\delta^2 J=\alpha^2\int_{t_0}^{t_1}\left[F_1\left(\frac{dw}{dt}\right)^2+F_2w^2\right]dt, \qquad (1.5.17)$$

где $w=\dot{y}\delta\dot{x}-\dot{x}\delta\dot{y}$, а F_2 — непрерывная функция параметра. Формула (1.5.17) принадлежит Вейерштрассу. Из нее вытекает необходимое условие минимума (если $\delta^2 J\geqslant 0$)

$$F_1\geqslant 0$$

и необходимое условие максимума (из $\delta^2 J \leqslant 0$) —

$$F_1 \leqslant 0.$$

Вывод формулы (1.5.17) см. Гурса [1].

1.5.7. Третье необходимое условие экстремума — условие Вейерштрасса. Функция Вейерштрасса $E(x, y; p, q; p', q')$ определяется как

$$E(x, y; p, q; p', q') = F(x, y; p', q') - p' F_{\dot{x}}(x, y; p, q) - \\ - q' F_{\dot{y}}(x, y; p, q). \quad (1.5.18)$$

В силу однородности функции F формулу (1.5.18) можно записать в следующих видах:

$$E(x, y; p, q; p', q') = F(x, y; p', q') - F(x, y, p, q) - \\ - (p' - p) F_{\dot{x}}(x, y, p, q) - (q' - q) F_{\dot{y}}(x, y, p, q), \quad (1.5.19)$$

$$E(x, y; p, q; p', q') = p' [F_{\dot{x}}(x, y, p', q') - F_{\dot{x}}(x, y, p, q)] + \\ + q' [F_{\dot{y}}(x, y, p', q') - F_{\dot{y}}(x, y, p, q)]. \quad (1.5.20)$$

В этих обозначениях необходимое условие Вейерштрасса в случае минимума заключается в выполнении неравенства

$$E(x, y; \cos\vartheta, \sin\vartheta; \cos\vartheta', \sin\vartheta') \geqslant 0 \quad (1.5.21)$$

вдоль дуги, доставляющей минимум, при любых значениях угла ϑ'. В случае максимума должно выполняться условие

$$E(x, y; \cos\vartheta, \sin\vartheta; \cos\vartheta', \sin\vartheta') \leqslant 0. \quad (1.5.22)$$

Здесь $\cos\vartheta$, $\sin\vartheta$ — направляющие косинусы положительного направления касательной к экстремали.

Имеет место формула Вейерштрасса

$$E(x, y; \cos\vartheta, \sin\vartheta; \cos\vartheta', \sin\vartheta') = \\ = [1 - \cos(\vartheta' - \vartheta)] F_1(x, y; \cos\vartheta_1, \sin\vartheta_1), \quad (1.5.23)$$

где $\vartheta < \vartheta_1 < \vartheta'$.

Из формул (1.5.21)—(1.5.23) вытекают условия Лежандра.

1.5.8. Четвертое необходимое условие экстремума — условие Якоби. *Уравнением Якоби* для функционала (1.5.4) называется уравнение Эйлера—Лагранжа для функционала (1.5.17):

$$\frac{d}{dt}\left(F_1 \frac{du}{dt}\right) - F_2 u = 0. \quad (1.5.24)$$

Сопряженной точкой t_0' к точке t_0 называется такая точка, в которой обращается в нуль решение уравнения (1.5.24) и $u(t)$, для которого $u(t_0) = 0$. При этом предполагается, что $u(t) \neq 0$ для $t_0 < t < t_0'$.

Условие Якоби заключается в том, что линия, доставляющая экстремум функционалу (1.5.4), не содержит точек, сопряженных с точкой t_0.

Подробное изложение см. Блисс [1], Гурса [1].

1.5.9. Условия трансверсальности. Если рассматривается функционал

$$J_C = \int_C F(x, y, \dot{x}, \dot{y})\, dx$$

на совокупности линий, один из концов (при $t = t_2$) которых фиксирован, а другой скользит по гладкой линии L: $x = \varphi(\tau)$, $y = \psi(\tau)$, $\varphi'^2(\tau) + \psi'^2(\tau) \neq 0$, $\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$, то для линии $\overline{C}$: $x = x(t)$, $y = y(t)$, доставляющей экстремум этому функционалу, во-первых, выполняются уравнения Эйлера—Лагранжа, и, во-вторых, выполняется условие трансверсальности

$$F_{\dot{x}}\, \varphi'(\tau) + F_{\dot{y}}\, \psi'(\tau) \Big|_{t=t_1} = 0. \qquad (1.5.25)$$

Если координаты начальной точки $\overline{C}$ суть (x_1, y_1), а их дифференциалы вдоль $\overline{C}$ суть dx_1, dy_1, а вдоль L суть δx_1, δy_1, то условие (1.5.25) принимает вид

$$F_{\dot{x}}(x_1, y_1, dx_1, dy_1)\, \delta x_1 + F_{\dot{y}}(x_1, y_1, dx_1, dy_1)\, \delta y_1 = 0. \qquad (1.5.26)$$

Если оба конца линии C подвижны, то на обоих концах выполняются условия трансверсальности в форме (1.5.25) или (1.5.26).

См., например, Ахиезер [1].

Пример 1.5.2. Исследовать функционал

$$\int_{(0,\,0)}^{(x,\,y)} y^2 y'^2\, dx$$

при условии, что правый конец линий сравнения скользит по прямой $y = \frac{1}{2}(3 - x)$.

Так как возможны экстремали, которые пересекаются прямыми, параллельными оси Oy более, чем в одной точке, то перейдем к рассмотрению этой задачи в параметрической форме. Исследуемый функционал принимает вид

$$\int_{(0,\,0)}^{(x,\,y)} y^2 \frac{\dot{y}^2}{\dot{x}^2}\, dt, \qquad \dot{x} = \frac{dx}{dt}, \qquad \dot{y} = \frac{dy}{dt}.$$

Из первого уравнения (1.5.11) следует, что

$$\frac{d}{dt}\left(y^2 \frac{\dot{y}^2}{\dot{x}^2}\right) = 0,$$

откуда

$$y^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = p^2 \qquad \left(\text{или же } y^2 = p^2 \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right)$$

После интегрирования последнего уравнения получаем для экстремалей уравнение

$$y^2=2px+C,$$

причем из условия прохождения экстремалей через начало координат следует, что $C=0$.

Экстремали суть параболы $y^2=2px$.

Запишем уравнение прямой $y=\frac{1}{2}(3-x)$ в виде $x=\tau$, $y=\frac{1}{2}(3-\tau)$. Тогда из (1.5.25) следует

$$-\frac{y^2\dot{y}^2}{\dot{x}^2}+y^2\frac{2\dot{y}}{\dot{x}}\left(-\frac{1}{2}\right)\Bigg|_{(x_1,\,y_1)}=0$$

или

$$y^2y'+y^2y'^2\Big|_{(x_1,\,y_1)}=0$$

и, учитывая, что

$$yy'=p,$$

имеем

$$p\,(p+y_1)=0,$$

откуда вытекает, что либо $p=0$, либо $p=-y_1$. Если $p=0$, то из $y^2=2px$ следует $y_1=0$ и, значит, $x_1=3$. В этом случае функционал имеет стационарное значение, равное нулю, и принимает его на отрезке оси Ox, соединяющем точки $(0, 0)$ и $(3, 0)$.

Если же $p=-y_1$, то в силу уравнений $y_1^2=2(-y_1)x_1$ и $y_1=\frac{1}{2}(3-x_1)$, $x_1=-1$, $y_1=2$ функционал принимает на дуге параболы, соединяющей точки $(0, 0)$ и $(-1, 2)$, стационарное значение -4 («правый» конец оказался левее начала координат).

§ 6. Разрывные задачи. Односторонние экстремумы

1.6.1. Разрывные задачи первого рода для простейшего функционала. Простейшие функционалы — это функционалы вида

$$J=\int_{x_1}^{x_2}F(x,\ y,\ y')\,dx.$$

В задачах первого рода разыскиваются ломаные экстремали, при этом функция $F(x, y, y')$ непрерывна и обладает непрерывными частными производными до некоторого порядка по всем аргументам.

Пример 1 6.1. Выяснить, имеются ли ломаные экстремали в задаче на экстремум

$$\int_0^2(y'^4-6y'^2)\,dx,\quad y(0)=0,\quad y(2)=0.$$

Подынтегральная функция $F=y'^4-6y'^2$ не содержит y, $F_y=0$. Экстремали — прямые $y=Cx+C_1$. Если угловая точка имеется и ее абсцисса $x=x_0$, то ломаная экстремаль имеет вид:

$0\leqslant x\leqslant x_0$, $y=m_1x$ (экстремаль проходит через точку $(0, 0)$),

$x_0\leqslant x\leqslant 2$, $y=m_2(x-2)$ (экстремаль проходит через точку $(2, 0)$).

В угловой точке экстремаль непрерывна

$$m_1 x_0 = m_2 (x_0 - 2).$$

(Ясно, что $m_1 \neq m_2$ в случае, если угловая точка имеется.) Условие Вейерштрасса – Эрдмана (1.1.15) дает

$$4m_1^3 - 12m_1 = 4m_2^3 - 12m_2 \quad \text{или} \quad (m_1 - m_2)\left(m_1^2 + m_1 m_2 + m_2^2 - 3\right) = 0.$$

Условие Вейерштрасса – Эрдмана (1.1.16) дает

$$-3m_1^4 + 6m_1^2 = -3m_2^4 + 6m_2^2 \quad \text{или} \quad \left(m_1^2 - m_2^2\right)\left(m_1^2 + m_2^2 - 2\right) = 0.$$

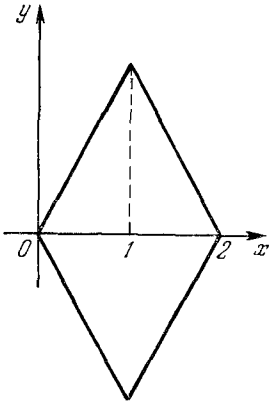

Рис. 1.6.1.

Значения m_1 и m_2 находятся из систем уравнений (на $m_1 - m_2 \neq 0$ полученные равенства сокращены):

1) $$m_1 + m_2 = 0,$$
$$m_1^2 + m_1 m_2 + m_2^2 - 3 = 0,$$

откуда $m_1 = \sqrt{3}$, $m_2 = -\sqrt{3}$ или $m_1 = -\sqrt{3}$, $m_2 = \sqrt{3}$.

2) $$m_1^2 + m_2^2 + m_1 m_2 = 3,$$
$$m_1^2 + m_2^2 - 2 = 0,$$

откуда $m_1 = m_2 = 1$, что исключено.

Таким образом, абсцисса угловой точки возможной ломаной экстремали находится из формулы

$$x_0 = \frac{2m_2}{m_2 - m_1} = 1.$$

Возможные ломаные экстремали суть (рис. 1.6.1)

$$y = \begin{cases} \sqrt{3}\,x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ -\sqrt{3}\,(x-2), & 1 \leqslant x \leqslant 2, \end{cases}$$

и

$$y = \begin{cases} -\sqrt{3}\,x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \sqrt{3}\,(x-2), & 1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$$

1.6.2. Разрывные задачи второго рода. В этих задачах предполагается разрывной подынтегральная функция функционала

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,dx.$$

Если, например, $F(x, y, y')$ претерпевает разрыв вдоль линии $y = \Phi(x)$, то в случае существования минимизирующей ломаной экстремали последняя состоит из кусков экстремалей, имеющих общую точку $(x_0, \Phi(x_0))$, $x_1 < x_0 < x_2$.

Если $F(x, y, y')$ соответственно равна $F_1(x, y, y')$ и $F_2(x, y, y')$ по одну и по другую стороны линии $y=\Phi(x)$, то

$$J(y)=\int_{x_1}^{x_0} F_1(x, y, y')\,dx+\int_{x_0}^{x_2} F_2(x, y, y')\,dx=J_1(y)+J_2(y), \quad (1.6.1)$$

и варьирование данного функционала приведется к варьированию функционалов $J_1(y)$ и $J_2(y)$, причем линии сравнения первого из них имеют подвижным правый конец, а линии сравнения второго имеют подвижным левый конец. Из (1.6.1) следует, что

$$\delta J=[F_1+(\Phi'-y')F_{1y'}]_{x=x_0-0}\,\delta x_0-[F_2+(\Phi'-y')F_{2y'}]_{x=x_0+0}\delta x_0. \quad (1.6.2)$$

Необходимое условие экстремума: $\delta J(y)=0$, имеет своим следствием равенство

$$F_1+(\Phi'-y')F_{1y'}\big|_{x=x_0-0}=F_2+(\Phi'-y')F_{2y'}\big|_{x=x_0+0}. \quad (1.6.3)$$

Пример 1.6.2. Для функционала

$$J(y)=\int_a^b A(x, y)\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

условие (1.6.3) дает

$$A_1(x, y)\frac{1+\Phi'y'}{\sqrt{1+y'^2}}\Bigg|_{x=x_0-0}=A_2(x, y)\frac{1+\Phi'y'}{\sqrt{1+y'^2}}\Bigg|_{x=x_0+0} \quad (1.6.4)$$

Если α — угол между касательной к кривой $y=\Phi(x)$ и осью абсцисс, а углы наклона к оси абсцисс левой и правой касательных к экстремали в точке $(x_0, \Phi(x_0))$ суть β_1 и β_2, то

$$y'\big|_{x_0-0}=\operatorname{tg}\beta_1, \quad y'\big|_{x_0+0}=\operatorname{tg}\beta_2, \quad \Phi'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha.$$

Тогда из условия (1.6.4) получим

$$\frac{\cos(\alpha-\beta_1)}{\cos(\alpha-\beta_2)}=\frac{A_2(x, y)}{A_1(x, y)}.$$

Если $y=\Phi(x)$ — линия раздела двух оптических сред, в которых свет распространяется соответственно с скоростями $v_1=\frac{1}{A_1(x, y)}$ и $v_2=\frac{1}{A_2(x, y)}$, то последнее равенство выражает обобщение закона преломления света (Снелляуса).

1.6.3. Разрывные задачи для функционала, зависящего от нескольких функций. Если

$$F(x, y, y')\equiv F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')$$

непрерывна по всем аргументам и имеет частные производные до третьего порядка, то при существовании ломаных экстремалей в в угловых точках должны выполняться условия Вейерштрасса—Эрдмана ($i=1, 2, \ldots, n$):

$$\frac{\partial F}{\partial y_i'}\Bigg|_{x_0-0}=\frac{\partial F}{\partial y_i'}\Bigg|_{x_0+0} \quad (1.6.5)$$

и

$$F-\sum_{i=1}^{n} y_i' \frac{\partial F}{\partial y_i'}\bigg|_{x_0-0} = F-\sum_{i=1}^{n} y_i' \frac{\partial F}{\partial y_i'}\bigg|_{x_0+0}. \tag{1.6.6}$$

Если $F(x, y, y')$ имеет разный вид по разные стороны поверхности $\Phi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)=0$ и

$$J(y)=\int_{x_1}^{x_0} F_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')\,dx+$$

$$+\int_{x_0}^{x_2} F_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')\,dx,$$

$$\Phi(x_0, y_1(x_0), y_2(x_0), \ldots, y_n(x_0))\equiv 0,$$

то из $\delta J(y)=0$ следуют условия

$$\frac{\left[F_1-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F_1}{\partial y_i'}y_i'\right]_{x_0-0}-\left[F_2-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F_2}{\partial y_i'}y_i'\right]_{x_0+0}}{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_{x_0}}=\ldots$$

$$\ldots=\frac{\frac{\partial F_1}{\partial y_i'}\bigg|_{x_0-0}-\frac{\partial F_2}{\partial y_i'}\bigg|_{x_0+0}}{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y_i}\right)_{x_0}}. \tag{1.6.7}$$

См. Гюнтер [1].

1.6.4. Односторонние вариации. Ищется экстремум функционала

$$J(y)=\int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,dx, \quad y(x_1)=a_1, \quad y(x_2)=b_1, \tag{1.6.8}$$

при условии

$$y-\varphi(x)\geqslant 0 \ (\text{или } y-\varphi(x)\leqslant 0). \tag{1.6.9}$$

Ограничивающие условия могут быть более сложного вида. В этом случае экстремаль может состоять из кусков, лежащих в указанной области, для которых удовлетворяется уравнение Эйлера—Лагранжа, и кусков границы данной области: $y=\varphi(x)$. В точках стыка указанных кусков экстремаль может быть гладкой, но может и иметь угловые точки.

Полагая, что $y=y(x)$ доставляет минимум $J(y)$, и принимая

$$\left.\begin{aligned}&\bar{y}(x,\ \alpha)=y+\alpha\eta,\ \ \eta(x_1)=\eta(x_2)=0,\\&\eta(x)\geqslant 0,\ 0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_0,\\&\bar{y}(x,\ \ 0)=y(x),\end{aligned}\right\}\qquad(1.6.10)$$

получим, что функционал (1.6.8) превращается в

$$J(\bar{y})=\int_{x_1}^{x_2}F(x,\ \bar{y},\ \bar{y}')\,dx=\Phi(\alpha),\qquad \Phi(0)=J(y).\qquad(1.6.11)$$

Имеем

$$\Phi(\alpha)-\Phi(0)\geqslant 0,\qquad 0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_0,\qquad(1.6.12)$$

и, следовательно,

$$\Phi'(0)\geqslant 0,\qquad(1.6.13)$$

откуда обычными рассуждениями получаем, что

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\geqslant 0.\qquad(1.6.14)$$

Условие в точке стыка имеет вид

$$[F(x,\ y,\ y')-F(x,\ y,\ \varphi')-(\varphi'-y')F_{y'}(x,\ y,\ y')]_{x=x_0}=0.\qquad(1.6.15)$$

Это следует из того, что вариация данного функционала

$$\delta J=\delta\int_{x_1}^{x_0}F(x,\ y,\ y')\,dx+\delta\int_{x_0}^{x_2}F(x,\ y,\ y')\,dx=\delta J_1+\delta J_2=$$

$$=[F+(\varphi'-y')F_{y'}]_{x_0}\delta x_0-\int_{x_0}^{x_0+\delta x_0}F(x,\ \varphi(x),\ \varphi'(x))\,dx=$$

$$=[F(x,\ y,\ y')-F(x,\ \varphi(x),\ \varphi'(x))+(\varphi'-y')F_{y'}]_{x_0}\delta x_0.$$

Здесь имеется в виду, что для $x_1\leqslant x\leqslant x_0$ линия $y=y(x)$ лежит в указанной области и вариации δJ_1 сводятся к рассмотрению линий сравнений с подвижным правым концом, а при вычислении δJ_2 левый конец движется по линии $y=\varphi(x)$.

Из условия (1.6.15) следует, что если $F_{y'y'}\neq 0$, то куски экстремали в точке стыка (на линии $y=\varphi(x)$) имеют общую касательную.

В настоящее время появляется много исследований вариационных задач с ограничениями в форме неравенств. См., например, Беллман, Гликсберг, Гросс [1].

Пример. 1.6.3 Найти кратчайший путь из точки $A(-2,\ 3)$ в точку $B(2,\ 3)$, расположенный в области $y\leqslant x^2$ (рис. 1.6 2).

Исследуемый функционал

$$J(y)=\int_{-2}^{2}\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

Его экстремали суть прямые $y=mx+n$. В данном случае

$$F_{y'y'}=\left(\sqrt{1+y'^2}\right)_{y'y'}=\frac{1}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\neq 0.$$

и поэтому линия, доставляющая минимум, должна состоять из кусков пря мых, касательных к параболе $y=x$ и куска этой параболы

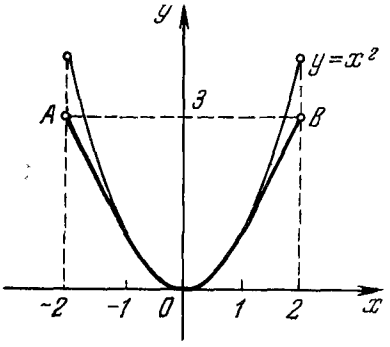

Рис. 1.6.2.

Пусть точки касания, а их две вследствие симметричности задачи имеют абсциссы $x=x_0$ и $x=-x_0$.

Имеем в точке касания равен ство ординат и равенство угловы коэффициентов, т. е. обозначив уг ловой коэффициент касательной точке x_0 через k_1, имеем $k_1=(x^2)'_{x_0}$ $=2x_0$, $mx_0+n=x_0^2$, $m=2x_0$, откуд $x_0^2+n=0$. С другой стороны, к сательная проходит через точк (2, 3), следовательно,

$$3=2m+n \text{ или } 3=4x_0+n.$$

Таким образом, $x_0^2-4x_0+3=0$ интересующее нас значение ест $x_0=1$ $(-2<x_0<2)$. Тогда $k_1=2$ Аналогичные рассуждения пр водят к заключению, что линия, подозреваемая на экстремум, есть

$$y=\begin{cases}-2x-1, & -2\leqslant x\leqslant -1,\\ x^2, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ 2x-1, & 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$$

Этой задаче можно дать обобщенную постановку: найти кратчайшее ра стояние между точками A и B, если эти точки разделены каким-либо пр пятствием.

§ 7. Канонические уравнения. Теория Гамильтона — Якоби

1.7.1. Каноническая или гамильтонова форма уравнений Эйлер

Уравнение Эйлера—Лагранжа для функционала

$$J=\int_a^b F(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n,\ y_1',\ y_2',\ \ldots,\ y_n')\,dx \qquad (1.7$$

имеют вид

$$\frac{d}{dx}F_{y_i'}-F_{y_i}=0. \qquad (1.7$$

Если матрица $\|F_{y_i'y_k'}\|$ $(i,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ неособенная, то уравнений

$$F_{y_i'}=p_i \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \qquad (1.7$$

можно выразить y_i' через $x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n,\ p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n$:

$$y_i'=\varphi_i(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n,\ p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n). \qquad (1.7$$

Гамильтонианом H для функционала (1.7.1) называется функция H от $x, y_1, y_2, \ldots, y_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$

$$H(x, y, p) = [-F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') + \sum_{i=1}^{n} y_i' F_{y_i'}(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')], \qquad (1.7.5)$$

де $y_i' = \varphi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, p_1, p_2, \ldots, p_n)$. Для гамильтониана меют место соотношения, получающиеся дифференцированием,

$$\left.\begin{aligned} \frac{H}{y_i} &= -\frac{\partial F}{\partial y_i}, \\ \frac{H}{p_i} &= \varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) \end{aligned}\right\} (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (1.7.6)$$

то дает

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp_i}{dx} &= -\frac{\partial H}{\partial y_i}, \\ \frac{dy_i}{dx} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \end{aligned}\right\} (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (1.7.7)$$

Уравнения (1.7.7) называются *канонической* или *гамильтоновой системой* уравнений Эйлера—Лагранжа, при этом переменные $y_1, y_2, \ldots, y_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ называются *каноническими переменными*. Они были введены Якоби (1842—1843 г.) и Гамильтоном (1834—1835 г.). Однако уже Лагранж использовал дифференциальные уравнения в канонической форме.

Пример 1.7.1 Написать каноническую систему уравнений Эйлера для функционала

$$J = \int \sqrt{x^2 + y^2}\, \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

Имеем

$$p = F_{y'} = \frac{y' \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{1 + y'^2}}, \quad y'^2 = \frac{p^2}{x^2 + y^2 - p^2},$$

$$H = -F + y' F_{y'} \Big|_{y' = \frac{p}{\sqrt{x^2 + y^2 - p^2}}} = -\sqrt{x^2 + y^2 - p^2}.$$

Искомая система

$$\frac{dp}{dx} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 - p^2}}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{p}{\sqrt{x^2 + y^2 - p^2}}.$$

Из (1.7.5) следует, что формула для вариации функционала (1.7.1) может быть записана в виде (см. формулу (1.3.9))

$$\delta J = -H dx + \sum_{i=1}^{n} p_i dy_i \Big|_{x_1}^{x_2}. \qquad (1.7.8)$$

Условия трансверсальности (см. (1.3.10)) на концах линии, дост-ляющей экстремум, имеют вид

$$-Hdx+\sum_{i=1}^{n} p_i dy_i=0. \qquad (1.7$$

1.7.2. Первые интегралы канонической системы. Вдоль экстр-мали

$$\frac{dH}{dx}=\frac{\partial H}{\partial x}, \qquad (1.7.$$

и если $\frac{\partial H}{\partial x}=0$, т. е. H не зависит от x (значит, и F не зависи от x), то

$$H=\text{const}. \qquad (1.7.1$$

Функция, сохраняющая постоянное значение вдоль каждой и-тегральной линии заданной системы дифференциальных уравнени называется *первым интегралом* этой системы.

Таким образом, $H=\text{const}$ есть первый интеграл каноническ системы уравнений Эйлера—Лагранжа.

Если дана некоторая функция $\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_n, p_1, p_2, \ldots, p$ то вдоль экстремали

$$\frac{d\Phi}{dx}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y_i}\frac{dy_i}{dx}+\frac{\partial\Phi}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dx}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial\Phi}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial y_i}\right). \qquad (1.7.$$

Выражение, стоящее в правой части (1.7.12), называется *скобк Пуассона* и обозначается символом $[\Phi, H]$. При этом обозначен

$$\frac{d\Phi}{dx}=[\Phi, H]. \qquad (1.7.$$

Для того чтобы функция $\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_n, p_1, p_2, \ldots, p_n)$ бы первым интегралом канонической системы уравнений Эйлера Лагранжа, необходимо и достаточно, чтобы

$$[\Phi, H]\equiv 0. \qquad (1.7.$$

Если не только H, но и Φ зависит от x явно, имеет место ф мула

$$\frac{d\Phi}{dx}=\frac{\partial\Phi}{\partial x}+[\Phi, H]. \qquad (1.7.$$

1.7.3. Теорема Э. Нётер. Пусть дано семейство обратим преобразований, зависящее от параметра α:

$$\left.\begin{aligned} x^*&=\varphi_0(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, \alpha),\\ y_i^*&=\varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, \alpha) \qquad (i=1, 2, \ldots, n)\end{aligned}\right\} \qquad (1.7.$$

где функции φ_0 и φ_i дифференцируемы, причем значению $\alpha=0$ соответствует тождественное преобразование

$$\varphi_0(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, 0)=x,$$
$$\varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, 0)=y_i.$$

Функционал

$$J(y)=\int_a^b F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')\,dx,$$

рассматриваемый на линии L: $y_i=y_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, называется *инвариантным* относительно преобразования $x^*=\varphi_0(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, \alpha_0)$, $y_i^*=\varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, \alpha_0)$, переводящего линию L в линию L^*: $y_i^*=y_i^*(x^*)$, если

$$\int_a^b F\left(x, y_1, \ldots, y_n, \frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{dy_n}{dx}\right)dx=$$
$$=\int_{a^*}^{b^*} F\left(x^*, y_1^*, \ldots, y_n^*, \frac{dy_1^*}{dx^*}, \ldots, \frac{dy_n^*}{dx^*}\right)dx.$$

Каждому преобразованию (1.7.16), оставляющему рассматриваемый интеграл инвариантным, соответствует некоторый первый интеграл канонической системы уравнений Эйлера—Лагранжа (*теорема Э. Нётер*).

Пример 1.7.2. Если в функционале

$$\int_a^b F(x, y, y')\,dx$$

F не зависит от x, то функционал инвариантен относительно преобразования

$$x^*=x+\alpha,$$
$$y^*=y.$$

Следовательно, должен существовать первый интеграл канонической системы, соответствующий указанному преобразованию. Этим первым интегралом является $H=\text{const}$.

По поводу теорем Э. Нётер см. Курант и Гильберт [1], т. I, Гельфанд и Фомин [1], а также в книге Полака [1].

1.7.4. Уравнение Гамильтона — Якоби. Теорема Якоби. Каноническая система (1.7.7) является системой уравнений Эйлера—Лагранжа для функционала

$$J=\int_{x_1}^{x_2}\left[\sum_{i=1}^{n} p_i y_i' - H(x, y_1, \ldots, y_n, p_1, p_2, \ldots, p_n)\right]dx, \quad (1.7.17)$$

если y_i, p_i рассматривать как неизвестные функции. Вариац этого функционала

$$\delta J = -H\,dx + \sum_{i=1}^{n} p_i dy_i \Big|_{x_1}^{x_2}, \tag{1.7.1}$$

и при фиксированном x_1, опуская индекс 2,

$$\delta J = -H\,dx + \sum_{i=1}^{n} p_i\,dy_i, \tag{1.7.19}$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial x} &= -H(x, y, p), \\ \frac{\partial J}{\partial y_i} &= p_i \quad (i=1, 2, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \tag{1.7.20}$$

Путем исключения p_i в (1.7.20) получается уравнение в час ных производных первого порядка, называемое *уравнением Гамил тона—Якоби*:

$$\frac{\partial J}{\partial x} + H\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, \frac{\partial J}{\partial y_1}, \frac{\partial J}{\partial y_2}, \ldots, \frac{\partial J}{\partial y_n}\right) = 0. \tag{1.7.21}$$

Полным интегралом уравнения в частных производных пер вого порядка называется его решение, содержащее столько пр извольных постоянных, каково число независимых переменных

Для уравнения Гамильтона—Якоби, учитывая то, что оно н содержит неизвестной функции (а содержит только ее частны производные), полный интеграл можно взять в виде

$$V = V(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, a_1, a_2, \ldots, a_n) + a, \tag{1.7.22}$$

где a, a_1, a_2, ..., a_n—произвольные постоянные.

Предполагается, что V непрерывно дифференцируема по пар метрам a_i и каждая частная производная $\frac{\partial V}{\partial a_i}$, $\frac{\partial V}{\partial y_i}$ $(i=1, 2, \ldots,$ непрерывно дифференцируема по всем аргументам.

При дополнительном предположении о том, что определител

$$\left|\frac{\partial^2 V}{\partial y_i \partial a_n}\right| \neq 0, \tag{1.7.23}$$

имеет место *теорема Якоби*:

Если известен полный интеграл V уравнения Гамильтона-Якоби, то равенства

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial a_k} &= b_k, \\ \frac{\partial V}{\partial y_k} &= p_k, \end{aligned}\right\} \tag{1.7.24}$$

где a_k, b_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ — произвольные постоянные, дают решение канонической системы (1.7.7), зависящее от $2n$ произвольных постоянных.

Пример 1.7.3. Найти экстремали функционала

$$\int \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Гамильтониан

$$H=-\sqrt{x^2+y^2-p^2};$$

следовательно, уравнение Гамильтона—Якоби имеет вид

$$\frac{\partial J}{\partial x}=-\sqrt{x^2+y^2-\left(\frac{\partial J}{\partial y}\right)^2}$$

или

$$\left(\frac{\partial J}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial J}{\partial y}\right)^2=x^2+y^2. \tag{1.7.25}$$

Решение можно искать в виде

$$J=\frac{1}{2}(Ax^2+2Bxy+Cy^2). \tag{1.7.26}$$

Подстановка решения (1.7.26) в уравнение (1.7.25) дает

$$A^2+B^2=1, \quad B(A+C)=0, \quad B^2+C^2=1.$$

Полагая

$$A=-C=\sin\beta, \quad B=-\cos\beta,$$

получим решение уравнения (1 7.25) в виде

$$J=\frac{1}{2}(x^2\sin\beta-2xy\cos\beta-y^2\sin\beta).$$

Общий интеграл уравнения Эйлера—Лагранжа, в силу теоремы Якоби,

$$\frac{\partial J}{\partial\beta}=\mathrm{const}=\frac{1}{2}\alpha$$

или

$$x^2\cos\beta+2xy\sin\beta-y^2\cos\beta=\alpha.$$

По поводу вышеприведенной теории см. Гантмахер [1], а также Уиттекер [1].

1.7.5. Канонические преобразования. Если преобразования

$$\left.\begin{aligned} Y_i&=Y_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, p_1, p_2, \ldots, p_n),\\ P_i&=P_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, p_1, p_2, \ldots, p_n),\end{aligned}\right\} \quad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{1.7.27}$$

преобразуют каноническую систему (1.7.7) в каноническую систему

$$\frac{dY_i}{dx}=\frac{\partial H}{\partial P_i}, \qquad \frac{dP_i}{dx}=-\frac{\partial H}{\partial Y_i} \qquad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{1.7.28}$$

с новым гамильтонианом

$$\tilde{H}=\tilde{H}(x, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, P_1, P_2, \ldots, P_n),$$

то преобразование (1.7.27) называется *каноническим*.

Уравнения (1.7.28) являются уравнениями Эйлера—Лагранж для функционала

$$\int_a^b -\tilde{H}\,dx+\sum_{i=1}^n P_i\,dY_i. \qquad (1.7.29)$$

Вариационная задача для функционала (1.7.29) эквивалентн вариационной задаче для функционала

$$\int_a^b -H\,dx+\sum_{i=1}^n p_i\,dy_i$$

тогда и только тогда, когда подынтегральные выражения эти функционалов отличаются на полный дифференциал некоторо функции

$$\sum_{i=1}^n p_i\,dy_i-H\,dx=\sum_{i=1}^n P_i\,dY_i-\bar{H}\,dx+d\Phi(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n,\ p_1,\ \ldots,\ p_n) \qquad (1.7.30)$$

В этом случае функция $\Phi(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n,\ p_1,\ \ldots,\ p_n)$ называетс *производящей функцией* данного канонического преобразования Из (1.7.30) следует, что

$$p_i=\frac{\partial\Phi}{\partial y_i},\qquad P_i=-\frac{\partial\Phi}{\partial Y_i},\qquad \tilde{H}=H+\frac{\partial\Phi}{\partial x}. \qquad (1.7.31)$$

§ 8. Некоторые сведения из теории поля экстремалей

1.8.1. Геодезическое расстояние и его производные. Значени интеграла

$$J(y)=\int_{(A)}^{(B)} F(x,\ y,\ y')\,dx, \qquad (1.8.1)$$

где $y=\{y_1(x),\ \ldots,\ y_n(x)\}$, $y'=\{y_1'(x),\ \ldots,\ y_n'(x)\}$, взятог вдоль линии γ от точки A до точки B, называют *J-длин линии* γ.

Если γ—экстремаль, то $J(y)$ называют *геодезическим расстоя нием* между точками A и B, или же *J-расстоянием*, а саму экстремаль *J-прямой*.

Если точка A фиксирована, то для вариации функционал (1.8.1) имеет место формула (1.7.19), а для производных геодез ческого расстояния формулы (1.7.20). Из (1.7.21) следует, чт геодезическое расстояние, отсчитываемое от точки A, как функц координат переменной точки B, удовлетворяет уравнению Гамил тона—Якоби.

Если в $(n+1)$-мерном пространстве дана гиперповерхность S:

$$\varphi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)=0,$$

то *геодезическим расстоянием точки* B, лежащей вне S, *до* этой *поверхности*, называют геодезическое расстояние точки B до точки A, принадлежащей S, такое, что функционал (1.8.1) принимает стационарное значение ($\delta J=0$). Это значит, что функционал (1.8.1) вычисляется вдоль экстремали γ, соединяющей точки B и A, причем γ пересекает поверхность S в точке A трансверсально.

Геодезическое расстояние, отсчитываемое от поверхности S, также удовлетворяет уравнению Гамильтона—Якоби, а производные геодезического расстояния от поверхности S также находятся по формулам (1.7 20).

Пример 1 8.1 (см. 1.5 2). Пусть геодезическая длина и геодезическое расстояние определяются с помощью функционала

$$J(y)=\int y^2y'^2\,dx.$$

Геодезическое расстояние от точки $A(0,0)$ до точки $B(1,1)$ есть значение данного функционала на экстремали, соединяющей эти точки. Такой экстремалью является парабола $y^2=x$. В таком случае $2yy'=1$, $yy'=\frac{1}{2}$, $y^2y'^2=\frac{1}{4}$ и геодезическое расстояние между точками A и B

$$J(A, B)=\int_0^1 \frac{1}{4}\,dx=\frac{1}{4}.$$

Пример 1.5.2 показывает, что геодезическое расстояние начала координат от прямой $y=\frac{1}{2}(3-x)$ не определяется однозначно и, следовательно, не существует. Однако, если рассмотреть отрезок этой прямой, например, $-2\leqslant x\leqslant 2$, то геодезическое расстояние от начала координат до данной прямой равно -4.

Пример 1.8.2. Найти уравнения геодезических окружностей — линий, точки которых находятся на одинаковом геодезическом расстоянии от заданной точки, равном R.

Пусть этой точкой является начало координат (0, 0), а геодезическое расстояние измеряется посредством минимального значения функционала $\int y^2y'^2\,dx$ от начала координат до рассматриваемой точки.

Экстремали функционала пересекают геодезическую окружность трансверсально. Для экстремалей имеем $y^2=2px$, $yy'=p$ и, следовательно, $y'=\frac{y}{2x}$. Из условия трансверсальности $y^2y'(2\overline{y'}-y')=0$ вытекает, что угловой коэффициент касательной к геодезической окружности $\overline{y'}=\frac{y'}{2}$ и, значит, дифференциальное уравнение геодезической окружности есть $y'=\frac{y}{4x}$, откуда уравнение геодезической окружности есть $y^4=Cx$. Для нахождения величины C заметим, что на геодезической окружности $y^4=Cx$ лежит точка (C^3, C); уравнение геодезического радиуса, проходящего через эту точку, есть $y^2=\frac{1}{C}x$. Отсюда

$$yy'=\frac{1}{2C}, \quad \int_0^{C^3}(yy')^2\,dx=\frac{C}{4}=R$$

Следовательно, $C=4R$ и геодезическая окружность радиуса R с центром в начале координат имеет уравнение $y^4=4Rx$.

1.8.2. Поле экстремалей. Область D $(n+1)$-мерного пространства, покрытая просто (т. е. без пересечений) семейством экстремалей, трансверсальных некоторой поверхности, называется *собственным* (или *общим*) *полем экстремалей*.

Область D $(n+1)$-мерного пространства, покрытая просто семейством экстремалей, исходящих из одной точки, находящейся вне области D, называется *центральным полем экстремалей*.

Фигурирующие в обоих определениях семейства экстремалей являются n-параметрическими.

Имеет место теорема: Если $J(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ есть решение уравнения Гамильтона—Якоби, то существует поле экстремалей, трансверсальных по отношению ко всем поверхностям $J=\text{const}$ и, в частности, к начальной поверхности $J=0$. В этом случае J является геодезическим расстоянием от начальной поверхности в рассматриваемом поле экстремалей.

Если поле экстремалей имеет в качестве начальной трансверсальной поверхности S поверхность

$$\varphi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)=0,$$

то J — длины отрезков экстремалей, заключенных между поверхностями $\varphi=C_1$ и $\varphi=C_2$, — одинаковы.

Наклоном поля экстремалей функционала (1.8.1) называют вектор-функцию $U(x, y)=\{u_1(x, y), \ldots, u_n(x, y)\}$, относящую каждой точке $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ поля вектор $\{y_1'(x), y_2'(x), \ldots, y_n'(x)\}$.

1.8.3. Выражение геодезического расстояния между двумя точками через инвариантный интеграл Гильберта. В поле функционала (1.8.1) выражение

$$-H\,dx+\sum_{i=1}^{n} p_i\,dy_i, \tag{1.8.2}$$

где

$$\left.\begin{aligned} -H&=F(x, y, u(x, y))-\sum_{i=1}^{n} F_{y_i'}(x, y, u(x, y))\,u_i(x, y),\\ p_i&=F_{y_i'}(x, y, u(x, y)),\end{aligned}\right\} \tag{1.8.3}$$

является полным дифференциалом функции переменных $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$. Последнее устанавливается проверкой выполнения равенств

$$-\frac{\partial H}{\partial y_i}=\frac{\partial p_i(x, u(x, y))}{\partial x},$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial y_k}=\frac{\partial p_k}{\partial y_i} \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Функция, определяемая дифференциалом (1.8.2) с точностью до постоянного слагаемого, есть

$$\int_{(A)}^{(B)} -H(x, y, p)\,dx+\sum_{i=1}^{n} p_i\,dy_i \tag{1.8.4}$$

и называется *инвариантным интегралом Гильберта* (инвариантным, поскольку он не зависит от контура интегрирования, находящегося внутри поля). Этот интеграл был введен Гильбертом в вариационное исчисление в 1906 г. В силу формул, выражающих частные производные геодезического расстояния от начальной трансверсальной поверхности, с точностью до постоянного слагаемого, это геодезическое расстояние выражается инвариантным интегралом Гильберта. Так как геодезическое расстояние между точками A и B можно вычислять как расстояние от точки B до начальной трансверсальной поверхности S поля, то, предполагая для простоты, что точка A принадлежит S, из предыдущего следует

$$J(B)-J(A)=\int_{(A)}^{(B)} dJ=\int_{(A)}^{(B)} -H\,dx+\sum_{i=1}^{n} p_i\,dy_i=$$

$$=\int_{(A)}^{(B)}\left[F(x,\ y,\ u)-\sum_{i=1}^{n} u_i F_{y_i'}(x,\ y,\ u(x,\ y))\right]dx+$$

$$+\sum_{i=1}^{n} F_{y_i'}(x,\ y,\ u)\,dy_i=$$

$$=\int_{(A)}^{(B)}\left[F(x,\ y,\ u)+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{dy_i}{dx}-u_i\right)F_{y_i'}(x,\ y,\ u)\right]dx. \quad (1.8.5)$$

В формуле (1.8.5) выбор контура интегрирования не имеет значения, $\frac{dy_i}{dx}$ вычисляются вдоль выбранного контура.

Если точки A и B лежат на экстремали поля, то $\frac{dy_i}{dx}=u_i$ и из (1.8.5) получается введенное ранее выражение для геодезического расстояния между точками A и B. Теория поля в вариационном исчислении впервые была разработана Вейерштрассом. Геометрическая теория поля, основанная на использовании геодезического расстояния, впервые была дана Кнезером.

Изложение, данное выше, следует книге Куранта и Гильберта [1], т. II. Геометрическая теория поля развита в книге Лаврентьева и Люстерника [1].

1.8.4. Другие определения поля. Полем функционала (1.8.1) называется область D $(n+1)$-мерного пространства вместе с вектор-функцией

$$u(x,\ y)\{u_1(x,\ y),\ \ldots,\ u_n(x,\ y)\},$$

если в этой области D функции $u_i(x,\ y)$ имеют непрерывные частные производные первого порядка и интеграл Гильберта

$$\int_C\left[F(x,\ y,\ u)-\sum_{i=1}^{n} u_i F_{y_i'}(x,\ y,\ u)\right]dx+\sum_{i=1}^{n} F_{y_i'}(x,\ y,\ u)\,dy_i$$

не зависит от пути интегрирования C, а зависит лишь от начальной и конечной точки линии C.

Это определение поля принадлежит Блиссу (1914).

Для того чтобы n-параметрическое семейство экстремалей

$$y_i = \varphi_i(x, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.8.6}$$

образовывало поле в области D, необходимо и достаточно, чтобы тождественно равнялись нулю все скобки Лагранжа

$$[\beta_s, \beta_r] = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial y_i}{\partial \beta_s} \frac{\partial p_i}{\partial \beta_r} - \frac{\partial y_i}{\partial \beta_r} \frac{\partial p_i}{\partial \beta_s} \right) \equiv 0, \tag{1.8.7}$$

$$(s, r = 1, 2, \ldots, n);$$

здесь

$$p_i = F_{y_i'}.$$

n-параметрическое семейство экстремалей, для которого все скобки Лагранжа равны нулю, называют *майеровым семейством*. Они были введены Майером в 1905 г.

При $n = 1$ всякое однопараметрическое семейство экстремалей является майеровым.

Если все экстремали (1.8.6) выходят из одной точки, то такое семейство экстремалей майерово, а порождаемое им поле — центральное.

Теорию поля, развитую на основе данного выше определения, см. у Блисса [1] или Ахиезера [1].

Существенно иное определение поля дано Гельфандом и Фоминым [1].

1.8.5. Достаточные условия Лежандра и Якоби включения экстремали функционала $J(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')\,dx$ в поле. *Усиленным условием Лежандра* называется требование выполнения неравенств

$$F_{y_1' y_1'} > 0, \quad \begin{vmatrix} F_{y_1' y_1'} & F_{y_2' y_1'} \\ F_{y_1' y_2'} & F_{y_2' y_2'} \end{vmatrix} > 0, \ldots \begin{vmatrix} F_{y_1' y_1'} & F_{y_2' y_1'} & \ldots & F_{y_n' y_1'} \\ F_{y_1' y_2'} & F_{y_2' y_2'} & \ldots & F_{y_n' y_2'} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ F_{y_1' y_n'} & F_{y_2' y_n'} & \ldots & F_{y_n' y_n'} \end{vmatrix} > 0 \tag{1.8.8}$$

при $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, т. е. во всех точках рассматриваемой экстремали (ср. п. 1.3.4).

Усиленным условием Якоби называют требование того, чтобы отрезок $[x_1, x_2]$ не содержал точки, сопряженной с точкой x_1 (ср. п. 1.3.6).

Выполнение усиленных условий Лежандра и Якоби достаточно для включения экстремали в поле.

Для $n=1$ доказательство см. Лаврентьев и Люстерник [1], Ахиезер [1]. Общий случай см. Гельфанд и Фомин [1].

Если хотя бы в одной точке условие Лежандра не выполняется, то экстремаль не всегда может быть включена в поле.

Пример 1.8.3. Дан функционал

$$\int_{-1}^{1} (x^2y'^2+12y^2)\,dx, \quad y(-1)=-1, \quad y(1)=1.$$

Уравнение Эйлера – Лагранжа есть

$$24y-\frac{d}{dx}(2x^2y')=0 \text{ или } x^2y''+2xy'-12y=0,$$

общее решение полученного уравнения есть

$$y=C_1x^3+C_2x^{-4};$$

краевым условиям удовлетворяет экстремаль $y=x^3$, которую нельзя окружить полем, ибо единственным однопараметрическим семейством экстремалей, содержащих ее, является $y=\beta x^3$. Это семейство экстремалей не покрывает области, содержащей точку с абсциссой $x=0$.

В данном примере

$$F_{y'y'}=2x^2$$

и усиленное условие Лежандра не выполняется при $x=0$.

1.8.6. Построение полей экстремалей для некоторых вариационных задач с подвижными концами. Ниже указаны примеры полей, используемых при исследовании вариационных задач с подвижными концами.

Пример 1.8.4. Функционал

$$J(y)=\int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,dx, \quad y=\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}, \quad y'=\{y_1', y_2', \ldots, y_n'\},$$

левый конец фиксирован, правый конец линий сравнения перемещается по данной поверхности S.

Для изучения функционала рассматривается поле экстремалей, трансверсальных поверхности S (см. п. 1.8.2), включающее в себя линию, подозреваемую на экстремум.

Пример 1.8.5. Функционал тот же, что и в примере 1.8.4. Левый конец линий сравнения перемещается по поверхности S_1, правый – по поверхности S_2.

Если линия E подозревается на экстремум, то строится поле экстремалей, включающее E, трансверсальное к S_2. Обычно требуется, чтобы часть поверхности S_1, содержащая левый конец линии E, лежала бы внутри построенного поля.

Пример 1.8.6. Функционал тот же, что и в примере 1.8.4, концы фиксированы, линия E, подозреваемая на экстремум, имеет угловую точку $C(x_*, y_*)$.

Строится центральное поле с центром в левом конце линии E, и какое-нибудь нецентральное поле, содержащее правый конец линии E.

Трансверсальные поверхности этих полей соответственно $\theta_-(x, y)=\text{const}$, $\theta_+(x, y)=\text{const}$. Точка C лежит на поверхности $\theta_-(x, y)-\theta_+(x, y)=\theta_-(x_*, y_*)-\theta_+(x_*, y_*)$, отделяющей построенные поля. Таким образом, одна часть линии E принадлежит одному полю, а другая — второму полю, точка C лежит внутри обеих полей.

Пример 1.8.7. Исследуется функционал $J(y)=\int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,dx$ при ограничении $y-\varphi(x)\geqslant 0$. Линия E, подозреваемая на экстремум, состоит из куска экстремали AK_1, куска границы K_1K_2 $(y=\varphi(x))$ и куска экстремали K_2B; A и B — конечные точки линии E.

Для исследования данного функционала строится центральное поле с центром в A, причем K_1K_2 принимается в качестве границы построенного поля, после чего строится поле (правое) из экстремалей, касающихся границы. Обычно требуется, чтобы правое поле содержало внутри себя точку B.

Подробное построение указанных выше полей см. Гюнтер [1].

1.8.7. Определение поля для вариационных задач в параметрической форме. В соответствии с п. 1.8.4, полем функционала

$$J_C=\int_C F(x, y, \dot{x}, \dot{y})\,dt$$

называют всякую область D (принадлежащую области G плоскости x, y, в которой функция F трижды непрерывно дифференцируема), вместе с непрерывно дифференцируемой в D функцией $\theta=\theta(x, y)$, называемой *наклоном поля*, если в D интеграл Гильберта

$$\int_L F_{\dot{x}}(x, y, \cos\theta, \sin\theta)\,dx+F_{\dot{y}}(x, y, \cos\theta, \sin\theta)\,dy$$

не зависит от пути интегрирования L, а зависит лишь от его начальной и конечной точки.

Однопараметрическое семейство экстремалей

$$x=\varphi(t, \beta),\quad y=\psi(t, \beta),\qquad t_1\leqslant t\leqslant t_2,\qquad \beta_1\leqslant\beta\leqslant\beta_2,$$

просто покрывающее односвязную область D плоскости x, y, образует поле, если φ, ψ, $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$ непрерывно дифференцируемы в прямоугольной области $(t_1\leqslant t\leqslant t_2,\ \beta_1\leqslant\beta\leqslant\beta_2)$ и в этой области

$$\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(t, \beta)}\neq 0.$$

См. Ахиезер [1], Блисс [1], Лаврентьев и Люстерник [1].

§ 9. Достаточные условия экстремума

1.9.1. Достаточное условие Вейерштрасса. Если E — экстремаль, о которой предполагается, что она доставляет экстремум функционалу $J(y)$, то для выяснения характера этого экстремума исследуется знак приращения функционала

$$\Delta J=J(C)-J(E),$$

где C — линия сравнения, принадлежащая сильной или слабой окрестности E, или же принадлежит области определения J. Имеет место формула

$$\Delta J = \int_C E(x, y, u, y')\,dx, \tag{1.9.1}$$

где $E(x, y, u, y')$ есть функция Вейерштрасса

$$E(x, y, u, y') = F(x, y, y') - F(x, y, u) - \sum_{i=1}^{n} (y_i' - u_i) F_{y_i'}(x, y, u), \tag{1.9.2}$$

а $u(x, y)$ — наклон поля экстремалей функционала $J(y)$. Из (1.9.1) и (1.9.2) следует достаточное условие Вейерштрасса: если линия E, подозреваемая на экстремум, может быть окружена полем и в последнем для всех точек (x, y) и произвольных конечных значений y' функция Вейерштрасса неотрицательна (неположительна), то линия E доставляет функционалу

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,dx, \quad y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2,$$

сильный минимум (максимум).

Формула (1.9.2) получается посредством использования интеграла Гильберта:

$$\Delta J = J(C) - J(E) = \int_C F(x, y, y')\,dx -$$

$$- \int_C \left[F(x, y, u) + \sum_{i=1}^{n} (y_i' - u_i) F_{y_i'}(x, y, u) \right] dx = \int_C E(x, y, u, y')\,dx,$$

в предположении, что линия E окружена полем с наклоном $u(x, y)$.

Пример 1.9.1. Исследовать на экстремум функционал

$$J(y) = \int_0^b y'^3\,dx, \quad y(0) = 0, \quad y(b) = g > 0.$$

Уравнение Эйлера—Лагранжа $\frac{d}{dx} 3y'^2 = 0$, $y'^2 = \text{const}$, следовательно, экстремали прямые. Экстремаль, удовлетворяющая краевым условиям, есть $y = \frac{g}{b} x$. Условие Лежандра $F_{y'y'} = 6y' = 6\frac{g}{b} > 0$ на экстремали выполнено. Экстремаль включается в поле $y = \alpha x$, наклон которого $p = \frac{y}{x}$. В этом поле условие Якоби выполнено, ибо экстремали, кроме точки (0, 0), нигде не пересекаются. Функция Вейерштрасса имеет вид

$$E(x, y, p, y') = y'^3 - p^3 - 3p^2(y' - p) = (y' - p)^2 (y' + 2p).$$

Условие Вейерштрасса не выполняется, ибо можно так выбрать y', что функция Вейерштрасса будет принимать положительные и отрицательные значения. Сильного минимума нет, ибо функция Вейерштрасса не сохраняет знак в точках исследуемой экстремали. Однако слабый минимум имеется. См. пример 1.9.4.

Пример 1.9.2. Исследовать на экстремум функционал

$$J(y)=\int_1^2 (xy'^4-2yy'^3)\,dx,\quad y(1)=0,\ y(2)=1.$$

Уравнение Эйлера-Лагранжа $-2y'^3-\frac{d}{dx}(4xy'^3-6yy'^2)=0$ или $y'y''(y-xy')=0$ экстремали — прямые. Краевым условиям удовлетворяет экстремаль $y=x-1$.

Поле имеется, оно состоит из прямых, параллельных указанной экстремали. Можно показать, что достаточное условие Вейерштрасса выполняется. В наличии сильного минимума можно убедиться непосредственным подсчетом, а именно,

$$\Delta J=J(y+\omega)-J(y)=\int_1^2 \omega'^2\left\{x\omega'^2+2(1+x-\omega)\omega'+6(1-\omega)\right\}dx.$$

Так как $1\leqslant x\leqslant 2$, то

$$x\omega'^2+2(1+x-\omega)\omega'+6(1-\omega)<2\omega'^2+2(3-\omega)\omega'+6(1-\omega)=$$
$$=2\left\{\left(\omega'+\frac{3-\omega}{2}\right)^2+3(1-\omega)-\frac{(3-\omega)^2}{4}\right\}.$$

Последнее выражение будет положительным, если положительным будет выражение $3(1-\omega)-\frac{(3-\omega)^2}{4}$. Решая неравенство

$$3(1-\omega)-\frac{(3-\omega)^2}{4}>0,$$

находим, что оно выполняется при $-2\sqrt{3}-3\leqslant\omega\leqslant 2\sqrt{3}-3$ и, во всяком случае, при $|\omega|\leqslant\frac{1}{3}$.

Таким образом, $\Delta J=J(y+\omega)-J(y)$ при $|\omega|\leqslant\frac{1}{3}$ и наличие сильного минимума установлено.

Пример 1.9.3. Исследовать на экстремум функционал

$$\int_0^a (6y'^2-y'^4+yy')\,dx,\quad y(0)=0,\quad y(a)=b,\quad a>0,\quad b>0,$$

в классе C_1.

Экстремали — прямые $y=C_1x+C_2$. Краевым условиям удовлетворяет $y=\frac{b}{a}x$, эту экстремаль можно включить в поле $y=\frac{b}{a}x+\beta$.

Функция Вейерштрасса

$$E(x,y,y',p)=-(y'-p)^2\left[y'^2+2py'-(6-3p^2)\right].$$

Множитель, заключенный в квадратную скобку, обращается в нуль и может изменить знак лишь при переходе y' через значение $y'=-p\pm\sqrt{6-p^2}$. При $p\geqslant\sqrt{3}$ и любом y'

$$y'^2+2py'-(6-3p^2)\geqslant 0,$$

при $p < \sqrt{3}$ $y'^2 + 2py' - (6 - 3p^2)$ изменяет знак. При y', мало отличающихся от p, исследуемое выражение положительно при $p > 1$ и отрицательно при $p < 1$. Отсюда, при $p = \frac{b}{a} < 1$ или $b < a$, $E \leqq 0$, имеет место слабый минимум. При $p = \frac{b}{a} \geqslant \sqrt{3}$ имеет место сильный максимум При $p = \frac{b}{a} < \sqrt{3}$ иет ни сильного максимума, ни сильиого минимума.

1.9.2. Упрощенное достаточное условие сильного экстремума. Если функция $F(x, y, y')$ допускает разложение по формуле Тейлора при любом y'

$$F(x, y, y') = F(x, y, u) + \sum_{i=1}^{n} (y_i' - u_i) F_{y_i'}(x, y, u) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^{n} [y_i' - u_i][y_k' - u_k] F_{y_i' y_k'}(x, y, \tilde{u}),$$

$$\tilde{u} = u(x, y) + \theta [y'(x) - u(x, y)], \qquad 0 < \theta < 1,$$

то

$$E(x, y, u, y') = \frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^{n} [y_i' - u_i][y_k' - u_k] F_{y_i' y_k'}(x, y, \tilde{u}).$$

Отсюда: линия $y = y(x)$ доставляет функционалу

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\, dx, \qquad y(x_1) = y_1, \qquad y(x_2) = y_2,$$

сильный минимум (максимум), если она может быть окружена полем, в каждой точке которого квадратичная форма

$$\sum_{i, k=1}^{n} F_{y_i' y_k'} \eta_i \eta_k, \qquad F_{y_i' y_k'} = F_{y_k' y_i'}(x, y, v), \qquad -\infty < v < \infty,$$

положительно определенна.

Для случая $n = 1$ последнее означает, что в некоторой области, содержащей экстремаль, выполняется неравенство

$$F_{y'y'}(x, y, v) > 0, \qquad -\infty < v < \infty.$$

Можно показать, что упрощенное достаточное условие экстремума не является необходимым для сильного минимума.

См. Ахиезер [1], Дополнения 14 и 11.

1.9.3. Достаточные условия сильного экстремума в задачах с подвижными концами. Ниже рассматриваются варнационные задачи, указанные в примерах 1.8.4 – 1.8.7.

1. Функционал

$$J(y)=\int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,dx, \quad y=\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}, \quad y'=\{y_1', y_2', \ldots, y_n'\},$$

левый конец фиксирован, правый конец перемещается по поверхности S.

Линия E, подозреваемая на экстремум, включается в поле, как указано в примере 1.8.4.

Для того чтобы линия E давала сильный минимум (максимум) данному функционалу, достаточно, чтобы функция Вейерштрасса построенного поля была неотрицательной (неположительной).

2. Тот же функционал, оба конца подвижны. Линия E, подозреваемая на экстремум, включается в поле, как указано в примере 1.8.5. Наклон поля $-u(x, y)$.

Для того чтобы линия E давала сильный минимум данному функционалу, достаточно, чтобы функция Вейерштрасса была неотрицательной и трансверсальная поверхность, проходящая через левый конец E, касалась поверхности S изнутри, если $F(x, y, u(x, y)) < 0$ (извне — если $F(x, y, u(x, y)) > 0$).

3. Функционал и задача примера 1.8.6. Левому полю соответствует функция Вейерштрасса E_-, правому полю — E_+.

Для того чтобы линия E, подозреваемая на экстремум и имеющая угловую точку C, давала сильный минимум, достаточно, чтобы точка лежала как внутри центрального поля, исходящего из точки A, так и внутри поля, содержащего точку B, и чтобы функции Вейерштрасса были неотрицательны, каждая в своем поле.

4. Функционал и задача примера 1.8.7.

Для того чтобы линия E, подозреваемая на экстремум, давала сильный минимум в задаче на односторонний экстремум, достаточно, чтобы точка стыка экстремали с границей лежала внутри левого поля, точка B — внутри правого поля и для обеих полей функции Вейерштрасса были неотрицательны.

Подробное изложение вопроса см. Гюнтер [1].

1.9.4. Достаточные условия слабого экстремума функционала, зависящего от нескольких функций. Рассмотрим функционал

$$J(y)=\int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,dx, \qquad y(x_1)=y_1, \qquad y(x_2)=y_2.$$

Если экстремаль $y=y(x)$ можно окружить полем и если квадратичная форма

$$\sum_{i, k=1}^{n} F_{y_i' y_k'}(x, y(x), y'(x))\,\eta_i \eta_k$$

положительно определенная при $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, то экстремаль дает слабый минимум.

При $n=1$ последнее условие имеет вид

$$F_{y'y'}(x, y, y') > 0, \qquad x_1 \leqslant x \leqslant x_2$$

(неравенство выполняется в точках экстремали).

Учитывая сказанное в п. 1.8.5, можно утверждать, что экстремаль доставляет минимум, если вдоль нее выполняется усиленное условие Лежандра и замкнутый интервал $[x_1, x_2]$ не содержит значений, сопряженных с x_1.

Пример 1.9.4 (см. пример 1.9.1). Исследовать на экстремум функционал

$$J(y) = \int_0^b y'^3\,dx, \qquad y(0) = 0, \qquad y(b) = g > 0.$$

Исходя из сказанного выше, а также из результатов примера 1.9.1, можно заключить, что функционал достигает минимума на экстремали $y = \frac{g}{b}x$.

Пример 1.9.5. Исследовать на экстремум функционал

$$\int_0^1 (y'^2 - yy'^3)\,dx, \qquad y(0) = 0, \qquad y(1) = 0.$$

Уравнение Эйлера – Лагранжа

$$2y'^3 - (2 - 6yy')\,y'' = 0.$$

Ему удовлетворяет прямая $y=0$. На прямой $y=0$

$$F_{y'y'} = 2 - 6yy' \Big|_{y=0} = 2 > 0.$$

Уравнение Якоби, учитывая, что на линии $y=0$ имеем $F_{yy}=0$, $F_{yy'}=0$, дает

$$\eta'' = 0,$$

откуда

$$\eta = Ax + B.$$

Так как $\eta(0)=0$, то $\eta = Ax$ и ясно, что условие Якоби выполняется, ибо, кроме $x=0$, нет точек, в которых было бы $\eta=0$. Таким образом, прямая $y=0$ доставляет данному функционалу слабый минимум.

Применяя функцию Вейерштрасса, можно показать, что сильного экстремума данный функционал не имеет.

1.9.5. Достаточные условия экстремума для вариационных задач в параметрической форме. Пусть L: $x = x(s)$, $y = y(s)$, $s_1 \leqslant s \leqslant s_2$ — экстремаль функционала

$$J_C = \int_{t_1}^{t_2} F(x, y, \dot{x}, \dot{y})\,dt.$$

1°. Если L можно окружить полем с наклоном $\theta(x, y)$, внутри которого функция Вейерштрасса

$$E(x, y, \theta(x, y), \varphi)$$

неотрицательна (неположительна) для любого значения φ, то L доставляет функционалу J_C сильный минимум (максимум).

2°. Если L можно окружить полем и для всех ее точек при любом значении

$$F_1(x(s), y(s), \cos\varphi, \sin\varphi) > 0 \qquad (< 0),$$

то L доставляет функционалу J_C сильный минимум (максимум).

3°. Если на L имеет место неравенство

$$F_1(x(s), y(s), x'(s), y'(s)) > 0 \qquad (< 0), \qquad s_1 \leqslant s \leqslant s_2,$$

т. е. выполняется усиленное условие Лежандра в форме Вейерштрасса, то L доставляет функционалу J_C слабый минимум.

О достаточных условиях экстремума для вариационных задач в параметрической форме см. Блисс [1].

§ 10. Вариационные задачи с частными производными

1.10.1. Первое необходимое условие. Уравнение Эйлера—Остроградского. Рассматривается интеграл

$$J(u)=\iint\limits_D F(x, y, u, u_x, u_y)\,dx\,dy, \tag{1.10.1}$$

где $F(x, y, u, p, q)$ дважды непрерывно дифференцируема по совокупности своих аргументов для любых конечных p, q, когда точка (x, y, u) принадлежит заданной пространственной области G. В этой области G дана некоторая непрерывная замкнутая пространственная линия L, различным точкам которой соответствуют различные проекции на плоскость x, y. Проекция этой линии на плоскость x, y есть кусочно-гладкая линия l, ограничивающая область D. Требуется найти функцию $u(x, y)$, непрерывную вместе со своими частными производными первого порядка в области D, имеющую заданные значения на контуре в этой области и дающую экстремум этому функционалу.

Если функция $u=u(x, y)$ доставляет экстремум функционалу (1.10.1), то из варьирования этого функционала на семействе функций сравнения

$$\bar{u}=u(x, y)+\alpha\eta(x, y), \qquad \eta(x, y)|_l=0,$$

следует

$$\delta J=J'(0)\,\alpha=\alpha\iint\limits_D (F_u\eta+F_{u_x}\eta_x+F_{u_y}\eta_y)\,dx\,dy. \tag{1.10.2}$$

В предположении, что $u(x, y)$ имеет непрерывные производные второго порядка, применение к (1.10.2) формулы Грина—Остроградского дает

$$\delta J=\int\limits_l \delta u\,(F_{u_x}dy-F_{u_y}dx)+\iint\limits_D\left(F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}\right)\delta u\,dx\,dy, \tag{1.10.3}$$

где $\delta u=\alpha\eta(x, y)$, а l—контур области D.

Из условия $\eta(x, y)|_l=0$ и (1.10.3) вытекает первое необходимое условие

$$\delta J=\iint\limits_D\left(F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}\right)\delta u\,dx\,dy=0 \tag{1.10.4}$$

и, наконец, уравнение Эйлера—Остроградского

$$F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} = 0, \tag{1.10.5}$$

которому должна удовлетворять функция $u = u(x, y)$, доставляющая экстремум функционалу (1.10.1).

Имя Остроградского присвоено последнему уравнению в связи с его важным мемуаром 1834 г., посвященным вариационному исчислению кратных интегралов.

Пример 1.10.1. Дан функционал (*интеграл Дирихле*)

$$\iint\limits_D (u_x^2 + u_y^2)\, dx\, dy.$$

Уравнением Эйлера—Остроградского для него является

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

так называемое *уравнение Лапласа*.

По поводу возможности построения функций сравнения для рассмотренной вариационной задачи см. Ахиезер [1], Дополнения, 23.

Общая постановка вариационной задачи для n-кратного интеграла содержится у Лаврентьева и Люстерника [1], а также у Гельфанда и Фомина [1].

1.10.2. Инвариантность уравнения Эйлера — Остроградского. Если в функционале

$$\iint\limits_D F(x, y, u, u_x, u_y)\, dx\, dy$$

произвести замену переменных $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$, где написанные функции имеют непрерывные частные производные и $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \neq 0$, то экстремали получающегося при этом функционала получаются из экстремалей данного функционала посредством указанной замены переменных.

Можно одновременно преобразовывать функцию и независимые переменные и при этом уравнение Эйлера—Остроградского данного функционала оказывается равносильным уравнению Эйлера—Остроградского полученного функционала.

Пример 1.10.2. Если $x = \varrho \cos\theta$, $y = \varrho \sin\theta$, то

$$\frac{\partial \varrho}{\partial x} = \cos\theta, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{1}{\varrho}\sin\theta, \quad \frac{\partial \varrho}{\partial y} = \sin\theta, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{\varrho}\cos\theta$$

и

$$\iint\limits_D \left(u_x^2 + u_y^2\right) dx\, dy =$$

$$= \iint\limits_D \left[\left(u_\varrho \frac{\partial \varrho}{\partial x} + u_\theta \frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 + \left(u_\varrho \frac{\partial \varrho}{\partial y} + u_\theta \frac{\partial \theta}{\partial y}\right)^2\right] \varrho\, d\varrho\, d\theta =$$

$$= \iint\limits_{D_1} \left(\varrho u_\varrho^2 + \frac{1}{\varrho} u_\theta^2\right) d\theta\, d\varrho.$$

Уравнение Эйлера — Остроградского для последнего функционала есть не что иное, как уравнение Лапласа в полярных координатах

$$u_\rho + \rho u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_{\theta\theta} = 0.$$

1.10.3. Второе необходимое условие для экстремума двойного интеграла (аналог условия Лежандра). Для того чтобы функция $u(x, y)$ доставляла хотя бы слабый экстремум функционалу

$$J(u) = \iint\limits_D F(x, y, u, u_x, u_y)\, dx\, dy,$$

необходимо выполнение неравенства

$$F_{pp} F_{qq} - F_{pq}^2 \geqslant 0$$

в каждой внутренней точке области D. При этом для минимума необходимо еще выполнение неравенства

$$F_{pp} \geqslant 0,$$

а для максимума

$$F_{pp} \leqslant 0.$$

Здесь использованы обозначения $p = \frac{\partial u}{\partial x}$, $q = \frac{\partial u}{\partial y}$.

Доказательство см Ахиезер [1].

1.10.4. Вариация функционала с переменной областью интегрирования. В п. 1.10.1 варьировалась лишь функция $u(x, y)$, область же интегрирования оставалась неизменной.

Пусть дано взаимно однозначное и непрерывно-дифференцируемое преобразование:

$$\left.\begin{aligned} x^* &= X(x, y, \alpha), \\ y^* &= Y(x, y, \alpha), \end{aligned}\right\} \tag{1.10.6}$$

содержащее параметр α так, что

$$x^* = X(x, y, 0) = x,$$
$$y^* = Y(x, y, 0) = y.$$

Отсюда следует, что якобиан $\frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)} \neq 0$ и для малых α имеет значение, сколь угодно близкое к единице.

Преобразование (1.10.6) переводит область D в некоторую область D^* и новая функция сравнения имеет вид

$$u^* = u^*(x^*, y^*, \alpha), \tag{1.10.7}$$

или в исходных переменных

$$u^* = U(x, y, \alpha), \quad u^*(X, Y, \alpha) = U(x, y, \alpha).$$

Рассмотрим функционал (1 10 1) Пусть исходная функция есть $u=u(x, y)$ $(x, y \in D)$. Будем полагать, что поверхность $u=u(x, y)$ содержится в однопараметрическом семействе поверхностей (1.10 6), (1.10 7) при значении параметра $\alpha=0$.

Функционал

$$J=\iint\limits_{D^*} F[x^*, y^*, u^*(x^*, y^*, \alpha), u^*_{x^*}(x^*, y^*, \alpha), u^*_{y^*}(x^*, y^*, \alpha)]\, dx^* dy^* \tag{1 10.8}$$

при $\alpha=0$ дает исходный функционал. Последнее выражение можно преобразовать посредством замены переменной в функционале

$$J(\alpha)=\iint\limits_{D} F[X, Y, u^*(X, Y, \alpha), u^*_{x^*}(X, Y, \alpha), u^*_{y^*}(X, Y, \alpha)]\times \times \frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)}\, dx\, dy, \tag{1.10.9}$$

где интеграл распространен по неизменной (исходной) области D.

Положив

$$\delta x=\left(\frac{\partial X}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0}\alpha, \quad \delta y=\left(\frac{\partial Y}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0}\alpha, \quad \delta u=\left(\frac{\partial u^*(X, Y, \alpha)}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0}\alpha,$$

$$\delta u_x=\left(\frac{\partial u^*_{x^*}(X, Y, \alpha)}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0}\alpha,$$

$$\delta u_y=\left(\frac{\partial u^*_{y^*}(X, Y, \alpha)}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0}\alpha,$$

получаем искомую вариацию в виде

$$\delta J=\iint\limits_{D} [F_x\delta x+F_y\delta y+F_u\delta u+F_{u_x}\delta u_x+ + F_{u_y}\delta u_y+F(\delta x)_x+F(\delta y)_y]\, dx\, dy. \tag{1.10.10}$$

Обозначая через $\overline{\delta u}=\left(\frac{\partial u^*(x, y, \alpha)}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0}\alpha$ (x и y неизменны, изменяется лишь α), получим

$$\delta u=\overline{\delta u}+u_x\delta x+u_y\delta y,$$

$$\delta u_x=(\overline{\delta u})_x+u_{xx}\delta x+u_{xy}\delta y,$$

$$\delta u_y=(\overline{\delta u})_y+u_{yx}\delta x+u_{yy}\delta y,$$

после чего (1.10.10) принимает вид

$$\delta J=\iint\limits_{D} \left\{\left(F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}\right)\overline{\delta u}+(F_{u_x}\overline{\delta u})_x+ +(F_{u_y}\overline{\delta u})_y+(F\,\delta x)_x+(F\,\delta y)_y\right\} dx\, dy$$

или, применив формулу Грина—Остроградского,

$$\delta J=\iint\limits_D\left\{\left(F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}\right)\overline{\delta u}\,dx\,dy+\right.$$
$$+\int\limits_l\left(F_{u_x}\frac{\partial x}{\partial n}+F_{u_y}\frac{\partial y}{\partial n}\right)\overline{\delta u}\,ds+\int\limits_l F\left(\delta x\frac{\partial x}{\partial n}+\delta y\frac{\partial y}{\partial n}\right)ds. \quad (1.10.11)$$

Формулы (1.10.3) и (1.10.4) являются частными случаями последней формулы.

Если $u=u(x, y)$ — экстремаль, то первый член формулы (1.10.11) исчезает и вариация δJ принимает вид

$$\delta J=\int\limits_l\left(F_{u_x}\frac{\partial x}{\partial n}+F_{u_y}\frac{\partial y}{\partial n}\right)\overline{\delta u}\,ds+\int\limits_l F\left(\delta x\frac{\partial x}{\partial n}+\delta y\frac{\partial y}{\partial n}\right)ds. \quad (1.10.12)$$

Вышеприведенный вывод содержится в книге Куранта — Гильберта [1], т. I. Геометрический вывод формулы (1.10.11) и следствий из нее дан у Гюнтера [1].

Вывод формулы для вариации n-кратного интеграла см у Гельфанда и Фомина [1].

1.10.5. Инвариантные вариационные задачи. Теорема Э. Нётер. Рассматривается преобразование

$$\left.\begin{aligned} x^*&=X^*(x, y, u, \alpha),\\ y^*&=Y^*(x, y, u, \alpha),\\ u^*&=U^*(x, y, u, \alpha),\end{aligned}\right\} \quad (1.10.13)$$

зависящее от параметра α. Каждой поверхности $u=u(x, y)$ преобразование (1.10.13) относит семейство поверхностей, зависящее от α,

$$\begin{aligned} x^*&=X^*[x, y, u(x, y), \alpha]=X(x, y, \alpha),\\ y^*&=Y^*[x, y, u(x, y), \alpha]=Y(x, y, \alpha),\\ u^*&=U^*[x, y, u(x, y), \alpha]=U(x, y, \alpha).\end{aligned}$$

Предполагается, что $x^*=X(x, y, 0)=x$, $y^*=Y(x, y, 0)=y$, $u^*=U(x, y, 0)=u$.

Пусть при преобразовании (1.10.13)

$$J^*=\iint\limits_{D^*}F\left(x^*, y^*, u^*, u^*_{x^*}, u^*_{y^*}\right)dx^*\,dy^*=\iint\limits_D F\,dx\,dy \quad (1.10.14)$$

(в этом заключается инвариантность вариационной задачи), тогда

$$\delta J=\alpha\left(\frac{\partial J^*}{\partial\alpha}\right)_{\alpha=0}=0. \quad (1.10.15)$$

Из (1.10.15) и (1.10.11) в силу произвольности D следует

$$\left(F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial}F_{u_y}\right)\overline{\delta u}+\frac{\partial}{\partial x}(F_{u_x}\overline{\delta u}+F\delta x)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}(F_{u_y}\overline{\delta u}+F\delta y)=0. \quad (1.10.16)$$

Здесь

$$\delta x=\left(\frac{\partial X^*}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0}\alpha=\left(\frac{\partial X}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0}\alpha,\quad \delta y=\left(\frac{\partial Y^*}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0}\alpha=\left(\frac{\partial Y}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0}\alpha,$$

$$\overline{\delta u}=\alpha\left(\frac{\partial U}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0}-\left(U_x^*+U_u^*\cdot u_x\right)_{\alpha=0}\delta x-\left(U_y^*+U_u^*\cdot u_y\right)_{\alpha=0}\delta y.$$

Получение (1.10.16) из свойства инвариантности вариационной задачи составляет содержание теоремы Э. Нётер (1918 г.).

Эта теорема имеет важное значение для получения так называемых законов сохранения механики и др.

Приведенный здесь вывод теоремы Нётер содержится в книге Куранта—Гильберта [1].

Более общие рассмотрения и приложения см. Гельфанд и Фомин [1]. См. также Полак [1].

1.10.6. Разрывная задача первого рода. Рассматривается функционал

$$J(u)=\iint\limits_D F(x,\ y,\ u,\ u_x,\ u_y)\,dx\,dy. \tag{1.10.17}$$

Требуется найти функцию u, принимающую на контуре l области D данные значения и доставляющую экстремум функционалу (1.10.17), причем частные производные искомой функции могут иметь разрывы на некоторой линии AB, делящей область D на две подобласти D_1 и D_2.

Функция, доставляющая экстремум функционалу (1.10.17) в каждой из областей D_1 и D_2, удовлетворяет уравнению Эйлера—Остроградского. Если $\overline{u}$—функция сравнения с частными производными, имеющими разрыв на линии $A'B'$, то, обозначая через φ_- и φ_+ значения функции, определенной в области D соответственно для левой и правой подобластей, будем иметь на линии AB (см. п. 1.10.4)

$$\left.\begin{aligned}\delta u_-&=p_-\delta x+q_-\delta y+\overline{\delta u}_-,\\ \delta u_+&=p_+\delta x+q_+\delta y+\overline{\delta u}_+.\end{aligned}\right\} \tag{1.10.18}$$

Поскольку на AB функция $u(x,\ y)$ непрерывна, то $\delta u_-=\delta u_+$.

Далее, обозначая через ds элемент дуги AB, δn—длину нормали к AB между AB и A_1B_1, $u_x=p$, $u_y=q$ и учитывая, что

$$\frac{\partial x}{\partial n}=\cos Nx,\qquad \frac{\partial y}{\partial n}=\cos Ny,$$

получим из (1.10.12) выражение для вариации функционала (1.10.17)

$$\delta J(u)=\int\limits_{AB}\left[(F_--F_+)\delta n+\left(\frac{\partial F}{\partial p_-}\cos Nx+\frac{\partial F}{\partial q_-}\cos Ny\right)\overline{\delta u}_--\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\partial F}{\partial p_+}\cos Nx+\frac{\partial F}{\partial q_+}\cos Ny\right)\overline{\delta u}_+\right]ds, \tag{1.10.19}$$

которое, в случае экстремума, должно быть равным нулю:

$$\delta J(u)=0. \qquad (1.10.20)$$

Используя (1.10.18), получим

$$\overline{\delta u}_- = \delta u_- - (p_- \cos Nx + q_- \cos Ny)\,\delta n,$$

$$\overline{\delta u}_+ = \delta u_+ - (p_+ \cos Nx + q_+ \cos Ny)\,\delta n,$$

и (1.10.20) принимает вид

$$\int \left\{ [F_- - F_+] - \left(\frac{\partial F}{\partial p_-}\cos Nx + \frac{\partial F}{\partial q_-}\cos Ny\right)(p_- \cos Nx + q_- \cos Ny) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial F}{\partial p_+}\cos Nx + \frac{\partial F}{\partial q_+}\cos Ny\right)(p_+ \cos Nx + q_+ \cos Ny) \right\} \delta n +$$
$$+ \int \left\{ \left[\left(\frac{\partial F}{\partial p_-}\cos Nx + \frac{\partial F}{\partial q_-}\cos Ny\right) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \left(\frac{\partial F}{\partial p_+}\cos Nx + \frac{\partial F}{\partial q_+}\cos Ny\right)\right] \delta u_- \right\} ds = 0. \qquad (1.10.21)$$

Ввиду произвольности δn и δu_- из (1.10.21) следует, что подынтегральные выражения в (1.10.21) равны нулю.

Таким образом, получаются условия

$$F_- - F_+ - \left(\frac{\partial F}{\partial p_-}\cos Nx + \frac{\partial F}{\partial q_-}\cos Ny\right)(p_- \cos Nx + q_- \cos Ny) +$$
$$+ \left(\frac{\partial F}{\partial p_+}\cos Nx + \frac{\partial F}{\partial q_+}\cos Ny\right)(p_+ \cos Nx + q_+ \cos Ny) = 0, \qquad (1.10.22)$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial p_-} - \frac{\partial F}{\partial p_+}\right)\cos Nx + \left(\frac{\partial F}{\partial q_-} - \frac{\partial F}{\partial q_+}\right)\cos Ny = 0. \qquad (1.10.23)$$

Условию (1.10.22) может быть придан вид

$$F_- - F_+ = \frac{\partial F}{\partial p_-}[p_- - p_+] + \frac{\partial F}{\partial q_-}[q_- - q_+]. \qquad (1.10.24)$$

Условия (1.10.22) и (1.10.23) или (1.10.24) и (1.10.23) аналогичны условиям Вейерштрасса—Эрдмана.

См. Гюнтер [1].

§ 11. Вариационные задачи на условный экстремум

Ниже приводятся основные сведения относительно вариационных задач на условный экстремум функционалов от функций одной переменной. К этим задачам относятся: изопериметрическая, задача Лагранжа, задача Майера, задача Больца. Первые три задачи могут рассматриваться как частные случаи последней, что в известной мере будет использовано при изложении их.

1.11.1. Изопериметрическая задача. Среди всех кусочно-гладких вектор-функций

$$y=\{y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x)\},$$

принимающих заданные значения на концах интервала $[x_1,\ x_2]$, найти ту, которая доставляет экстремум функционалу

$$J_0(y)=\int_{x_1}^{x_2} f_0(x, y, y')\,dx$$

при связях

$$J_i(y)=\int_{x_1}^{x_2} f_i(x,\ y,\ y')\,dx=L_i \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ k).$$

Предположения: функции $f_0(x, y, z)$, $f_i(x, y, z)$ определены и имеют непрерывные по совокупности всех своих аргументов производные второго порядка, когда точка (x, y) принадлежит некоторой области G пространства (x, y), а вектор z пробегает любые конечные значения. Определитель Грама для функций $(f_i)_y-\frac{d}{dx}(f_i)_{y'}$ отличен от нуля по меньшей мере в k точках интервала $(x_1,\ x_2)$.

Замечание. Задача может быть лишена смысла, если значения L_i произвольны, при этом множество допустимых вектор-функций может оказаться пустым.

Пример 1.11.1. Среди всех кривых длины l, соединяющих две данные точки A и B, найти кривую, ограничивающую вместе с отрезком AB наибольшую площадь.

Если A и B — точки оси абсцисс $(a,\ 0)$ и $(b,\ 0)$, то задача сводится к нахождению максимума интеграла

$$J=\int_a^b y\,dx$$

при условии

$$\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx=l$$

и $y(a)=y(b)=0$.

Здесь следует считать $l>|b-a|$.

Пример 1.11.2. Пусть ось Ox является срединной осью волнистого профиля железа, причем последний проходит через начало координат, а ординаты принимают одинаковые значения в точках, абсциссы которых отличаются на длину волны, равную $4x_1$. Длина четверти дуги волны

$$s_1=\int_0^{s_1} ds=\int_0^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Объем и вес соответствующего куска железа пропорционален этой величине, а жесткость профиля характеризуется моментом инерции

$$J_1=\int_0^{s_1} y^2 ds=\int_0^{x_1} y^2\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Краевые условия: $y(0)=0$, $y(x_1)=y'(x_1)=0$.

Требуется: а) среди всех кривых, удовлетворяющих вышеуказанным усл виям и имеющим одинаковую длину, найти ту, момент инерции котор максимален.

б) Среди всех кривых, удовлетворяющих вышеуказанным условиям имеющим фиксированный момент инерции, найти кривую минимальной длин

1.11.2. Правило множителей. Если кусочно-гладкая крив $y=\bar{y}(x)$, лежащая (за возможным исключением концов) внутри дает функционалу

$$J_0(y)$$

экстремум при связях

$$J_i(y)=L_i \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ k),$$

то существуют такие константы λ_j $(\lambda_0^2+\lambda_1^2+\ldots+\lambda_k^2=1)$, что кр вая $y=\bar{y}(x)$ является для функционала

$$\int_{x_1}^{x_2}(\lambda_0 f_0+\lambda_1 f_1+\ldots+\lambda_k f_k)\,dx$$

обычной (безусловной) экстремалью, т. е. экстремалью, отвечающ свободному, не стесненному какими-либо связями, варьированию

Если исключить случаи, когда множители λ_j обращаются нуль, то из вышеуказанного правила множителей вытекает принц взаимности: совокупность условных экстремалей не зависит от того искать ли экстремум функционала J_0 при фиксированных J_i $(i=$ 2, ..., $k)$ или искать экстремум J_n при фиксированных J_0 и $(i\neq m,\ 1\leqslant i\leqslant k)$.

Правило множителей в применении к примеру 1.11.1 приводит к варь рованию функционала

$$\int_a^b (y+\lambda\sqrt{1+y'^2}\,)\,dx.$$

Первый интеграл уравнения Эйлера — Лагранжа этого функционала

$$y+\lambda\sqrt{1+y'^2}-\lambda y'\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=\alpha$$

или

$$y=\alpha-\frac{\lambda}{\sqrt{1+y'^2}}\ .$$

Полагая в последнем $y'=\operatorname{tg}\varphi$, получаем $y=\alpha-\lambda\cos\varphi$, и после дифференц вания этого соотношения

$$y'=\lambda\sin\varphi\,\frac{d\varphi}{dx}=\operatorname{tg}\varphi,$$

откуда

$$x=\lambda\sin\varphi+\beta.$$

Уравнения экстремалей $x=\lambda\sin\varphi+\beta$, $y=-\lambda\cos\varphi+\alpha$ Таким образом полу но семейство окружностей Остается найти окружность, проходящую че точки A и B с данной длиной дуги AB. Вывод правила множителей Лаврентьев и Люстерник [2], Гюнтер [1], Ахиезер [1].

Вывод правила множителей, основанный на методах функционального анализа, см. Лаврентьев и Люстерник [2], Шилов [1].

1.11.3. Условия трансверсальности. Изопериметрическая задача может ставиться и следующим образом: среди всех кусочно-гладких вектор-функций $y(x)$ найти ту, которая доставляет экстремум функционалу $J_0(y)$ при связях

$$J_i(y)=g_i[x_1,\ y(x_1),\ x_2,\ y(x_2)]+\int_{x_1}^{x_2} f_i(x,\ y,\ y')\,dx=0$$
$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ k).$$

В этом случае существуют такие постоянные $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$, что искомая экстремаль является безусловной экстремалью функционала

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x,\ y,\ y')\,dx,\quad F=\lambda_0 f_0+\lambda_1 f_1+\ldots+\lambda_k f_k,$$

причем концевые точки экстремали таковы, что тождественно выполняется равенство

$$\left(F-\sum_{i=1}^{k} y_i' F_{y_i'}\right)dx+\sum_{i=1}^{n} F_{y_i'}dy_i\Bigg|_1^2+dK=0$$

при всех dx_1, dy_{i1}, dx_2, dy_{i2}. Здесь $K=\lambda_1 g_1+\lambda_2 g_2+\ldots+\lambda_k g_k$. Относительно функций g_i предполагается, что они обладают непрерывными частными производными третьего порядка, а матрица

$$\left\|\frac{\partial g_i}{\partial x_1}\ \ \frac{\partial g_i}{\partial y_{j1}}\ \ \frac{\partial g_i}{\partial x_2}\ \ \frac{\partial g_i}{\partial y_{j2}}\right\|$$

имеет ранг k в точках рассматриваемой области. Кроме того, должно выполняться так называемое условие некасания, соответствующее в простейшей вариационной задаче условию некасания экстремали и кривых, по которым скользят концы допустимых линий.

См. Блисс [1].

1.11.4. Необходимое условие Клебша. Если вектор-функция $y(x)$ дает условный экстремум изопериметрической задаче, то вторая вариация функционала

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x,\ y,\ y')\,dx$$

неотрицательна:

$$\delta^2 J\geqslant 0,$$

откуда следует, что

$$\sum_{i,k} F_{y'_i y'_k} \pi_i \pi_k \geqslant 0, \tag{1.1}$$

при любых $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n) \neq (0, 0, 0, \ldots, 0)$.

См. Блисс [1].

1.11.5. Необходимое условие Якоби. Изопериметрическая экстремаль является безусловной экстремалью функционала

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y', \lambda)\, dx,$$

$$F(x, y, y', \lambda) = \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_k f_k.$$

Если $\bar{y}(x) = y(x) + \delta y(x)$, $\bar{y}(x_1) = l_1$, $\bar{y}(x_2) = l_2$, — допустимая кривая, находящаяся в ε-окрестности первого порядка рассматриваемой экстремали, то

$$J_0(\bar{y}) - J_0(y) = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_0} \sum_{i,k} (F_{y_i y_k} \eta_i \eta_k + 2F_{y_i y'_k} \eta_i \eta'_k + F_{y'_i y'_k} \eta'_i \eta'_k)\, dx +$$

$$+ \sigma = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \omega\, dx + \sigma$$

где $\sigma \longrightarrow 0$ при $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Пусть через R_k обозначено функциональное пространство элементами которого являются кусочно-гладкие функции $y(x)$, удовлетворяющие условиям $y(x_1) = y(x_2) = 0$, и

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho_i y_i dx = 0, \qquad \rho_i = (f_i)_y - \frac{d}{dx}(f_i)_{y'}, \qquad \int_{x_1}^{x_2} y^2\, dx = 1. \tag{1.11}$$

Кривые, реализующие экстремум функционала

$$\int_{x_1}^{x_2} 2\omega\, dx \tag{1.11}$$

на R_k, удовлетворяют уравнению

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} \left(\omega + \mu y^2 + 2 \sum_{i=1}^{k} \nu^i \rho_i y_i \right) dx = 0,$$

или

$$\frac{d}{dx} \omega_{y'} - \omega_y = \mu y + \sum_{i=1}^{k} \nu^i \rho_i. \tag{1.11}$$

начения μ, для которых решение уравнения (1.11.4), обращаюееся в нуль при $x=x_1$, обращается в нуль и при $x=x_2$, называтся *собственными значениями функционала* (1.11.3) на R_k. Каждому обственному значению соответствуют по крайней мере одна собвенная функция $y(x)$, нетождественно равная нулю на $[x_1, x_2]$, сопровождающий вектор ν^i, при которых удовлетворяются уравение (1.11.4) и условия (1.11.2).

Каждому собственному значению μ соответствует не более +1 линейно независимых функций. Число этих линейно независмых функций называется *кратностью собственного значения*.

При переменном верхнем пределе x_2 в интегралах i-е по велине собственное значение становится функцией x_2.

Все функции $\mu_i(x_2)$ убывают с ростом x_2, причем $\mu_i(x_2) \geqslant \mu_j(x_2)$, $i \geqslant j$. При x_2, достаточно близком к x_1, все μ положильны.

Значения x_i^*, удовлетворяющие одному из уравнений $\mu_i(x_i^*)=0$, зываются *значениями, сопряженными с* x_1.

При $i \geqslant j$ значение $x_i^* \geqslant x_j^*$.

Сопряженное значение имеет по определению кратность l, если

$$x_i^* = x_{i-1}^* = \ldots = x_j^* \qquad (j=i+l-1).$$

Для неотрицательности формы 2ω на R_k необходимо и достаочно, чтобы на интервале (x_1, x_2) не заключалось ни одной сопряенной с x_1 точки.

Для того чтобы экстремаль y, вдоль которой $\sum_{k=1}^{k} F'_{y_i y_k} \pi_i \pi_k > 0$, давала слабый минимум интегралу J_0 при словии $J_i = L_i$ $(i=1,2, \ldots, k)$, необходимо, чтобы открытый инервал (x_1, x_2) не содержал значений, сопряженных с x_1 для функционала

$$\int_{x_1}^{x_2} 2\omega \, dx.$$

Изопериметрическая экстремаль имеет порядок k, если для ее вторая вариация на R_k имеет k отрицательных собственных начений.

Для того чтобы экстремаль $y(x)$ была экстремалью k-го поядка, необходимо и достаточно, чтобы сумма кратностей всех опряженных к A точек, расположенных внутри $[x_1, x_2]$, равнялись k (теорема Морса).

Подробно см. Лаврентьев и Люстерник [2].

1.11.6. Достаточные условия экстремума в изопериметрической даче. Ниже *усиленным условием Клебша* будет называться неравенство (1.11.1), в котором исключен знак равенства; *усиленным словием Якоби* — отсутствие в замкнутом интервале $[x_1, x_2]$ точек, опряженных к точке x_1.

Если кривая E удовлетворяет уравнениям Эйлера—Лагранжа, усиленному условию Клебша, усиленному условию Якоби, то она является неособой экстремалью и существует такая слабая окрестность кривой E, что для всякой кривой C, лежащей в указанной окрестности и не совпадающей с E, выполняется неравенство

$$J_0(C) > J_0(E).$$

Достаточные условия сильного минимума. Пусть E—гладкая допустимая кривая изопериметрической задачи, удовлетворяющая уравнениям Эйлера — Лагранжа, усиленному условию Вейерштрасса, усиленному условию Клебша и усиленному условию Якоби, тогда она является неособой экстремалью, содержащейся в сильной окрестности, для каждой кривой из которой, отличной от E, выполняется неравенство:

$$J_0(C) > J_0(E).$$

Под *усиленным условием Вейерштрасса* здесь подразумевается выполнение неравенства

$$E(x, y, y', \lambda, Y') = F(x, y, Y', \lambda) - F(x, y, y', \lambda) - \\ - \sum_{i=1}^{n} (Y_i' - y_i') F_{y_i'}(x, y, y', \lambda) > 0$$

во всех точках указанной окрестности.

См. Блисс [1].

1.11.7. Задачи Лагранжа, Майера и Больца. Ниже даются формулировки задач Лагранжа, Майера и Больца. Наиболее общей из них является последняя, включающая в себя как частные случаи изопериметрическую, задачи Лагранжа и Майера. Ввиду распространенности приложений этих задач, каждая из них формулируется отдельно.

Задача Лагранжа. Среди всех кусочно-гладких вектор-функций y найти ту, которая доставляет экстремум функционалу

$$J_0(y) = \int_{x_1}^{x_2} f_0(x, y, y')\, dx,$$

при связях

$$f_i(x, y, y') = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m < n)$$

и условиях на концах

$$\psi_k(x_1, y(x_1), x_2, y(x_2)) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, p \leqslant 2n+2).$$

Предположения: функции $f_j(x, y, z)$ $(j = 0, 1, 2, \ldots, m)$ определены и имеют непрерывные по совокупности всех своих аргументов частные производные третьего порядка. Матрица

$$\left\| \frac{\partial f_i}{\partial y_j'} \right\|$$

имеет ранг m во всех точках (x, y), принадлежащих некоторой области пространства (x, y), когда вектор z пробегает любые значения на концах.

Матрица

$$\left\| \frac{\partial\psi_k}{\partial x_i} \quad \frac{\partial\psi_k}{\partial y_{i1}} \quad \frac{\partial\psi_k}{\partial x_2} \quad \frac{\partial\psi_k}{\partial y_{i2}} \right\|$$

имеет ранг p.

Функции ψ_k обладают непрерывными частными производными третьего порядка.

Далее предполагается, что рассматриваются такие линии (вектор-функции) сравнения $y_i(x)$, для которых выполняется условие — ранг матрицы

$$\left\| \frac{\partial\psi_\mu}{\partial x_1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\psi_\mu}{\partial y_i} y_i'(x_1) \quad \frac{\partial\psi_\mu}{\partial x_2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\psi_\mu}{\partial y_i} y_i'(x_2) \right\|$$

равен двум (*условие некасания*).

Замечание. Связь $f_i(x, y, y')=0$ называется *голономной*, если она не содержит производных или может быть приведена к виду, не содержащему производных, в противном случае она именуется неголономной.

Задача Майера. Среди систем гладких функций $y_0(x)$, $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$, удовлетворяющих связям

$$\varphi_i(x, y, y')=0 \qquad (i=0, 1, 2, \ldots, m<n)$$

и условиям на концах

$$y_0(x_1)=a_0,\ y_1(x_1)=a_1,\ \ldots,\ y_n(x_1)=a_n,$$
$$y_1(x_2)=b_1,\ \ldots,\ y_n(x_2)=b_n,$$

найти ту систему, в которой $y_0(x)$ имеет при $x=x_2$ экстремум.

Задача Майера может ставиться и как задача с подвижными концами, например, среди систем гладких функций $y_0(x)$, $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$, удовлетворяющих связям и условиям на концах

$$\varphi_i(x, y, y')=0 \qquad (i=0, 1, \ldots, m<n),$$
$$y_0(x_1)=a_0,\ y_1(x_1)=a_1,\ \ldots,\ y_n(x_1)=a_n,$$
$$\psi_\mu(x_2, y(x_2), \ldots, y_n(x_2))=0,\ 0\leqslant\mu<n+1,$$

найти ту систему, в которой $y_0(x_2)$ имеет максимум на правом конце.

Предположения, при которых рассматривается задача Майера, охватываются предположениями, приведенными ниже в задаче Больца.

Задача Больца. Среди всех кусочно-гладких вектор-функций найти ту, которая доставляет экстремум функционалу

$$J_0(y)=\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\,dx+g(x_1, y(x_1), x_2, y(x_2))$$

при связях

$$\varphi_\beta(x, y, y') = 0 \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, m < n)$$

и условиях на концах

$$\psi_\mu(x_1, y(x_1), x_2, y(x_2)) = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p \leqslant 2n+2).$$

Предположения: функции φ_β и f имеют непрерывные частные производные третьего порядка по совокупности всех своих аргументов в некоторой открытой области $(2n+1)$-мерного пространства.

Матрица

$$\left\| \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial y_1'} \right\|$$

имеет ранг m во всех точках указанной выше области.

Функции ψ_μ и g обладают непрерывными частными производными по совокупности всех своих аргументов в $(2n+2)$-мерной области пространства точек $(x_1, y(x_1), x_2, y(x_2))$, а матрица

$$\left\| \frac{\partial \psi_\mu}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \psi_\mu}{\partial y_{i1}} \quad \frac{\partial \psi_\mu}{\partial x_2} \quad \frac{\partial \psi_\mu}{\partial y_{i2}} \right\|$$

имеет ранг p во всех точках указанной области.

Кроме того, должно выполняться так называемое условие неприкасания, приведенное выше в задаче Лагранжа.

Задача Больца (вторая формулировка). Среди систем параметров и функций $w_h = a_h$ $(h = 1, 2, \ldots, r)$, $w_{r+i} = \varphi_i(x)$ $(x_1 \leqslant x \leqslant x_2)$ найти ту, которая доставляет экстремум функционалу

$$J = g[a, x_1, y(x_1), x_2, y(x_2)] + \int_{x_1}^{x_2} f(a, x, y, y')\,dx$$

при связях

$$\varphi_j(a, x, y, y') = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m < n), \qquad a = (a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

$$J_k = g_k[a, x, y(x_1), x_2, y(x_2)] + \int_{x_1}^{x_2} f_k(a, x, y, y')\,dx = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, p).$$

Задача Больца (третья формулировка). Среди систем параметров

$$w_h = a_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, r),$$

функций

$$w_{r+i} = y_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

и функций

$$w_{r+n+j} = \theta_j(x) \qquad (j = 1, 2, \ldots, m;\ x_1 \leqslant x \leqslant x_2)$$

найти ту, которая доставляет экстремум функционалу

$$J = g(a) + \int_{x_1}^{x_2} f(a, x, y, \theta)\, dx$$

при связях

$$y_i' = P_i(a, x, y, \theta),$$

$$x_s = x_s(a), \qquad y_i(x_s) = Y_{is}(a) \qquad (s = 1, 2),$$

$$J_k = g_k(a) + \int_{x_1}^{x_2} f_k(a, x, y, \theta)\, dx.$$

Ограничения на участвующие во второй и третьей формулировках задачи Больца параметры и функции не отличаются в существенном от ограничений, указанных в первой формулировке

Вторую и третью формулировку см. Хестенс [1].

Пример 1.11.3 (задача Чаплыгина). По какой замкнутой кривой в горизонтальной плоскости должен двигаться центр тяжести самолета, имеющего собственную скорость v_0, чтобы за время T облететь наибольшую площадь, если дано постоянное направление и постоянная величина $a < v_0$ скорости ветра?

Пусть скорость ветра направлена по оси Ox, α — угол между направлением оси самолета и осью Ox, $x(t)$ и $y(t)$ — координаты центра тяжести самолета. Задача сводится к нахождению максимума функционала

$$S = \frac{1}{2} \int_0^T \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) dt$$

при неголономных связях

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha + a, \qquad \frac{dy}{dt} = v_0 \sin\alpha.$$

Это — *задача Лагранжа*. Далее см. стр. 74.

Пример 1.11.4. Идеальная ракета движется в вертикальной плоскости. Если рассматривать ракету как частицу, на которую действует сила тяжести и реактивная сила постоянной величины F с переменным углом наклона φ (и не действует сила сопротивления воздуха), то уравнения движения имеют вид (при единичной массе)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = F\cos\varphi, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = F\sin\varphi - g.$$

Задача о нахождении пути, вдоль которого на полет затрачивается наименьшее время при соответствующих начальных и конечных условиях, состоит в отыскании среди всех функций

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad \varphi = \varphi(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T$$

при указанных дифференциальных связях функции, минимизирующей время полета T.

Это задача Майера. В самом деле, заменив $t, x, y, \dot{x}, \dot{y}$ на t, y_1, y_2, y_3, y_4, получаем дифференциальные связи в виде

$$\dot{y}_1 = y_3, \quad \dot{y}_2 = y_4, \quad \dot{y}_3 = F\cos\varphi, \quad \dot{y}_4 = F\sin\varphi - g$$

и условия на концах $t_1 = 0$, $t_2 = T$, $y_i(t_s) = Y_{is}$ $(s = 1, 2)$.

Требуется найти такую систему функций y_1, y_2, y_3, y_4, при которой величина T была наименьшей.

Более подробные сведения по этой задаче см. Хестенс [1].

1.11.8. Связь задач изопериметрической, Лагранжа, Майера и Больца. Изопериметрическая задача может быть сведена к задаче Лагранжа, если ввести функции

$$z_i = \int_{x_1}^{x} f_i(x, y, y')\,dx \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Тогда изопериметрическая задача превращается в задачу Лагранжа отыскания экстремума функционала

$$J_0(y) = \int_{x_1}^{x_2} f_0(x, y, y')\,dx$$

при дифференциальных связях

$$z_i' = f_i(x, y, y') \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

условиях на концах $z_i(x_1) = 0$, $z_i(x_2) = L_1$ и условиях на концах исходной изопериметрической задачи.

Изопериметрическая задача является частным случаем задачи Больца (см., например, вторую формулировку).

Задача Больца эквивалентна задаче Лагранжа, в которой среди всех кусочно-гладких вектор-функций

$$y_i(x), \quad y_{n+1}(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ x_1 \leqslant x \leqslant x_2)$$

ищется та, которая доставляет экстремум функционалу

$$J = \int_{x_1}^{x_2} (f_0 + y_{n+1})\,dx$$

при связях

$$f_i = 0, \qquad y_{n+1}' = 0,$$

$$\psi_k = 0, \qquad y_{n+1}(x_1) - \frac{g}{x_2 - x_1} = 0.$$

Задача Майера приводится к задаче Лагранжа, в которой среди всех кусочно-гладких вектор-функций $y(x)$ ищется та, которая доставляет экстремум функционалу

$$\int_{x_1}^{x_2} y_0'(x)\,dx$$

при связях

$$\varphi_i(x, y, y') = 0,$$

$$y_0(x_1) = a_0, \quad y_1(x_1) = a_1, \ \ldots, \ y_n(x_1) = a_n,$$

$$y_1(x_2) = b_1, \ \ldots, \ y_n(x_2) = b_n.$$

1.11.9. Правило множителей для задач Лагранжа, Майера и Больца. Задача Лагранжа. Если при условиях, сформулированных выше, кусочно-гладкая кривая E: $y(x)$ доставляет экстремум функционалу $J_0(y)=\int\limits_{x_1}^{x_2} f_0(x, y, y')\,dx$, то существует такая постоянная λ_0 (вообще говоря, отличная от нуля) и такие множители $\lambda_i(x)$, что вектор-функция $y(x)$ является безусловной экстремалью для функционала

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} F(x, y, y', \lambda)\,dx,$$

где

$$F(x, y, y', \lambda)=\lambda_0 f_0(x)+\lambda_1(x)\varphi_1+\ldots+\lambda_m(x)\varphi_m.$$

Задача Майера. Если $y(x)$ доставляет экстремум в задаче Майера, то существуют такие множители $\lambda_1(x), \ldots, \lambda_m(x)$, что вышеуказанная условная экстремаль является безусловной экстремалью функционала

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} F(x, y, y', \lambda)\,dx,$$

где

$$F(x, y, y', \lambda)=\lambda_1(x)\varphi_1+\ldots+\lambda_m(x)\varphi_m.$$

Задача Больца. Если при условиях, формулированных выше, кусочно-гладкая кривая E: $y(x)$ доставляет экстремум в задаче Больца, то существует такая постоянная λ_0 (вообще говоря, отличная от нуля) и функции $\lambda_i(x)$, что вектор-функция $y(x)$ является безусловной экстремалью для функционала

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} F(x, y, y', \lambda)\,dx,$$

где

$$F(x, y, y', \lambda)=\lambda_0 f_0+\lambda_1(x)\varphi_1+\ldots+\lambda_m(x)\varphi_m.$$

Условная экстремаль задачи Больца во второй формулировке является безусловной экстремалью функционала

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} F(x, y, y', \mu, \lambda)\,dx,$$

где

$$F(x, y, y', \mu, \lambda)=\lambda_0 f+\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2+\ldots+\lambda_p f_p+\mu_1(x)\varphi_1+\ldots$$
$$\ldots+\mu_m(x)\varphi_m,$$

$\lambda_0 \geqslant 0$, λ_k — постоянные, $\mu_j(x)$ — функции.

Условная экстремаль задачи Больца в третьей формулировке доставляет безусловный экстремум функционалу

$$\int_{x_1}^{x_2} H(x, y, y', \lambda, z)\, dx,$$

где $H(x, y, y', \lambda, z) = \lambda_0 f + \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_p f_p + z_1(x) P_1 + \ldots + z_n(x) P_n$, $\lambda_0 \geqslant 0$, λ_k — постоянные, $z_i(x)$ — функции.

Для этого случая уравнения Эйлера — Лагранжа имеют наиболее простой вид

$$\frac{dH}{dx} = H_x, \quad \frac{dy_i}{dx} = H_{z_i}, \quad \frac{dz_i}{dx} = -H_{y_i}, \quad H_{\theta_j} = 0.$$

Вывод правила множителей см. Блисс [1], Ахиезер [1], Гюнтер [1].

Вывод правила множителей, основанный на методах функционального анализа, см. Лаврентьев и Люстерник [2].

Покажем на примере задачи Чаплыгина применение правила множителей. С этой целью найдем безусловный экстремум функционала

$$\int_0^T \left\{ \frac{1}{2}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} \right) + \lambda_1 \left[\frac{dx}{dt} - v_0 \cos\alpha - a \right] + \lambda_2 \left[\frac{dy}{dt} - v_0 \sin\alpha \right] \right\} dt.$$

Уравнения Эйлера — Лагранжа имеют вид

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2} y + \lambda_1 \right) - \frac{1}{2}\frac{dy}{dt} = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} x + \lambda_2 \right) + \frac{1}{2}\frac{dx}{dt} = 0,$$

$$-\lambda_2 v_0 \cos\alpha + \lambda_1 v_0 \sin\alpha = 0,$$

откуда $\lambda_1 = y$, $\lambda_2 = -x$ (если произвольные постоянные интегрирования считать равными нулю за счет параллельного переноса осей).

Используя найденные выражения для λ_1 и λ_2, получаем

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = 0.$$

Положив $x = r\sin\alpha$, $y = -r\cos\alpha$ и используя уравнения движения самолета, имеем

$$\frac{dr}{dt} - a\sin\alpha = 0, \quad \frac{dr}{dt} = \frac{a}{v_0}\frac{dy}{dt},$$

откуда после интегрирования

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{a}{v_0} y + C,$$

т. е. получено уравнение эллипса с фокусом в начале координат, большой осью, перпендикулярной к направлению ветра, и эксцентриситетом $\frac{a}{v_0}$.

1.11.10. Условия трансверсальности. Для задачи Больца 1. Существуют такие постоянные e_μ, что на концах экстремали выполняются соотношения

$$\left[\left(F - \sum y_i' F_{y_i'} \right) dx + \sum F_{y_i'} dy_i \right]_1^2 + \lambda_0\, dg + e_\mu\, d\psi_\mu \equiv 0, \quad \psi_\mu = 0$$

при любом выборе дифференциалов dx_1, dy_{i1}, dx_2, dy_{i2}.

Для задачи Больца 2. Концевые точки экстремали таковы, что тождественно для dx_1, dy_{i1}, dx_2, dy_{i2}, da_h выполняется соотношение

$$\left[\left(F-\sum y_i' F_{y_i'}\right) dx+\sum F_{y_i'} dy_i\right]_1^2+dG+\int_{x_1}^{x_2} \sum F_{a_h} da_h\, dx=0.$$

Для задачи Больца 3. Концевые точки экстремали таковы, что имеет место соотношение

$$\left[HX_{sh}-\sum_{i=1} z_i Y_{ish}\right]+G_h+\int_{x_1}^{x_2} H_h\, dx=0.$$

Здесь нижний индекс h обозначает частные производные по a_h. Трансверсальные условия для задач Лагранжа и Майера охватываются данными выше формулировками.

См. Блисс [1], Понтрягин и др. [1].

1.11.11. Необходимые условия экстремума Вейерштрасса и Клебша. Если экстремаль $E: y(x)$ доставляет условный минимум в задаче Больца (для определенности в первой формулировке), то она является безусловной экстремалью функционала

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y', \lambda)\, dx, \qquad F(x, y, y', \lambda)= \\ =\lambda_0 f+\lambda_1(x)\varphi_1+\ldots+\lambda_m(x)\varphi_m.$$

Функция Вейерштрасса

$$E(x, y, y', \lambda, Y')=F(x, y, Y', \lambda)-F(x, y, y', \lambda)- \\ -\sum\left(Y_i'-y_i'\right) F_{y_i'}(x, y, y', \lambda)$$

неотрицательна: $E(x, y, y', \lambda, Y')\geqslant 0$ при всевозможных допустимых $(x, y, Y')\neq(x, y, y')$, $\varphi_\beta=0$, где (x, y, y', λ) — элемент кривой E (*необходимое условие Вейерштрасса*).

Если π_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ — система чисел, удовлетворяющая уравнениям

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_{\beta y_i'} \pi_i=0,$$

где (x, y, y', λ) — элемент, реализующий минимум кривой E, то

$$\sum_{i, k} F_{y_i' y_k'}(x, y, y', \lambda)\pi_i\pi_k\geqslant 0$$

(*необходимое условие Клебша*).

См. Блисс [1].

1.11.12. Вторая вариация в задаче Больца 1. Вторая вариация в задаче Больца имеет вид

$$\delta^2 J = 2\gamma\,[\xi_1,\ \eta_i(x_1),\ \xi_2,\ \eta_i(x_2)] + \int_{x_1}^{x_2} 2\omega(x,\ \eta,\ \eta')\,dx,$$

где

$$2\omega(x,\ \eta,\ \eta') = \sum_{i,k}\left(F_{y_i y_k}\eta_i\eta_k + 2F_{y_i y_k'}\eta_i\eta_k' + F_{y_i' y_k'}\eta_i'\eta_k'\right),$$

$$2\gamma = \left[\left(F_x' - \sum y_i' F_{y_i'}\right)dx^2 + 2\sum F_{y_i'}\,dy_i\,dx\right]_1^2 + 2q + 2\sum \rho_\mu q_\mu,$$

$$dx_1 = x_{1b}(0)\,db = \xi_1\,db, \qquad dx_2 = x_{2b}(0)\,db = \xi_2\,db,$$

$$\delta y_i = y_{ib}(x,\ 0)\,db = \eta_i(x)\,db,$$

$2q$ — квадратичная форма относительно dx_1, dx_2, dy_{i1}, dy_{i2} с коэффициентами, равными вторым производным от g, $2q_\mu$ — то же для ψ_μ.

Если кривая неособенная, не имеющая угловых точек, доставляет минимум функционалу в задаче Больца, то вторая вариация не отрицательна вдоль E

$$\delta^2 J \geqslant 0.$$

См. Блисс [1].

1.11.13. Присоединенная или акцессорная задача Больца. Задача Больца для функционала

$$\delta^2 J$$

при связях

$$\Phi_\beta = \sum_{i=1}\left(\varphi_{\beta y_i}\delta y_i + \varphi_{\beta y_i'}\delta y_i'\right) = 0,$$

$$\Psi_\mu = \left(\frac{\partial\psi_\mu}{\partial x_1} + \sum_{i=1} y_{i1}'\frac{\partial\psi_\mu}{\partial y_{i1}}\right)\xi_1 + \sum_{i=1}\frac{\partial\psi_\mu}{\partial y_{i1}}\eta_i(x_1) +$$
$$+ \left(\frac{\partial\psi_\mu}{\partial x_2} + \sum_{i=1} y_{i2}'\frac{\partial\psi_\mu}{\partial y_{i2}}\right)\xi_2 + \sum_{i=1}\frac{\partial\psi_\mu}{\partial y_{i2}}\eta_i(x_2) = 0$$

называется *присоединенной* или *акцессорной*, а ее экстремали *присоединенными экстремалями*.

Уравнения Эйлера — Лагранжа в этом случае имеют вид

$$\frac{d}{dx}\Omega_{\eta_i'} - \Omega_{\eta_i} = 0, \qquad \Phi_\beta = 0,$$

где

$$\Omega(x,\ \eta,\ \eta',\ \lambda) = \omega + \sum_{\beta=1}\lambda_\beta(x)\,\Phi_\beta.$$

Канонические переменные x, η_i, ξ_i связаны с переменными x, η, η_i', λ_β уравнениями

$$\xi_i = \Omega_{\eta_i'}(x, \eta, \eta', \lambda), \qquad 0 = \Phi_\beta(x, \eta, \eta').$$

Значения x_1 и x_2, соответствующие концам E, называются *сопряженными*, если существует присоединенная экстремаль, которая определяется функциями, обращающимися в нуль при $x = x_1$ и $x = x_2$, но не тождественно равными нулю.

1.11.14. Достаточные условия сильного относительного минимума. *Полем* называется область G пространства xy, которой соответствуют функции наклона $p_i(x, y)$ и множители $\lambda_0 = 1$, $\lambda_\beta(x, y)$ ($\beta = 1, 2, \ldots, m$), имеющие в G непрерывные частные производные первого порядка и обладающие следующими свойствами. Соответствующие элементы (x, y, p) удовлетворяют уравнениям связей $\Phi_\beta = 0$ при любых $(x, \beta) \subset G$. Интеграл

$$J^* = \int \left[\left(F - \sum_{i=1}^{n} p_i F_{y_i'} \right) dx + \sum_{i=1}^{n} F_{y_i'} dy_i \right]$$

не зависит от пути интегрирования в G, если аргументами в $F(x, y, y', \lambda)$ и ее производных служат x, y_i, $p_i(x, y)$, $\lambda_0 = 1$, $\lambda_\beta(x, y)$.

Всякое поле однократно покрывается n-параметрическим семейством экстремалей, определяемым дифференциальными уравнениями

$$\frac{dy_i}{dx} = p_i(x, y).$$

На экстремали поля

$$J^*(E) = J(E).$$

Пусть C — кривая, лежащая в поле и имеющая концы в точках x_1, $y(x)$ и x_2, $y(x_2)$. Тогда, учитывая свойство интеграла J^*, функция

$$w(x_1, y(x_1), x_2, y(x_2)) = J^*(C) + g(x_1, y(x_1), x_2, y(x_2))$$

зависит только от координат концов этой линии.

Если E — экстремаль, испытываемая на минимум, то с помощью функции w получаем

$$J(C) = J(E) = \int_C E[x, y, p(x, y), \lambda(x, y), y']\, dx + [w(C) - w(E)],$$

где

$$E(x, y, p(x, y), \lambda(x, y), y') = F(x, y, y', \lambda) - F(x, y, p(x, y), \lambda) -$$
$$- \sum_{i=1}^{n} \left(y_i' - p_i(x, y) \right) F_{y_i'}(x, y\ p(x, y), \lambda)$$

есть функция Вейерштрасса поля, содержащего испытуемую экстремаль.

Будем предполагать, что выполняется усиленное условие Вейерштрасса, т. е. в поле $E(x, y, p(x, y), \lambda(x, y), y') > 0$.

Если E удовлетворяет правилу множителей, усиленному условию Клебша (т. е. условию Клебша, в котором исключен знак равенства) и вдоль C вторая вариация положительно определенна ($\delta^2 J$ обращается в нуль только при $\xi_1 = \xi_2 = \eta_i(x) \equiv 0$), то эти условия обеспечивают строгую положительность разности

$$w(C) - w(E) > 0,$$

а вместе с усиленным условием Вейерштрасса являются достаточными условиями того, что E является неособой экстремалью, содержащейся в такой окрестности, что для всякой допустимой линии C из указанной окрестности и не совпадающей с E (концы которой лежат достаточно близко от концов E) выполняется неравенство

$$J(C) - J(E) > 0.$$

См. Блисс [1].

1.11.15. Условие Якоби положительной определенности второй вариации. Если вторая вариация положительно определенна на классе присоединенных экстремалей, удовлетворяющих присоединенным условиям для концов, и на интервале $[x_1, x_2]$ нет точек, сопряженных с точкой x_1, то вторая вариация положительно определенна вдоль E.

См Блисс [1].

Наиболее полное изложение задачи Больца см. Блисс [1].

См. также Гюнтер [1], Понтрягин [1], Беллман и Дрейфус [1], Лаврентьев и Люстерник [2].

§ 12. Оптимальные принципы

1.12.1. Принцип максимума Л. С. Понтрягина. Постановка задачи. Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x^1, x^2, \ldots, x^n, u^1, u^2, \ldots, u^r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \quad (1.12.1)$$

описывающая поведение некоторого объекта во времени. В момент времени t переменные $x^1, x^2, \ldots, x^n$ могут означать координаты точек, скорости и т. п.

Движением объекта можно управлять. Это управление характеризуется точками $u\{u_1, u_2, \ldots, u_r\}$ некоторой r-мерной области управления U. В качества $u_1, u_2, \ldots, u_r$ могут служить количество подаваемого в двигатель топлива, температура и т. д. По смыслу этих параметров ясно, что они удовлетворяют некоторым ограничениям.

Предполагается, что функции f^i непрерывны по совокупности всех аргументов и непрерывно дифференцируемы по совокупности «фазовых» координат $x^1, x^2, \ldots, x^n$.

Если задать (обычно кусочно-непрерывные ограниченные с разрывами первого рода) функции $u^1(t), u^2(t), \ldots, u^r(t)$ со значениями из U, то при заданных начальных условиях система (1.12.1) имеет единственное решение.

Наряду с системой (1.12.1) рассматривается интегральный функционал

$$J=\int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t))\,dt=\int_{t_0}^{t_1} f^0(x^1(t), \ldots, x^n(t), u_1(t), \ldots, u_r(t))\,dt, \tag{1.12.2}$$

где функция $f^0(x^1, x^2, \ldots, x^n, u_1, u_2, \ldots, u_r)$ непрерывно дифференцируема по совокупности всех аргументов и для всех рассматриваемых значений аргументов. В фазовом пространстве X, образованном векторами $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, даны две точки x_0 и x_1. Среди всех допустимых управлений $u=u(t)$, переводящих точку из положения x_0 в положение x_1, найти такое, для которого функционал

$$J(u)=\int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t))\,dt$$

принимает наименьшее возможное значение. Здесь $x(t)$ — решение системы (1.12.1) с начальным условием $x(t_0)=x_0$, соответствующим управлению $u(t)$, а t_1 — момент прохождения этого решения через точку x_1.

Таким образом, t_0 и t_1 не задаются, а находятся из условий $x(t_0)=x_0$, $x(t_1)=x_1$.

Управление $u(t)$, дающее решение этой задачи, называется *оптимальным управлением*, а соответствующая траектория — *оптимальной траекторией*.

Важный частный случай, когда $f^0(x, u)\equiv 1$, соответствует задачам об оптимальном быстродействии.

Если ввести функцию $x^0(t)$ так, что

$$\frac{dx^0}{dt}=f^0(x, u), \qquad x^0(t_0)=0,$$

то получающаяся при этом система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^i}{dt}=f^i(x, u) \qquad (i=0, 1, \ldots, n) \tag{1.12.1'}$$

и функционал

$$J(u)=\int_{t_0}^{t_1} f^0(x, u)\,dt=x(t_1) \tag{1.12.2'}$$

позволяют формулировать указанную выше задачу, как задачу о нахождении управления $u(t)$, при котором решение системы (1.12.1')

при условиях $x^i(t_0)=x_0^i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, $x^0(t_0)=0$, дает наименьшее значение $x^0(t_1)$.

Выше было указано, что из физических соображений следует ограниченность параметров u^i, например,

$$|u^i|\leqslant 1.$$

Если имеет место случай строгого неравенства, $|u^i|<1$, то сформулированная задача есть частный случай задачи Лагранжа, а следующий далее принцип максимума совпадает с необходимым условием минимума Вейерштрасса.

Если же имеет место неравенство $|u^i|\leqslant 1$, важное в прикладных задачах, то условие Вейерштрасса становится неприменимым, тогда как принцип максимума работает.

Принцип максимума и его приложения разработаны Л. С. Понтрягиным и его учениками — В. Г. Болтянским, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко и др. (1956 г. и позднее). Он имеет большое значение для решения проблем автоматического регулирования и др.

1.12.2. Формулировка принципа максимума. Если выбрано допустимое управление $u(t)$ и получена фазовая траектория $x(t)$ с начальным условием $x(t_0)=x_0$, то система

$$\frac{d\psi_i}{dt}=-\sum_{\alpha=0}^{n}\frac{\partial f^\alpha(x(t),\ u(t))}{\partial x^i}\psi_\alpha \qquad (i=0,\ 1,\ \ldots,\ n) \qquad (1.12.3)$$

имеет единственное решение $\psi(\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n)$ при любых начальных условиях для ψ_i.

С помощью полученных функций ψ_i строится функция

$$\mathscr{H}(\psi,\ x,\ u)=\sum_{\alpha=0}^{n}\psi_\alpha f^\alpha(x,\ u). \qquad (1.12.4)$$

Для оптимальности управления $u(t)$ и траектории $x(t)$ необходимо существование такой ненулевой непрерывной вектор-функции $\psi(t)=(\psi_0(t), \ldots, \psi_n(t))$, соответствующей функциям $u(t)$ и $x(t)$, что при любом t, $t_0\leqslant t\leqslant t_1$, функция $\mathscr{H}(\psi(t), x(t), u)$ переменного $u\in U$ достигает в точке $u=u(t)$ максимума.

В конечный момент t_1

$$\psi_0(t_1)\leqslant 0, \qquad \sum_{\alpha=0}^{n}\psi_\alpha(t_1)\, f^\alpha(x(t_1),\ u(t_1))=0. \qquad (1.12.5)$$

Кроме того, если $\psi(t)$, $x(t)$, $u(t)$ удовлетворяют системам (1.12.1) и (1.12.3), то функции $\psi_0(t)$ и $\sum_{\alpha=0}^{n}\psi_\alpha(t)\, f^\alpha(x(t),\ u(t))$ переменного t являются постоянными и в условии (1.12.5) точку t_1 можно заменить любой другой.

Для оптимальных по быстродействию управления $u(t)$ и траектории $x(t)$ необходимо существование такой ненулевой непрерывной вектор-функции $\psi(t)=(\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t))$, соответствующей функциям $u(t)$ и $x(t)$, что для всех t $(t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$ функция

$$H(\psi, x, u)=\sum_{\alpha=1}^{n} \varphi_\alpha f^\alpha(x, u)$$

переменного $u \in U$ достигает максимума в точке $u=u(t)$. В конечный момент t_1

$$H(\psi(t_1), x(t_1), u(t_1)) \geqslant 0. \tag{1.12.6}$$

Если величины $\psi(t)$, $x(t)$, $u(t)$ удовлетворяют системе

$$\frac{dx^i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial \psi_i}, \qquad \frac{d\psi_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x^i} \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

и выполнено условие максимума, то функция $H(\psi(t), x(t), u(t))$ переменного t постоянна и неравенство (1.12.6) можно проверять при любом другом значении t $(t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$.

Пример 1.12.1. Рассмотреть задачу об оптимальном быстродействии для уравнения $\frac{d^2x}{dt^2}=u$, $|u| \leqslant 1$, в случае, когда конечным положением служит начало координат.

В этом примере

$$\frac{dx_1}{dt}=x^2, \qquad \frac{dx^2}{dt}=u,$$

$$H=\psi_1 x^2+\psi_2 u, \qquad \frac{d\psi_1}{dt}=0, \qquad \frac{d\psi_2}{dt}=-\psi_1, \qquad \psi_1=C_1, \qquad \psi_2=C_2-C_1 t.$$

H есть линейная функция от u, ее наибольшее значение достигается либо при $u=-1$, либо при $u=1$, причем $u=-1$, когда $\psi_2<0$, и $u=1$, когда $\psi_2>0$ (тогда $\psi_2 u>0$). Но это значит, что $u(t)=\operatorname{sign}\psi_2(t)=\operatorname{sign}(C_2-C_1 t)$. Оптимальное управление найдено, это кусочно-постоянная функция с двумя интервалами постоянства, на которых $u(t)$ принимает значения -1 и $+1$.

Если $u \equiv 1$, то $\frac{dx^2}{dt}=u \equiv 1$ (>0) и x^2 есть возрастающая функция от t. Так как $\frac{dx^1}{dx^2}=x^2$, то $x^1=\frac{(x^2)^2}{2}+C_1$, т. е. кусок фазовой траектории, соответствующий $u \equiv 1$, есть парабола.

Аналогично при $u \equiv -1$, $\frac{dx^2}{dt}=u \equiv -1$ (<0) и x^2 есть убывающая функция от t, $\frac{dx^1}{dx^2}=-x^2$, $x^1=-\frac{(x^2)^2}{2}+C_2$, т. е. кусок фазовой траектории, соответствующий управлению $u \equiv -1$, также есть парабола.

Оптимальная траектория, если она существует, состоит из кусков двух парабол, принадлежащих указанным семействам парабол, причем вторая парабола должна проходить через начало координат.

Можно показать, что найденные фазовые траектории действительно являются оптимальными.

1.12.3. Принцип максимума и вариационное исчисление. Из принципа максимума могут быть получены все необходимые условия экстремума: уравнения Эйлера — Лагранжа, условие Лежандра, условия Вейерштрасса, правило множителей для задачи Лагранжа. Ниже дается краткий вывод условия Вейерштрасса для функционала, зависящего от нескольких неизвестных функций

$$J=\int_{t_0}^{t_1} f^0(x^1, x^2, \ldots, x^n, u_1, \ldots, u_n)\,dt,$$

где

$$u_i=\frac{dx^i}{dt}.$$

Для этой задачи

$$\mathcal{H}(\psi, x, u)=\psi_0 f^0(x, u)+\sum_{i=1}^{n}\psi_i u_i,$$

$$\mathcal{H}(\psi, x, z)-\mathcal{H}(\psi, x, x')-\sum_{i=1}^{n}(z_i-x^{i\prime})\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial u_i}(\psi, x, x')=$$

$$=\psi_0 f^0(x, z)-\psi_0 f^0(x, x')+\sum_{i=1}^{n}\psi_i(z_i-x^{i\prime})-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}(z_i-x^{i\prime})(\psi_0 f^0_{x^{i\prime}}+\psi_i)=\psi_0 f^0(x, z)-\psi_0 f^0(x, x')-$$

$$-\psi_0\sum_{i=1}^{n}(z_i-x^{i\prime})f^0_{x^{i\prime}}=\psi_0 E(x, x', z),$$

где $E(x, x', z)$ — функция Вейерштрасса.

Если функция $\mathcal{H}$ достигает максимума при $u=x'$, являющихся внутренними точками U, то в этих точках

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial u_i}=0$$

и, учитывая, что $\psi_0<0$, из неравенства

$$\mathcal{H}(\psi, x, z)-\mathcal{H}(\psi, x, x')=\psi_0 E(x, x', z)\leqslant 0$$

следует, что вдоль оптимальной траектории

$$E(x, x', z)\geqslant 0.$$

Это и есть условие Вейерштрасса.

Аналогично получается условие Вейерштрасса для функционала, зависящего явно от независимой переменной и нескольких неизвестных функций, а также в задачах Лагранжа, Майера, Больца.

Из данного вывода вытекает, что когда множество U допустимых значений управляющих функций открыто, то принцип максимума совпадает с необходимым условием Вейерштрасса. Если же оптимальное управление попадает на границу области U, то там, вообще говоря, производные $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_i}$ в нуль не обращаются и в разложении $\mathcal{H}(\psi, x, u+\Delta u)=\mathcal{H}(\psi, x, u)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_i}\Delta u_i+$ члены второго и выше порядков относительно Δu вблизи указанной точки имеются члены первого порядка малости относительно Δu. В этом случае неотрицательность функции Вейерштрасса, имеющей второй порядок малости, перестает быть необходимым условием максимальности функции $\mathcal{H}$ — условие Вейерштрасса, вообще говоря, не выполняется, тогда как принцип максимума остается верным.

Изложение, данное выше, следует главе 1 книги Понтрягина, Болтянского, Гамкрелидзе, Мищенко [1]. См. также Гельфанд и Фомин [1].

1.12.4. Принцип оптимальности Беллмана (динамическое программирование). Пусть рассматривается физическая система S, состояние которой в любой момент времени определяется вектором p; компоненты этого вектора называют *фазовыми переменными*. Обычно p — конечномерный вектор.

Кроме того, пусть имеется семейство преобразований $\{T(p, q)\}$, где векторная переменная q играет роль параметра и называется *решением*. В общем случае q есть функция p.

Выбор решения q изменяет состояние физической системы S, а именно изменяется определяющий ее вектор p, переходящий в p':

$$p'=T(p, q).$$

Процесс, состоящий из выбора N решений, называется *N-шаговым процессом*. Свяжем с ним скалярную функцию

$$F(p_1, p_2, \ldots, p_N;\ q_1, q_2, \ldots, q_N),$$

с помощью которой оценивается конкретная последовательность решений $q_1, q_2, \ldots, q_N$ и состояний $p_1, p_2, \ldots, p_N$. Эту функцию называют *критерием* или *функцией* дохода.

Ставится задача выбрать q_i так, чтобы максимизировать эти функции p_i и q_i.

Последовательность допустимых решений $\{q_1, q_2, \ldots, q_N\}$ называют *политикой* (*стратегией*).

Политика, доставляющая максимальное значение функции критерия, называется *оптимальной*.

Предположим, что после k шагов принятия решений влияние оставшихся $N-k$ шагов процесса на функцию критерия зависит только от состояния системы в конце k-го решения и от последующих решений $q_{k+1}, q_{k+2}, \ldots, q_N$.

Имеет место:

Принцип оптимальности. Оптимальная политика обладает тем свойством, что, каковы бы ни были начальное состояние и начальное решение, последующие решения должны составлять оптимальную политику относительно состояния, являющегося результатом применения первого решения.

Пример 1.12.2. Функция критерия

$$\sum_{k=1}^{N} g(p_k, q_k),$$

$$p_i = T(p_{i-1}, q_{i-1}) \qquad (i = 2, 3, \ldots, N).$$

Если принять решение q_1, тогда p_1 переходит в $T(p_1, q_1)$, а N-шаговый процесс – в $(N-1)$-шаговый. Максимальное значение критерия от оставшихся $(N-1)$-шагов будет $f_{N-1}(T(p_1, q_1))$. Тогда

$$f_N(p_1) = g(p_1, q_1) + f_{N-1}[T(p_1, q_1)].$$

Следовательно, q_1 выбирается так, что

$$f_N(p_1) = \max_{q_1} [g(p_1, q_1) + f_{N-1}[T(p_1, q_1)]].$$

1.12.5. Вариационное исчисление и принцип оптимальности Беллмана. Задача минимизации функционала

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y')\,dx, \qquad y(a) = c, \tag{1.12.7}$$

сводится к рассмотрению минимального значения функционала в качестве функции начального значения переменной a и заданного значения c:

$$f(a, c) = \min_y J(y) \qquad (-\infty < a < b, \ -\infty < c < \infty), \tag{1.12.8}$$

При любом Δ

$$\int_a^b = \int_a^{a+\Delta} + \int_{a+\Delta}^b$$

и из принципа оптимальности следует

$$f(a, c) = \min_y \left[\int_a^{a+\Delta} F(x, y, y')\,dx + f(a+\Delta, c(y)) \right]. \tag{1.12.9}$$

Здесь $y = y(x)$, $a \leqslant x \leqslant a+\Delta$, $y(a) = c$, $c(y) = y(a+\Delta)$. Соотношение (1.12.9) получается из следующих соображений: при любом выборе Δ наименьшее значение суммы

$$\int_a^{a+\Delta} F(x, y, y')\,dx + \int_{a+\Delta}^b F(x, y, y')\,dx$$

будет получено, если минимизировано второе слагаемое, после чего полученная сумма минимизируется по всем y, определенным на отрезке $[a, a+\Delta]$.

При малых Δ

$$\int_a^{a+\Delta} F(x, y, y')\,dx = F(a, c, y'(a))\,\Delta + o(\Delta),$$

$$c(y) = a + y'(a)\,\Delta + o(\Delta)$$

и при обозначении $y'(a) = v$

$$f(a, c) = \min_v [F(a, c, v)\,\Delta + f(a+\Delta, c+v\Delta)] + o(\Delta),$$

что при $\Delta \longrightarrow 0$ приводит к уравнению в частных производных

$$-\frac{\partial f}{\partial a} = \min_v \left[F(a, c, v) + v\frac{\partial f}{\partial c}\right], \tag{1.12.10}$$

$$f(b, c) = 0 \text{ для всех } c,\ a < b.$$

Замена a на x, v на y' дает

$$f(x, y) = \min_{y'} \left[F(x, y, y')\,\Delta + f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}y'\Delta + \ldots\right],$$

откуда

$$0 = \min_{y'} \left[F(x, y, y') + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}y'\right]$$

и, следовательно,

$$F_{y'} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \tag{1.12.11}$$

$$F + \frac{\partial f}{\partial x} + y'\frac{\partial f}{\partial y} = 0. \tag{1.12.12}$$

Из (1.12.11) и (1.12.12) следует уравнение Эйлера—Лагранжа.

Получение необходимых условий минимума для исходного функционала приведено к получению необходимых условий минимума функции от y'

$$\Phi(y') = F(x, y, y') + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}y'. \tag{1.12.13}$$

Необходимое условие минимума

$$\Phi''(y') \geqslant 0$$

превращается в условие Лежандра

$$F_{y'y'} \geqslant 0. \tag{1.12.14}$$

Если $Y' \neq y'$, то

$$F(x, y, y') + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' \leqslant F(x, y, Y') + \frac{\partial f}{\partial x} + Y' \frac{\partial f}{\partial y},$$

что дает условие Вейерштрасса

$$E(x, y, y', Y') = \\ = F(x, y, Y') - F(x, y, y') - (Y' - y') F_{y'} \geqslant 0. \qquad (1.12.15)$$

Метод Беллмана распространяется и на все остальные задачи вариационного исчисления, рассмотренные ранее

1.12.6. Связь динамического программирования с задачами условного экстремума и принципом максимума. Пусть дана система дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{dt} = g_i(y_1, y_2, \ldots, y_N; z; t), \qquad y_i(0) = c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, N).$$

Требуется определить неизвестную функцию z (управление) так, чтобы минимизировать время, требуемое для перехода системы в состояние $(d_1, d_2, \ldots, d_N)$, т. е. функционал $T = T(z)$ определяется условиями

$$y_i(T) = d_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, N).$$

Эта задача об оптимальном быстродействии.

Если $f(y, t)$ — время, требуемое для перевода системы из состояния y и момент t в желаемое конечное состояние, то из принципа оптимальности следует

$$f(y, t) = \min_{z(t)} [\Delta + f(y + g\Delta, t + \Delta)] + o(\Delta),$$

откуда

$$0 = \min_z \left[1 + \sum_{i=1}^{N} f_{y_i} g_i + f_t \right]. \qquad (1.12.16)$$

Из (1.12.16) следует

$$0 = \sum_{i=1}^{N} f_{y_i} \frac{\partial g_i}{\partial z}, \qquad (1.12.17)$$

$$0 = 1 + \sum_{i=1}^{N} f_{y_i} g_i + f_t. \qquad (1.12.18)$$

По определению функции $f(y, t)$ имеем $f_t = 0$ при $t = T$, следовательно, $\sum_{i=1}^{N} f_{y_i}(T) g_i(T) = -1$. Если g_i не зависит от t, имеет место

первый интеграл системы $\sum_{i=1}^{N} f_{y_i} g_i = -1$ вдоль оптимальной траектории. Для функций y, значения которых в точке T не определены, $f_{y_i}(T)=0$. Если известны f_{y_i}, то из (1.12.17) и (1.12.18) находится z.

Для нахождения f_{y_i}, называемых *функциональными множителями* (а в работах, связанных с принципом максимума,— импульсами), в тех случаях, когда g_i не зависят от t, служат дифференциальные уравнения, получаемые из (1.12.17) и (1.12.18):

$$\frac{d}{dt} f_{y_i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial y_j} f_{y_j} = 0 \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ N)$$

и совпадающие с уравнениями для функций ψ_i в принципе максимума. Последняя система вместе с исходной и уравнением (1.12.17) определяет N функциональных множителей, N величин $y_1, y_2, \ldots, y_N$ и $f(y,\ t)$.

Рассмотренные в этой главе задачи являются общими задачами условного экстремума (Лагранжа, Майера, Больца) и, как указывалось ранее, из принципа максимума и принципа оптимальности следуют все необходимые условия экстремума в этих задачах.

Принцип оптимальности является основой так называемого динамического программирования, разрабатываемого Беллманом и его сотрудниками, начиная с 1950 г.

См. Беллман и Дрейфус [1].

По вопросу об оптимальных принципах см. статью Литовченко [1].

По вопросу о необходимости и достаточности принципа максимума и принципа оптимальности см. Болтянский [1], [2].

§ 13. Линейное программирование

1.13.1. Постановка задачи. Разнообразные вопросы, возникающие в экономике, военном и инженерном деле, часто приводят к следующей задаче.

Найти максимум линейной формы *(целевой функции)*

$$z = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n \tag{1.13.1}$$

при условиях

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leqslant a_i \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ m>n)$$

или, что то же, при условиях

$$y_i \equiv -a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \ldots - a_{in}x_n + a_i \geqslant 0 \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ m>n). \tag{1.13.2}$$

Ниже, в п. 1.13.4, приведена в качестве примера задача линейного программирования, частный случай так называемой транспортной задачи.

1.13.2. Геометрическая интерпретация. Из аналитической геометрии известно, что геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $A\tilde{x}_1+B\tilde{x}_2+C\geqslant 0$, есть полуплоскость, лежащая по одну сторону прямой $Ax_1+Bx_2+C=0$, причем для точки $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ число $A\tilde{x}_1+B\tilde{x}_2+C$, называемое *уклонением* этой точки от указанной прямой, с точностью до множителя равно расстоянию от точки $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ до прямой $Ax_1+Bx_2+C=0$. Задание неравенств

$$\left.\begin{array}{l} A_1x_1+B_1x_2+C_1\geqslant 0, \\ A_2x_1+B_2x_2+C_2\geqslant 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_kx_1+B_kx_2+C_k\geqslant 0 \end{array}\right\} \qquad (1.13.3)$$

определяет некоторую выпуклую многоугольную область, которую будем называть просто *многоугольником*.

Задача линейного программирования может быть сформулирована как нахождение точки, принадлежащей многоугольнику (1.13.3) и наиболее уклоняющейся от прямой

$$z=p_1x_1+p_2x_2=0.$$

В зависимости от расположения многоугольника (1.13.3) и прямой $p_1x_1+p_2x_2=0$ задача имеет единственное решение, бесконечное множество решений или совсем не имеет решения.

В данном плоском случае ясно, что решения задачи, если они существуют, даются точками, лежащими либо в вершинах многоугольника (1.13.3), называемого также *многоугольником решений*, либо на его сторонах.

В частности, когда многоугольник (1.13.3) имеет сторону, параллельную прямой $p_1x_1+p_2x_2=0$ и содержащую хотя бы одну точку, дающую решение задачи, то любая точка указанной стороны также дает решение этой задачи.

Если же многоугольник (1.13.3) бесконечен или же система неравенства (1.13,2) противоречива, то задача не имеет решения.

Аналогичные соображения, распространяющиеся и на общий случай, в котором вместо многоугольника (1.13.3) будет фигурировать некоторый выпуклый многогранник, а вместо прямой — плоскость.

1.13.3. Симплекс-метод. Первым этапом решения задачи линейного программирования является отыскание какой-либо вершины многогранника решений. Решение системы (1.13.2), соответствующее вершине, называется *опорным;* имея опорное решение и отвечающее ему значение целевой функции, находят направление к другой вершине многогранника, в котором целевая функция возрастает и, таким образом, приходят ко второму опорному решению. Повторение этого процесса приводит к оптимальному решению (если таковое существует) поставленной задачи.

Пусть, например, требуется максимизировать целевую функцию

$$z=-12x_1+3x_2$$

при ограничениях

$$\left.\begin{aligned} &\text{I)}\ y_1 = -x_1 + 2x_2 + 8 \geqslant 0,\\ &\text{II)}\ y_2 = x_1 + x_2 + 1 \geqslant 0,\\ &\text{III)}\ y_3 = 3x_1 - x_2 - 1 \geqslant 0,\\ &\text{IV)}\ y_4 = -2x_1 - 4x_2 + 10 \geqslant 0,\\ &\text{V)}\ y_5 = -2x_1 + x_2 + 10 \geqslant 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1.13.4)$$

Многоугольник решений, являющийся пересечением полуплоскостей (1.13.4), показан на рис. 1.13.1.

Перейдем от прямоугольных декартовых координат (x_1, x_2) к косоугольной системе координат (y_1, y_2) по формулам

$$y_1 = -x_1 + 2x_2 + 8, \qquad y_2 = x_1 + x_2 + 1$$

или

$$x_1 = -\frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + 2,$$

$$x_2 = \frac{1}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2 - 3.$$

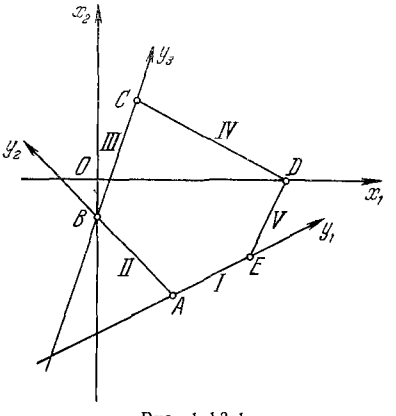

Рис. 1.13.1.

В этой косоугольной системе координат осями координат являются прямые $y_1=0$ и $y_2=0$, а началом координат — одна из вершин многоугольника решений. Существенным обстоятельством является то, что координаты (y_1, y_2) всех точек многоугольника решений неотрицательны.

Целевая функция $z = -12x_1 + 3x_2$ принимает вид $z = 5y_1 - 7y_2 - 33$, причем $z\Big|_{\substack{y_1=0\\ y_2=0}} = -33$.

Целевая функция возрастает при движении точки (y_1, y_2) в положительном направлении оси y_1 $(y_2=0)$.

Таким образом, найдено первое опорное решение и направление оптимизации целевой функции.

Решение задачи усложнилось бы, если за оси новой системы координат были бы взяты прямые

$$y_1 = -x_1 + 2x_2 + 8, \qquad y_3 = 3x_1 - x_2 - 1.$$

Начало новой системы координат в этом случае лежит вне многоугольника решений и первым этапом решения задачи становится приближение к одной из вершин многоугольника решений, после чего процесс осуществляется по указанному выше плану.

В общем случае, когда задан многогранник, в вершинах которого (на ребрах или гранях) отыскивается решение задачи линейного программирования, производится переход от исходной декартовой прямоугольной системы координат к косоугольной, в которой в качестве координатных плоскостей используются и некоторые из гиперплоскостей, ограничивающих указанный многогранник. При этом координаты всех точек многогранника становятся неотрицательными. После этого отыскивается первое опорное решение и направление, в котором целевая функция возрастает. Нахождение второго опорного решения и повторение процесса нахождения последующих опорных решений приводит к получению оптимального решения, если только задача разрешима.

Описанный способ решения задачи линейного программирования носит название *симплекс-метода Данцига*.

В последние годы в качестве алгебраической основы симплекс-метода успешно применяется указанный Штифелем аппарат жордановых исключений.

Дальнейшая разработка и геометризация этого аппарата содержится в книге Зуховицкого и Авдеевой [1]. См. также Приложение в книге Зуховицкого и Радчик [1].

1.13.4. Связь с динамическим программированием. Соображения, приведенные в п. 1.13.2, показывают, что методы дифференциального исчисления неприменимы для решения задач линейного программирования, в которых решение всегда находится на границе области определения функции (1.13.1). Однако задачи линейного программирования можно формулировать как задачи динамического программирования, как это будет показано ниже, следуя Беллману и Дрейфусу, на примере одной *транспортной задачи*.

Имеется два склада, содержащие соответственно x_1 и x_2 некоторого ресурса и N пунктов потребления с потребностями соответственно $r_1, r_2, \ldots, r_N$ в этом ресурсе. Общий запас равен общему спросу:

$$x_1+x_2=r_1+r_2+\ldots+r_N.$$

Пусть x_{ij} — количество ресурсов, отправляемых из i-го склада в j-й пункт потребления и $g_{ij}=d_{ij}x_{ij}$ — стоимость осуществления этой операции. Требуется минимизировать функцию

$$\sum_{i,j} d_{ij}x_{ij} \text{ (в рассматриваемом случае } i=1,\ 2;\ j=1,\ \ldots,\ N)$$

при условиях

$$x_{ij} \geqslant 0,$$

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij}=x_i,$$

$$\sum_{i=1}^{M} x_{ij}=r_j.$$

Пусть $f_N(x_1, x_2)$ — величина затрат при использовании оптимальной политики, когда начинают соответственно с количеств x_1, x_2 при фиксированных потребностях $r_1, r_2, \ldots, r_N$.

Удовлетворение первого спроса в N-м пункте потребления дает затраты

$$g_{1N}(x_{1N})+g_{2N}(x_{2N})$$

и уменьшает ресурсы на складах до x_1-x_{1N} и x_2-x_{2N}. Из принципа оптимальности следует при $N \geqslant 2$

$$f_N(x_1, x_2)=\min_{\{R_N\}}\left[g_{1N}(x_{1N})+g_{2N}(x_{2N})+f_{N-1}(x_1-x_{1N},\ x_2-x_{2N})\right],$$

где R_N — двумерная область, определяемая условиями

$$x_{1N}+x_{2N}=r_N,$$

$$0 \leqslant x_{1N} \leqslant x_1,$$

$$0 \leqslant x_{2N} \leqslant x_2;$$

при $N=1$ имеем $f(x_1, x_2)=g_{11}(x_1)+g_{21}(x_2)$.

Использование условия $x_1+x_2=\sum_{i=1}^{N} r_i$ позволяет исключить параметр x_2, тогда для $f_N(x_1, x_2)\equiv f_N(x_1)$ имеет место соотношение

$$f_N(x_1)=\min_{x_{1N}}\{[g_{1N}(x_{1N})+g_{1N}(r_N-x_{1N})+f_{N-1}(x_1-x_{1N})],$$

$$0\leqslant x_1-x_{1N},$$

$$0\leqslant r_N-x_{1N}\leqslant\sum_{k=1}^{N} r_i-x_1,$$

$$0\leqslant x_1\leqslant\sum_{i=1}^{N} r_i.$$

В книге указанных авторов приведены вычисления для случая двух складов и десяти пунктов потребления, а также для трех складов и десяти пунктов потребления.

В приведенном примере g_{ij} можно рассматривать и в виде нелинейной функции xi_j.

Возможность формулирования задач линейного программирования как задач динамического программирования не означает, что это необходимо делать, поскольку во многих случаях вычислительные методы линейного программирования оказываются достаточно эффективными.

Литература по линейному программированию весьма обширна. Для студентов втузов и инженеров можно рекомендовать следующие книги: Карпелевич и Садовский [1], Зуховицкий и Авдеева [1], Юдин и Гольштейн [1].

§ 14. Прямые методы вариационного исчисления

1.14.1. Постановка задачи. Обычные методы вариационного исчисления, при которых задача минимизации функционала сводится к интегрированию уравнений Эйлера—Лагранжа, часто приводят к очень трудоемким вычислениям, что делает эти методы мало эффективными.

Большим распространением при решении теоретических и прикладных задач пользуются прямые методы, заключающиеся в следующем.

Пусть требуется найти минимум некоторого функционала $J(y)$, о котором известно, что точная нижняя грань его значений $\inf J(y)=m>-\infty$. Пусть удалось найти последовательность допустимых функций $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ такую, что

$$\lim_{n\to\infty} J(y_n)=m.$$

Во многих важных случаях при этом оказывается, что минимизирующая последовательность $\{y_k\}$ сходится к функции y, для которой

$$J(y)=m,$$

и тем самым вариационная задача решена.

С другой стороны, прямые методы вариационного исчисления доставляют решение тех краевых задач дифференциальных уравнений, которые могут рассматриваться как совокупность уравнений Эйлера—Лагранжа и краевых условий в задаче минимизации некоторого функционала.

1.14.2. Метод Ритца. Примеры. Пусть требуется найти минимум функционала

$$J(y)=\int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,dx, \qquad y(x_1)=a_1, \qquad y(x_2)=a_2, \tag{1.14.1}$$

в некотором классе функций.

Рассматривается n-параметрическое семейство функций

$$y(n, x)=\varphi_0(x)+\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i(x), \tag{1.14.2}$$

где $\varphi_0(x_1)=a_1$, $\varphi_0(x_2)=a_2$; $\varphi_i(x)$, $\varphi_i(x_1)=\varphi_i(x_2)=0$ $(i=0, 1, \ldots, n, \ldots)$ — последовательность линейно независимых функций. Взятые функции называют *координатными*.

На функциях (1.14.2) данный функционал превращается в функцию n переменных

$$J(y(n, x))=\Phi(c_1, c_2, \ldots, c_n). \tag{1.14.3}$$

Выбираются те значения $c_1, c_2, \ldots, c_n$, которые обращают функцию Φ в минимум. При найденных c_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ функция (1.14.2) обозначается через $y_n(x)$. Во многих практически важных случаях последовательность найденных таким образом функций $y_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ является минимизирующей и дающей решение поставленной задачи.

Указанный метод принадлежит Ритцу (1908 г.).

Существование абсолютного минимума функционала (1.14.1) и достижение этого минимума посредством построения минимизирующей последовательности функций обеспечивается выполнением следующих условий.

Обозначим через G замкнутую область плоскости x, y, в которой лежат линии $y_n(x)$.

Функция $F(x, y, z)$ непрерывна по совокупности своих аргументов при $(x, y)\in G$ и любом конечном z.

Существуют константы $\alpha>0$, $p>1$, β, для которых

$$F(x, y, z)\geqslant\alpha|z|^p+\beta,$$

каково бы ни было z и для любой точки $(x, y)\in G$.

Функция $F(x, y, z)$ имеет непрерывную производную $F_z(x, y, z)$ и для любой точки $(x, y)\in G$ эта производная есть неубывающая функция от z $(-\infty<z<\infty)$.

При этом интегрирование понимается в смысле Лебега (см. п. 2.0.3), а функционал рассматривается в классе абсолютно непрерывных функций.

Указанные условия выполняются, в частности, для функционалов вида

$$\int_{x_1}^{x_2} \{p(x)y'^2+q(x)y^2-2g(x)y\}\,dx, \qquad y(x_1)=a_1, \qquad y(x_2)=a_2,$$

где $p(x)>0$, $q(x)\geqslant 0$ и $g(x)$ — известные непрерывные функции в конечном интервале $[x_1, x_2]$.

См. Ахиезер [1].

Важное значение для применений имеют линейные вариационные задачи, т. е. задачи о минимизации функционалов, уравнения Эйлера — Лагранжа которых линейны.

Условием применимости метода Ритца к минимизации таких функционалов является их положительная определенность, т. е. существование положительной константы γ такой, что

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,dx \geqslant \gamma \int_{x_1}^{x_2} y^2\,dx$$

и соответственно

$$\iint_D F(x, y, u, u_x, u_y)\,dx\,dy \geqslant \gamma \iint_D u^2\,dx\,dy$$

в классе функций, непрерывно дифференцируемых достаточное число раз и удовлетворяющих краевым условиям задачи.

Подробное рассмотрение этого вопроса см. Михлин [1], [4].

Пример 1.14.1. Минимизировать функционал

$$\int_0^1 (y'^2+y^2+2xy)\,dx, \qquad y(0)=y(1)=0.$$

Пусть

$$\varphi_0(x)\equiv 0, \quad \varphi_1(x)=x^2-x, \quad \varphi_2(x)=x^3-x^2, \ \ldots, \ \varphi_n(x)=x^{n+1}-x^n, \ \ldots$$

При $n=2$

$$y(2, x)=c_1(x^2-x)+c_2(x^3-x^2),$$

$$y'(2, x)=c_1(2x-1)+c_2(3x^2-2x),$$

$$J(y(2, x))=\Phi(c_1, c_2)=\frac{11}{30}c_1^2+\frac{11}{30}c_1c_2+\frac{1}{7}c_2^2-\frac{1}{6}c_1-\frac{1}{10}c_2.$$

Используя условия $\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial\Phi}{\partial c_1}=0,\\[2mm] \dfrac{\partial\Phi}{\partial c_2}=0,\end{array}\right.$ получим

$$\frac{11}{15}c_1+\frac{11}{30}c_2=\frac{1}{6},$$

$$\frac{11}{30}c_1+\frac{2}{7}c_2=\frac{1}{10}.$$

Отсюда

$$c_1=\frac{69}{473}, \qquad c_2=\frac{7}{43}$$

и

$$y(2, x)=\frac{77x^3-8x^2-69x}{473}.$$

В данном случае можно указать точное решение:

$$y=\frac{e}{e^2-1}(e^x-e^{-x})-x.$$

Нижеследующая таблица дает сопоставление точного и приближенного решений:

x	y	$y(2, x)$
0,0	0,0000	0,0000
0,2	−0,0287	−0,0285
0,4	−0,0505	−0,0506
0,5	−0,0566	−0,0568
0,6	−0,0583	−0,0585
0,8	−0,0444	−0,0442
1,0	0,0000	0,0000

Пример 1.14.2. Модификация метода Ритца.

Пусть требуется минимизировать функционал

$$J(y)=\int_0^1 e^y y'^2\,dx, \qquad y(0)=0, \qquad y(1)=2\ln 2.$$

Решение этой задачи обычными методами приводит к функции

$$y=2\ln(1+x).$$

Для приближенного решения выбирается последовательность, конструируемая из многочленов третьей степени следующим образом.

1-е приближение. Многочлены третьей степени, для которых y и y' принимают при $x=0$ и $x=1$ заданные значения.

2-е приближение. Функции класса $C_1[0, 1]$ с заданными значениями y и y' при $x=0$, $x=\frac{1}{2}$, $x=1$ и кубических в каждом из двух интервалов.

k-е приближение. Функции класса $C_1[0, 1]$ с заданными значениями для y и y' при $x=\frac{j}{2^{k-1}}$ $(j=0, 1, \ldots)$ и кубических в каждом из 2^{k-1} малых интервалов.

Для каждого k функционал $J(y)$ заменяется значением $J_k(y)$, которое вычисляется в каждом интервале по правилу Симпсона, причем необходимые для этого средние значения y и y' находятся по формулам

$$\bar{y}=\frac{1}{2}(y_1+y_2)-\frac{h}{4}\left(y'_2-y'_1\right),$$

$$\bar{y}'=\frac{3}{4h}(y_2-y_1)-\frac{1}{4}\left(y'_2+y'_1\right),$$

выражающим их через значения y_1, y'_1 на левом и y_2, y'_2 на правом концах интервала длины h.

Так как значения y заданы при $x=0$ и $x=1$, то функции из первого приближения полностью определяются их производными y' при $x=0$ и $x=1$.

Эти значения, умноженные на постоянные множители, обозначены через η_0 и η_1 и приняты в качестве независимых переменных в первом приближении.

Первое приближение:

$$x_0=0;\quad x_1=0{,}5;\quad x_2=1{,}0;\quad h_1=0{,}5;\quad y_0=0,\quad y_2=2\ln 2,\quad \eta_i=h_1y_i' \qquad (i=0,1,2),$$

$$J_1(y)=\frac{h_1}{3}\left[y_0'^2+4e^{y_1}y_1'^2\right]=\frac{1}{3h_1}\left[\eta_0^2+4e^{y_1}\eta_1^2+4\eta_2^2\right],$$

$$y_1=\frac{1}{2}(y_0+y_2)-\frac{1}{4}(\eta_2-\eta_0)=0{,}69315+0{,}25\eta_0-0{,}25\eta_2,$$

$$\eta_1=\frac{3}{4}(y_2-y_0)-\frac{1}{4}(\eta_2+\eta_0)=1{,}039725-0{,}25\eta_0-0{,}25\eta_2.$$

Берем η_0 и η_2 за независимые переменные и решаем уравнения

$$f_0=3h_1\frac{\partial J_1}{\partial\eta_0}=2\eta_0+e^{y_1}\eta_1^2-2e^{y_1}\eta_1=2\eta_0-(2-\eta_1)\,\eta_1e^{y_1}=0,$$

$$f_2=3h_1\frac{\partial J_1}{\partial\eta_2}=8\eta_2-e^{y_1}\eta_1^2-2e^{y_1}\eta_1=8\eta_2-(2+\eta_1)\,\eta_1e^{y_1}=0.$$

Решения последней системы (методом Ньютона) дают

$$\eta_0=1{,}006,\qquad \eta_1=0{,}663,\qquad \eta_2=0{,}501,\qquad y_1=0{,}819,$$

тогда как точное решение дает

$$\eta_0=1{,}000,\qquad \eta_1=0{,}667,\qquad \eta_2=0{,}500,\qquad y_1=0{,}819.$$

Подробное решение этой задачи вместе со вторым приближением см. Моррей [1].

Пример 1.14.3. Найти функцию $u=u(x, y)$, гармоническую в области G: $x>0$, $y>0$, $x+y<1$ и удовлетворяющую на границе Γ: $x=0$, $y=0$, $x+y=1$ условию

$$u_\Gamma=x^2+y^2.$$

Гармоническая функция удовлетворяет уравнению Лапласа, являющемуся уравнением Эйлера–Остроградского для интеграла Дирихле

$$\iint\limits_D\left(u_x^2+u_y^2\right)dx\,dy. \qquad (1.14.4)$$

Выберем координатные функции

$$\left.\begin{aligned}
&u_0(x, y)=x^2+y^2,\\
&u_1(x, y)=xy(1-x-y),\\
&u_2(x, y)=x^2y(1-x-y),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&u_n(x, y)=x^ny(1-x-y).
\end{aligned}\right\} \qquad (1.14.5)$$

Функция

$$\varphi(x, y)=x^2+y^2+c_1xy(1-x-y)+c_2x^2y(1-x-y)+c_3x^3y(1-x-y) \qquad (1.14.6)$$

удовлетворяет краевому условию при любых значениях постоянных c_1, c_2, c_3. Подстановка (1.14.6) в (1.14.4) превращает интеграл Дирихле в функцию $\Phi(c_1, c_2, c_3)$ трех переменных c_1, c_2, c_3, которые надо выбрать так, чтобы эта функция получила минимальное значение. Приравняв нулю частные производные $\frac{\partial\Phi}{\partial c_1}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial c_2}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial c_3}$, можно найти, что $c_1\approx 3{,}0401$, $c_2=c_3=-0{,}0562$. Приближенное решение задачи

$$\varphi(x, y)=x^2+y^2+xy(1-x-y)\,[3{,}0401-0{,}0562\,(x+y)].$$

О методе Ритца и других прямых методах см. Михлин [1], [4], [5], а также Канторович и Крылов [1].

1.14.3. Метод конечных разностей. Этот метод, впервые примененный Эйлером, заключается в том, что функционал, например

$$J(y)=\int_{x_1}^{x_2} F(x,\ y,\ y')\,dx,$$

рассматривается на ломаных, составленных из заданного числа n прямолинейных звеньев с заданными абсциссами вершин.

При этом функционал превращается в функцию ординат вершин указанных ломаных и дальнейшая процедура минимизации проводится так же, как и в методе Ритца (частным случаем которого может считаться и сам метод конечных разностей).

Пример 1.14.4. Минимизировать функционал

$$\int_0^1 (y'^2+y^2+2xy)\,dx, \qquad y(0)=y(1)=0.$$

Принимаем $\Delta x=\frac{1-0}{5}=0{,}2$. Имеем

$$y(0)=0,\quad y_1=y(0{,}2),\quad y_2=y(0{,}4),\quad y_3=y(0{,}6),\quad y_4=y(0{,}8)\quad y_5=y(1)=0.$$

В качестве приближенных значений производных принимаем

$$y'(0)=\frac{y_1-0}{0{,}2},\quad y'(0{,}2)=\frac{y_2-y_1}{0{,}2},\quad y'(0{,}4)=\frac{y_3-y_2}{0{,}2},$$

$$y'(0{,}6)=\frac{y_4-y_3}{0{,}2},\quad y'(0{,}8)=\frac{0-y_4}{0{,}2}.$$

Данный функционал заменяем суммой по формуле прямоугольников, тогда он превращается в функцию четырех переменных

$$\Phi(y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4)=\left[\left(\frac{y_1}{0{,}2}\right)^2+\left(\frac{y_2-y_1}{0{,}2}\right)^2+y_1^2+0{,}4y_1+\left(\frac{y_3-y_2}{0{,}2}\right)^2+\right.$$
$$\left.+y_2^2+0{,}8y_2+\left(\frac{y_4-y_3}{0{,}2}\right)^2+y_3^2+1{,}2y_3+\left(\frac{y_4}{0{,}2}\right)^2+y_4^2+1{,}6y_4\right]0{,}2.$$

Имеем

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y_1}=\frac{2y_1}{0{,}04}-\frac{2(y_2-y_1)}{0{,}04}+2y_1+0{,}4=0,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y_2}=\frac{2(y_2-y_1)}{0{,}04}-\frac{2(y_3-y_2)}{0{,}04}+2y_2+0{,}8=0,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y_3}=\frac{2(y_3-y_2)}{0{,}04}-\frac{2(y_4-y_3)}{0{,}04}+2y_3+1{,}2=0,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y_4}=\frac{2(y_4-y_3)}{0{,}04}-\frac{2y_4}{0{,}04}+2y_4+1{,}6=0.$$

Отсюда

$$y_1=-0{,}0286,\quad y_2=-0{,}0503,\quad y_3=-0{,}0580,\quad y_4=-0{,}0442.$$

Точные (до четвертого десятичного знака) значения искомой функции $y(0{,}2)=-0{,}0287$, $y(0{,}4)=-0{,}0505$, $y(0{,}6)=-0{,}0583$, $y(0{,}8)=-0{,}0444$.

ГЛАВА II

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 0. Введение

2.0.1. Определение. Примеры. *Интегральными уравнениями* называют уравнения, в которые неизвестные функции входят под знаком интеграла.

Пример 2.0.1. Рассмотрим малые колебания струны длины l. Пусть OB — положение равновесия (рис. 2.0.1), T — натяжение струны. Под действием единичной силы, помещенной в точке x, смещение $k(x, y)$ в точке y задается формулой

$$k(x, y)=\begin{cases}\frac{1}{Tl}x(l-y), & x<y,\\ \frac{1}{Tl}y(l-x), & x>y.\end{cases} \qquad (2.0.1)$$

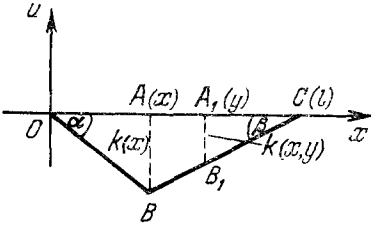

Рис. 2.0.1.

Действительно, проектирование сил на ось Ou в силу условий равновесия дает, что

$$T\sin\alpha+T\sin\beta=1. \qquad (2.0.2)$$

Вследствие малости колебаний $\sin\alpha\approx\operatorname{tg}\alpha=\frac{k(x)}{x}$, $\sin\beta\approx\operatorname{tg}\beta=\frac{k(x)}{l-x}$, где $k(x)$ — смещение струны в точке x.

Из (2.0.2) следует

$$Tk(x)\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{l-x}\right]=1$$

и

$$k(x)=\frac{x(l-x)}{Tl}. \qquad (2.0.3)$$

Рассмотрим случай $x<y$. Из подобия треугольников ABC и A_1B_1C следует, что

$$\frac{k(x, y)}{k(x)}=\frac{l-y}{l-x}$$

и

$$k(x, y)=\frac{x(l-y)}{Tl}.$$

Аналогично выводится вторая часть формулы (2.0.1).

Если на струну действует непрерывно распределенная сила с плотностью $f(y)$, то на интервал длины Δy действует сила $f(y)\Delta y$, которую при малом Δy можно считать сосредоточенной в точке y, и тогда в точке x возникает смещение $k(x, y) f(y) \Delta y$. Под действием всей нагрузки отклонение $u(x)$ будет приближенно равно

$$\sum k(x, y) f(y) \Delta y,$$

что при $\Delta y \to 0$ переходит в

$$u(x)=\int_0^b k(x, y) f(y)\, dy. \tag{2.0.4}$$

Функция $k(x, y)$ носит название *функции влияния*. При выводе (2.0.4) была использована симметричность этой функции $k(y, x)=k(x, y)$. Если на струну внешние силы не воздействуют, то при нарушении ее равновесия возникают свободные колебания струны.

Пусть $u(x, t)$ — отклонение от положения равновесия в точке x в момент времени t; ускорение в точке x в момент времени t равно $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$.

Обозначая через ϱ линейную плотность струны, получим массу элемента струны dy в виде $\varrho\, dy$. Из уравнения равновесия (2.0.4) получается уравнение движения, если $f(y)\, dy$ заменить на $-\varrho\, dy \frac{\partial^2 u(y, t)}{\partial t^2}$, т. е.

$$u(x, t)=-\int_0^b k(x, y) \frac{\partial^2 u(y, t)}{\partial t^2} \varrho\, dy. \tag{2.0.5}$$

Если колебание гармоническое: $u(x, t)=u(x) \sin \omega t$, то, подставляя это выражение в (2.0.5), получается уравнение для определения $u(x)$:

$$u(x)=\varrho\omega^2 \int_0^b k(x, y)\, u(y)\, dy. \tag{2.0.6}$$

Если на струну воздействует внешнее периодическое возбуждение

$$Q(x, t)=q(x) \sin \omega t,$$

то, предполагая, что и струна будет колебаться с тем же периодом, можно из уравнения (2.0.4) получить, применяя принцип Даламбера,

$$u(x) \sin \omega t=\int_0^b k(x, y)\, [q(y) \sin \omega t+\varrho\omega^2 \sin \omega t]\, dy$$

или

$$u(x)=\varrho\omega^2 \int_0^b k(x, y)\, u(y)\, dy+\int_0^b k(x, y)\, q(y)\, dy, \tag{2.0.7}$$

что можно записать в виде

$$u(x)=\varrho\omega^2 \int_0^b k(x, y)\, u(y)\, dy+h(x). \tag{2.0.8}$$

Таким образом, и в случае свободных колебаний, и в случае вынужденных колебаний функция $u(x)$ определяется из интегральных уравнений, соответственно (2.0.6) и (2.0.8).

Пример 2.0.2 (*задача Абеля*). Материальная точка под действием силы тяжести движется в вертикальной плоскости (ξ, η) по некоторой кривой (рис. 2.0.2). Требуется определить эту кривую так, чтобы материальная

точка, начав свое движение без начальной скорости в точке кривой с ординатой y, достигла оси ξ за время $t=f(y)$, где функция $f(y)$ задана заранее.

Абсолютная величина скорости движущейся точки $v=\sqrt{2g(y-\eta)}$. Если α — угол наклона касательной к оси ξ, то

$$\frac{d\eta}{dt}=-\sqrt{2g(y-\eta)}\sin\alpha, \qquad (2.0.9)$$

$$dt=-\frac{d\eta}{\sqrt{2g(y-\eta)}\sin\alpha}. \qquad (2.0.10)$$

Интегрируя (2.0.10) в пределах от 0 до y, получим интегральное уравнение Абеля

$$\int_0^y \frac{\varphi(\eta)\,d\eta}{\sqrt{y-\eta}}=-\sqrt{2g}\,f(y), \qquad (2.0.11)$$

где $\varphi(\eta)=\frac{1}{\sin\alpha}$.

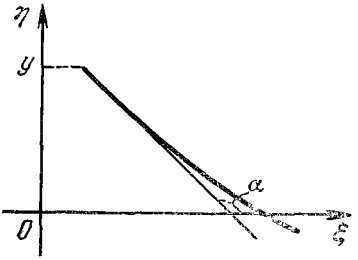

Рис. 2.0.2.

2.0.2. Классификация интегральных уравнений. В данном пункте даются сведения, главным образом, о линейных интегральных уравнениях вида

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)\,\varphi(s)\,ds=f(x), \qquad a\leqslant x\leqslant b. \qquad (2.0.12)$$

Здесь $\varphi(x)$ — искомая функция, $f(x)$ — данная функция, называемая *свободным членом* интегрального уравнения; $K(x,s)$, $a\leqslant x$, $s\leqslant b$, данная действительная функция, называемая *ядром уравнения* (2.0.12); λ — параметр.

При $f(x)\not\equiv 0$ уравнение (2.0.12) называется *неоднородным*; если же $f(x)\equiv 0$, то уравнение (2.0.12) называется *однородным*.

Так, например, уравнение (2.0.6) — однородное линейное интегральное уравнение, уравнение (2.0.8) — неоднородное линейное интегральное уравнение.

Пример 2.0.1 показывает полезность введения параметра в уравнения. Это дает возможность одновременного исследования частот всех возможных колебаний струны.

Важным классом линейных интегральных уравнений является класс интегральных *уравнений Фредгольма второго рода*. Это — уравнения вида (2.0.12), в которых на ядро и свободный член наложены специальные условия.

Так, в книге В. И. Смирнова ядро считается непрерывной комплексной функцией переменных x, s, определенной в квадрате $a\leqslant x$, $s\leqslant b$, где a и b — конечные числа, свободный член считается комплексной функцией, непрерывной в отрезке $[a, b]$.

В книге Михлина [8] ядро — непрерывная комплексная функция переменных x, s, определенная в квадрате $a\leqslant x$, $s\leqslant b$, a и b — конечные; если же ядро разрывное, то предполагается, что

$$\int_a^b\int_a^b |K(x,s)|^2\,dx\,ds<\infty,$$

свободный член — функция, интегрируемая со своим квадратом на отрезке $[a, b]$.

В книге Михлина [9] ядро — комплексная функция переменных (x, s), суммируемая со своим квадратом при $a \leqslant x, s \leqslant b$, a и b могут быть как конечными, так и бесконечными, свободный член — комплексная функция, квадратично суммируемая на $[a, b]$.

В книге Трикоми ядро и свободный член — действительные квадратично суммируемые функции, соответственно на квадрате $a \leqslant x, s \leqslant b$ и на отрезке $[a, b]$, a и b — конечные.

В настоящей книге ядро и свободный член — действительные функции, остальные ограничения приводятся по мере надобности.

Если ядро интегрального уравнения симметрично, т. е.

$$K(x, s) = K(s, x),$$

то интегральное уравнение называется *симметричным*.

В тех случаях, когда рассматриваются комплексные ядра, симметричность определяется соотношением

$$K(x, s) = \overline{K(s, x)}.$$

Основные результаты в теории симметричных интегральных уравнений принадлежат Гильберту и Шмидту.

Уравнение Фредгольма первого рода имеет вид

$$\int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, ds = f(x). \tag{2.0.13}$$

Ограничения, накладываемые на ядро и свободный член в уравнении (2.0.13), те же, что и в уравнении Фредгольма второго рода.

При известной функции $u(x)$ и искомой $f(y)$ уравнение (2.0.4) есть уравнение Фредгольма первого рода.

Частным случаем уравнения Фредгольма, имеющим самостоятельное значение, является *интегральное уравнение Вольтерра*

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x K(x, s)\, \varphi(s)\, ds = f(x). \tag{2.0.14}$$

Как и выше, различают уравнения Вольтерра второго и первого родов.

2.0.3. Сведения об интеграле Лебега. Для дальнейших рассмотрений существенным является понятие *определенного интегрирования по Лебегу*.

В курсе математического анализа *определенный интеграл (по Риману)* строился следующим образом.

Пусть дана функция $f(x)$, определенная и ограниченная на отрезке $[a, b]$.

Обозначим через x_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ произвольные точки отрезка $[a, b]$, причем

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Обозначим далее через ξ_i $(i = 1, \ldots, n)$ произвольные точки отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, причем

$$a_0 = x_0 \leqslant \xi_1 \leqslant x_1 \leqslant \xi_2 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant \xi_n \leqslant x_n = b.$$

Определенный интеграл функции $f(x)$

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

определяется как предел (если таковой существует) интегральных сумм

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i, \qquad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

при $\max \Delta x_i \to 0$, не зависящий от выбора точек x_i и ξ_i.

Пусть m_i и M_i, соответственно, точная нижняя и точная верхняя грани функции $f(x)$ на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ (для непрерывных функций это, соответственно, наименьшее и наибольшее значения $f(x)$ на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$).

Суммами (*нижней* и *верхней*) Дарбу функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называются интегральные суммы

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i.$$

Для того чтобы существовал определенный интеграл функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы при $\max \Delta x_i \to 0$ суммы Дарбу имели общий предел.

Если ввести понятие *колебания* ω_i *функции* $f(x)$ на отрезке $[x_{i1}, x_i]$ посредством формулы

$$\omega_i = M_i - m_i,$$

то выполнение соотношения

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = 0$$

является необходимым и достаточным условием существования определенного интеграла функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Указанным выше условиям удовлетворяют:

а) функции, непрерывные на отрезке $[a, b]$;

б) функции, ограниченные на отрезке $[a, b]$ и имеющие конечное число точек разрыва на этом отрезке;

в) функции, ограниченные и монотонные на отрезке $[a, b]$ (в этом случае функции могут иметь бесконечное количество точек разрыва).

Критерий интегрируемости функции по Риману можно сформулировать иначе, если воспользоваться понятием *множества меры нуль*. Так называют множества, которые можно заключить в конечное или бесконечное количество интервалов, сумма длин которых может быть задана сколь угодно малой.

Множества точек разрыва функций, указанных выше, имеют меру нуль.

Необходимым и достаточным условием интегрируемости функции по Риману является то, что множество точек разрыва имеет меру нуль.

Приведем теперь пример ограниченной функции, неинтегрируемой по Риману. Это

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — иррациональное число,} \\ 2, & \text{если } x \text{ — рациональное число.} \end{cases}$$

На любом частичном отрезке Δx_i

$$\omega_i = 1, \qquad \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = 1$$

и

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = 1 \neq 0.$$

Таким образом, неинтегрируемость данной функции показана.

Покажем теперь, что эта функция может быть представлена в виде предела неубывающей последовательности интегрируемых функций.

Используя несократимые дроби, которые будем брать в порядке возрастания знаменателя, занумеруем все рациональные числа отрезка [0, 1]:

$$r_1=0,\ r_2=\frac{1}{2},\quad r_3=\frac{1}{3},\quad r_4=\frac{2}{3},\quad r_5=\frac{1}{4},\quad r_6=\frac{3}{4},\quad r_7=\frac{1}{5},\ \ldots$$

и положим

$$f_1(x)=\begin{cases}2, & x=r_1,\\ 1, & x\neq r_1,\end{cases}\qquad f_2(x)=\begin{cases}2, & x=r_1,\ r_2,\\ 1, & x\neq r_1,\ r_2,\end{cases},\ \ldots,\quad f_i(x)=\begin{cases}2, & x=r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_i,\\ 1, & x\neq r_1, r_2,\ \ldots,\ r_i.\end{cases}$$

Функции $f_i(x)$ интегрируемы и образуют неубывающую последовательность, причем

$$\int_0^1 f_i(x)\,dx=1 \quad \text{и} \quad f(x)=\lim_{i\to\infty} f_i(x).$$

Кроме того, существует предел

$$\lim_{i\to\infty}\int_0^1 f_i(x)\,dx=1.$$

Имея в виду этот пример, обобщим понятие риманова интеграла следующим образом:

Рассмотрим класс ограниченных на отрезке $[a, b]$ функций, являющихся пределами неубывающих последовательностей, интегрируемых по Риману функций, а также пределами разностей таких последовательностей. Этот класс функций, содержащий в себе, в частности, все интегрируемые по Риману функции, называют *классом измеримых функций* и обозначают $L^1[a, b]$.

В качестве интеграла в смысле Лебега ограниченной измеримой функции принимают предел интегралов последовательности интегрируемых (по Риману) функций, определяющих рассматриваемую функцию.

Указанным способом интеграл Лебега определяется однозначно, а для функций, интегрируемых по Риману, совпадает с обычным определенным интегралом.

Таким образом, функции, принадлежащие классу $L^1[a, b]$, интегрируемы по Лебегу, их называют также *суммируемыми*. Для интеграла Лебега используется обычное обозначение.

Для указанной выше функции $\chi(x)$ имеем

$$\int_0^1 \chi(x)\,dx=1.$$

Перечислим некоторые свойства интеграла Лебега:

$$\int_a^b (f+g)\,dx=\int_a^b f\,dx+\int_a^b g\,dx,\qquad \int_a^b cf\,dx=c\int_a^b f\,dx,$$

$$\int_a^b f\,dx\geqslant 0,\quad \text{если}\quad f\geqslant 0,$$

$$\int_a^b f\,dx\geqslant\int_a^b g\,dx,\quad \text{если}\quad f\geqslant g,$$

$$\int_a^b f_n\,dx\to 0,\ \text{если}\ f_n\to 0.$$

Если $f_n(x) \in L^1[a, b]$, $\{f_n(x)\}$ — неубывающая последовательность $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, то $f(x) \in L^1[a, b]$ и

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ измеримы на отрезке $[a, b]$ и отличаются друг от друга лишь на множестве меры нуль (такие функции называют *равными почти всюду*), то их интегралы совпадают.

Понятия, указанные выше, распространяют и на интегрирование по бесконечному интервалу, используя для этого последовательности интегрируемых функций, равных нулю вне некоторого конечного интервала, своего для каждой функции.

Для приложений весьма важны функции, *суммируемые вместе со своим квадратом*. Множество таких функций обозначают $L^2[a, b]$. Произведение, сумма и разность двух функций, принадлежащих к $L^2[b, a]$, также принадлежат $L^2[a, b]$.

Если для последовательности $\{f_n(x)\}$, $f_n(x) \in L^2[a, b]$ существует такая функция $f(x) \in L^2[a, b]$, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2\,dx = 0,$$

то говорят, что данная последовательность *сходится в среднем* к функции $f(x)$, и записывают в форме

$$\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ f_n(x) = f(x)$$

(limes in medio — предел в среднем).

Если последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ равномерно, то она сходится к $f(x)$ и в среднем.

Имеет место важная *теорема Фишера — Рисса*.

Необходимым и достаточным условием сходимости в среднем последовательности $\{f_n(x)\}$, $f_n(x) \in L^2[a, b]$, к некоторой функции $f(x) \in L^2[a, b]$ является выполнение равенства

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \int_a^b [f_n(x) - f_m(x)]^2\,dx = 0.$$

Ниже при рассмотрениях квадратично-суммируемых функций будут использоваться обозначения:

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = (f, g),$$

а интеграл, стоящий слева, будет называться *скалярным произведением функций* $f(x)$ и $g(x)$.

Далее, *нормой функции* $f(x)$ будет называться выражение

$$\sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx},$$

которое кратко записывается в виде $\|f\|$.

Аналогично вводятся понятия, связанные с кратными интегралами Лебега Здесь важным оказывается тот факт, что из существования двойного интеграла

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dx\, dy$$

следует существование функции

$$\int_c^d f(x, y)\, dy,$$

принадлежащей к $L^1[a, b]$.

2.0.4. Последовательности и ряды ортогональных функций. Последовательность $\{\varphi_m(x)\}$ $(m=0, 1, 2, \ldots)$, $\varphi_m(x) \in L^2[a, b]$ называется *ортогональной* на (a, b), если $(\varphi_k, \varphi_l)=0$ для $k \neq l$. Если, кроме того, $\|\varphi_k\|=1$ для любого k, то последовательность называется *ортонормированной или ортонормальной*.

Если $f(x) \in L^2[a, b]$ и последовательность $\varphi_m(x)$ ортонормированная, то числа $a_k=(f, \varphi_k)$ называются *коэффициентами Фурье* функции $f(x)$ относительно данной ортонормированной системы.

Каждой функции $f(x) \in L^2[a, b]$ соответствует ее *ряд Фурье:*

$$f(x) \sim a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)+\ldots+a_k\varphi_k(x)+\ldots, \quad a_k=(f, \varphi_k).$$

Из всех линейных комбинаций первых $n+1$ функций $\{\varphi_m(x)\}$

$$\sigma_n(x)=c_0\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+\ldots+c_n\varphi_n(x)$$

при произвольном наборе коэффициентов $c_0, c_1, \ldots, c_n$ наилучшее приближение в среднем квадратичном функции $f(x)$ дает отрезок ряда Фурье этой функции.

Это значит, что

$$\Delta_n=\|f-\sigma_n\|^2$$

имеет наименьшее значение, если в качестве σ_n взять отрезок ряда Фурье.

Последнее следует из того, что

$$\Delta_n=\|f\|^2-\sum_{k=0}^{n} a_n^2+\sum_{k=0}^{n}(c_k-a_k)^2$$

имеет наименьшее значение при $c_k=a_k$.

Так как $\Delta_n \geqslant 0$, то имеет место *неравенство Бесселя*

$$\sum_{k=0}^{n} a_k^2 \leqslant \|f\|^2$$

для всех n, а значит,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 \leqslant \|f\|^2$$

При $n \to \infty$ величина Δ_n уменьшается и если при этом $\Delta_n \to 0$, то суммы

$$f_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k\varphi_k(x)$$

сходятся в среднем к $f(x)$.

Таким образом, сходимость в среднем суммы $f_n(x)$ к функции $f(x)$ равносильна наличию равенства, называемого *равенством Парсеваля*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 = \| f \|^2.$$

Равенство Парсеваля называют также *уравнением замкнутости*. Ортогональная система функций называется полной, если не существует функции, отличной от нулевой, ортогональной ко всем функциям системы.

Если ортонормированная система $\{\varphi_n(x)\}$ полна, то сумма ряда Фурье любой квадратично-суммируемой функции $f(x)$ равна $f(x)$.

Сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$$

следует из *теоремы Фишера – Рисса*, ибо если

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x) \quad \text{и} \quad s_{n+p}(x) = \sum_{k=1}^{n+p} a_k \varphi_k(x),$$

то

$$\| s_{n+p}(x) - s_n(x) \|^2 = \sum_{n+1}^{n+p} a_k^2.$$

Вследствие неравенства Бесселя последняя сумма может быть сделана меньше сколь угодно малого числа, если только выбрать n достаточно большим.

Пусть

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x) = g(x), \qquad a_k = (f, \varphi_k).$$

Тогда, если

$$\omega(x) = f(x) - g(x),$$

то

$$(\omega, \varphi_n) = (f, \varphi_n) - (g, \varphi_n) = a_n - a_n = 0$$

и, в силу предположенной полноты системы $\{\varphi_n(x)\}$, $\omega(x) \equiv 0$.

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x) = f(x).$$

Отсюда же следует, что

$$\| f \|^2 = (f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (f, \varphi_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2,$$

т. е. для любой квадратично-суммируемой функции имеет место уравнение замкнутости, если ортонормированная система полна.

§ 1. Интегральные уравнения Вольтерра

2.1.1. Теоремы существования и единственности. А. При условиях, что ядро $K(x, s)$ уравнения Вольтерра второго рода

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x K(x, s)\, \varphi(s)\, ds = f(x) \tag{2.1.1}$$

ограничено по абсолютной величине в треугольной области $a \leqslant x$, $s \leqslant h$, $x \geqslant s$ и имеет лишь конечное количество точек разрыва с одной и той же абсциссой x или с одной и той же ординатой s, $K(x, s) \equiv 0$ при $s > x$, а свободный член $f(x)$ — непрерывная функция, существует непрерывное и притом единственное решение уравнения (2.1.1).

Б. При условиях, что ядро $K(x, s)$, $a \leqslant x, s \leqslant h$, $K(x, s) \equiv 0$ при $s > x$, квадратично суммируемо и $f(x) \in L^2[a, h,]$ существует, и притом единственное, квадратично-суммируемое решение уравнения (2.1.1).

Единственность в данном случае понимается с точностью до функции, определенной на множестве меры нуль.

2.1.2. Метод последовательных приближений. Пусть

$$\varphi_0(x) = f(x),$$

$$\varphi_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, s)\, \varphi_0(s)\, ds,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, s)\, \varphi_{n-1}(s)\, ds \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ при любом λ равномерно сходится к решению уравнения (2.1.1). Функции $\varphi_n(x)$ являются последовательными приближениями решения уравнения (2.1.1). Их целесообразно выразить посредством *итерированных (повторных) ядер* $K_n(x, s)$, где $K_1(x, s) = K(x, s)$ и

$$K_{n+1}(x, s) = \int_s^x K(x, z)\, K_n(z, s)\, dz \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

следующим образом

$$\varphi_n(x) = f(x) + \int_a^x \left[\sum_{\nu=1}^{n} \lambda^\nu K_\nu(x, s) \right] f(s)\, ds.$$

Тогда

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda \int_a^x H(x, s, \lambda)\, f(s)\, ds,$$

где

$$H(x, s, \lambda) = -\sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda^\nu K_{\nu+1}(x, s)$$

— так называемое *резольвентное* или *разрешающее ядро*. Ряд, определяющий резольвенту, сходится при всех значениях λ.

Доказательства см Привалов [1], Михлин [2], Трикоми [2].

Пример 2.1.1. Найти решения уравнения

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^x e^{x-s}\varphi(s)\,ds=f(x).$$

Здесь

$$K_1(x,s)=e^x e^{-s},$$

$$K_2(x,s)=\int_s^x e^{x-z}e^{z-s}\,dz=e^{x-s}(x-s),$$

$$K_3(x,s)=\int_s^x e^{x-z}e^{z-s}(z-s)\,dz=e^{x-s}\frac{(x-s)^2}{2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$K_{n+1}(x,s)=e^{x-s}\frac{(x-s)^n}{n!}\qquad(n=0,1,\ldots),$$

$$H(x,s,\lambda)=-\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n K_{n+1}(x,s)=-e^{(x-s)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda(x-s))^n}{n!}=-e^{(1+\lambda)(x-s)}.$$

Следовательно,

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^x e^{(1+\lambda)(x-s)}f(s)\,ds.$$

2.1.3. Связь уравнения Вольтерра с дифференциальными уравнениями. Дифференциальное уравнение

$$\frac{d^nu}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}+\ldots+a_n(x)u=F(x),\qquad x>0,$$

с начальными условиями при $x=0$

$$u(0)=c_0,\quad u'(0)=c_1,\ \ldots,\ u^{(n-1)}(0)=c_{n-1}$$

эквивалентно интегральному уравнению Вольтерра

$$\varphi(x)+\int_0^x K(x,s)\varphi(s)\,ds=f(x),$$

где

$$K(x,s)=\sum_{k=1}^{n}a_k(x)\frac{(x-s)^{k-1}}{(k-1)!},$$

$$f(x)=F(x)-c_{n-1}a_1(x)-(c_{n-1}x+c_{n-2})a_2(x)-\ldots$$
$$\ldots-\left(c_{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\ldots+c_1x+c_0\right)a_n(x).$$

См. Трикоми [1], Гурса [1], а также Камке [1].

2.1.4. Уравнения Вольтерра первого рода. Интегральное уравнение Вольтерра первого рода

$$\int_a^x K(x, s)\varphi(s)\,ds = f(x) \tag{2.1.2}$$

в предположении, что $K(x, x) \neq 0$, $K'_x(x, s)$ и $f'(x)$ существуют и непрерывны, дифференцированием приводится к уравнению Вольтерра второго рода

$$\varphi(x) + \int_a^x \frac{K'_x(x, s)}{K(x, x)}\varphi(s)\,ds = \frac{f'(x)}{K(x, x)}. \tag{2.1.3}$$

В том случае, когда $K(x, x) \equiv 0$, дифференцирование (2.1.2) приводит к уравнению

$$\int_a^x K'_x(x, s)\varphi(s)\,ds = f'(x), \tag{2.1.4}$$

и, в предположении, что $K'_x(x, x) \neq 0$, $K''_{xx}(x, s)$ и $f''(x)$ существуют и непрерывны, дифференцирование (2.1.4) дает

$$\varphi(x) + \int_a^x \frac{K''_{xx}(x, s)}{K'_x(x, x)}\varphi(s)\,ds = \frac{f''(x)}{K'_x(x, x)}$$

и т. д.

См. Гурса [1], Трикоми [2].

§ 2. Интегральные уравнения Фредгольма второго рода

2.2.1. Теоремы существования и единственности решения. А. При условиях, что ядро $K(x, s)$, $-\infty \leqslant a \leqslant x, s \leqslant b \leqslant +\infty$, интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$\varphi(x) - \lambda\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds = f(x) \tag{2.2.1}$$

есть кусочно-непрерывная функция переменных x и s такая, что

$$\int_a^b K^2(x, s)\,ds < C, \tag{2.2.2}$$

а функция $f(x)$ — кусочно-непрерывная и имеет интегрируемый квадрат, существует, и притом единственное, кусочно-непрерывное

решение уравнения (2.2.1) для всех λ, для которых

$$|\lambda| \leqslant \frac{1}{B}, \qquad B^2 = \int_a^b \int_a^b K^2(x, s)\, dx\, ds.$$

Число

$$B = \sqrt{\int_a^b \int_a^b K^2(x, s)\, dx\, ds}$$

называют *нормой ядра*.

Ограничение (2.2.2) необходимо лишь в случае бесконечных a, b.

Б. При условиях, что ядро $K(x, s)$, $a \leqslant x, s \leqslant b$ уравнения (2.2.1) квадратично-суммируемо и $|\lambda| < B^{-1}$, где

$$B^2 = \int_a^b \int_a^b K^2(x, s)\, dx\, ds, \qquad f(x) \in L^2[a, b],$$

существует, и притом единственное, квадратично-суммируемое решение уравнения (2.2.1).

См. Михлин [3], Трикоми [2].

Теоремы 2.2.1.А и 2.2.1.В дают достаточные условия существования решения и получены методом последовательных приближений. См. п. 2.2.2.

Дальнейшие сведения о разрешимости интегральных уравнений второго рода см. п. 2.2.5 и п. 2.3.10.

Более полное исследование множества значений λ, при которых разрешимо уравнение Фредгольма, проводится методами теории функций комплексного переменного.

См. Гурса [1], Михлин [2], Привалов [1].

2.2.2. Метод последовательных приближений. Полагают

$$\varphi_0(x) = f(x),$$

$$\varphi_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s)\, \varphi_0(s)\, ds,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_{n+1}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s)\, \varphi_n(s)\, ds, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ равномерно сходится к решению уравнения (2.1.1) при $|\lambda| \leqslant B^{-1}$.

Последовательные приближения $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_n(x)$,... целесообразно выразить посредством итерированных ядер $K_n(x, s)$, где $K_1(x, s) = K(x, s)$ и

$$K_{n+1}(x, s) = \int_a^b K_n(x, z) K(z, s)\, ds.$$

Тогда при малых значениях параметра λ

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda \int_a^b H(x, s, \lambda) f(s)\, ds,$$

где резольвентное (разрешающее) ядро $H(x, s, \lambda)$ определяется формулой

$$-H(x, s, \lambda) = K_1(x, s) + \lambda K_2(x, s) + \ldots + \lambda^n K_{n+1}(x, s) + \ldots$$

Таким образом, решение интегрального уравнения имеет форму ряда

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\psi_1(x) + \lambda^2\psi_2(x) + \ldots + \lambda^n\psi_n(x) + \ldots,$$

называемого *рядом Неймана*.

Пример 2.2.1. Найти решение уравнения

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 e^{x-s}\varphi(s)\, ds = f(x).$$

Здесь все итерированные ядра совпадают с исходным. Например,

$$K_2(x, s) = \int_0^1 e^{x-z} e^{z-s} dz = e^{x-s}$$

и т. д.,

$$-H(x, s, \lambda) = K(x, s)(1 + \lambda + \lambda^2 + \ldots + \lambda^n + \ldots) = \frac{e^{x-s}}{1-\lambda}.$$

В данном случае ряд для резольвентного ядра сходится при $|\lambda| < 1$ и, следовательно, для этих λ имеется единственное решение

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{\lambda}{\lambda - 1} e^x \int_0^1 e^{-s} f(s)\, ds.$$

Можно показать, что найденная функция является решением данного уравнения при всех $\lambda \neq 1$.

Пример 2.2.2. Найти три последовательных приближения решения интегрального уравнения

$$\varphi(x) - 0{,}1 \int_0^1 K(x, s)\varphi(s)\, ds = 1, \quad K(x, s) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant s, \\ s, & s \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Имеем

$$\varphi_0(x)=1,$$

$$\varphi_1(x)=1+0{,}1\int_0^x K(x,s)\cdot 1\,ds+0{,}1\int_x^1 K(x,s)\,1\cdot ds=$$

$$=1+0{,}1\int_0^x s\,ds+0{,}1\int_x^1 x\,ds=1+\frac{x}{10}-\frac{x^2}{20};$$

$$\varphi_2(x)=1+0{,}1\int_0^x s\left(1+\frac{s}{10}-\frac{s^2}{20}\right)ds+0{,}1\int_x^1 x\left(1+\frac{s}{10}-\frac{s^2}{20}\right)ds=$$

$$=1+\frac{31}{300}x-\frac{x^2}{20}-\frac{x^3}{600}+\frac{x^4}{2400}.$$

2.2.3. Уравнения Фредгольма с вырожденным ядром. Ядро, которое является конечной суммой произведений функций от x на функцию от s

$$K(x,s)=\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\,b_i(s),$$

называется *вырожденным*. Здесь функции $a_i(x)$, а также функции $b_i(s)$ можно считать линейно независимыми.

Пример 2.2.3. $K(x,s)=x+s$, $a_1=x$, $b_1=1$; $a_2=1$, $b_2=s$.

Решение интегрального уравнения с вырожденным ядром сводится к решению системы линейных уравнений.

В самом деле

$$\varphi(x)-\lambda\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\int_a^b b_i(s)\,\varphi(s)\,ds=f(s). \qquad (2.2.3)$$

Обозначив

$$\int_a^b b_i(s)\,\varphi(s)\,ds=c_i,$$

получаем

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\sum_{i=1}^{n} c_i a_i(x). \qquad (2.2.4)$$

Отсюда подстановкой в исходное интегральное уравнение получим требуемую систему

$$c_i-\int_a^b b_i(s)\left[f(s)+\lambda\sum_{k=1}^{n} c_k a_k(s)\right]ds=0 \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \quad (2.2.5)$$

или

$$c_i - \lambda \sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_k = f_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2.2.6}$$

$$a_{ik} = \int_a^b b_i(s)\, a_k(s)\, ds,$$

$$f_i = \int_a^b b_i(s)\, f(s)\, ds.$$

Найдя отсюда c_i, получим решение $\varphi(x)$ в форме (2.2.4).

Пример 2.2.4. Найти решение уравнения

$$\varphi(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} xs\varphi(s)\, ds + f(x).$$

Обозначив

$$\int_0^{\frac{1}{2}} s\varphi(s)\, ds = c_1,$$

получим

$$\varphi(x) = c_1 x + f(x).$$

Подстановка в уравнение дает

$$c_1 x + f(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} xs\,[c_1 s + f(s)]\, ds + f(x),$$

или

$$c_1 - \frac{1}{24} c_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} sf(s)\, ds,$$

что дает

$$c_1 = \frac{24}{23} \int_0^{\frac{1}{2}} sf(s)\, ds.$$

Таким образом,

$$\varphi(x) = \frac{24}{23} x \int_0^{\frac{1}{2}} sf(s)\, ds + f(x).$$

2.2.4. Аппроксимация невырожденного ядра вырожденным. Решение уравнения Фредгольма с невырожденным ядром может

быть сведено к решению интегрального уравнения с вырожденным ядром путем разложения данного ядра на сумму вырожденного ядра и ядра с достаточно малой нормой.

См. Михлин [3], Трикоми [2], Вулих [1].

Имеет место следующая теорема.

Если даны два ядра $K(x, s)$ и $k(x, s)$, причем

$$\int_a^b |K(x, s) - k(x, s)|\, ds < h,$$

а для резольвенты $H_1(x, s, \lambda)$ ядра $k(x, s)$ имеет место неравенство

$$\int_a^b |H_1(x, s, \lambda)|\, ds < B$$

и выполняется неравенство

$$1 - \lambda h(1 + |\lambda| B) > 0,$$

то уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, ds = f(x)$$

имеет единственное решение и уравнение

$$\tilde{\varphi}(x) - \lambda \int_a^b k(x, s)\, \tilde{\varphi}(s)\, ds = f(x)$$

также имеет единственное решение, причем

$$|\varphi(x) - \tilde{\varphi}(x)| < \frac{N|\lambda| h(1 + |\lambda| B)^2}{1 - \lambda h(1 + |\lambda| B)},$$

$$N = \sup_{[a, b]} |f(x)|.$$

Доказательство см. Канторович и Крылов [1].

Пример 2.2 5. В уравнении

$$\varphi(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} \sin xs\, \varphi(s)\, ds + f(x)$$

заменим ядро $\sin xs$ ядром xs.

Имеем $K(x, s) = \sin xs$, $k(x, s) = xs$ и

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |K(x, s) - k(x, s)|\, ds < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^3 s^3}{6}\, ds = \frac{1}{3072} < 0{,}001 = h$$

$\left(\text{при вычислении положили } x=\frac{1}{2}\right)$. Для уравнения

$$\varphi(x)=\int_0^{\frac{1}{2}} xs\varphi(s)\,ds+f(x),$$

согласно примеру 2.2.4, имеем резольвентное ядро

$$H_1(x, s, \lambda)=\frac{24}{23}xs$$

и, следовательно,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |H_1(x, s, \lambda)|\,ds=\frac{24}{23}x\frac{s^2}{2}\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{46}<0{,}07$$

$\left(\text{где положено } x=\frac{1}{2}\right)$. Приведенная выше теорема дает оценку

$$|\varphi(x)-\tilde{\varphi}(x)|<\frac{N\cdot 0{,}001\cdot 1{,}145}{1-0{,}001\cdot 1{,}07}<0{,}0012N.$$

По поводу этого примера см. также Вулих [1].

2.2.5. Теоремы Фредгольма. Ниже будет рассматриваться неоднородное интегральное уравнение

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds=f(x), \tag{2.2.7}$$

соответствующее ему однородное уравнение

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds=0 \tag{2.2.8}$$

и *союзное* (или *сопряженное*) с уравнением (2.2.7) уравнение

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(s, x)\varphi(s)\,ds=f(x). \tag{2.2.9}$$

Если при некотором значении параметра $\lambda=\lambda_0$ однородное уравнение Фредгольма имеет нетривиальные решения (не равные тождественно нулю), то λ_0 называется *характеристическим числом*, а соответствующие ему решения $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ — собственными функциями ядра $K(x, s)$.

Первая теорема Фредгольма. Если $\lambda=\lambda_0$ не являются характеристическим числом ядра, то неоднородное уравнение (2.2.7) однозначно разрешимо при любой правой части $f(x)$.

Вторая теорема Фредгольма. Если $\lambda=\lambda_0$ является характеристическим числом однородного уравнения, то оно будет также характеристическим значением и для союзного уравнения

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(s, x)\varphi(s)\,ds=0.$$

Числа собственных функций уравнения (2.2.8) и союзного с ним уравнения, отвечающих одному и тому же характеристическому числу, одинаковы.

Третья теорема Фредгольма. Если однородное уравнение имеет ненулевое решение, то неоднородное уравнение, вообще говоря, неразрешимо. Оно будет разрешимо тогда и только тогда, когда выполнены условия ортогональности

$$(f, \psi_k)=0 \qquad (k=1, 2, \ldots, n),$$

где $\psi_k=\psi_k(x)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ суть собственные функции союзного ядра, принадлежащие данному характеристическому числу λ_0.

Четвертая теорема Фредгольма. Множество характеристических чисел интегрального уравнения (2.2.7) не имеет предельных точек на конечном расстоянии. Если множество характеристических значений бесконечно, то его предельная точка находится на бесконечности.

Доказательства см. Михлин [2].

Содержание первой и третьей теорем составляют так называемую *альтернативу Фредгольма*. См. также п. 2.3.10.

Для интегральных уравнений с вырожденным ядром теоремы Фредгольма являются следствиями из свойств линейных систем уравнений.

§ 3. Симметричные интегральные уравнения

2.3.1. Существование характеристического числа. *Симметричными интегральными уравнениями* называются уравнения, ядра которых симметричны, т. е.

$$K(x, s)=K(s, x).$$

Итерированные ядра симметричных уравнений симметричны. Например,

$$K_2(x, s)=\int_a^b K(x, t)K(t, s)\,dt=\int_a^b K(s, t)K(t, x)\,dt=K_2(s, x).$$

Каждое симметричное ядро, не равное тождественно нулю, имеет по крайней мере одно характеристическое число.

Это утверждение справедливо как для непрерывных ядер, так и для квадратично суммируемых ядер.

Доказательства см Привалов [1], Михлин [2], Трикоми [2].

2.3.2. Ортогональность собственных функций. Собственные функции симметричного ядра, соответствующие различным характеристическим числам, ортогональны.

Действительно, если

$$\varphi_1(x)=\lambda_1\int_a^b K(x, s)\,\varphi_1(s)\,ds,$$

$$\varphi_2(x)=\lambda_2\int_a^b K(x, s)\,\varphi_2(s)\,ds, \qquad \lambda_1\neq\lambda_2,$$

то

$$\lambda_2\int_a^b \varphi_1\varphi_2\,dx=\lambda_1\lambda_2\int_a^b dx\int_a^b K(x, s)\,\varphi_1(s)\,\varphi_2(x)\,ds=$$

$$=\lambda_1\lambda_2\int_a^b \varphi_1(s)\,ds\int_a^b K(x, s)\,\varphi_2(x)\,dx,$$

$$\lambda_1\int_a^b \varphi_2\varphi_1\,dx=\lambda_1\lambda_2\int_a^b \varphi_1(s)\,ds\int_a^b K(x, s)\,\varphi_2(x)\,dx,$$

откуда

$$(\lambda_1-\lambda_2)\int_a^b \varphi_1\varphi_2\,dx=0,$$

и так как $\lambda_1\neq\lambda_2$, то

$$\int_a^b \varphi_1\varphi_2\,dx=0. \tag{2.3.1}$$

На основании полученного равенства в п. 2.3.3. будет доказана действительность собственных чисел и собственных функций. Тогда (2.3.1) означает ортогональность собственных функций, соответствующих различным характеристическим числам.

2.3.3. Действительность характеристических чисел. Характеристические числа симметричного ядра действительны.

В самом деле, если λ_1 — комплексное характеристическое число, $\lambda_1=\xi+i\eta$ с соответствующей собственной функцией $\varphi_1(x)=\alpha(x)+i\beta(x)$, то ядро должно обладать сопряженным характеристическим числом $\lambda_2=\xi-i\eta$ с собственной функцией $\varphi_2(x)=\alpha(x)-i\beta(x)$.

В силу (2.3.1) мы имеем для собственных функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$

$$\int_a^b \varphi_1\varphi_2\,dx=\int_a^b [\alpha^2(x)+\beta^2(x)]\,dx=0,$$

что возможно лишь, если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ тождественно (или почти всюду) равны нулю. Последнее противоречит тому, что $\varphi_1(x)\neq 0$.

Пример 2.3.1. Уравнение

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^1 (x+s)\,\varphi(s)\,ds$$

— симметричное с вырожденным ядром.

Имеем

$$\varphi(x)=\lambda\left[x\int_0^1 \varphi(s)\,ds+\int_0^1 s\varphi(s)\,ds\right]=c_1x+c_2.$$

Из данного уравнения следует, что

$$c_1x+c_2=\lambda\int_0^1 (x+s)\,(c_1s+c_2)\,ds,$$

откуда

$$c_1=\lambda c_1\cdot\frac{1}{2}+\lambda c_2,$$

$$c_2=\lambda c_1\cdot\frac{1}{3}+\lambda c_2\cdot\frac{1}{2}.$$

Условием совместности последних уравнений является обращение в нуль определителя системы, что дает

$$\lambda^2+12\lambda-12=0,$$

откуда находим характеристические числа

$$\lambda_1=4\sqrt{3}-6,\qquad \lambda_2=-4\sqrt{3}-6.$$

Соответствующие собственные функции:

$$\varphi_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}\left(1+\sqrt{3}\,x\right),\qquad \varphi_2(x)=\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}\left(1-\sqrt{3}\,x\right).$$

Найденные собственные функции ортогональны:

$$(\varphi_1,\varphi_2)=\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}\int_0^1\left(1+\sqrt{3}\,x\right)\left(1-\sqrt{3}\,x\right)dx=\int_0^1(1-3x^2)\,dx=0.$$

Пример 2.3.2. Интегральное уравнение

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^l K(x,s)\,\varphi(s)\,ds=0$$

с ядром

$$K(x,s)=\begin{cases}\dfrac{x(l-s)}{l}, & x\leqslant s,\\[2mm] \dfrac{s(l-x)}{l}, & x\geqslant s,\end{cases}$$

симметрично. Найдем его характеристические числа и собственные функции

Имеем

$$\varphi(x)=\lambda\cdot\frac{1}{l}\int_0^x s(l-x)\,\varphi(s)\,ds+\lambda\frac{1}{l}\int_x^l x(l-s)\,\varphi(s)\,ds, \qquad (2.3.2)$$

$$\varphi'(x)=\frac{\lambda}{l}\left[\int_0^x -s\varphi(s)\,ds+\int_x^l (l-s)\,\varphi(s)\,ds\right]=-\frac{\lambda}{l}\int_0^l s\varphi(s)\,ds+\frac{\lambda}{l}\int_x^l l\varphi(s)\,ds,$$

$$\varphi''(x)=-\lambda\varphi(x). \qquad (2.3.3)$$

Из (2.3.2) следует, что

$$\varphi(0)=\varphi(l)=0. \qquad (2.3.4)$$

Общее решение дифференциального уравнения (2.3.3) есть

$$\varphi(x)=c_1\cos\sqrt{\lambda}\,x+c_2\sin\sqrt{\lambda}\,x.$$

Но $\varphi(0)=c_1=0$, поэтому характеристические числа исходного интегрального уравнения будут найдены из условия

$$\varphi(l)=0=\sin\sqrt{\lambda}\,l,$$

откуда

$$\sqrt{\lambda}\,l=n\pi$$

и

$$\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{l^2} \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Соответствующие собственные функции суть

$$\varphi_n(x)=\sin\frac{n\pi}{l}x$$

и, учитывая, что

$$\int_0^l \sin^2\frac{n\pi}{l}x\,dx=\frac{l}{2},$$

получаем нормированную систему собственных функций

$$\varphi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

Ортогональность этих функций на отрезке $[0,\ l]$ легко проверить.

2.3.4. Ортогонализация собственных функций. Если некоторому характеристическому числу принадлежит несколько линейно независимых собственных функций, например, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$, то каждая их линейная комбинация также является собственной функцией и эти линейные комбинации могут быть выбраны так, что полученные при этом собственные функции будут ортонормированы.

Действительно, функция $\psi_1(x)=\dfrac{\varphi_1(x)}{\|\varphi_1\|}$ имеет норму, равную единице. Образуем комбинацию $\alpha\psi_1+\varphi_2$ и выберем α так, что

$$(\alpha\psi_1+\varphi_2,\ \psi_1)=0,$$

т. е. возьмем

$$\alpha=-\frac{(\varphi_2,\ \psi_1)}{(\psi_1,\ \psi_1)}=-\frac{(\varphi_2,\ \psi_1)}{\|\psi_1\|^2}.$$

Функция

$$\psi_2(x)=\frac{\alpha\psi_1+\varphi_2}{\|\alpha\psi_1+\varphi_2\|}$$

ортогональна к $\psi_1(x)$ и имеет норму, равную единице. Далее выбирается комбинация

$$\alpha\psi_1+\beta\psi_2+\varphi_3$$

и постоянные α и β находятся из условий ортогональности

$$(\alpha\psi_1+\beta\varphi_2+\varphi_3,\ \psi_1)=0,\qquad (\alpha\psi_1+\beta\psi_2+\varphi_3,\ \psi_2)=0.$$

С найденными таким образом коэффициентами α и β функция

$$\psi_3=\frac{\alpha\psi_1+\beta\psi_2+\varphi_3}{\|\alpha\psi_1+\beta\varphi_2+\varphi_3\|}$$

ортогональна к ψ_1, ψ_2 и имеет норму, равную единице, и т. д. При помощи указанного процесса ортогонализации (Сонина—Шмидта) последовательность собственных функций симметричного ядра можно ортонормировать, что впредь и предполагается выполненным.

2.3.5. Количество собственных функций, соответствующих характеристическому числу, и распределение характеристических чисел. Каждому характеристическому числу λ_0 соответствует конечное число собственных функций.

Если обозначить это число через n, то имеет место неравенство

$$n\leqslant B^2\lambda_0^2. \tag{2.3.5}$$

Действительно, если зафиксировать s, то коэффициенты Фурье ядра $K(x, s)$ по ортонормированной системе его собственных функций суть

$$(K(x, s), \varphi_k)=\int_a^b K(x, s)\,\varphi_k(x)\,dx=\frac{\varphi_k(s)}{\lambda_0}$$

и, вследствие неравенства Бесселя,

$$\frac{1}{\lambda_0}\sum_{\nu=1}^{n}\varphi_\nu^2(s)\leqslant\int_a^b K^2(x, s)\,dx,$$

а после интегрирования

$$\frac{1}{\lambda_0^2}\int_a^b\sum_{\nu=1}^{n}\varphi_\nu^2(s)\,ds=\frac{1}{\lambda_0^2}\sum_{\nu=1}^{n}\int_a^b\varphi_\nu^2(s)\,ds=\frac{n}{\lambda_0^2}\leqslant\int_a^b\int_a^b K^2(x, s)\,dx\,ds=B^2<\infty.$$

В каждом конечном интервале $|\lambda|<A<\infty$ может содержаться лишь конечное число характеристических чисел. Если обозначить это число через m, то имеет место неравенство

$$m\leqslant A^2B^2. \tag{2.3.6}$$

Считая, что каждому характеристическому числу $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ принадлежит по меньшей мере одна собственная функция $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)$, получаем способом, использованным выше, неравенство

$$\sum_{\nu=1}^{m} \frac{1}{\lambda_\nu^2} \leqslant B^2, \tag{2.3.7}$$

откуда, учитывая, что $|\lambda|^{-1} > A^{-1}$, получаем неравенство (2.3.6).

Из неравенства (2.3.7), в частности, следует сходимость ряда

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu^2}.$$

Из доказанного выше следует также, что все характеристические числа можно расположить в порядке возрастания абсолютных величин и занумеровать. Соответственно характеристическим числам нумеруются собственные функции.

2.3.6. Билинейная формула. Пусть ядро $K(x, s)$ допускает разложение в равномерно сходящийся ряд по ортонормированной системе своих собственных функций

$$K(x, s) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(s) \tag{2.3.8}$$

для каждого фиксированного значения x в случае непрерывного ядра или почти всех x в случае квадратично-суммируемого ядра.

Имеем

$$a_k = \int_a^b K(x, s)\, \varphi_k(s)\, ds = \frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k} \tag{2.3.9}$$

и следовательно,

$$K(x, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\, \varphi_k(s)}{\lambda_k}. \tag{2.3.10}$$

Обратно, если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\, \varphi_k(s)}{\lambda_k} \tag{2.3.11}$$

сходится равномерно или по крайней мере так, что любому положительному ε соответствует такое целое положительное число n_0, что

$$\int_a^b \int_a^b \left[\sum_{n+1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\, \varphi_k(s)}{\lambda_k} \right]^2 dx\, ds < \varepsilon \qquad (n > n_0),$$

то

$$K(x, s)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(x)\,\varphi_k(s)}{\lambda_k}.$$

Имеет место теорема: ряд (2.3.11) сходится в среднем к ядру $K(x, s)$

$$K(x, s)=\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_k(x)\,\varphi_k(s)}{\lambda_k} \tag{2.3.12}$$

или, что то же,

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b\int_a^b\left[K(x, s)-\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_k(x)\,\varphi_k(s)}{\lambda_k}\right]^2 dx\,ds=0. \tag{2.3.13}$$

Доказательства см. Привалов [1], Михлин [2], Трикоми [2].

Если симметричное ядро $K(x, s)$ имеет лишь конечное число характеристических чисел, то оно вырожденное, ибо в этом случае

$$K(x, s)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_k(x)\,\varphi_k(s)}{\lambda_k}. \tag{2.3.14}$$

Ядро $K(x, s)$ называется *положительно определенным*, если для всех $\varphi(x)$, отличных от тождественного нуля,

$$\int_a^b\int_a^b K(x, s)\,\varphi(x)\,\varphi(s)\,dx\,ds>0$$

и лишь для $\varphi(x)\equiv 0$ вышеуказанный квадратический функционал равен нулю. Такое ядро имеет только положительные характеристические числа.

Аналогично определяется отрицательно определенное ядро.

Всякое симметричное непрерывное положительно определенное (или отрицательно определенное) ядро разлагается по собственным функциям в билинейный ряд, абсолютно и равномерно сходящийся относительно переменных x, s (Мерсер). Теорема остается верной, если допустить, что ядро имеет конечное число отрицательных (соответственно положительных) характеристических чисел.

Доказательство см. Привалов [1], Трикоми [2].

Если ядро $K(x, s)$ симметрично, непрерывно в квадрате $a\leqslant x$, $s\leqslant b$ и имеет в последнем равномерно ограниченные частные производные, то оно разлагается по собственным функциям в равномерно сходящийся билинейный ряд (Гаммерштейн).

См. Курант — Гильберт [1].

2.3.7. Теорема Гильберта—Шмидта. Если функцию $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x)=\int_a^b K(x, s)\, g(s)\, ds, \tag{2.3.15}$$

где ядро $K(x,s)$ — квадратично-суммируемое, $g(s)$ — некоторая квадратично-суммируемая функция, то $f(x)$ может быть представлена своим рядом Фурье относительно ортонормированной системы собственных функций ядра $K(x, s)$:

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x), \tag{2.3.16}$$

где

$$a_k=(f, \varphi_k) \qquad (k=1, 2, \ldots).$$

Если, кроме того,

$$\int_a^b K^2(x, s)\, ds \leqslant A < \infty,$$

то ряд (2.3.16) сходится абсолютно и равномерно для каждой функции $f(x)$ вида (2 3.15)

Доказательства см Трикоми [2], Михлин [3], Привалов [1]

2.3.8. Билинейные ряды итерированных ядер. По определению итерированных ядер

$$K_m(x, s)=\int_a^b K(x, z)\, K_{m-1}(z, s)\, dz \qquad (m=2, 3, \ldots). \tag{2 3.17}$$

Коэффициенты Фурье $a_k(s)$ ядра $K_m(x, s)$, рассматриваемого как функция x, относительно ортонормированной системы собственных функций ядра $K(x, s)$ равны

$$a_k(s)=\int_a^b K_m(x, s)\, \varphi_k(x)\, dx=\frac{\varphi_k(s)}{\lambda_k^m}. \tag{2.3.18}$$

Применение теоремы Гильберта—Шмидта к (2.3.17) дает

$$K_m(x, s)=\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\, \varphi_k(s)}{\lambda_k^m} \qquad (m=2, 3, \ldots). \tag{2.3.19}$$

В формуле (2.3.19) сумма ряда понимается как предел в среднем. Если же дополнительно

$$\int_a^b K^2(x, s)\,ds < A < \infty, \qquad A = \text{const},$$

то в формуле (2.3.19) ряд сходится равномерно.

Доказательства см. Трикоми [2], Михлин [3], Привалов [1]

2.3.9. Решение неоднородного уравнения. Представим интегральное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds = f(x), \tag{2.3.20}$$

где λ не есть собственное значение, в виде

$$\varphi(x) - f(x) = \lambda \int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds \tag{2.3.21}$$

и применим теорему Гильберта—Шмидта к функции $\varphi(x) - f(x)$:

$$\varphi(x) - f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x),$$

$$c_k = \int_a^b [\varphi(x) - f(x)]\,\varphi_k(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,\varphi_k(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,\varphi_k(x)\,dx = \\ = \xi_k - f_k.$$

По теореме Гильберта—Шмидта

$$\lambda \int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k \lambda}{\lambda_k} \varphi_k(x)$$

и, таким образом,

$$\frac{\xi_k \lambda}{\lambda_k} = \xi_k - f_k, \quad \xi_k = \frac{\lambda_k f_k}{\lambda_k - \lambda}, \quad c_k = \frac{\lambda f_k}{\lambda_k - \lambda}. \tag{2.3.22}$$

Следовательно,

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{\lambda_k - \lambda} \varphi_k(x). \tag{2.3.23}$$

Если же λ — характеристическое число:

$$\lambda = \lambda_p = \lambda_{p+1} = \ldots = \lambda_q, \tag{2.3.24}$$

то при $k \neq p, p+1, \ldots, q$ члены (2.3.23) сохраняют свой вид. При $k=p, p+1, \ldots, q$ из формулы (2.3.22) следует $f_k = \frac{c_k(\lambda-\lambda_k)}{\lambda}$ и, в силу (2.3.24), $f_p = f_{p+1} = \ldots = f_q = 0$. Последнее означает, что $(f, \varphi_k) = 0$ при $k=p, p+1, \ldots, q$, т. е. свободный член уравнения должен быть ортогональным к собственным функциям, принадлежащим характеристическому числу λ.

Решения уравнения (2.3.20) в этом случае имеют вид

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{f_k}{\lambda_k - \lambda} \varphi_k(x) + \sum_{k=p}^{q} c_k \varphi_k(x), \qquad (2.3.25)$$

где штрих в первой из сумм (2.3.25) означает, что должны быть опущены члены с номерами $k=p, p+1, \ldots, q$, при которых в этой сумме одновременно обращаются в нуль f_k и $\lambda - \lambda_k$. Коэффициенты c_k во второй сумме произвольные постоянные.

См. Михлин [3]. Трикоми [2].

2.3.10. Альтернатива Фредгольма для симметричных интегральных уравнений. Результаты предыдущего номера можно объединить в следующей альтернативной форме.

Симметричное интегральное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, ds = f(x)$$

при заданном λ либо имеет для всякой произвольно заданной функции $f(x) \in L^2[a, b]$ одно и только одно квадратично-суммируемое решение, в частности $\varphi = 0$ для $f = 0$, либо соответствующее однородное уравнение имеет положительное конечное число r линейно независимых решений $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r$.

Во втором случае неоднородное уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда заданная функция $f(x)$ ортогональна функциям $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r$ и решение определяется лишь с точностью до произвольной аддитивной линейной комбинации $c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \ldots + c_r\varphi_r$.

2.3.11. Экстремальные свойства характеристических чисел и собственных функций. В силу теоремы Гильберта—Шмидта

$$\int_a^b K(x,s)\, \varphi(s)\, ds = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\lambda_k} \varphi_k(x), \qquad a_k = (\varphi, \varphi_k). \qquad (2.3.26)$$

Умножая это равенство на $\varphi(x)$ и интегрируя, получим

$$\int_a^b \int_a^b K(x, s)\, \varphi(x)\, \varphi(s)\, dx\, ds = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2}{\lambda_k}. \qquad (2.3.27)$$

Полагая в (2.3.27) $\varphi=\varphi_m$, будем иметь

$$\int_a^b\int_a^b K(x, s)\,\varphi_m(x)\,\varphi_m(s)\,dx\,ds=\frac{1}{\lambda_m}, \tag{2.3.28}$$

а при $m=1$

$$\int_a^b\int_a^b K(x, s)\,\varphi_1(x)\,\varphi_1(s)\,dx\,ds=\frac{1}{\lambda_1}. \tag{2.3.29}$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{|\lambda_1|}\geqslant\frac{1}{|\lambda_2|}\geqslant\ldots\geqslant\frac{1}{|\lambda_k|}\geqslant\ldots \tag{2.3.30}$$

и из (2.3.27) и неравенства Бесселя следует, что

$$\left|\int_a^b\int_a^b K(x, s)\,\varphi(x)\,\varphi(s)\,dx\,ds\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k^2}{|\lambda_k|}\leqslant\frac{1}{|\lambda_1|}\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2\leqslant\frac{1}{|\lambda_1|}\int_a^b\varphi^2(x)\,dx, \tag{2.3.31}$$

откуда при $\|\varphi\|=1$

$$|\lambda_1|\leqslant\left[\int_a^b\int_a^b K(x, s)\,\varphi(x)\,\varphi(s)\,dx\,ds\right]^{-1}. \tag{2.3.32}$$

Таким образом, $\left|\int_a^b\int_a^b K(x, s)\,\varphi(x)\,\varphi(s)\,dx\,ds\right|$ достигает максимума на множестве нормированных квадратично-суммируемых функций, это максимальное значение достигается при $\varphi=\varphi_1$ и равно $|\lambda_1|^{-1}$.

Аналогично доказывается, что

$$|\lambda_m|^{-1}=\max\left|\int_a^b\int_a^b K(x, s)\,\varphi(x)\,\varphi(s)\,dx\,ds\right|$$

на множестве функции $\{\varphi\}\in L^2[a, b]$ таких, что

$$\|\varphi\|=1,\quad (\varphi, \varphi_1)=(\varphi, \varphi_2)=\ldots=(\varphi, \varphi_{m-1})=0.$$

См. Курант—Гильберт [1], Привалов [1], Михлин [2], Трикоми [2].

§ 4. Интегральные преобразования и интегральные уравнения

2.4.1. Преобразование Фурье. Из математического анализа (см., например, В. И. Смирнов [2]) известно, что для функции, удовлетворяющей условиям Дирихле на любом конечном интервале и абсолютно интегрируемой на всей числовой оси, имеет место формула

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(t-x)\,dt, \tag{2.4.1}$$

или

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(t-x)\,dt. \tag{2.4.2}$$

Формулы (2.4.1) и (2.4.2) называются *интегральными формулами Фурье*.

Так как функция $f(t)\sin\omega(t-x)$ нечетная относительно ω, то

$$0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega(t-x)\,dt, \tag{2.4.3}$$

и складывая (2.4.2) и (2.4.3), умноженное на i, получим интегральную формулу Фурье в комплексной форме

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{i\omega(t-x)}dt. \tag{2.4.4}$$

Обозначим

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{i\omega t}dt, \tag{2.4.5}$$

получим, что

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\,e^{-i\omega x}d\omega. \tag{2.4.6}$$

Формулы (2.4.5) и (2.4.6) образуют пару *взаимных преобразований Фурье*, причем функцию $F(\omega)$ называют *преобразованием Фурье* функции $f(x)$ (или же *спектральной функцией*). Формула (2.4.6) называется *формулой обращения Фурье*.

По поводу вывода формул (2.4.5) и (2.4.6) см. также И. М. Гельфанд [1].

Формула

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{i\omega t}dt$$

может рассматриваться как интегральное уравнение первого рода относительно функции $f(t)$. Формула обращения (2.4.6) дает решение этого интегрального уравнения.

Из интегральной формулы Фурье можно получить так называемые *синус-* и *косинус-преобразования Фурье*.

Так, считая $f(t)$ нечетной на $(-\infty, \infty)$, из (2.4.1) получаем

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\cos\omega x\,dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\sin\omega x\,dt=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} d\omega\sin\omega x\int_{0}^{\infty} f(t)\sin\omega t\,dt.$$

Отсюда, обозначая

$$F_s(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} f(t)\sin\omega t\,dt, \tag{2.4.7}$$

получим

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} F_s(\omega)\sin\omega x\,d\omega. \tag{2.4.8}$$

Формулы (2.4.7) и (2.4.8) образуют пару взаимных *синус-преобразований Фурье*.

Аналогично, если $f(x)$ — четная функция на интервале $(-\infty, \infty)$, получаются *косинус-преобразования Фурье*:

$$F_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt, \tag{2.4.9}$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} F_c(\omega)\cos\omega t\,dt. \tag{2.4.10}$$

Пример 2.4.1. Решить интегральное уравнение

$$\int_0^\infty g(z)\sin zx\,dz = f(x),$$

где

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\sin x, & 0\leqslant x\leqslant\pi\\ 0, & x\geqslant\pi.\end{cases}$$

Переписав уравнение в виде

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,g(z)\sin zx\,dz$$

и рассматривая его как синус-преобразования функции $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,g(z)$, при помощи формулы обращения находим

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,g(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\pi\frac{\pi}{2}\sin x\sin zx\,dx=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{\sin\pi z}{1-z^2}$$

и, наконец,

$$g(z)=\frac{\sin\pi z}{1-z^2}.$$

Для преобразований Фурье, а также синус- и косинус-преобразований Фурье составлены таблицы. См. Диткин и Прудников [1].

Каждая пара взаимных преобразований дает решение двух взаимных интегральных уравнений.

При помощи формул (2.4.9) и (2.4.10) можно построить пример нефредгольмова интегрального уравнения, собственному значению которого соответствует бесконечное множество линейно независимых собственных функций.

Пример 2.4.2. Напишем (2.4.9) и (2.4.10) в виде

$$F(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\cos xt\,dt,$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F(t)\cos xt\,dt.$$

Тогда функция $F(x)+f(x)$ будет собственной функцией интегрального уравнения

$$F(x)+f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty[F(t)+f(t)]\cos xt\,dt,$$

соответствующей характеристическому числу $\lambda=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$. Достаточно положить $f(x)=e^{-px}$, $F(x)=\sqrt{2}\,p\,(x^2+p^2)$, $p>0$, чтобы получить бесконечное множество собственных функций, принадлежащих указанному характеристическому числу.

Преобразование Фурье применяется и для решения интегральных уравнений, отличных от рассмотренных выше.

Пример 2.4.3. Найти решение интегрального уравнения

$$\varphi(x)=f(x)+\int_{-\infty}^{\infty} k(x-y)\,\varphi(y)\,dy.$$

Обозначим преобразования Фурье функций $f(x)$, $k(x)$ и искомой $\varphi(x)$ соответственно через $F(u)$, $K(u)$ и $\Phi(u)$.

Имеем

$$\Phi(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[f(x)+\int_{-\infty}^{\infty} k(x-y)\,\varphi(y)\,dy\right]e^{ixu}\,dx=$$

$$=F(u)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dy\int_{-\infty}^{\infty} k(x-y)\,\varphi(y)\,e^{ixu}\,dx=$$

$$=F(u)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)\,dy\int_{-\infty}^{\infty} k(x-y)\,e^{ixu}\,dx=$$

$$=F(u)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iyu}\varphi(y)\,dy\int_{-\infty}^{\infty} k(\eta)e^{i\eta u}\,d\eta=$$

$$=F(u)+\sqrt{2\pi}\,\Phi(u)\,K(u).$$

Отсюда

$$\Phi(u)=\frac{F(u)}{1-\sqrt{2\pi}\,K(u)}$$

и, следовательно,

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(u)}{1-\sqrt{2\pi}\,K(u)}\,e^{-ixu}\,du.$$

Далее

$$\varphi(x)-f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{F(u)}{1-\sqrt{2\pi}\,K(u)}\,e^{-ixu}-F(u)\,e^{-ixu}\right]du=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(u)\,\frac{\sqrt{2\pi}\,K(u)}{1-\sqrt{2\pi}\,K(u)}\,e^{-ixu}\,du.$$

Обозначив

$$R(u)=\frac{\sqrt{2\pi}\,K(u)}{1-\sqrt{2\pi}\,K(u)}\quad\text{и}\quad r(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} R(u)\,e^{-ixu}\,du,$$

можно получить окончательный результат в виде

$$\varphi(x)=f(x)+\int_{-\infty}^{\infty} r(x-\xi)\, f(\xi)\, d\xi.$$

Приведенные выше вычисления носили формальный характер, поскольку не указаны свойства, которыми обладают данные функции и класс функций, в котором ищется решение.

В данном примере достаточно предположить, что $f(x) \in L^2(-\infty, \infty)$, $k(x) \in L^1(-\infty, \infty)$, $K(u)$ имеет верхнюю грань меньшую $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Полученное решение принадлежит $L^2(-\infty, \infty)$ и с точностью до функции, равной почти всюду нулю, единственно

См. Титчмарш [1], Снеддон [1].

2.4.2. Преобразование Лапласа. В интегральной формуле Фурье положим

$$\cos\omega(t-x)=\frac{e^{i\omega(t-x)}+e^{-i\omega(t-x)}}{2},$$

тогда, предполагая дополнительно, что $f(x)=0$ при $x<0$, будем иметь

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}\, d\omega \int_{0}^{\infty} f(t)\, e^{-it\omega}\, dt, \qquad x>0.$$

Пусть $f(x)$ принадлежит к классу функций, для которых интеграл

$$\int_{0}^{\infty} |f(t)|\, e^{-\eta t}\, dt$$

сходится, если η выбрано достаточно большим положительным. Имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(\eta-i\omega)x}\, d\omega \int_{0}^{\infty} f(t)\, e^{-(\eta-i\omega)t}\, dt=f(x).$$

Положив $\eta-i\omega=p$, $d\omega=-\frac{dp}{i}$, будем иметь

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\eta-i\infty}^{\eta+i\infty} e^{px}\, dp \int_{0}^{\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt=f(x). \tag{2.4.11}$$

Функция

$$\bar{f}(p)=\int_{0}^{\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt \tag{2.4.12}$$

носит название *преобразования Лапласа* функции $f(t)$. Имеет место формула обращения (обратное преобразование Лапласа)

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\eta-i\infty}^{\eta+i\infty}\bar{f}(p)\,e^{px}\,dp. \qquad (2.4.13)$$

В последней формуле применяется интегрирование функции комплексной переменной $\bar{f}(p)$.

Для пары взаимных преобразований (2.4.12) и (2.4.13) составлены обширные таблицы, которые полезны при решении некоторых интегральных уравнений. См. Диткин и Кузнецов [1], а также Диткин и Прудников [1].

Преобразования Лапласа применяются и к решению ряда других типов интегральных уравнений.

Пример 2.4.4. Найти решение интегрального уравнения Вольтерра

$$\varphi(x)=f(x)+\int_0^x k(x-t)\,\varphi(t)\,dt.$$

Ограничимся формальным решением. Обозначим преобразования Лапласа функций $f(x)$, $k(x)$ и искомой $\varphi(x)$ соответственно через $\bar{f}(p)$, $\bar{k}(p)$, $\bar{\varphi}(p)$.

Тогда, повторяя вычисления примера 2.4.3, придем к уравнению

$$\bar{\varphi}(p)=\bar{f}(p)+\bar{k}(p)\,\bar{\varphi}(p),$$

откуда

$$\bar{\varphi}(p)=\bar{f}(p)+\frac{\bar{k}(p)}{1-\bar{k}(p)}\,\bar{f}(p).$$

Решение получается посредством формулы обращения.

См. Деч [1], Диткин и Кузнецов [1], Диткин и Прудников [1].

§ 5. Уравнения Фредгольма первого рода

2.5.1. Теорема Пикара. Пусть дано уравнение Фредгольма первого рода

$$\int_a^b K(x,\ s)\,\varphi(s)\,ds=f(x). \qquad (2.5.1)$$

Если ядро есть многочлен по x:

$$K(x,\ s)=a_1(s)\,x^m+a_2(s)\,x^{m-1}+\ldots+a_m(s)\,x+a_{m+1}(s), \qquad (2.5.2)$$

то левая часть (2.5.1) примет вид

$$b_1x^m+b_2x^{m-1}+\ldots+b_{m+1}$$

и, следовательно, такой же вид должна иметь и правая часть (2.5.1).

Отсюда следует, что если $f(x)$ произвольная непрерывная на $[a,\ b]$ функция, то при данном ядре (2.5.2) уравнение (2.5.1) не имеет решения.

Можно показать, что если $K(x, s)$ — непрерывное ядро, а $f(x)$ — некоторая непрерывная функция, то в классе $C[a, b]$ уравнение (2.5.1) может не иметь решения. Если $K(x, s)$ — симметричное ядро, квадратично-суммируемое в квадрате $a \leqslant x, s \leqslant b$, $f(x)$ квадратично-суммируема на $[a, b]$, то интегральное уравнение (2.5.1) имеет квадратично-суммируемое решение тогда и только тогда, когда ряд

$$\lambda_1^2 f_1^2 + \lambda_2^2 f_2^2 + \ldots + \lambda_n^2 f_n^2 + \ldots$$

сходится.

Здесь λ_k — характеристические числа ядра $K(x, s)$, f_k — коэффициенты Фурье функции $f(x)$ по системе собственных функций ядра (предполагается полнота указанной системы собственных функций).

В этом заключается теорема Пикара (1910 г.).

См. Привалов [1], Гурса [1], Трикоми [2].

2.5.2. Метод последовательных приближений. Пусть $K(x, s)$ — симметричное квадратично-суммируемое положительно определенное ядро и пусть уравнение

$$\int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, ds = f(x), \qquad f(x) \in L^2[a, b],$$

разрешимо. Тогда последовательность $\{\varphi_n(x)\}$, определяемая рекуррентным соотношением

$$\varphi_n(x) = \varphi_{n-1}(x) + \lambda\, [f(x) - f_{n-1}(x)],$$

где

$$\varphi_0(x) \in L^2[a, b],$$

$$f_{n-1}(x) = \int_a^b K(x, s)\, \varphi_{n-1}(s)\, ds,$$

$$0 < \lambda < 2\lambda_1,$$

и λ_1 — наименьшее характеристическое число ядра $K(x, s)$, сходится в среднем к решению уравнения (2.5.1).

Эта теорема принадлежит Фридману [1]. См. также Положий и др. [1].

2.5.3. Решение некоторых интегральных уравнений первого рода.
Пример 2.5.1. Уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(x-s)\, \varphi(s)\, ds = f(x)$$

может быть при помощи преобразования Фурье приведено к виду

$$F(u) = \sqrt{2\pi}\, \Phi(u)\, K(u),$$

где $F(u)$, $\Phi(u)$, $K(u)$ — соответственно преобразования функций $f(x)$, $\varphi(x)$, $k(x)$.

Имеем далее

$$\Phi(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{F(u)}{K(u)},$$

и применение обратного преобразования Фурье дает

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(u)}{K(u)}e^{-ixu}\,du.$$

Решение данного уравнения существует и принадлежит к $L^2[-\infty, \infty]$, если $f(x)\in L^2(-\infty, \infty)$, $k(x)\in L^1(-\infty, \infty)$, $\frac{F(u)}{K(u)}\in L^2(-\infty, \infty)$.

См. Титчмарш [1].

Пример 2.5.2. В уравнении

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-s)^2}\varphi(s)\,ds=f(x)$$

ядро является производящей функцией для полиномов Эрмита $H_n(s)$, т. е. имеет место соотношение

$$e^{-(x-s)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-s^2}H_n(s)\,x^n}{n!},$$

причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n^2 e^{-x^2}dx=2^n\,n!\,\sqrt{\pi}.$$

Данное уравнение, если положить в нем

$$\varphi(s)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nH_n(s),$$

сводится к виду

$$f(x)=\sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}a_n2^nn^n,$$

и коэффициенты $\sqrt{\pi}\,a_n2^n$ определяются как коэффициенты степенного разложения функции $f(x)$. Последняя функция, таким образом, должна быть аналитической.

По поводу этого примера, а также других, в которых используются производящие функции, см. Морс и Фешбах [1].

§ 6. Приближенные методы решения интегральных уравнений

2.6.1. Метод последовательных приближений решения уравнения Фредгольма второго рода. Пусть дано уравнение

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds=f(s). \tag{2.6.1}$$

Если $\varphi(x)$ — точное решение уравнения (2.6.1), а $\varphi_n(x)$ есть n-е последовательное приближение (см. п. 2.2.1 и 2.2.2), то

$$|\varphi(x)-\varphi_n(x)| \leqslant D\sqrt{C_1}\,\frac{|\lambda|^{n+1}B^n}{1-|\lambda|B}, \tag{2.6.2}$$

в предположении, что ядро кусочно-непрерывное,

$$\left.\begin{aligned} &\int_a^b K^2(x, s)\,ds < C_1, \qquad C_1=\text{const},\\ &\int_a^b\int_a^b K^2(x, s)\,dx\,ds = B^2,\\ &\int_a^b f^2(x)\,dx < D, \qquad D=\text{const}. \end{aligned}\right\} \tag{2.6.3}$$

Последовательные приближения сходятся к решению равномерно при $|\lambda| \leqslant B^{-1}$.

См. Михлин [2].

Более грубая оценка может быть получена при следующих предположениях: ядро непрерывно, причем $|K(x, s)| \leqslant M$, функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и $|f(x)| \leqslant N$, тогда

$$|\varphi(x)-\varphi_n(x)| \leqslant \frac{N(|\lambda|M(b-a))^{n+1}}{1-|\lambda|(b-a)}. \tag{2.6.4}$$

Сходимость приближений к решению равномерна.

См. Березин и Жидков [1].

Если ядро и свободный член квадратично-суммируемы и почти всюду имеют место неравенства (2.6.3), то сохраняется и оценка (2.6.2) почти всюду на отрезке $[a, b]$.

Аналогичное замечание можно сделать и относительно оценки (2.6.4).

См. Трикоми [2], Михлин [3].

2.6.2. Метод механических квадратур. В интегральном уравнении

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds = f(x) \tag{2.6.5}$$

предположим, что ядро и свободный член непрерывны. Заменим в (2.6.5) интеграл квадратурной формулой Чебышёва:

$$\int_a^b \psi(x)\,dx = A\sum_{k=1}^{n}\psi(x_k)\,dx + Q, \tag{2.6.6}$$

где

$$x_k = \frac{b-a}{2} + \frac{b-a}{2} x_k^{(n)}, \quad A = \frac{b-a}{n},$$

и $x_k^{(n)}$ — точки Чебышёва, ρ — остаточный член. Формула Чебышёва применима при $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9$.

Точки Чебышёва табулированы. См., например, Березин и Жидков [1]. Там же приведены выражения для остаточного члена формулы Чебышёва.

Используя (2.6.6), заменяя уравнение (2.6.5) системой уравнений

$$\varphi(x_i) - \lambda A \sum_{k=1}^{n} K(x_i, x_k)\, \varphi(x_k) = f(x_i) + \lambda \rho_i \tag{2.6.7}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

где $\rho_i = \rho(x_i)$.

Отбрасывая в (2.6.7) малые величины ρ_i, получаем систему уравнений

$$\tilde{\varphi}(x_i) - \lambda A \sum_{k=1}^{n} K(x_i, x_k)\, \tilde{\varphi}(x_k) = f(x_k) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.6.8}$$

Найдя из (2.6.8) значения $\tilde{\varphi}(x_1)$, $\tilde{\varphi}(x_2)$, ..., $\tilde{\varphi}(x_n)$ при помощи формул интерполирования, можно указать приближенное значение функции $\varphi(x)$.

В случае, когда ядро и свободный член периодичны с периодом $b-a$, рекомендуется использование формулы прямоугольников.

См. Канторович и Крылов [1], где содержатся оценки погрешностей замены интегрального уравнения системой линейных уравнений.

См. также Михлин [3].

2.6.3. Метод наименьших квадратов и метод Галёркина. Приближенное решение $\Phi(x)$ уравнения

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, ds = f(x) \tag{2.6.9}$$

ищут в виде

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x), \tag{2.6.10}$$

где $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ — линейно независимые на $[a, b]$ функции. Коэффициенты a_k находят из условия

$$\int_a^b \left[\Phi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\, \Phi(s)\, ds - f(x)\right]^2 dx = \min, \tag{2.6.11}$$

или

$$\int_a^b \left\{ \left[\sum_{k=1}^{n} a_k (\varphi_k(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi_k(s)\, ds) \right] - f(x) \right\}^2 dx = \min.$$

Интеграл, стоящий в левой части (2.6.11), есть функция от $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Приравнивая нулю частные производные этой функции по $a_1, a_2, \ldots, a_n$, получаем систему уравнений для нахождения $a_1, a_2, \ldots, a_n$. В этом заключается метод наименьших квадратов.

В методе Галёркина коэффициенты a_k находят из условий ортогональности

$$\int_a^b \left[\Phi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \Phi(s)\, ds - f(x) \right] \varphi_k(x)\, dx = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.6 12}$$

Условия применимости этих методов и их обоснование см. Михлин [4].

2.6.4. Формулы для нахождения характеристических чисел. Методы, изложенные выше, позволяют находить характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

Удобным является метод следов; *m-м следом* ядра $K(x, s)$ называется число

$$A_m = \int_a^b K_m(x, s)\, ds, \tag{2.6.13}$$

где $K_m(x, s)$ — m-е итерированное ядро.

Из формулы (2.3.19) следует, что

$$A_m = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^m} \qquad (m = 2, 3, \ldots) \tag{2.6.14}$$

Для достаточно большого m преобладающим членом по абсолютной величине является

$$\frac{1}{\lambda_1^m}.$$

Это приводит к приближенным формулам

$$A_{2m} \approx \frac{1}{\lambda_1^{2m}}, \qquad A_{2m+2} \approx \frac{1}{\lambda_1^{2m+2}},$$

откуда

$$|\lambda_1| \approx \sqrt{\frac{A_{2m}}{A_{2m+2}}}. \tag{2.6.15}$$

Формула (2 6 15) дает значение $|\lambda_1|$ с избытком.

Имеют место формулы

$$|\lambda_2| \approx \frac{1}{|\lambda_1|} \sqrt{\frac{B_{2m}}{B_{2m+2}}}, \tag{2.6.16}$$

$$|\lambda_2| \approx \frac{1}{|\lambda_1|} \sqrt[2m]{\frac{2}{B_{2m}}}, \tag{2.6.17}$$

где

$$B_{2m} = A_{2m}^2 - A_{4m}. \tag{2.6.18}$$

См. Виарда [1], Михлин [2], Трикоми [2].

§ 7. Некоторые нелинейные интегральные уравнения

2.7.1. Нелинейные уравнения Вольтерра. Рассмотрим общее нелинейное интегральное уравнение Вольтерра

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x F(x, s, \varphi(s))\, ds. \tag{2.7.1}$$

Предположения:

1) для любой пары z_1, z_2

$$|F(x, s, z_1) - F(x, s, z_2)| \leqslant a(x, s)\, |z_1 - z_2|,$$

2)

$$\left| \int_0^x F(x, s, f(s))\, ds \right| \leqslant n(x),$$

где

$$\int_0^x n^2(s)\, ds \leqslant N^2,$$

$$\int_0^h dx \int_0^x a^2(x, s)\, ds \leqslant A^2, \qquad 0 \leqslant s \leqslant x \leqslant h.$$

Здесь A и N — постоянные, $n(s)$ и $a(x, s)$ — функции, суммируемые с своим квадратом. В этих предположениях метод последовательных приближений приводит к решению уравнения (2.7.1), причем последовательные приближения сходятся к решению почти всюду абсолютно и равномерно. Указанное решение с точностью до функций, почти всюду равных нулю, единственно.

Доказательство см. Трикоми [2].

2.7.2. Уравнения типа Гаммерштейна. Каноническая форма этих уравнений такова

$$\psi(x) + \int_0^1 K(x, s) f(s, \psi(s))\, ds = 0. \tag{2.7.2}$$

В предположении, что выполнены ниже указываемые условия, метод последовательных приближений доставляет решение уравнения (2.7 2). Последовательные приближения сходятся к решению почти всюду абсолютно и равномерно.

Эти условия таковы:

1) функция

$$A^2(x)=\int_0^1 K^2(x,\ s)\,ds$$

существует почти всюду на интервале (0, 1) и интегрируема на этом интервале;

2) функция $f(s,\ u)$ удовлетворяет условию Липшица

$$|f(s,\ u_1)-f(s,\ u_2)|<C(s)\,|u_1-u_2|;$$

3)

$$\int_0^1 A^2(x)\,C^2(x)\,dx=M^2<1.$$

Доказательство см Трикоми [2].

Имеют место следующие теоремы.

А. Уравнение (2.7.2) имеет непрерывное решение, если $K(x,\ s)$ — кусочно-непрерывное, симметричное, положительно определенное и ограниченное ядро; функция $f(s,\ u)$ — непрерывная, суммируемая со своим квадратом по u (для любых фиксированных значений s из рассматриваемого отрезка [0, 1]), причем

$$\int_0^u f(s,\ v)\,dv\geqslant-\frac{k}{2}\,u^2-C,\qquad k=\text{const},\qquad C=\text{const}>0$$

и

$$k<\lambda_1,$$

где λ_1 есть наименьшее собственное значение ядра $K(x,\ s)$.

Б. Уравнение (2.7.2) имеет непрерывное решение, если 1) ядро $K(x,\ s)$ кусочно-непрерывно, симметрично и положительно определенно; 2) непрерывная функция $f(x,\ u)$ удовлетворяет условиям:

$$\int_0^u f(x,\ v)\,dv\geqslant-\frac{k}{2}\,u^2-C_1\qquad(0<k<\lambda_1),$$

$$|f(x,\ u)|\leqslant C_2\,|u|+C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — постоянные числа.

Доказательства см. Н. С. Смирнов [1], Трикоми [2].

2.7.3. Бифуркация решений. Нелинейное интегральное уравнение

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x, s)\, f(s, \varphi(s))\, ds=0$$

может иметь непрерывный спектр характеристических чисел и в том числе такие, что при переходе через них количество решений уравнения меняется, оставаясь конечным. Такие значения λ называются *точками бифуркации*.

Пример 2.7.1. Дано уравнение

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1 \varphi^2(s)\, ds = 1.$$

Полагая

$$\int_0^1 \varphi^2(s)\, ds = \xi,$$

получим

$$\varphi(x) = 1+\lambda\xi,$$

и исходное уравнение становится равносильным уравнению

$$\xi=(1+\lambda\xi)^2.$$

Решая последнее уравнение, получим

$$\xi=\frac{1-2\lambda\pm\sqrt{1-4\lambda}}{2\lambda^2}$$

и

$$\varphi(x)=\frac{1\pm\sqrt{1-4\lambda}}{2\lambda}.$$

Отсюда следует, что данное уравнение имеет вещественные решения лишь при $\lambda\leqslant\frac{1}{4}$. При $\lambda<\frac{1}{4}$ уравнение имеет два решения, при $\lambda=\frac{1}{4}$ одно решение (кратности 2), при $\lambda=0$ одно решение имеет вид $\varphi(x)=1$, а второе бесконечно. Точка $\lambda=\frac{1}{4}$ — точка бифуркации, точка $\lambda=0$ — особая точка уравнения.

На примере рассматриваемого уравнения можно показать, что в случае нелинейных уравнений из существования решения однородного уравнения не следует существования бесконечного числа решений неоднородного уравнения.

Доказательство и примеры см. Трикоми [2]. См. также Красносельский [1], Вайнберг [1].

§ 8. Сингулярные интегральные уравнения

2.8.1. Главное значение несобственного интеграла. *Главным значением* несобственного интеграла по отрезку $[a, b]$ функции $f(x)$, не ограниченной в окрестности точки c, $a<c<b$, называется

предел (если он существует)

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \right]. \tag{2.8.1}$$

Главное значение интеграла называют также *особым* или *сингулярным интегралом*. Для его обозначения применяют символы $\int_a^b f(x)\,dx$, v.p. $\int_a^b f(x)\,dx$ (v. p. — начальные буквы слов value principale), $\int_a^{*b} f(x)\,dx$.

Пример 2.8.1. При $a<x<b$

$$\int_a^b \frac{dt}{t-x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_a^{x-\varepsilon} \frac{dt}{t-x} + \int_{x+\varepsilon}^{b} \frac{dt}{t-x} \right] = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\ln|t-x| \Big|_a^{x-\varepsilon} + \ln|t-x| \Big|_{x+\varepsilon}^{b} \right] =$$

$$= \ln\frac{b-x}{x-a} + \lim_{\varepsilon \to 0} [\ln\varepsilon - \ln\varepsilon] = \ln\frac{b-x}{x-a}.$$

Если функция $f(x)$ удовлетворяет на отрезке $[a, b]$ условию Липшица

$$|f(x') - f(x'')| < K|x' - x''|^{\alpha}, \tag{2.8.2}$$

где K — постоянная, $0 < \alpha \leqslant 1$, x' и x'' — произвольные точки указанного интервала, то для любого x, $a < x < b$, существует сингулярный интеграл

$$\int_a^b \frac{f(t)}{t-x}\,dt.$$

Если функция $f(t)$ удовлетворяет на отрезке $[0, 2\pi]$ условию Липшица (2.8.2), то существует сингулярный интеграл

$$\int_0^{2\pi} f(t) \operatorname{ctg}\frac{t-x}{2}\,dt.$$

Интегральные уравнения, в которых интеграл понимается в смысле главного значения, называются *особыми* или *сингулярными интегральными уравнениями*.

2.8.2. Преобразование Гильберта — М. Рисса. Если $f(x)$ удовлетворяет на $(-\infty, \infty)$ условию Липшица с показателем $\alpha > 0$, меньшим единицы, и квадратично-интегрируема на $(-\infty, \infty)$, то имеют место двойственные соотношения

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-x}\, dt, \tag{2.8.3}$$

$$f(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(t)}{t-x}\, dt, \tag{2.8.4}$$

в которых интегралы понимаются в смысле главного значения. При этом $g(x)$ удовлетворяет тем же условиям, что и $f(x)$.

Формулы (2.8.3) и (2.8.4) называют *преобразованием Гильберта — М. Рисса.* Каждая из этих формул может рассматриваться как интегральное уравнение первого рода, тогда вторая формула дает решение этого уравнения.

Таблицы для указанного преобразования Гильберта можно найти в книге Диткина и Прудникова [1]. Теория преобразований Гильберта (2.8.9), (2.8.4) изложена в книге Титчмарша [1].

Преобразование Гильберта рассматривается и в иной форме. Именно, интегральное уравнение

$$\frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \varphi(t) \operatorname{ctg} \frac{t-x}{2}\, dt = \psi(x), \tag{2.8.5}$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условию Липшица с α, меньшими 1, на отрезке $[0, 2\pi]$ и при условии

$$\int_{0}^{2\pi} \psi(x)\, dx = 0 \tag{2.8.6}$$

имеет решение

$$\varphi(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \psi(t) \operatorname{ctg} \frac{t-x}{2}\, dt, \tag{2.8.7}$$

причем

$$\int_{0}^{2\pi} \varphi(x)\, dx = 0. \tag{2.8.8}$$

По этому поводу см. Мусхелишвили [1].

Посредством преобразования Гильберта—Рисса может быть решено интегральное уравнение

$$\varphi(x)-\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(y)}{y-x}\,dy=f(x),$$

где $f(x)\in L^2(-\infty,\ \infty)$.

Решение этого уравнения имеет вид

$$\varphi(x)=\frac{1}{1+\lambda^2\pi^2}\left[f(x)+\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(y)}{y-x}\,dy\right].$$

Здесь $1+\lambda^2\pi^2\neq 0$, $\varphi(x)\in L^2(-\infty,\ \infty)$.

См. Трикоми [2].

2.8.3. Сингулярное интегральное уравнение Гильберта. Так называют уравнение

$$a\varphi(s)+\frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma=f(s),\tag{2.8.9}$$

в котором ядро и функция $f(s)$ удовлетворяют условию Липшица.

Если $a^2+b^2\neq 0$, то уравнению (2.8.9) эквивалентно уравнение Фредгольма

$$(a^2+b^2)\,\varphi(s)-\frac{b^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\sigma)\,d\sigma=F(s),\tag{2.8.10}$$

решение которого есть

$$\varphi(s)=\frac{a}{a^2+b^2}f(s)-\frac{b}{2\pi(a^2+b^2)}\int_0^{2\pi}f(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma+$$
$$+\frac{b^2}{2\pi a(a^2+b^2)}\int_0^{2\pi}f(\sigma)\,d\sigma.\tag{2.8.11}$$

Если $a^2+b^2=0$, то уравнение (2.8.9) в общем случае неразрешимо

При $a=0$, $b=1$ получается уравнение

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma=f(s),\tag{2.8.12}$$

которое решается посредством применения преобразования Гильберта

Процесс приведения сингулярного уравнения к уравнению Фредгольма называется *регуляризацией сингулярного уравнения.*

Если при этом исходное сингулярное уравнение и полученное уравнение Фредгольма эквивалентны, то говорят о равносильной регуляризации.

Так можно произвести равносильную регуляризацию уравнения, более общего, чем (2.8.9):

$$a\varphi(s)+\frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma+\int_0^{2\pi}K(s,\sigma)\varphi(\sigma)\,d\sigma=f(s), \tag{2.8.13}$$

в котором ядро $K(s,\sigma)$ и $f(s)$ удовлетворяют условию Липшица.

Регуляризуется, но не всегда равносильно, уравнение

$$a(s)\varphi(s)+\frac{b(s)}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma+\int_0^{2\pi}K(s,\sigma)\varphi(\sigma)\,d\sigma=f(s), \tag{2.8.14}$$

в котором $a(s)$, $b(s)$, $K(s,\sigma)$, $f(s)$ удовлетворяют условию Липшица.

См. Михлин [2], Гахов [1], Мусхелишвили [1]

2.8.4. Сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши. Главное значение интеграла рассматривается и для интегралов от функций комплексной переменной.

Сингулярным интегральным уравнением с ядром Коши называют уравнение вида

$$a\varphi(t)+\frac{b}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-t}\,d\zeta=f(t),$$

где L — замкнутый или незамкнутый контур, a и b — постоянные. Интеграл понимается в смысле главного значения.

Теорию см. Мусхелишвили [1], Гахов [1], приложения — Михлин [2], Мусхелишвили [1], Гахов [1].

ГЛАВА III

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 0. Введение

3.0.1. Содержание главы. В настоящей главе излагаются сведения о некоторых приложениях вариационного исчисления и интегральных уравнений.

Сначала рассматриваются простейшие задачи о геодезических, затем вариационные принципы и их приложения к выводу некоторых уравнений математической физики и, наконец, приведены сведения о задаче Штурма—Лиувилля.

Соответственно рассматриваемым разделам ниже указывается литература.

§ 1. Задачи о геодезических

3.1.1. Задача о геодезических в трехмерном евклидовом пространстве. Из курса математического анализа известно, что винтовые линии

$$x = a\cos\varphi,\ y = a\sin\varphi,\ z = \frac{h}{2\pi}\varphi,$$

расположенные на цилиндре

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

обладают геодезическим свойством: расстояние между двумя точками винтовой линии является кратчайшим расстоянием между этими точками на цилиндре.

Ставится задача: дана поверхность

$$\varphi(x, y, z) = 0 \tag{3.1.1}$$

и на ней две точки

$$A(x_0, y_0, z_0) \quad \text{и} \quad B(x_1, y_1, z_1).$$

Требуется провести на поверхности линию, соединяющую точки A и B так, чтобы по ней расстояние от A до B было наименьшим.

Это задача на условный экстремум функционала

$$J = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2(x) + z'^2(x)}\, dx \tag{3.1.2}$$

при условиях

$$\varphi(x, y, z) = 0,$$
$$y(x_0) = y_0, \qquad z(x_0) = z_0,$$
$$y(x_1) = y_1, \qquad z(x_1) = z_1.$$

Согласно правилу множителей Лагранжа минимизируем функционал

$$\int_{x_0}^{x_1} [\sqrt{1+y'^2+z'^2} + \lambda\varphi(x, y, z)]\, dx,$$

что дает уравнения

$$\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}, \tag{3.1.3}$$

$$\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{d}{dx}\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}. \tag{3.1.4}$$

Учитывая, что $\sqrt{1+y'^2+z'^2}\, dx = ds$, получим

$$\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{d}{ds}\left(\frac{dy}{ds}\frac{ds}{dx}\right) = \frac{d^2y}{ds^2}\frac{ds}{dx} \tag{3.1.5}$$

и, аналогично,

$$\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{d^2z}{ds^2}\frac{ds}{dx}. \tag{3.1.6}$$

Из тождества

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1$$

следует, что

$$\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dz}{ds}\frac{d^2z}{ds^2} = 0. \tag{3.1.7}$$

С другой стороны, дифференцируя (3.1.1) вдоль интересующей нас линии, получим тождество

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{ds} = 0. \tag{3.1.8}$$

Из (3.1.5)—(3.1.8) следует, что

$$\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{d^2x}{ds^2}\frac{ds}{dx}. \tag{3.1.9}$$

Из (3.1.5), (3.1.6) и (3.1.9) вытекает, что

$$\frac{\dfrac{d^2x}{ds^2}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}} = \frac{\dfrac{d^2y}{ds^2}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}} = \frac{\dfrac{d^2z}{ds^2}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}}. \tag{3.1.10}$$

Но вектор $\left\{\frac{d^2x}{ds^2}, \frac{d^2y}{ds^2}, \frac{d^2z}{ds^2}\right\}$ коллинеарен главной нормали, а вектор $\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right\}$ есть вектор нормали к поверхности (3.1.1).

Следовательно, в каждой точке искомой линии направление главной нормали совпадает с нормалью поверхности.

Для получения этого свойства главную роль играла стационарность функционала (3.1.2) при указанных выше условиях, а не минимальность расстояния между точками A и B.

Впредь *геодезическими* будут называться экстремали функционала

$$\int ds,$$

где s — длина дуги.

См. Ахиезер [1], Лаврентьев и Люстерник [1], [2], Гюнтер [1], В. И. Смирнов [1].

3.1.2. Отыскание геодезических в случае, когда поверхность задана параметрическими уравнениями. Пусть поверхность задана уравнениями

$$x=\varphi(u, v), \quad y=\psi(u,v), \quad z=\omega(u, v). \tag{3.1.11}$$

Для квадрата элемента дуги имеет место формула

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2, \tag{3.1.12}$$

где

$$\left.\begin{aligned} E&=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,\\ F&=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v},\\ G&=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.\end{aligned}\right\} \tag{3.1.13}$$

Геодезические определяются как экстремали функционала

$$\int \sqrt{E+2Fv'+Gv'^2}\,du. \tag{3.1.14}$$

Пример 3.1.1. Дана сфера

$$x=\sin\theta\cos\varphi, \quad y=\sin\theta\sin\varphi, \quad z=\cos\theta,$$
$$ds^2=d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2.$$

Геодезические определяются как экстремали функционала

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{1+\sin^2\theta\cdot\varphi'^2}\,d\theta.$$

Уравнение Эйлера–Лагранжа в данном случае есть

$$\frac{d}{d\theta}\,\frac{\sin^2\theta\cdot\varphi'}{\sqrt{1+\sin^2\theta\cdot\varphi'^2}}=0,$$

откуда

$$\frac{\sin^2\theta\cdot\varphi'}{\sqrt{1+\sin^2\theta\cdot\varphi'^2}}=C_1.$$

Общий интеграл последнего уравнения имеет вид

$$C_1\operatorname{ctg}\theta=\cos(\varphi+C_2).$$

Если $C_1=0$, то $\varphi=\text{const}$ и геодезическими оказываются все меридианы сферы, т. е. большие круги, проходящие через полюсы.

Если $C_1\neq 0$, то общий интеграл можно записать в виде

$$\operatorname{ctg}\theta=\alpha\cos\varphi+\beta\sin\varphi.$$

Переходя к декартовым координатам по формулам

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\quad z=r\operatorname{ctg}\theta\quad (r=\sqrt{x^2+y^2}),$$

получаем

$$z=\alpha x+\beta y.$$

Следовательно, и в этом случае геодезическими оказываются большие круги, получающиеся в пересечении сферы $x^2+y^2+z^2=1$ и плоскости $z=\alpha x+\beta y$.

См. Лаврентьев и Люстерник [1], [2].

3.1.3. Отыскание геодезических на римановых многообразиях. В n-мерном евклидовом пространстве $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ элемент длины дуги определяется формулой

$$ds^2=dx_1^2+dx_2^2+\ldots+dx_n^2. \tag{3.1.15}$$

Пространство, в котором элемент длины определяется формулой

$$s^2=\sum_{i,k=1}^{n} g_{ik}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_i\,dx_k, \tag{3.1.16}$$

где квадратичная форма, стоящая справа, — положительно определенная, $g_{ik}=g_{ki}$, $g_{ik}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов, называется *римановым*.

Линии, вдоль которых

$$\delta\int ds=0, \tag{3.1.17}$$

называются *геодезическими*.

Условие (3.1.17) может быть записано иначе, если геодезическую параметризовать посредством параметра t:

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\sum_{i,k=1}^{n} g_{ik}\frac{dx_i}{dt}\frac{dx_k}{dt}}\,dt=\delta\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{g}\,dt=0. \tag{3.1.18}$$

Уравнения Эйлера — Лагранжа в данном случае суть

$$\frac{1}{2}\sum_{i,k}\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j}\frac{dx_i}{dt}\frac{dx_k}{dt}-\frac{d}{dt}\sum_i\frac{g_{ij}}{\sqrt{g}}\frac{dx_i}{dt}=0. \tag{3.1.19}$$

Если в качестве параметра взята длина дуги, то $g=1$ и (3.1.19) примет вид

$$\frac{1}{2}\sum_{i,k}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j}\frac{dx_i}{ds}\frac{dx_k}{ds}=\frac{d}{ds}\sum_i g_{ij}\frac{dx_i}{ds}. \tag{3.1.20}$$

Эти уравнения можно привести к виду

$$\sum_i g_{ij}\frac{d^2x_i}{ds^2}+\frac{1}{2}\sum_{i,\ k}\begin{bmatrix} i & k \\ & j \end{bmatrix}\frac{dx_i}{ds}\frac{dx_k}{ds}=0, \tag{3.1.21}$$

где

$$\begin{bmatrix} i & k \\ & j \end{bmatrix}=\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}+\frac{\partial g_{kj}}{\partial x_i}-\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j}. \tag{3.1.22}$$

Символы, стоящие в левой части (3.1.22), называются *символами Кристофеля первого рода.*

Пример 3.1.2. Найти геодезические на цилиндре.

Пусть ось Oz параллельна образующим, а уравнения направляющей на плоскости Oxy суть

$$x=\varphi(\sigma),\qquad y=\psi(\sigma).$$

Выбрав в качестве параметра длину дуги, будем иметь

$$\varphi'^2(\sigma)+\psi'^2(\sigma)=1.$$

Координаты на поверхности цилиндра суть σ и z, тогда

$$ds^2=d\sigma^2+dz^2,$$

т. е. $g_{11}=g_{22}=1$, $g_{12}=g_{21}=0$. Символы Кристофеля равны нулю, ибо все g_{ik} постоянны.

Уравнения геодезических имеют вид

$$\sigma''=0,$$

откуда

$$\sigma=As+B,$$

и

$$z''=0,$$

откуда

$$z=A_1s+B_1$$

Если $A\neq 0$, то

$$z=C_1\sigma+C_2$$

и геодезические определяются уравнениями

$$x=\varphi(\sigma),\qquad y=\psi(\sigma),\qquad z=C_1\sigma+C_2.$$

Это — винтовые линии.

См. В. И. Смирнов [1], Лаврентьев и Люстерник [1], [2].

§ 2. Вариационные принципы механики

3.2.1. Принцип Гамильтона — Остроградского. Пусть дана механическая система без связей, состоящая из n точек, имеющих массы $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Кинетическая энергия системы равна

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\left[\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right].$$

Предположим, что система имеет *силовую функцию* U, зависящую от $3n+1$ переменных $x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n, t$, т. е. сила, действующая на i-ю точку, имеет проекции на оси, соответственно равные

$$\frac{\partial U}{\partial x_i},\quad \frac{\partial U}{\partial y_i},\quad \frac{\partial U}{\partial z_i}.$$

Силы инерции, имеющие проекции

$$-m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}, \quad -m_i\frac{d^2y_i}{dt^2}, \quad -m_i\frac{d^2z_i}{dt^2} \quad (i=1, 2, \ldots, n),$$

будучи приложенными к точкам системы, уничтожили бы ускорение системы.

Пусть движение системы определяется функциями

$$x=x_i(t), \quad y=y_i(t), \quad z=z_i(t) \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

и каждая из точек получает смещение δx_i, δy_i, δz_i.

Вследствие принципа Даламбера совместная работа сил, приложенных к точкам системы, и сил инерции вдоль любого виртуального перемещения равна нулю:

$$A=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}-m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}\right)\delta x_i+\left(\frac{\partial U}{\partial y_i}-m_i\frac{d^2y_i}{dt^2}\right)\delta y_i+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial U}{\partial z_i}-m_i\frac{d^2z_i}{dt^2}\right)\delta z_i\right]=0.$$

Отсюда, учитывая, что

$$\frac{d^2x_i}{dt^2}\delta x_i=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx_i}{dt}\delta x_i\right)-\delta\frac{1}{2}\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2$$

и аналогичные формулы для $\frac{d^2y_i}{dt^2}\delta y_i$ и $\frac{d^2z_i}{dt^2}\delta z_i$, получим

$$\delta U+\delta T=\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}m_i\left(\frac{dx_i}{dt}\delta x_i+\frac{dy_i}{dt}\delta y_i+\frac{dz_i}{dt}\delta z_i\right).$$

Если положения системы заданы для моментов t_0 и t_1, то вариации δx_i, δy_i, δz_i обращаются в нуль при $t=t_0$ и $t=t_1$ и интегрирование последнего соотношения дает

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}(T+U)\,dt=0. \tag{3.2.1}$$

Если ввести *потенциальную энергию* V, $V=-U$ и *функцию Лагранжа*

$$L=T-V,$$

именуемую также *кинетическим потенциалом*, то (3.2.1) принимает вид

$$\delta\int_{t_0}^{t}L\,dt=0. \tag{3.2.2}$$

Мы получили *принцип Гамильтона—Остроградского*: действительное движение системы выделяется из всех допустимых движений

тем, что действие (по Гамильтону)

$$\int_{t_0}^{t_1} L\,dt \tag{3.2.3}$$

имеет стационарное значение (т. е. вариация указанного функционала равна нулю).

В том случае, когда силовой функции нет, принцип Гамильтона — Остроградского имеет вид

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta A)\,dt = 0, \tag{3.2.4}$$

где через δA обозначена элементарная работа активных сил $\{X_i, Y_i, Z_i\}$ на виртуальных перемещениях δx_i, δy_i, δz_i.

В той же формулировке, которая приведена выше, принцип Гамильтона — Остроградского справедлив для случая, когда движение системы подчинено голономным связям:

$$\varphi_s(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n, t) = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, m;\ m < n). \tag{3.2.5}$$

Учитывая, что в формулировке принципа Гамильтона — Остроградского фигурируют физические величины — кинетическая и потенциальная энергии, работа, — его можно применять к механическим системам с бесконечным количеством степеней свободы, что будет иллюстрировано ниже на ряде примеров.

Здесь же покажем, что, исходя из принципа Гамильтона — Остроградского, можно получить уравнения динамики.

Действительно, если выполняется (3.2.2), то уравнения Эйлера — Лагранжа для функционала (3.2.2) суть

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.2.6}$$

и аналогично выписываются остальные уравнения. В простейшем случае, из которого мы исходили, получаем

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{x}_i^2 + U\right] = m_i \dot{x}_i,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = U_{x_i} = X_i,$$

и, таким образом, получаем уравнения динамики

$$m_i \ddot{x}_i = X_i, \quad m_i \ddot{y}_i = Y_i, \quad m_i \ddot{z}_i = Z_i. \tag{3.2.7}$$

Если от декартовых координат перейти к обобщенным координатам Лагранжа

$$\left.\begin{aligned} x_i = x_i(q_1, q_2, \ldots, q_n, t), \quad y_i = y_i(q_1, q_2, \ldots, q_n, t), \\ z_i = z_i(q_1, q_2, \ldots, q_n, t), \end{aligned}\right\} \tag{3.2.8}$$

то, учитывая инвариантность уравнений Эйлера—Лагранжа, получаем, аналогично (6), уравнения движения в форме Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_i'}=0 \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{3.2.9}$$

См. Ахиезер [1], Лаврентьев и Люстерник [1], [2], Гельфанд и Фомин [1], Курант—Гильберт [1].

3.2.2. Принцип наименьшего действия в форме Лагранжа и Якоби. Допустим, что голономные связи (3.2.5) не содержат времени t явно (голономные склерономные связи) и силовая функция U также явно не содержит t, тогда подынтегральное выражение функционала (3.2.2) не содержит независимой переменной и потому уравнения Эйлера—Лагранжа функционала (3.2.2) допускают первый интеграл

$$T+U-\sum_{i=1}^{n} q_i'\frac{\partial T}{\partial q_i'}=\text{const}. \tag{3.2.10}$$

Так как в обобщенных координатах Лагранжа T является однородной квадратичной формой

$$T=\sum_{i,\,k} a_{ik}\ q_i'\,q_k' \qquad (i,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

$$a_{ik}=a_{ki},$$

то имеет место соотношение

$$\sum_{i=1}^{n} q_i'\frac{\partial T}{\partial q_i'}=2T, \tag{3.2.11}$$

и (3.2.10) принимает вид

$$-T+U=\text{const} \tag{3.2.12}$$

или

$$T+V=\text{const}=h, \tag{3.2.13}$$

т. е. сумма кинетической и потенциальной энергий — полная энергия — сохраняет постоянное значение (имеет место закон сохранения энергии). При этих обстоятельствах, если функционал $\int L\,dt$ исследовать в классе линий, на которых полная энергия сохраняет свое значение, имеем

$$L=T+U=2T-h, \tag{3.2.14}$$

и принцип Гамильтона—Остроградского принимает форму *принципа наименьшего действия Лагранжа*: для движения рассматриваемой системы при заданном значении полной энергии h имеет стационарное значение функционал (действие по Лагранжу)

$$\int T\,dt, \tag{3.2.15}$$

т. е.

$$\delta \int T\,dt = 0. \tag{3.2.16}$$

Так как

$$2T\,dt = \sqrt{2T}\sqrt{2T}\,dt = \sqrt{\sum_{i,k} a_{ik}\,dq_i\,dq_k}\,\sqrt{2U+2C},$$

по принципу наименьшего действия можно придать *форму Якоби*

$$\delta \int \sqrt{2U+h}\sqrt{\sum_{i,k} a_{ik}\,dq_i\,dq_k} = 0, \tag{3.2.17}$$

в котором при помощи закона сохранения энергии исключено время.

Если считать, что имеет место закон сохранения энергии, то из (3.2.16), а также из (3 2.17) вытекают уравнения движения.

См. Ахиезер [1], Лаврентьев и Люстерник [1], [2], Курант — Гильберт [1].

3.2.3. Принцип наименьшего действия и его связь с теорией геодезических. Принцип наименьшего действия в форме Якоби, записанный в виде соотношения (3.2.17), может быть трактован как задача о нахождении геодезических в римановом пространстве обобщенных координат $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$, в которых элемент длины дуги определяется функцией

$$ds^2 = (2U+h)\sum_{i,k=1}^{n} g_{ik}\,dq_i\,dq_k. \tag{3.2.18}$$

Возможные траектории, определяемые принципом наименьшего действия, совпадают с экстремалями функционала

$$\int ds, \tag{3.2.19}$$

т. е. с геодезическими. Так как форма

$$\sum_{i,k=1}^{n} g_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k$$

есть положительно определенная квадратическая форма, то для функционала (3.2.17) выполнено усиленное условие Лежандра.

Если A — начальная точка геодезической, то сопряженная с ней точка C (если таковая существует) находится от нее на некотором, не равном нулю, расстоянии. Поэтому всякая дуга AB рассматриваемой геодезической, принадлежащая дуге AC, будет давать действию по Якоби слабый минимум, и тем самым оправдано название «принцип наименьшего действия».

Вместе с этим показано, что для достаточно малых дуг геодезическая является кратчайшей линией.

См. Лаврентьев и Люстерник [1], [2], В. И. Смирнов [1].

3.2.4. Вывод уравнения малых колебаний струны. Гибкая материальная линия длины l с линейной плотностью $\varrho=\varrho(x)$ закреплена в точках $x=0$ и $x=l$. Колебания струны происходят в плоскости Oxu (рис. 3.2.1), причем в начальный момент времени форма и скорость струны известны:

$$u(x, t_0)=\varphi(x), \quad u_t(x, t_0)=\psi(x).$$

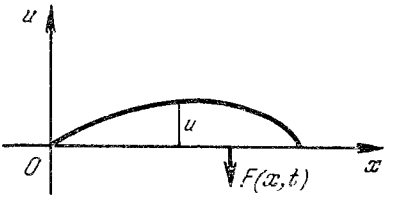

Рис. 3.2.1.

Струна работает на растяжение (но не на изгиб), причем работа деформации выражается произведением натяжения струны T_0 на ее удлинение. Эта работа равна

$$T_0\left(\int_0^l \sqrt{1+u_x^2}\,dx - l\right),$$

где интеграл в скобке выражает длину деформированной струны, а вся скобка—удлинение струны.

Учитывая, что колебания — малые, пренебрегаем в биномиальном разложении радикала $\sqrt{1+u_x^2}$ членами, содержащими u_x в степени выше второй, и получаем для потенциальной энергии деформации струны выражение

$$\frac{T_0}{2}\int_0^l u_x^2\,dx.$$

Если на струну воздействует внешняя сила $F(x, t)$, рассчитанная на единицу массы, то к потенциальной энергии следует добавить член

$$-\int_0^l \varrho F u\,dx.$$

Таким образом, потенциальная энергия струны равна

$$\frac{T_0}{2}\int_0^l u_x^2\,dx - \int_0^l \varrho F u\,dx.$$

Кинетическая энергия струны равна

$$\frac{1}{2}\int_0^l \varrho u_t^2\,dx.$$

Согласно принципу Гамильтона — Остроградского

$$\delta\,\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\int_0^l (\varrho u_t^2 - T_0 u_x^2 + 2\varrho F u)\,dx\,dt=0.$$

Отсюда следует уравнение Эйлера — Остроградского

$$2\varrho F + 2T_0\frac{\partial}{\partial x}u_x - 2\frac{\partial}{\partial t}(\varrho u_t)=0$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho u_t) = T_0 u_{xx} + \varrho F. \qquad (3.2.20)$$

Если плотность ϱ постоянна, $\varrho(x) = \varrho_0$, то получаем, обозначив $\frac{T_0}{\varrho_0} = a^2$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F. \qquad (3.2.21)$$

Если внешняя сила отсутствует, $F=0$, то получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad (3.2.22)$$

Уравнения (3.2.20) или (3.2.21) дают уравнения вынужденных колебаний, а уравнение (3.2.22) — свободных колебаний струны.

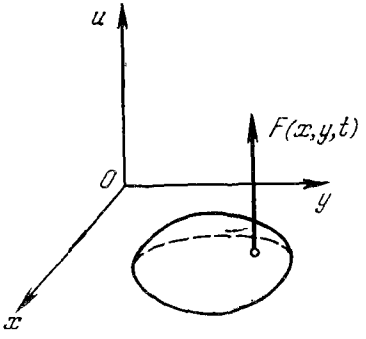

Рис. 3.2.2.

Мы приходим к краевой задаче: Найти решение уравнения (3.2.20) или (3.2.21) или (3.2.22) при начальных условиях

$$u(x, t_0) = \varphi(x), \qquad u_t(x, t_0) = \psi(x)$$

и краевых условиях

$$u(0, t) = 0, \qquad u(l, t) = 0.$$

Вывод уравнения колебания струны при упругом закреплении концов см. Гельфанд и Фомин [1], Гюнтер [1], В. И. Смирнов [1], Курант—Гильберт [1].

3.2.5. Вывод уравнения колебаний мембраны. Пусть в положении равновесия мембрана натянута в плоскости Oxy, ее плотность $\varrho = \varrho(x, y)$. Отклонение точек мембраны от положения равновесия обозначим через $u = u(x, y, t)$ (рис. 3.2.2). Мембрана закреплена вдоль своего контура; в начальный момент $t=0$ заданы положение мембраны

$$u = \varphi(x, y)$$

и скорости ее точек

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \psi(x, y).$$

Кинетическая энергия мембраны равна

$$\iint_D \varrho u_t^2 \, dx \, dy.$$

Потенциальная энергия, происходящая от деформации растяжения, равна

$$\iint_D k(x, y)\left[\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} - 1\right] dx \, dy \approx \frac{1}{2}\iint_D k(u_x^2 + u_y^2) \, dx \, dy.$$

Потенциальная энергия, происходящая от внешней силы $F(x, y, t)$, действующей на мембрану, направленной перпендикулярно плоскости Oxy и рассчитанной на единицу массы, равна

$$-\iint_D \varrho F u \, dx \, dy.$$

Таким образом, потенциальная энергия мембраны равна

$$\iint\limits_D \left[\frac{1}{2} k (u_x^2+u_y^2) - \varrho F u\right] dx\, dy.$$

Согласно принципу Гамильтона–Остроградского имеем

$$\delta \int\limits_{t_1}^{t_2} \left\{ \iint\limits_D [\varrho u_t^2 - k (u_x^2+u_y^2) + 2\varrho F u]\, dx\, dy \right\} dt = 0.$$

Отсюда получаем уравнение Эйлера — Остроградского

$$\varrho F - \frac{\partial}{\partial t} (\varrho u_t) + \frac{\partial}{\partial x} (k u_x) + \frac{\partial}{\partial y} (k u_y) = 0$$

или

$$\varrho F - \varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0. \qquad (3.2.23)$$

Таким образом, уравнение вынужденных колебаний мембраны имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\varrho}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] + F, \qquad (3.2.24)$$

а при $\varrho \equiv \varrho_0$, $k \equiv k_0$, $\frac{k_0}{\varrho_0} = a^2$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + F. \qquad (3.2.25)$$

Уравнением свободных колебаний мембраны будет

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right). \qquad (3.2.26)$$

Мы приходим к краевой задаче.

Найти решение уравнения (3.2.24), или (3.2.25), или (3.2.26) при начальных условиях

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y),$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x, y)$$

и краевом условии (закрепление мембраны вдоль контура)

$$u|_S = 0,$$

где S — контур мембраны.

См. Гельфанд и Фомин [1], Гюнтер [1], В. И. Смирнов [1], Курант — Гильберт [1].

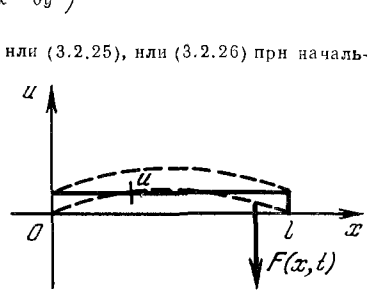

Рис. 3.2.3.

3.2.6. Вывод уравнения колебаний стержня, заделанного на концах. Пусть стержень (рис. 3.2.3) имеет длину l, линейную плотность $\varrho(x)$, на стержень действует сила $F(x, t)$, направленная перпендикулярно к нему в положении равновесия, рассчитанная на единицу массы. Стержень работает на изгиб (но не на растяжение).

Направим ось абсцисс по оси стержня и обозначим через $u(x, t)$ отклонение точки стержня от положения равновесия.

Начальные условия:

$$u = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \psi(x) \quad \text{при } t = 0.$$

Краевые условия:

$$u(0, t)=u(l, t)=0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=0.$$

Кинетическая энергия стержня равна

$$\frac{1}{2}\int_0^l \varrho u_t^2\, dx.$$

Потенциальная энергия элемента стержня принимается пропорциональной квадрату его кривизны

$$\frac{1}{2}k(x)\left(\frac{u_{xx}}{\sqrt{\left(1+u_x^2\right)^3}}\right)^2 dx,$$

что для малых колебаний приближенно равно

$$\frac{1}{2}k(x)\,u_{xx}^2\, dx.$$

Таким образом, с учетом действия внешней силы потенциальная энергия стержня равна

$$\int_0^l \left[\frac{1}{2}k(x)\,u_{xx}^2-\varrho F u\right] dx.$$

В силу принципа Гамильтона Остроградского

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} dt\int_0^l (\varrho u_t^2-ku_{xx}^2+2\varrho F u)\, dx=0.$$

Отсюда получаем уравнение Эйлера—Остроградского

$$\varrho F-\frac{d}{dt}(\varrho u_t)-\frac{d^2}{dx^2}(ku_{xx})=0,$$

что дает уравнение вынужденных колебаний стержня

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+F. \tag{3.2.27}$$

Если $\varrho\equiv\varrho_0$, $k\equiv k_0$, $\frac{k_0}{\varrho_0}=a^2$, то (3.2.27) принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+a^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=F. \tag{3.2.28}$$

Из (3.2.27) и (3.2.28) можно получить соответствующие уравнения свободных колебаний стержня

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=0 \tag{3.2.29}$$

и

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+a^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0. \tag{3.2.30}$$

См. Гюнтер [1], Эльсгольц [1], Курант—Гильберт [1].

Применение принципа Гамильтона—Остроградского к выводу уравнения колебаний пластины см. Курант—Гильберт [1], В. И. Смирнов [1], Гюнтер [1], Гельфанд и Фомин [1]; к выводу основных уравнений динамической теории упругости см. В. И. Смирнов [1]; к выводу основных уравнений гидродинамики см. Вебстер [1].

§ 3. Задача Штурма — Лиувилля

3.3.1. Постановка задачи. Выше при выводе уравнений колебаний струны, стержня, мембраны указывались те краевые задачи, которые связаны с решением полученных уравнений.

Эти задачи решаются *методом разделения переменных (методом Фурье)* следующим образом.

Пусть, например, дано уравнение

$$P\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+R\frac{\partial u}{\partial x}+Qu=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{3.3.1}$$

$$P=P(x)\in C_1[a,\ b],\quad Q=Q(x)\in C[a,\ b],\quad R=R(x)\in C[a,\ b].$$

Требуется найти решение $u(x,\ t)$ уравнения (3.3.1), $t\geqslant 0$, $a\leqslant x\leqslant b$, удовлетворяющее краевым (граничным) условиям

$$\left.\begin{aligned}&\alpha u(a,\ t)+\beta\frac{\partial u(a,\ t)}{\partial x}=0,\\&\gamma u(b,\ t)+\delta\frac{\partial u(b,\ t)}{\partial x}=0,\end{aligned}\right\} \tag{3.3.2}$$

где α, β, γ, δ — постоянные, $\alpha^2+\beta^2\neq 0$, $\gamma^2+\delta^2\neq 0$, и начальным условиям

$$\left.\begin{aligned}&u(x,\ 0)=f(x),\quad \left.\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial t}\right|_{t=0}=g(x),\\&f(x),\ g(x)\in C[a,\ b].\end{aligned}\right\} \tag{3.3.3}$$

Полагая

$$u=\Phi(x)\,T(t), \tag{3.3.4}$$

находят частное решение уравнения (3.3.1).

Подстановка (3.3.4) в (3.3.1) приводит к соотношению

$$\frac{P\Phi''+R\Phi'+Q\Phi}{\Phi}=\frac{T''}{T}, \tag{3.3.5}$$

и так как левая часть (3.3.5) зависит только от x, а правая — только от t, то равенство (3.3.5) возможно лишь, когда отношения постоянны:

$$\frac{R\Phi''+R\Phi'+Q\Phi}{\Phi}=\frac{T''}{T}=-\lambda,\qquad \lambda=\text{const}, \tag{3.3.6}$$

Отсюда Φ и T должны соответственно удовлетворять обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$P\Phi''+R\Phi'+Q\Phi=-\lambda\Phi, \tag{3.3.7}$$

$$T''+\lambda T=0. \tag{3.3.8}$$

Для того чтобы (3.3.4) удовлетворяло условиям (3.3.2), функция Φ должна удовлетворять краевым условиям

$$\alpha\Phi(a)+\beta\Phi'(a)=0,\qquad \gamma\Phi(b)+\delta\Phi'(b)=0. \tag{3.3.9}$$

Мы приходим к краевой задаче (3.3.7), (3.3.9) для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, являющейся частным случаем задачи Штурма—Лиувилля.

Ниже будут приведены условия, при которых последняя задача имеет нетривиальные (ненулевые) решения $\Phi_0(x)$, $\Phi_1(x)$, ..., $\Phi_n(x)$, соответствующие бесконечному множеству значений параметра λ_0, λ_1, ..., λ_n, ...

Далее находят T из уравнения (3.3.8). При $\lambda_n > 0$ это будет

$$T_n(t) = A_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin \sqrt{\lambda_n}\, t, \tag{3.3.10}$$

после чего составляется ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)\, \Phi_n(x). \tag{3.3.11}$$

Если этот ряд равномерно сходится и допускает почленное дифференцирование по x и t (дважды), то его сумма и является решением уравнения (3.3.1), удовлетворяющим условиям (3.3.2). По заданным начальным условиям удается найти коэффициенты A_n и B_n и, таким образом, найти решение уравнения (3.3.1), удовлетворяющее условиям (3.3.2) и (3.3.3).

3.3.2. Задача Штурма — Лиувилля. Ниже будут приведены основные сведения о *задаче Штурма—Лиувилля*.

Дано дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2u}{dx^2} + P(x)\frac{du}{dx} + [Q(x) - \lambda R(x)]\, u = 0, \tag{3.3.12}$$

где $P(x)$, $Q(x)$, $R(x) \in C[a, b]$, λ — параметр. Требуется найти его решения, удовлетворяющие краевым условиям

$$\left.\begin{aligned} R_1(u) &\equiv \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) + \alpha_3 u(b) + \alpha_4 u'(b) = 0, \\ R_2(u) &\equiv \beta_1 u(a) + \beta_2 u'(a) + \beta_3 u(b) + \beta_4 u'(b) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.3.13}$$

Подстановка

$$p = e^{\int P\,dx}, \quad q = Qe^{\int P\,dx}, \quad r = Re^{\int P\,dx} \tag{3.3.14}$$

приводит уравнение (3.3.12) к виду

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)\, u = \lambda r(x)\, u. \tag{3.3.15}$$

Из (3.3.14) следует, что $p(x) > 0$ и $p'(x) \in C[a, b]$. Введем (операторное) обозначение

$$Lu \equiv \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)\, u. \tag{3.3.16}$$

Тогда (3.3.15) примет вид

$$Lu = \lambda r u. \tag{3.3.17}$$

Впредь данное дифференциальное уравнение будет рассматриваться в форме (3.3.15) или (3.3.17).

Из (3.3.17), (3.3.13) следует, что задача Штурма—Лиувилля всегда имеет тривиальное решение $u=0$.

Те значения λ, при которых задача Штурма—Лиувилля имеет нетривиальные решения, называются *собственными значениями* этой задачи, а соответствующие им решения—*собственными функциями*.

См. Привалов [1], Михлин [2], Трикоми [1], В. И. Смирнов [1].

3.3.3. Формула Грина. Самосопряженные краевые задачи. Проверкой легко убедиться в справедливости формулы Грина

$$(Lu,\ v)-(u,\ Lv)=p\,[u'v-uv']\Big|_a^b, \tag{3.3.18}$$

где $u=u(x)$ и $v=v(x)$—функции класса $C_2[a,\ b]$. Формула Грина может быть записана и так

$$(Lu,\ v)-(u,\ Lv)=p(b)\begin{vmatrix} u(b) & v(b) \\ u'(b) & v'(b) \end{vmatrix}-p(a)\begin{vmatrix} u(a) & v(a) \\ u'(a) & v'(a) \end{vmatrix}. \tag{3.3.19}$$

Если u и v удовлетворяют краевым условиям (3.3.13), то имеют место равенства

$$\alpha_1 u(a)+\alpha_2 u'(a)+\alpha_3 u(b)+\alpha_4 u'(b)=0,$$
$$\beta_1 u(a)+\beta_2 u'(a)+\beta_3 u(b)+\beta_4 u'(b)=0,$$
$$\alpha_1 v(a)+\alpha_2 v'(a)+\alpha_3 v(b)+\alpha_4 v'(b)=0,$$
$$\beta_1 v(a)+\beta_2 v'(a)+\beta_3 v(b)+\beta_4 v'(b)=0,$$

или, в матричной форме,

$$\begin{Vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} u(a) & v(a) \\ u'(a) & v'(a) \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} -\alpha_3 & -\alpha_4 \\ -\beta_3 & -\beta_4 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} u(b) & v(b) \\ u'(b) & v'(b) \end{Vmatrix},$$

что дает

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} u(a) & v(a) \\ u'(a) & v'(a) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_3 & \beta_4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} u(b) & v(b) \\ u'(b) & v'(b) \end{vmatrix}. \tag{3.3.20}$$

Из (3.3.20) и (3.3.19) следует, что если

$$p(b)\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}=p(a)\begin{vmatrix} \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_3 & \beta_4 \end{vmatrix}, \tag{3.3.21}$$

то

$$(Lu,\ v)=(u,\ Lv). \tag{3.3.22}$$

В свойстве (3.3.22) при указанных условиях заключается так называемая *самосопряженность оператора Штурма—Лиувилля*.

Условие (3.3.21) выполняется для краевых условий:

А) $$u(a)=u(b)=0.$$

Б) $$\alpha_1 u(a)+\alpha_2 u'(a)=0,$$
$$\beta_3 u(b)+\beta_4 u'(b)=0,$$

В этом случае $\alpha_3=\alpha_4=\beta_1=\beta_2=0$, $\alpha_1^2+\alpha_2^2\neq 0$, $\beta_3^2+\beta_4^2\neq 0$.

В) $$u(b)=u(a),\quad u'(b)=u'(a),\quad p(b)=p(a)$$

(условия периодичности). Здесь $\alpha_1=-1$, $\alpha_3=1$, $\beta_2=-1$, $\beta_4=1$. На множествах функций, определяемых условиями А), Б), В), оператор Штурма—Лиувилля является самосопряженным.

См. Привалов [1], Михлин [2], Трикоми [1], В. И. Смирнов [1].

3.3.4. Функция Грина самосопряженной краевой задачи Штурма—Лиувилля. Пусть дана самосопряженная краевая задача

$$Lu=\lambda ru, \tag{3.3.23}$$

$$R_1(u)=0,\quad R_2(u)=0, \tag{3.3.24}$$

где оператор L определен формулой (3.3.16), а выражения $R_1(u)$ и $R_2(u)$ определены формулами (3.3.13). Кроме того, мы считаем, что выполняется условие (3.3.21).

Предположим, что $\lambda=0$ не является собственным значением задачи (3.3.23), (3.3.24).

Функцией Грина этой задачи называется функция $G(x, s)$, которая как функция x при любом s, $a\leqslant s\leqslant b$, имеет следующие свойства:

1) $G(x, s)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$.

2) В каждом из интервалов $a\leqslant x<s$, $s<x\leqslant b$ функция $G(x, s)$ имеет непрерывную вторую производную и удовлетворяет уравнению $LG=0$.

3) Функция G удовлетворяет краевым условиям (3.3.24).

4) Первая производная функции G имеет при $x=s$ скачок, равный $\frac{1}{p(s)}$:

$$G'(s+0,s)-G'(s-0,s)=\frac{1}{p(s)},$$

$$G'(s,s+0)-G'(s,s-0)=-\frac{1}{p(s)}.$$

Функция Грина полностью определяется этими условиями.

Так как G является решением уравнений $LG=0$, то если известны линейно независимые решения u и v этого уравнения, имеют место формулы

$$G(x, s)=A_1u+B_1v,\qquad a\leqslant x<s,$$

$$G(x, s)=A_2u+B_2v,\qquad s<x\leqslant b,$$

где A_1, A_2, B_1, B_2 суть функции s, подлежащие определению.

Из условия непрерывности $G(x, s)$ и разрыва ее производной следует

$$A_2u(s)+B_2v(s)=A_1u(s)+B_1v(s),$$

$$A_2u'(s)+B_2v'(s)=A_1u'(s)+B_1v'(s)+\frac{1}{p(s)}.$$

Из этой системы однозначно определяются разности A_2-A_1 и B_2-B_1. Подставляя теперь выражения для $G(x, s)$ в краевые условия, получим систему

$$A_1R_1(u)+B_1R_1(v)=K_1,$$
$$A_1R_2(u)+B_1R_2(v)=K_2,$$

где K_1 и K_2 — известные функции, выражающиеся через найденные величины A_2-A_1 и B_2-B_1.

Определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix} R_1(u) & R_1(v) \\ R_2(u) & R_2(v) \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Это следует из того, что в противном случае можно было бы найти константы C_1 и C_2, не равные одновременно нулю, такие, что

$$C_1R_1(u)+C_2R_1(v)=0,$$
$$C_1R_2(u)+C_2R_2(v)=0,$$

откуда

$$R_1(C_1u+C_2v)=0,$$
$$R_2(C_1u+C_2v)=0.$$

Таким образом, C_1u+C_2v является нетривиальной собственной функцией, соответствующей $\lambda=0$, что противоречит предположению.

Следовательно, $\Delta\neq 0$ и функции A_1, B_1, а затем A_2 и B_2 определяются однозначно.

Функция Грина симметрична. Это следует из того, что, положив $G(x, s_1)=u$, $G(x, s_2)=v$ и учитывая (3.3.21), будем иметь

$$(Lu, v)-(u, Lv)=0=p\,[u'v-uv']\Big|_a^{s_1}+p\,[u'v-uv']\Big|_{s_1}^{s_2}+$$
$$+p\,[u'v-uv']\Big|_{s_2}^{b}=v(s_1)-u(s_2)=G(s_1, s_2)-G(s_2, s_1),$$

т. е. $G(s_1, s_2)=G(s_2, s_1)$.

Если краевые условия не удовлетворяют условию самосопряженности, то функция Грина не будет симметричной.

См. Привалов [1], Михлин [2], Трикоми [1], В. И. Смирнов [1].

Пример 3.3.1. $Ly=y''$, $y(0)=y(1)=0$.

$\lambda=0$ не является собственным значением. Имеем для построения функции Грина следующие условия

$$LG=0,\quad G(x, s)=A_1+B_1x \quad \text{при} \quad 0\leqslant x<s,$$
$$G(x, s)=A_2+B_2x \quad \text{при} \quad s\leqslant x\leqslant 1.$$

Из условия непрерывности функции Грина при $x=s$ имеем

$$A_2+B_2s=A_1+B_1s;$$

из условия разрыва производной имеем

$$B_2-B_1=1.$$

Из краевых условий

$$A_1=0,\quad A_2+B_2=0.$$

Итак, $A_1=0$, $B_1=s-1$, $A_2=-s$, $B_2=s$ и, наконец,

$$G(x, s)=\begin{cases}(s-1)\,x, & 0\leqslant x<s,\\ (x-1)\,s, & s<x\leqslant 1.\end{cases}$$

Пример 3.3 2 $Ly=y''-y$, $y(0)=y(1)$, $y'(0)=y'(1)$.
$\lambda=0$ не является собственным значением.
Из $Ly=0$ следует $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$. Следовательно,

$$G(x, s)=\begin{cases} A_1e^x+B_1e^{-x}, & 0\leqslant x<s, \\ A_2e^x+B_2e^{-x}, & s<x\leqslant 1. \end{cases}$$

Условие непрерывности $G(x, s)$ при $x=s$ дает

$$A_1e^s+B_1e^{-s}=A_2e^s+B_2e^{-s}.$$

Условие разрывности $G'_x(x, s)$ при $x=s$ дает

$$A_2e^s-B_2e^{-s}-A_1e^s+B_1e^{-s}=1.$$

Краевые условия дают

$$A_1+B_1=A_2e+B_2e^{-1},$$
$$A_1-B_1=A_2e-B_2e^{-1}.$$

Найдя величины A_1, B_1, A_2, B_2, получим

$$G(x, s)=\begin{cases} \dfrac{e^{x-s+1}+e^{s-x}}{2(1-e)}, & 0\leqslant x<s, \\ \dfrac{e^{s-x+1}+e^{x-s}}{2(1-e)}, & s<x\leqslant 1. \end{cases}$$

3.3.5. Теорема Гильберта. Если $f(x)\in C[a, b]$, то

$$F(x)=\int_a^b G(x, s)f(s)\,ds \tag{3.3.25}$$

имеет непрерывную вторую производную, удовлетворяет дифференциальному уравнению $LF=f$ и краевым условиям $R_1(F)=0$, $R_2(F)=0$.

Обратно, если функция $F(x)$ обладает непрерывной второй производной и удовлетворяет краевым условиям $R_1(F)=0$, $R_2(F)=0$, то существует такая непрерывная функция $f(x)$, что

$$F(x)=\int_a^b G(x, s)f(s)\,ds,$$

а именно

$$f=LF.$$

Доказательство проводится посредством проверки того, что (3.3.25) действительно удовлетворяет указанным дифференциальному уравнению и краевым условиям.

Если в формуле (3.3.25) положить $f(x)=\lambda r(x)u(x)$, $F(x)=u(x)$, то получим интегральное уравнение

$$u(x)=\lambda\int_a^b G(x, s)r(s)u(s)\,ds, \tag{3.3.26}$$

эквивалентное краевой задаче $Lu=\lambda ru$, $R_1(u)=0$, $R_2(u)=0$.

См. Привалов [1], Михлин [2], Трикоми [1], В. И. Смирнов [1]

3.3.6. Эквивалентность самосопряженной задачи Штурма — Лиувилля симметричному интегральному уравнению. Применяя формулу Грина с $v=G(x, s)$, имеем

$$(Lu, G)=(Lu, G)-(u, LG)=\int_a^s+\int_s^b\{p(x)[u'G-uG']\}'\,dx=$$
$$=pu'G\Big|_a^b-puG'\Big|_a^s-puG'\Big|_s^b=pu'G\Big|_a^b-puG'\Big|_a^b+$$
$$+p(s)\,u(s)\,[G'(s+0, s)-G'(s-0, s)]=$$
$$=p(u'G-uG')\Big|_a^b+u(s). \quad (3\ 3.27)$$

В силу самосопряженности краевых условий

$$p(u'G-uG')\Big|_a^b=0,$$

а так как $Lu=\lambda ru$, то из (3.3.27) следует, что u удовлетворяет интегральному уравнению

$$u(x)=\lambda\int_a^b r(s)\,G(x, s)\,u(s)\,ds. \quad (3.3.28)$$

Последнее уравнение имеет несимметричное ядро. Однако в случае, когда $r(x)>0$, уравнение

$$\sqrt{r(x)}\,u(x)=\lambda\int_a^b G(x, s)\sqrt{r(x)\,r(s)}\sqrt{r(s)}\,u(s)\,ds \quad (3.3\ 29)$$

является симметричным интегральным уравнением с ядром

$$K(x, s)=G(x, s)\sqrt{r(x)\,r(s)}.$$

Обратно, решение уравнения (3.3.29) (или (3.3.28)) является решением самосопряженной задачи Штурма—Лиувилля.

3.3.7. Свойства собственных значений и собственных функций самосопряженной задачи Штурма—Лиувилля. Исходя из общих свойств дифференциальных уравнений второго порядка и симметричных интегральных уравнений, можно установить следующее.

1. Существует бесконечное множество собственных чисел и все они действительны.

2. Каждому собственному числу соответствует не более двух линейно независимых собственных функций и все они образуют ортонормированную систему с весом $r(x)$:

$$\int_a^b r(x)\,u_n(x)\,u_m(x)\,dx=0, \qquad n\neq m,$$

$$\int_a^b r(x)\,u_m^2(x)\,dx=1 \qquad (m=1, 2, \ldots).$$

3. Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x)\, u_n(s)}{\lambda_n}$$

равномерно сходится, то его сумма равна $G(x, s)$.

Указанный ряд всегда сходится в среднем к $G(x, s)$.

4. Всякая функция вида

$$F(x) = \int_a^b G(x, s)\, r(s)\, H(s)\, ds$$

разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{\lambda_n} u_n(x),$$

где

$$F_n = \int_a^b r(s)\, F(s)\, u_n(s)\, ds, \qquad H_n = \int_a^b r(s)\, H(s)\, u_n(s)\, ds.$$

5. Если $f(x) \in C[a, b]$ обладает кусочно-гладкой (возможно, разрывной) производной и удовлетворяет краевым условиям задачи, то ряд Фурье по собственным функциям сходится к $f(x)$ абсолютно и равномерно.

6. Если $f(x)$ — кусочно-гладкая на $[a, b]$ функция (разрывная или непрерывная), то ряд Фурье функции $f(x)$ по собственным функциям сходится в открытом интервале $a < x < b$ и имеет своей суммой $f(x)$ в каждой точке непрерывности и значение $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ в каждой точке разрыва.

7. Система собственных функций полна в классе $L^2(a, b)$.

См. Привалов [1], Михлин [3], Трикоми [1], В. И. Смирнов [1], Толстов [1].

3.3.8. Знак собственных значений. Пусть рассматривается самосопряженная задача

$$Lu = \lambda r u, \tag{3.3 30}$$

$$R_1(u) = 0, \quad R_2(u) = 0. \tag{3.3.31}$$

Из (3.3.30) следует

$$\lambda \int_a^b r u^2\, dx = \int_a^b Lu \cdot u\, dx = \int_a^b [(pu')' + qu]\, u\, dx =$$

$$= puu' \Big|_a^b - \int_a^b pu'^2\, dx + \int_a^b qu^2\, dx. \tag{3.3.32}$$

Если λ_n — собственное значение, а u_n — соответствующая собственная функция, то из (3.3.32) следует

$$-\lambda_n = -pu_n u_n' \Big|_a^b + \int_a^b p u_n'^2 \, dx - \int_a^b q u_n^2 \, dx. \qquad (3.3.33)$$

Из (3.3.33) следует, что при $r(x) > 0$, $q \leqslant 0$ и $pu_n u_n' \Big|_a^b \leqslant 0$ все λ_n неположительны.

Если же $r(x) > 0$, $q(x)$ — произвольная непрерывная функция и $pu_n u_n' \Big|_a^b = 0$, то, учитывая непрерывность функции $-\frac{q}{r}$ на $[a, b]$ и обозначая через m наименьшее значение этой функции, получим

$$-\lambda_n = \int_a^b pu_n'^2 \, dx + \int_a^b -\frac{q}{r} \cdot r u_n^2 dx \geqslant \int_a^b pu_n'^2 dx + m \int_a^b r u_n^2 dx \geqslant m,$$

откуда

$$\lambda_n \leqslant -m.$$

В этом случае существует наибольшее собственное значение и, следовательно, конечное число положительных собственных значений.

Если $r(x) < 0$ и $pu_n u_n' \Big|_a^b = 0$, то имеется лишь конечное число отрицательных собственных значений, а при $r(x) < 0$, $q(x) < 0$, $pu_n u_n' \Big|_a^b \leqslant 0$ все собственные значения положительны.

См. Привалов [1], В. И. Смирнов [1], Толстов [1].

3.3.9. Неоднородная краевая задача. Пусть дано дифференциальное уравнение

$$Lu = \lambda r u + g \qquad (3.3.34)$$

и самосопряженные краевые условия

$$R_1(u) = 0, \qquad R_2(u) = 0. \qquad (3.3.35)$$

Неоднородная краевая задача (3.3.34), (3.3.35) эквивалентна неоднородному интегральному уравнению

$$u(x) = \lambda \int_a^b G(x, s) r(s) u(s) \, ds + f(x), \qquad (3.3.36)$$

где $u(x)$ непрерывна и $f(x) = \int_a^b G(x, s) g(s) \, ds$. Уравнение (3.3.36) может быть симметризовано путем умножения обеих частей на $\sqrt{r(x)}$

(предполагается, что $r(x) > 0$):

$$\sqrt{r(x)}\, u(x) = \lambda \int_a^b G(x, s) \sqrt{r(x) r(s)}\, \sqrt{r(s)}\, u(s)\, ds + \sqrt{r(x)}\, f(x). \tag{3.3.37}$$

Уравнение (3.3.37) есть симметричное неоднородное интегральное уравнение.

На основании альтернативы Фредгольма, можно утверждать, что либо при данном λ однородная краевая задача имеет лишь тривиальное решение, и в этом случае неоднородная краевая задача имеет решение, и притом единственное, при любой функции g; либо для значения $\lambda = \lambda_i$ однородная краевая задача имеет нетривиальные решения (не более двух), и тогда для разрешимости неоднородной краевой задачи необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$$\int_a^b r(x)\, u_i(x)\, g(x)\, dx = 0$$

для всех собственных функций u_i, принадлежащих собственному значению λ_i.

См. Привалов [1].

3.3.10. Обобщенная функция Грина Пусть самосопряженная задача Штурма—Лиувилля

$$Lu = \lambda r u, \tag{3.3.38}$$

$$R_1(u) = 0, \qquad R_2(u) = 0 \tag{3.3.39}$$

имеет своим собственным значением $\lambda = 0$, т. е. система

$$Lu = 0, \quad R_1(u) = 0, \quad R_2(u) = 0 \tag{3.3.40}$$

имеет нетривиальное решение. Обозначим это решение $u_0(x)$. В этом случае построение обычной функции Грина невозможно и строится обобщенная функция Грина $G^*(x, s)$, определяемая следующими свойствами:

1. $G^*(x, s)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, при каждом фиксированном значении s, $a < s < b$.

2. В каждом из интервалов $a \leqslant x < s$, $s < x \leqslant b$ функция $G^*(x, s)$ имеет непрерывные производные первых двух порядков и удовлетворяет уравнению $Lv = -u_0(x)\, u_0(s)$.

3. $G^*(x, s)$ удовлетворяет краевым условиям (3.3.39).

4. Производная функции G^* при $x = s$ имеет скачок, равный $\dfrac{1}{p(s)}$, т. е.

$$G_x^*(s+0, s) - G_x^*(s-0, s) = \frac{1}{p(s)}.$$

5. Функция G^* ортогональна к $u_0(x)$, т. е.

$$\int_a^b G^*(x, s)\, r(s)\, u_0(s)\, ds = 0.$$

Указанными свойствами обобщенная функция Грина определяется единственным образом.

Кроме того, имеет место симметричность обобщенной функции Грина.

(В случае, когда собственному числу $\lambda = 0$ соответствуют две собственные функции $u_0(x)$ и $u_1(x)$, которые можно считать ортонормированными, построение обобщенной функции Грина несколько изменяется. Функция Грина $G^*(x, s)$ должна удовлетворять уравнению.

$$Lv = -u_0(x)\, u_0(s) - u_1(x)\, u_1(s);$$

функция Грина $G^*(x, s)$ должна быть ортогональной к $u_0(x)$ и $u_1(x)$.)

Если $u(x)$ непрерывна, то утверждение, что u имеет непрерывную вторую производную, $Lu = \lambda ru$, $R_1(u) = 0$, $R_2(u) = 0$, $\lambda \neq 0$, равносильно утверждению

$$u(x) = \lambda \int_a^b G^*(x, s)\, r(s)\, u(s)\, ds.$$

Теорема разложения имеет следующую форму.

Если $F(x)$ имеет непрерывную вторую производную, удовлетворяет краевым условиям $R_1(u) = 0$, $R_2(u) = 0$ и ортогональна к $u_0(x)$, то

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n u_n(x),$$

где

$$F_n = \int_a^b r(x)\, F(x)\, u_n(x)\, dx,$$

причем ряд сходится абсолютно и равномерно.

Наконец, неоднородная краевая задача

$$Lu = \lambda ru + g, \qquad R_1(u) = 0, \qquad R_2(u) = 0,$$

где

$$\int_a^b g(x)\, r(x)\, u_0(x)\, dx = 0,$$

а $u(x)$ имеет непрерывную вторую производную, эквивалентна неоднородному интегральному уравнению

$$u(x)=\lambda\int_a^b G^*(x,\ s)\,r(s)\,u(s)\,ds+f(x),$$

где $u(x)$ непрерывна и $f(x)=\int_a^b G^*(x,s)\,g(s)\,dx$.

См. Привалов [1], Курант—Гильберт [1], В. И. Смирнов [1].

Пример. 3.3.3. $Lu=u''$, $u(0)=u(1)$, $u'(0)=u'(1)$.

$\lambda=0$ является собственным значением, соответствующая собственная функция $u_0=\text{const}=c$.

Обобщенная функция Грина должна удовлетворять уравнению

$$u''=-c^2$$

и поэтому имеет вид

$$G^*(x,\ s)=\begin{cases} A_1+B_1x-\dfrac{c^2}{2}x^2, & 0\leqslant x<s,\\ A_2+B_2x-\dfrac{c^2}{2}x^2, & s<x\leqslant 1.\end{cases}$$

Из условия непрерывности $G^*(x,\ s)$ при $x=s$ имеем

$$A_1+B_1s=A_2+B_2s;$$

из условия разрыва производной $G^*(x,\ s)$ следует, что

$$B_2-B_1=1.$$

Из краевых условий следует

$$A_1=A_2+B_2-\frac{c^2}{2},\ B_1=B_2-c^2.$$

Полученные соотношения дают, что $c^2=1$, $B_1=s-\frac{1}{2}$, $B_2=s+\frac{1}{2}$, $A_2-A_1=-s$.

Условие ортогональности $\int_0^1 G^*(x,\ s)\,u_0\,ds=0$ дает

$$\int_0^s\left[A_1+\left(s-\frac{1}{2}\right)x-\frac{x^2}{2}\right]dx+\int_s^1\left[A_2+\left(s+\frac{1}{2}\right)x-\frac{x^2}{2}\right]dx=0,$$

откуда

$$A_2=-\frac{s^2}{2}-\frac{s}{2}-\frac{1}{12}$$

и, наконец,

$$G^*(x,\ s)=\begin{cases}\dfrac{s-x}{2}-\dfrac{(x-s)^2}{2}-\dfrac{1}{12}, & 0\leqslant x<s,\\ \dfrac{x-s}{2}-\dfrac{(x-s)^2}{2}-\dfrac{1}{12}, & s<x\leqslant 1.\end{cases}$$

3.3.11. Экстремальные свойства собственных значений и собственных функций. Метод Ритца. Как указывалось выше, решение самосопряженной задачи Штурма—Лиувилля может быть сведено к решению эквивалентного ей симметричного интегрального

уравнения. В п. 2.3.11 были приведены экстремальные свойства характеристических чисел и собственных функций симметричных интегральных уравнений. Этими же свойствами обладают собственные значения и собственные функции самосопряженной задачи Штурма — Лиувилля.

Ниже приводятся экстремальные определения собственных значений и собственных функций, использующие минимизацию некоторых функционалов.

Пусть дана самосопряженная задача Штурма — Лиувилля

$$Lu+\lambda ru=0,\ Lu\equiv(pu')'-qu, \tag{3.3.41}$$

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_1u'(a)+\alpha_2u(a)=0, \quad \alpha_1^2+\alpha_2^2\neq 0,\\ &\beta_1u'(b)+\beta_2u(b)=0, \quad \beta_1^2+\beta_2^2\neq 0,\end{aligned}\right\} \tag{3.3.42}$$

$$p=p(x),\ p'(x)\in C[a,\ b],\ q(x)\in C[a,\ b],\ r(x)\in C[a,\ b],\ r(x)>0.$$

Собственное значение λ_n задачи (3.3.41), (3.3.42) равно наименьшему значению функционала

$$(-Lu,u)=\int_a^b -uLu\,dx=-[puu']_a^b+\int_a^b (pu'^2+qu^2)\,dx \tag{3.3.43}$$

на множестве функций, дважды непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,\ b]$ и удовлетворяющих краевым условиям (3.3.42), а также условиям

$$\int_a^b ru^2\,dx=1 \text{ (нормировка)} \tag{3.3.44}$$

а

$$\int_a^b ruu_i\,dx=0 \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)\text{ (ортогональность)}. \tag{3.3.45}$$

При этом

$$\lambda_n=(-Lu_n,\ u_n). \tag{3.3.46}$$

Здесь u_n обозначает собственную функцию, соответствующую значению λ_n.

См. В. И. Смирнов [1].

Замечание. В ряде руководств в качестве оператора принимается либо

$$Lu\equiv-(pu')'+qu,$$

либо

$$Lu\equiv(pu')'+qu.$$

Соответственно выбору оператора L изменяются приведенные выше формулировки.

Куранту принадлежит максимально-минимальное определение собственных значений, не использующее последовательного нахож-

дения собственных функций. Именно: пусть $m(v_1, \ldots, v_{n-1})$ есть наименьшее значение функционала

$$\frac{(-Lu, u)}{(ru, u)} \tag{3.3.47}$$

на множестве дважды непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих краевым условиям (2) и условиям ортогональности

$$\int_a^b ruv_i\,dx = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{3.3.48}$$

где $v_1(x), \ldots, v_{n-1}(x)$ — произвольные кусочно-непрерывные на отрезке $[a, b]$ функции с интегрируемым квадратом. Тогда n-е собственное значение λ_n задачи (3.3.41), (3.3.42) совпадает с наибольшим значением величины $m(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1})$ при произвольном выборе функций $(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1})$, причем

$$\lambda_n = m(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}). \tag{3.3.49}$$

См. Курант—Гильберт [1], В. И. Смирнов [1], Ахиезер [1], Лаврентьев и Люстерник [1], [2].

Используя экстремальные определения собственных значений, приведем несколько примеров приближенного вычисления их. Заметим, что фигурирующий в этих примерах квадратический функционал — положительно определенный, что обеспечивает применимость метода Ритца и пр.

Пример. 3.3.4. Найти приближенно первое собственное значение задачи

$$y'' + \lambda^2 y = 0,$$
$$y(-1) = y(1) = 0.$$

Заметим, что здесь $Ly = y''$, $r(x) \equiv 1$

$$(-Ly, y) = -\int_{-1}^{1} y''y\,dx = -yy'\Big|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} y'^2\,dx = \int_{-1}^{1} y'^2 dx.$$

Так как

$$y(x) = \int_{-1}^{x} y'(t)\,dt,$$

то применение неравенства Буняковского—Шварца дает

$$y^2(x) = \left(\int_{-1}^{x} y'(t)\,dt\right)^2 \leqslant \int_{-1}^{x} y'^2(t)\,dt \int_{-1}^{x} dt,$$

откуда

$$y^2(x) \leqslant 2\int_{-1}^{1} y'^2(x)\,dx$$

$$\int_{-1}^{1} y^2(x)\,dx \leqslant 4\int_{-1}^{1} y'^2(x)\,dx.$$

Следовательно,

$$\int_{-1}^{1} y'^2\,dx \geqslant \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} y^2\,dx,$$

$$(-Ly,\ y) \geqslant \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} y^2 dx,$$

т. е. функционал $(-Ly,\ y)$ — положительно определенный. В качестве приближенного значения λ_1^2 примем (ср. (3.3.47))

$$\lambda_1^2 \approx \frac{(-Ly,\ y)}{(y,\ y)}.$$

Положим $y=C(1-x^2)$. Эти функции удовлетворяют краевым условиям и условиям дифференцируемости.

Имеем

$$\lambda_1^2 \approx \frac{\int_{-1}^{1} y'^2\,dx}{\int_{-1}^{1} y^2\,dx} = \frac{\int_{-1}^{1} 4x^2\,dx}{\int_{-1}^{1} (1-x^2)^2\,dx} = 2{,}5.$$

В данном примере точное значение λ_1^2 есть $\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \approx 2{,}46740$.

К решению этой же задачи можно подойти и следующим образом. Минимизация функционала

$$\int_{-1}^{1} y'^2\,dx$$

при условиях $y(-1)=y(1)=0$ и

$$\int_{-1}^{1} y^2\,dx = 1$$

является изопериметрической задачей и сводится к минимизации функционала

$$J=\int_{-1}^{1} (y'^2-\lambda^2 y^2)\,dx.$$

Возьмем последовательность функций $u_k = x^{2k-2} - x^{2k}$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$ и будем минимизировать J на функциях

$$y=\sum_{k=1}^{n} c_k u_k.$$

Ограничиваясь первым членом последнего выражения, получим

$$J=c_1^2\left(\frac{8}{3}-\frac{16}{15}\lambda^2\right),$$

$$\frac{\partial J}{\partial c_1}=2c_1\left(\frac{8}{3}-\frac{16}{15}\lambda^2\right)=0,$$

и так как должно быть $c_1 \neq 0$, то, как и выше, получаем

$$\lambda^2 = 2{,}5.$$

Если взять в качестве y

$$y = c_1 u_1 + c_2 u_2,$$

то

$$J = c_1^2 \left(\frac{8}{3} - \frac{16}{15}\lambda^2\right) + 2c_1c_2\left(\frac{8}{15} - \frac{16}{105}\lambda^2\right) + c_2^2\left(\frac{88}{105} - \frac{16}{315}\lambda^2\right),$$

$$\frac{\partial J}{\partial c_1} = c_1\left(\frac{16}{3} - \frac{32}{15}\lambda^2\right) + c_2\left(\frac{16}{15} - \frac{32}{105}\lambda^2\right) = 0,$$

$$\frac{\partial J}{\partial c_2} = c_1\left(\frac{16}{15} - \frac{32}{105}\lambda^2\right) + c_2\left(\frac{176}{105} - \frac{32}{315}\lambda^2\right) = 0.$$

Условием существования ненулевых решений c_1, c_2 последней системы является равенство нулю определителя полученной системы, т. е.

$$\left(\frac{16}{3} - \frac{32}{15}\lambda^2\right)\left(\frac{176}{105} - \frac{32}{315}\lambda^2\right) = \left(\frac{16}{15} - \frac{32}{105}\lambda^2\right)^2,$$

откуда

$$\lambda^4 - 28\lambda^2 + 63 = 0$$

и

$$\lambda_1^2 \approx 2{,}46744,$$

$$\lambda_2^2 \approx 25{,}53256.$$

Полученное значение для λ_1^2 весьма точное, тогда как для второго собственного значения $\left(=\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 \approx 22{,}20661\right)$ получено грубое приближение.

Пример 3.3.5. Найти первое собственное значение задачи

$$y'' + \lambda(1 + x^2)\, y = 0,$$
$$y(-1) = y(1) = 0.$$

Имеем

$$p(x) \equiv 1,\ q(x) \equiv 0,\ r(x) = 1 + x^2,\ \ (-Ly,\ y) = \int_{-1}^{1} y'^2\, dx.$$

Как и в примере 3.3.4, в формуле

$$\lambda_1 \approx \frac{(-Ly,\ y)}{(y,\ y)} = \frac{\int_{-1}^{1} y'^2\, dx}{\int_{-1}^{1} (1 + x^2)\, y^2\, dx}$$

полагаем $y = c(1 - x^2)$ и получаем

$$\lambda_1 \approx 2{,}1875.$$

Если для нахождения λ_1 применить метод Ритца, используя последовательность функций $u_k = 1 - x^{2k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, то, принимая

$$y = c_1(1 - x^2) + c_2(1 - x^4)$$

и минимизируя функционал

$$J = \int_{-1}^{1} [y'^2 - \lambda(1 + x^2)\, y^2]\, dx,$$

получим

$$J = c_1^2\left(\frac{8}{3}-\frac{128}{105}\lambda\right)+2c_1c_2\left(\frac{16}{5}-\frac{64}{45}\lambda\right)+c_2^2\left(\frac{32}{7}-\frac{5888}{3465}\lambda\right),$$

$$\frac{\partial J}{\partial c_1}=2c_1\left(\frac{8}{3}-\frac{128}{105}\lambda\right)+2c_2\left(\frac{16}{5}-\frac{64}{45}\lambda\right)=0,$$

$$\frac{\partial J}{\partial c_2}=2c_1\left(\frac{16}{5}-\frac{64}{45}\lambda\right)+2c_2\left(\frac{32}{7}-\frac{5888}{3465}\lambda\right)=0.$$

Из условия существования ненулевых решений c_1, c_2 последней системы получим

$$\left(\frac{8}{3}-\frac{128}{105}\lambda\right)\left(\frac{32}{7}-\frac{5888}{3465}\lambda\right)=\left(\frac{16}{5}-\frac{64}{45}\lambda\right)^2$$

или

$$52\lambda^2-1068\lambda+2079=0,$$

откуда, взяв меньший корень,

$$\lambda_1=2{,}1775.$$

ЛИТЕРАТУРА

Ахиезер Н. И.
1. Лекции по вариационному исчислению, М., Гостехиздат, 1955.

Беллман Р.
1. Динамическое программирование, М., ИЛ., 1960.
2. Процессы регулирования с адаптацией, М., Наука, 1964.

Беллман Р., Гликсберг И., Гросс О.
1. Некоторые вопросы математической теории процессов управления, М., ИЛ, 1962.

Беллман Р., Дрейфус С.
1. Прикладные задачи динамического программирования, М., Наука, 1965.

Березин И. С., Жидков Н. П.
1. Методы вычислений, т. II, изд. 2, М., Физматгиз, 1962.

Блисс Г. А.
1. Лекции по вариационному исчислению, М., ИЛ, 1950.

Болтянский В. Г.
1. Достаточные условия оптимальности и обоснование метода динамического программирования, Изв. АН СССР, серия матем. 28, № 3 (1964), 481—514.
2. Математические методы оптимального управления (серия «Физико-математическая библиотека инженера») М., Наука, 1966.

Вайнберг М. М.
1. Вариационные методы исследования нелинейных операторов, М., Гостехиздат, 1956.

Вебстер А. Г.
1. Механика материальных точек твердых, упругих и жидких тел, М.—Л., ГТТИ, 1933.

Виарда Г.
1. Интегральные уравнения, М.—Л., ГТТИ, 1933.

Вулих Б. З.
1. Введение в функциональный анализ, М., Физматгиз, 1958.

Гантмахер Ф. Р.
1. Лекции по аналитической механике, М., Физматгиз, 1960.

Гахов Ф. Д.
1. Краевые задачи, М., Физматгиз, 1963.

Гельфанд И. М.
1. О формуле преобразования Фурье, Математическое просвещение, вып. 5 (1960).

Гельфанд И. М., Фомин С. В.
1. Вариационное исчисление, М., Физматгиз, 1961.

Гурса Э.
1. Курс математического анализа, т. III, ч. 2, М.—Л., ОНТИ, 1934.

Гюнтер Н. М.
1. Курс вариационного исчисления, М.—Л., Гостехиздат, 1941.

Дёч Г.
1. Руководство к практическому применению преобразований Лапласа, изд. 3, М., Физматгиз, 1958.

Диткин В. А., Кузнецов П. И.
1. Справочник по операционному исчислению, М.—Л., Гостехиздат, 1951.

Диткин В. А., Прудников А. П.
1. Интегральные преобразования и операционное исчисление (серия «СМБ»), М., Физматгиз, 1961.

Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И.
1. Линейное и выпуклое программирование, изд. 2, перераб., М., Наука, 1966.

Зуховицкий С. И., Радчик И. А.
1. Математические методы сетевого планирования, М., Наука, 1965.
Камке Э.
1. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, изд. 2, М., Наука, 1965.
Канторович Л. В., Крылов В. И.
1. Приближенные методы высшего анализа, М., Физматгиз, 1962.
Канторович Л. В., Крылов В. И., Смирнов В. И.
1. Вариационное исчисление, М., Кубуч, 1933.
Карпелевич Ф. И., Садовский Л. Е.
1. Элементы линейной алгебры и линейного программирования, изд. 2, М., Наука, 1965.
Красносельский М. А.
1. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, М., Гостехиздат, 1956.
Курант Р., Гильберт Д.
1. Методы математической физики, т. I и II, М.—Л., Гостехиздат, 1951.
Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А.
1. Курс вариационного исчисления, М.—Л., Гостехиздат, 1950.
2. Основы вариационного исчисления, т. 1, ч. 1 и 2, М.—Л., ОНТИ, 1935.
Литовченко И. А.
1. Сб. «Итоги науки», Изд-во АН СССР, 1964.
Ловитт У.
1. Интегральные уравнения, М., Гостехиздат, 1957.
Михлин С. Г.
1. Вариационные методы математической физики, М., Гостехиздат, 1957
2. Интегральные уравнения, М.—Л., Гостехиздат, 1949.
3. Лекции по линейным интегральным уравнениям, М., Физматгиз, 1959.
4. Прямые методы в математической физике, М.—Л., Гостехиздат, 1950.
5. Численная реализация вариационных методов, М., Наука, 1966.
Михлин С. Г., Смолицкий Х. Л.
1. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений (серия «СМБ»), М., Наука, 1965.
Моррей Ч. Б.
1. Нелинейные методы, в кн. под редакцией Э. Ф. Беккенбаха, Современная математика для инженеров, гл. 14, М., ИЛ.
Морс Ф. М., Фешбах Г.
1. Методы теоретической физики, т. I и II, М., ИЛ, 1958.
Мусхелишвили Н. И.
1. Сингулярные интегральные уравнения, М.—Л., Гостехиздат, 1946.
Петровский И. Г.
1. Лекции по интегральным уравнениям, изд. 3, М., Наука, 1965.
Полак Л. С.
1. Вариационные принципы механики, М., Физматгиз, 1959.
Положий Г. К., Пахарева Н. А., Степаненко И. З., Бондаренко П. С., Великоиваненко И. М.
1. Математический практикум, М., Физматгиз, 1960.
Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.
1. Математическая теория оптимальных процессов, М., Физматгиз, 1961.
Привалов И. И.
1. Интегральные уравнения, М.—Л., ОНТИ, 1937.
Романовский П. И.
1. Общий курс математического анализа в сжатом изложении, гл. VIII, М., Физматгиз, 1962.
Рыбников К. А.
1. Первые этапы развития вариационного исчисления, Историко-математические исследования, вып. 11 (1949), 335—498.
Сансоне Дж.
1. Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., ИЛ, 1953.
Смирнов В. И.
1. Курс высшей математики, т. IV, М.—Л., Физматгиз, 1958.
2. Курс высшей математики, т. II, М.—Л., Наука, 1965.
Смирнов Н. С.
1. Введение в теорию нелинейных интегральных уравнений, М.—Л., ОНТИ, 1936.
Снеддон И.,
1. Преобразования Фурье, М., ИЛ, 1955.

Титчмарш Е.
1. Введение в теорию интегралов Фурье, М.—Л., Гостехиздат, 1948.
Трикоми Ф.
1. Дифференциальные уравнения, М., ИЛ, 1962.
2. Интегральные уравнения, М., ИЛ, 1960.
Толстов Г. П.
1. Ряды Фурье, Л., Физматгиз, 1960.
Уиттекер Е. Т.
1. Аналитическая динамика, М.—Л., ОНТИ, 1937.
Фридман В. М.
1. Метод последовательных приближений для интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода, Успехи математических наук, 11, вып. 1 (67), (1956), 233—234.
Хестенс М. Р.
1. Элементы вариационного исчисления, в кн. под редакцией Э. Ф. Беккенбаха, Современная математика для инженеров, М., ИЛ, 1958.
Шилов Г. Е.
1. Математический анализ, М., Физматгиз, 1961.
Эльсгольц Л. Э.
1. Вариационное исчисление, М.—Л., Гостехиздат, 1952.
2. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление, М., Наука, 1965.
Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Б.
1. Задачи и методы линейного программирования, Советское радио, 1961.