

В. Н. ЦЫТОВИЧ

ТЕОРИЯ ТУРБУЛЕНТНОЙ ПЛАЗМЫ



МОСКВА АТОМИЗДАТ 1971

Цытович В. Н. Теория турбулентной плазмы. М., Атомиздат, 1971.

В книге «Теория турбулентной плазмы» систематически излагаются основные физические представления о турбулентности плазмы и методах ее описания. Особое внимание уделяется проблемам спектров стационарной турбулентности и неустойчивостям, приводящим к возбуждению турбулентности. В книге рассмотрен широкий круг вопросов, связанных с турбулентным нагревом, стохастическим ускорением, спектрами быстрых частиц, ускоренных турбулентными пульсациями, прохождением электромагнитных волн через турбулентную плазму, излучением и низкочастотными электромагнитными свойствами турбулентной плазмы.

В монографии 53 рисунка, 1 таблица и библиография из 318 наименований.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Физика турбулентной плазмы за последние несколько лет прошла большой и бурный путь развития, начиная от первых работ, в которых в той или иной форме упоминался термин «турбулентность», и кончая фундаментальными исследованиями, содержащими обстоятельное изучение турбулентного состояния плазмы. Обычно в физике значение имеют не столько конкретные результаты в той или иной области, сколько общее мировоззрение и общие взгляды на проблемы. Подчас старые результаты приобретают совершенно новое значение после того, как вырабатывается такое общее мировоззрение. В физике турбулентной плазмы такое мировоззрение в основном уже вполне сложилось.

Первому изложению проблем плазменной турбулентности посвящена статья Б. Б. Кадомцева (В сб. «Вопросы теории плазмы». Под ред. М. А. Леонтовича. Вып. 4. М., Атомиздат, 1964, стр. 188).

В настоящей книге дается изложение основных физических представлений о турбулентных процессах в плазме и их оформление в виде логически замкнутой физической теории. Многие вопросы, лишь затронутые в книге Б. Б. Кадомцева, получили сейчас подробную теоретическую разработку. В первую очередь это относится к теории турбулентного уширения резонансов (гл. 2), позволившей установить границы применимости используемых разложений по энергии турбулентности, связать метод усреднения по статистическому ансамблю с методом элементарных возмущений, установить физический смысл и границы применимости последнего (о концепции элементарных возмущений см. книгу Цытовича В. Н. «Нелинейные эффекты в плазме». М., «Наука», 1967). Основной проблемой теории турбулентности являются спектры стационарной и однородной турбулентности. Успехи, достигнутые в этом направлении применительно к турбулентности плазмы, более значительны, чем в теории турбулентности жидкостей. Основу нижеследующего изложения поэтому составляет именно теория стационарной или квазистационарной турбулентности (гл. 4) и процессов, возникающих в стационарно турбулентной плазме: ускорение и нагрев частиц (гл. 5), излучение турбулентной плазмы (гл. 6), прохождение электромагнитных волн через турбулентную плазму (гл. 7) и ее электромагнитные свойства (гл. 8).

Этим главам предшествует вступительная глава, излагающая основы физических представлений о стохастических процессах, проводится аналогия с турбулентностью жидкостей, определение слабой и сильной турбулентности и представление о типах турбу-

лентных движений в плазме. В гл. 2 изложены основы теории турбулентности и ее основные физические следствия, позволяющие дать наглядную физическую трактовку турбулентности.

В гл. 3 излагаются общие вопросы возбуждения и затухания турбулентных пульсаций в плазме, важные с точки зрения многих приложений.

Вопросы динамики турбулентного состояния плазмы, установления стационарной турбулентности и др. составляют самостоятельные и большие проблемы, и поэтому целесообразно было ограничиться лишь некоторыми частными задачами такого рода [устойчивость стационарной турбулентности, второй звук и т. п. (гл. 8)].

Следует отметить, что в естественных условиях плазма благодаря многочисленным неустойчивостям, как правило, турбулентна. Этим объясняется все возрастающий интерес и широкое использование результатов теории турбулентности в астрофизике. По возможности в ходе изложения материала даются ссылки на некоторые астрофизические следствия, самое важное из которых — ускорение космических лучей.

Теперь все больше становится ясным, что коллективные свойства плазмы, о которых часто и много говорилось в прошлом, так или иначе связаны с ее турбулентностью. В настоящее время выделилось два важных направления использования коллективных эффектов — это турбулентный нагрев плазмы, предложенный Е. К. Завойским и Я. Б. Файнбергом, и коллективный метод ускорения частиц, предложенный В. И. Векслером.

Если в проблеме турбулентного нагрева речь идет об использовании коллективных эффектов для передачи энергии частицам плазмы, то в методе коллективного ускорения — о передаче импульса частицам. Все, что мы знаем сейчас о природе турбулентности, говорит о возможности эффективного турбулентного нагрева и ускорения частиц. Идеи В. И. Векслера о коллективном ускорении получили в последнее время большой резонанс, и многие лаборатории работают над их реализацией. Широкие экспериментальные работы ведутся по исследованию турбулентного нагрева плазмы. Автору посчастливилось работать под руководством В. И. Векслера над одним из вариантов коллективного ускорения. Стремлению более глубоко разобраться в природе коллективных процессов в плазме и ее турбулентности автор во многом обязан постоянному интересу В. И. Векслера к этим проблемам.

Поэтому с глубокой благодарностью памяти одного из замечательных физиков — В. И. Векслера автор посвящает настоящую книгу.

Автор выражает искреннюю признательность Е. К. Завойскому, С. А. Каплану и Р. З. Сагдееву, прочитавшим рукопись и сделавшим ряд важных замечаний, Л. И. Рудакову и В. Г. Маханькову за обсуждение проблем, рассмотренных в книге, В. А. Липеровскому, М. А. Лившицу, А. Г. Кулагину, Э. Н. Криворучкому за замечания и помощь в оформлении рукописи.

ОБЩИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ О ТУРБУЛЕНТНОМ СОСТОЯНИИ ВЕЩЕСТВА

§ 1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Термин «турбулентность» возник при изучении движения жидкостей. В связи с бурным развитием физики плазмы за последние годы представления о природе турбулентного состояния вещества существенно расширились. С одной стороны, турбулентные движения плазмы более многообразны, чем жидкости, что позволяет более подробно изучать природу этого явления, с другой стороны, в ряде случаев возможно проследить за процессами развития турбулентности и понять различие между собственно турбулентными движениями и переходными процессами, предшествующими развитию турбулентности. Было выяснено, что турбулентность развивается не только в жидкостях или плазме, но и в твердых телах. Это позволило изложить общую концепцию турбулентного состояния вещества. Поэтому термин «турбулентность» сейчас имеет значительно более широкое содержание.

Попробуем на примере жидкостей разъяснить существующие общие физические представления о природе турбулентности. Рассмотрим движение жидкости по трубе при больших скоростях (точнее, при больших числах Рейнольдса [1]), когда движение отдельных элементов жидкости очень сложно. Величина скорости элемента жидкости в некоторой заданной точке внутри трубы может меняться сложным образом, пробегая за достаточно большие промежутки времени широкий спектр значений.

Сложность движения отдельных элементов жидкостей не может служить основанием для того, чтобы считать такое движение турбулентным. Например, сложным может быть ламинарное движение жидкости, обтекающей сложные препятствия. Основным критерием турбулентности является невозпроизводимость результатов измерений мгновенных скоростей жидкости.

Предположим, что в некоторый момент времени $t_0 = 0$ открывается кран и жидкость начинает течь по трубе. Пусть через время t_1 на достаточно большом удалении от крана установились средние характеристики движения. Рассмотрим точку r в области установившегося движения и проследим за изменением во времени скорости течения жидкости в этой точке. Начиная с момента $t > t_1$ получим сложную кривую (рис. 1.1). Повторим эксперимент. Откроем кран и вновь измерим скорость жидкости в той же точке через тот

же промежуток t_1 . Повторим этот эксперимент неоднократно. При этом или будем иметь каждый раз эту же кривую (см. рис. 1.1), или они будут различными, т. е. результаты эксперимента невоспроизводимы. В последнем случае можно сказать, что жидкость турбулентна, а скорость носит случайный хаотический характер.

Выясним причину невоспроизводимости результатов описанных экспериментов. Если точно знать начальные и граничные условия для движения жидкости по трубе, то на основании уравнений, которые описывают движение жидкости, можно определить значения

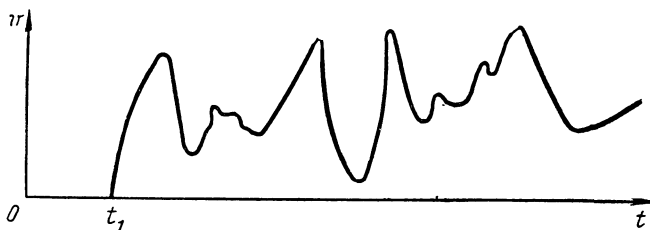


Рис. 1.1. Изменение во времени скорости элемента турбулентной жидкости.

скорости в последующие моменты времени в любой желаемой точке внутри трубы. Однако точные начальные и граничные условия неизвестны. Известны лишь достаточно грубые средние характеристики течения, связанные с размерами трубы, с пуском жидкости в трубу и т. д. Существенно, что в турбулентном режиме малые изменения начальных условий приводят к большим изменениям в движении элементов жидкости. Итак, невоспроизводимость результатов вызвана тем, что при задании макроскопических параметров движения изучаемая система может иметь различные начальные условия движения.

Описанная ситуация сходна с той, которая известна при рассмотрении молекулярного движения частиц, составляющих макроскопическое тело. Если известны начальные условия движения всех частиц макроскопического тела, можно предсказать их движение в дальнейшем. Однако постановка такой задачи практически бессмысленна, так как невозможно столь детально знать начальное состояние системы [1]. Поэтому при заданных макроскопических параметрах системы ее молекулярное движение можно считать случайным, хаотическим.

Представление, которое обычно вкладывается в понятие турбулентности, существенно отличается от понятия молекулярного движения. Говоря, например, о движении любого элемента жидкости, подразумевают движение некоторого макроскопического объема, содержащего большое число молекул. Все молекулы этого объема имеют одинаковую направленную скорость, одинаково участвуют в общем макроскопическом движении, т. е. в пределах указанного

макроскопического малого объема участвуют в коллективном движении. Другими словами, гидродинамические движения жидкости соответствуют определенным коллективным степеням свободы. Коллективные движения макроскопических тел весьма разнообразны. Плазма обладает большим числом коллективных степеней свободы. Обобщая представления, проиллюстрированные на примере турбулентности жидкостей, можно следующим образом определить понятие турбулентности: турбулентное движение макроскопических тел представляет собой такое движение, в котором коллективные степени свободы интенсивно возбуждены и носят случайный характер.

Следует заметить, что обычно коллективные степени свободы макроскопических тел возбуждены также в условиях статистического равновесия, но энергия их весьма мала. В условиях турбулентного движения эта энергия должна намного превосходить энергию в условиях статистического равновесия. Именно такой конкретный смысл будет в дальнейшем вкладываться в понятие интенсивно возбужденных коллективных степеней свободы.

В понятие турбулентности входит представление о том, что число интенсивно возбужденных коллективных степеней свободы весьма велико. Действительно, если возбуждена одна такая степень свободы, то задание начальных условий для нее полностью определило бы дальнейшее изменение системы во времени, которое носило бы регулярный, а не случайный характер. В принципе возможна ситуация, когда первоначально возбуждается лишь одна степень свободы и затем энергия перераспределяется между этой и другими степенями свободы, и возможен случай, когда возбуждается сразу много степеней свободы. В первом случае турбулентность возбуждается не сразу, и существует конечное время, в течение которого система переходит в турбулентный режим. В частности, это имеет место для приведенного выше примера течения жидкости по трубе (необходимо время t_1 для установления турбулентного режима).

Чтобы иметь картину турбулентности плазмы, необходимо в первую очередь знать, какие коллективные движения возможны в плазме, как они могут быть возбуждены и когда плазма переходит в турбулентное состояние, в котором коллективные степени свободы являются случайными величинами, принимающими значения, невоспроизводимые от опыта к опыту.

Прежде чем переходить к этим вопросам, сделаем одно общее замечание, касающееся природы турбулентных пульсаций плазмы. Плазма представляет собой такое состояние вещества, в котором атомы или молекулы находятся в ионизированном состоянии. Взаимодействие электронов и ионов определяется действующими электрическими силами. Это приводит к многообразию коллективных движений плазмы в результате связи движения заряженных частиц с электромагнитным полем. Поэтому случайной невоспроизводимой величиной в турбулентной плазме становится также электромагнитное поле, сопровождающее движение частиц. Действи-

тельно; измерения показывают, что при развитии турбулентности возбуждаемые в плазме поля носят случайный характер. На рис. 1.2 в качестве примера приведена заимствованная из работы [2] зависимость от времени электрического поля турбулентных пульсаций, возбуждаемых пучком в плазме. Возбуждение стохастических полей — одна из характерных особенностей турбулентности плазмы.

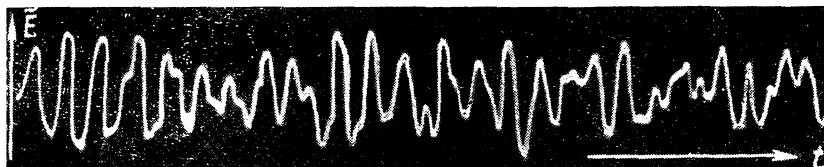


Рис. 1.2. Зависимость от времени электрического поля турбулентных пульсаций плазмы в условиях плазменного пучкового взаимодействия [2].

§ 1.2. СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Случайный характер турбулентных процессов не исключает того, что средние значения некоторых физических величин за достаточно большой промежуток времени остаются постоянными или медленно меняются. Для определения этих средних величин целесообразно использовать статистическое описание турбулентности. При этом удобно ввести ансамбль систем, отличающихся друг от друга начальными условиями [3]. Для описания турбулентности используют средние значения исследуемых величин по указанному статистическому ансамблю. Характер изменения во времени коллективных степеней свободы делает естественной эргодическую гипотезу, предполагающую, что за достаточно большой промежуток времени система пройдет через состояние, сколь угодно близкое к любому наперед заданному состоянию, которое соответствует некоторым выбранным начальным условиям. Таким образом, начальные состояния системы слабо влияют на средние значения величин, и средние по статистическому ансамблю совпадают со средним значением во времени для данной системы [3].

Эти общеизвестные положения статистической теории, распространенные на интенсивные коллективные движения макроскопических тел, и составляют основу статистического описания турбулентности.

Если средние величины, характеризующие турбулентность, не меняются во времени, то такую турбулентность называют стационарной. В случае, когда средние значения не зависят от положения пространственной точки, турбулентность однородная. Турбулентность изотропная, если средние значения величин в данной пространственной точке не зависят от угла с любым наперед выбранным направлением.

Случайным турбулентным изменениям могут подвергаться различные величины, характеризующие коллективные движения, например скорость частиц или электрическое поле, сопровождающее турбулентные пульсации плазмы. Скорость \mathbf{v} можно разбить на две части, выделив случайную турбулентную составляющую \mathbf{v}^T и составляющую, не испытывающую случайных изменений $\mathbf{v}^R = \langle \mathbf{v} \rangle$:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \langle \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \rangle + \mathbf{v}^T(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}^R(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v}^T(\mathbf{r}, t). \quad (1.1)$$

Средние значения \mathbf{v}^T по статистическому ансамблю считают равными нулю (среднее значение \mathbf{v} всегда можно отнести к \mathbf{v}^R). Интенсивность турбулентности можно охарактеризовать средними значениями квадратичных комбинаций, например

$$\langle v_i^T(\mathbf{r}, t) v_j^T(\mathbf{r}', t') \rangle = V_{ij}. \quad (1.2)$$

В (1.2) фигурируют компоненты скорости по координатам (индексы i, j), взятые в различных точках пространства в различные моменты времени. Скобки $\langle \rangle$ означают усреднение по статистическому ансамблю. Величина V_{ij} показывает, насколько скоррелированы скорости турбулентных пульсаций в различных точках пространства в различные моменты времени; $i, j = \{1, 2, 3\} = \{x, y, z\}$.

Тензор корреляции V_{ij} зависит от $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ и $t - t'$ только в том случае, если поле турбулентных скоростей стационарно и однородно, так как при этом абсолютные значения координаты и времени одной из коррелирующих скоростей могут быть произвольными из-за равноправности всех точек и равноправности различных моментов времени. Если разложить \mathbf{v}^T в ряд Фурье (см. [4], стр. 45)

$$\mathbf{v}^T(\mathbf{r}, t) = \int \mathbf{v}_{\mathbf{k}, \omega}^T e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k} d\omega \equiv \int \mathbf{v}_{\mathbf{k}}^T e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} d\mathbf{k}, \quad (1.3)$$

где $\mathbf{k} = \{\mathbf{k}, \omega\}$, $\mathbf{x} = \{\mathbf{r}, t\}$; $d\mathbf{k} = d\mathbf{k} d\omega$; $\mathbf{k}\mathbf{x} = \mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t$, то тензор корреляций можно записать в виде

$$V_{ij} = \int \langle v_{ik}^T v_{jk'}^T \rangle d\mathbf{k} d\mathbf{k}' e^{i\mathbf{k}'(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) + i(\mathbf{k} + \mathbf{k}')\mathbf{x}}. \quad (1.4)$$

В случае однородной стационарной турбулентности независимость (1.4) от t и \mathbf{r} приводит к выводу, что средние значения $v_{ik}^T v_{jk'}^T$ отличны от нуля лишь при $\omega + \omega' = 0$ и $\mathbf{k} + \mathbf{k}' = 0$, т. е.

$$\langle v_{ik, \omega}^T v_{jk', \omega'}^T \rangle = V_{ijk, \omega} \delta(\omega + \omega') \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \equiv V_{ijk} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}'), \quad (1.5)$$

где δ — известная дельта-функция Дирака

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases}; \quad \int \delta(x) dx = 1.$$

Для изотропной турбулентности несжимаемой жидкости тензор $V_{ijk, \omega}$ сводится к одной величине, характеризующей спектр турбулентности. Действительно, для изотропной турбулентности все направления равноправны. Каждый индекс $V_{ijk, \omega}$ по определению тензора должен меняться при вращении координатных систем как вектор. Но единственным вектором в данном случае является вектор \mathbf{k} . Из него можно составить единственный тензор:

$$\frac{k_i k_j}{k^2}, \quad (1.6)$$

а также тривиальный единичный тензор δ_{ij} . Итак, для изотропной турбулентности

$$V_{ijk, \omega} = \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) |V_{\mathbf{k}, \omega}^t|^2 + \frac{k_i k_j}{k^2} |V_{\mathbf{k}, \omega}^l|^2. \quad (1.7)$$

Здесь произвольные коэффициенты при δ_{ij} и $\frac{k_i k_j}{k^2}$ обозначены соответственно

$$|V_{\mathbf{k}, \omega}^t|^2 \quad \text{и} \quad |V_{\mathbf{k}, \omega}^l|^2 - |V_{\mathbf{k}, \omega}^t|^2.$$

Смысл их в том, что, как оказывается, $|V_{\mathbf{k}, \omega}^l|^2$ описывает продольные турбулентные пульсации скорости, а $|V_{\mathbf{k}, \omega}^t|^2$ — поперечные. При этом следует иметь в виду, что в силу (1.3) турбулентные пульсации представляют собой, грубо говоря, наложение плоских волн. Для продольных пульсаций амплитуда каждой из таких плоских волн направлена вдоль ее распространения, тогда как для поперечных — перпендикулярно к этому направлению.

Легко видеть, что в несжимаемой жидкости продольные пульсации невозможны. Действительно, из условия несжимаемости

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (1.8)$$

получим

$$i(\mathbf{k}\mathbf{v}_{\mathbf{k}, \omega}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \operatorname{div} \mathbf{v} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r} + i\omega t} d\mathbf{r} dt = 0, \quad (1.9)$$

т. е. величина $\mathbf{v}_{\mathbf{k}, \omega}$ ортогональна \mathbf{k} .

Отсюда для изотропной однородной стационарной турбулентности несжимаемой жидкости тензор (1.2) описывается единственной величиной $|V_{\mathbf{k}, \omega}^t|^2$, физический смысл которой можно пояснить, рассчитав среднее значение энергии турбулентных пульсаций в 1 см^3 .

Пусть

$$\mathcal{W}T = \left\langle \frac{nm(\mathbf{v}^T)^2}{2} \right\rangle. \quad (1.10)$$

Здесь n — плотность жидкости; m — масса отдельной частицы жидкости.

Ввиду постоянства n в несжимаемой жидкости среднее значение W^T определяется средним значением квадрата скорости

$$\langle (v^T)^2 \rangle = \langle v_i^T(\mathbf{r}, t) v_i^T(\mathbf{r}, t) \rangle = \int \langle v_{i, k} v_{i, k'} \rangle e^{i(k+k')x} dk dk' \quad (1.11)$$

с учетом выражения (1.3). Подставляя (1.5) и (1.7) в выражение (1.11), получаем

$$\langle (v^T)^2 \rangle = \int \left(\delta_{ii} - \frac{k_i k_i}{k^2} \right) |V_{k, \omega}^t|^2 dk d\omega. \quad (1.12)$$

Итак, для несжимаемой жидкости

$$W^T = nm \int |V_{k, \omega}^t|^2 dk d\omega = \int W_{k, \omega} dk d\omega, \quad (1.13)$$

где

$$W_{k, \omega} = nm |V_{k, \omega}^t|^2 \quad (1.14)$$

спектральная плотность энергии турбулентности. Случайным изменениям могут быть подвержены и другие коллективные характеристики жидкости: плотность, температура и т. п.

При описании турбулентности плазмы следует учесть ее специфические особенности, связанные с тем, что большинство коллективных движений плазмы сопровождается появлением электрических и магнитных полей. Обычно турбулентные величины (например, турбулентные скорости частиц, плотность и т. п.) можно выразить через значения этих полей. Даже очень медленные, чисто гидродинамические движения плазмы* сопровождаются изменением электрических и магнитных полей. При этом для гидродинамических движений плазмы основная энергия коллективного движения — это кинетическая энергия частиц плазмы, тогда как энергия электромагнитного поля составляет весьма малую величину по отношению к энергии движения частиц плазмы. Если движения частиц связаны с полями, то полную энергию коллективного движения можно определить по электромагнитной энергии. Поэтому в плазме турбулентные движения можно описать при помощи связанных с ними электромагнитных полей.

Аналогично (1.1) в электромагнитном поле плазмы можно выделить регулярную часть E^R и случайную E^T

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}^R(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}^T(\mathbf{r}, t). \quad (1.15)$$

* Они аналогичны турбулентным движениям жидкости и возможны в условиях, когда характерные времена пульсаций много больше времени парных соударений частиц.

Для амплитуд $E_{k, \omega}$ разложения E^T в ряд Фурье дает

$$E_i^T(r, t) = \int E_{ik, \omega} e^{ikr - i\omega t} dk d\omega = \int E_{ik} e^{ikx} dk. \quad (1.16)$$

Для однородной и стационарной турбулентности по аналогии с (1.4) имеем

$$\langle E_{ik}^T E_{jk'}^T \rangle = I_{ijk} \delta(k + k') = I_{ijk, \omega} \delta(\omega + \omega') \delta(k + k'). \quad (1.17)$$

Для изотропной турбулентности аналогично (1.7) получаем

$$I_{ijk, \omega} = |E_{k, \omega}^t|^2 \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) + |E_{k, \omega}^l|^2 \frac{k_i k_j}{k^2}. \quad (1.18)$$

Здесь $|E_{k, \omega}^t|^2$ характеризует корреляцию поперечных полей, а $|E_{k, \omega}^l|^2$ — продольных полей. Средняя плотность энергии электрического поля турбулентных пульсаций аналогично (1.13) имеет вид

$$W_E = \frac{\langle E^2 \rangle}{8\pi} = \int \frac{|E_{k, \omega}^t|^2}{4\pi} dk d\omega + \int \frac{|E_{k, \omega}^l|^2}{8\pi} dk d\omega. \quad (1.19)$$

Из формулы (1.19) вытекает физический смысл $|E_{k, \omega}^t|^2$ и $|E_{k, \omega}^l|^2$ как спектральных плотностей распределения электрического поля турбулентных пульсаций. Согласно (1.19) интенсивность электромагнитного поля случайных турбулентных пульсаций равна, грубо говоря, сумме интенсивностей отдельных плоских волн, на которые может быть разложено поле пульсаций. Это указывает на несущественное значение фазовых соотношений, приводящих к интерференционным членам, которые отсутствуют в (1.19). Можно сказать, что фазы волн турбулентных пульсаций случайны. Начальные значения фаз волн следует рассматривать как величины, характеризующие начальное состояние коллективных степеней свободы. Усреднение по статистическому ансамблю в этом смысле соответствует усреднению по фазам волн (см. также [1]).

Сделаем замечание, касающееся необратимости турбулентных процессов. Известно, что статистическое рассмотрение молекулярных процессов в соответствии с наблюдениями указывает на их необратимый характер. Турбулентные процессы описывают статистически. Это приводит, как и в случае молекулярных процессов, к представлениям о необратимом характере турбулентных процессов. Если молекулярное трение связано с передачей импульса от одних молекул к другим, то при турбулентном движении жидкостей возможна передача импульса от одного элемента жидкости к другому, т. е. в конечном счете от одного коллектива частиц к другому. Эта передача импульса осуществляется в результате быстрого перемешивания отдельных элементов жидкости, совершающих сложное

движение в турбулентном потоке. Если рассматривать средние скорости элементов жидкости турбулентного потока, не интересуясь движением отдельных элементов, то легко обнаружить, что градиенты этой скорости меньше градиентов скоростей ламинарного потока. Таким образом, трение в турбулентном потоке усилено. Точно так же усиленными могут быть другие процессы диссипации — диффузия, теплопроводность и т. п.*

Усиленные процессы диффузии, теплопроводности, увеличение электрического сопротивления наблюдаются в турбулентной плазме, что является одним из важных практических стимулов изучения природы ее турбулентности. Однако многообразие коллективных движений плазмы и их связь с электромагнитными полями приводят также к качественно новым процессам турбулентной диссипации в плазме, например к необратимому излучению электромагнитных волн и ускорению заряженных частиц.

Остановимся кратко на связи турбулентного движения с молекулярным и возможности перехода энергии турбулентного движения в тепловое движение. Предположим, что в некоторый момент времени в жидкости исчез источник, генерирующий турбулентность. Она при этом затухает, например, из-за вязкости, а энергия турбулентного движения переходит в тепло. Естественно предположить, что турбулентные процессы, приводящие к интенсивным диссипативным процессам переноса энергии и импульса, содержат механизм более интенсивного перехода энергии турбулентного движения в энергию теплового движения.

Из этих соображений (более подробно см. § 1.3) можно заключить, что такой механизм действительно будет существовать в том случае, если стационарная турбулентность может существовать при различных мощностях возбуждения турбулентности. Хорошо известно для жидкостей, что стационарная турбулентность устанавливается при различных мощностях возбуждения, например при различных скоростях движения жидкости в трубах. Этот эффект указывает на то, что переход энергии турбулентного движения в тепловую зависит от интенсивности турбулентного движения.

Аналогичные эффекты в плазме приводят к нагреву, зависящему от интенсивности турбулентности, и носят название турбулентного нагрева. Большое число экспериментов, проведенных в последнее время [2, 7, 8], указывает на эффективность и практическую значимость турбулентного нагрева.

Чтобы понять механизм турбулентного нагрева, следует рассмотреть процесс формирования стационарной турбулентности. Обратимся снова к примеру турбулентности жидкости.

* Именно эти факты служат основанием для попыток описания турбулентных процессов в жидкостях по аналогии с молекулярными, вводя феноменологическую длину перемещения [5], сходную с длиной свободного пробега в молекулярных соударениях. Такой подход к турбулентности плазмы использовался в работе [6].

§ 1.3. СПЕКТР ТУРБУЛЕНТНЫХ ПУЛЬСАЦИЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В несжимаемой жидкости единственно возможным коллективным движением является вихревое движение элементов жидкости. Из условия несжимаемости $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ движение жидкости определяется лишь $\operatorname{rot} \mathbf{v}$. Турбулентность несжимаемой жидкости соответствует набору случайных вихрей. Часто вводится понятие масштаба турбулентных пульсаций l или характерного размера вихря

$$l = \frac{2\pi}{k}, \quad (1.20)$$

где $k = |\mathbf{k}|$ — волновое число, характеризующее турбулентные пульсации*. В турбулентном состоянии (точнее, в развитой турбулентности) обычно присутствуют вихри различных масштабов. Распределение интенсивности турбулентного движения по масштабам часто характеризуют спектром турбулентности. Пусть турбулентность изотропна, однородна и стационарна. Обратимся к (1.13), введем величины

$$W_{\mathbf{k}} = \int W_{\mathbf{k}\omega} d\omega \quad (1.21)$$

и

$$W_h = 4\pi k^2 W_{\mathbf{k}}. \quad (1.22)$$

Тогда энергия турбулентного движения вихрей** единицы объема запишется в виде

$$W^T = \int_0^{\infty} W_h dk. \quad (1.23)$$

Величину W_h называют обычно спектральной функцией турбулентности. В отличие от $W_{\mathbf{k},\omega}$, характеризующей распределение турбулентных пульсаций, отнесенное к единичному интервалу $dk d\omega$, эта величина характеризует энергию турбулентных пульсаций, отнесенную к dk , т. е. распределение турбулентных пульсаций по масштабам турбулентности.

* В дальнейшем использование одной и той же буквы k для обозначения четырехмерного вектора $\{\mathbf{k}, \omega\}$ и $|\mathbf{k}|$ в большинстве случаев не приведет к недоразумениям, так как 4-вектор встречается лишь в виде индекса у компонент Фурье или их средних квадратов [см. (1.17)].

** Заметим, что вихревыми движениями можно ограничиться в том случае, если (v_s — скорость звука)

$$\frac{nm \langle v^2 \rangle}{2} \ll \frac{nm v_s^2}{2} \approx nT, \quad (1.24)$$

$$\frac{\omega}{k} \ll v_s. \quad (1.25)$$

Остановимся на примере течения жидкости по трубе. Среднюю скорость течения будем считать много меньшей v_s . При малых скоростях движение вязкой жидкости ламинарно, при больших — становится турбулентным. Проследим, как происходит переход от ламинарного течения к турбулентному. Возникновение турбулентности связано с неустойчивостью ламинарного течения [1]. С ростом средней скорости $\langle v \rangle$ потока неустойчивость возникает при некоторой критической скорости $\langle v \rangle^*$, при меньших скоростях течение является ламинарным. Так как скорость жидкости на стенке равна нулю, то значения скорости элементов жидкости растут при приближении к оси трубы. Если взять цилиндрическую трубу, то можно считать, что в ней движутся цилиндрические слои жидкости, испытывающие из-за вязкости трение со стороны соседних слоев. Трение, осуществляющее передачу импульса от слоя к слою, является молекулярным. С ростом средней скорости потока профиль скоростей вытягивается и растут градиенты скорости.

При определенных значениях $\langle v \rangle = \langle v \rangle^*$ такое движение становится энергетически невыгодным; более выгодным будет передача импульса в результате перемешивания слоев. Характерный масштаб этого движения порядка L — характерного размера сечения трубы. В дальнейшем с ростом $\langle v \rangle$ крупномасштабное движение становится также неустойчиво, в результате возникают вихревые движения более мелких масштабов. Последовательность такого дробления масштабов приводит к распределению энергии турбулентности по широкому интервалу масштабов, т. е. в широком диапазоне k . Механизм дробления масштабов турбулентности должен быть нелинейным.

Асимптотический вид спектра турбулентности несжимаемой жидкости получил А. Н. Колмогоров [9] из простых соотношений размерностей. При этом были сделаны простые физические предположения.

1. Турбулентность локально изотропна. Другими словами, спектр турбулентности вихревых движений может быть охарактеризован единственной величиной W_k [см. формулу (1.22)].

2. Существует постоянный поток энергии от крупномасштабных пульсаций к мелкомасштабным. Такой поток устанавливается для достаточно мелких масштабов турбулентности, значительно меньших основного масштаба,

$$L = 2\pi/k_0, \quad (1.26)$$

т. е. для

$$k \gg k_0. \quad (1.27)$$

Найденный спектр турбулентности является асимптотическим, т. е. справедливым лишь при достаточно больших волновых числах k , соответствующих условию (1.27).

Второе предположение Колмогорова следует несколько пояснить. Постоянство потока энергии означает, что энергия турбулент-

ных пульсаций передается каскадным образом лишь пульсациям соседних масштабов. Энергия турбулентных пульсаций должна трансформироваться от волновых чисел к соседним значениям $k + \Delta k$, где Δk порядка k , и только после этого перекачиваться дальше. Другими словами, делается определенное предположение о природе нелинейной связи турбулентности разных масштабов, а именно

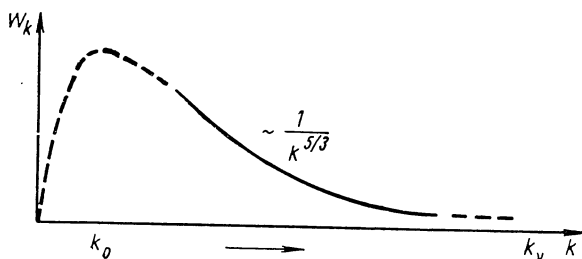


Рис. 1.3. Спектр турбулентности несжимаемой жидкости. Стрелкой отмечено направление трансформации турбулентной энергии.

это нелинейное взаимодействие наиболее эффективно для

$$\Delta k \ll k. \quad (1.28)$$

Запишем теперь условие постоянства потока энергии, исходя из размерностей. Поток энергии имеет размерность плотности энергии, деленной на время. Размерность плотности энергии имеет величина $W_k k$. Величина $1/t$ имеет размерность частоты ω ; ее можно составить из волнового числа k и v_0 лишь как kv_0 , где v_0 — величина с размерностью скорости. С другой стороны, $W_k k$ имеет размерность nmv_0^2 , т. е. $v_0 \approx \left(\frac{W_k k}{nm}\right)^{1/2}$. Отсюда размерность потока энергии есть $W_k k kv_0 \sim W_k k^2 \left(\frac{W_k k}{nm}\right)^{1/2} = Q$.

Постоянство Q позволяет определить зависимость W_k от k (рис. 1.3)

$$W_k = \frac{\text{const}}{k^{5/3}}. \quad (1.29)$$

Формула (1.29) и описывает известный спектр Колмогорова.

Условия применимости (1.29) состоят наряду с (1.27) также в том, что вязкость жидкости пренебрежимо мала. Как правило, вязкость существенна при больших градиентах, т. е. при больших k . Пусть k_v то значение волнового числа, для которого начинает сказываться вязкость. Тогда необходимое условие справедливости (1.29) запишем в виде

$$k \ll k_v. \quad (1.30)$$

Когда вязкость существенна, появляется величина с новой размерностью, и проведенные выше рассуждения, опирающиеся на соотношения размерностей, теряют силу. Заметим, что спектр (1.29) подтвержден экспериментально с хорошей статистикой в широком диапазоне k .

На основании сказанного легко понять механизм дополнительного поглощения энергии при развитии турбулентности. Турбулентность осуществляет перекачку энергии пульсации из области генерации $k \sim k_0$ в область больших $k \sim k_v$ до тех пор, пока не начинает играть роль поглощение пульсаций из-за вязкости. Турбулентность не приводит к какому-либо истинному поглощению коллективных движений жидкости. Это отражается в том, что энергия турбулентных пульсаций не теряется в процессе ее перекачки от одних масштабов к другим. Однако энергия коллективного движения переходит в ту область, где истинное молекулярное поглощение становится весьма интенсивным.

Теперь можно пояснить механизм установления стационарной турбулентности при различных интенсивностях ее возбуждения. Стационарная турбулентность возникает в результате баланса энергии в системе. Энергия турбулентности переходит в крупномасштабные движения из-за внешнего возбуждения и диссипируется в мелкомасштабных движениях из-за вязкости. С изменением интенсивности возбуждения меняется лишь поток энергии от крупномасштабных пульсаций к мелкомасштабным. Затухание турбулентных пульсаций из-за вязкости при больших k является отражением того факта, что коллективные гидродинамические движения жидкости при очень больших k вообще невозможны. В жидкости другие коллективные движения, кроме гидродинамических, отсутствуют.

В плазме возможны гидродинамические движения в условиях, когда соударения велики, а в магнитном поле и в случае, когда соударения малы (см. [10—12]). В этих условиях на плазму могут быть перенесены результаты, изложенные выше. В плазме существует большое число коллективных степеней свободы, имеющих длины намного меньше длины свободного пробега. Характерным для них является также наличие областей «прозрачности», где колебания слабо затухают, и областей, в которых поглощение велико. Трансформацию энергии пульсаций в области поглощения можно рассматривать как механизм установления стационарного спектра и как механизм турбулентного нагрева плазмы.

Приведенный пример содержит все элементы, из которых возникает стационарная турбулентность в плазме, хотя плазменная турбулентность несравненно богаче возможными каналами взаимодействий, и простые соображения размерностей уже неприменимы.

Первый необходимый элемент состоит в разделении областей генерации турбулентных пульсаций и областей поглощения их энергии. Если в какой-либо области волновых чисел турбулентные пульсации нарастают, то это возможно лишь в силу того, что ин-

кременты генерации превышают декременты поглощения пульсаций, следовательно, поглощение пульсаций возможно лишь в такой области волновых чисел, в которой соотношения между декрементами и инкрементами противоположны.

Второй необходимый элемент состоит в наличии трансформации энергии пульсаций из области генерации в область поглощения. Только такой процесс может установить баланс энергии турбулентности в плазме и привести к стационарной турбулентности. Как правило, этот процесс трансформации энергии нелинеен.

Эти эффекты станут более ясными, если познакомиться кратко с возможными коллективными движениями плазмы и в первую очередь с линейными коллективными степенями свободы. Начать следует с наглядного качественного их описания.

§ 1.4. ЛИНЕЙНЫЕ КОЛЛЕКТИВНЫЕ СТЕПЕНИ СВОБОДЫ ПЛАЗМЫ

Коллективные степени свободы плазмы можно разделить на гидродинамические (гидромагнитные) и бесстолкновительные степени свободы. Последнее понятие означает, что (хотя соударениями частиц полностью не пренебрегают) характерные времена движений плазмы для данных степеней свободы много меньше среднего времени между соударениями. В условиях, когда соударения часты, т. е. характерные времена для коллективных степеней свободы много больше частоты соударений, плазма может быть описана гидродинамическими уравнениями или, при наличии магнитного поля, уравнениями магнитной гидродинамики.

В дальнейшем будем придерживаться избранного определения двух классов степеней свободы плазмы, критерием разделения на которые является частота соударений $\omega \geq \nu_{ст}$. Необходимость указанного четкого определения терминологии связана с тем, что ряд низкочастотных бесстолкновительных степеней свободы имеет сходство с соответствующими гидродинамическими степенями свободы и их часто также называют гидродинамическими.

1.4.1. ИЗОТРОПНАЯ ПЛАЗМА В ОТСУТСТВИИ ВНЕШНИХ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

В плазме турбулентные движения можно описывать с помощью связанных с ними электромагнитных полей. В изотропной плазме такие поля либо продольные, либо поперечные.

Опишем продольные колебания плазмы, рассмотренные впервые Ленгмюром [13]. Рассмотрим случай малых линейных амплитуд колебаний. Пусть в квазинейтральной плазме плоский слой электронов толщиной Δx сместился в направлении x на расстояние Δx (рис. 1.4). В результате смещения в слое возникает избыток электронов, а в соседнем — недостаток. Появившееся разделение зарядов вызовет электрическое поле. Это поле будет создавать силу,

приводящую к притяжению отрицательного и положительного слоев плазмы, в результате чего электроны плазмы придут в движение. В момент времени, соответствующий компенсации зарядов отрицательного и положительного слоев, электроны будут иметь максимальную кинетическую энергию и поэтому «проскочат» состояние равновесия. В результате возникнут колебания плотности заряда и электрического поля. Найдем частоту этих колебаний с учетом того, что поле плоского слоя равно

$$E = 4\pi\sigma_*, \quad (1.31)$$

где σ_* — плотность поверхностного заряда, $\sigma_* = en \Delta x$; n — плотность плазмы. На каждый электрон слоя действует сила

$$F = eE = 4\pi e^2 n \Delta x, \quad (1.32)$$

пропорциональная отклонению от положения равновесия. Отсюда

$$m \frac{d^2 \Delta x}{dt^2} = F = m\omega^2 \Delta x;$$

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 = \frac{4\pi n e^2}{m_e}, \quad (1.33)$$

ω_{pe} — плазменная частота колебаний электронов. Выражение (1.33) для линейных колебаний справедливо при пренебрежении тепловым движением электронов. Учет теплового движения приводит к малым поправкам [14, 15]

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + 3k^2 v_{Te}^2, \quad (1.34)$$

где k — волновое число, $v_{Te} = \sqrt{\frac{T_e}{m_e}}$ — средняя тепловая скорость электронов плазмы*. При $kv_{Te} \ll \omega_{pe}$ поправки к ω_{pe} в (1.34) малы. Фазовая скорость колебаний

$$v_p = \frac{\omega}{k} \simeq \frac{\omega_{pe}}{k} \quad (1.35)$$

меняется в пределах от величины порядка v_{Te} до ∞ .

В бесстолкновительной плазме возможен также другой тип продольных колебаний, которые имеют более низкую частоту и носят название ионно-звуковых. В отличие от ленгмюровских колебаний в создании ионно-звуковых принимают участие как электроны, так

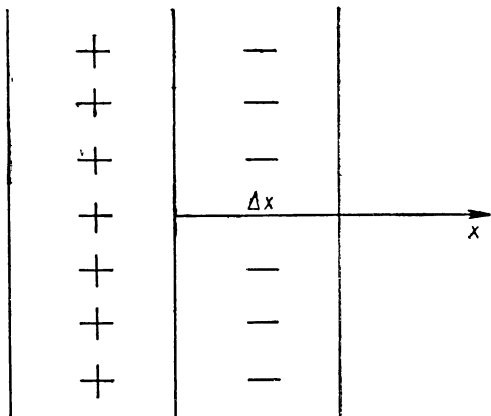


Рис. 1.4. Колебания слоя плазмы.

* Здесь и в дальнейшем T_e измеряется в энергетических единицах.

и ионы. Вследствие этого ионно-звуковые колебания представляют собой относительно медленные волны, фазовая скорость которых много меньше средней тепловой скорости электронов и электроны успевают быстро «подстраиваться» под распределение ионов. При неравномерном смещении ионов появляется пространственный заряд. Этот заряд создает некое распределение потенциала φ . В каждый момент времени электроны, подстраиваясь под это распределение потенциала, будут распределены по Больцману:

$$n_e = n_0 \exp\left(\frac{e\varphi}{T_e}\right). \quad (1.36)$$

Для слабых ионно-звуковых волн потенциал $e\varphi$ мал по сравнению с T_e и (1.36) имеет приближенный вид

$$n_e \approx n_0 \left(1 + \frac{e\varphi}{T_e}\right). \quad (1.37)$$

Под действием потенциала φ ионы начинают совершать движение, описываемое уравнением (ионы однократно ионизованы $Z=1$)

$$m_i \frac{dv_i}{dt} = eE = -e\nabla\varphi. \quad (1.38)$$

Изменение скорости в силу уравнения непрерывности приводит к изменению их плотности

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \operatorname{div}(n_i \mathbf{v}_i) \simeq \frac{\partial}{\partial t}(n_i - n_0) + n_0 \operatorname{div} \mathbf{v}_i = 0. \quad (1.39)$$

Для плоской волны, когда все величины зависят от координат и времени как $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t)$, получим:

$$\begin{aligned} \omega(n_i - n_0) &= n_0(kv_i); \quad m_i \omega v_i = ek\varphi; \\ n_i &= n_0 + n_0 \frac{kv_i}{\omega} = n_0 \left(1 + \frac{ek\varphi}{m_i \omega^2}\right). \end{aligned} \quad (1.40)$$

Уравнение Пуассона дает

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi e(n_i - n_e); \\ k^2 \varphi &= \frac{4\pi n_0 e^2}{m_i} \left(\frac{k^2}{\omega^2} - \frac{m_i}{T_e}\right) \varphi, \end{aligned} \quad (1.41)$$

или

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{k^2 v_s^2}{1 + k^2 \frac{v_{Te}^2}{\omega_{pe}^2}}; \\ v_s &= \sqrt{\frac{T_e}{m_i}} \end{aligned} \quad (1.42)$$

при

$$k \ll \frac{\omega_{pe}}{v_{Te}}; \quad \omega = kv_s, \quad (1.43)$$

т. е. получаются типичные звуковые колебания. При $k \gg \frac{\omega_{pe}}{v_{Te}}$ получим $\omega = \omega_{pi}$ — это ионные плазменные колебания; $\omega_{pi}^2 = \frac{4\pi n_0 e^2}{m_i}$.

Возникновение ионных колебаний можно легко понять, если учесть, что смещение ионов из положения равновесия, соответствующего квазинейтральности, могло бы приводить к таким же колебаниям ионов, как и смещение электронов, однако экранировка пространственного заряда электронами мешает этому. Но существуют такие длины волн, для которых экранировка невозможна, именно с этим связано возникновение колебаний с $\omega \simeq \omega_{pi}$.

Поле заряда, помещенного в плазму, экранируется на расстояниях порядка $\frac{v_{Te}}{\omega_{pe}}$. Действительно, рассмотрим уравнение Пуассона

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho = -4\pi\rho_0 + 4\pi n_0 e \left(e^{\frac{e\varphi}{T_e}} - 1 \right), \quad (1.44)$$

где ρ_0 — плотность внешнего заряда, а последний член (1.44) описывает экранировку электронами. При малых $\varphi \ll T_e/e$

$$\Delta\varphi - \frac{4\pi n_0 e^2}{T_e} \varphi = -4\pi\rho_0. \quad (1.45)$$

Второй член левой части (1.45) описывает экранировку и сравним с первым (который имеет порядок $\frac{\varphi}{(\Delta x)^2}$) на расстояния

$$(\Delta x)^2 \sim \frac{T_e}{4\pi n_0 e^2} = \frac{v_{Te}^2}{\omega_{pe}^2}.$$

Величина

$$d_e = \frac{v_{Te}}{\omega_{pe}} \quad (1.46)$$

носит название дебаевского радиуса. Она характеризует те расстояния, на которых поле заряда, внесенного в плазму, экранируется электронами. Для колебаний $\omega = \omega_{pi}$ длина волны меньше дебаевского радиуса и электроны не могут экранировать ионы. Поэтому и возникают ионные колебания.

Ионно-звуковые колебания в общем случае имеют фазовые скорости

$$v_p = v_s (1 + k^2 d_e^2)^{-1/2}, \quad (1.47)$$

которые всегда меньше v_s . Последняя, в свою очередь, много меньше v_{Te} : $v_s = v_{Te} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}$. При T_e порядка T_i , когда v_s порядка v_{Ti} , ионно-звуковые колебания отсутствуют из-за интенсивного поглощения на ионах. Они возможны лишь при выполнении неравенства

$$T_e \gg T_i, \quad (1.48)$$

когда

$$v_s \gg v_{Ti}.$$

Кроме продольных колебаний в изотропной плазме возможны поперечные колебания. Они распространяются в виде волн в плазме лишь при

$$\omega > \omega_{pe}. \quad (1.49)$$

Ввиду того, что частота волн велика, в волне смещаются электроны

$$m_e \frac{dv}{dt} = eE.$$

Для плоских волн $\sim \exp(-i\omega t + ikr)$ получим

$$\left. \begin{aligned} -i\omega m_e \mathbf{v}_k &= eE_k; \\ \mathbf{j}_k &= en_0 \mathbf{v}_k = -\frac{e^2 n_0}{m_e i\omega} E_k = \sigma E_k; \\ \varepsilon &= 1 + \frac{4\pi i\sigma}{\omega} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}, \end{aligned} \right\} \quad (1.50)$$

где ε — диэлектрическая проницаемость, σ — проводимость плазмы. Показатель преломления поперечных волн

$$n = \frac{c}{v_p} = \sqrt{\varepsilon}.$$

Из действительности ε следует (1.49). Подставляя в (1.50) $v_p = \omega/k$, имеем

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + c^2 k^2. \quad (1.51)$$

Фазовые скорости поперечных волн больше скорости света. Формула (1.51) описывает спектр поперечных волн в плазме. Возможные спектры колебаний однородной плазмы изображены на рис. 1.5.

Целесообразно рассмотреть, какая доля полной энергии турбулентности в коллективных степенях свободы плазмы приходится на энергию электромагнитного поля. Начнем с ионно-звуковых колебаний.

Энергия движения ионов составит

$$W_i = \left\langle n_0 m_i \frac{v_i^2}{2} \right\rangle = n_0 \frac{m_i}{2} \int \langle v_{ik} v_{ik'} \rangle e^{i(k+k')x} dk dk' =$$

$$= \frac{n_0 e^2}{2m_i} \int \frac{dk dk'}{\omega^2} \langle E_{ik} E_{ik'} \rangle \exp [i(k+k')x] = \int \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} \frac{|\hat{E}_k|^2}{8\pi} dk,$$

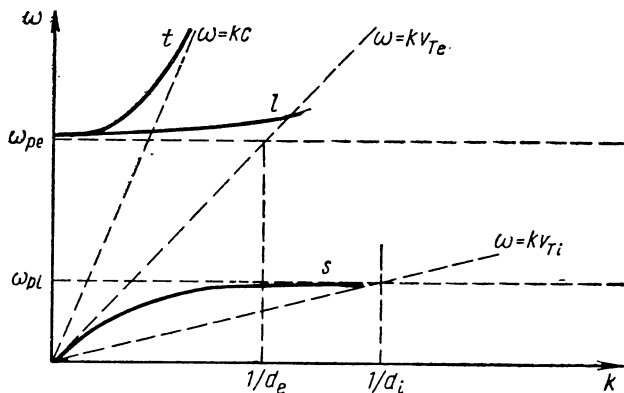


Рис. 1.5. Зависимость частоты турбулентных пульсаций от волнового числа в однородной плазме при $H_0=0$.

т. е. грубо

$$W_i \approx \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} W_E;$$

$$W_E = \int \frac{|E_k|^2}{8\pi} dk. \quad (1.52)$$

В области ионных колебаний $\omega \sim \omega_{pi}$; $W_i \approx W_E$, т. е. полная энергия турбулентности делится поровну между энергией электрического поля и энергией колебаний ионов. В области

$$\omega = kv_s = kv_{Ti} \sqrt{\frac{T_e}{T_i}} \text{ имеем}$$

$$W_E \approx k^2 d_e^2 W_i \ll W_i. \quad (1.53)$$

Из выражения (1.53) следует, что основная энергия заключена в движениях ионов. Аналогично приведенному расчету легко получить выражение энергии для ленгмюровских и поперечных колебаний

$$W_e \approx \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} W_E. \quad (1.54)$$

Для ленгмюровских колебаний энергия турбулентности делится поровну между энергией поля и энергией электронов, а для поперечных волн это имеет место лишь при $\omega \rightarrow \omega_{pe}$, т. е. в силу (1.51) для очень больших длин волн, значительно превосходящих величину c/ω_{pe} . Для волн больших частот $\omega \gg \omega_{pe}$ основная энергия заключена в электромагнитном поле. Напомним здесь, что электромагнитное поле в турбулентной плазме участвует на «одинаковых правах» с другими параметрами, такими, как скорости частиц и т. п. Как будет видно из дальнейшего, даже волны $\omega \gg \omega_{pe}$ могут интенсивно взаимодействовать с турбулентными пульсациями плазмы и, в частности, порождаться ими.

1.4.2. Однородная плазма в сильном внешнем магнитном поле

При наличии даже однородного внешнего магнитного поля \mathbf{H}_0 число возможных коллективных степеней свободы плазмы становится весьма большим. Ограничимся рассмотрением лишь наиболее важных из них. Пренебрегая силой Лоренца со стороны самосогласованных полей, можно описать при наличии магнитного поля малые движения заряда уравнением

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{mc} [\mathbf{v}\mathbf{H}_0] + \frac{e}{m} \mathbf{E}. \quad (1.55)$$

Если все величины записать в виде плоских волн $\sim \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$, то

$$-i\omega \mathbf{v}_k = \omega_H [\mathbf{v}_k \mathbf{h}] + \frac{e}{m} \mathbf{E}_k, \quad (1.56)$$

где $\omega_H = \frac{eH_0}{mc}$; $\mathbf{h} = \frac{\mathbf{H}_0}{H_0}$. Алгебраическое уравнение (1.56) легко решается относительно $\mathbf{v}(\mathbf{H}_0 \parallel z)$:

$$\left. \begin{aligned} j_x &= en_0 v_x = \frac{e^2 n_0}{m} \cdot \frac{i\omega}{\omega^2 - \omega_H^2} \left(E_x + i \frac{\omega_H}{\omega} E_y \right); \\ j_y &= en_0 v_y = \frac{e^2 n_0}{m} \cdot \frac{i\omega}{\omega^2 - \omega_H^2} \left(E_y - i \frac{\omega_H}{\omega} E_x \right); \\ j_z &= en_0 v_z = \frac{e^2 n_0}{m\omega} i E_z. \end{aligned} \right\} \quad (1.57)$$

В отличие от $H_0 = 0$ поле вдоль x вызывает электрический ток в плазме не только в направлении x , но и в направлении y . Это явление приводит к гиротропии и анизотропии плазмы.

Рассмотрение новых типов волн, появляющихся в плазме при наличии магнитного поля, начнем с колебаний, частоты которых много меньше ионно-циклотронных частот

$$\omega_{Hi} = \frac{eH_0}{m_i c}.$$

Особый интерес представляют альфвеновские волны [16]. Для их рассмотрения учтем, что эффекты гиротропии при $\omega \ll \omega_H$ являются малыми, так как вклад ионов в $j_x^{\text{ГНР}}$ в точности равен и противоположен вкладу электронов

$$j_{x_i}^{\text{ГНР}} = \frac{e^2 n_0}{m_i \omega_{Hi}} E_y = -\frac{e^2 n_0}{m_e \omega_{He}} E_y. \quad (1.58)$$

Итак, при $\omega \ll \omega_{Hi}$

$$\begin{aligned} j_{\perp} &= -\frac{e^2 n_0 i \omega}{m_i \omega_{Hi}^2} E_{\perp}; \\ j_z &= \frac{e^2 n_0 i}{m_e \omega} E_z, \end{aligned} \quad (1.59)$$

где знак \perp указывает на проекцию, перпендикулярную к внешнему магнитному полю.

Уравнения Максвелла

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}; \\ \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= -\text{rot } \mathbf{E} \end{aligned} \right\} \quad (1.60)$$

дают для плоских волн

$$\left. \begin{aligned} j [\mathbf{kH}_k] &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_k - i \frac{\omega}{c} \mathbf{E}_k; \\ \mathbf{H}_k &= \frac{c}{\omega} [\mathbf{kE}_k], \end{aligned} \right\} \quad (1.61)$$

или с учетом (1.59)

$$c^2(k_{\perp} (k\mathbf{E}) - k^2 \mathbf{E}_{\perp}) = -\frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{Hi}^2} \omega^2 \mathbf{E}_{\perp} - \omega^2 \mathbf{E}_{\perp}; \quad (1.62)$$

$$c^2(k_z (k\mathbf{E}) - k^2 E_z) = \omega_{pe}^2 E_z - \omega^2 E_z. \quad (1.63)$$

Так как даже весьма слабое поле E_z создает большой ток в плазме, значения E_z должны быть малыми для волн с $E_{\perp} \neq 0$.

Действительно, из (1.63) следует

$$E_z \sim \frac{k_z k_{\perp} c^2 E_{\perp}}{\omega_{pe}^2} \ll E_{\perp}.$$

Пусть ось x выбрана в плоскости \mathbf{kH} , т. е. $k_y = 0$. Проекции (1.62) на x и y имеют вид

$$k_x^2 - k^2 = -k_z^2 = -\omega^2 \left(1 + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{Hi}^2} \right) \frac{1}{c^2}; \quad (1.64)$$

$$-k^2 = -\omega^2 \left(1 + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{Hi}^2} \right) \frac{1}{c^2}. \quad (1.65)$$

Эти соотношения можно записать в виде

$$\omega_A = kv_A |\cos \theta|; \quad (1.66)$$

$$\omega_M = kv_A, \quad (1.67)$$

где θ — угол между направлениями \mathbf{k} и \mathbf{H}_0 , а v_A — альфвеновская скорость,

$$\frac{v_A^2}{c^2} = \frac{\omega_{Hi}^2}{\omega_{pi}^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\omega_{Hi}^2}{\omega_{pi}^2}} = \frac{H^2/4\pi n_0 m_i c^2}{1 + \frac{H^2}{4\pi n_0 m_i c^2}}. \quad (1.68)$$

Волна ω_A называется альфвеновской, а ω_M — магнитозвуковой.

В относительно слабых магнитных полях, удовлетворяющих неравенству

$$\frac{H^2}{4\pi n_0 m_i c^2} \ll 1,$$

имеет место приближенное выражение для v_A , полученное впервые Альфвеном [16],

$$v_A = \frac{H_0 c}{\sqrt{4\pi n_0 m_i c^2}}. \quad (1.69)$$

Фазовые скорости альфвеновских и магнитозвуковых волн совпадают или меньше v_A и могут быть в сильных магнитных полях весьма большими. Однако они не могут согласно (1.68) превысить скорость света [17].

При малых $v_A \approx v_s$ (v_s — скорость ионно-звуковых колебаний) соотношения (1.66) и (1.67) видоизменяются. Пусть далее электроны плазмы являются замагниченными, т. е. длины рассматриваемых волн намного превосходят средний ларморовский радиус вра-

щения электронов во внешнем магнитном поле. Существенную роль в данном случае играет лишь значение k_x ($k_y = 0$). Принятое условие может быть записано как

$$k_x r_e \ll 1, \quad (1.70)$$

где $r_e = \frac{v_{Te}}{\omega_{He}}$ — ларморовский радиус электронов, движущихся со средней тепловой скоростью $v_{Te} = \sqrt{T_e/m_e}$. Рассмотрим плоскую волну

$$E = E_0 \exp(ikr - i\omega t). \quad (1.71)$$

Из-за замагниченности действующее на электроны поле имеет приближенный вид

$$E \simeq E_0 (1 + ik_x x) \exp(ik_z z - i\omega t). \quad (1.72)$$

Второй член в круглых скобках (1.72) всегда мал, однако, как будет видно из дальнейшего, иногда его необходимо учитывать. В силу того, что поле волны приближенно зависит лишь от z , может быть всегда введен потенциал φ , такой, что

$$E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

или для плоской волны

$$E_{z, k} = -ik_z \varphi_k. \quad (1.73)$$

Из-за замагниченности электронов магнитное поле препятствует установлению больцмановского распределения поперек магнитного поля, однако вдоль магнитного поля свободно устанавливается больцмановское распределение. Потенциал φ характеризует как раз распределение электронов вдоль магнитного поля. Так же как и для звуковых колебаний, концентрация электронов будет определяться выражением

$$n_e \approx n_0 \left(1 + \frac{e\varphi}{T_e} \right).$$

Поле поляризации, созданное неравномерностью распределения электронов, будет иметь лишь компоненту E_z вдоль магнитного поля. Ток электронов j_z , созданный этим полем, легко найти из уравнения непрерывности

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (1.74)$$

которое для плоской волны имеет вид

$$k_z j_z = \omega \rho = -\omega e (n_e - n_0) = -\omega n_0 \frac{e^2 \varphi}{T_e}. \quad (1.75)$$

Используя (1.44), получаем

$$j_z^{(e)} = -\frac{i}{4\pi} \cdot \frac{\omega_{pe}^2}{k_z^2 v_{Te}^2} \omega E_z. \quad (1.76)$$

Отсюда вместо (1.59), учитывая (1.57) для ионов, получаем

$$j_z = \frac{i\omega E_z}{4\pi} \left(\frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{k_z^2 v_{Te}^2} \right). \quad (1.77)$$

Если рассматривать только такие колебания, для которых магнитных полей не возникает т. е. $\text{rot } \mathbf{E} = 0$, то уравнения Максвелла дают

$$\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} = 0; \quad i\omega \mathbf{E}_h = 4\pi \mathbf{j}_h \quad (1.78)$$

и в силу (1.77)

$$\omega^2 = \frac{k_z^2 v_s^2}{1 + k_z^2 d_e^2}. \quad (1.79)$$

Спектр (1.79) отличается от (1.42) тем, что вместо k^2 входит k_z^2 . Это тесно связано с замагниченностью электронов плазмы. Итак, в области $k_z d_e \ll 1$ имеем

$$\omega = \omega_{Ms} = kv_s |\cos \theta|. \quad (1.80)$$

Эти колебания носят название замагниченных ионно-звуковых. Замагниченные ионно-звуковые колебания могут существовать в случае, если $v_A \gg v_s$, так как только в этом приближении оказывается оправданным предположение о равенстве нулю магнитного поля колебаний. При $v_A \sim v_s$ вместо двух волн ω_M и ω_{Ms} появляются две другие, которые носят название ускоренной и замедленной магнитозвуковых волн. Связь этих волн возникает из-за того, что в токе j_y появляется компонента, пропорциональная E_z , а в токе j_z — компонента, пропорциональная E_y . Последнее легко понять, если учесть, что плотность электронов модулирована согласно (1.37) полем

$$\delta n_e = n_e - n_0 = \frac{eiE_z}{k_z T_e} n_0. \quad (1.81)$$

Поэтому ток j_y наряду с ранее найденным выражением (1.59)

$$j_y = -\frac{i\omega_{pi}^2 \omega}{4\pi\omega_{Hi}^2} E_y = en_0 (-\delta v_y^{(e)} + \delta v_y^{(i)}) \quad (1.82)$$

будет содержать поправку, обязанную модуляции плотности $\delta j_y = -e\delta n_e v_{0y}^{(e)}$, где $v_{0y}^{(e)}$ — скорость вращения электронов по лар-

морской окружности без учета действия поля волны. Используя (1.81), имеем

$$\delta j_y = -\frac{i \omega_{pi}^2}{4\pi k_z} m_i v_{0y}^{(e)} \frac{E_z}{T_e}. \quad (1.83)$$

Искомой величиной является среднее значение тока по всем частицам плазмы. Однако $v_{0y}^{(e)} = v_0 \sin(\omega_{He} t + \varphi_0)$ в среднем равно нулю и следует принять во внимание малый член в (1.72), учитывающий конечность ларморовского радиуса частиц. Если $v_{0y}^{(e)} = v_0 \sin(\omega_{He} t + \varphi_0)$, то

$$y = -\frac{v_0}{\omega_{He}} \cos(\omega_{He} t + \varphi_0);$$

$$x = \frac{v_0}{\omega_{He}} \sin(\omega_{He} t + \varphi_0) = \frac{v_{0y}^{(e)}}{\omega_{He}}.$$

Поэтому

$$\langle \delta j_y \rangle = -\frac{i \omega_{pi}^2}{4\pi k_z T_e} E_z i k_x m_i \langle x v_{0y}^{(e)} \rangle = \frac{\omega_{pi}^2}{4\pi \omega_{Hi}} \operatorname{tg} \theta E_z. \quad (1.84)$$

Попутно отметим, что аналогичные поправки к j_x отсутствуют, так как

$$\langle x v_{0x}^{(e)} \rangle \sim \langle \sin(\omega_{He} t + \varphi_0) \cos(\omega_{He} t + \varphi_0) \rangle = 0. \quad (1.85)$$

Отсюда следует, что альфвеновские волны имеют спектр $\omega_A = k v_A |\cos \theta|$ не только при $v_A \gg v_s$, но и при любом соотношении между v_A и v_s . Легко далее получить, что поправки к j_z имеют вид

$$\delta j_z = -\frac{\omega_{pi}^2}{4\pi \omega_{Hi}} \operatorname{tg} \theta E_{||}. \quad (1.86)$$

Последнее доказывается несложно из недиссипативности эффектов, приводящих к току (1.84). Действительно, запишем условие равенства нулю средней за период работы, совершаемой полем над создаваемым им током

$$\langle E j \rangle = 0. \quad (1.87)$$

Часть j_{\perp} , описываемая (1.59), имеет сдвиг по фазе $\pi/2$ [мнимая единица в (1.59)] по отношению к E_{\perp} и выпадает из (1.87), тогда

$$\langle \delta j_y' E_y \rangle + \langle \delta j_z' E_z \rangle = 0. \quad (1.88)$$

Легко видеть, что как раз (1.86) удовлетворяет этому равенству.

С учетом найденных токов и $k^2 \ll \frac{\omega_{pi}^2}{c^2}$ вместо уравнения (1.65) имеем из (1.61):

$$-k^2 E_y = -\omega^2 \left(1 + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{Hi}^2} \right) E_y - \frac{\omega_{pi}^2 i\omega}{\omega_{Hi}} E_z \operatorname{tg} \theta; \quad (1.89)$$

$$0 = \omega_{pi}^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{k_z^2 v_s^2} \right) E_z + \frac{i\omega\omega_{pi}^2}{\omega_{Hi}} \operatorname{tg} \theta E_y. \quad (1.90)$$

Система уравнений приводит к спектрам колебаний [17, 18]:

$$\omega_{\pm}^2 = k^2 v_{\pm}^2; \quad (1.91)$$

$$v_{\pm}^2 = \frac{1}{2 \left(1 + \frac{v_{A0}^2}{c^2} \right)} \left\{ v_{A0}^2 + v_s^2 \left(1 + \frac{v_{A0}^2}{c^2} \cos^2 \theta \right) \pm \right. \\ \left. \pm \sqrt{[v_s^2 (1 + v_{A0}^2 \cos^2 \theta / c^2) - v_{A0}^2]^2 + 4v_{A0}^2 v_s^2 \sin^2 \theta} \right\}, \quad (1.92)$$

где

$$v_{A0}^2 = c^2 \frac{\omega_{Hi}^2}{\omega_{pi}^2} = \frac{H^2}{4\pi n m_i}.$$

Волна ω_+ называется ускоренной магнитозвуковой волной, а ω_- — замедленной. В пределе $v_{A0} \gg v_s$ ω_+ переходит в ω_M , а ω_- — в ω_{Ms} . В случае $v_{A0}^2 \ll c^2$ получим [19]

$$v_{\pm}^2 = \frac{1}{2} [v_{A0}^2 + v_s^2 \pm \\ \pm \sqrt{(v_{A0}^2 - v_s^2)^2 + 4v_{A0}^2 v_s^2 \sin^2 \theta}]. \quad (1.93)$$

Переходя к волнам больших частот, остановимся на продольных колебаниях магнитоактивной плазмы. Такими обычно называют колебания, для которых приближенно электрическое поле колебаний направлено по волновому вектору волны \mathbf{k} . Учитывая, что для таких волн $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$, имеем

$$i\omega \mathbf{E}_k = 4\pi \mathbf{j}_k; \\ i\omega \mathbf{k} \mathbf{E}_k = 4\pi (\mathbf{j}_k \mathbf{k}). \quad (1.94)$$

Из (1.57) следует, что

$$4\pi(j_k, k) = \sum_{\alpha=e, i} \frac{\omega_{p\alpha}^2 i\omega}{\omega^2 - \omega_{H\alpha}^2} \frac{k_x^2 + k_y^2}{k} E_k + \sum_{\alpha=e, i} \frac{\omega_{p\alpha}^2 k_z^2 E_k}{\omega k}. \quad (1.95)$$

Учитывая $k_x^2 + k_y^2 = k^2 \sin^2 \theta$; $k_z^2 = k^2 \cos^2 \theta$, получаем

$$\frac{\omega_{pe}^2 \sin^2 \theta}{\omega^2 - \omega_{He}^2} + \frac{\omega_{pi}^2 \sin^2 \theta}{\omega^2 - \omega_{Hi}^2} + \frac{\omega_{pe}^2 \cos^2 \theta}{\omega^2} = 1. \quad (1.96)$$

Для волн больших частот основной вклад в ϵ вносят лишь электроны плазмы. Уравнение (1.96) может быть записано тогда в виде

$$\omega^4 - \omega^2(\omega_{He}^2 + \omega_{pe}^2) + \omega_{He}^2 \omega_{pe}^2 \cos^2 \theta = 0. \quad (1.97)$$

Отсюда

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{1}{2} [\omega_{He}^2 + \omega_{pe}^2 \pm \sqrt{(\omega_{He}^2 - \omega_{pe}^2)^2 + 4\omega_{He}^2 \omega_{pe}^2 \sin^2 \theta}]. \quad (1.98)$$

В условиях $\omega_{pe} \gg \omega_{He}$ две ветви (1.98) имеют вид

$$\omega_+ \simeq \omega_{pe}; \quad \omega_- \simeq \omega_{He} |\cos \theta|. \quad (1.99)$$

Под углом, близким к $\pi/2$, имеем для любых полей

$$\omega_+^2 \simeq \omega_{pe}^2 + \omega_{He}^2. \quad (1.100)$$

При $\theta \rightarrow \pi/2$ для ветви ω_- частота, согласно (1.98), стремится к нулю, и нужно учесть при малых ω вклад ионов. Можно найти точное решение (1.96) при $\theta = \pi/2$ из уравнения

$$\omega^4 - \omega^2(\omega_{He}^2 + \omega_{pe}^2) + \omega_{He} \omega_{Hi} (\omega_{pe}^2 + \omega_{He} \omega_{Hi}) = 0. \quad (1.101)$$

Для больших частот можно пренебречь последним членом (1.101), что дает (1.100), тогда как для малых частот пренебрежимо малым оказывается первый член (1.101)

$$\omega_-^2 \simeq \omega_{He} \omega_{Hi} \frac{\omega_{pe}^2 + \omega_{He} \omega_{Hi}}{\omega_{pe}^2 + \omega_{He}^2}. \quad (1.102)$$

В плотной плазме с $\omega_{pe} \gg \omega_{He}$ частота ω_- равна средней геометрической электронной и ионно-циклотронной частот:

$$\omega_- = \sqrt{\omega_{He} \omega_{Hi}}. \quad (1.103)$$

Эту частоту часто называют гибридной. Для малых частот под углом, не близким к $\pi/2$, в уравнении (1.96) следует учесть лишь последние два слагаемых левой части. В условиях $\omega_{pi} \gg \omega_{Hi}$ получим решения вида (1.99), в которых индекс «e» необходимо заменить индексом «i»:

$$\omega_{+}^{(i)} = \omega_{pi}; \quad \omega_{-}^{(i)} = \omega_{Hi} |\cos \theta| \quad (1.104)$$

В частности, к ветви $\omega_{-}^{(i)}$ стремится ветвь замагниченных ионно-звуковых колебаний в плотной плазме.

В тех случаях, когда электроны успевают распределиться по Больцману (для медленных волн), для j_z следует использовать (1.78). Это видоизменяет уравнение (1.96) для продольных волн следующим образом:

$$\frac{\omega_{pi}^2 \sin^2 \theta}{\omega^2 - \omega_{Hi}^2} + \frac{\omega_{pi}^2 \cos^2 \theta}{\omega^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_{Te}^2} = 1. \quad (1.105)$$

Здесь отброшены члены, описывающие вклад электронов в j_{\perp} . Биквадратное уравнение (1.105) имеет следующие решения ($k \ll \frac{1}{d_e}$):

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{1}{2} [\omega_{Hi}^2 + k^2 v_s^2 \pm \sqrt{(\omega_{Hi}^2 + k^2 v_s^2)^2 - 4 \cos^2 \theta \omega_{Hi}^2 k^2 v_s^2}]. \quad (1.106)$$

При $k^2 v_s^2 \ll \omega_{Hi}^2$ имеем

$$\omega_{+}^2 = \omega_{Hi}^2 + k^2 v_s^2 \sin^2 \theta; \quad (1.107)$$

$$\omega_{-}^2 = k^2 v_s^2 \cos^2 \theta. \quad (1.108)$$

Эти формулы описывают известные уже замагниченные ионно-звуковые колебания и новую ветвь (1.107), частоты которой не могут быть меньшими ω_{Hi} (эта ветвь естественно выпала из рассмотрения при $\omega \ll \omega_{Hi}$). В области $k^2 v_{si}^2 \gg \omega_{Hi}^2$ имеем

$$\omega_{+}^{2i} = k^2 v_s^2; \quad (1.109)$$

$$\omega_{-}^2 = \omega_{Hi}^2 \cos^2 \theta. \quad (1.110)$$

Другими словами, ветвь замагниченных ионно-звуковых колебаний переходит в ионные продольные волны (1.104), а ветвь (1.107) — в незамагниченные звуковые колебания. В дальнейшем с ростом k незамагниченные звуковые волны переходят в ионные колебания ω_{pi} . Описанная картина имеет место при $\omega_{Hi} \ll \omega_{pi}$.

Следует осветить вопрос о непродольных волнах больших частот. К ним относятся, в частности, поперечные волны, частоты кото-

рых много больше всех характерных частот плазмы. Для волн, имеющих частоты порядка ω_{He} и ω_{pe} , в отличие от изотропной плазмы $\omega(k)$ зависит от углов. При более низких частотах порядка ω_{Hi} такие волны непосредственно переходят в быстрые магнито-звуковые волны.

Рассмотрим эти волны, считая $\omega_{Hi} \ll \omega \ll \omega_{He}$. Выше отмечалось, что гиротропные эффекты в области малых частот $\omega \ll \omega_{He}$, ω_{Hi} малы в силу взаимной компенсации вклада электронов и ионов (вращающихся в противоположных направлениях). В области $\omega_{Hi} \ll \omega \ll \omega_{He}$ компенсация нарушается и основными становятся гиротропные члены. Легко из (1.57) получить:

$$\left. \begin{aligned} i_x &\simeq \frac{\omega_{pe}^2}{4\pi\omega_{He}} E_y; \\ j_y &= -\frac{\omega_{pe}^2}{4\pi\omega_{He}} E_x. \end{aligned} \right\} \quad (1.111)$$

Считая, что компонента E_z мала, что, как показано выше, оправдано при $k \ll \frac{\omega_{pe}}{c}$, имеем из уравнений Максвелла вместо (1.64)

$$c^2 k_z^2 E_x = \frac{\omega_{pe}^2 i\omega}{\omega_{He}} E_y, \quad (1.112)$$

$$c^2 k^2 E_y = -\frac{\omega_{pe}^2 i\omega}{\omega_{He}} E_x. \quad (1.113)$$

Перемножая последние два равенства, имеем

$$\omega^2 = \frac{\omega_{He}^2 c^4}{\omega_{pe}^4} k^4 \cos^2 \theta. \quad (1.114)$$

Указанные типы волн, в которые переходят быстрые магнито-звуковые волны, носят много названий: вистлеров, геликонов, наконец, свистящих атмосфериков или просто свистов. При $\cos \theta = 1$, т. е. при распространении вдоль поля, как легко видеть,

$$E_x = \pm i E_y,$$

т. е. это волны круговой поляризации. Если $\omega_{pe} \gg \omega_{He}$, то при $k \simeq \omega_{pe}/c$ существенную роль начинают играть компоненты E_z и волны переходят в электронную продольную волну ω_- (1.99).

Наконец, в плазме существуют так называемые циклотронные волны $\omega_e \simeq \nu\omega_{He}$, $\omega_i \simeq \nu\omega_{Hi}$, ν — целое число. Они в основном распространяются перпендикулярно к магнитному полю и имеют

длину порядка ларморовского радиуса. Возможные спектры схематически изображены на рис. 1.6.

1.4.3. Неоднородная магнитоактивная плазма

В неоднородной плазме, помещенной в постоянное однородное магнитное поле, появляются специфические дрейфовые волны. Частоты дрейфовых волн весьма малы. Следует осветить вопрос, как

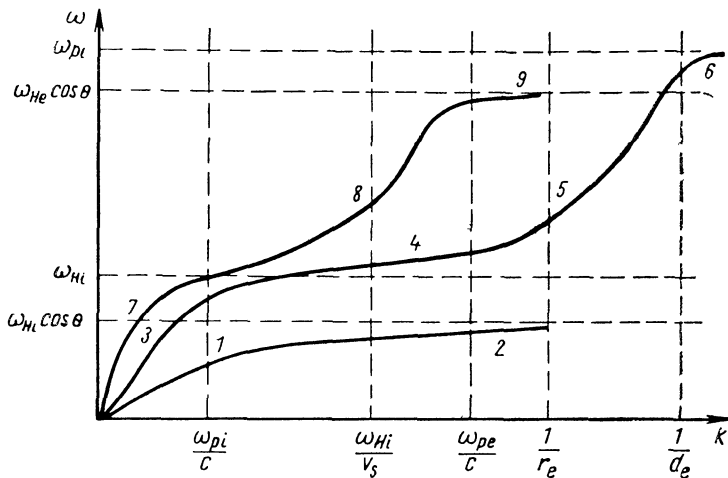


Рис. 1.6 Зависимость частоты от волнового числа для низкочастотных пульсаций магнитоактивной плазмы низкого давления p

$$\text{при } \beta = \frac{8\pi p}{H_0^2} \ll 1; v_A \gg v_s:$$

| Участок кривой | Тип турбулентных пульсаций | Закон дисперсии |
|----------------|---|--|
| 1 | Замагниченные звуковые колебания | $\omega = kv_s \cos \theta $ |
| 2 | Ионная продольная волна | $\omega = \omega_{Hi} \cos \theta $ |
| 3 | Альфеновская волна | $\omega = kv_A \cos \theta $ |
| 4 | Волна, переходящая в ионно-циклотронную | $\omega^2 = \omega_{Hi}^2 + k^2 v_s^2$ |
| 5 | Незамагниченные звуковые колебания | $\omega = kv_s$ |
| 6 | Ионные колебания | $\omega = \omega_{pi}$ |
| 7 | Магнитогидродинамическая волна | $\omega = kv_A$ |
| 8 | Вистлер | $\omega = \frac{k^2 c^2 \cos \theta }{\omega_{pe}^2} \omega_{He}$ |
| 9 | Низкочастотная продольная электронная волна | $\omega = \omega_{He} \cos \theta $ |

изменяются три рассмотренные выше ветви (альфвеновская и две магнитозвуковые) при учете неоднородности плазмы.

Рассмотрим случай, когда неоднородность — слабая, т. е. длину волны будем считать малой по сравнению с характерным размером неоднородности. Невозмущенную колебаниями плотность плазмы n_0 можно тогда аппроксимировать разложением

$$n_0 = n_0(0) + y \frac{dn_0}{dy}(0). \quad (1.115)$$

Здесь и ниже считаем, что неоднородность имеется лишь в одном направлении, принимаемом за ось y . Выберем это направление перпендикулярным к магнитному полю и будем считать $dn_0/dy = \text{const}$. Характерный размер L неоднородности плазмы удобно характеризовать величиной

$$L^{-1} = - \frac{1}{n_0(0)} \cdot \frac{dn_0}{dy}(0), \quad (1.116)$$

т. е.

$$n_0 = n_0(0) \left(1 - \frac{y}{L} \right). \quad (1.117)$$

Выше отмечалось, что модуляция плотности электронов из-за установления для них бальцовановского распределения в поле волны создает в однородной плазме дополнительные токи [см. формулу (1.84)]. Аналогично возникают токи и из-за наличия неоднородности плазмы

$$\delta \mathbf{j} = e \delta n_i \mathbf{v}_{Ti} - e \delta n_e \mathbf{v}_{Te},$$

где \mathbf{v}_T — скорость, связанная с тепловым движением электронов и ионов по ларморовской окружности (точнее, винтовой линии). В данном случае δn пропорционально y и отлично от нуля лишь среднее значение

$$\langle y v_{Tx} \rangle_{\alpha} = \frac{-1}{\omega_{H\alpha}} v_{T\alpha}^2. \quad (1.118)$$

Для нахождения изменения плотности, обусловленной неоднородностью, можно воспользоваться уравнением непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta n_{\alpha} + \text{div } n_0 \mathbf{v}_{\alpha} = 0. \quad (1.119)$$

Учитывая, что производные от \mathbf{v} имеют порядок $1/\lambda$ (λ — длина волны), а производные от n_0 значительно меньше этой величины (порядка $1/L$), можно приближенно считать n_0 в (1.119) постоянным. Учитывая также, что не зависящая от y часть n_0 в среднем вкладывает не дает, имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta n_{\alpha} = n_0(0) \frac{y}{L} \text{div } \mathbf{v}_{\alpha}. \quad (1.120)$$

Поскольку зависимость от y медленная, можно решение (1.120) в приближенном виде записать как $\text{const } y \exp(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t)$:

$$\omega \delta n_{\alpha, \mathbf{k}} = -n_0(0) \frac{y}{L} (\mathbf{k} v_{\alpha \mathbf{k}}). \quad (1.121)$$

Здесь v_{α} — пропорциональные E скорости частиц, связанные с колебаниями плазмы [например, (1.57)]. Усредняя ток δj с помощью (1.118), имеем

$$\delta j_x = \frac{en_0(0)}{L} \cdot \frac{(\mathbf{k} v_i) v_{Ti}^2}{\omega \omega_{Hi}} - \frac{en_0(0) (\mathbf{k} v_e) v_{Te}^2}{L \omega \omega_{He}}, \quad (1.122)$$

или, выражая результат через ток \mathbf{j} в отсутствие неоднородности, получим

$$\delta j_x = \frac{1}{\omega L} (\mathbf{k} \mathbf{j}^{(i)}) \frac{v_{Ti}^2}{\omega_{Hi}} + \frac{1}{\omega L} (\mathbf{k} \mathbf{j}^{(e)}) \frac{v_{Te}^2}{\omega_{He}}. \quad (1.123)$$

Найденный дополнительный ток позволяет исследовать новые типы колебаний плазмы, обусловленные ее неоднородностью.

Начнем с рассмотрения предельного случая $v_A \gg v_s$. Посмотрим, какое видоизменение претерпевают ветви ω_M , ω_A и ω_{Ms} при наличии неоднородности. Рассмотрим малые фазовые скорости $v_p \ll v_A$. В однородной плазме с такими фазовыми скоростями распространяются лишь замагниченные звуковые колебания $\omega_{Ms} = k v_s |\cos \theta|$, являющиеся чисто продольной волной. Общее уравнение продольных волн при пренебрежении током смещения имеет вид

$$(\mathbf{k} \mathbf{j}_k) = 0. \quad (1.124)$$

Если электроны распределены по Больцману, то

$$4\pi j_{k,z}^{(e)} = -\frac{i\omega_{pe}^2 k_z \omega}{k_z^2 v_{Te}^2 k} E_k, \quad (1.125)$$

а для ионов

$$4\pi j_{k,z}^{(i)} = i \frac{\omega_{pi}^2}{\omega} \cdot \frac{k_z}{k} E_k. \quad (1.126)$$

Наконец, в выражение для $\delta j_{k,x}$ вносит вклад лишь электронный член (1.123)

$$4\pi \delta j_{k,x} = 4\pi \frac{k_z j_{k,z}^{(e)} v_{Te}^2}{L \omega \omega_{He}}. \quad (1.127)$$

Подставляя токи (1.125) — (1.127) в соотношение (1.124), получаем дисперсионное уравнение [6]

$$\omega^2 - k_z^2 v_s^2 - \omega \omega_D = 0, \quad (1.128)$$

где

$$\omega_D = -\frac{1}{L} \cdot \frac{k_x v_{Te}^2}{\omega_{He}} = k_x v_D;$$

$$v_D = -\frac{v_{Te}^2}{L \omega_{He}}. \quad (1.129)$$

ω_D называется дрейфовой частотой, а v_D — дрейфовой скоростью электронов. Если k_x не мало, а k_z мало, спектр, определяемый (1.128), существенно отличается от исследованного выше спектра замагниченных звуковых колебаний, а именно при

$$k_z \ll k_x \frac{v_D}{v_s} \quad (1.130)$$

спектр превращается в

$$\omega = \omega_D.$$

Такая волна называется дрейфовой. Фазовая скорость волн ω_D/k_z возрастает с падением k_z . В случае, когда она становится сравнимой с v_A , волна перестает быть продольной. Для того чтобы рассмотреть возможные движения плазмы в этом случае, отметим, что в пределе $v_A \gg v_s$ ток j_x описывает альфвеновские волны, а ток j_y — магнитогидродинамические $\omega_M = k v_A$, которые отнюдь не связаны со звуковыми. Поскольку неоднородность плазмы приводит к дополнительному току вдоль x , то волна $\omega_M = k v_A$ не меняется из-за наличия неоднородности. Происходит изменение лишь альфвеновской волны.

Для исследования этого явления рассмотрим уравнения Максвелла, отбросив токи смещения:

$$c^2 k_x (k E_k) - k^2 c^2 E_{k,x} = -4\pi i \omega j_{k,x}; \quad (1.131)$$

$$c^2 k_z (k E_k) - k^2 c^2 E_{k,z} = -4\pi i \omega j_{k,z}. \quad (1.132)$$

Ток $j_{k,z}$ будет тем же, что и в рассмотренном выше случае, т. е. суммой (1.125) и (1.126):

$$-4\pi i \omega j_{k,z} = \omega_{pi}^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{k_z^2 v_s^2} \right) E_{k,z}. \quad (1.133)$$

Что касается тока j_x , то наряду с (1.127), учитывающим неоднородность, необходимо принять во внимание ток (1.59), приводящий в однородной плазме к альфвеновской волне

$$-4\pi i \omega j_{k,x} = \omega_{pi}^2 \left(\frac{k_z v_D \omega}{k_z^2 v_s^2} E_{k,z} - \frac{\omega^2}{\omega_{Hi}^2} E_{k,x} \right). \quad (1.134)$$

В результате мы получим следующее дисперсионное уравнение:

$$(\omega - \omega_D) (\omega^2 + \omega \omega_D - k_z^2 v_A^2) = 0. \quad (1.135)$$

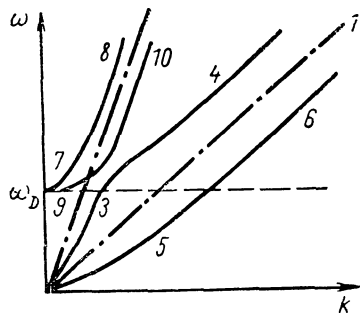
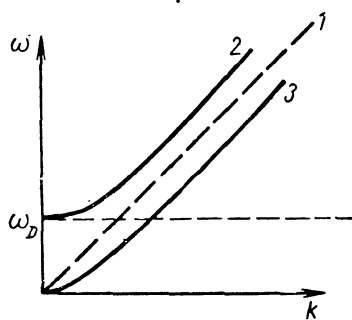


Рис. 1.7. Зависимость частоты дрейфовых пульсаций магнитоактивной плазмы от волнового числа при $\beta = \frac{8\pi\rho}{H_0^2} \gg \frac{m_e}{m_i}$:

| Участок кривой | Тип турбулентных пульсаций | Закон дисперсии |
|----------------|--|--|
| 1 | Замагниченные звуковые колебания в однородной плазме | $\omega = kv_s \cos \theta$ |
| 2 | Альфвеновская волна | $\omega = kv_A \cos \theta$ |
| 3 | Низкочастотная ветвь непотенциальных дрейфовых волн | $\omega = \frac{k^2 v_A^2 \cos^2 \theta}{\omega_D}$ |
| 4 | Замагниченные звуковые колебания в неоднородной плазме | $\omega = kv_s \cos \theta + \frac{\omega_D}{2}$ |
| 5 | Низкочастотная ветвь потенциальных дрейфовых колебаний | $\omega = \frac{k^2 v_s^2 \cos^2 \theta}{\omega_D}$ |
| 6 | Замагниченные звуковые колебания в неоднородной плазме | $\omega = kv_s \cos \theta - \frac{\omega_D}{2}$ |
| 7 | Непотенциальная дрейфовая волна | $\omega = \frac{k^2 v_A^2 \cos^2 \theta}{\omega_D} + \omega_D$ |
| 8 | Альфвеновская волна в неоднородной плазме | $\omega = kv_A \cos \theta + \frac{\omega_D}{2}$ |
| 9 | Дрейфовая волна | $\omega = \omega_D + \frac{k^2 v_s^2 \cos^2 \theta}{\omega_D}$ |
| 10 | Альфвеновская волна в неоднородной плазме | $\omega = kv_A \cos \theta - \frac{\omega_D}{2}$ |

Рис. 1.8. Зависимость частоты дрейфовых пульсаций магнитоактивной плазмы от волнового числа при $\beta = \frac{8\pi\rho}{H_0^2} \ll \frac{m_e}{m_i}$:



| Участок кривой | Тип турбулентных пульсаций | Закон дисперсии |
|----------------|--|--|
| 1 | Замагниченные звуковые колебания в однородной плазме | $\omega = kv_s \cos \theta$ |
| 2 | Замагниченные звуковые колебания в неоднородной плазме | $\omega = kv_s \cos \theta + \frac{\omega_D}{2}$ |
| 3 | То же | $\omega = kv_s \cos \theta - \frac{\omega_D}{2}$ |

При $k_z v_A \ll \omega_D$ имеем, это $|\omega| = \omega_D$, т. е. альфвеновская ветвь переходит в дрейфовые колебания.

Следует обратить внимание на то, что выше рассматривался лишь случай, когда давление внешнего магнитного поля намного превосходит давление плазмы $p = n(T_e + T_i)$. Возможные спектры неоднородной плазмы схематически изображены на рис. 1.7 и 1.8. Приведенный обзор относится лишь к линейным коллективным движениям плазмы (о нелинейных движениях см. § 1.5) и дает общее представление о природе простейших турбулентных пульсаций в ней.

§ 1.5. НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЛЕКТИВНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ПЛАЗМЫ. СИЛЬНАЯ И СЛАБАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

Уравнения движения плазмы являются нелинейными. Поэтому в принципе возможны самосогласованные нелинейные движения. Обратимся, например, к низкочастотным колебаниям типа ионно-звуковых, не предполагая амплитуду колебаний малой. Рассмотрим движения типа одномерных бегущих волн, для которых все величины зависят лишь от $x - v_p t$, где $v_p = \text{const}$ — фазовая скорость волны. Из (1.38) и (1.39) получим

$$\left. \begin{aligned} m_i \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} v_i^2 - v_i v_p \right) &= -e \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \\ \frac{\partial}{\partial x} n_i (v_p - v_i) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.136)$$

или

$$\left. \begin{aligned} (v_i - v_p)^2 &= v_p^2 - \frac{2e\varphi}{m_i}; \\ n_i &= \frac{\text{const}}{v_p - v} = \frac{n_0 v_p}{\sqrt{v_p^2 - 2e\varphi/m_i}}. \end{aligned} \right\} \quad (1.137)$$

Здесь const найдена из условия $n_i = n_0$ при $\varphi = 0$.

Уравнение Пуассона при учете (1.136) и (1.137) приобретает вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -4\pi e (n_i - n_e) = -4\pi n_0 e \left(\frac{v_p}{\sqrt{v_p^2 - \frac{2e\varphi}{m_i}}} - e^{\frac{e\varphi}{T_e}} \right). \quad (1.138)$$

Его первый интеграл

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - 4\pi n_0 m_i \left(v_p \sqrt{v_p^2 - \frac{2e\varphi}{m_i}} + \frac{T_e}{m_i} e^{\frac{e\varphi}{T_e}} \right) = \text{const} = \alpha. \quad (1.139)$$

Решение уравнения (1.139) дает профиль скоростей и потенциала φ в волне. Этот профиль зависит от значения констант v_p и α , одна из которых v_p — фазовая скорость, а вторая α — связана с амплитудой волны. На плоскости $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \varphi \right)$ уравнение (1.139) дает

совокупность замкнутых кривых, описывающих периодические волны. Эта совокупность кривых имеет предельную кривую, называемую сепаратрисой, для которой период стремится к ∞ и решение превращается в одиночный импульс. Этот импульс, носящий название солитон, возникает при

$$\alpha = -4\pi n_0 m_i \left(v_p^2 + \frac{T_e}{m_i} \right),$$

т. е. соответствует кривой на плоскости, проходящей через точку $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$, $\varphi = 0$ [20, 21].

Нелинейные волны с постоянной фазовой скоростью возможны также и для высокочастотных колебаний, например ленгмюровских. Для них можно приближенно пренебречь смещениями ионов, а смещение электронов найти из уравнения непрерывности и уравнения движения

$$\begin{aligned} n_e (v_e - v_p) &= \text{const}; \\ -\frac{m_e (v_e - v_p)^2}{2} - e\varphi &= \text{const}. \end{aligned} \quad (1.140)$$

Уравнение Пуассона приводит тогда к следующему уравнению для потенциалов:

$$-\frac{d^2}{dx^2} \cdot \frac{e\varphi}{m_e} = \omega_{pe}^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 2e\varphi/m_e v_p^2}} \right). \quad (1.141)$$

Отсюда

$$\left(\frac{d}{dx} v \right)^2 + \frac{4\omega_{pe}^2}{v_p^2} (v - 2\sqrt{v}) = \text{const} = \alpha, \quad (1.142)$$

где

$$v = 1 + 2e\varphi/m_e v_p^2.$$

Легко видеть, что условию $\varphi = 0$; $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$ соответствует $\alpha = -\frac{4\omega_{pe}^2}{v_p^2}$ и (1.142) имеет лишь тривиальное решение $v = 1$;

$\frac{dv}{dx} = 0$ во всем пространстве. Это показывает, что уединенные импульсы (солитоны) невозможны, и единственным типом решений является периодическая нелинейная волна.

Не будем здесь подробно останавливаться на других типах нелинейных волн [21] в магнитоактивной плазме, отметив, что возможны как решения в виде солитонов, так и решения в виде периодических волн. Для дальнейшего обсуждения существенны два обстоятельства.

Во-первых, нелинейные движения не удовлетворяют принципу суперпозиции и, следовательно, совокупность двух решений не

может быть также решением. Это означает, что возбуждение многих нелинейных степеней свободы, строго говоря, невозможно. Турбулентность предполагает передачу энергии от одних степеней свободы к другим и тем самым в определенном смысле их независимое существование, т. е. взаимодействие между степенями свободы слабым. Таким образом, либо нелинейное движение существует и подавляет другие движения: возбуждены одна или несколько степеней свободы и турбулентность отсутствует, либо нелинейное движение неустойчиво: возбуждаются другие движения, тогда нелинейное движение является начальной стадией турбулизации плазмы, однако конечное турбулентное состояние может иметь свойства, отличные от исходного нелинейного движения. Существует, правда, пример, когда нелинейность не является слабой, а взаимодействие решений мало, т. е. приближенно выполняется принцип суперпозиции. Это случай солитонов или решений, близких к ним. В настоящее время не совсем ясно, каким путем могут быть возбуждены состояния плазмы с большим числом слабозаимодействующих солитонов, хотя это и не исключено. Кроме того, одномерные волны с постоянной фазовой скоростью представляют собой частные нелинейные движения, которые неустойчивы относительно трехмерных возмущений.

Во-вторых, нелинейные коллективные движения, как правило, имеют амплитуды, не сильно превышающие энергию теплового движения частиц плазмы. Так, для низкочастотных ионно-звуковых волн $e\varphi_{\text{макс}} = 1,3 T_e$. а для высокочастотных [см. формулу (1.141)] $e\varphi_{\text{макс}} = \frac{m_e v_p^2}{2}$. Условие линейности волн $e\varphi_{\text{макс}} \ll T_e$

и $e\varphi_{\text{макс}} \ll \frac{m_e v_p^2}{2}$ соответственно. Если записать эти условия через энергию частиц в волне в 1 см^3 плазмы W_B , то $W_{B \text{ макс}} \simeq n_0 T_e$, а условие слабой нелинейности для низких частот $W_{B \text{ макс}} \ll n_0 T_e$.

Турбулентность плазмы также может характеризоваться отношением энергии турбулентности W к энергии теплового движения частиц плазмы

$$W/nT_e. \quad (1.143)$$

Этот параметр может быть мал $\eta \ll 1$ и велик $\eta \gtrsim 1$. Наличие в плазме коллективных движений с $\eta \sim 1$, например сильных нелинейных волн, не означает, что и для турбулентных движений $\eta \sim 1$, если коллективные движения носят регулярный, а не случайный характер.

Здесь встает вопрос о сильной и слабой турбулентности. Часто используется разделение слабой и сильной турбулентности по параметру η ($\eta \ll 1$ — слабая турбулентность, $\eta \gtrsim 1$ — сильная). Такое деление недостаточно, во-первых, для несжимаемой жидкости, турбулентность которой является сильной, $\eta \ll 1$. Действительно, согласно изложенному выше, условие несжимаемости имеет вид $W \ll nm_i v_s^2 = nT$. Во-вторых, η может быть большим, а движение нетурбулентным. Характерно для турбулентности взаи-

модействие коллективных движений между собой, так как без такого взаимодействия нет потока энергии.

Сильной турбулентностью назовем такое состояние турбулентного движения, в котором спектр и корреляция турбулентных пульсаций определяются их взаимодействием. Слабой турбулентностью назовем состояние, в котором взаимодействие пульсаций слабо изменяет их спектральные характеристики.

Если теперь рассмотреть возможные спектры линейных коллективных движений плазмы, то видно, что с ростом их частоты границы абсолютного значения интенсивности взаимодействий, при которых турбулентность может стать сильной, отодвигаются к все большим и большим значениям. Это значит, что сильную турбулентность легче наблюдать для низкочастотных колебаний, чем для высокочастотных. Для вихревых движений несжимаемой жидкости отсутствует собственная частота движений, и турбулентность сильная.

Существуют также физические аргументы, указывающие на то, что высокочастотная турбулентность, как правило, является слабой. Для высокочастотной турбулентности (например, ленгмюровской) относительная роль взаимодействий определяется параметром η , и условие $\eta \ll 1$ в этом специальном случае эквивалентно условию слабой турбулентности. Предположим, что увеличен источник турбулентности, т. е. повысилось W . С увеличением W вырастут потоки энергии вдоль спектра. И если эта энергия поглощается плазмой, то возрастает nT_e . Таким образом, параметр η может даже упасть. Особенно интенсивными эти потоки энергии становятся при η , приближающемся к 1, так как вступают в игру процессы трансформации энергии более высокого порядка по η . Эти аргументы указывают на то, что наиболее вероятно слабая высокочастотная турбулентность, когда приближенно можно говорить о взаимодействии линейных коллективных движений.

С другой стороны, в турбулентной плазме взаимодействие осуществляется не только между пульсациями одного типа, но и между разнотипными пульсациями, например высокочастотными и низкочастотными. И хотя такое взаимодействие для высокочастотных пульсаций слабо, оно может оказаться сильным для низкочастотных. Это значит, что слабая высокочастотная турбулентность может существенно видоизменить дисперсионные характеристики и природу коллективных движений в области низких частот. Это возникает в условиях, когда взаимодействие с высокочастотными пульсациями дает «сдвиги» в частотах, существенно большие собственных линейных частот низкочастотных пульсаций. Таким образом, сильная турбулентность в области низких частот может быть связана как с взаимодействием пульсаций между собой, так и с другими пульсациями*.

* Подробный разбор низкочастотных электромагнитных свойств турбулентной плазмы содержится в гл. 8.

Наконец, следует подчеркнуть, что для сильной турбулентности безразлична природа ее возбуждения сильными нелинейными волнами или другими источниками, так как информация об источниках турбулентности как бы ликвидируется эффектами взаимодействия, которые формируют спектр пульсаций. Вместе с тем сильные нелинейные коллективные движения могут возбуждать слабую турбулентность. Один лишь факт наблюдения пульсаций, для которых $\eta \sim 1$, не может поэтому служить свидетельством сильной турбулентности.

§ 1.6. ОСНОВНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ ТУРБУЛЕНТНОГО СОСТОЯНИЯ ПЛАЗМЫ

Приведенный выше анализ некоторых вопросов установления спектров и типов коллективных движений плазмы позволяет конкретно сформулировать основные проблемы турбулентности плазмы.

1. Изучение турбулентности плазмы базируется на анализе возможных коллективных степеней свободы плазмы и их относительной роли при том или ином способе возбуждения. Жидкость отличается от плазмы тем, что в ней может существовать относительно небольшое число коллективных степеней свободы. Важную роль в плазме играют те коллективные движения, которые имеют место при относительно слабых самосогласованных электромагнитных полях. Их можно назвать линейными. Однако в плазме возможны также нелинейные коллективные движения типа нелинейных самосогласованных волн и уединенных импульсов.

2. Исследование механизмов возбуждения коллективных движений плазмы и ее турбулентности является важной проблемой. Согласно общим представлениям [1], возбуждение турбулентности жидкости связано с неустойчивостью. Эта связь не всегда простая, так как может существовать довольно широкая область переходных режимов, когда неустойчивость не приводит к развитой турбулентности. Однако для возникновения турбулентности наличие неустойчивости необходимо.

Характерно, что в плазме возможно очень большое число разнообразных неустойчивостей. Поэтому плазма, встречающаяся в природе и в условиях лабораторного эксперимента, является часто турбулентной. Во многих случаях исследование физических процессов в плазме сводится к изучению турбулентности плазмы. Эта сторона вопроса не была отчетливо ясна на начальной стадии исследований по физике плазмы, точно так же как и первоначальные исследования жидкостей производились для простейших ламинарных течений. Однако постепенно укрепилось убеждение в том, что эффекты турбулентности играют в плазме фундаментальную роль. Если даже реализуются экспериментально идеальные условия, когда плазма с известным приближением устойчива, то они представляют собой исключение, а исследование таких условий —

частную, хотя, быть может, и очень важную, задачу. Все многообразие физических явлений в плазме требует для их объяснения привлечения представлений о турбулентности. Это обстоятельство сделало проблемы турбулентной плазмы и вопросы устойчивости основными в физике плазмы.

Развитие теории вначале происходило по пути обнаружения разнообразных неустойчивостей. Однако не сразу было отчетливо понято то обстоятельство, что эти неустойчивости в конечном счете приводят к турбулентности. Общее представление о роли турбулентности было развито в последние годы в связи с развитием экспериментов по турбулентной плазме.

3. Нужно сказать, что не всякие неустойчивости с самого начала переводят плазму в турбулентное состояние. Существует, однако, широкий класс неустойчивостей, при развитии которых одновременно возбуждается много коллективных степеней свободы. Это имеет место, если возбуждение происходит от начального уровня, связанного с тепловыми флуктуациями, и случайный характер процессов сохраняется на начальной стадии возбуждения.

К другому классу относятся неустойчивости, которые на начальной стадии приводят к возбуждению лишь одной или нескольких степеней свободы. Примером может служить моноэнергетический пучок в плазме, который резонансно взаимодействует лишь с одной плазменной волной. Постепенно, однако, из-за взаимодействия волн между собой и с пучком спектры волн и скоростей пучка расширяются и система переходит в турбулентный режим (квазилинейная стадия). Точно так же в приведенном выше примере турбулентности жидкости, текущей по трубе, вначале возбуждается лишь один вихрь и такое движение не турбулентно. Однако взаимодействие вихрей перераспределяет энергию по вихрям разных масштабов и развивает турбулентность. Одной из важных проблем является процесс перехода системы в турбулентный режим, процесс стохастизации и взаимодействия колебаний. Эти проблемы тесно связаны с общими вопросами эргодичности, и хотя ясно, что любая система за достаточно большое время должна перейти в турбулентный режим, время стохастизации движений существенно зависит от начальных условий.

4. Важной проблемой теории турбулентности является анализ возможных областей поглощения турбулентных пульсаций плазмы. Существенно, что коллективные механизмы дают возможность не только быстрого возбуждения колебаний, но и быстрой их диссипации. Одно из первых исследований таких механизмов принадлежит Л. Д. Ландау [15]. С точки зрения теории турбулентности важно расположение областей поглощения на путях трансформации турбулентной энергии. Возможность быстрой трансформации и эффективного поглощения создает предпосылки для эффективного турбулентного нагрева плазмы.

5. Одним из основных вопросов физики турбулентности являются нелинейные эффекты взаимодействия турбулентных пульсаций.

Выше на примере жидкости разбиралось, какую роль играют такие процессы в понимании динамики установления стационарной турбулентности. В плазме число коллективных степеней свободы намного больше, чем в жидкости, поэтому проблемы спектральной перекачки энергии турбулентных пульсаций и нелинейной конверсии одних типов пульсаций в другие играют здесь особую роль. Последовательное рассмотрение различных нелинейных эффектов позволяет выделить главные из них для данного исследуемого процесса и рассмотреть динамику развития турбулентности.

Некоторые из нелинейных перекачек могут не определять динамику турбулентности, так как в энергетическом отношении их вклад мал. Однако они могут играть важную роль в толковании наблюдаемых явлений. Примером такой нелинейной конверсии в плазме может служить превращение турбулентных пульсаций в электромагнитные волны, которые легко детектируются вне плазмы.

6. Исследование стационарных спектров турбулентных пульсаций является одной из важных проблем плазменной турбулентности. Как правило, возникновение таких спектров происходит в результате баланса эффектов раскачки трансформации и поглощения турбулентности. В поглощении турбулентных пульсаций существенную роль играют процессы спектральной перекачки, переводящие турбулентные пульсации в области значений параметров, для которых существенно поглощение. Именно исследование таких спектральных перекачек, а также анализ возможных областей эффективного поглощения турбулентных пульсаций играют важную роль в определении стационарных спектров.

7. Большое практическое значение имеют исследования процессов турбулентного переноса. Выше было указано на то, что для жидкости в условиях турбулентного движения возникает передача (перенос) импульса к стенке, значительно превосходящая тот перенос импульса, который связан с молекулярной вязкостью жидкости. Этот эффект соответствует турбулентной вязкости.

В том случае, когда речь идет о передаче энергии электронов от одной точки к другой при взаимодействии электронов с турбулентными пульсациями плазмы, можно говорить о турбулентной теплопроводности. Если речь идет о передаче направленного импульса от электронов, получающих энергию от внешнего электрического поля, к ионам в результате эффектов взаимодействия электронов с турбулентными пульсациями плазмы, можно говорить о турбулентной электропроводности. Наконец, в том случае, когда рассматривается перераспределение плотности плазмы при взаимодействии с турбулентными пульсациями, можно говорить о турбулентной диффузии. Диффузия турбулентной плазмы тесно связана со специфическими неустойчивостями, возникающими из-за наличия неоднородности плазмы.

8. Взаимодействие заряженных частиц с турбулентной плазмой, специфическое именно для плазмы, как ионизованного состоя-

ния вещества, является одним из важных объектов исследования физики турбулентной плазмы. Возбуждение турбулентности плазмы сопровождается обычно генерацией случайных электромагнитных полей. Поэтому заряженная частица, попадающая в турбулентную плазму, начинает испытывать действие этих случайных электромагнитных полей, блуждая в них и в ряде случаев получая от них энергию. В отличие от равновесной среды, в которой заряженные частицы теряют энергию, в турбулентной среде частица может приобретать энергию, т. е. ускоряться.

9. Другой проблемой, также связанной с электромагнитной природой турбулентности плазмы, является задача о прохождении электромагнитных волн через турбулентную плазму. В основном здесь играют роль процессы нелинейного взаимодействия электромагнитных полей турбулентных пульсаций с внешней электромагнитной волной. С одной стороны, такое взаимодействие может приводить к интенсивному рассеянию электромагнитных волн на турбулентных пульсациях и к флуктуации их интенсивности. С другой, так же как и для частиц, электромагнитные волны могут усиливаться, приобретая энергию. В этом отношении турбулентная плазма резко отличается от равновесной, в которой электромагнитные волны могут лишь поглощаться. В условиях стационарной турбулентности прохождения слабых внешних электромагнитных волн и их усиления определяются спектрами турбулентности.

10. Весьма важно исследовать вопросы устойчивости стационарной турбулентности относительно низкочастотных возмущений, возбуждения магнитных полей турбулентностью, скин-эффекта и др. Эти вопросы относятся к общей проблеме низкочастотных электромагнитных свойств турбулентной плазмы. Коренное изменение свойств турбулентной плазмы в областях низких частот важно для многих приложений, в частности в проблемах удержания турбулентной плазмы.

11. Наконец, представляет интерес исследование процессов диссипации турбулентности после прекращения действия источников, генерирующих турбулентные пульсации. Этот круг вопросов может быть объединен под названием распад турбулентности.

§ 1.7. ТУРБУЛЕНТНАЯ ПЛАЗМА В ЭКСПЕРИМЕНТЕ И В ПРИРОДЕ

Постараемся в настоящем параграфе ознакомить в общих чертах с проявлениями турбулентной плазмы (именно с явлениями, но не их физической интерпретацией). Часто эти проявления неудачно называют аномальными свойствами плазмы. По сути дела это означает, что они не соответствуют элементарным классическим представлениям, заимствованным из теории парных соударений. Отклонения результатов экспериментов от предсказанных теорией парных соударений возникли уже в самых первых опытах

с плазмой. Так, еще Ленгмюр [13] обнаружил эффект большого рассеяния электронов в газовом разряде, который нельзя было объяснить на основании представлений о парных соударениях, а также обнаружил аномально быстрое установление максвелловского распределения для рассеиваемых электронов.

Широкий круг экспериментов относится к вопросам взаимодействия пучков частиц с плазмой. Согласно элементарным представлениям, соударения частиц пучка с частицами плазмы при большой скорости пучка весьма малы. Действительно, если плазма сильно ионизована, то основную роль играют кулоновские соударения частиц. Величина сечения кулоновских соударений быстро падает с ростом относительной скорости частиц.

Для длины свободного пробега имеем

$$l \simeq \frac{1}{n_0 \sigma} \simeq \frac{1}{4\pi n_0 r_0^2} \left(\frac{v_0}{c} \right)^4; \\ r_0 = e^2/mc^2. \quad (1.144)$$

Как видно из (1.144), длина свободного пробега очень быстро растет с ростом скорости частиц. Произведем простой расчет. Пусть $n_0 \simeq 10^{13} \text{ см}^{-3}$, $m = m_e$, $r_0 \simeq 2 \cdot 10^{-13} \text{ см}$ и $\frac{v_0}{c} \sim \frac{1}{10}$, т. е. энергия

электронов пучка $\frac{mv^2}{2} \sim 2,5 \text{ кэВ}$. Из (1.144) получим $l \sim 10^8 \text{ см} \sim 10^3 \text{ км}$.

В любом лабораторном эксперименте размер установки $L \ll l$. Пучок такой энергии должен беспрепятственно проходить через плазму. Эта оценка приведена для того, чтобы показать разительное различие между наблюдаемым эффектом и предсказаниями теории парных соударений.

Еще Луни и Браун [22] и Меррил и Уебб [23] обнаружили потери энергии пучков в плазме и возникновение интенсивных колебаний плазмы. В дальнейшем большая потеря энергии пучков в плазме исследовалась во многих работах. Среди них в первую очередь следует отметить работы отечественных ученых группы Я. Б. Файнберга [24, 25], Е. К. Завойского [7, 26, 27]. В этих работах подробно исследуются микрохарактеристики турбулентности, возбуждаемой пучками, в частности корреляционные функции, спектры возбуждаемых колебаний и т. п. В этих экспериментах было продемонстрировано, в частности, что эффективность взаимодействия пучков с плазмой может в 10^{13} раз превосходить предсказания теории парных соударений. Эти аномалии в прохождении пучков связываются также с эффектами разбиения пучка на сгустки под действием возбуждаемых колебаний и когерентными потерями энергии, предсказанными В. И. Векслером [28].

В других работах было показано, что возможно полное запыриание даже весьма энергичного пучка в плазме, сопровождающееся возбуждением интенсивных колебаний плазмы низких частот [29, 30]. В работе [30] наблюдалось возбуждение низкочастот-

ных ионно-звуковых колебаний энергичными пучками частиц, а в работах [2, 25] детально анализировалась природа пульсаций, возбуждающихся при взаимодействии пучков с плазмой. Во всех опытах взаимодействие пучков с плазмой является весьма сильным.

Близко к этому кругу вопросов примыкают и задачи о турбулентном сопротивлении плазмы. Пусть плазма находится в электрическом поле. В достаточно слабом поле на длине свободного пробега электрон приобретает скорость $v = \sqrt{2eEl/m_e}$. Если эта скорость меньше v_{Te} , то сечение рассеяния определяется v_{Te} и, следовательно, $v_{ст} \sim v$, т. е. сила торможения из-за парных соударений

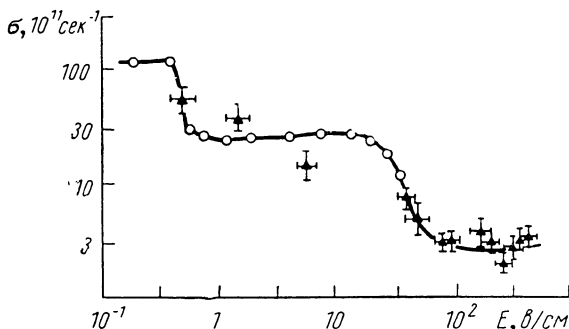


Рис. 1.9. Зависимость турбулентной электропроводности плазмы σ от приложенного электрического поля E :

○ — данные работы [32]; ▲ — работы [35].

тем больше, чем больше скорость. Это приводит к равновесию между ускоряющей и тормозящей силой и к установлению некой средней скорости электронов. Иная ситуация имеет место в сильном электрическом поле, когда электрон на длине свободного пробега приобретает энергию, большую чем T_e . Не столкнувшись с ионом, электрон мог бы достичь v_{Te} , а так как при $v > v_{Te}$ сила торможения падает с ростом v , то он и в дальнейшем не будет претерпевать столкновений, т. е. возникнут беспрепятственно ускоряющиеся электроны. Они получили название убегающих электронов. Подчеркнем, что, согласно предсказаниям теории парных соударений, все электроны плазмы должны в сильном поле убежать и сопротивление плазмы должно резко падать.

Величину критического поля, при котором сопротивление плазмы должно резко падать, согласно теории парных соударений, легко оценить из $m_e v_{ст} \bar{v} = eE^*$. Считая $\bar{v} = v_{Te}$, имеем

$$E^* \simeq \frac{e\omega_{pe}^2}{v_{Te}^2} \simeq \frac{e}{d_e^2}.$$

Величины E^* , особенно в плазме высоких температур, весьма малы. Так, при $n \sim 10^{13} \text{ см}^{-3}$ и температуре электронов 20 эв $E^* \sim 1\text{--}10 \text{ в/см}$.

Эксперименты показали, что при $E \gg E^*$ сопротивление резко возрастает. Обычно это сопровождается также возбуждением низкочастотных колебаний плазмы. Эффект турбулентного сопротивления изучался в работах [31—33]. Низкочастотные колебания в плазме при наложении электрического поля наблюдались также в работах [34, 35]. На рис. 1.9 приведены экспериментальные результаты, показывающие характер падения электропроводности плазмы с ростом электрического поля.

Суказанными проблемами тесно связаны вопросы турбулентного нагрева плазмы. Такой нагрев наблюдался во многих экспериментах [27, 30]. Быстрый нагрев не может быть согласован с предположением о нагреве из-за парных соударений, так как нагрев происходит на много порядков быстрее, нежели по теории парных соударений. Такой турбулентный нагрев наблюдался в экспериментах Е. К. Завойского с сотрудниками [27].

Большие надежды долго возлагали на удержание плазмы в магнитных ловушках. Однако во многих таких установках наблюдается аномальный уход плазмы, сопровождающийся развитием неустойчивости.

С этим вопросом связана также диффузия плазмы. Согласно элементарным представлениям теории парных соударений диффузия плазмы на стенки поперек сильного магнитного поля должна падать как $\sim 1/H^2$, т. е. должна быть относительно слабой в сильных магнитных полях. Именно на этом были основаны надежды на термоизоляцию плазмы сильным магнитным полем. Хотя в ряде случаев и возможно возникновение так называемой классической диффузии, обнаруженной, например, в экспериментах [36] и других, однако чаще всего диффузия оказывается значительно более сильной. Такую диффузию называют турбулентной. Впервые исследование турбулентной диффузии провел Бом [37]. Он получил:

$$D_B \sim 1/H.$$

Турбулентная диффузия сейчас изучена экспериментально, причем полученные значения коэффициента диффузии лежат между значением, предсказываемым теорией парных соударений, и значением коэффициента диффузии Бома. Сейчас эффекты турбулентной диффузии исследуются в любом эксперименте по термоизоляции плазмы.

Следующий круг явлений, в котором наблюдались аномалии, относится к изучению плазмы. Согласно элементарным представлениям такое излучение должно быть обязано двум причинам: 1) тормозному излучению электронов при соударении с ионами; 2) магнитотормозному излучению электронов, возникающему из-за того, что в плазме, помещенной во внешнее магнитное поле, электроны движутся по ларморовским окружностям. Если тормозное излучение имеет непрерывный спектр, то магнитотормозное — дискретный с частотами, кратными гирочастоте $\nu \omega_{He}$. Именно с относительно малыми лучистыми потерями плазмы из-за соударений

(тормозное излучение) и магнитотормозного излучения связаны были первые надежды нагрева плазмы.

Оказалось вместе с тем, что и лучистые потери плазмы существенно превосходят те, которые предполагались по теории парных соударений. Этот эффект соответствует аномальному излучению плазмы. Теоретически он рассматривался в работах [38, 39].

Первые эксперименты по пучковым неустойчивостям [24] обнаружили мощное излучение турбулентной плазмы. Аномальное излучение плазмы подробно анализировалось в экспериментах Завойского. Большое количество работ было выполнено японскими физиками [40], обнаружившими аномальное излучение плазмы на частотах, кратных гирочастотам электронов. Открытые эффекты дают возможность использовать плазму в качестве генератора электромагнитных волн разнообразных частот [41].

Наконец, чтобы закончить рассмотрение различных аномалий, следует остановиться на проблеме прохождения заряженных частиц через плазму. Согласно представлениям о парных соударениях, частицы должны терять энергию в плазме. Этому решительно противоречит эксперимент (речь идет о таких процессах, в которых плазма турбулентна). Уже первые работы по нагреву плазмы в мощных импульсных разрядах типа пинчей, выполненные под руководством Л. А. Арцимовича [42], показали, что плазма является источником ускоренных электронов и ионов. Ускоренные протоны производят то небольшое число ядерных реакций, которые сначала приняли за термоядерный эффект. В дальнейшем ускоренные частицы наблюдались почти во всех установках по магнитному удержанию плазмы. Особенно ярко эффект ускорения проявлялся при прохождении пучков через плазму. Такие эксперименты провел А. К. Березин [43], ускорение ионов экспериментально обнаружил также М. В. Незлин [35]. Алексеев и Найдай [30] и Смулин [29] обнаружили ускорение электронов и, по-видимому, ионов.

Вероятно, при любом сколь-нибудь активном воздействии на плазму в ней появляются ускоренные частицы. Например, они наблюдались в экспериментах по когерентному радиационному ускорению, предложенному В. И. Векслером [28, 44].

Особенно отчетлив контраст с предсказаниями теории парных соударений, когда в плазме обнаруживаются электроны с энергией большей, нежели энергия исходного пучка.

Остановимся теперь кратко на вопросе о том, каково возможное объяснение наблюдаемых аномалий поведения плазмы. Следует еще раз подчеркнуть, что речь идет не о каких-либо исключениях из правил, а о поведении плазмы, с которым наиболее часто приходится сталкиваться. Расхождение возникает лишь с предположением, согласно которому определяющими могут быть парные соударения. Вывод, который следует из сделанного краткого обзора, состоит в том, что в условиях турбулентности основные макроскопические проявления, основные макроскопические характеристики плазмы не соответствуют этим представлениям.

Согласно существующим сейчас представлениям перечисленные свойства плазмы связаны с ее турбулентностью. Другими словами, в плазме возбуждаются те или иные коллективные степени свободы, в частности колебания плазмы. Определяющими становятся тогда не парные взаимодействия частиц между собой, а взаимодействия частиц с указанными коллективными степенями свободы. Так, эффективное взаимодействие пучков с плазмой связано с возбуждением турбулентности плазмы; аномальное сопротивление связано с рассеянием частиц на колебаниях плазмы, аномальное излучение связано переходом колебаний плазмы в волны, которые покидают плазму; ускорение частиц связано с передачей энергии коллективных степеней свободы частицам плазмы и т. п.

Эффекты турбулентности играют большую роль в плазме, встречающейся в природе. Здесь можно выделить исследования плазмы ионосферы, плазмы околоземного пространства, плазмы радиационных поясов Земли и отчасти межпланетной плазмы. В настоящее время ясна большая роль турбулентных процессов в ускорении частиц радиационных поясов, формировании полярных сияний, динамики магнитосферы Земли и других процессов. Подробно исследуются вопросы возбуждения различных коллективных колебаний плазмы в радиационных поясах, источников интенсивной турбулентности и механизмов турбулизации плазмы солнечного ветра и т. д.

К другой группе вопросов относятся исследования турбулентности звездной плазмы, межзвездного пространства, Галактики, Метагалактики и турбулентности, возбуждаемой гигантскими взрывными процессами, происходящими в космосе [45, 46]. Здесь можно получить лишь ту информацию, которая приходит на Землю, а именно различные типы электромагнитных волн и ускоренных частиц, т. е. основные внешние проявления турбулентности плазмы.

Нужно сказать, что основная масса вещества в космосе является ионизованной и представляет собой плазму. Поэтому турбулентные процессы в плазме интересны не только с точки зрения объяснения наблюдений, касающихся излучения волн и ускорения частиц, но и в более широком плане. Большой интерес проявляется в последнее время к проблеме сверхзвезд — квазаров. По-видимому, излучение этих объектов соответствует аномальному излучению, связанному с турбулентностью плазмы. Такое предположение содержится в работах [47—49]. Генерация быстрых частиц космических лучей возникает из-за турбулентности плазмы. Известно, что генерация космических лучей носит всеобщий характер, т. е. во всех случаях, когда наблюдается беспокойное (турбулентное) движение плазмы, имеются и космические лучи. Это указывает на то, что возникновение космических лучей является одним из основных свойств турбулентной плазмы.

Турбулентность косвенно сказывается и в том, что ускоренные ею частицы становятся источником излучения. На этом основана интерпретация излучения многих космических объектов.

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПЛАЗМЫ

§ 2.1. МЕТОД УСРЕДНЕНИЯ ПО СТАТИСТИЧЕСКОМУ АНСАМБЛЮ

Теория турбулентности плазмы может быть построена на основе представлений о коллективных возбуждениях — так называемых плазмонах, а также электронных и ионных возбуждениях. Для того чтобы строго ввести понятие о плазмоне и указать, чем электронные и ионные возбуждения отличаются от собственно электронов и ионов, следует начать с формальных методов описания турбулентности, связанных с усреднением физических величин по статистическому ансамблю. Эти методы позволяют описывать системы, находящиеся далеко от статистического равновесия. Рассмотрение, проводимое ниже, показывает, что в этих условиях можно использовать метод коллективных возбуждений. Этот результат, имеющий, как будет видно, глубокий физический смысл, совершенно не тривиален и, более того, требует детального обоснования*. Для систем, далеких от статистического равновесия, рассмотрение облегчается тем, что позволяет использовать динамические уравнения движения, пренебрегая тепловыми флуктуациями. Как будет показано в дальнейшем, это сводится к тому, что учитываются все так называемые индуцированные процессы. Важно также, что с их помощью могут быть найдены конкретные выражения для матричных элементов взаимодействия возбуждений. В свою очередь, зная эти матричные элементы, можно вычислить спонтанные процессы. Результаты, полученные в условиях статистического равновесия, соответствуют тем, которые найдены в теории тепловых флуктуаций. Такое совпадение позволяет утверждать, что метод элементарных возбуждений имеет более общее значение.

Для того чтобы доказать возможность описания турбулентности на языке элементарных возбуждений, который также широко используется в твердых телах [52], следует в первую очередь сказать о статистическом ансамбле, по которому будет производиться усреднение. Таким статистическим ансамблем являются начальные значения параметров, характеризующих коллективные степени свободы плазмы. Для почти линейных коллективных движений это могут быть начальные значения фаз колебаний.

* Для систем, находящихся в состоянии, близком к статистическому равновесию, это обоснование было дано в методе функций Грина [50—52].

Общий метод усреднения пригоден как для слабой, так и для сильной турбулентности и, в конечном счете, тот же, что и используемый в теории турбулентности жидкостей. Однако представления о коллективных возбуждениях, слабо взаимодействующих между собой, возможно ввести лишь в слаботурбулентной плазме. Поэтому ниже особое внимание уделяется слаботурбулентной плазме. Метод усреднения, описанный здесь, весьма удобен для описания низкочастотных возмущений в турбулентной плазме (гл. 8).

Выделим турбулентные и регулярные составляющие физических величин L , характеризующих коллективные степени свободы плазмы. Запишем

$$L = L^R + L^T. \quad (2.1)$$

По определению турбулентной составляющей будем считать

$$\langle L^T \rangle = 0, \quad (2.2)$$

т. е.

$$\langle L \rangle = L^R.$$

Усреднив уравнения движения плазмы по статистическому ансамблю, можно получить отдельно уравнения для турбулентных и регулярных величин. Далее удобно найти уравнения для средних значений таких комбинаций турбулентных составляющих (например, квадратов электрических полей, корреляционных функций и т. п.), которые могут быть исследованы экспериментально, а также привести уравнения для регулярных составляющих к виду, содержащему лишь указанные корреляционные функции. Результатом должна быть самосогласованная система уравнений для регулярных величин и корреляционных функций случайных величин.

Для описания гидродинамических коллективных степеней свободы плазмы могут быть использованы гидродинамические уравнения и, соответственно, введены турбулентные составляющие для усредненных параметров, таких, как средняя плотность частиц, средняя скорость и т. п. Более общим является подход, использующий кинетические уравнения для плазмы, позволяющий описать турбулентные процессы, в которых существенную роль играют дальнодействующие характеристики распределения частиц плазмы.

Пусть $f(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$ — функция распределения частиц плазмы, показывающая, какое число частиц плазмы имеют импульсы в интервале от \mathbf{p} до $\mathbf{p} + d\mathbf{p}$:

$$\int f(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} = n(\mathbf{r}, t), \quad (2.3)$$

где $n(\mathbf{r}, t)$ — плотность частиц плазмы.

Разобьем f на две части — регулярную и турбулентную:

$$f = f^R + f^T; \quad (2.4)$$

$$\langle f^T \rangle = 0. \quad (2.5)$$

Отметим, что при таком определении не фигурирует условие малости полей турбулентных пульсаций. Турбулентность приводит к появлению дополнительной случайной части у электромагнитных полей. По определению положим:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}^R + \mathbf{E}^T; \\ \langle \mathbf{E}^T \rangle &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Для магнитного поля соотношения типа (2.6) можно не писать, так как с помощью уравнения Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{H} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

оно может быть выражено через электрическое поле.

В качестве примера рассмотрим бесстолкновительное кинетическое уравнение, описывающее движения определенного сорта частиц плазмы

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0, \quad (2.7)$$

где

$$\mathbf{F} = e \left(\mathbf{E} + \left[\frac{\mathbf{v}}{c} \mathbf{H} \right] \right) \quad (2.8)$$

сила Лоренца. Усреднив (2.7) по статистическому ансамблю при учете (2.4) и (2.6), получим уравнение для f^R

$$\frac{\partial f^R}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f^R}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F}^R \frac{\partial f^R}{\partial \mathbf{p}} = - \langle \mathbf{F}^T \frac{\partial f^T}{\partial \mathbf{p}} \rangle. \quad (2.9)$$

Вычитая (2.9) из (2.7), получаем уравнение для f^T

$$\frac{\partial f^T}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f^T}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F}^T \frac{\partial f^R}{\partial \mathbf{p}} + \mathbf{F}^R \frac{\partial f^T}{\partial \mathbf{p}} + \mathbf{F}^T \frac{\partial f^T}{\partial \mathbf{p}} - \langle \mathbf{F}^T \frac{\partial f^T}{\partial \mathbf{p}} \rangle = 0. \quad (2.10)$$

Если разложить f^T по степеням турбулентного поля E^T (а следовательно, и F^T)

$$f^T = \sum_{i=1}^{\infty} f^{T(i)}, \quad (2.11)$$

где индекс i указывает, что f^T пропорционально i -й степени E^T , то из уравнения (2.10), собрав члены одного порядка по E^T , имеем систему уравнений:

$$\frac{\partial f^{T(1)}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f^{T(1)}}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F}^T \frac{\partial f^R}{\partial \mathbf{p}} + \mathbf{F}^R \frac{\partial f^{T(1)}}{\partial \mathbf{p}} = 0; \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f^{T(2)}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f^{T(2)}}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F}^T \frac{\partial f^{T(1)}}{\partial \mathbf{p}} + \\ & + \mathbf{F}^R \frac{\partial f^{T(2)}}{\partial \mathbf{p}} - \left\langle \mathbf{F}^T \frac{\partial f^{T(1)}}{\partial \mathbf{p}} \right\rangle = 0; \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial f^{T(3)}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f^{T(3)}}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F}^T \frac{\partial f^{T(2)}}{\partial \mathbf{p}} + \mathbf{F}^R \frac{\partial f^{T(3)}}{\partial \mathbf{p}} - \left\langle \mathbf{F}^T \frac{\partial f^{T(2)}}{\partial \mathbf{p}} \right\rangle = 0. \quad (2.14)$$

Воспользовавшись формулой преобразования Фурье для произведения*

$$(LM)_k = \int L_{k_1} M_{k_2} dk_1 dk_2 \delta(k - k_1 - k_2), \quad (2.15)$$

получим при $\mathbf{F}^R = 0$:

$$i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) f_k^{T(1)} = \int \mathbf{F}_{k_1}^T \frac{\partial f_{k_2}^R}{\partial \mathbf{p}} dk_1 dk_2 \delta(k - k_1 - k_2); \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) f_k^{T(2)} = & \int \left[\mathbf{F}_{k_1}^T \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} f_{k_2}^{T(1)} - \right. \\ & \left. - \left\langle \mathbf{F}_{k_1}^T \frac{\partial f_{k_2}^{T(1)}}{\partial \mathbf{p}} \right\rangle \right] dk_1 dk_2 \delta(k - k_1 - k_2); \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) f_k^{T(3)} = & \int \left[\mathbf{F}_{k_1}^T \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} f_{k_2}^{T(2)} - \right. \\ & \left. - \left\langle \mathbf{F}_{k_1}^T \frac{\partial f_{k_2}^{T(2)}}{\partial \mathbf{p}} \right\rangle \right] dk_1 dk_2 \delta(k - k_1 - k_2). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Последние соотношения позволяют выразить f^T через f^R , F^T .

Отсюда нетрудно найти нелинейный турбулентный ток плазмы:

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}^R + \mathbf{j}^T; \quad \langle \mathbf{j}^T \rangle = 0; \quad (2.20)$$

$$\mathbf{j}^T = \sum_i \mathbf{j}^{T(i)}; \quad (2.21)$$

$$\mathbf{j}^{T(i)} = \sum_{\alpha} \int e_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}^T f_{\alpha}^{T(i)} \frac{d\mathbf{p}_{\alpha}}{(2\pi)^3}, \quad (2.22)$$

* Напомним, что $dk = dk d\omega$, а $\delta(k - k_1 - k_2) = \delta(k - k_1 - k_2) \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2)$.

Здесь индекс α указывает на суммирование по сортам частиц плазмы (электронам и ионам).

Обратимся теперь к уравнениям Максвелла, связывающим напряженность поля \mathbf{E}_k с током:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}; \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}; \quad (2.23)$$

имеем:

$$i [\mathbf{kH}_k] = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_k - \frac{i\omega}{c} \mathbf{E}_k; \quad [\mathbf{kE}_k] = \frac{\omega}{c} \mathbf{H}_k \quad (2.24)$$

или

$$\mathbf{k} (\mathbf{kE}_k) - \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \mathbf{E}_k = -4\pi i \frac{\omega}{c^2} \mathbf{j}_k. \quad (2.25)$$

В силу уравнения непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0 \quad (2.26)$$

ρ_k можно найти по \mathbf{j}_k

$$\rho_k = \frac{1}{\omega} (\mathbf{kj}_k), \quad (2.27)$$

т. е. достаточно знать ток, возбуждаемый в плазме, как функцию \mathbf{E}_k , чтобы получить уравнения для описания поля \mathbf{E}_k . Усредняя (2.25) по статистическому ансамблю, имеем

$$\mathbf{k} (\mathbf{kE}_k^R) - \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \mathbf{E}_k^R = -\frac{4\pi i \omega}{c^2} \mathbf{j}_k^R, \quad (2.28)$$

и, вычитая (2.25), получаем

$$\mathbf{k} (\mathbf{kE}_k^T) - \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \mathbf{E}_k^T = -\frac{4\pi i \omega}{c^2} \mathbf{j}_k^T. \quad (2.29)$$

Если цепочка уравнений (2.17)–(2.19) может быть оборвана, то учет конечного числа членов разложения турбулентного тока в (2.29) позволяет найти конкретное уравнение для $\langle E_k^T, E_k^T \rangle$ корреляционной функции полей, и правую часть (2.9), описывающую столкновения между \mathbf{j}^R и турбулентными пульсациями, выразить через $\langle E_k^T, E_k^T \rangle$. Обрыв цепочки (2.17)–(2.19) оправдан в теории слабой турбулентности. Однако уравнение для корреля-

ционной функции

$$k_i k_j \langle \mathbf{E}_{k',s}^T, \mathbf{E}_{k,j}^T \rangle - \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \langle \mathbf{E}_{k',s}^T, \mathbf{E}_{k,i}^T \rangle = \\ = - \frac{4\pi i \omega}{c^2} \langle \mathbf{E}_{k',s}^T, \mathbf{j}_{k,i}^T \rangle, \quad (2.30)$$

получаемое непосредственно из (2.29), не предполагает заранее определенной связи между частотой и волновым числом турбулентных пульсаций. Следовательно, если имеются физические аргументы для выделения определенных членов в этой цепочке, то (2.30) может описывать неслабую турбулентность. Отметим, что в работах [53, 54] построена графическая техника, с помощью которой можно выписать отдельные члены разложения правой части (2.30) по энергии турбулентности, что позволяет в принципе суммировать ряды, содержащиеся в правой части (2.30).

§ 2.2. ЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ ИЗМЕНЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНЫХ ПУЛЬСАЦИЙ ПЛАЗМЫ

Изменение спектра пульсаций в пространстве и во времени возможно из-за линейных эффектов переноса энергии пульсаций, групповые скорости которых зависят от характерных длин. В линейном приближении можно воспользоваться (2.17) и (2.22)

$$\mathbf{j}_k^T (1) = \sum_{\alpha} \int \frac{e v \left(\mathbf{E}_{k_1}^T + v \left[\frac{\mathbf{k}_1}{\omega_1} \mathbf{E}_{k_1}^T \right] \frac{\partial f_{k_2}^R}{\partial \mathbf{p}} \right)}{i (\omega - \mathbf{k} v + i \delta)} \times \\ \times dk_2 dk_1 \frac{d p_{\alpha}}{(2\pi)^3} \delta(k - k_1 - k_2). \quad (2.31)$$

Заметим, что турбулентный ток определяется регулярной частью распределения частиц, которая является функцией координат и времени (зависимость f^R от k_2 в фурье-представлении). Эта зависимость может быть медленной (в сравнении с частотой турбулентных пульсаций). Действительно, из (2.9) видно, что изменение f^R пропорционально энергии турбулентности и может иметь порядок характерного времени нарастания неустойчивости. Если это время много больше периода возбуждаемых пульсаций, то можно говорить, что турбулентность развивается на фоне медленных изменений регулярной функции распределения.

Если в первом приближении пренебречь этим изменением, то

$$f_{k_2}^R \approx f^R \delta(k_2). \quad (2.32)$$

Важно подчеркнуть, что для стационарной турбулентности соотношение (2.32) естественно точное. Из (2.32) получим результаты квазилинейного приближения [55—57]

$$j_{k,i}^T = \sigma_{ij}(k) E_{k,j}^T,$$

где тензор σ_{ij} , найденный из (2.31), тензор электропроводности

$$\sigma_{ij}(k) = \sum_a \int \frac{v_i e \left[\delta_{js} \left(1 - \frac{kv}{\omega} \right) + \frac{k_s v_j}{\omega} \right]}{i(\omega - kv + i\delta)} \cdot \frac{\partial f^R}{\partial p_s} \cdot \frac{dp}{(2\pi)^3}. \quad (2.33)$$

Часто вводят тензор диэлектрической проницаемости, связанный с $\sigma_{ij}(k)$ соотношением [19, 4, 89, 90]

$$\epsilon_{ij}(k) = \delta_{ij} + \frac{4\pi i \sigma_{ij}(k)}{\omega}. \quad (2.34)$$

Из выражения (2.33) непосредственно следует $\epsilon_{ij}(-k) = \epsilon_{ij}^*(k)$. Таким образом, линейное дисперсионное соотношение (2.29) приобретает вид

$$(k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{1}{c^2} \omega^2 \epsilon_{ij}(k)) E_{k,j}^T = 0 \quad (2.35)$$

и отличается от исследованных в предыдущей главе дисперсионных соотношений лишь тем, что начальная функция распределения частиц заменена f^R .

Обратимся к (2.35). Удобно привести сводку решений (2.35), введя единичные векторы поляризации электрического поля соответствующих колебаний [10] e_k^σ (σ — индекс, указывающий тип колебаний)

$$(e_k^\sigma e_k^{\sigma*}) = 1. \quad (2.36)$$

Так, для продольных колебаний (индекс l) $e_k^l = \frac{k}{k}$, для альфвеновских и магнитозвуковых волн в системе отсчета, в которой $k_y = 0$, $e^A = (1, 0, 0)$; $e^M = (0, 1, 0)$. Эти векторы легко найти из условия нормировки (2.36) и отношений между различными компонентами поля, получаемых из дисперсионных соотношений предыдущей главы или (2.35). В табл. 1 приведены значения e_k^σ для наиболее важных типов пульсаций плазмы.

Удобно также ввести понятие диэлектрической проницаемости для данной волны

$$\epsilon_k^\sigma = \epsilon^\sigma(k) = \epsilon_{ij}(k) e_{ik}^\sigma e_{jk}^{\sigma*} + \frac{c^2}{\omega^2} (k e_k^\sigma) (k e_k^{\sigma*}). \quad (2.37)$$

Таблица 1
Значения нормальных ортов и диэлектрической проницаемости турбулентных пульсаций плазмы

| Тип пульсаций | Обозначения | Нормальные орты e_k^σ в системе $k y = 0$ | | | Диэлектрическая проницаемость ε^σ |
|----------------------------------|-------------|--|--|-----------------|---|
| | | e_k^σ, x | e_k^σ, y | e_k^σ, z | |
| Ленгмюровские | l | $\sin \theta$ | 0 | $\cos \theta$ | $\frac{k^2 c^2}{\omega^2} + \varepsilon^l = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \cos^2 \theta -$ $-\frac{\omega_{pe}^2 \sin^2 \theta}{\omega^2 - \omega_{He}^2} + \frac{k^2 c^2}{\omega^2}$ |
| Ионно-звуковые колебания | s | $\sin \theta$ | 0 | $\cos \theta$ | $1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_{Te}^2} + \frac{k^2 c^2}{\omega^2} = \frac{k^2 c^2}{\omega^2} + \varepsilon^l$ |
| Вистлеры | ω | $\frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 \theta}}$ | $\frac{i \cos \theta }{\sqrt{1 + \cos^2 \theta}}$ | 0 | $2 \frac{\omega_{pe}^2}{\omega \omega_{He}} \cdot \frac{ \cos \theta }{1 + \cos^2 \theta} + \frac{k^2 c^2 \sin^2 \theta}{\omega^2 (1 + \cos^2 \theta)}$ |
| Альфвеновские волны | A | 1 | 0 | 0 | $\frac{c^2}{v_A^2} + \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \sin^2 \theta$ |
| Магнитогидродинамические волны | M | 0 | 1 | 0 | $\frac{c^2}{v_A^2}$ |
| Замаргиченные звуковые колебания | M_s | $\sin \theta$ | 0 | $\cos \theta$ | $1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} \cos^2 \theta + \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_{Te}^2} + \frac{k^2 c^2}{\omega^2} = \varepsilon^l + \frac{k^2 c^2}{\omega^2}$ |

Тогда дисперсионное уравнение для волн σ приобретает простой вид ($E_{kj} = e_{kj}^\sigma E_k^\sigma$)

$$(k^2 - c^{-2} \omega^2 \epsilon^\sigma(k)) E_k^{T\sigma} = 0. \quad (2.38)$$

Конечно, для отыскания (2.37) необходимо знать e_k^σ . Величина $\epsilon^\sigma(k)$ играет важную роль, определяя энергию турбулентных пульсаций и их взаимодействия между собой.

Для продольных пульсаций удобнее ввести

$$\epsilon^l(k) = \epsilon^\sigma(k) - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} = \epsilon_{ij}(k) \frac{k_i k_j}{k^2} \quad (2.39)$$

и дисперсионное соотношение для них записать в виде

$$\epsilon^l(k) = 0. \quad (2.40)$$

Из (2.33) легко получить

$$\epsilon_k^l = 1 + \frac{4\pi e^2}{k^2} \int \frac{\left(k \frac{\partial f^R}{\partial p} \right)}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\delta} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}. \quad (2.41)$$

В таблице приведены значения $\epsilon^\sigma(k)$ для наиболее важных типов пульсаций плазмы.

Дисперсионное уравнение (2.38) имеет комплексное решение

$$\omega = \omega^\sigma(\mathbf{k}) + i \gamma_k^\sigma, \quad (2.42)$$

где γ_k^σ — инкремент раскачки, или декремент затухания колебаний. В условиях $\gamma_k^\sigma \ll \omega^\sigma(\mathbf{k})$, о которых речь шла выше, приближенное выражение для γ_k^σ легко находится из (2.38)

$$\gamma_k^\sigma = - \frac{\omega^2 \operatorname{Im} \epsilon^\sigma(k)}{\frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \operatorname{Re} \epsilon^\sigma(k)} \Bigg|_{\omega = \omega^\sigma(k)} \quad (2.43)$$

Для продольных колебаний

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\delta} &= -i \pi \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}); \\ \gamma_k^l &= - \frac{\operatorname{Im} \epsilon^l(k)}{\frac{\partial}{\partial \omega} \operatorname{Re} \epsilon^l(k)} \Bigg|_{\omega = \omega^l(k)} = \frac{4\pi^2 e^2}{k^2 \frac{\partial}{\partial \omega} \operatorname{Re} \epsilon^l(k)} \Bigg|_{\omega = \omega^l(k)} \times \\ &\times \int \delta(\omega^l(\mathbf{k}) - \mathbf{k}\mathbf{v}) \left(k \frac{\partial f^R}{\partial p} \right) \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Этот результат, так же как и (2.43), имеет простую наглядную интерпретацию и может быть получен другим, весьма простым способом, использующим уравнения баланса (см. ниже).

Обратимся теперь к уравнению (2.30), которое, согласно (2.38), примет вид

$$(k^2 - \frac{1}{c^2} \omega^2 \varepsilon_k^\sigma) \langle E_{k'}^{T\sigma} E_k^{T\sigma} \rangle = 0. \quad (2.45)$$

Записав уравнение для $E_{k'}^T$ и умножив его на $E_k^{T\sigma}$, получим совместно с (2.45)

$$(k^2 - k'^2 - \frac{1}{c^2} \omega^2 \varepsilon^\sigma(k) + \frac{1}{c^2} \omega'^2 \varepsilon^\sigma(k')) \langle E_{k'}^{T\sigma} E_k^{T\sigma} \rangle = 0. \quad (2.46)$$

В условиях стационарности и однородности турбулентности, как было выяснено [см. (1.17)],

$$I_{k',k}^\sigma \equiv \langle E_{k'}^{T\sigma} E_k^{T\sigma} \rangle = I_k^\sigma \delta(k + k'). \quad (2.47)$$

В силу слабой раскачки или затухания, описываемого (2.43), зависимость $I_{kk'}^\sigma$ от $k + k'$ не является δ -образной, т. е. $k' \neq -k$, а размазано на Δk , причем очевидно $\left| \frac{\Delta k}{k} \right| \ll 1$ из-за медленности процесса раскачки и затухания.

Введем

$$\kappa = \frac{k - k'}{2}; \quad \Delta k = k + k';$$

$$I_{k, k'} = \tilde{I}_{\kappa, \Delta k} \quad (2.48)$$

и корреляционную функцию $I_h(\mathbf{r}, t) = I_h(x)$, $x = \{\mathbf{r}, t\}$, медленно зависящую от \mathbf{r} и t

$$I_\kappa(x) = \int \tilde{I}_{\kappa, \Delta k} e^{i\Delta k x} d\Delta k. \quad (2.49)$$

Уравнение (2.46) умножим на $e^{i\Delta k x}$ и проинтегрируем по Δk , учитывая, что

$$\frac{|\Delta k|}{|k|} \ll 1, \quad \frac{|\Delta \omega|}{\omega} \ll 1 \quad \text{и} \quad \gamma_k \ll \omega_k.$$

Получим

$$\int \left\{ 2\Delta k k - \frac{1}{c^2} \Delta \omega \frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \operatorname{Re} \varepsilon_k^\sigma - \frac{1}{c^2} \omega^2 \Delta k \frac{\partial}{\partial k} \operatorname{Re} \varepsilon_k^\sigma - 2i\omega^2 \frac{1}{c^2} \operatorname{Im} \varepsilon_k^\sigma \right\} \times$$

$$\times e^{i\Delta k x} \tilde{I}_{\kappa, \Delta k} = 0.$$

Здесь учтено, что $\operatorname{Im} \varepsilon_{-k}^\sigma = -\operatorname{Im} \varepsilon_k^\sigma$. (2.50)

Поскольку малыми эффектами порядка γ_k^σ/ω_k можно в (2.50) пренебречь, следует считать

$$I_k^\sigma(\mathbf{r}, t) \simeq I_k^\sigma(\mathbf{r}, t) \delta(\omega - \omega_k^\sigma); \quad \omega_k^\sigma = |\omega^\sigma(\mathbf{k})|; \quad \omega > 0. \quad (2.51)$$

Учитывая далее, что

$$\int \Delta \omega e^{i \Delta k x} I_{k, \Delta k}^\sigma d \Delta k = -\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t} I_k^\sigma(\mathbf{r}, t);$$

$$\int \Delta k e^{i \Delta k x} I_{k, \Delta k}^\sigma d \Delta k = \frac{1}{i} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} I_k^\sigma(\mathbf{r}, t),$$

подставляя (2.51) в (2.50) и интегрируя по $\omega > 0$, получаем:

$$\frac{\partial I_k^\sigma(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathbf{v}_g^\sigma \frac{\partial I_k^\sigma(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} = 2\gamma_k^\sigma I_k^\sigma(\mathbf{r}, t), \quad (2.52)$$

где ($\text{Re } \varepsilon_k^\sigma \approx \varepsilon_k^\sigma$)

$$\mathbf{v}_g^\sigma = \frac{\partial \omega_k^\sigma}{\partial \mathbf{k}} = - \frac{\frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} (\omega^2 \varepsilon_k^\sigma - k^2)}{\frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \varepsilon_k^\sigma} \Bigg|_{\omega = \omega_k^\sigma} \quad (2.53)$$

групповая скорость турбулентных пульсаций.

Удобно ввести понятие о квазичастицах, характеризующих турбулентные колебания плазмы, — плазмонах, а уравнение (2.52) рассматривать как кинетическое уравнение для плазмонов. Импульсом плазмона назовем величину \mathbf{k} (строго говоря, следовало бы писать $\hbar \mathbf{k}$, однако уравнения для плазмонов являются классическими и \hbar сокращается, поэтому можно с самого начала считать $\hbar = 1$), а его энергией ω_k^σ .

Функцию распределения числа плазмонов σ , указывающую, сколько плазмонов имеет импульс в интервале от \mathbf{k} до $\mathbf{k} + d\mathbf{k}$, обозначим $N_k^\sigma(\mathbf{r}, t)$. Эту величину будем считать пропорциональной $I_k^\sigma(\mathbf{r}, t)$

$$N_k^\sigma(\mathbf{r}, t) = \alpha_k I_k^\sigma(\mathbf{r}, t). \quad (2.54)$$

Так как уравнение (2.52) линейно по I_k^σ , имеем

$$\frac{\partial N_k^\sigma}{\partial t} + \mathbf{v}_g^\sigma \frac{\partial N_k^\sigma}{\partial \mathbf{r}} = 2\gamma_k^\sigma N_k^\sigma. \quad (2.55)$$

Для того чтобы найти коэффициент пропорциональности α_k , запишем энергию электромагнитного поля в виде

$$W = \int_{-\infty}^t \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} dt + \frac{H^2}{8\pi}, \quad (2.56)$$

где $D_{k, i} = \varepsilon_{ij}(k) E_{k, j}$ — индукция электрического поля;

$$\mathbf{H}_k = \frac{c}{\omega} [k \mathbf{E}_k].$$

Усредняя (2.56) по статистическому ансамблю, считая $\mathbf{E}_k = E_k^\sigma \mathbf{e}_k^\sigma$, получаем

$$\langle W \rangle = \frac{1}{4\pi} \sum_{\sigma} \int I_k^\sigma dk \frac{1}{\omega_k^\sigma} \left[\frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \varepsilon_k^\sigma \right]_{\omega = \omega_k^\sigma}. \quad (2.57)$$

Заметим, что найденная энергия содержит не только энергию поля, но и энергию частиц плазмы, участвующих в турбулентных движениях заданных типов волн. Это учитывается диэлектрической проницаемостью ε_k^σ . Формула (2.54) позволяет записать энергию турбулентности как сумму энергии плазмонов

$$\langle W \rangle = \int \frac{\omega_k^\sigma N_k^\sigma}{(2\pi)^3} dk. \quad (2.58)$$

Отсюда

$$N_k^\sigma = \frac{2\pi^2}{(\omega_k^\sigma)^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \varepsilon_k^\sigma \Big|_{\omega = \omega_k^\sigma} I_k^\sigma, \quad (2.59)$$

т. е.

$$\alpha_k = \frac{2\pi^2}{(\omega_k^\sigma)^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \varepsilon_k^\sigma \Big|_{\omega = \omega_k^\sigma}.$$

Частным случаем этой формулы для продольных пульсаций является

$$N_k^l = 2\pi^2 \frac{\partial}{\partial \omega} \varepsilon^l \Big|_{\omega = \omega_k^l} I_k^l. \quad (2.60)$$

После установления этого соответствия уравнения (2.55) можно рассматривать как уравнения баланса числа плазмонов. Левая часть описывает их изменение в пространстве и во времени из-за движения со скоростями, равными групповым скоростям волн, а правая — изменения в результате баланса излучения и поглощения плазмонов частицами плазмы. Действительно, согласно (2.44) (или аналогичному выражению в общем случае непотенциальных пульсаций) величина γ_k содержит $\delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})$, т. е. закон сохранения энергии при излучении

$$\varepsilon_p - \hbar k = \varepsilon_p - \hbar \omega = \varepsilon_p - \hbar k \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial p} = \varepsilon_p - \hbar k \mathbf{v},$$

где $\mathbf{v} = \partial \varepsilon_p / \partial \mathbf{p}$, ε_p — энергия частицы ε как функция ее импульса \mathbf{p} . Если вероятность излучения $\omega_p(\mathbf{k})$, то увеличение числа

плазмонов из-за излучения есть $\int \omega_p(\mathbf{k}) f_p^R(N_k + 1) \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}$, а уменьшение из-за поглощения $\int \omega_p f_{p-k}^R N_k \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}$, т. е.

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}}}{\partial t} = N_{\mathbf{k}} \int \omega_p(\mathbf{k}) \left(\mathbf{k} \frac{\partial f_p^R}{\partial \mathbf{p}} \right) \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}.$$

Здесь оставлены лишь индуцированные процессы. Из сопоставления с (2.44) и (2.55) получим вероятность излучения продольного плазмона частицей плазмы

$$\omega_p(\mathbf{k}) = \frac{8\pi^2 e^2}{k^2} \left. \frac{\partial \varepsilon^l}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_k} \delta(\omega_k - kv). \quad (2.61)$$

Важно подчеркнуть, что произошла своеобразная «перенормировка». Функция f^R описывает лишь коллективные электронные возбуждения, а f^T — плазмоны. Мы увидим, что вокруг частицы плазмы образуется «облако» частиц другого знака, и этому комплексу частиц как раз соответствует функция f^R .

§ 2.3. НЕЛИНЕЙНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ТУРБУЛЕНТНЫХ ПУЛЬСАЦИЙ ПЛАЗМЫ

Рассмотрим нелинейные эффекты, соответствующие следующим членам разложения по турбулентному полю по цепочке (2.17) — (2.19), точнее токам $\mathbf{j}^{T(2)}$ и $\mathbf{j}^{T(3)}$ в (2.22) — второго и третьего порядка по турбулентному полю. Учет двух членов, а не одного $\mathbf{j}^{T(2)}$ связан с тем, что ток $\mathbf{j}^{T(2)}$ в правой части уравнения (2.30) приводит к среднему трех полей $\langle E_{k_1}^T E_{k_2}^T E_{k_3}^T \rangle$, которое в приближении, когда поля можно считать статистически независимыми $\langle E_{k_1}^T E_{k_2}^T E_{k_3}^T \rangle \simeq \langle E_{k_1}^T \rangle \langle E_{k_2}^T \rangle \langle E_{k_3}^T \rangle$, равно нулю в силу определения E^T . Учет же слабых корреляций полей дает эффекты того же порядка, что $\langle E^T j^{T(3)} \rangle$.

Для того чтобы наиболее просто выявить существо и физический смысл результата, проиллюстрируем ход рассуждений на примере продольных колебаний $\mathbf{e}_k^\sigma = \frac{\mathbf{k}}{k}$. Тогда вместо (2.30) [и линейного (2.46)] получим [см. определение ε^l (2.39)]

$$\begin{aligned} (\varepsilon_k^l - \varepsilon_{k'}^{l*}) \langle E_{k'}^{T*} E_k^T \rangle &= -\frac{4\pi i}{k\omega} \left\langle E_{k'}^{T*} \left((\mathbf{k} \mathbf{j}_k^{T(2)}) + (\mathbf{k} \mathbf{j}_k^{T(3)}) \right) \right\rangle - \\ &- \frac{4\pi i}{k'\omega'} \left\langle E_k^T \left((\mathbf{k}' \mathbf{j}_{k'}^{T(2)*}) + (\mathbf{k}' \mathbf{j}_{k'}^{T(3)*}) \right) \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Здесь учтены равенства: $\varepsilon_{-k}^l = \varepsilon_k^{l*}$; $E_{-k}^l = -E_k^{l*}$ в силу

$$e_{-k}^l = -e_k^l.$$

Левая линейная часть (2.61) преобразуется так же, как и в § 2.2.

Умножая на $\exp(i\Delta kx)$ и интегрируя по k' , ω в левой части, имеем при $\gamma_k \simeq 0$

$$i \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{\partial N_k}{\partial t} + \mathbf{v}_g \frac{\partial N_k}{\partial \mathbf{r}} \right) = i \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty I_k \frac{\partial \varepsilon_k^l}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_k^l} d\omega. \quad (2.63)$$

Учитывая, что в правой части (2.62) из-за слабой нелинейности турбулентные пульсации приближенно стационарны $\Delta k \approx 0$, получаем уравнение, описывающее изменение числа плазмонов из-за нелинейных взаимодействий турбулентных пульсаций,

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_k}{\partial t} + \mathbf{v}_g \frac{\partial N_k}{\partial \mathbf{r}} = & -8\pi^3 \int d\omega dk' \left\{ \frac{1}{k\omega} \left\langle E_k^{T*} \left((\mathbf{k} \mathbf{j}_k^{T(2)}) + (\mathbf{k} \mathbf{j}_k^{T(3)}) \right) \right\rangle + \right. \\ & \left. + \frac{1}{k' \omega'} \left\langle E_k^T \left((\mathbf{k}' \mathbf{j}_{k'}^{T(2)*}) + (\mathbf{k}' \mathbf{j}_{k'}^{T(3)*}) \right) \right\rangle \right\}. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Из (2.18) и (2.22) получим выражение для турбулентного тока второго порядка по турбулентному полю

$$\frac{\mathbf{j}_k^{T(2)}}{k} = \int S_{k, k_1, k_2} (E_{k_1}^T E_{k_2}^T - \langle E_{k_1}^T E_{k_2}^T \rangle) dk_1 dk_2 \delta(k - k_1 - k_2); \quad (2.65)$$

$$\begin{aligned} S_{k, k_1, k_2} = & -\frac{e^3}{kk_1 k_2} \int \frac{(\mathbf{k} \mathbf{v})}{\omega - \mathbf{k} \mathbf{v} + i\delta} \times \\ & \delta \rightarrow +0 \\ & \times \left(\mathbf{k}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) \frac{1}{\omega_2 - \mathbf{k}_2 \mathbf{v} + i\delta} \left(\mathbf{k}_2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) f_p^R d\mathbf{p} (2\pi)^{-3}. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Аналогичным образом подставляя $f^{T(2)}$ в уравнение для $f^{T(3)}$, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \mathbf{k} \mathbf{j}_k^{T(3)} = & \int \delta(k - k_1 - k_2 - k_3) dk_1 dk_2 dk_3 \times \\ & \times \sum_{k, k_1, k_2, k_3} (E_{k_1}^T E_{k_2}^T E_{k_3}^T - E_{k_3}^T \langle E_{k_1}^T E_{k_2}^T \rangle - \langle E_{k_3}^T E_{k_1}^T E_{k_2}^T \rangle); \end{aligned} \quad (2.67)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k, k_1, k_2, k_3} = & \frac{i e^4}{kk_1 k_2 k_3} \int \frac{(\mathbf{k} \mathbf{v})}{\omega - \mathbf{k} \mathbf{v} + i\delta} \left(\mathbf{k}_3 \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) \times \\ & \delta \rightarrow +0 \\ & \times \frac{1}{\omega_1 + \omega_2 - (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \mathbf{v} + i\delta} \left(\mathbf{k}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) \frac{1}{\omega_2 - \mathbf{k}_2 \mathbf{v} + i\delta} \left(\mathbf{k}_2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) f_p^R \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}. \end{aligned} \quad (2.68)$$

С учетом этого запишем уравнение (2.68) в виде $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0\right)$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial N_{\mathbf{k}}}{\partial t} = & -8\pi^3 \int_0^\infty d\omega \int dk' \left\{ \frac{1}{\omega} \langle E_{k'}^{T*} E_{k_3}^T E_{k_4}^T \rangle \times \right. \\
 & \times S_{k, k_3, k_4} dk_3 dk_4 \delta(k - k_3 - k_4) + \frac{1}{\omega'} \langle E_k^T E_{k_3}^{T*} E_{k_4}^{T*} \rangle S_{k', k_3, k_4} \times \\
 & \times dk_3 dk_4 \delta(k' - k_3 - k_4) + \frac{1}{\omega} \sum_{k, k_1, k_2, k_3} \times \\
 & \times (\langle E_{k'}^{T*} E_{k_1}^T E_{k_2}^T E_{k_3}^T \rangle - \langle E_{k'}^{T*} E_{k_3}^T \rangle \langle E_{k_1}^T E_{k_2}^T \rangle) \times \\
 & \times dk_1 dk_2 dk_3 \delta(k - k_1 - k_2 - k_3) + \frac{1}{\omega'} \sum_{k', k_1, k_2, k_3} \times \\
 & \times (\langle E_k^T E_{k_1}^{T*} E_{k_2}^{T*} E_{k_3}^{T*} \rangle - \langle E_k^T E_{k_3}^{T*} \rangle \langle E_{k_1}^{T*} E_{k_2}^{T*} \rangle) \times \\
 & \left. \times dk_1 dk_2 dk_3 \delta(k' - k_1 - k_2 - k_3) \right\}. \quad (2.69)
 \end{aligned}$$

В силу слабой нелинейности турбулентные поля слабо скоррелированы между собой. Поэтому среднее четырех случайных величин можно приближенно разбить на произведение средних значений двух полей. Для среднего трех полей такое разбиение дает нуль, и необходимо учесть слабую корреляцию полей. Воспользуемся (2.29), учитывая лишь члены второго порядка по полю турбулентных пульсаций

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{k_4}^l E_{k_4}^T = & -\frac{4\pi i}{\omega_4} \int dk_1 dk_2 \delta(k_4 - k_1 - k_2) S_{k_4, k_1, k_2} \times \\
 & \times (E_{k_1}^T E_{k_2}^T - \langle E_{k_1}^T E_{k_2}^T \rangle). \quad (2.70)
 \end{aligned}$$

Умножив (2.70) на $E_{k'}^{T*} E_{k_3}^T$ и усреднив по ансамблю, найдем приближенное выражение для среднего трех турбулентных полей через среднее четырех. При этом следует уточнить каждое из трех полей, входящих в $\langle E_{k'}^{T*} E_{k_3}^T E_{k_4}^T \rangle$.

Уравнение (2.69) принимает в результате простой вид:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial N_{\mathbf{k}}}{\partial t} = & -8\pi^3 \int_0^\infty d\omega \int dk' dk_1 dk_2 dk_3 \left\{ \frac{\delta(k - k_1 - k_2 - k_3)}{\omega} \times \right. \\
 & \times \sum_{k, k_1, k_2, k_3}^{\text{эфф}} [\langle E_{k'}^{T*} E_{k_1}^T E_{k_2}^T E_{k_3}^T \rangle - \langle E_{k'}^{T*} E_{k_3}^T \rangle \langle E_{k_1}^T E_{k_2}^T \rangle] + \\
 & \left. + \frac{\delta(k' - k_1 - k_2 - k_3)}{\omega'} \sum_{k', k_1, k_2, k_3}^{\text{эфф}*} [\langle E_k^T E_{k_1}^{T*} E_{k_2}^{T*} E_{k_3}^{T*} \rangle - \right.
 \end{aligned}$$

$$-\langle E^T E_{k_3}^{T*} \rangle \langle E_{k_1}^{T*} E_{k_2}^{T*} \rangle \} - 32\pi^4 i \int \frac{dk_1 dk_2 dk'_1 dk'_2}{\omega \omega'} dk' d\omega \left(\frac{1}{\varepsilon_{k'}^l} - \frac{1}{\varepsilon_k^l} \right) \times \\ \times \delta(k - k_1 - k_2) \delta(k' - k'_1 - k'_2) S_{k, k_1, k_2} \times \\ \times S_{k', k'_1, k'_2} \left(\langle E_{k_1}^T E_{k_2}^T E_{k_1}^{T*} E_{k_2}^{T*} \rangle - \langle E_{k_1}^T E_{k_2}^T \rangle \langle E_{k_1}^{T*} E_{k_2}^{T*} \rangle \right); \quad (2.71)$$

$$\sum_{k, k_1, k_2, k_3}^{\text{эфф}} = \sum_{k, k_1, k_2, k_3} - \frac{4\pi i}{(\omega_1 + \omega_2) \varepsilon_{k_1+k_2}^l} \times \\ \times S_{k_1+k_2, k_1, k_2} (S_{k, k_3, k_1+k_2} + S_{k, k_1+k_2, k_3}). \quad (2.72)$$

Разбив средние четырех полей на парные, найдем, что из трех возможных пар одна выпадает из результата. Учитывая, кроме того, что турбулентные пульсации приближенно стационарны

$$\langle E_{k_1}^{T*} E_{k_2}^T \rangle = I_{k_1} \delta(k_1 - k_2), \quad (2.73)$$

получаем*

$$\frac{\partial N_k}{\partial t} = N_k \int v_{k, k_1} N_{k_1} dk_1 + \int \omega_{k_1, k_2} N_{k_1} N_{k_2} dk_1 dk_2, \quad (2.75)$$

где

$$v_{k, k_1} = \frac{4}{\pi \omega_k^l} \text{Re} \left\{ \sum_{k, k_1, k_2, -k_1}^{\text{эфф}} + \sum_{k, k_1, k_2, -k_1}^{\text{эфф}} + \sum_{k, k_2, -k_1, k_1}^{\text{эфф}} + \right. \\ \left. + \sum_{k, -k_1, k_2, k_1}^{\text{эфф}} \right\} \left(\frac{\partial \varepsilon_k^l}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \varepsilon_{k_1}^l}{\partial \omega_1} \right)^{-1} \Big|_{\omega = \omega_k^l, \omega_1 = \omega_{k_1}^l}; \quad (2.76)$$

$$\omega_{k_1, k_2} = \frac{8\pi}{\omega^2} (G_{k, k_1, k_2} + G_{k, -k_1, k_2} + G_{k, k_1, -k_2} + G_{k, -k_1, -k_2}) \times \\ \times \left(\frac{\partial \varepsilon_k^l}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \varepsilon_{k_1}^l}{\partial \omega_1} \cdot \frac{\partial \varepsilon_{k_2}^l}{\partial \omega_2} \right)^{-1} \Big|_{\omega = \omega_k^l, \omega_1 = \omega_{k_1}^l, \omega_2 = \omega_{k_2}^l}; \quad (2.77)$$

$$G_{k, k_1, k_2} = |S_{k, k_1, k_2} + S_{k, k_2, k_1}|^2 \delta(k - k_1 - k_2). \quad (2.78)$$

Таким образом, уравнение (2.75), полученное впервые в работе [6], содержит квадратичные комбинации от числа квантов и описывает процессы рассеяния квантов на квантах.

$$* \langle E_{k_1}^T E_{k_2}^T \rangle = -I_{k_1} \delta(k_1 + k_2) \text{ в силу } E_{-k_1} = -E_{k_1}^* \quad E_{k_1} = \frac{k_1}{k_1} E_{k_1};$$

$$I_k = \frac{1}{2\pi^2} \left(N_k \delta(\omega - \omega_k^l) + N_{-k} \delta(\omega + \omega_k^l) \right); \quad \omega_k^l > 0. \quad (2.74)$$

**§ 2.4. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ
ТУРБУЛЕНТНЫХ ПУЛЬСАЦИИ КАК ИНДУЦИРОВАННОГО
РАССЕЯНИЯ ПЛАЗМОНОВ НА ПЛАЗМАНАХ
И НА «ЧАСТИЦАХ» ПЛАЗМЫ**

В нелинейных уравнениях (2.75) можно выделить два типа членов. Первые из них интерпретируются как эффекты индуцированного комбинационного рассеяния одних волн на других. К их числу относятся все члены второго слагаемого (2.75). Эти члены отличны от нуля, если выполняются законы сохранения

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2; \\ \omega_{\mathbf{k}}^l &= \omega_{\mathbf{k}_1}^l + \omega_{\mathbf{k}_2}^l. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Поскольку эти законы сохранения описывают «развал» одной волны на две, такие процессы называют распадными. Четыре члена (2.77) содержат различные комбинации процессов, отличающихся от (2.79) тем, что некоторые из взаимодействующих волн не излучаются, а поглощаются.

Второй член (2.75) описывает лишь процессы спонтанного распада. Если $\omega_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(1)}(2\pi)^3$ — вероятность процесса (2.79) [она соответствует первому из четырех членов (2.77)], то уменьшение числа квантов из-за процесса (2.79) есть

$$-\omega_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(1)} N_{\mathbf{k}} (N_{\mathbf{k}_1} + 1) (N_{\mathbf{k}_2} + 1) (2\pi)^3,$$

а увеличение из-за обратного процесса

$$\omega_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(1)} N_{\mathbf{k}_1} N_{\mathbf{k}_2} (N_{\mathbf{k}} + 1) (2\pi)^3,$$

т. е.

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}}}{\partial t} = \int \omega_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(1)} (N_{\mathbf{k}_1} N_{\mathbf{k}_2} - N_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}_1} - N_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}_2}) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2. \quad (2.80)$$

Последние два члена (2.80) описывают индуцированные распады, так как они пропорциональны числу первоначально распадающихся квантов $N_{\mathbf{k}}$. Эти члены естественно содержатся в $\nu_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}$ (2.76). Помимо этого там есть члены, соответствующие другим распадным процессам. Выражение (2.76) также описывает процессы индуцированного рассеяния.

Для выделения интересующих нас индуцированных распадов (2.80) заметим, что в силу (2.79) $k_1 + k_2$ есть собственное решение, т. е. $\varepsilon_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2} = 0$, и, следовательно, второй член $\sum^{\text{эфф}}$ (2.72), содержащий $\frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2}}$, играет определяющую роль в этой области

волновых чисел. Обозначив $\delta \sum^{\text{эфф}} = \sum^{\text{эфф}} - \sum$, получим

$$\delta \sum_{k, k_1, k_2, k_3}^{\text{эфф}} = -4\pi i \frac{1}{\varepsilon_{k_1+k_2}^l (\omega_1 + \omega_2)} S_{k_1+k_2, k_1, k_2} \times \\ \times (S_{k, k_3, k_1+k_2} + S_{k, k_1+k_2, k_3}) = -4\pi i \int \delta(k' - k_1 - k_2) \frac{1}{\omega' \varepsilon_{k'}^l} \times \\ \times S_{k', k_1, k_2} (S_{k, k_3, k'} + S_{k, k', k_3}) dk'. \quad (2.81)$$

Рассмотрим теперь вклад $\delta \sum$ в третий и четвертый * члены (2.76) (обозначенные $v_{k, k_1}^{(1)}$)

$$v_{k, k_1}^{(1)} = \frac{16}{\omega_k^l \frac{\partial \varepsilon_k^l}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \varepsilon_{k_1}^l}{\partial \omega_1}} \text{Im} \int \delta(k_2 - k + k_1) \frac{dk_2}{\omega_2 \varepsilon_{k_2}^l} \times \\ \times (S_{k_2, k, -k_1} + S_{k_2, -k_1, k}) (S_{k, k_1, k_2} + S_{k, k_2, k_1}) \Big|_{\omega = \omega_k^l, \omega_1 = \omega_{k_1}^l}. \quad (2.82)$$

Используя конкретное выражение (2.66) для величины S , легко проверить, что справедливо тождество **

$$\frac{1}{\omega_2} (S_{k_2, k, -k_1} + S_{k_2, -k_1, k}) = -\frac{1}{\omega} (S_{-k, -k_1, -k_2} + S_{-k, -k_2, -k_1}) = \\ = \frac{1}{\omega} (S_{k, k_1, k_2}^* + S_{k, k_2, k_1}^*). \quad (2.83)$$

Последнее равенство написано из условия действительности нелинейного тока $j_{-k}^{(2)} = -j_k^{(2)*}$ и действительности полей $E_{-k} = -E_k^*$. Отсюда получаем

$$v_{k, k_1}^{(1)} = -2 \int \omega_{k_1, k_2}^{(1)} dk_2. \quad (2.84)$$

Учитывая, что все выражения симметричны относительно замены $1 \leftrightarrow 2$, видим, что последние два члена (2.80) могут быть записаны как удвоенный второй член, т. е. соответствуют как раз результату (2.84). Тем самым сделанное утверждение доказано.

Покажем теперь, что остальные члены нелинейного взаимодействия (2.76) также имеют простой смысл, они описывают эффекты индуцированного рассеяния турбулентных пульсаций на частицах

* Первый и второй члены (2.76) описывают другие распады, законы сохранения для которых отличаются знаками частот и волновых векторов в (2.79).

** Первое равенство (2.83) может быть получено также из общей теоремы недиссипативности нелинейного тока $j_k^{(2)}$ [58].

плазмы. Согласно (2.76) в результат входит лишь действительная часть, а в силу (2.68) необходимо учитывать лишь мнимые части, содержащиеся в знаменателях (2.68). Например,

$$\operatorname{Im} \frac{1}{\omega - kv + i \delta} = -\pi \delta(\omega - kv).$$

$$\delta \rightarrow +0$$

Закон сохранения $\omega = kv$ соответствует излучению волны частицами плазмы и дает малые поправки к линейному инкременту (2.55) (подробнее см. § 2.8), тогда как закон сохранения

$$\omega_1 \pm \omega_2 = (k_1 \pm k_2) v \quad (2.85)$$

описывает процесс излучения двух волн или процесс рассеяния турбулентных пульсаций на частицах плазмы.

Действительно, пусть частица плазмы имела до взаимодействия энергию ε_p ; после излучения двух волн или излучения одной и поглощения другой ее энергия стала $\varepsilon_{p-(k_1 \pm k_2)} \approx \varepsilon_p - (k_1 \pm k_2) v \left[\frac{\partial \varepsilon_p}{\partial p} = \varepsilon_p - (k_1 \pm k_2) v \left(v = \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial p} \right) \right]$ — скорость частицы).

С другой стороны, разность энергий ε_p и $\varepsilon_{p-(k_1 \pm k_2)}$ из закона сохранения энергии равна $-(\omega_1 \pm \omega_2)$, что и приводит к (2.85).

В силу сказанного ограничимся рассмотрением лишь процессов (2.85). Для третьего и четвертого членов* v_{k, k_1} получим, что вклад Σ [см. (2.72)] составит

$$v_{k, k_1}^c = \frac{4e^4}{k_1^2 k^2 \frac{\partial \varepsilon_k^l}{\partial \omega} \Big|_{\omega = \omega_k^l} \frac{\partial \varepsilon_{k_1}^l}{\partial \omega_1} \Big|_{\omega_1 = \omega_{k_1}^l}} \times$$

$$\times \int \frac{1}{(\omega_k^l - kv)} \left(k_1 \frac{\partial}{\partial p} \right) \delta(\omega_k^l - \omega_{k_1}^l - (k - k_1) v) \left\{ \left(k \frac{\partial}{\partial p} \right) \frac{1}{\omega_{k_1}^l - k_1 v} \left(k_1 \frac{\partial}{\partial p} \right) - \right.$$

$$\left. - \left(k_1 \frac{\partial}{\partial p} \right) \frac{1}{\omega_k^l - kv} \left(k \frac{\partial}{\partial p} \right) \right\} \frac{f^R dp}{(2\pi)^3}. \quad (2.86)$$

Нетрудно видеть далее, что член $\left(\frac{1}{\omega_{k_1}^l - k_1 v} - \frac{1}{\omega_k^l - kv} \right) \times$

* Первый и второй члены описывают процессы излучения двух волн и рассматриваются аналогично.

$\times \left(\mathbf{k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) \left(\mathbf{k}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right)$ в фигурных скобках (2.86) обращается в нуль из-за δ -функции в (2.86), и результат приобретает вид

$$v_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^c = \frac{4e^1 (\mathbf{k}\mathbf{k}_1)^2}{m_e^2 k^2 k_1^2 \left| \frac{\partial \varepsilon_{\mathbf{k}}^l}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \varepsilon_{\mathbf{k}_1}^l}{\partial \omega_1} \right|_{\substack{\omega = \omega_{\mathbf{k}}^l \\ \omega_1 = \omega_{\mathbf{k}_1}^l}}} \times \\ \times \int \frac{d\mathbf{p} \delta(\omega_{\mathbf{k}}^l - \omega_{\mathbf{k}_1}^l - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \nu)}{(2\pi)^3 (\omega_{\mathbf{k}}^l - \mathbf{k}\nu)^4} \left(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \frac{\partial f^R}{\partial \mathbf{p}} \right). \quad (2.87)$$

Этот результат имеет простую интерпретацию, а именно (2.87) описывает томпсоновское индуцированное рассеяние волны $\omega_{\mathbf{k}}^l$ на частицах плазмы. При этом волна $\omega_{\mathbf{k}}^l$ заставляет колебаться частицы плазмы, а колеблющиеся частицы излучают волну $\omega_{\mathbf{k}_1}^l$. Действительно, пусть $\omega_p^c(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1)$ — вероятность рассеяния. Тогда убыль числа плазмонов частоты $\omega_{\mathbf{k}}^l$ из-за индуцированного поглощения волны $\omega_{\mathbf{k}}^l$ и излучения волны $\omega_{\mathbf{k}_1}^l$ будет

$$- \int \omega_p^c(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1) N_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}_1} \frac{d\mathbf{k}_1 d\mathbf{p}}{(2\pi)^6} f_p^R.$$

Обратный же процесс пропорционален числу частиц, имеющих конечный импульс $\mathbf{p} + \mathbf{k} - \mathbf{k}_1$, т. е.

$$\frac{dN_{\mathbf{k}}}{dt} = \int \omega_p^c(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1) (N_{\mathbf{k}_1} N_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{p}+\mathbf{k}-\mathbf{k}_1}^R - N_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}_1} f_{\mathbf{p}}^R) d\mathbf{p} d\mathbf{k}_1 (2\pi)^{-6} \simeq \\ \simeq N_{\mathbf{k}} \int N_{\mathbf{k}_1} \omega_p^c(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1) \frac{d\mathbf{p} d\mathbf{k}_1}{(2\pi)^6} \left((\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \frac{\partial f_p^R}{\partial \mathbf{p}} \right). \quad (2.88)$$

Из сравнения с (2.87) может быть определена вероятность процесса

$$\omega_p^c(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1) = \frac{4 \left| \Lambda_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^c \right|^2 \delta(\omega_{\mathbf{k}}^l - \omega_{\mathbf{k}_1}^l - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \nu) (2\pi)^9}{\frac{\partial \varepsilon_{\mathbf{k}}^l}{\partial \omega} \Big|_{\omega = \omega_{\mathbf{k}}^l} \cdot \frac{\partial \varepsilon_{\mathbf{k}_1}^l}{\partial \omega_1} \Big|_{\omega_1 = \omega_{\mathbf{k}_1}^l} (\omega_{\mathbf{k}}^l)^2}, \quad (2.89)$$

где

$$\Lambda_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^c = \frac{1}{m_e} \cdot \frac{(\mathbf{k}\mathbf{k}_1)}{kk_1} \cdot \frac{e^2 (2\pi)^{-3} \omega_{\mathbf{k}}^l}{(\omega_{\mathbf{k}}^l - \mathbf{k}\nu)^2}. \quad (2.90)$$

То же выражение для вероятности может быть получено непосредственным подсчетом интенсивности излучения волн с частотой $\omega_{k_1}^l$, возникающего из-за колебания заряда плазмы под действием волн частоты ω_k^l [59—62].

Существенно, что комптоновское рассеяние не является единственным механизмом рассеяния турбулентных пульсаций на частицах плазмы. Другой тип рассеяния был назван нелинейным [59] и интерпретируется как переходное излучение* волны ω_k^l на неоднородностях плазмы, созданных волной $\omega_{k_1}^l$. Эти эффекты описываются вторым членом $\Sigma^{\text{эфФ}}$ в (2.72). Третий и четвертый члены** (2.76) дают

$$\begin{aligned}
 v_{k, k_1}^N = & \frac{16}{\omega_k^l \left. \frac{\partial \varepsilon_k^l}{\partial \omega} \right|_{\omega = \omega_k^l} \left. \frac{\partial \varepsilon_{k_1}^l}{\partial \omega_1} \right|_{\omega_1 = \omega_{k_1}^l}} \times \\
 & \times \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{(\omega - \omega_1)(\varepsilon_{k-k_1}^l)} (S_{k-k_1, k, -k_1} + S_{k-k_1, -k_1, k}) \times \right. \\
 & \left. \times (S_{k, k-k_1, k_1} + S_{k, k_1, k-k_1}) \right\} \Bigg|_{\substack{\omega = \omega_k^l \\ \omega_1 = \omega_{k_1}^l}}. \quad (2.91)
 \end{aligned}$$

В v_{k, k_1}^N содержится член, пропорциональный $\operatorname{Im}(\varepsilon_{k-k_1}^l)^{-1}$. Как было показано, именно такой член приводит к индуцированным распадам, если $\varepsilon_{k-k_1}^l$ близко к нулю, т. е. частота волны $k - k_1$ близка к одной из собственных частот турбулентных пульсаций.

Будем считать, что волна $k - k_1$ далека от собственных частот, т. е. лежит в области непрозрачности плазмы. Такая ситуация имеет место в случае, когда разности частот взаимодействующих волн малы (что всегда верно для ленгмюровских волн)

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Im} \frac{1}{\varepsilon_{k-k_1}^l} &= - \frac{\operatorname{Im} \varepsilon_{k-k_1}^l}{|\varepsilon_{k-k_1}^l|^2} = \\
 &= \sum_{\alpha} \frac{4\pi^2 e^2}{|k - k_1|^2 |\varepsilon_{k-k_1}^l|^2} \int \left((k - k_1) \frac{\partial f_{\alpha}^R}{\partial p_{\alpha}} \right) \times \\
 & \times \delta(\omega_k^l - \omega_{k_1}^l - (k - k_1) v_{\alpha}^{\parallel}) \frac{dp_{\alpha}}{(2\pi)^3}. \quad (2.92)
 \end{aligned}$$

Здесь использовано уравнение (2.41).

* О переходном излучении см. работы [63—65].

** Первый и второй члены опять-таки описывают процессы излучения двух волн.

Как видно из (2.92), рассматриваемый член (2.90) так же, как и v_{k, k_1}^c , пропорционален δ -функции, описывающей рассеяния пульсаций на частицах плазмы. Ввиду того, что $\omega - \omega_1$ лежит в области непрозрачности, ток является диссипативным. Непосредственно из определения (2.65) и (2.66), учитывая, что мнимый вклад дают лишь резонансы, связанные с рассеянием, получаем

$$S_{k-k_1, k, -k_1} = \frac{\omega - \omega_1}{\omega} S_{k, k-k_1, k_1}, \quad (2.93)$$

где S_{k, k_1, k_2} — симметризованный по последним индексам нелинейный ток

$$S_{k, k_1, k_2} = S_{k, k_2, k_1}. \quad (2.94)$$

Таким образом, (2.91) можно записать в виде

$$\begin{aligned} v_{k, k_1}^N & \left(\frac{64}{(\omega_k^l)^2 \frac{\partial \varepsilon_k^l}{\partial \omega} \Big|_{\omega = \omega_k^l} \frac{\partial \varepsilon_{k_1}^l}{\partial \omega_1} \Big|_{\omega_1 = \omega_{k_1}^l}} \right)^{-1} = \\ & = \text{Im} \frac{1}{\varepsilon_{k-k_1}^l} (S_{k, k-k_1, k_1})^2 = - \frac{\text{Im} \varepsilon_{k-k_1}^l}{|\varepsilon_{k-k_1}^l|^2} |S_{k, k-k_1, k_1}|^2 + \\ & + 2 (\text{Im} S_{k, k-k_1, k_1}) \text{Re} \frac{1}{\varepsilon_{k-k_1}^l} S_{k, k-k_1, k_1}. \end{aligned} \quad (2.95)$$

В (2.95) использованы тождественные преобразования, позволяющие результат представить в виде суммы двух членов. Первый из них описывает нелинейное рассеяние, а второй — интерференцию нелинейного и комптоновского рассеяний.

В первом утверждении легко убедиться, используя в первом члене (2.95) соотношение (2.92). Получим дополнительный член в вероятности рассеяния на электронах

$$w_p^N(k, k_1) = \frac{4 |\Lambda_{k, k_1}^N|^2 \delta(\omega_k^l - \omega_{k_1}^l - (k - k_1)v) (2\pi)^9}{\left| \frac{\partial \varepsilon_k^l}{\partial \omega} \Big|_{\omega = \omega_k^l} \frac{\partial \varepsilon_{k_1}^l}{\partial \omega_1} \Big|_{\omega_1 = \omega_{k_1}^l} (\omega_k^l)^2 \right.}, \quad (2.96)$$

где в данном случае

$$\Lambda_{k, k_1}^N = \sum_{\alpha} \frac{4\pi e^2}{k k_1} \int \frac{d\mathbf{p}_{\alpha}}{(2\pi)^3} \frac{e^2 (2\pi)^{-3} \omega_k^l}{\omega_k^l - k\mathbf{v}_{\alpha} + i\delta} \times \\ \times \left\{ \left(\mathbf{k}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_{\alpha}} \right) \frac{1}{\omega_k^l - \omega_{k_1}^l - (k - k_1) v_{\alpha} + i\delta} \left((k - k_1) \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_{\alpha}} \right) + \right. \\ \left. + \left((k - k_1) \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_{\alpha}} \right) \frac{1}{\omega_{k_1}^l - k_1 v_{\alpha}} \left(\mathbf{k}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_{\alpha}} \right) \right\} f_{\alpha}^R \frac{1}{|k - k_1|^2 \varepsilon_{k - k_1}^l}. \quad (2.97)$$

Отметим, что в вероятность (2.96) входит исключительно нелинейный ток. Указанное нелинейное рассеяние может быть найдено как интенсивность излучения нелинейного тока

$$j = 2 \int S_{k, k_1, k_2} E_{k_1}^T E_{k_2}^l dk_1 dk_2 \delta(k - k_1 - k_2), \quad (2.98)$$

созданного турбулентным полем падающей волны и продольным полем равномерно движущегося заряда [62]*,

$$E_k^l = - \frac{4\pi i}{k \varepsilon_k^l (2\pi)^3} \delta(\omega - k\mathbf{v}). \quad (2.99)$$

В том, что второй член (2.95) описывает интерференцию нелинейного и комптоновского рассеяний, проще всего убедиться, используя

$$\text{Im } S_{k, k - k_1, k_1} = - \frac{e^3 \omega \pi (k k_1)!}{2m k k_1 |k - k_1|} \times \\ \times \int \frac{\delta(\omega - \omega_1 - (k - k_1) v)}{(\omega - k\mathbf{v})^2} \left((k - k_1) \frac{\partial f^R}{\partial \mathbf{p}} \right) \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}. \quad (2.100)$$

Полная вероятность рассеяния может быть записана в виде (2.96), где вместо Λ_{k, k_1}^N входит

$$\Lambda_{k, k_1} = \Lambda_{k, k_1}^c + \Lambda_{k, k_1}^N. \quad (2.101)$$

Таким образом, Λ_{k, k_1} играет роль амплитуды рассеяния. Указанная интерпретация и обнаружение интерференционных эффектов, которые могут сильно снизить полное сечение рассеяния, были сделаны в работах [66, 67]. Как было отмечено в работе [66], при рассеянии высокочастотных пульсаций на ионах возможно

* Поле равномерно движущегося заряда легко найти из уравнения

$$ik \varepsilon_k^l E_k^l = 4\pi \rho_k = \frac{4\pi e}{(2\pi)^3} \delta(\omega - k\mathbf{v}).$$

$|\Lambda_{k,k_1}^c| \ll |\Lambda_{k,k_1}^N|$ из-за большой массы ионов. Таким образом, сечение рассеяния на ионах может в некоторых случаях намного превосходить сечение рассеяния на электронах.

Наглядная интерпретация нелинейного рассеяния заключается в том, что в плазме вокруг рассеивающего заряда создается экранирующее облако зарядов другого знака. Рассеивающий электрон окружен облаком положительного заряда. Оно может возникать из-за недостатка электронов, так как под действием волн высокой частоты в основном смещаются электроны. Экранирующий заряд имеет знак, противоположный знаку рассеивающего заряда, и волны, рассеянные от экранирующего заряда, уменьшают полное рассеяние. Более того, колебания экранирующего облака зарядов и рассеивающего заряда очевидно синфазны. Это объясняет интерференционные эффекты в рассеянии.

В рассеянии высокочастотных волн на ионах могут участвовать лишь электроны экранирующего облака. Поэтому рассеяние на ионах оказывается немалым и интерференционные эффекты отсутствуют.

Приведенная интерпретация показывает, что в процессах, возникающих в турбулентной плазме, участвуют не отдельные заряды, а комплексы зарядов или, как говорят, коллективные возбуждения плазмы. Так, вместо электронов плазмы выступают электроны, окруженные экранирующим облаком, и вместо ионов — ионы, окруженные электронным облаком. Мы будем по-прежнему для краткости называть такие возбуждения электронами и ионами турбулентной плазмы, имея в виду условность этого названия. «Настоящие» электроны и ионы участвуют как в турбулентных пульсациях, так и в усредненных движениях.

Проведенный анализ позволяет понять физический смысл разделения функции распределения на регулярную и турбулентную части. Регулярная часть имеет вполне отчетливую интерпретацию, а именно: f^R характеризует распределение коллективных электронных и ионных возбуждений, или, другими словами, распределения зарядов, «обросших шубой» других зарядов. Что касается турбулентной части f^T , то она характеризует турбулентные коллективные степени свободы — плазмоны. Возможность введения таких понятий, как коллективные возбуждения, в последнее время была подробно обоснована для систем, близких к термодинамическому равновесию или находящихся в полном термодинамическом равновесии [50, 51]. Новое утверждение, содержащееся в приведенной выше интерпретации, состоит в том, что представление о коллективных возбуждениях можно ввести для систем, находящихся далеко от состояния термодинамического равновесия. Физические представления о возможности описания коллективных взаимодействий турбулентных пульсаций на языке коллективных возбуждений использовались впервые в работе [68] и развивались в [60—62, 69, 70]. Ниже будет подробно излагаться общая теория турбулентности, основанная на представлении о коллективных возбуж-

дениях, и поэтому здесь нет необходимости обобщать результаты, относящиеся к частному случаю взаимодействия продольных турбулентных пульсаций. Отметим, здесь, что сходство с коллективными возбуждениями систем, близких к равновесию, имеется лишь в уравнениях баланса, полученных в § 2.3. Существенное физическое различие понятий о коллективных возбуждениях в теории турбулентности плазмы и в системах, близких к статистическому равновесию, состоит в характере неоднозначности связи частот и волновых чисел в турбулентной плазме. Корреляционные эффекты описывают эту неоднозначность.

§ 2.5. КОРРЕЛЯЦИЯ ТУРБУЛЕНТНЫХ ПУЛЬСАЦИЙ В ПЛАЗМЕ

Полученные в § 2.4 уравнения носят характер уравнений баланса или кинетических уравнений, описывающих возбуждение и взаимодействие плазмонов. Они пригодны также для нестационарной турбулентности. Для составления уравнений баланса было удобно оставлять такие комбинации величин, в которые входила мнимая часть ϵ'_k [см. выражение (2.62)], характеризующая процессы изменения числа плазмонов.

Эффекты корреляций турбулентных пульсаций описываются зависимостью $I_{k,\omega}$ от ω . В линейном приближении корреляции во времени (зависимость от ω) однозначно связаны с корреляциями в пространстве (зависимость от k), т. е. $I_{k,\omega} = I_k \delta(\omega - \omega_k)$. Подчеркнем, что и в том и в другом случае речь идет о зависимости среднего значения полей $\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}_1, t_1) \mathbf{E}(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle$ от $t_2 - t_1$, $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. Зависимость же от $(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$ и $(t_1 + t_2)/2$ учитывается в виде медленной зависимости от средней координаты и среднего времени $\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_g \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$.

В уравнениях баланса оказалось возможным пренебречь корреляциями, т. е. положить $I_{k,\omega} \approx I_k \delta(\omega - \omega_k)$. Такая возможность связана с тем, что, с одной стороны, уравнение содержит лишь малые члены (порядка γ_k/ω_k), а с другой — взят интеграл $\int I_{k,\omega} d\omega$ по всем частотам [см. уравнения (2.64)], который не чувствителен к детальной форме распределения пульсаций по ω . В этих условиях более точный учет корреляций даст малые поправки за пределами точности записанных уравнений (в которых отброшены нелинейные токи выше третьего порядка по полю).

Таким образом, можно сказать, что полученные с той же точностью уравнения могут быть записаны как уравнения для $\int I_{k,\omega} d\omega = I_k$ — величин, определяющих спектр турбулентных пульсаций, т. е. спектр турбулентности можно искать, не вникая в характер временных корреляций пульсации.

Корреляции полей измеряются в большинстве экспериментов по плазменной турбулентности и представляют собой одну из важных ее характеристик. В турбулентной плазме теряется

строго однозначное соответствие между частотой пульсаций и их волновым числом, т. е. каждому k соответствует спектр частот, некая линия конечной ширины около $\omega = \omega_k$. В случае слабой турбулентности ширина этой линии $\Delta\omega$ всегда меньше ω_k , а характерное время корреляции имеет порядок величины $\Delta\tau / \sim 1/\Delta\omega$ (по общим свойствам преобразований Фурье).

Для того чтобы учесть корреляции, составим уравнение для I_k , считая турбулентность стационарной ($\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_g \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = 0$). Не-стационарность корреляций легко учитывать, используя результаты § 2.4. Для большей общности не будем конкретизировать зависимость коэффициентов нелинейных турбулентных токов от регулярных составляющих скоростей частиц, их распределения и т. п. Это позволяет получить общие уравнения, в которых нелинейные токи могут быть представлены как решения любых конкретных динамических уравнений (например, двухжидкостных гидродинамических уравнений или кинетических уравнений, учитывающих парные соударения частиц), и тем самым выявить влияние таких факторов, как парные соударения и другие, на нелинейные взаимодействия и корреляции турбулентных пульсаций.

В условиях стационарной турбулентности

$$\langle E_{k,i}^T E_{k',j}^{T*} \rangle = I_{k,ij} \delta(k - k'). \quad (2.102)$$

Рассмотрим продольные турбулентные пульсации, когда

$$I_{k,ij} = I_k \frac{k_i k_j}{k^2}.$$

Общее выражение для нелинейного турбулентного тока второго порядка по турбулентному полю запишем в виде

$$\begin{aligned} j_k^{T(2)} = & \int S_{k, k_1, k_2} (E_{k_1}^T E_{k_2}^T - \langle E_{k_1}^T E_{k_2}^T \rangle) \times \\ & \times dk_1 dk_2 \delta(k - k_1 - k_2). \end{aligned} \quad (2.103)$$

Здесь $j_k = (\mathbf{k}j_k)/k$; $E_k = (\mathbf{k}E_k)/k$. В правой части (2.103) член $\langle E_{k_1}^T E_{k_2}^T \rangle$ необходим для выполнения $\langle j_k^{T(2)} \rangle = 0$.

Величину S_{k, k_1, k_2} можно всегда симметризовать по переменным k_1, k_2

$$S_{k, k_1, k_2} = S_{k, k_2, k_1}. \quad (2.104)$$

Кроме того, S_{k, k_1, k_2} удовлетворяет очевидным соотношениям, следующим из действительности тока j_k и полей,

$$S_{k, k_1, k_2}^* = -S_{-k, -k_1, -k_2}. \quad (2.105)$$

Общее выражение для тока следующего приближения по турбулентному полю, удовлетворяющее $\langle j_k^{T(3)} \rangle = 0$, имеет вид

$$j_k^{T(3)} = \int \{ \sum_{k, k_1, k_2, k_3} (E_{k_1}^T E_{k_2}^T E_{k_3}^T - \langle E_{k_1}^T E_{k_2}^T E_{k_3}^T \rangle) + G_{k, k_1, k_2, k_3}^{(1)} E_{k_1}^T \langle E_{k_2}^T E_{k_3}^T \rangle + G_{k, k_1, k_2, k_3}^{(2)} E_{k_2}^T \langle E_{k_1}^T E_{k_3}^T \rangle + G_{k, k_1, k_2, k_3}^{(3)} E_{k_3}^T \langle E_{k_1}^T E_{k_2}^T \rangle \} \times dk_1 dk_2 dk_3 \delta(k - k_1 - k_2 - k_3). \quad (2.106)$$

Аналогично (2.104) можно считать выполненным условие

$$\begin{aligned} \sum_{k, k_1, k_2, k_3} &= \sum_{k, k_2, k_1, k_3} = \sum_{k, k_2, k_3, k_1} = \\ &= \sum_{k, k_1, k_3, k_2} = \sum_{k, k_3, k_1, k_2} = \sum_{k, k_3, k_2, k_1}. \end{aligned} \quad (2.107)$$

Заменой переменных во втором члене (2.106) легко привести его к виду

$$-\int \sum'_{k, k_1, k_2, k_3} E_{k_1}^T \langle E_{k_2}^T E_{k_3}^T \rangle \cdot dk_1 dk_2 dk_3 \delta(k - k_1 - k_2 - k_3), \quad (2.108)$$

где

$$\sum'_{k, k_1, k_2, k_3} = -G_{k, k_1, k_2, k_3}^{(1)} - G_{k, k_2, k_1, k_3}^{(2)} - G_{k, k_3, k_2, k_1}^{(3)}. \quad (2.109)$$

Из сравнения (2.106) и (2.67) видно, что для бесстолкновительного кинетического уравнения $\sum' = \sum$. Используя уравнение Максвелла для турбулентного поля

$$-\omega^2 \varepsilon_k^l E_k^T = 4\pi i \omega (j_k^{T(2)} + j_k^{T(3)}), \quad (2.110)$$

умножая его на $E_{k'}^T$ и интегрируя по k' , получаем

$$\begin{aligned} \omega^2 \varepsilon_k^l I_k &= 4\pi i \omega \int dk' S_{k, k_1, k_2} \langle E_{k'}^T, \\ E_{k_1}^T, E_{k_2}^T \rangle &dk_1 dk_2 \delta(k - k_1 - k_2) + 4\pi i \omega \times \\ &\times \int dk' dk_1 dk_2 dk_3 \delta(k - k_1 - k_2 - k_3) \times \\ &\times (\sum_{k, k_1, k_2, k_3} \langle E_{k'}^T, E_{k_1}^T E_{k_2}^T E_{k_3}^T \rangle - \\ &- \langle E_{k'}^T, E_{k_1}^T \rangle \langle E_{k_2}^T, E_{k_3}^T \rangle \sum'_{k_1, k_2, k_3}). \end{aligned} \quad (2.111)$$

Средние от четырех полей можно приближенно разбить на три парных произведения, тогда как в средних от трех полей каждое из них следует уточнить, используя приближенное соотношение

$$E_k^T = -\frac{4\pi i}{\omega \varepsilon_k^l} \int S_{k, k_1, k_2} (E_{k_1}^T E_{k_2}^T - \langle E_{k_1}^T E_{k_2}^T \rangle) \delta(k - k_1 - k_2). \quad (2.112)$$

Это приводит к уравнению $\langle E_k^T E_{k'}^T \rangle = -I_k \delta(k + k')$,

$$\varepsilon_k^l I_k = + \frac{8\pi i}{\omega} \left\{ I_k \int \sum_{k, k_1}^{\text{эфф}} I_{k_1} dk_1 - \right.$$

$$\left. - 4\pi i \int I_{k_1} I_{k_2} |S_{k, k_1, k_2}|^2 \frac{dk_1 dk_2 \delta(k - k_1 - k_2)}{(\omega_1 + \omega_2) \varepsilon_{-k_1 - k_2}^l} \right\}. \quad (2.113)$$

Здесь учтено, что согласно (2.67)

$$\sum_{k, k_1, k_2, k_3} = \sum'_{k, k_1, k_2, k_3}; \quad (2.114)$$

$$\sum_{k, k_1}^{\text{эфф}} = \frac{1}{2} \left(\sum_{k, k_1, k, -k_1}^{\text{эфф}} + \sum_{k, k_1, -k_1, k}^{\text{эфф}} \right) -$$

$$- \frac{8\pi i S_{k, k-k_1, k_1} S_{k-k_1, k, -k_1}}{(\omega - \omega_1) \varepsilon_{k-k_1}^l}; \quad (2.115)$$

$$S_{k-k_1, k, -k_1} = \frac{1}{2} (S_{k-k_1, k, -k_1} + S_{k-k_1, -k_1, k}). \quad (2.116)$$

Уравнение (2.113) является более общим, чем (2.75)*, и интегральным. Конкретные выражения для корреляционных функций турбулентных пульсаций могут быть найдены из (2.113), если известны S и Σ для конкретных типов коллективных движений.

Следует заметить, что уравнение (2.113) удобно для получения уравнения баланса и исследования корреляционных эффектов на хвостах корреляционных кривых, т. е. при ω , существенно отличных от значений ω_k^l линейной теории. Вблизи же резонанса, т. е. при $\omega - \omega_k^l$, близких к нулю, его следует уточнить. Действительно, левая часть (2.114) вблизи резонанса в силу $\text{Re} \varepsilon^l(\omega_k^l, \mathbf{k}) = 0$ имеет вид

$$\omega \frac{\partial \varepsilon_k^l}{\partial \omega} \Big|_{\omega = \omega_k^l} ((\omega - \omega_k^l) I_k + i \gamma_k^l I_k).$$

Таким образом, $\omega - \omega_k^l$ является величиной, пропорциональной I [согласно правой части (2.113)]. Величина I (точнее, безразмерная величина W/nT) — малый параметр, и поэтому корреляционное уширение много меньше ω_k^l , что соответствует приближению слабой турбулентности. В последний член правой части (2.113), одна-

* Для получения правой части (2.75) из (2.113) необходимо взять мнимую часть от (2.114), разделить на $\omega \frac{\partial \varepsilon_k^l}{\partial \omega}$ и проинтегрировать результат по ω .

Воспользовавшись $I_k = \frac{1}{\frac{2\pi^2 \partial \varepsilon_k^l}{\partial \omega} \Big|_{\omega = \omega_k^l}} \cdot (N_k \delta(\omega - \omega_k^l) + N_{-k} \delta(\omega + \omega_k^l))$,

легко убедиться в тождественности получаемого таким образом уравнения с (2.75).

ко, входит $1/\varepsilon'_{-k_1-k_2}$, равная $1/\varepsilon'_k$ в силу $k_1 + k_2 = k$. Вблизи $\omega \approx \omega'_k$ $1/\varepsilon'_{-k} \sim 1/\omega - \omega'_k \sim W^{-1}$. Это означает лишь, что последний член (2.113) вычислен недостаточно точно.

Вернемся к уравнениям (2.111), (2.112). Используем следующие физические аргументы*. Пусть характерная средняя ширина частот, характеризующих корреляции, есть $\Delta\omega^{**}$. Используем малый параметр $\Delta\omega/\omega'_k \ll 1$. Выделим поля низкой частоты ω_L , имеющие частоты порядка $\Delta\omega$, и поля высокой частоты ω_H порядка частот исследуемых турбулентных пульсаций. Будем считать высокочастотные поля распадными, т. е. три высокочастотных поля удовлетворяют условиям $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$, $\omega = \omega_1 + \omega_2$. Поскольку взаимодействие, пропорциональное $\delta(k - k_1 - k_2)$, содержит положительные и отрицательные частоты, то оно может соответствовать как разности, так и сумме частот ω_1 и ω_2 . Низкочастотные поля могут возникать лишь в условиях, когда частоты высокочастотных полей противоположны по знаку. Итак, в первом приближении для низкочастотных полей можно записать

$$E_k^{TL} = -\frac{4\pi i}{\omega \varepsilon'_k} \int S_{k, k_1, k_2} (E_{k_1}^{TH} E_{k_2}^{TH} - \langle E_{k_1}^{TH} E_{k_2}^{TH} \rangle) dk_1 dk_2 \delta(k - k_1 - k_2). \quad (2.117)$$

Задачей теории является составление уравнения, содержащего лишь поля E_k^{TH} (точнее, средние от их квадратичных комбинаций). Поэтому поля E_k^{TL} должны быть исключены.

Среднее значение $\langle E_{k'}^T E_{k_1}^T E_{k_2}^T \rangle$, входящее в (2.111), можно записать в следующем виде, учитывая, что поле $E_{k'}^T$ может быть только высокочастотным:†

$$\langle E_{k'}^T E_{k_1}^T E_{k_2}^T \rangle = \langle E_{k'}^{TH} E_{k_1}^{TH} E_{k_2}^{TH} \rangle + \langle E_{k'}^{TH} E_{k_1}^{TL} E_{k_2}^{TH} \rangle + \langle E_{k'}^{TH} E_{k_1}^{TH} E_{k_2}^{TL} \rangle. \quad (2.118)$$

Последние два члена (2.118), преобразованные с помощью (2.117), дают член, зависящий от S в $\Sigma^{\text{эфф}}$ [см. формулу (2.115)]. Первый член (2.118) дает как раз особенность $1/\varepsilon'_{-k}$, о которой речь шла выше. Запишем уравнение для $E_{k'}^{TH}$ более точно:

$$\varepsilon_{k'}^l E_{k'}^{TH} = -\frac{4\pi i}{\omega'} \int S_{k', k'_1, k'_2} (E_{k'_1}^{TH} E_{k'_2}^{TH} + E_{k'_1}^{TH} E_{k'_2}^{TL} + E_{k'_1}^{TL} E_{k'_2}^{TH} - \langle E_{k'_1}^{TH} E_{k'_2}^{TH} + E_{k'_1}^{TH} E_{k'_2}^{TL} + E_{k'_1}^{TL} E_{k'_2}^{TH} \rangle) \delta(k' - k'_1 - k'_2) dk'_1 dk'_2 -$$

* Обоснование можно получить также при помощи техники графиков [54].

** Величина $\Delta\omega$ может быть характерной полушириной корреляционной линии, т. е. указывать тот сдвиг частот, для которых интенсивность убывает в два раза.

$$\begin{aligned}
& -\frac{4\pi i}{\omega'} \int dk'_1 dk'_2 dk'_3 \sum_{k', k'_1, k'_2, k'_3} (E_{k'_1}^{TH} E_{k'_2}^{TH} E_{k'_3}^{TH} - \\
& - E_{k'_1}^{TH} \langle E_{k'_2}^{TH} E_{k'_3}^{TH} \rangle - \langle E_{k'_1}^{TH} E_{k'_2}^{TH} E_{k'_3}^{TH} \rangle) \times \\
& \times \delta(k' - k'_1 - k'_2 - k'_3). \tag{2.119}
\end{aligned}$$

В последнем члене пренебрежено низкочастотными полями, которые согласно (2.117) дают более высокие степени высокочастотных полей. Умножив (2.119) на $E_{k'_1}^{TH} E_{k'_2}^{TH}$ и вычислив среднее значение $\langle E_{k'_1}^{TH} E_{k'_2}^{TH} E_{k'_3}^{TH} \rangle$, получаем

$$\begin{aligned}
& \varepsilon_{k'}^l \langle E_{k'}^{TH} E_{k'_1}^{TH} E_{k'_2}^{TH} \rangle = -\frac{4\pi i}{\omega'} \int S_{k', k'_1, k'_2} dk'_1 dk'_2 \times \\
& \times \left(\langle E_{k'_1}^{TH} E_{k'_2}^{TH} E_{k'_1}^{TH} E_{k'_2}^{TH} \rangle - \langle E_{k'_1}^{TH} E_{k'_2}^{TH} \rangle \langle E_{k'_1}^{TH} E_{k'_2}^{TH} \rangle \right) \times \\
& \times \delta(k' - k'_1 - k'_2) - \frac{8\pi i}{\omega'} \int S_{k', k'_1, k'_2} dk'_1, dk'_2 \left(\langle E_{k'_1}^{TH} E_{k'_2}^{TH} E_{k'_1}^{TH} E_{k'_2}^{TH} \rangle - \right. \\
& \left. - \langle E_{k'_1}^{TH} E_{k'_2}^{TH} \rangle \langle E_{k'_1}^{TH} E_{k'_2}^{TH} \rangle \right) \delta(k' - k'_1 - k'_2) - \\
& - \frac{4\pi i}{\omega'} \int \sum_{k', k'_1, k'_2, k'_3} \left(\langle E_{k'_1}^{TH} E_{k'_2}^{TH} E_{k'_1}^{TH} E_{k'_2}^{TH} E_{k'_3}^{TH} \rangle - \right. \\
& \left. - \langle E_{k'_1}^{TH} E_{k'_2}^{TH} \rangle \langle E_{k'_1}^{TH} E_{k'_2}^{TH} E_{k'_3}^{TH} \rangle - \langle E_{k'_2}^{TH} E_{k'_3}^{TH} \rangle \langle E_{k'_1}^{TH} E_{k'_2}^{TH} E_{k'_1}^{TH} \rangle \right) \times \\
& \times \delta(k' - k'_1 - k'_2 - k'_3) dk'_1 dk'_2 dk'_3.
\end{aligned}$$

Здесь использовано свойство симметрии S_{k, k_1, k_2} . Разбивая средние от четырех полей на парные и подставляя (2.117), получаем

$$\begin{aligned}
& \varepsilon_{k'}^l \langle E_{k'}^{TH} E_{k'_1}^{TH} E_{k'_2}^{TH} \rangle = -\frac{8\pi i}{\omega} S_{k', -k_1, -k_2} \delta(k' + k_1 + k_2) I_{k_1} I_{k_2} - \\
& - \frac{4\pi i}{\omega'} \int \sum_{k', k'_1, k'_2, k'_3}^{\text{эфф}} \left(\langle E_{k'_1}^{TH} E_{k'_2}^{TH} E_{k'_1}^{TH} E_{k'_2}^{TH} E_{k'_3}^{TH} \rangle - \right. \\
& \left. - \langle E_{k'_1}^{TH} E_{k'_2}^{TH} \rangle \langle E_{k'_1}^{TH} E_{k'_2}^{TH} E_{k'_3}^{TH} \rangle - \langle E_{k'_1}^{TH} E_{k'_2}^{TH} E_{k'_1}^{TH} \rangle \times \right. \\
& \left. \times \langle E_{k'_2}^{TH} E_{k'_3}^{TH} \rangle \right) \delta(k' - k'_1 - k'_2 - k'_3) dk'_1 dk'_2 dk'_3. \tag{2.120}
\end{aligned}$$

Здесь $\sum_{k, k_1, k_2, k_3}^{\text{эфф}}$ соответствует симметризованному (2.72) (см. (2.115)).

Следует теперь приближенно разбить среднее от произведения полей на возможное произведение от средних трех и двух полей (остальные разбиения содержат $\langle E^T \rangle$, что, по определению,

равно нулю). Таким образом, для членов, содержащих $\sum^{\text{эфф}}$ в правой части (2.120), получим

$$\begin{aligned} & \frac{8\pi i}{\omega'} \langle E_{k'}^{TH} E_{k_1}^{TH} E_{k_2}^{TH} \rangle \int \sum_{k', k_1}^{\text{эфф}} I_{k_1'} dk_1' + \\ & + \frac{4\pi i}{\omega'} I_{k_1} \int \sum_{k', -k_1, k_2', k_3}^{\text{эфф}} \langle E_{k_2}^{TH} E_{k_2'}^{TH} E_{k_3}^{TH} \rangle \delta(k' + \\ & + k_1 - k_2' - k_3) dk_2' dk_3' + \frac{4\pi i}{\omega'} I_{k_2} \int \sum_{k', -k_2, k_2', k_3}^{\text{эфф}} \times \\ & \times \langle E_{k_1}^{TH} E_{k_2'}^{TH} E_{k_3}^{TH} \rangle \delta(k' + k_2 - k_2' - k_3) dk_2' dk_3'. \quad (2.121) \end{aligned}$$

Здесь $\sum_{kk_1}^{\text{эфф}}$ соответствует (2.115)

$$\sum_{k', k_1, k_2, k_3}^{\text{эфф}} = \sum_{k', k_1, k_2, k_3}^{\text{эфф}} + \sum_{k', k_2, k_1, k_3}^{\text{эфф}} + \sum_{k', k_3, k_2, k_1}^{\text{эфф}}.$$

Введем понятие нелинейной проницаемости ε_k^N , определив ее соотношением

$$\varepsilon_k^N = -\frac{8\pi i}{\omega} \int \sum_{kk_1}^{\text{эфф}} I_{k_1} dk_1. \quad (2.121')$$

Из (2.120) и (2.121) видно, что

$$\langle E_{k'}^{TH} E_{k_1}^{TH} E_{k_2}^{TH} \rangle = I_{k_1, k_2} \delta(k' + k_1 + k_2),$$

где I_{k_1, k_2} удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} & I_{k_1, k_2} + \frac{4\pi i}{(\omega_1 + \omega_2) (\varepsilon_{-k_1-k_2}^I + \varepsilon_{-k_1-k_2}^N)} \times \\ & \times \left\{ I_{k_1} \int dk_1' \sum_{-k_1-k_2, -k_1, k_1', -k_2-k_1'}^{\text{эфф}} I_{k_1', -k_2-k_1'} + \right. \\ & \left. + I_{k_2} \int dk_1' \sum_{-k_1-k_2, -k_2, k_1', -k_1-k_1'}^{\text{эфф}} I_{k_1', -k_1-k_1'} \right\} = \\ & = \frac{8\pi i S_{-k_1-k_2, -k_1, -k_2}}{(\omega_1 + \omega_2)} I_{k_1} I_{k_2} \frac{1}{(\varepsilon_{-k_1-k_2}^I + \varepsilon_{-k_1-k_2}^N)}. \quad (2.122) \end{aligned}$$

Полученное уравнение — интегральное. Однако его решение легко найти с необходимой для наших целей точностью. Действительно, интенсивность пульсаций является малым параметром ($\frac{W}{nT} \ll 1$). Необходимость учета членов $\sim I_k$ в знаменателях (2.122) связана с тем, что $\varepsilon_{-k_1-k_2}^I$ близко к нулю. Таким образом, если возникают знаменатели типа $1/\varepsilon_k^I$, где k'' не совпадает с $k_1 + k_2$, то такие члены не имеют особенностей, т. е. учиты-

вать поправки порядка I_h в них не требуется. Будем решать (2.122) методом итераций. Пренебрегая в первом приближении интегральным членом в левой части (2.122), имеем

$$I_{k_1, k_2} = \frac{8\pi i I_{k_1} I_{k_2} S_{-k_1, -k_2, -k_1, -k_2}}{(\omega_1 + \omega_2) (\varepsilon_{-k_1 - k_2}^l + \varepsilon_{-k_1 - k_2}^N)}. \quad (2.123)$$

Подставляя это выражение в интегральный член (2.122), убеждаемся в том, что возникают лишь знаменатели $1/\varepsilon_{k_2}$, причем по k_2 согласно (2.122) производится интегрирование*. Методом индукции легко убедиться, что этот результат имеет место для последующих приближений, т. е. решение имеет вид (2.123), в котором числитель — ряд по малому параметру I_h . В силу сказанного достаточно ограничиться первым членом этого ряда, т. е. использовать (2.123). Учитывая определение ε_k^N (2.121'), получаем вместо (2.113) [71]

$$\omega (\varepsilon_k^l + \varepsilon_k^N) I_h = 32\pi^2 \times \\ \times \int \frac{|S_{k, k_1, k_2}|^2 I_{k_1} I_{k_2} \delta(k - k_1 - k_2)}{\omega (\varepsilon_{-k}^l + \varepsilon_{-k}^N)} dk_1 dk_2 \equiv R_k^N. \quad (2.124)$$

Полученное уравнение и является искомым уравнением для корреляций пульсаций в плазме. Естественно, что уравнения баланса из него получаются такими же, как и из (2.113). Правда, здесь имеются особенности, о которых будет сказано несколько позже. Уравнение (2.124) представляет собой сложное интегральное уравнение для корреляционной функции, решения которого могут быть найдены лишь в конкретных случаях. Ограничимся здесь некоторыми общими замечаниями. Запишем, во-первых, (2.124) с учетом $\varepsilon_{-k} = \varepsilon_k^*$

$$I_h = \frac{32\pi^2}{\omega^2} \int \frac{|S_{k, k_1, k_2}|^2 I_{k_1} I_{k_2} \delta(k - k_1 - k_2) dk_1 dk_2}{|\varepsilon_k^l + \varepsilon_k^N|^2}. \quad (2.125)$$

Из этой формы уравнения видно, что I_h всегда положительно, как и должно быть по определению этой величины. Во-вторых, числитель (2.125) при $\omega \rightarrow \omega_k^l$ является слабо меняющейся функцией ω и k . То же относится и к ε_k^N . Поэтому можно считать, что корреляционная функция I_h имеет следующую структуру:

$$I_h = \frac{\alpha_k}{(\omega - \omega_k^N) + (\gamma_k^N)^2}, \quad (2.126)$$

* Аналогично уравнениям баланса величина $1/\varepsilon$, стоящая под знаком интеграла, не приводит к особенностям

где α_k , ω_k^N , γ_k^N — медленные функции ω и k при ω , близком к ω_k^l , причем, используя разложение вблизи резонанса, можно записать

$$\omega_k^N = \omega_k^l - \frac{\operatorname{Re} \varepsilon_k^N}{\left. \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial \omega} \right|_{\omega = \omega_k^l}}; \quad (2.127)$$

$$\gamma_k^N = - \frac{\operatorname{Im} (\varepsilon_k^l + \varepsilon_k^N)}{\left. \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial \omega} \right|_{\omega = \omega_k^l}}. \quad (2.127')$$

Таким образом, возникает нелинейный сдвиг частоты и уширение спектра. Корреляционная ширина характеризуется γ_k^N . При ее оценке надо иметь в виду, что уравнение баланса означает компенсацию положительных и отрицательных γ_k и величина γ_k^N может быть меньше входящих в нее отдельных членов (линейных и нелинейных).

Из вида (2.126) можно получить важный результат о влиянии корреляции на взаимодействие турбулентных пульсаций. Выражения (2.125) описывают распадный процесс, что видно из $\delta(k - k_1 - k_2)$ в (2.125). Существует широкий класс пульсаций, для которых распады запрещены слабо, а именно: малые изменения частот пульсаций могут разрешить такой процесс взаимодействия. Примером такого рода могут служить почти все пульсации с приближенно линейным законом дисперсии

$$\omega_k \approx \operatorname{const} k.$$

Действительно, если три волны распространяются в одном направлении, то из $k_1 + k_2 = k_3$ будет следовать и $\omega_{k_1} + \omega_{k_2} = \omega_{k_3}$. Таким колебаниями являются ионно-звуковые, альфвеновские, магнитогидродинамические пульсации и др. Однако в силу того, что их спектр не строго линейный, распады запрещены. Уширение спектра пульсаций из-за их корреляций может разрешить распад. Так как $\Delta\omega \sim \gamma_k^N$, то выполнение распадных условий в (2.126) требуется с точностью до величин $\sim \gamma_k^N$. Существенную роль могут играть не только эффекты корреляций, но и сдвиги частот, описываемые (2.127).

Для строго нераспадной турбулентности либо необходимо учитывать распады более высокого порядка по энергии турбулентности, либо корреляционные эффекты связаны с резкой зависимостью ε_N^l от $\omega - \omega_k^l$ (более подробно см. § 4.6).

Для ряда приложений очень важно выяснить возможность возникновения турбулентных пульсаций в области низких частот. Выше общее уравнение для корреляций (2.124) использовалось для анализа формы резонансной кривой в области, близкой к резонанс-

ной частоте $\frac{\Delta\omega}{\omega_k} \ll 1$. Но крылья резонансной кривой могут заходить и в области частот, много меньших ω_k^l . Такие турбулентные пульсации, очевидно, не будут иметь какой-либо однозначной связи частоты и волнового числа. Их относительная амплитуда мала. По грубой оценке

$$\sim \frac{(\gamma_k^N)^2}{(\omega - \omega_k^N)^2 + (\gamma_k^N)^2} \sim \frac{(\gamma_k^N)^2}{(\omega_k^N)^2} \text{ при } \omega \ll \omega_k^N.$$

Однако абсолютная величина может существенно превосходить уровень тепловых шумов, если интенсивность колебаний в области резонанса достаточно велика. В области резонанса левая часть (2.124) мала в силу $\epsilon_k^l \approx 0$, а правая — потому, что содержит лишнюю степень энергии турбулентности, являющейся малой величиной для слабой турбулентности. Вне резонанса значение ϵ_k^l достаточно велико и малость левой части (2.124) обеспечивается малостью I_k . Поэтому в области низких частот можно пренебречь ϵ_k^N и записать

$$I_k^L = 32\pi^2 \int dk_1 dk_2 \frac{I_{k_1} I_{k_2} \delta(k - k_1 - k_2) |S_{k, k_1, k_2}|^2}{(\omega_1 + \omega_2)^2 |\epsilon_{k_1 + k_2}^l|^2}. \quad (2.128)$$

Следует заметить, что форма кривой резонанса не обязательно непрерывна и могут существовать области, в которых пульсации отсутствуют. Такова, по-видимому, ситуация для строго нераспадного спектра, каким является спектр ленгмюровских пульсаций. Если рассматривать частоты ω , близкие или порядка ω_{pe} , то интеграл (2.128) близок к нулю. Для частот, равных разности частот ленгмюровских пульсаций, величина I_k^L становится достаточно большой, так как вклад вносят максимумы в спектрах I_{k_1} и I_{k_2} правой части (2.128). Такой эффект возбуждения пульсаций с частотами, равными или меньшими разности частот пульсаций, хорошо наблюдался экспериментально [72]. Это замечание следует иметь в виду при анализе проблем турбулентного нагрева. Основная масса частиц плазмы может быть нерезонансной с высокочастотными пульсациями в области центра корреляционной кривой (2.126), но будет резонансной с низкочастотными пульсациями (2.128). Таким образом, высокочастотные пульсации могут нагревать плазму в результате возбуждения пульсаций низкой частоты. Ниже будет показано, что окончательный итог такого взаимодействия в уравнениях баланса для частиц, которые и описывают нагрев, при учете всех членов одного и того же порядка малости есть нагрев из-за индуцированного рассеяния плазмонов на «частицах» плазмы (§ 2.7).

Наконец, для строго нераспадного спектра наличие низкочастотных пульсаций (2.128) может привести эффективно к тому,

что правая часть (2.125) не равна нулю. Действительно, если в (2.125) одну из I_k считать низкочастотной (2.128) и подставить в (2.125), получим правую часть, пропорциональную третьей степени энергии высокочастотных пульсаций. Очевидно, учет отброшенных нелинейных токов приводит к эффектам того же порядка. При этом оказывается, что сумма всех членов описывает четырехплазмонное взаимодействие, т. е. процессы рассеяния плазмонов на плазмонах (см. § 2.9 и 4.3).

§ 2.6. КВАЗИЛИНЕЙНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Перейдем к рассмотрению уравнения для регулярной части функции распределения f^R . Предположим, что $E^R = 0$; уравнение (2.9) приобретает вид

$$\frac{\partial f^R}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f^R}{\partial \mathbf{r}} = - \left\langle \mathbf{F}^T \frac{\partial f^T}{\partial \mathbf{p}} \right\rangle. \quad (2.129)$$

Разложим f^T по степеням турбулентного поля \mathbf{F}^T . В первом приближении из (2.17)

$$i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) f_k^{T(1)} = \int \left(\mathbf{F}_{k_1}^T \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) f_{k_2}^R dk_1 dk_2 \delta(k - k_1 - k_2)$$

и вместо (2.129) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^R}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f^R}{\partial \mathbf{r}} &= - \left\langle \mathbf{F}^T \frac{\partial f^{T(1)}}{\partial \mathbf{p}} \right\rangle = - \left\langle \int \mathbf{F}_{k'}^T \frac{\partial f_{k'}^{T(1)}}{\partial \mathbf{p}} e^{i(k+k')x} dk dk' \right\rangle = \\ &= i \int_{\delta \rightarrow +0} dk dk' \langle F_{k'}^T, i F_{k_1, j}^T \rangle \frac{\partial}{\partial p_i} \frac{1}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\delta)} \cdot \frac{\partial f_{k_2}^R}{\partial p_j} \times \\ &\quad \times e^{i(k+k')x} \delta(k - k_1 - k_2) dk_1 dk_2. \end{aligned} \quad (2.130)$$

Это уравнение, учитывающее в первом приближении влияние турбулентных пульсаций на регулярную часть функции распределения, называется квазилинейным [56]. Его можно упростить, если считать, что f^R меняется значительно медленнее, чем турбулентные поля, т. е. $f_{k_2}^R$ в правой части (2.130) можно приближенно заменить $f^R \delta(k_2)$. Интегрирование по k_1 дает

$$\frac{\partial f^R}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f^R}{\partial \mathbf{r}} = i \frac{\partial}{\partial p_i} \int \langle F_{k'}^{T*}, i F_{k, j}^T \rangle \frac{e^{i(k-k')x}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\delta} dk dk' \frac{\partial f^R}{\partial p_j}. \quad (2.131)$$

Уравнение (2.131) уже дифференциальное. Его правая часть описывает «столкновение» коллективных возбуждений плазмы («обросших» электронов и ионов) с турбулентными пульсациями.

Простоты ради рассмотрим продольные турбулентные пульсации, когда

$$\langle F_{k', i}^{T*} F_{k, j}^T \rangle = \frac{k'_i k_j}{kk'} e^2 \langle E_{k'}^{T*} E_k^T \rangle.$$

Рассмотрим квазилинейные уравнения в условиях, когда $\gamma_k^l \ll \omega_k^l$. В первом приближении, учитывая, что изменение амплитуд турбулентных полей является медленным, можно считать, что

$$\langle E_{k'}^{T*} E_k^T \rangle \simeq I_k \delta(k - k').$$

Уравнение (2.131) приобретает вид

$$\frac{\partial f^R}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f^R}{\partial \mathbf{r}} = i e^2 \frac{\partial}{\partial p_i} \int \frac{k_i k_j}{k^2} dk I_k \frac{1}{\omega - \mathbf{kv} + i \delta} \cdot \frac{\partial f^R}{\partial p_j}. \quad (2.132)$$

В силу действительности правой части необходимо учесть лишь мнимую часть знаменателя

$$\text{Im} \frac{1}{\omega - \mathbf{kv} + i \delta} = -i \pi \delta(\omega - \mathbf{kv}).$$

Получим

$$\frac{\partial f^R}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f^R}{\partial \mathbf{r}} = e^2 \pi \frac{\partial}{\partial p_i} \int \frac{dk}{k^2} k_i k_j I_k \delta(\omega - \mathbf{kv}) \frac{\partial f^R}{\partial p_j}. \quad (2.133)$$

Это уравнение имеет простую интерпретацию. Выразим I_k через число плазмонов, пренебрегая в первом приближении корреляционным уширением по частотам,

$$I_k = \frac{1}{2\pi^2 \left. \frac{\partial \epsilon_k^l}{\partial \omega} \right|_{\omega = \omega_k^l}} (N_k \delta(\omega - \omega_k^l) + N_{-k} \delta(\omega + \omega_k^l)). \quad (2.134)$$

Имеем

$$\frac{\partial f^R}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f^R}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial}{\partial p_i} D_{ij} \frac{\partial f^R}{\partial p_j}, \quad (2.135)$$

где

$$D_{ij} = \int k_i k_j \omega_p(\mathbf{k}) N_k \frac{dk}{(2\pi)^3},$$

а

$$\omega_p(\mathbf{k}) = \frac{e^2}{\pi k^2} \cdot \frac{(2\pi)^3}{\left. \frac{\partial \epsilon_k^l}{\partial \omega} \right|_{\omega = \omega_k^l}} \delta(\omega_k^l - \mathbf{kv}) \quad (2.136)$$

есть введенная выше вероятность излучения плазмона (2.61)*. Уравнение (2.134) можно получить как результат баланса индуцированного излучения и поглощения плазмонов частицами турбулентной плазмы. В результате излучения плазмона частица теряет импульс \mathbf{k} , переходя из состояния \mathbf{p} в состояние $\mathbf{p}-\mathbf{k}$. В силу детального баланса вероятность поглощения плазмона частицей в состоянии $\mathbf{p}-\mathbf{k}$ есть $\omega_{\mathbf{p}(\mathbf{k})}$, а частицей в состоянии \mathbf{p} есть $\omega_{\mathbf{p}+\mathbf{k}(\mathbf{k})}$. Из баланса поглощения и излучения имеем

$$\frac{\partial f_{\mathbf{p}}^R}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_{\mathbf{p}}^R}{\partial \mathbf{r}} = - \int \{ \omega_{\mathbf{p}}(\mathbf{k}) [(N_{\mathbf{k}} + 1) f_{\mathbf{p}}^R - N_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{p}-\mathbf{k}}^R] + \omega_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} [N_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{p}} - (N_{\mathbf{k}} + 1) f_{\mathbf{p}+\mathbf{k}}^R] \} d\mathbf{k} (2\pi)^{-3}. \quad (2.137)$$

Раскладывая по \mathbf{k} и учитывая лишь индуцированные процессы, получаем уравнения (2.136) и (2.135).

Существенно также то, что в рамках рассматриваемого приближения взаимодействуют лишь частицы, удовлетворяющие законам сохранения для излучения и поглощения. Для (2.136) это

$$\omega_{\mathbf{k}}^i = \mathbf{k}\mathbf{v}.$$

Такие частицы плазмы называются резонансными. Часто общее число резонансных частиц мало по сравнению с полным числом частиц плазмы. Поэтому представляет интерес также и то, как взаимодействуют с турбулентными пульсациями нерезонансные частицы. Фактически резонанс всегда не бесконечно узок (когда он описывается δ -функцией), и на «крыльях» резонанса могут участвовать во взаимодействии частицы, скорости которых отличаются от скоростей резонансных частиц. К этим эффектам приводят не только корреляции турбулентных пульсаций (см. выше § 2.5), но и нестационарность турбулентности.

Запишем основное квазилинейное уравнение (2.130) для продольных турбулентных пульсаций, заменяя $k' \rightarrow -k'$ и интегрируя k

$$\frac{\partial f^R}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f^R}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial}{\partial p_i} i e^2 \int dk' dk_1 dk_2 \frac{k'_i k_{1j}}{k' k_1} \langle E_{k'}^T, E_{k_1}^T \rangle \times \\ \times \frac{1}{\omega_1 + \omega_2 - (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \mathbf{v} + i \delta} \frac{\partial f_{k_2}^R}{\partial p_j} \exp [i x (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}'). \quad (2.138)$$

* Нетрудно убедиться, что (2.136) есть вероятность излучения плазмона равномерно движущимся зарядом (черенковское излучение, см. работу [73]). Действительно, подставляя в мощность излучения $\int (i\mathbf{E}) d\mathbf{r} = \int \omega_{\mathbf{k}}^i \omega_{\mathbf{p}}(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \times$
 $\times (2\pi)^{-3}$ поле равномерно движущегося заряда $E_{\mathbf{k}} = - \frac{4\pi i e}{k e_{\mathbf{k}}^i} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) (2\pi)^{-3}$,

получаем (2.136).

Уширение резонанса может быть связано с неоднородностью и нестационарностью f^R и среднего от полей турбулентных пульсаций $\langle E_{k'}^{T*} E_{k_1}^T \rangle$. Простоты ради для выявления физического смысла результата рассмотрим здесь эффекты, связанные лишь с нестационарностью, считая турбулентность и f^R однородной. Если пренебречь ω_2 и \mathbf{k}_2 в знаменателе (2.138), то возникнет $\int f_{k_2}^R e^{ik_2 x} dk_2 = f^R(x)$ — локальная функция распределения, учтенная выше. Удержим следующий член разложения по ω_2 и k_2 . В силу однородности f^R : $f_{k_2}^R = f_{\omega_2}^R \delta(\mathbf{k}_2)$; $\int \omega_2 e^{i k_2 x} f_{k_2}^R dk_2 = i \frac{\partial f^R}{\partial t}$. Сравнивая полученный член в правой части (2.138) с $\frac{\partial f^R}{\partial t}$ — в левой части, убеждаемся, что он мал, если турбулентность слабая $\left(\frac{W}{nT} \ll 1\right)$.

Рассмотрим те изменения в квазилинейном взаимодействии, которые возникают из-за нестационарности турбулентных пульсаций. Полагая в знаменателе (2.138) $\omega_2 \sim k_2 \sim 0$, имеем

$$\frac{\partial f^R}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f^R}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial}{\partial \rho_i} D_{ij} \frac{\partial f^R}{\partial \rho_j}, \quad (2.139)$$

где

$$D_{ij} = i e^2 \int \frac{k'_i k_{1j}}{k' k_1} \frac{\langle E_{k'}^{T*} E_{k_1}^T \rangle e^{i(k_1 - k')x}}{\omega_1 - \mathbf{k}_1 \mathbf{v} + i \delta} dk' dk_1. \quad (2.140)$$

Запишем $\omega_1 = \frac{\omega_1 + \omega'}{2} + \frac{\omega_1 - \omega'}{2}$ и соответственно $k_1 = \frac{k_1 + k'}{2} + \frac{k_1 - k'}{2}$. В обозначениях, принятых в § 2.2, $\frac{k' + k_1}{2} = \kappa$; $k_1 - k' = \Delta k$; $\kappa = \{\kappa, \omega\}$; $\omega_1 = \omega + \frac{\Delta \omega}{2}$; $k_1 = \kappa + \frac{\Delta k}{2}$. Учтем, что для стационарных пульсаций $\Delta k = 0$. Величина $\Delta \omega$ входит лишь в знаменатель (2.140). Разложив знаменатель (2.140) по Δk и обозначив $\langle E_{k'}^{T*} E_{k_1}^T \rangle = |E_\kappa(\Delta k)|^2$, легко получим поправку к D_{ij}

$$\delta D_{ij} = -i e^2 \int \frac{\kappa_i \kappa_j}{\kappa^2} d\kappa \frac{(\Delta \omega - \mathbf{v} \Delta \kappa) |E_\kappa(\Delta k)|^2}{2(\omega - \mathbf{v} \kappa + i \delta)^2} e^{i \Delta k x} d\Delta k. \quad (2.141)$$

Заменим κ величиной k , тогда, учитывая однородность турбулентности, имеем

$$\delta D_{ij} = \frac{e^2}{2} \operatorname{Re} \int \frac{k_i k_j}{k^2} \cdot \frac{dk}{(\omega - \mathbf{v} \kappa + i \delta)^2} \cdot \frac{\partial I_h}{\partial t}. \quad (2.142)$$

Интегрируя по частям, получаем окончательное выражение для δD_{ij}

$$\delta D_{ij} = \frac{e^2}{2} \operatorname{Re} \int \frac{dk}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\delta} \cdot \frac{k_i k_j}{k^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial \omega} I_k. \quad (2.143)$$

Найдем с помощью этой поправки изменения во времени полного импульса $\mathbf{P}^R = \int \mathbf{p} f^R \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}$ частиц плазмы

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{P}^R}{\partial t} &= -e^2 \pi \int \frac{\mathbf{k}}{k^2} I_k \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) dk \left(\mathbf{k} \frac{\partial f^R}{\partial \mathbf{p}} \right) \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} - \\ &- \frac{e^2}{2} \operatorname{Re} \int \frac{\mathbf{k}}{k^2} \frac{d\mathbf{p} dk}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\delta} \left(\mathbf{k} \frac{\partial f^R}{\partial \mathbf{p}} \right) \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial \omega} I_k \frac{1}{(2\pi)^3}. \end{aligned} \quad (2.144)$$

Входящие в (2.144) коэффициенты могут быть выражены через ε_k^{IR}

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \operatorname{Re} \varepsilon_k^{IR} = \frac{4\pi e^2}{k^2} \operatorname{Re} \int \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{\left(\mathbf{k} \frac{\partial f^R}{\partial \mathbf{p}} \right)}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\delta} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}; \quad (2.145)$$

$$\operatorname{Im} \varepsilon_k^{IR} = -\frac{4\pi^2 e^2}{k^2} \int \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) \left(\mathbf{k} \frac{\partial f^R}{\partial \mathbf{p}} \right) \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}. \quad (2.146)$$

Получим

$$\frac{\partial \mathbf{P}^R}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial \omega} \operatorname{Re} \varepsilon_k^{IR} \left\{ \frac{\operatorname{Im} \varepsilon_k^{IR}}{\frac{\partial}{\partial \omega} \operatorname{Re} \varepsilon_k^{IR}} I_k + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} I_k \right\} dk. \quad (2.147)$$

Если приближенно учитывать линейные по I_k члены, то \mathbf{P}^R сохраняется. Действительно, первый член в фигурных скобках (2.147) равен $-\gamma_k I_k$, а второй $\gamma_k I_k$. При учете же нелинейных эффектов в уравнении для $\frac{\partial}{\partial t} I_k$ получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{P}^R}{\partial t} &= \frac{1}{8\pi^3} \int \mathbf{k} \left(\frac{\partial N_{\mathbf{k}}}{\partial t} \right)_{\text{нел}} dk = \frac{1}{8\pi^3} \int \mathbf{k} v_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1} \times \\ &\times N_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}_1} dk dk_1 + \int \frac{1}{8\pi^3} \mathbf{k} \omega_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2} N_{\mathbf{k}_1} N_{\mathbf{k}_2} dk dk_1 dk_2. \end{aligned} \quad (2.148)$$

Для того чтобы узнать, сохраняется ли ток с учетом нелинейных эффектов, необходимо вычислить взаимодействие частиц плазмы с турбулентными пульсациями в следующем порядке по $N_{\mathbf{k}}$ и сложить результат с (2.148). Отметим сразу, что распадные процессы не вно-

сят вклада в (2.148). Действительно, для распадных процессов справедливо (2.84) и, следовательно, первый член (2.148) сокращается со вторым членом (2.148). Таким образом, (2.148) содержит лишь члены, характеризующие эффекты, связанные с индуцированным рассеянием. Именно такие эффекты и входят в следующее приближение для взаимодействия частиц и турбулентных пульсаций. Они компенсируют вклад эффектов рассеяния в правую часть (2.148) (см. ниже). Итак, $\frac{\partial P^R}{\partial t} = 0$.

Последний результат легко понять. Действительно, для потенциальных колебаний импульс электромагнитного поля равен нулю, поэтому

$$\frac{d}{dt} \int \mathbf{p} f \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} = 0; \quad \left\langle \int \mathbf{p} \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \right\rangle = 0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{p} f^R \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} = 0. \quad (2.149)$$

Для энергии частиц $W^R = \int \frac{p^2}{2m} f^R \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}$, как легко понять, соответствующее уравнение отличается от (2.144) тем, что вместо \mathbf{k} под интеграл входит величина $\mathbf{k}\mathbf{v} = \mathbf{k} \frac{d}{d\mathbf{p}} \cdot \frac{p^2}{2m}$, которую можно заменить ω как в первом (из-за δ -функции), так и во втором члене (из-за обращения в нуль интеграла, содержащего множитель $\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}$ вместо $\mathbf{k}\mathbf{v}$). Отличие от (2.147) будет в множителе: ω вместо \mathbf{k} , что при интегрировании по частям дает лишний член $\frac{1}{8\pi} \int (\text{Re } \varepsilon_k^{iR} - 1) \frac{\partial}{\partial t} I_k dk$. Учитывая $\text{Re } \varepsilon_k^i = 0$, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(W^R + \frac{1}{8\pi} \int I_k dk \right) = 0, \quad (2.150)$$

т. е. сумма энергий частиц и электрического поля турбулентных пульсаций сохраняется. Соотношения (2.150) можно получить непосредственным усреднением точного уравнения для сохранения энергии.

Малость инкремента в сравнении с частотой связана с тем, что число резонансных частиц мало по сравнению с полным числом частиц. В первый из двух членов (2.144) вносят вклад лишь резонансные частицы, а во второй входит малый множитель, описывающий слабую нестационарность и имеющий в линейном приближении порядок γ_k/ω_k , однако основной вклад вносят нерезонансные частицы, число которых в ω_k/γ_k раз больше, чем резонансных [6].

Если выделять отдельно только резонансные частицы (т. е. интегрировать лишь по области \mathbf{p} , в которой выполняется условие

резонанса), то можно убедиться в том, что импульс резонансных частиц не сохраняется. Полный импульс резонансных частиц обозначим

$$\mathbf{P}_{\text{рез}}^R = \int_{\text{рез}} \mathbf{p} f^R \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}.$$

Имеем

$$\frac{\partial \mathbf{P}_{\text{рез}}^R}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{k} \text{Im} \varepsilon_k^{iR} I_k dk = - \int \frac{k\gamma_k^i}{4\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial \omega} \text{Re} \varepsilon_k^{iR} I_k dk. \quad (2.151)$$

Можно ввести понятие импульса плазмонов $\mathbf{P}_{\text{пл}}$ так, чтобы

$$\frac{\partial \mathbf{P}_{\text{рез}}^R}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}_{\text{пл}}. \quad (2.152)$$

Так как при учете только резонансных частиц

$$2\gamma_k^i I_k = \frac{\partial}{\partial t} I_k, \quad (2.153)$$

то имеем

$$\mathbf{P}_{\text{пл}} = \int \frac{1}{8\pi} \mathbf{k} \left(\frac{\partial}{\partial \omega} \text{Re} \varepsilon_k^{iR} \right) I_k dk. \quad (2.154)$$

Это выражение соответствует наглядному представлению о газе плазмонов, каждый из которых обладает импульсом \mathbf{k} . Действительно, из

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \text{Re} \varepsilon_k^{iR} I_k = \frac{1}{2\pi^2} \{ N_k \delta(\omega - \omega_k^i) + N_{-k} \delta(\omega + \omega_k^i) \} \quad (2.155)$$

получим

$$\mathbf{P}_{\text{пл}} = \int \mathbf{k} N_k \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}. \quad (2.156)$$

Согласно изложенному выше этот импульс совпадает с импульсом нерезонансных частиц, которые адиабатически колеблются в поле турбулентных пульсаций.

Таким же образом можно ввести понятие об энергии плазмона

$$\frac{\partial W_{\text{рез}}^R}{\partial t} = \int \frac{\omega}{4\pi} \text{Im} \varepsilon_k^{iR} I_k dk = - \frac{\partial W_{\text{пл}}}{\partial t}, \quad (2.157)$$

где

$$W_{\text{пл}} = \frac{1}{8\pi} \int \omega \frac{\partial}{\partial \omega} \text{Re} \varepsilon_k^{iR} I_k dk = \int \frac{\omega_k^i N_k dk}{(2\pi)^3}. \quad (2.158)$$

Энергия плазмонов равна энергии электрического поля плюс энергия движения нерезонансных частиц в поле турбулентных пульса-

ций. Последнюю легко найти, если из (2.158) вычесть энергию электрического поля $\int \frac{I_k}{8\pi} dk$.

В случае, когда требуется определить лишь полную энергию и импульс, переданные нерезонансным частицам, можно ограничиться рассмотрением лишь эффектов, связанных с резонансными частицами. Действительно, квазилинейные уравнения, учитывающие в первом приближении лишь эффекты первой степени по энергии турбулентных пульсаций или только резонансные частицы, представляют собой замкнутую самосогласованную систему уравнений, позволяющую в принципе по начальным значениям f^R и N_k определить f^R и N_k для любых других моментов времени. Зная же N_k , можно найти энергию и импульс плазмонов и тем самым энергию и импульс нерезонансных частиц.

§ 2.7. ЭФФЕКТЫ КОРРЕЛЯЦИЙ ТУРБУЛЕНТНЫХ ПУЛЬСАЦИЙ ПРИ ИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ С ЧАСТИЦАМИ ПЛАЗМЫ

Выше показано, что корреляции турбулентных пульсаций размывают резонансную кривую и приводят к отсутствию строго однозначного соответствия между частотой и волновым числом турбулентных пульсаций. Такие эффекты возникают как для внешних (стохастических) полей, так и полей, возбуждаемых в плазме из-за неустойчивости.

Рассмотрим, может ли уширение резонанса привести к более эффективному взаимодействию частиц плазмы с турбулентными пульсациями, в частности к более эффективному обмену энергией. Эта проблема важна для реализации стохастического нагрева плазмы внешними случайными полями, исследуемого весьма интенсивно в различных экспериментах [75, 76]. В силу того, что роль нестационарности турбулентности подробно обсуждена выше, будем считать здесь турбулентность стационарной.

Общее квазилинейное уравнение для стационарной турбулентности (2.132) учитывает эффекты корреляций. Лишь конкретизация (2.134), не учитывающая корреляций, приводит к уравнениям (2.135), (2.136), в которых во взаимодействия вовлечены только резонансные частицы. Учет корреляций для резонансных частиц может незначительно изменить их взаимодействие, так как уширение резонанса из-за корреляций $\Delta\omega$ всегда много меньше ω_k . Пусть фазовая скорость пульсаций ω/k много больше средней скорости частиц. Только малое число резонансных частиц, удовлетворяющих $\omega = kv$, т. е. имеющих скорости, большие ω/k , взаимодействуют с такими пульсациями.

Для частиц строго нерезонансных с пульсациями, а именно частиц, имеющих скорости, много меньшие фазовой скорости пульсаций, важное значение имеют корреляционные уширения. Действительно, хотя взаимодействие вдали от центра резонанса и сильно уменьшено, однако полное число частиц может намного превосхо-

дить число резонансных частиц и, следовательно, можно было бы ожидать эффектов, сходных с теми, которые были обсуждены выше для нестационарных пульсаций. Однако в данном случае легко показать, что наряду с эффектами корреляций, учтенными в работе [74], существуют другие эффекты того же порядка, которые в ряде случаев сильно компенсируют эффекты корреляций. Результат при этом имеет простой физический смысл (см. ниже).

Действительно, пульсации в нашем случае могут оказаться резонансными с большей частью частиц, если их частоты достаточно низки (хвост резонанса). Поэтому можно воспользоваться (2.128). Подставляя это выражение в (2.133), получаем следующий результат для коэффициента диффузии нерезонансных частиц, связанного корреляциям пульсаций:

$$D_{ij} = 32\pi^3 e^2 \int dk_1 dk_2 \times \\ \times \frac{(k_{1i} + k_{2i})(k_{1j} + k_{2j}) I_{k_1} I_{k_2} |S_{k_1+k_2, k_1, k_2}|^2 \delta(\omega_1 + \omega_2 - (k_1 + k_2) v)}{(k_1 + k_2)^2 (\omega_1 + \omega_2)^2 |\varepsilon'_{k_1+k_2}|^2}. \quad (2.159)$$

Оставляя лишь члены с разностью частот $\omega_{k_1}^l - \omega_{k_2}^l$ и используя здесь приближение (2.134), получаем

$$D_{ij} = \frac{16 e^2}{\pi} \int dk_1 dk_2 \times \\ \times \frac{(k_{1i} - k_{2i})(k_{1j} - k_{2j}) N_{k_1} N_{k_2} |S_{k_1-k_2, k_1, -k_2}|^2 \delta(\omega_{k_1}^l - \omega_{k_2}^l - (k_1 - k_2) v)}{\frac{\partial \varepsilon'_{k_1}}{\partial \omega_1} \Big|_{\omega_1 = \omega_{k_1}^l} \frac{\partial \varepsilon'_{k_2}}{\partial \omega_2} \Big|_{\omega_2 = \omega_{k_2}^l} (k_1 - k_2)^2 (\omega_1 - \omega_2)^2 |\varepsilon'_{k_1-k_2}|^2}. \quad (2.160)$$

Заметим, что (2.160) описывает рассеяние частиц плазмы на турбулентных пульсациях и только часть полного рассеяния, а именно нелинейное рассеяние. Действительно, (2.160) можно записать в виде

$$D_{ij} = \int \omega_p^N(k_1, k_2) N_{k_1} N_{k_2} (k_{1i} - k_{2i})(k_{1j} - k_{2j}) \frac{dk_1 dk_2}{(2\pi)^6}, \quad (2.161)$$

где $\omega_p^N(k_1, k_2)$ — введенная выше вероятность нелинейного рассеяния (2.96). Выше было выяснено, что наряду с нелинейным рассеянием возможно комptonовское. Так как (2.160) квадратично по энергии турбулентности, следует учесть все эффекты того же порядка.

Общее выражение для интеграла столкновений частиц плазмы с турбулентными пульсациями имеет вид

$$\frac{\partial f^R}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f^R}{\partial \mathbf{r}} = I^T,$$

где

$$I^T = -\frac{\partial}{\partial p_i} e \langle E_i^T f^T \rangle = -\frac{\partial}{\partial p_i} \int dk dk' \frac{k_i'}{k'} e \langle E_{k'}^{T*} f_k^T \rangle e^{i(k-k')x}. \quad (2.162)$$

Выше учитывался лишь первый член разложения f^T по турбулентному полю E^T . Следующие члены в приближении стационарности f^R имеют вид [см. (2.18) и (2.19)]

$$f_k^{T(2)} = e^2 \int \frac{dk_1 dk_2 \delta(k-k_1-k_2)}{i(\omega-kv+i\delta)} \left(\frac{k_1}{k_1} \cdot \frac{\partial}{\partial p} \right) \times \\ \times \frac{1}{i(\omega_2-k_2v+i\delta)} \left(\frac{k_2}{k_2} \cdot \frac{\partial f^R}{\partial p} \right) (E_{k_1}^T E_{k_2}^T - \langle E_{k_1}^T E_{k_2}^T \rangle); \quad (2.163)$$

$$f_k^{T(3)} = e^3 \int \frac{dk_1 dk_2 dk_3 \delta(k-k_1-k_2-k_3)}{i(\omega-kv+i\delta)} \times \\ \times \left(\frac{k_1}{k_1} \cdot \frac{\partial}{\partial p} \right) \frac{1}{i(\omega_2+\omega_3-(k_2+k_3)v+i\delta)} \times \\ \times \left(\frac{k_2}{k_2} \cdot \frac{\partial}{\partial p} \right) \frac{1}{i(\omega_3-k_3v+i\delta)} \left(\frac{k_3}{k_3} \cdot \frac{\partial f^R}{\partial p} \right) \times \\ \times (E_{k_1}^T E_{k_2}^T E_{k_3}^T - E_{k_1}^T \langle E_{k_2}^T E_{k_3}^T \rangle - \langle E_{k_1}^T E_{k_2}^T F_{k_3}^T \rangle). \quad (2.164)$$

Здесь, как и выше, в качестве примера выбран простейший случай продольных турбулентных пульсаций. Процедура дальнейшего расчета повторяет расчет, проделанный для нелинейного взаимодействия турбулентных пульсаций. Средние от трех турбулентных полей могут быть выражены через средние от четырех, которые разбиваются на возможные парные произведения. Обозначим вклады в интеграл соударения I^T от $f^{T(2)}$ и $f^{T(3)}$ соответственно $I^{T(2)}$, $I^{T(3)}$. Имеем

$$I^{T(3)} = e^4 \int \frac{dk_1 dk_2}{k_1^2 k_2^2} \pi I_{k_1} I_{k_2} \times \\ \times \left(\mathbf{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) \frac{1}{\omega-kv+i\delta} \left(\mathbf{k}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) \delta(\omega-\omega_1-(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)v) \times \\ \times \left\{ \left(\mathbf{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) \frac{1}{\omega_1-k_1v} \left(\mathbf{k}_1 \cdot \frac{\partial f^R}{\partial \mathbf{p}} \right) - \left(\mathbf{k}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) \frac{1}{\omega-kv} \left(\mathbf{k} \cdot \frac{\partial f^R}{\partial \mathbf{p}} \right) \right\}. \quad (2.165)$$

Здесь учтен нерезонансный характер пульсации $\omega \neq kv$, в соответствии с чем мнимая часть может возникать из знаменателей

$$\text{Im} \frac{1}{\omega-\omega_1-(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)v+i\delta} = -\pi\delta(\omega-\omega_1-(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)v).$$

Вследствие наличия δ -функции в (2.165) члены, пропорциональные $(\omega - \omega_1 - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \mathbf{v})$, выпадают

$$I^{T(3)} = \frac{e^4 \pi}{m} \int \frac{dk_1 dk (k k_1)}{k^2 k_1^2} I_{k_1} I_k \times \\ \times \left(\mathbf{k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) \frac{1}{\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}} \left(\mathbf{k}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) \delta(\omega - \omega_1 - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \mathbf{v}) \times \\ \times \left\{ \frac{1}{(\omega_1 - \mathbf{k}_1 \mathbf{v})^2} \left(\mathbf{k}_1 \frac{\partial f^R}{\partial \mathbf{p}} \right) - \frac{1}{(\omega - \mathbf{k} \mathbf{v})^2} \left(\mathbf{k} \frac{\partial f^R}{\partial \mathbf{p}} \right) \right\}. \quad (2.166)$$

Далее в силу той же δ -функции выражение в фигурных скобках (2.166) легко преобразуется к виду

$$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{(\omega_1 - \mathbf{k}_1 \mathbf{v})^2} + \frac{1}{(\omega - \mathbf{k} \mathbf{v})^2} \right] \left((\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}) \frac{\partial f^R}{\partial \mathbf{p}} \right).$$

Заменяя $k_1 \leftrightarrow k$ в (2.166) и взяв полусумму этих выражений, получаем

$$I^{T(3)} = \frac{e^4 \pi}{4m} \int \frac{dk_1 dk}{k^2 k_1^2} (k k_1) I_{k_1} I_k \times \\ \times \left\{ \left(\mathbf{k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) \frac{1}{\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}} \left(\mathbf{k}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) - \left(\mathbf{k}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) \frac{1}{\omega_1 - \mathbf{k}_1 \mathbf{v}} \left(\mathbf{k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) \right\} \times \\ \times \delta(\omega - \omega_1 - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \mathbf{v}) \left[\frac{1}{(\omega_1 - \mathbf{k}_1 \mathbf{v})^2} + \frac{1}{(\omega - \mathbf{k} \mathbf{v})^2} \right] \times \\ \times \left((\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}) \frac{\partial f^R}{\partial \mathbf{p}} \right). \quad (2.167)$$

Выражение в фигурных скобках (2.167) можно теперь преобразовать к виду

$$\left(\mathbf{k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) \left(\mathbf{k}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) \left(\frac{1}{\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}} - \frac{1}{\omega_1 - \mathbf{k}_1 \mathbf{v}} \right) - \frac{(k k_1)}{m} \left(\mathbf{k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) \frac{1}{(\omega - \mathbf{k} \mathbf{v})^2} + \\ + \frac{(k k_1)}{m} \left(\mathbf{k}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) \frac{1}{(\omega_1 - \mathbf{k}_1 \mathbf{v})^2}. \quad (2.168)$$

Первый член (2.168) равен нулю в силу наличия δ -функции и, следовательно,

$$I^{T(3)} = \frac{e^4 \pi}{2m^2} \int \frac{dk dk_1}{k^2 k_1^2} (k k_1)^2 I_{k_1} I_k \left((\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) \frac{1}{(\omega - \mathbf{k} \mathbf{v})^4} \times \\ \times \delta(\omega - \omega_1 - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \mathbf{v}) \left((\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \frac{\partial f^R}{\partial \mathbf{p}} \right). \quad (2.169)$$

Используя теперь приближенные соотношения (2.134), для того чтобы выразить энергию турбулентности через число квантов, получаем:

$$I^{T(3)} = \frac{\partial}{\partial p_i} D_{ij} \frac{\partial f^R}{\partial p_j};$$

$$D_{ij} = \int (k_i - k_{1i})(k_j - k_{1j}) \omega_p^C(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1) \times \\ \times N_{k_1} N_{k_2} dk_1 dk_2 (2\pi)^{-6}; \quad (2.170)$$

$$\omega_p^C(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1) = \frac{4e^4 (2\pi)^3}{m^2 \left. \frac{\partial \varepsilon_k^l}{\partial \omega} \right|_{\omega = \omega_k^l} \left. \frac{\partial \varepsilon_{k_1}^l}{\partial \omega_1} \right|_{\omega_1 = \omega_{k_1}^l}} (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^4 \\ \times \frac{(\mathbf{k}\mathbf{k}_1)^2}{k^2 k_1^2} \delta(\omega_k^l - \omega_{k_1}^l - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)\mathbf{v}). \quad (2.171)$$

Формула (2.171) точно совпадает с найденной выше вероятностью комптоновского рассеяния (2.89).

Нетрудно аналогичным расчетом убедиться в том, что $I^{T(2)}$ описывает интерференцию нелинейного и комптоновского рассеяния.

Этот анализ имеет важные следствия. Во первых, учет корреляций пульсаций и взаимодействия частиц с хвостами корреляционных уширений имеет тот же порядок величины, что и эффекты следующего порядка по энергии турбулентности в уравнениях, описывающих взаимодействие частиц и турбулентных пульсаций. Во-вторых, полученный результат показывает, что полное описание этих взаимодействий возможно, если не принимать во внимание хвосты корреляционных взаимодействий, но учитывать эффекты индуцированного рассеяния. Индуцированное рассеяние также является резонансным взаимодействием, однако это резонанс более высокого порядка $\omega - \omega_1 = (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_1)\mathbf{v}$ и частицы, отбираемые этим резонансным условием, отличны от тех, которые отвечают резонансу $\omega = \mathbf{k}\mathbf{v}$. Таким образом, можно учитывать лишь резонансные взаимодействия и пренебрегать в первом приближении корреляционными эффектами (см. также гл. 4). В-третьих, сильная компенсация нелинейного и комптоновского рассеяния существенно меняет выводы, касающиеся эффективности стохастического нагрева электронов плазмы. Так, для ленгмюровских пульсаций (см. ниже) эффективность нагрева электронов уменьшается в $\left(\frac{v_{Te}}{v_p}\right)^2$ раз, где v_p — фазовая скорость ленгмюровских пульсаций. При рассеянии высокочастотных пульсаций на ионах комптоновское рассеяние мало (из-за большой массы иона) и основным является нелинейное рассеяние, т. е. все эффекты нагрева обязаны только корреляциям турбулент-

ных пульсаций. При нагреве низкочастотными пульсациями это не так, и учет комптоновского рассеяния для ионов может быть определяющим.

Полученные уравнения для f^R нетрудно найти также из простых соображений баланса, если учесть, что в процессах рассеяния частицы переходят из состояния с импульсом \mathbf{p} в состояние с импульсом $\mathbf{p} - \mathbf{k} + \mathbf{k}_1$. Уравнение баланса имеет вид

$$\frac{\partial f^R}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f^R}{\partial \mathbf{r}} = - \int [\omega_{\mathbf{p}}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1) (f_{\mathbf{p}} - f_{\mathbf{p}-\mathbf{k}+\mathbf{k}_1}) + \omega_{\mathbf{p}+\mathbf{k}-\mathbf{k}_1} (f_{\mathbf{p}} - f_{\mathbf{p}+\mathbf{k}-\mathbf{k}_1})] N_{\mathbf{k}_1} N_{\mathbf{k}} \frac{d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}}{(2\pi)^6}. \quad (2.172)$$

Здесь учтены лишь эффекты индуцированного рассеяния, $\omega_{\mathbf{p}}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1)$ — полная вероятность рассеяния (нелинейного и комптоновского). Разлагая выражение (2.172) по \mathbf{k} и \mathbf{k}_1 , получаем:

$$\frac{\partial f^R}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f^R}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial}{\partial \rho_i} D_{ij} \frac{\partial f^R}{\partial v_j};$$

$$D_{ij} = \int \omega_{\mathbf{p}}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1) N_{\mathbf{k}_1} N_{\mathbf{k}} (k_i - k_{1i})(k_j - k_{1j}) \frac{d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}}{(2\pi)^6}, \quad (2.173)$$

что совпадает с результатом, полученным выше.

Из (2.173) и уравнения для волн легко получить, что сумма энергий частиц и волн при индуцированном рассеянии сохраняется. Таким образом, как бы замыкается вся схема рассмотрения, в которой f^R описывает обросшие электромагнитной шубой электроны и ионы плазмы (электронные и ионные возбуждения), а $N_{\mathbf{k}}$ — возбуждения плазмы — плазмоны. Их взаимодействия описываются вероятностями, и сумма энергий всех квазичастиц сохраняется.

Кстати, из этой картины легко получить физические следствия, касающиеся нагрева плазмы. Действительно, при индуцированном рассеянии число плазмонов сохраняется, так как на каждый поглощенный плазмон приходится испущенный. Из закона сохранения энергии следует, что нагрев может происходить лишь при изменении полной энергии плазмонов. Так как полное число плазмонов сохраняется, то нагрев возможен лишь при уменьшении частоты плазмонов. Поэтому, если имеется нагрев, то перекачка энергии турбулентности осуществляется в сторону уменьшения средней частоты пульсаций. Для ряда пульсаций частоты на всем спектре мало меняются (например, это верно для ленгмюровских пульсаций, частоты которых близки к ω_{pe}). Следовательно, существенная перекачка таких пульсаций по спектру не может привести к сильному нагреву. Более выгодны для нагрева такие пульсации, частоты которых резко уменьшаются с падением k . Эффективность

нагрева можно оценить, зная характерное время перекачки по спектру. Если известны время перекачки τ на некую разность частот $\delta\omega$ и энергия турбулентности W , то темп нагрева имеет порядок $\frac{\delta\omega}{\omega} W \frac{1}{\tau}$ *.

§ 2.8. ТУРБУЛЕНТНОЕ УШИРЕНИЕ РЕЗОНАНСОВ ВО ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЧАСТИЦ И ПЛАЗМОНОВ

В § 2.7 предполагалась нерезонансность частиц и плазмонов с большей частью частиц плазмы ($\omega \neq kv$). При наличии резонанса $\omega = kv$, часто выполненного для многих низкочастотных пульсаций, линейное затухание и квазилинейные эффекты ярко выражены. Вычисления нелинейных поправок к ним как в γ , так и в D_{ij} требуют достаточно аккуратного учета турбулентного уширения резонансов $\omega = kv$. Корреляции, рассмотренные выше, отражают интегральные по частицам эффекты, могут быть малочувствительны к этому уширению, которое в определенной степени сходно с эффектом корреляций, однако представляют собой независимый эффект. Его учет необходим наряду с корреляциями только для резонансных с частицами пульсаций, а точнее, для расчета поправок к квазилинейным эффектам.

Вопрос об уширении резонансов волна — частица был поднят Дюпри [77]. В общем виде уравнения, учитывающие указанное уширение, были записаны Б. Б. Кадомцевым [6], однако их решения не были найдены и не проанализированы вытекающие из них физически наглядные следствия. Подробнее эта проблема рассмотрена в работе [78]; где было показано, что в условиях резонанса $\omega = kv$ турбулентные процессы адекватно описываются обычными квазилинейными уравнениями, а нелинейные эффекты как в γ , так и в D_{ij} всегда являются малыми поправками к квазилинейным, если $\frac{W}{nT} \ll 1$, и поэтому должны отбрасываться. При рассмотрении указанных поправок разложение по энергии турбулентности оказывается невозможным.

Ниже изложение следует работе [78]. Заметим здесь, что уширение резонансов $\omega = kv$ может сказаться на эффектах корреляций только через изменение нелинейных токов S и Σ . Эффект уширения резонансов проще всего понять, если рассмотреть воздействия высокочастотных $\omega(k)$ коротковолновых пульсаций (волновое число k) на низкочастотные (Ω) длинноволновые (q), $\Omega \ll \omega$, $q \ll k$. Как высокочастотные, так и низкочастотные пульсации предполагаются резонансными с частицами, т. е. $\Omega = qv$ и $\omega = kv$, и могут

* Помимо этого нагрева возможен также нагрев, связанный с перекачкой энергии в область интенсивного поглощения. Рассматриваемый здесь нагрев связан лишь с самим процессом трансформации турбулентной энергии по спектру.

принадлежать к одной и той же ветви турбулентных колебаний (например, ионно-звуковой). Говоря о воздействии высокочастотных пульсаций на низкочастотные, будем предполагать, что энергия высокочастотных пульсаций достаточно велика, тогда как энергия низкочастотных мала, и, следовательно, обратным влиянием низкочастотных колебаний на высокочастотные можно пренебречь. Не претендуя здесь на строгость (точная теория дается ниже), проиллюстрируем влияние высокочастотных пульсаций на низкочастотные, учитывая их усредненное действие с помощью квазилинейного уравнения. Это квазилинейное уравнение записывается, что следует особо подчеркнуть, для турбулентной составляющей функции распределения, и его смысл лишь в том, что низкочастотные пульсации «чувствуют» лишь усредненное воздействие высокочастотных, так как $\Omega \ll \omega$ и $q \ll k$:

$$-i\Omega f_q^T + iqv f_q^T + i\frac{e}{m} E_q^T \left(\frac{\mathbf{q}}{q} \cdot \frac{\partial f^R}{\partial \mathbf{v}} \right) = \frac{\partial}{\partial v_i} D_{ij} \frac{\partial f_q^T}{\partial v_j};$$

$$D_{ij} = \pi \int \frac{k_i k_j}{k^2} \cdot \frac{e^2}{m^2} I_k \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) dk. \quad (2.174)$$

Коэффициент D_{ij} описывает воздействие высокочастотных пульсаций, которое может рассматриваться как некие эффективные «турбулентные столкновения» для низкочастотных. Эти «турбулентные столкновения» и уширяют резонанс. Рассмотрим наиболее интересный для приложений случай, когда для основной части частиц плазмы выполнено условие $v \gg \Omega/q$ (т. е. средняя тепловая скорость частиц много больше фазовой скорости пульсаций). Тогда условие $\Omega = \mathbf{q}\mathbf{v}$ выполняется лишь для частиц, скорости которых почти перпендикулярны к \mathbf{q} . Введя θ — угол между \mathbf{v} и направлением, перпендикулярным к \mathbf{q} , запишем приближенное резонансное условие в виде $\Omega = qv\theta$. В силу принятого $\frac{\Omega}{qv} = \theta \ll 1$. Диффузионный член (2.174) в этих условиях записывается в виде $D \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} f_q^T$ и, изменяя θ , «выбивает» частицу из резонанса, причем чем меньше θ , тем быстрее частица выбивается из резонанса. Решение уравнения (2.174) при этом приобретает вид:

$$\left. \begin{aligned} f_q^T &= g \frac{e}{m} E_q^T \left(\frac{\mathbf{q}}{q} \cdot \frac{\partial f^R}{\partial \mathbf{v}} \right); \\ g &= -i \int_0^\infty e^{-iqv\theta\tau + i\Omega\tau - \frac{D\tau^3}{3} q^2 v^2} d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (2.175)$$

Вдали от резонанса $g = \frac{1}{\Omega - qv\theta}$, а при $\Omega \rightarrow qv\theta$ $g \rightarrow -i \left(\frac{q^2 v^2 D}{3} \right)^{-1/3} \times$

$\times \frac{\Gamma(1/3)}{3}$, т. е. если считать, что при $\Omega \rightarrow kv\theta$ $g \approx \frac{1}{i v_{\text{эфф}}}$, то $v_{\text{эфф}} \sim D^{1/3} \sim \left(\frac{W}{nT}\right)^{1/3}$. Из приведенного анализа непосредственно видна неразложимость нелинейных эффектов по энергии колебаний вблизи резонанса $\omega = kv$. Общая теория эффектов уширения резонансов [78] может быть построена на базе общего уравнения (2.10) для турбулентных компонент функции распределения. Простоты ради, так же как и выше, $E^R = 0$. Уравнение (2.10) для продольных полей $E_k = -ik\varphi_k$ может быть записано в виде:

$$\begin{aligned} -(\omega - kv) f_k^T &= e\varphi_k \left(\mathbf{k} \frac{\partial f^R}{\partial \mathbf{p}} \right) + e \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \int \mathbf{k}_1 dk_1 dk_2 \times \\ &\times \delta(k - k_1 - k_2) (\varphi_{k_1}^T f_{k_2}^T - \langle \varphi_{k_1}^T f_{k_2}^T \rangle); \\ dk &= dk d\omega \quad k = \{\mathbf{k}, \omega\}; \\ \delta(k - k_1 - k_2) &= \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2). \end{aligned} \quad (2.176)$$

Выделим из правой части этого уравнения диагональный по f_k^T член и обозначим его $-i \hat{v}_k(\mathbf{p}) f_k^T$, где $\hat{v}_k(\mathbf{p})$ в общем случае оператор [см. уравнение (2.174)]. Введем оператор $\hat{g}_k(\mathbf{p})$, удовлетворяющий уравнению

$$\hat{g}_k(\mathbf{p}) (\omega - kv + i \hat{v}_k(\mathbf{p})) f_k^T(\mathbf{p}) = f_k^T(\mathbf{p}). \quad (2.177)$$

Формальным решением (2.176) будет

$$\begin{aligned} f_k^T &= -e\varphi_k^T \hat{g}_k(\mathbf{p}) \left(\mathbf{k} \frac{\partial f^R}{\partial \mathbf{p}} \right) + i \hat{g}_k(\mathbf{p}) \hat{v}_k(\mathbf{p}) f_k^T - \\ &- \hat{g}_k(\mathbf{p}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} e \int \mathbf{k}_1 dk_1 dk_2 \delta(k - k_1 - k_2) \times \\ &\times (\varphi_{k_1}^T f_{k_2}^T - \langle \varphi_{k_1}^T f_{k_2}^T \rangle). \end{aligned} \quad (2.178)$$

Подставив это решение в нелинейный член исходного уравнения, получим

$$\begin{aligned} (\omega - kv + i \hat{v}_k(\mathbf{p})) f_k^T + e\varphi_k \left(\mathbf{k} \frac{\partial f^R}{\partial \mathbf{p}} \right) &= \\ = i \hat{v}_k(\mathbf{p}) f_k^T + \frac{\partial}{\partial p_i} B_{ij} \frac{\partial f^R}{\partial p_j} - i e \frac{\partial}{\partial p_i} \times \\ \times \int k_{1i} dk_1 dk_2 \delta(k - k_1 - k_2) (\varphi_{k_1}^T \hat{g}_{k_2}(\mathbf{p}) \hat{v}_{k_2}(\mathbf{p}) f_{k_2}^T - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \langle \varphi_{k_1}^T \hat{g}_{k_2}(\mathbf{p}) \hat{v}_{k_2}(\mathbf{p}) f_{k_2}^T \rangle + \frac{\partial}{\partial p_i} e^2 \int dk_1 dk_2 dk_3 \delta(k - k_1 - k_2 - k_3) \times \\
& \times k_{1i} k_{2j} \hat{g}_{k-k_1}(\mathbf{p}) \frac{\partial}{\partial p_j} (\varphi_{k_1}^T \varphi_{k_2}^T f_{k_3}^T - \varphi_{k_1}^T \langle \varphi_{k_2}^T f_{k_3}^T \rangle - \langle \varphi_{k_1}^T \varphi_{k_2}^T f_{k_3}^T \rangle); \\
\end{aligned} \tag{2.179}$$

$$\begin{aligned}
& B_{ij} = e^2 \int k_{1i} k_{2j} dk_1 dk_2 \times \\
& \times \delta(k - k_1 - k_2) \hat{g}_{k_2}(\mathbf{p}) (\varphi_{k_1}^T \varphi_{k_2}^T - \langle \varphi_{k_1}^T \varphi_{k_2}^T \rangle).
\end{aligned}$$

В правой части (2.179) должны отсутствовать выделенные в \hat{v} диагональные по f_k^T члены по крайней мере в главных слагаемых. Таким главным членом является член, содержащий $\varphi_{k_1}^T \varphi_{k_2}^T f_{k_3}^T$ при $k_2 = -k_1$. Это дает выражение для оператора $I_{k_1} = |\varphi_{k_1}|^{2k_1^2}$

$$i \hat{v}_k f_k^T = e^2 \frac{\partial}{\partial p_i} \int k_{1i} k_{1j} |\varphi_{k_1}|^2 \hat{g}_{k-k_1}(\mathbf{p}) \frac{\partial f_k^T}{\partial p_j} dk_1. \tag{2.180}$$

Для описания уширения резонанса рассмотрим новую теорию возмущений, в основном приближении которой уже просуммированы наиболее существенные вблизи резонанса члены общего разложения по энергии турбулентности. Такому приближению соответствует учет лишь первого члена первой части (2.179), т. е.

$$f_k^{T(0)}(\mathbf{p}) = -\hat{g}_k(\mathbf{p}) e \varphi_k^T \left(\mathbf{k} \frac{\partial f^R}{\partial \mathbf{p}} \right). \tag{2.181}$$

Учитывая, что \hat{g} является оператором лишь по импульсам частиц

$$\hat{g}_k(\mathbf{p}) f_k^T(\mathbf{p}) = \int g_k(\mathbf{p}, \mathbf{p}') f_k^T(\mathbf{p}') d\mathbf{p}',$$

можно уравнения (2.180) и (2.177) записать в виде

$$\begin{aligned}
& \int d\mathbf{p}' \left[(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') - e^2 \frac{\partial}{\partial p_i} \times \right. \\
& \left. \times \int k_{1i} k_{1j} |\varphi_{k_1}|^2 dk_1 g_{k-k_1}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \frac{\partial}{\partial p_j} \right] g_k(\mathbf{p}', \mathbf{p}'') = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}''). \tag{2.182}
\end{aligned}$$

При $\frac{W}{nT} \rightarrow 0$ $g \rightarrow \frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}}$ и приближение (2.181) соответствует обычному линейному приближению. Таким образом, новая теория возмущений для нерезонансных пульсаций приводит к тем же результатам, что и обычная, использованная выше.

При описании нерезонансных пульсаций можно использовать и новую теорию возмущений, учитывая, что часть нелинейных эф-

фехтов уже входит в (2.181). На базе приближения (2.181) легко строится теория возмущений, которая приводит к нелинейному уравнению для $|\Phi_k|^2$:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_k |\Phi_k|^2 &= |\Phi_k|^2 \sum_{\alpha} \int \Lambda_{kk_1}^{\alpha} |\Phi_{k_1}|^2 dk_1 + \\ &+ 2 \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^4 m_{\alpha}^2}{k^4 n^2 \varepsilon_h} \int |\lambda_{k, k_1, k_2}^{\alpha}|^2 |\Phi_{k_1}|^2 \times \\ &\times |\Phi_{k_2}|^2 dk_1 dk_2 \delta(k - k_1 - k_2); \\ \varepsilon_k &= \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2 m_{\alpha}}{nk^2} \int \hat{g}_k(\mathbf{p}) \left(\mathbf{k} \frac{\partial f_{\alpha}^R}{\partial \mathbf{p}} \right) \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} + 1; \\ \Lambda_{k, k_1}^{\alpha} &= \frac{e^2 \omega_{p\alpha}^2 m_{\alpha}}{nk^2} \int \hat{g}_k(\mathbf{p}) \left(\mathbf{k}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) \times \\ &\times \hat{g}_{k-k_1}(\mathbf{p}) \left(\mathbf{k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) \hat{g}_{-k_1}(\mathbf{p}) \left(\mathbf{k}_1 \frac{\partial f^R}{\partial \mathbf{p}} \right) \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} + \\ &+ 2 \frac{\omega_{p\alpha}^2 m_{\alpha}}{k^2 n \varepsilon_{k-k_1}} \lambda_{k, k_1, k-k_1} \lambda_{k-k_1, k, -k_1}; \end{aligned} \right\} (2.183)$$

$$\lambda_{k, k_1, k_2} = \frac{1}{2} \int \hat{g}_k(\mathbf{p}) \left[\left(\mathbf{k}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) \hat{g}_{k_2}(\mathbf{p}) \left(\mathbf{k}_2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) + 1 \leftrightarrow 2 \right] f^R \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}. \quad (2.184)$$

Здесь ε_k — модифицированная линейная проницаемость, отличающаяся от обычной тем, что $\frac{1}{\omega - kv}$ заменено величиной $\hat{g}(\omega - kv)$, учитывающей турбулентное уширение резонанса. Нелинейные по отношению к этой ε_k члены (2.183) имеют в условиях резонанса $\omega = kv$ малость $\left(\frac{W}{nT}\right)^{1/3}$. В условиях $\omega \neq kv$ можно раскладывать (2.183) по W , и сумма нелинейных членов из \hat{g} и из (2.183), которые в данном случае имеют один и тот же порядок величины, дает нелинейные взаимодействия, подробно обсужденные выше. Для резонансных пульсаций в окрестности резонанса $\frac{v_{\text{эфф}}}{kv} \ll 1$ можно найти явное выражение для \hat{g} . В уравнение (2.182) вводим новую переменную $\eta = \omega - kv$. Ввиду малости η вблизи резонанса наибольший вклад вносят члены, содержащие $\partial/\partial\eta$. Тогда

$$g_k(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = g_{\eta\mathbf{k}}^{(0)}(\mathbf{p}) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') + \eta g^{(1)} + \dots;$$

$$\left(\eta + \frac{\partial}{\partial \eta} D_{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) g_{\eta\mathbf{k}}^{(0)}(\mathbf{p}) = 1; \quad (2.185)$$

$$D_{\eta} = e^2 \int (\mathbf{k}\mathbf{k}_1)^2 dk_1 |\Phi_{k_1}|^2 g_{-\eta\mathbf{k}_1, \mathbf{k}-\mathbf{k}_1}^{(0)}. \quad (2.186)$$

Эти уравнения лишь обозначениями отличаются от (2.174) и их решение имеет вид

$$g_{\eta, k}(\mathbf{p}) = -i \int_0^{\infty} \exp \left[i \eta \tau - D_0(\mathbf{k}, \mathbf{p}) \frac{\tau^3}{3} \right] d\tau, \quad (2.187)$$

где $D_0(\mathbf{k}, \mathbf{p})$ определено соотношением

$$D_0(\mathbf{k}, \mathbf{p}) = \frac{e^2}{m^2} \int dk_1 (\mathbf{k} \mathbf{k}_1)^2 |\varphi_{k_1}|^2 \int_0^{\infty} d\tau e^{i \eta \tau - \frac{D_0(\mathbf{k}_1, \mathbf{p}) \tau^3}{3}}. \quad (2.188)$$

Это решение позволяет исследовать влияние турбулентных уширений на линейные, а точнее квазилинейные, эффекты затухания и раскачки пульсаций. Для резонансных пульсаций всегда такие поправки оказываются малыми. Впрочем, в последовательной теории возмущений это совершенно естественно. Легко видеть, что для резонансных пульсаций разложение происходит по

$$\left(\frac{eE}{mv_T v_{эфф}} \right)^2 \sim \left(\frac{W}{nT} \right)^{1/3}.$$

Таким образом, можно для резонансных пульсаций фактически пренебречь нелинейными эффектами и учитывать лишь квазилинейные, используя обычные выражения для инкрементов и коэффициентов диффузии. Последнее связано с тем, что уширение резонансов практически слабо связывается на интегральных величинах γ и D . При этом, очевидно, важным физическим результатом является то, что фактически взаимодействия не строго резонансны, а законы сохранения при взаимодействии должны выполняться с точностью до этого уширения. Однако учет этого эффекта в условиях, когда пренебрегается взаимодействиями более высокого порядка по энергии колебаний, чаще всего является превышением точности. Можно, таким образом, использовать представления об элементарных возбуждениях, взаимодействующих между собой из-за излучения и рассеяния плазмонов частицами.

Надо при этом иметь в виду, что рассматривать рассеяние плазмонов частицей, которая может одновременно излучать тот же плазмон, нет смысла, так как этот эффект всегда представляет собой малую поправку. Так, взаимодействие ионно-звуковых пульсаций, испытывающих большое затухание или раскачку на электронах, не может быть обьязано рассеянию на резонансных с этим пульсациями электронах. В уравнениях баланс авзаимодействия частиц и плазмонов содержится интеграл по всем частотам пуль-

сащий, и поэтому уширение по частотам из-за корреляций мало существенно. В уравнения баланса также входит интеграл по скоростям частиц, и, следовательно, уширение резонансов $\omega = kv$ при взаимодействии плазмонов и частиц мало существенно.

§ 2.9. ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ БАЛАНСА ДЛЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЧАСТИЦ И ТУРБУЛЕНТНЫХ ПУЛЬСАЦИЙ ПЛАЗМЫ

Выше было показано, что детальное микроописание турбулентных процессов в плазме может быть заменено описанием при помощи неких средних величин — усредненной функции распределения f^R и усредненного квадрата амплитуды турбулентных пульсаций I_k . Функция f^R характеризует распределение квазичастиц электронов и ионов, отличающихся от обычных электронов и ионов тем, что они благодаря взаимодействию с турбулентными пульсациями обросли шубой — облаком зарядов противоположного знака, а N_k характеризует распределение по импульсам k плазмонов турбулентной плазмы. Поэтому можно построить турбулентность, исходным представлением которой являются понятия о плазмонах и квазичастицах плазмы, взаимодействующих между собой [59].

Для того чтобы такая теория была математически оформлена, необходимо записать уравнения баланса для квазичастиц и плазмонов и указать независимые способы расчета вероятностей различных процессов взаимодействия.

Очень удобен для составления уравнений баланса метод графиков [60]. Учтем следующие типы взаимодействий: плазмонов между собой и плазмонов с электронами и ионами (электронными и ионными возбуждениями). Такие взаимодействия можно классифицировать по числу плазмонов, участвующих в процессе взаимодействия. Простейшим процессом взаимодействия плазмонов между собой является распад одного плазмона σ на два σ' и σ'' (рис. 2.1) (частным случаем этого процесса есть излучение одним плазмоном σ другого σ' (рис. 2.2)). Более сложному процессу соответствует излучение одним плазмоном трех (рис. 2.3, а) или превращения двух плазмонов в два других (рис. 2.3, б). Частным случаем последнего процесса будет рассеяние одного плазмона другим (рис. 2.4).

Простейшим случаем взаимодействия частиц и плазмонов является излучение плазмона частицей плазмы (рис. 2.5). Более сложному типу взаимодействия соответствует поглощение одного плазмона σ' и излучение другого σ (рис. 2.6). Частным случаям этого процесса соответствуют рассеяния плазмона σ на частице (рис. 2.7).

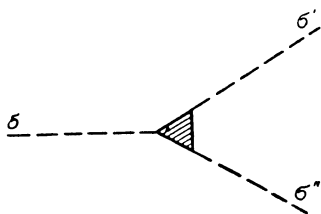


Рис. 2.1. Схематическое изображение трехплазмонного распада процесса, описывающего взаимодействие трех волн σ , σ' , σ'' .

В принципе вершинные части в этих диаграммах требуют расшифровки. Так, наряду с истинным взаимодействием четырех плазмонов возможно также взаимодействие, связанное с повторением трехплазмонного взаимодействия (рис. 2.8), и наряду с «ис-

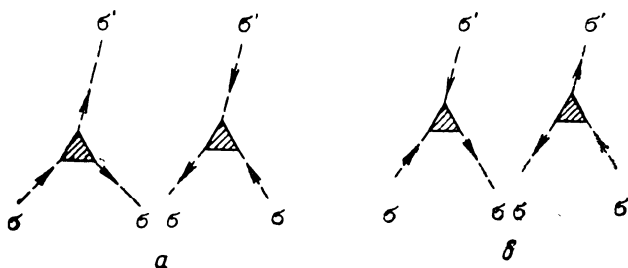


Рис. 2.2. Возможные процессы излучения σ' волн σ волнами в состоянии k^σ :
 а — излучение и обратный ему процесс; б — поглощение и обратный ему процесс.

тинным» (комптоновским) рассеянием возможно также такое, которое обязано включением трехплазмонного взаимодействия (рис. 2.9, нелинейное рассеяние).

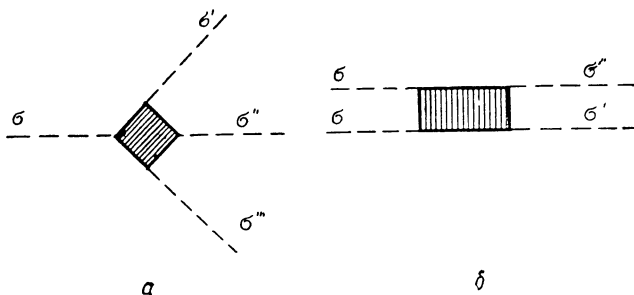


Рис. 2.3. Схематическое изображение возможных четырехплазмонных распадных взаимодействий четырех волн σ , σ' , σ'' , σ''' .

Общее уравнение баланса для плазмонов σ учитывает изменение числа плазмонов из-за их взаимодействия между собой (распадные процессы) и с квазичастицами плазмы (процессы рассеяния)

$$\frac{dN_k^\sigma}{dt} = \frac{dN_k^\sigma}{dt} + v_g^\sigma \frac{\partial N_k^\sigma}{\partial r} = \left(\frac{dN_k^\sigma}{dt} \right)_{\text{расп}} + \left(\frac{dN_k^\sigma}{dt} \right)_{\text{расс}}$$

Начнем с рассмотрения распадных процессов. Выше уже было введено понятие о числе квантов N_k^σ данного сорта σ . Рассмотрим



Рис. 2.4. Рассеяние плазмона плазмоном.

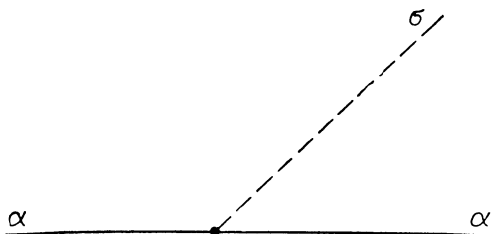


Рис. 2.5. Излучение плазмона частицей плазмы.

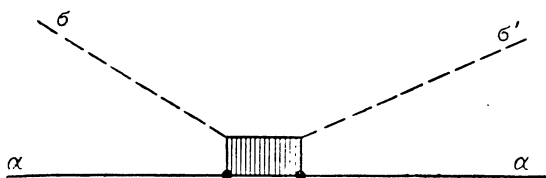


Рис. 2.6. Рассеяние плазмона σ на частице с превращением в плазмон σ' .

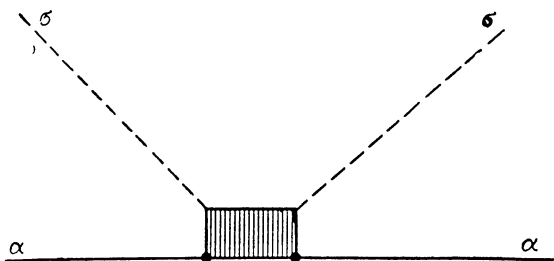


Рис. 2.7. Рассеяние плазмона σ на частице без превращений.

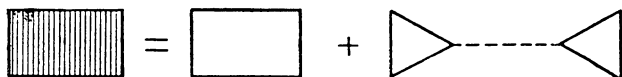


Рис. 2.8. Вершинные части четырехплазмонного распадного процесса.

процесс индуцированного распада этих квантов на кванты σ' и σ'' . Пусть \mathbf{k} , \mathbf{k}' , \mathbf{k}'' — импульсы соответствующих плазмонов, $\omega_{\sigma}^{\sigma' \sigma''}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'')$ — вероятность указанного процесса распада. Изменение числа квантов из-за процесса распада σ -кванта и обратного ему процесса слияния тогда составит:

$$\begin{aligned} \frac{dN_{\mathbf{k}}^{\sigma}}{dt} &= - \int \omega_{\sigma}^{\sigma' \sigma''}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'') \{ N_{\mathbf{k}}^{\sigma} (N_{\mathbf{k}'}^{\sigma'} + 1) \times \\ &\quad \times (N_{\mathbf{k}''}^{\sigma''} + 1) - (N_{\mathbf{k}}^{\sigma} + 1) N_{\mathbf{k}'}^{\sigma'} N_{\mathbf{k}''}^{\sigma''} \} \frac{d\mathbf{k}' d\mathbf{k}''}{(2\pi)^6} = \\ &= \int \omega_{\sigma}^{\sigma' \sigma''}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'') (N_{\mathbf{k}}^{\sigma'} N_{\mathbf{k}''}^{\sigma''} - N_{\mathbf{k}}^{\sigma} N_{\mathbf{k}'}^{\sigma'} - N_{\mathbf{k}}^{\sigma} N_{\mathbf{k}''}^{\sigma''}) \frac{d\mathbf{k}' d\mathbf{k}''}{(2\pi)^6}. \end{aligned} \quad (2.189)$$

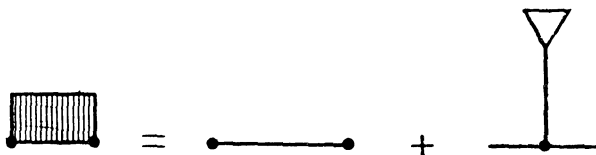


Рис. 2.9. Вершинные части во взаимодействии волн и частиц.

Здесь отброшены члены, линейные по $N_{\mathbf{k}}^{\sigma}$. Более сложные процессы распада на три плазмона или превращения двух плазмонов в два других дают

$$\begin{aligned} \frac{dN_{\mathbf{k}}^{\sigma}}{dt} &= \int \omega_{\sigma}^{\sigma' \sigma'' \sigma'''}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', \mathbf{k}''') (N_{\mathbf{k}}^{\sigma'} N_{\mathbf{k}''}^{\sigma''} N_{\mathbf{k}'''}^{\sigma'''} - N_{\mathbf{k}}^{\sigma} N_{\mathbf{k}'}^{\sigma'} N_{\mathbf{k}''}^{\sigma''} - \\ &\quad - N_{\mathbf{k}}^{\sigma} N_{\mathbf{k}'}^{\sigma'} N_{\mathbf{k}'''}^{\sigma'''} - N_{\mathbf{k}}^{\sigma} N_{\mathbf{k}'}^{\sigma'} N_{\mathbf{k}''}^{\sigma''}) \frac{d\mathbf{k}' d\mathbf{k}'' d\mathbf{k}'''}{(2\pi)^9}. \end{aligned} \quad (2.190)$$

Аналогичным образом, для процессов, изображенных на рис. 2.3, б, получим уравнение, отличающееся от (2.190) лишь знаком перед вторым членом правой части.

В описанных процессах частицы плазмы участия не принимают. Поэтому сумма энергии и импульсов всех плазмонов сохраняется. В силу законов сохранения вероятности процессов должны иметь вид

$$\begin{aligned} \omega_{\sigma}^{\sigma' \sigma''}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'') &= | \Lambda_{\sigma}^{\sigma' \sigma''} |^2 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'') \times \\ &\quad \times \delta(\omega_{\mathbf{k}}^{\sigma} - \omega_{\mathbf{k}'}^{\sigma'} - \omega_{\mathbf{k}''}^{\sigma''}); \end{aligned} \quad (2.191)$$

$$\begin{aligned} \omega_{\sigma}^{\sigma' \sigma'' \sigma'''}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', \mathbf{k}''') &= | \Lambda_{\sigma}^{\sigma' \sigma'' \sigma'''} |^2 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'' - \mathbf{k}''') \times \\ &\quad \times \delta(\omega_{\mathbf{k}}^{\sigma} - \omega_{\mathbf{k}'}^{\sigma'} - \omega_{\mathbf{k}''}^{\sigma''} - \omega_{\mathbf{k}'''}^{\sigma'''}); \end{aligned} \quad (2.192)$$

и т. п. Из (2.191), (2.192) вытекают законы сохранения для полной энергии и полного импульса

$$\frac{d}{dt} \sum_{\sigma} W^{\sigma} = 0; \quad \frac{d}{dt} \sum_{\sigma} \mathbf{P}^{\sigma} = 0;$$

$$W^{\sigma} = \int \omega_{\mathbf{k}}^{\sigma} N_{\mathbf{k}}^{\sigma} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}; \quad \mathbf{P}^{\sigma} = \int \mathbf{k} N_{\mathbf{k}}^{\sigma} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}.$$

Для процесса излучения одной волной σ других ($\sigma'' = \sigma$ для рис. 2.2, а и $\sigma''' = \sigma$ для рис. 2.3) сохраняется полное число волн

$$\frac{d}{dt} N^{\sigma} = 0; \quad N^{\sigma} = \int \frac{N_{\mathbf{k}}^{\sigma} d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}.$$

В случае, если импульс излучаемой волны мал по сравнению с импульсом излучающей волны $k' \ll k$ и если $N_{\mathbf{k}'}^{\sigma} \ll N_{\mathbf{k}''}^{\sigma}$, то уравнение для $N_{\mathbf{k}'}^{\sigma}$ может быть записано в дифференциальной форме

$$\begin{aligned} \frac{dN_{\mathbf{k}'}^{\sigma'}}{dt} &= N_{\mathbf{k}'}^{\sigma'} \int \omega_{\sigma'}^{\sigma}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'') (N_{\mathbf{k}}^{\sigma} - N_{\mathbf{k}''}^{\sigma}) \times \\ &\times \frac{d\mathbf{k}'' d\mathbf{k}}{(2\pi)^6} = N_{\mathbf{k}'}^{\sigma'} \int \omega_{\sigma'}^{\sigma}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \left(\mathbf{k}' \frac{\partial N_{\mathbf{k}}^{\sigma}}{\partial \mathbf{k}} \right) \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}; \\ \omega_{\sigma'}^{\sigma}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') &= \int \omega_{\sigma'}^{\sigma}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'') \frac{d\mathbf{k}''}{(2\pi)^3}. \end{aligned}$$

Здесь учтено $\mathbf{k}'' = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$ и разложено по k'/k .

Для того чтобы аналогичное уравнение записать для волн σ , необходимо учесть, что при $\sigma'' = \sigma$ уравнение (2.189) описывает не все возможные процессы, а лишь те, которые изображены на рис. 2.2, а, а не на рис. 2.2, б. Вероятности последних могут быть выражены через $\omega_{\sigma'}^{\sigma}$ лишь при $\sigma'' = \sigma$. Первый график рис. 2.2, а отличается от первого графика рис. 2.2, б тем, что начальное состояние плазмона σ заменено конечным, которое для рис. 2.2, а есть $\mathbf{k} - \mathbf{k}'$, т. е. вероятность процесса первого графика рис. 2.2, а есть $\omega_{\sigma'}^{\sigma}(\mathbf{k} + \mathbf{k}', \mathbf{k}')$. Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{dN_{\mathbf{k}}^{\sigma}}{dt} &= - \int \{ \omega_{\sigma'}^{\sigma}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') [(N_{\mathbf{k}'}^{\sigma'} + 1) N_{\mathbf{k}}^{\sigma} - N_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma} N_{\mathbf{k}'}^{\sigma'}] + \\ &+ \omega_{\sigma'}^{\sigma}(\mathbf{k} + \mathbf{k}', \mathbf{k}') [N_{\mathbf{k}}^{\sigma} N_{\mathbf{k}'}^{\sigma'} - (N_{\mathbf{k}}^{\sigma'} + 1) N_{\mathbf{k}+\mathbf{k}'}^{\sigma}] \} \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3}. \end{aligned}$$

Разлагая в ряд по k' , получаем уравнение диффузии

$$\frac{dN_k^\sigma}{dt} = \frac{\partial}{\partial k_i} D_{ij}^{\sigma\sigma'} \frac{\partial N_k^\sigma}{\partial k_j};$$

$$D_{ij}^{\sigma\sigma'} = \int \omega_{\sigma'}^{\sigma'}(k, k') N_{k'}^{\sigma'} k'_i k'_j \frac{dk'}{(2\pi)^3}.$$

Для дальнейшего важно знать также интенсивность спонтанного процесса излучения одного плазмона σ из-за распадного процесса. Рассмотрим, например, процесс трехплазмонного распада, описываемый уравнением (2.189). Переходя в точном уравнении (2.189) к пределу $N_k^\sigma \rightarrow 0$, имеем

$$\left. \frac{dN_k^\sigma}{dt} \right|_{N_k^\sigma \rightarrow 0} = \int \omega_{\sigma'}^{\sigma' \sigma''}(k, k', k'') N_{k'}^{\sigma'} N_{k''}^{\sigma''} \frac{dk' dk''}{(2\pi)^6}.$$

Отсюда нетрудно найти мощность излучения волн σ волнами σ' и σ''

$$\frac{dW^\sigma}{dt} = \frac{d}{dt} \int \frac{\omega_k^\sigma N_k^\sigma dk}{(2\pi)^3} =$$

$$= \int \omega_k^\sigma N_{k''}^{\sigma''} N_{k'}^{\sigma'} \omega_{\sigma'}^{\sigma' \sigma''}(k, k', k'') \frac{dk dk' dk''}{(2\pi)^9}. \quad (2.193)$$

Эта мощность излучения может быть найдена из нелинейного тока плазмы.

Рассмотрим далее движение частиц плазмы. Охарактеризуем движение отдельной квазичастицы при наличии внешних магнитных полей значением проекции импульса вдоль магнитного поля p_z , значением энергии частицы ϵ и значением координаты центра ларморовской окружности. При квантовом описании для общего случая релятивистских частиц (см., например, [79])

$$\epsilon^2 = m^2 c^4 + c^2 (p_z^2 + p_\perp^2),$$

где $p_\perp^2 = 2 |eH| \hbar (n + s)$, где n — целое число, характеризующее уровни энергии частицы в магнитном поле, s — квантовое число, соответствующее спину, изменением которого в процессах взаимодействия, вообще говоря, можно пренебречь. Если для потенциала внешнего магнитного поля выбрана калибровка $A_x = -Hy$; $A_z = A_y = 0$, то сохраняется величина p_x . Координата центра ларморовской окружности связана с p_x соотношением

$$y = -\frac{cp_x}{eH}.$$

Функция распределения частиц зависит от трех величин p_z, p_x, n

$$f = f_{p_z, p_x, n}.$$

Рассмотрим процесс, в котором частица переходит из состояния p_z, p_x, n в состояние p'_z, p'_x, n' . Обозначим k_z, k_x и ν соответственно величины (как и выше, полагаем $\hbar=1$)

$$k_z = p_z - p'_z; \quad k_x = p_x - p'_x; \quad \nu = n - n'.$$

Будем считать, что изменение энергии $\Delta\varepsilon$ является малым, т. е.

$$\varepsilon \Delta\varepsilon = p_z k_z + \nu |eH|.$$

Пусть, например, изменение состояния частицы связано с излучением ею волны ω_k^σ . Вероятность такого излучения зависит от параметров исходного состояния p_z, p_x, n и от изменения энергии $\Delta\varepsilon$ и изменения импульса k : $\omega_{p_z, p_x, n}(k, \Delta\varepsilon)$. Так как при заданном k (в частности, заданном k_z) величина $\Delta\varepsilon$ определяется целым числом ν , то вместо $\Delta\varepsilon$ можно указывать ν , т. е. $\omega = \omega_{p_z, p_x, n}(k, \nu)$. Из закона сохранения энергии $\Delta\varepsilon = \omega_k^\sigma$

$$\omega_{p_z, p_x, n}^\sigma(k, \nu) \sim \delta(\omega_k^\sigma - k_z \nu - \omega_H \nu),$$

где $\omega_H = \frac{|eH|c}{e}$ — циклотронная частота частиц плазмы.

Составим уравнение баланса для функции распределения f

$$\begin{aligned} \frac{df_{p_z, p_x, n}}{dt} = & - \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int \omega_{p_z, p_x, n}^\sigma(k, \nu) [f_{p_z, p_x, n}(N_k^\sigma + 1) - \\ & - N_k^\sigma f_{p_z - k_z, p_x - k_x, n - \nu}] + \omega_{p_z + k_z, p_x + k_x, n + \nu}(k, \nu) [N_k^\sigma f_{p_z, p_x, n} - \\ & - (N_k^\sigma + 1) f_{p_z + k_z, p_x + k_x, n + \nu}] dk (2\pi)^{-3}. \end{aligned} \quad (2.194)$$

Первые два члена (2.194) описывают излучение плазмона ω_k^σ в состоянии p_z, p_x, n и обратный этому процесс поглощения плазмона из состояния $p_z - k_z, p_x - k_x, n - \nu$, а следующие два — поглощение плазмона в состоянии p_z, p_x, n и обратный ему процесс излучения плазмона из состояния $p_z + k_z, p_x + k_x, n + \nu$.

Пусть теперь движение частицы является квазиклассическим, т. е. значения квантового числа n весьма велики и $\nu \ll n$. Вместо величины n удобно движение частицы характеризовать p_\perp

$$p_\perp^2 = 2\varepsilon\omega_H n; \quad p_\perp \Delta p_\perp = \varepsilon\omega_H \nu.$$

Будем считать, что функция распределения зависит от величины p_z, p_{\perp}, y :

$$f_{p_z, p_x, n} \rightarrow f_{p_z, p_{\perp}, y}; \quad f_{p_z - k_z, p_x - k_x, n - \nu} \rightarrow f_{p_z, p_{\perp}, y - k_z} \frac{\partial}{\partial p_z} f_{p_z, p_{\perp}, y} - \\ - \frac{1}{v_1} \omega_H \nu \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} f_{p_z, p_{\perp}, y} + \frac{k_x c}{eH} \cdot \frac{\partial}{\partial y} f_{p_z, p_{\perp}, y}$$

и т. д.

Разлагая функцию f вплоть до вторых производных, получаем уравнения диффузионного типа:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int \frac{dk}{(2\pi)^3} N_k^{\sigma} \Delta \lambda_i \Delta \lambda_j \omega_{p_z, p_{\perp}, y}^{\sigma}(k, \nu) \frac{\partial f}{\partial \lambda_j} + \\ + \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int \frac{dk}{(2\pi)^3} \Delta \lambda_i \omega_{p_z, p_{\perp}, y}^{\sigma}(k, \nu) f; \\ \lambda_1 = p_z, \quad \Delta \lambda_1 = k_z; \quad \lambda_2 = p_{\perp}; \quad \Delta \lambda_2 = \frac{\omega_H \nu}{v_{\perp}}; \quad (2.195) \\ \lambda_3 = y; \quad \Delta \lambda_3 = - \frac{k_x c}{|eH_0|}.$$

Первый член (2.195) описывает эффекты индуцированного излучения и поглощения волн, а второй — спонтанные эффекты.

Рассмотрим теперь процессы более высокого порядка по числу излучаемых и поглощаемых волн. К таким процессам относятся рассеяния волн на частицах плазмы. Обозначим вероятность рассеяния $\omega_{p_z, p_{\perp}, y}^{\sigma\sigma'}(k, k', \nu)$. Изменение импульса в данном случае есть $k - k'$ (волна k поглощается, k' испускается). В соответствии с этим изменение энергии будет

$$\varepsilon \Delta \varepsilon = p_z (k_z - k'_z) + \omega_H \varepsilon \nu.$$

Из закона сохранения энергии $\Delta \varepsilon = \omega_k^{\sigma} - \omega_{k'}^{\sigma'}$, и, следовательно, $\omega_{p_z, p_{\perp}, y}^{\sigma\sigma'}$ пропорционально

$$\delta (\omega_k^{\sigma} - \omega_{k'}^{\sigma'} - v_z (k_z - k'_z) - \omega_H \nu).$$

Уравнение баланса записывается аналогично (2.194)

$$\frac{df}{dt} = - \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int \frac{dk dk'}{(2\pi)^6} \left\{ \omega_{p_z, p_x, n}^{\sigma\sigma'}(k, k', \nu) [f_{p_z, p_x, n} N_k^{\sigma} (N_{k'}^{\sigma'} + 1) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\dot{f}_{p_z - k_z + k'_z, p_x - k_x + k'_x, n - \nu} (N_k^\sigma + 1) N_{k'}^{\sigma'} \Big] + \\
& + \omega_{p_z + k_z - k'_z, p_x + k_x - k'_x, n + \nu} (\mathbf{k}, \mathbf{k}', \nu) \left[\dot{f}_{p_z, p_x, n} (N_k^\sigma + 1) N_{k'}^{\sigma'} - \right. \\
& \left. - \dot{f}_{p_z + k_z - k'_z, p_x + k_x - k'_x, n + \nu} (N_{k'}^{\sigma'} + 1) N_k^\sigma \right]. \quad (2.196)
\end{aligned}$$

Разложение по Δp_\perp , Δp_z , Δy приводит к уравнению, аналогичному (2.195),

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dt} &= \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int \frac{dk dk'}{(2\pi)^6} N_k^\sigma N_{k'}^{\sigma'} \Delta \lambda'_i \Delta \lambda'_j \omega_{p_z, p_\perp, y}^{\sigma\sigma'} (\mathbf{k}, \mathbf{k}', \nu) \frac{\partial f}{\partial \lambda_j}; \\
\Delta \lambda'_1 &= k_z - k'_z; \quad \Delta \lambda'_2 = \frac{\omega_H \nu}{v_\perp}; \\
\Delta \lambda'_3 &= -\frac{(k_x - k'_x) c}{|eH_0|}. \quad (2.197)
\end{aligned}$$

В (2.197) учтены лишь индуцированные процессы.

Нам осталось теперь учесть процессы излучения и рассеяния плазмонов на частицах плазмы в уравнениях, описывающих изменение числа плазмонов.

Рассмотрим, например, изменение числа плазмонов из-за их излучения и поглощения частицами плазмы

$$\begin{aligned}
\frac{dN_k^\sigma}{dt} &= \sum_{n, \nu} \int dp_z \{ (N_k^\sigma + 1) \omega_{p_z, p_x, n}^\sigma (\mathbf{k}, \nu) \dot{f}_{p_z, p_x, n} - \\
& - \omega_{p_z, p_x, n}^\sigma (\mathbf{k}, \nu) N_k^\sigma \dot{f}_{p_z - k_z, p_x - k_x, n - \nu} \} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int \frac{dp}{(2\pi)^3} N_k^\sigma \times \\
& \times \omega_{p_z, p_\perp, y}^\sigma (\mathbf{k}, \nu) \Delta \lambda_i \frac{\partial f}{\partial \lambda_i} + \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int dp (2\pi)^{-3} \omega_{p_z, p_\perp, y}^\sigma (\mathbf{k}, \nu) \dot{f}_{p_z, p_\perp, y}. \quad (2.198)
\end{aligned}$$

Первый член (2.198) описывает индуцированные процессы, а второй — спонтанные.

Рассмотрим мощность излучения квантов σ при $N_k^\sigma \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
Q^\sigma &= \int \frac{\omega_k^\sigma}{(2\pi)^3} dk \frac{dN_k^\sigma}{dt} \Big|_{N_k^\sigma \rightarrow 0} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int \frac{\omega_k^\sigma}{(2\pi)^3} \omega_{p_z, p_\perp}^\sigma (\mathbf{k}, \nu) \times \\
& \times \frac{dk dp}{(2\pi)^3} \dot{f}_{p_z, p_\perp} = \int \dot{f}_{p_z, p_\perp} \frac{dp}{(2\pi)^3} \frac{d}{dt} W_{p_z, p_\perp}^\sigma, \quad (2.199)
\end{aligned}$$

где $\frac{d}{dt} W_{\rho_z, \rho_\perp}^\sigma$ — мощность излучения отдельной частицы плазмы.

Перейдем теперь к рассмотрению эффектов рассеяния частиц. Аналогично (2.197) получим

$$\begin{aligned} \frac{dN_k^\sigma}{dt} = & \sum_{n, \nu} \int \omega_{\rho_z, \rho_x, n}^{\sigma\sigma'}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \nu) \left\{ N_{\mathbf{k}'}^{\sigma'} (N_{\mathbf{k}}^\sigma + 1) f_{\rho_z, \rho_x, n} - N_{\mathbf{k}}^\sigma (N_{\mathbf{k}'}^{\sigma'} + 1) \right. \\ & \times f_{\rho_z - \mathbf{k}_z + \mathbf{k}'_z, \rho_x - \mathbf{k}_x + \mathbf{k}'_x, n - \nu} \left. \right\} \frac{d\mathbf{k}' d\rho_z}{(2\pi)^3} = \sum_{\nu = -\infty}^{\infty} \int \frac{d\rho d\mathbf{k}'}{(2\pi)^6} N_{\mathbf{k}}^\sigma N_{\mathbf{k}'}^{\sigma'} \Delta\lambda'_i \frac{\partial f}{\partial \lambda_i} \times \\ & \times \omega_{\rho_z, \rho_\perp}^{\sigma\sigma'}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \nu) + \sum_{\nu = -\infty}^{\infty} \int \frac{d\rho d\mathbf{k}'}{(2\pi)^6} N_{\mathbf{k}'}^{\sigma'} \omega_{\rho_z, \rho_\perp}^{\sigma\sigma'}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \nu) f_{\rho_z, \rho_\perp} - \\ & - \sum_{\nu = -\infty}^{\infty} N_{\mathbf{k}}^\sigma \int \frac{d\rho d\mathbf{k}'}{(2\pi)^6} \omega_{\rho_z, \rho_\perp}^{\sigma\sigma'}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \nu) f_{\rho_z, \rho_\perp}. \end{aligned} \quad (2.200)$$

Первый член (2.200) описывает нелинейные эффекты взаимодействия волн $N_{\mathbf{k}}^\sigma$ и $N_{\mathbf{k}'}^{\sigma'}$, а последующие два — эффекты спонтанного рассеяния. В пределе $N_{\mathbf{k}}^\sigma \rightarrow 0$ имеем

$$\begin{aligned} Q^\sigma = & \int \frac{\omega_{\mathbf{k}}^\sigma}{(2\pi)^3} d\mathbf{k} \left. \frac{dN_{\mathbf{k}}^\sigma}{dt} \right|_{N_{\mathbf{k}}^\sigma \rightarrow 0} = \sum_{\nu = -\infty}^{\infty} \int \frac{d\rho d\mathbf{k} d\mathbf{k}'}{(2\pi)^9} N_{\mathbf{k}'}^{\sigma'} f_{\rho_z, \rho_\perp} \times \\ & \times \omega_{\rho_z, \rho_\perp}^{\sigma, \sigma'}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \nu) = \int f_{\rho_z, \rho_\perp} \frac{d\rho}{(2\pi)^3} \cdot \frac{d}{dt} W_{\rho_z, \rho_\perp}^{\sigma, \sigma'}, \end{aligned} \quad (2.201)$$

где $\frac{d}{dt} W_{\rho_z, \rho_\perp}^{\sigma, \sigma'}$ — мощность рассеяния отдельного заряда плазмы.

§ 2.10. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ПРОЦЕССОВ

Можно указать простой способ расчета вероятностей процессов распада излучения и рассеяния волн, являющийся обобщением метода, предложенного Ландау [см. работы [4, 60)]. Используем принцип соответствия, а именно, найдем из нелинейных уравнений мощность излучения волны σ в пределе ее малой интенсивности. Для этого достаточно суммировать результаты (2.193), (2.199), (2.201).

Мощность излучения волны σ может быть подсчитана как работа поля волны σ , генерируемой в данном процессе, над током, являющимся источником излучения. Из уравнений Максвелла

$$(k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \omega^2 \epsilon_{ij}) E_{k, j} = 4\pi i \omega j_{k, j} \quad (2.202)$$

можно найти напряженность поля с поляризацией $e_k^\sigma (E_{k,j} = e_{k,j}^\sigma E_k^\sigma)$

$$(k^2 - \omega^2 \varepsilon_k^\sigma) E_k^\sigma = 4\pi i \omega (e_{k^*}^{\sigma*} j_k). \quad (2.203)$$

Для распадного процесса током, входящим в (2.203), является нелинейный ток $j_k^{(2)}$

$$j_{k,i}^{(2)} = 2 \int S_{ij,l}(k, k_1, k_2) E_{k_1,i}^{\sigma'} E_{k_2,l}^{\sigma''} \delta(k - k_1 - k_2) dk_1 dk_2,$$

создаваемый полями волн σ' и σ'' , $E_{ki}^{\sigma'} = e_{ki}^{\sigma'} E_k^{\sigma'}$, а мощность излучения можно найти из

$$Q^\sigma = -\langle j^{(2)}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}^{(2)}(\mathbf{r}, t) \rangle = -4\pi i \times \\ \times \int \frac{\omega dk' dk e^{i(k-k')x} \langle (e_k^\sigma j_{k'}^{(2)*}) (e_{k^*}^{\sigma*} j_k^{(2)}) \rangle}{(k^2 - \omega^2 \varepsilon_k^\sigma)}. \quad (2.204)$$

После усреднения по полям турбулентных пульсаций получим из нескоррелированности волн σ и σ' , что в (2.204) $k = k'$. В силу действительности (2.204) войдет лишь мнимая часть $\frac{1}{k^2 - \omega^2 \varepsilon_k^\sigma}$,

равная в области прозрачности $i\pi \delta(k^2 - \omega^2 \varepsilon_k^\sigma)$. Записав выражения, содержащие $I_{k'}^{\sigma'}$ и $I_{k''}^{\sigma''}$, через число квантов с помощью (2.134) получим результат (2.193). Из сопоставления имеем выражение для вероятности трехплазмонного распада через нелинейный ток плазмы

$$\omega_{\sigma'}^{\sigma'} \omega_{\sigma''}^{\sigma''} (k, k', k'') = 32\rho (2\pi)^7 \delta(k - k' - k'') \delta(\omega_k^\sigma - \omega_{k'}^{\sigma'} - \omega_{k''}^{\sigma''}) (\omega_{k'}^{\sigma'})^2 \bar{\omega} \\ \times (\omega_{k''}^{\sigma''})^2 |S_{\sigma\sigma'\sigma''}(\omega_k^\sigma, k, \omega_{k'}^{\sigma'}, k', \omega_{k''}^{\sigma''}, k'')|^2 \left[\frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \varepsilon_k^\sigma \Big|_{\omega=\omega_k^\sigma} \times \right. \\ \left. \times \frac{\partial}{\partial \omega} \omega'^2 \varepsilon_{k'}^{\sigma'} \Big|_{\omega'=\omega_{k'}^{\sigma'}} \frac{\partial}{\partial \omega} \omega''^2 \varepsilon_{k''}^{\sigma''} \Big|_{\omega''=\omega_{k''}^{\sigma''}} \right]^{-1}; \quad (2.205)$$

$$S_{\sigma\sigma'\sigma''}(k, k', k'') = e_{k,i}^{\sigma*} e_{k',j}^{\sigma'} e_{k'',l}^{\sigma''} S_{ijl}(k, k', k''), \quad (2.206)$$

где e_k^σ — нормальные единичные векторы волн, введенные в § 2 настоящей главы ($\rho = 1$, $\sigma' \neq \sigma''$; $\rho = 1/2$, $\sigma' = \sigma''$).

Для четырехплазмонных распадов наряду с током $j^{(3)}$, описывающим процесс, изображенный графически на рис. 2.3, а, необходимо учесть эффекты, возникающие от итерации тока $j^{(2)}$. Согласно работам [80] матричные элементы указанных двух графиков

сильно компенсируют друг друга, например, как и при рассеянии волн на частицах плазмы. Общая формула для вероятности четырехплазмонного распада имеет вид

$$\begin{aligned} \omega_{\sigma}^{\sigma' \sigma'' \sigma'''}(k, k', k'', k''') = & 288(2\pi)^8 \delta(k - k' - k'' - k''') \delta(\omega_k^{\sigma} - \omega_{k'}^{\sigma'} - \\ & - \omega_{k''}^{\sigma''} - \omega_{k'''}^{\sigma'''}) (\omega_{k'}^{\sigma'})^2 (\omega_{k''}^{\sigma''})^2 (\omega_{k'''}^{\sigma'''})^2 \left| \sum_{\sigma \sigma' \sigma'' \sigma'''}^{\text{эфф}} (\omega_k^{\sigma}, k; \omega_{k'}^{\sigma'}, k'; \right. \\ & \left. \omega_{k''}^{\sigma''}, k''; \omega_{k'''}^{\sigma'''}, k''') \right|^2 \left[\frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \varepsilon_k^{\sigma} \frac{\partial}{\partial \omega'} \omega'^2 \varepsilon_{k'}^{\sigma'} \frac{\partial}{\partial \omega''} \omega''^2 \varepsilon_{k''}^{\sigma''} \right. \\ & \left. \times \omega''^2 \varepsilon_{k''}^{\sigma''} \frac{\partial}{\partial \omega'''} \omega'''^2 \varepsilon_{k'''}^{\sigma'''} \right]_{\omega = \omega_k^{\sigma}, \omega' = \omega_{k'}^{\sigma'},}^{-1} ; \quad (2.207) \\ & \omega'' = \omega_{k''}^{\sigma''}, \omega''' = \omega_{k'''}^{\sigma'''} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \sigma' \sigma'' \sigma'''}^{\text{эфф}} (k, k', k'', k''') = & e_{k,i}^{\sigma} e_{k',j}^{\sigma'} e_{k'',l}^{\sigma''} e_{k''',s}^{\sigma'''} \sum_{i,j,l,s}^{\text{эфф}} (k, k', k'', k'''); \\ \sum_{ijls}^{\text{эфф}} (k, k', k'', k''') = & \sum_{ijls} (k, k', k'', k''') + \\ & + 8\pi i (\omega - \omega') S_{ijm}(k, k', k - k') \Pi_{mn}(k - k') S_{nls}(k - k', k'', k'''); \\ & (k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{1}{c^2} \omega^2 \varepsilon_{ij}) \Pi_j = \delta_{il}. \end{aligned}$$

Для вычисления вероятностей излучения и рассеяния удобно использовать выражение для мощности излучения отдельной частицы. Создаваемая ею плотность тока есть

$$j = ev(t) \delta(r - r(t)). \quad (2.208)$$

Следует отдельно рассмотреть замагниченные и немагниченные частицы. Критерием замагниченности является отношение длины излучаемой волны к ларморовскому радиусу частицы (частица замагничена, если ее ларморовский радиус много меньше длины волны).

Рассмотрим общий случай движения частицы в магнитном поле. Так как модуль скорости в магнитном поле постоянен, уравнение движения заряда можно записать в виде

$$\frac{dv_x}{dt} = -\omega_H v_y; \quad \frac{dv_y}{dt} = \omega_H v_x;$$

$$\omega_H = \frac{eH_0 c}{\varepsilon},$$

отсюда

$$\begin{aligned} v_x &= v_{\perp} \cos(\omega_H t + \varphi_0); \quad v_y = -v_{\perp} \sin(\omega_H t + \varphi_0); \quad v_z = \text{const}; \\ x &= x_0 + \frac{v_{\perp}}{\omega_H} \sin(\omega_H t + \varphi_0); \quad y = y_0 + \frac{v_{\perp}}{\omega_H} \cos(\omega_H t + \varphi_0); \\ z &= v_z t + z_0. \end{aligned} \quad (2.209)$$

Компонента Фурье тока (2.208) есть

$$\mathbf{j}_k = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r} + i\omega t} d\mathbf{r} dt = \frac{e}{(2\pi)^4} \int \mathbf{v}(t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}(t) + i\omega t} dt. \quad (2.210)$$

Если известно конкретное выражение для $\mathbf{v}(t)$ и $\mathbf{r}(t)$ (2.209), то (2.210) позволяет несложным путем вычислить \mathbf{j}_k . Например, для j_{kz} имеем, выбирая ось x в плоскости \mathbf{k} , \mathbf{H}_0 ,

$$i_{k,z} = \frac{ev_z}{(2\pi)^4} \int e^{i\omega t - i\zeta \sin(\omega_H t + \varphi_0) - ik_z v_z t - ikr_0} dt, \quad (2.211)$$

$$\zeta = \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_H}. \quad (2.212)$$

Используя известную формулу разложения

$$e^{-i\zeta \sin \varphi} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-i\nu\varphi} J_{\nu}(\zeta), \quad (2.213)$$

где J_{ν} — функция Бесселя, без труда вычисляем интеграл (2.211)

$$j_{k,z} = \frac{ev_z}{(2\pi)^3} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-i\nu\varphi_0 - ikr_0} J_{\nu}(\zeta) \delta(\omega - k_z v_z - \nu\omega_H). \quad (2.214)$$

Точно так же вычисляют остальные компоненты, и общее выражение для тока принимает вид

$$j_{k,i}^a = \frac{e_a}{(2\pi)^3} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \Gamma_{k,\nu,i}^a e^{-i\nu\varphi_0 - ikr_0} \delta(\omega - k_z v_z - \nu\omega_H); \quad (2.215)$$

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{k,\nu,1} &= \frac{\nu J_{\nu}(\zeta_a)}{\zeta_a} v_{\perp}; \\ \Gamma_{k,\nu,2} &= -i v_{\perp} J'_{\nu}(\zeta_a); \\ \Gamma_{k,\nu,3} &= v_z J_{\nu}(\zeta_a). \end{aligned} \right\} \quad (2.216)$$

Воспользовавшись (2.203), найдем среднюю по начальным фазам φ_0 работу поля E^{σ} , создаваемого плотностью тока \mathbf{j}_k , над этой

же плотностью тока \mathbf{j}_k . Эта работа совпадает с мощностью излучения

$$\begin{aligned} \frac{dW_{p_z, p_\perp}^\sigma}{dt} &= - \int \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} = - (2\pi)^3 \int \frac{d\mathbf{k} d\omega d\omega'}{k^2 - \omega^2 \epsilon^\sigma} 4\pi i \omega (\mathbf{j}_{\mathbf{k}, \omega}^* \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}}^\sigma) \times \\ &\times (\mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{\sigma*} \cdot \mathbf{j}_k) \exp[-i(\omega - \omega')t] = - \frac{4\pi i}{(2\pi)^3} \sum_{\nu, \nu' = -\infty}^{\infty} \int \exp[-i(\omega - \omega')t - \\ &- i(\nu - \nu')\varphi_0] (\Gamma_{\mathbf{k}, \nu}^* \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}}^\sigma) (\Gamma_{\mathbf{k}, \nu} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{\sigma*}) \delta(\omega - k_z \nu - \nu \omega_H) \times \\ &\times \delta(\omega' - k_z \nu' - \nu' \omega_H) \frac{d\mathbf{k} d\omega d\omega'}{k^2 - \omega^2 \epsilon^\sigma}. \end{aligned} \quad (2.217)$$

Усреднение по начальным фазам означает

$$\frac{1}{2\pi} \int e^{-i(\nu - \nu')\varphi_0} d\varphi_0 = \delta_{\nu, \nu'}. \quad (2.218)$$

Имеем

$$\begin{aligned} Q_{p_z, p_\perp}^\sigma &= \frac{dW_{p_z, p_\perp}^\sigma}{dt} = \frac{e^2}{\pi} \sum_{\nu = -\infty}^{\infty} \int \frac{\omega_k^\sigma dk}{\left| \frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \epsilon_k^\sigma \right|_{\omega = \omega_k^\sigma}} \times \\ &\times |\Gamma_{\mathbf{k}, \nu} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{\sigma*}|^2 \delta(\omega_k^\sigma - k_z \nu - \nu \omega_H). \end{aligned} \quad (2.219)$$

Сопоставляя этот результат с (2.199), получаем

$$\omega_{p_z, p_\perp}^\sigma(\mathbf{k}, \nu) = 8\pi^2 e^2 \frac{|\Gamma_{\mathbf{k}, \nu} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{\sigma*}|^2}{\left| \frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \epsilon_k^\sigma \right|_{\omega = \omega_k^\sigma}} \delta(\omega_k^\sigma - k_z \nu - \nu \omega_H). \quad (2.220)$$

Эта формула решает общую задачу о вычислении вероятностей излучения частиц плазмы. При $\nu = 0$ излучение называется черенковским, а при $\nu \neq 0$ — циклотронным. Это название связано с тем, что в системе отсчета, движущейся со скоростью заряда вдоль магнитного поля ν_z , частота ω_k^σ из-за эффекта Доплера преобразуется в $(\omega_k^\sigma)' = \omega_k^\sigma - k_z \nu_z$. Поэтому для $\nu = 0$ $(\omega_k^\sigma)' = 0$, т. е. на частицу действует постоянное поле — частица находится в резонансе с волной. Для $\nu \neq 0$ имеем $(\omega_k^\sigma)' = \nu \omega_H$, т. е. частота кратна гирочастоте вращения электрона — имеет место циклотронный резонанс. Заметим, что для продольных волн

$$(\Gamma_{\mathbf{k}, \nu} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{\sigma*}) = \frac{\Gamma_{\mathbf{k}, \nu} \cdot \mathbf{k}}{k} = \frac{\omega_k^\sigma}{k} J_\nu(\xi)$$

и

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \varepsilon_k^\sigma \Big|_{\omega=\omega_k^\sigma} = (\omega_k^l)^2 \frac{\partial \varepsilon_k^l}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_k^l}$$

получим

$$\omega_{\rho_z, \rho_\perp}^l(\mathbf{k}, \nu) = 8\pi^2 \frac{e^2}{k^2} \frac{J_\nu^2(\zeta) \delta(\omega_k^l - k_z v_z - \nu \omega_H)}{\frac{\partial \varepsilon_k^l}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_k^l}}. \quad (2.221)$$

Часто возможна ситуация, когда один из сортов частиц (электроны или ионы) или оба практически можно считать немагнитными, т. е. средний ларморовский радиус частицы много больше $1/k_\perp = \lambda_\perp$ — длины волны плазмона поперек магнитного поля. В этом случае $\zeta \gg 1$, все ν вплоть до весьма высоких вносят вклад и использование (2.221) представляется неудобным.

Проще всего с самого начала считать, что заряд движется за время излучения волны σ практически прямолинейно, и использовать выражение для плотности тока

$$\mathbf{j}_k = \frac{e\nu}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_0} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}). \quad (2.222)$$

Это дает выражение для вероятности

$$\omega_p^\sigma(\mathbf{k}) = 8\pi^2 e^2 \frac{|\mathbf{v}e_k^\sigma|^2 \delta(\omega_k^\sigma - \mathbf{k}\mathbf{v})}{\frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \varepsilon_k^\sigma \Big|_{\omega=\omega_k^\sigma}}, \quad (2.223)$$

а для продольных волн

$$\omega_p^l(\mathbf{k}) = 8\pi^2 \frac{e^2}{k^2} \frac{\delta(\omega^l - \mathbf{k}\mathbf{v})}{\frac{\partial \varepsilon_k^l}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_k^l}}. \quad (2.224)$$

Последними выражениями можно пользоваться в плазме с $H_0 = 0$.

Обратимся теперь к вероятностям рассеяния. Как отмечалось в первом приближении, амплитуда рассеяния описывается двумя диаграммами (см. рис. 2.6, 2.9). Физический смысл первой диаграммы на классическом языке состоит в том, что волна σ' колеблет заряд, который вследствие таких колебаний излучает волну σ (излучение происходит всех типов волн, но нас интересует именно этот процесс). Ток, возбуждаемый колеблющимся зарядом, в первом приближении пропорционален полю волны $E_k^{\sigma'}$

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_k^{ac} &= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int \Lambda^{ac}(k, k', \nu) E_{k'}^{\sigma'} dk' \times \\ &\times \delta(\omega - \omega' - (k_z - k'_z) v_z - \nu \omega_{H\alpha}). \end{aligned} \quad (2.225)$$

Обычно вектор Λ^c можно несложно вычислить по теории возмущений, если считать, что в первом приближении заряд движется по винтовой линии, а поле $E_{k'}^{\sigma'}$ слабо возмущает это движение.

Второй тип рассеяния, изображенный на рис. 2.9, наглядно интерпретируется как излучение, возникающее от заряда, который движется по винтовой линии (без возмущения) в плазме, плотность и другие параметры которой возмущены волной $E_{k'}^{\sigma'}$. Возникающее излучение аналогично переходному излучению заряда в среде с периодически меняющейся в пространстве и времени плотностью [63—65].

Ток, описывающий такое излучение, есть нелинейный ток, создаваемый полем $E_{k'}^{\sigma'}$ и полем заряда E_k^{α} , движущегося по винтовой линии,

$$j_{k,i}^{\alpha N} = \int S_{ijl}(k, k_1, k_2) dk_1 dk_2 \times \\ \times \delta(k - k_1 - k_2) (E_{k_1, j}^{\alpha} E_{k_2, l}^{\sigma'} + E_{k_1, j}^{\sigma'} E_{k_2, l}^{\alpha}). \quad (2.226)$$

Считая, что S_{ijl} обладает свойством симметрии

$$S_{ijl}(k, k_1, k_2) = S_{i, l, j}(k, k_2, k_1),$$

имеем

$$j_{k,i}^{\alpha N} = 2 \int S_{ijl}(k, k', k - k') E_{k', j}^{\sigma'} E_{k - k', l}^{\alpha} dk'. \quad (2.227)$$

Поле $E_{k, l}^{\alpha}$ может быть найдено по току $j_{k, l}^{\alpha}$ (2.215) из уравнений Максвелла

$$(k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{1}{c^2} \omega^2 \epsilon_{ij}) E_{k, j}^{\alpha} = 4\pi i \omega j_{k, i}^{\alpha}. \quad (2.228)$$

Обозначим обратный максвелловский оператор $\Pi_{ij}(k)$

$$\Pi_{si}(k) (k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{1}{c^2} \omega^2 \epsilon_{ij}) = \delta_{sj}. \quad (2.229)$$

Тогда

$$E_{k - k', l}^{\alpha} = 4\pi i (\omega - \omega') \Pi_{ls}(k - k') \sum_{\nu = -\infty}^{\infty} \frac{e}{(2\pi)^3} \Gamma_{k - k', s}^{\alpha'} \times \\ \times \exp[-i(k - k')r_0 - i\nu\varphi_0] \delta(\omega - \omega' - (k_z - k'_z) v_z - \nu\omega_{H\alpha}). \quad (2.230)$$

Здесь Γ' — вектор (2.216) в произвольной системе координат, а не системе отсчета, в которой $k_y = 0$, когда справедливо (2.216), и отличается от Γ тем, что Γ'_1 и Γ'_2 являются линейными комбинациями Γ_1 и Γ_2 . Ток, описывающий нелинейное рассеяние, приобретает вид, аналогичный (2.225),

$$j_k^{\alpha N} = \sum_{\nu = -\infty}^{\infty} \int \Lambda^N(k, k', \nu) E_{k'}^{\sigma'} dk' \times$$

$$\times \exp[-i(k - k')r_0 - i\nu\varphi_0] \delta(\omega - \omega' - (k_z - k'_z) v_z - \nu\omega_{H\alpha}), \quad (2.231)$$

где

$$\Lambda_i^N(k, k', \nu) = \frac{8\pi e i (\omega - \omega')}{(2\pi)^3} e_{k', i}^{\sigma'} \times \\ \times S_{ijl}(k, k', k - k') \Pi_{ls}(k - k') \Gamma_{k-k', s}^{\alpha} \quad (2.232)$$

Полный ток, описывающий рассеяние, является суммой j_k^{aN} и j_k^{ac} . Это означает, что амплитуды, соответствующие двум графикам, складываются, однако вероятности, естественно, нет. В классическом пределе это значит, что два описанных механизма излучения σ -волн интерферируют между собой. В случае немагнитических частиц в (2.225) и (2.331) сумма по ν отсутствует, а аргумент δ -функции равен $\omega - \omega' - (k - k') \cdot v$.

Вычисление вероятности рассеяния с помощью тока $j_k^{aN} + j_k^{ac}$ совершенно сходно с фигурировавшими выше. Поэтому мы приведем результат [81]

$$w_{\rho_z, \rho_{\perp}}^{\sigma' \sigma}(k, k', \nu) = \frac{4(2\pi)^9 |\Lambda_{\sigma\sigma'}(\omega_k^{\sigma}, k, \omega_{k'}^{\sigma'}, k', \nu)|^2}{\frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \varepsilon_k^{\sigma} \Big|_{\omega=\omega_k^{\sigma}} \frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \varepsilon_{k'}^{\sigma'} \Big|_{\omega=\omega_{k'}^{\sigma'}}} \times \\ \times (\omega_{k'}^{\sigma'})^2 \delta(\omega_k^{\sigma} - \omega_{k'}^{\sigma'} - (k_z - k'_z) v_z - \nu \omega_{Ha}), \quad (2.233)$$

где

$$\Lambda_{\sigma\sigma'} = e_{k', i}^{\sigma*} (\Lambda_i^{ac} + \Lambda_i^{a, N}). \quad (2.234)$$

Существует область параметров, где нелинейное рассеяние может быть преобладающим (при рассеянии на тепловых ионах и др.). В ряде случаев поэтому можно получить более простые и явные формулы для вероятностей рассеяния. Отметим, что оператор Π_{ij} есть функция Грина виртуальной волны в нелинейном рассеянии, изображенном на рис. 2.9. Важным случаем является такой, когда виртуальную волну можно с хорошим приближением считать продольной. Часто оказывается, что такое рассеяние наиболее вероятно. В этом случае

$$\Pi_{ij} \approx - \frac{1}{\omega^2 \varepsilon_k^l} \cdot \frac{k_i k_j}{k^2}, \quad (2.235)$$

где ε^l определено соотношением (2.39). Учитывая равенства

$$\frac{(\Gamma_{k-k'}^{\alpha} k - k')}{|k - k'|} = \frac{\omega_k^{\sigma} - \omega_{k'}^{\sigma'}}{|k - k'|} J_{\nu}(\zeta_{\perp}^{\alpha}); \\ \zeta_{\perp}^{\alpha} = \frac{|k - k'|_{\perp} \cdot v_{\perp}}{\omega_{Ha}},$$

получаем в случае, когда преобладающим является нелинейное рассеяние, для рассеяния продольных волн в продольные выражения [58]

$$\omega_{\rho_z, \rho_\perp}^{l', l}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \nu) = \frac{32 |S^l(\omega_k^l, k, \omega_{k'}^{l'}, k', \omega_k^l - \omega_{k'}^{l'}, k - k')|^2}{\pi |k - k'|^2 |\varepsilon^l(\omega_k^l - \omega_{k'}^{l'}, k - k')|^2} \times \\ \times \frac{(2\pi)^6 e^2 J_\nu^2(\xi_\perp^\alpha) \delta(\omega_k^l - \omega_{k'}^{l'} - (k_z - k'_z) v_z - \nu \omega_{He})}{(\omega_k^l)^2 \left. \frac{\partial}{\partial \omega} \varepsilon_k^l \right|_{\omega = \omega_k^l} \left. \frac{\partial}{\partial \omega'} \varepsilon_{k'}^{l'} \right|_{\omega' = \omega_{k'}^{l'}}}. \quad (2.236)$$

Здесь

$$S^l(k, k_1, k_2) = S_{ijl}(k, k_1, k_2) \frac{k_i k_{1j} k_{2l}}{|k| |k_1| |k_2|}. \quad (2.237)$$

В случае, когда движение частиц можно считать немагнитным, можно аналогично (2.224) записать вместо (2.236) [58]

$$\omega_p^{l, l'}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \frac{32}{\pi} \frac{|S^l(\omega_k^l, k, \omega_{k'}^{l'}, k', \omega_k^l - \omega_{k'}^{l'}, k - k')|^2}{|k - k'|^2 |\varepsilon^l(\omega_k^l - \omega_{k'}^{l'}, k - k')|^2} \times \\ \times \delta(\omega_k^l - \omega_{k'}^{l'} - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}) e^2 (2\pi)^6 (\omega_k^l)^{-2} \times \\ \times \left(\left. \frac{\partial}{\partial \omega} \varepsilon_k^l \right|_{\omega = \omega_k^l} \right)^{-1} \left(\left. \frac{\partial}{\partial \omega'} \varepsilon_{k'}^{l'} \right|_{\omega' = \omega_{k'}^{l'}} \right)^{-1}. \quad (2.238)$$

Последней формулой удобно пользоваться также в случае изотропной плазмы. Полученные формулы позволяют конкретно рассчитывать коэффициенты в нелинейных уравнениях как для продольных колебаний, так и для произвольных электромагнитных колебаний.

При рассмотрении эффектов индуцированного рассеяния высокочастотных турбулентных пульсаций магнитоактивной плазмы на ионах согласно (2.237) необходимо знать нелинейный ток плазмы, для которого одна из частот много меньше остальных двух. Этот нелинейный ток будет определяться электронами. Запишем уравнение для поправки к электронной функции распределения $f_k^{(2)}$:

$$\left. \begin{aligned} & \left[i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) + \left(\omega_{He} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right] f_k^{(2)} = -e \int \mathbf{F}_{k_1} \times \\ & \times \frac{\partial f_{k_2}^{(1)}}{\partial \mathbf{p}} \delta(k - k_1 - k_2) dk_1 dk_2; \\ & \mathbf{F}_k = \mathbf{E}_k \left(1 - \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{\omega} \right) + \frac{\mathbf{k}(\mathbf{v}\mathbf{E}_k)}{\omega}. \end{aligned} \right\} \quad (2.239)$$

Функция $f_k^{(2)}$ — поправка второго порядка по полю E_k при $H_0 \neq 0$. Будем считать поле k_1 , так же как и k , высокочастотным. Тогда, пренебрегая членами порядка $\frac{kv}{\omega}$, можно записать

$$\left(i\omega + \omega_{He} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) f_k^{(2)} = -e \int E_{k_1} \frac{\partial f_{k_2}}{\partial p} \delta(k - k_1 - k_2) dk_1 dk_2. \quad (2.240)$$

Умножая (2.239) на v_z , v_x , v_y и интегрируя по \mathbf{p} , получаем систему уравнений для компонент токов, которая дает:

$$j_{k,x}^{(2)} = \frac{\omega_{pe}^2 i\omega}{4\pi n_0 (\omega^2 - \omega_{He}^2)} \int \left(E_{k_1 x} + i \frac{\omega_{He}}{\omega} E_{k_1 y} \right) \times \\ \times dk_1 dk_2 \delta(k - k_1 - k_2) \int f_{k_2}^{(1)} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3};$$

$$j_{k,y}^{(2)} = \frac{i\omega_{pe}^2 \omega}{4\pi n_0 (\omega^2 - \omega_{He}^2)} \int \left(E_{k_1 y} - i \frac{\omega_{He}}{\omega} E_{k_1 x} \right) \times \\ \times dk_1 dk_2 \delta(k - k_1 - k_2) \int f_{k_2}^{(1)} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3};$$

$$j_{k,z}^{(2)} = \frac{i\omega_{pe}^2}{4\pi\omega n_0} \int dk_1 dk_2 \delta(k - k_1 - k_2) E_{k_1, z} \int f_{k_2}^{(1)} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}.$$

Используя

$$\int f_{k_2}^{(1)} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} = -\frac{1}{e} \rho_{k_2}^{(1)} = -\frac{(kj_{k_2}^{(1)})}{e\omega_2} = \\ = -\frac{k_{2i} \sigma_{ij}(k_2) E_{k_2 j}}{e\omega_2} = -\frac{k_{2i}}{4\pi e i} (\epsilon_{ij}(k_2) - \delta_{ij}) E_{k_2, i}, \quad (2.241)$$

получаем соотношения, выражающие нелинейные токи плазмы через линейную электронную проницаемость [58]:

$$S_{1,ij} - i \frac{\omega_{He}}{\omega} S_{2,ij} = \frac{\omega_{pe}^2 k_{2s}}{(4\pi)^2 n_0 e \omega} \delta_{i1} (\epsilon_{sj}^{(e)}(k_2) - \delta_{sj}); \quad (2.242)$$

$$S_{2,ij} + i \frac{\omega_{He}}{\omega} S_{1,ij} = \frac{\omega_{pe}^2 k_{2s} \delta_{i2}}{(4\pi)^2 e \omega n_0} (\epsilon_{sj}^{(e)}(k_2) - \delta_{sj}); \quad (2.243)$$

$$S_{3,ij} = \frac{\omega_{pe}^2 \delta_{i3} k_{2s}}{(4\pi)^2 e \omega n_0} (\epsilon_{sj}^{(e)}(k_2) - \delta_{sj}). \quad (2.244)$$

Наряду с выписанными S_{ijl} в некоторых случаях необходимо знать также [см. (2.226)] нелинейный ток, в котором $k_1 \rightleftharpoons k_2$ и $i \rightleftharpoons j$. Этим решается общая задача отыскания возможных вероятностей. Рассмотренная процедура легко обобщается на случай процессов, в которых участвует большее число плазмонов.

Итак, оказывается возможным построить замкнутую систему уравнений, включающих взаимодействия турбулентных пульсаций между собой и турбулентных пульсаций с частицами плазмы, и указать способ вычисления матричных элементов процессов, не прибегая к сложной процедуре вывода полных уравнений. Основные физические представления, лежащие в основе изложенного метода, были высказаны в работе [59], затем развиты в работах [60, 61, 68—70] и др. (см. обзор [62]). Выше предполагалось, что имеется лишь внешнее однородное магнитное поле. В наиболее интересном случае, когда неоднородность плазмы или внешних полей является слабой, в нелинейном взаимодействии можно пренебречь неоднородностью.

КОЛЛЕКТИВНАЯ ДИССИПАЦИЯ И КОЛЛЕКТИВНОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ТУРБУЛЕНТНЫХ ПУЛЬСАЦИЙ ПЛАЗМЫ

§ 3.1. КОЛЛЕКТИВНАЯ ДИССИПАЦИЯ ТУРБУЛЕНТНЫХ ПУЛЬСАЦИЙ ПЛАЗМЫ

Необходимым элементом установления стационарной турбулентности в плазме является наличие областей диссипации и возбуждения пульсаций. Как отмечалось, в плазме может иметь место весьма эффективное коллективное поглощение пульсаций помимо поглощения из-за парных соударений, излучения электромагнитных волн и ускорения частиц. Остановимся подробно на коллективных механизмах возбуждения и поглощения пульсаций. Для теории турбулентности надо знать не только расположение областей интенсивной диссипации пульсаций, но и тенденции изменения поглощения с изменением частоты пульсаций. В предыдущей главе отмечалось, что нагрев частиц при спектральной перекачке уменьшает частоту пульсаций. При неравновесном распределении тепловых частиц возможно изменение направления перекачки. Магнитное поле увеличивает число областей интенсивной диссипации и в этом отношении способствует турбулентному нагреву, так как может возникнуть такая ситуация, что при любом направлении спектральной перекачки турбулентная энергия «натолкнется» на область поглощения.

Эффекты коллективной диссипации могут быть разделены на линейные и нелинейные. Рассмотрим вначале линейные. Большая эффективность диссипации имеет место для пульсаций достаточно низких частот. Низкочастотные пульсации, как правило, имеют малые фазовые скорости и, следовательно, могут эффективно поглощаться на частицах плазмы. Для простейшего черенковского резонанса при $H_0 = 0$; $\omega = \mathbf{k}\mathbf{v} = kv \cos \theta$, $\frac{\omega}{k} = v_\phi = v \cos \theta$, т. е. фазовая скорость волны должна быть меньше скорости частицы для эффективного взаимодействия. Поэтому пульсации, имеющие фазовые скорости меньше средней тепловой скорости электронов, могут эффективно поглощаться на электронах.

Рассмотрим вначале поглощение пульсаций в однородной плазме с $H_0 = 0$. Согласно (2.61) коэффициент поглощения для максвелловского распределения электронов есть

$$\gamma_k^i = \frac{1}{2} \int \omega_p^i \left(\mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \right) \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} = - \int \frac{\omega_p^i \omega_k^i f}{2 (2\pi)^3 m_e v_{Te}^2} d\mathbf{p}. \quad (3.1)$$

Подставляя сюда $\omega_k^l = \omega^s$ для ионно-звуковых пульсаций (1.42)

и

$$\varepsilon_k^s = -\frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} + \frac{1}{k^2 d_e^2}; \quad \frac{\partial \varepsilon_k^s}{\partial \omega} = \frac{2\omega_{pi}^2}{\omega^3};$$

$$\omega_p^s = \frac{e^2 (\omega_k^s)^3}{\omega_{pi}^2 k^2} \delta(\omega_k^s - kv) (2\pi)^2;$$

$$f = \frac{n (2\pi)^{3/2}}{m_e^3 v_{Te}^3} \exp \left\{ \frac{-v^2}{2v_{Te}^2} \right\},$$

находим

$$\gamma_k = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \frac{\omega_k^s}{(1+k^2 d_e^2)^{3/2}}. \quad (3.2)$$

Затухание волн из-за черенковского поглощения и излучения на частицах плазмы впервые исследовал Ландау [15] для ленгмюровских колебаний. Оно носит название затухания Ландау. Подчеркнем, что (3.2) имеет место для максвелловского распределения электронов.

Аналогично (3.1) для ленгмюровских нерезонансных пульсаций [15]

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_k^l}{\partial \omega} &= \frac{2\omega_{pe}^2}{\omega^3} = \frac{2}{\omega_{pe}}; \\ \gamma_k &= -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{pe}^4}{k^3 d_e^3} \exp \left\{ -\frac{\omega_{pe}^2}{2k^2 v_{Te}^2} - \frac{3}{2} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

С учетом эффектов турбулентного уширения резонансов в γ появится поправка $\delta\gamma$, причем согласно § 2.8 имеем для максвелловского распределения [78]

$$\begin{aligned} \frac{\delta\gamma}{\gamma} &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-y^2} dy^2 \int_0^\infty \frac{\sin \tau \tau}{\tau} \times \\ &\times \left\{ \left[\cos \frac{\omega}{kv_{Te}} \cdot \frac{\tau}{y} - \frac{\sin \left(\frac{\omega}{kv_{Te}} \cdot \frac{\tau}{y} \right)}{\left(\frac{\omega}{kv_{Te}} \cdot \frac{\tau}{y} \right)} \cdot \frac{\tau^3 \alpha}{y^4} \right] \exp \left(-\frac{\alpha \tau^3}{3y^4} \right) - 1 \right\}; \\ \alpha &= \pi \frac{e^2}{m_e^2} \int \frac{|\Phi_{k_1}|^2 k_1 dk_1}{kv_{Te}^4} = \frac{v_{\Phi\Phi}}{kv_{Te}}. \end{aligned}$$

В интеграле содержатся обрезаящие факторы с характерными $\tau_1 = y \frac{k v_{Te}}{\omega}$ и $\tau_2 = \alpha^{-1/3} y^{4/3}$. Если уровень турбулентности низок $\tau_2 \gg \tau_1$, то $\frac{\delta\gamma}{\gamma} \sim \frac{W}{nT} \cdot \frac{m_i}{m_e}$. Эта оценка имеет место при $\frac{W}{nT_e} \ll \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^2$ и максимальное $\frac{\delta\gamma}{\gamma} \sim \frac{m_e}{m_i} \ll 1$. При $\frac{W}{nT_e} \gg \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^2$ имеем $\tau_1 \gg \tau_2$ и $\frac{\delta\gamma}{\gamma} \sim \left(\frac{W}{nT_e}\right)^{1/2} \ll 1$. Таким образом, нелинейные поправки, обязанные взаимодействию ионно-звуковых пульсаций с электронами, всегда оказываются малыми, если $\frac{W}{nT_e} \ll 1$. Из выражения (3.3) видно, что затухание Ландау не мало, когда фазовая скорость не очень велика по сравнению с тепловой, а в случае $\frac{\omega_{pe}}{k} \gg v_{Te}$ затухание экспоненциально мало.

Фазовая скорость ионно-звуковых колебаний больше v_{Ti} и затухание Ландау на ионах весьма сходно с затуханием (3.3)

$$\gamma_{\mathbf{k}} = - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_s^4}{k^3 v_{Ti}^3} \exp \left\{ - \frac{\omega_s^2}{2k^2 v_{Ti}^2} \right\}. \quad (3.4)$$

Для возникновения турбулентного поглощения ленгмюровских колебаний в однородной плазме необходима либо эффективная перекачка в область поглощения Ландау, т. е. уменьшение фазовых скоростей колебаний, либо перекачка ленгмюровских колебаний в ионно-звуковые. В первом случае частота турбулентных пульсаций увеличивается, а во втором — уменьшается.

Если фазовые скорости ленгмюровских колебаний увеличиваются вплоть до скоростей порядка скорости света, то, как правило, электромагнитные эффекты излучения становятся значительными, поэтому такая перекачка может привести к диссипативным процессам излучения энергии из плазмы.

Поскольку ионно-звуковые колебания имеют относительно сильное поглощение, то их раскачка возможна в том случае, если инкремент раскачки превосходит (3.2). Если условие раскачки выполняется в относительно узком интервале Δk , то перекачка в любом направлении из этого интервала приводит к поглощению (3.2).

Перейдем теперь к рассмотрению пульсаций в магнитоактивной однородной плазме. Рассмотрим, во-первых, затухание Ландау, соответствующее $\nu = 0$. Согласно (2.50) для максвелловского распределения затухание на электронах есть

$$\gamma_{\mathbf{k}, 0}^{\sigma} = \frac{1}{2} \int \omega_{\mathbf{p}}^{\sigma}(\mathbf{k}, 0) \Delta \lambda_i \frac{\partial f}{\partial \lambda_i} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} =$$

$$= \frac{1}{2} \int \omega_p^\sigma(\mathbf{k}, 0) \left(k_z \frac{\partial f}{\partial p_z} + \frac{\omega_H v}{v_\perp} \cdot \frac{\partial f}{\partial p_\perp} \right) \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} = -\frac{1}{2} \int \omega_p^\sigma(\mathbf{k}, 0) \times$$

$$\times \frac{\omega_k^\sigma}{m_e v_{Te}^2} f \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} = -\frac{e^2 \omega_k^\sigma}{2\pi} \int \frac{|e_{\mathbf{k}}^{\sigma*} \Gamma_{\mathbf{k}, 0}|^2 \delta(\omega_k^\sigma - k_z v_z) f}{\frac{\partial \omega^2 \varepsilon_k^\sigma}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_k^\sigma} m_e v_{Te}^2} d\mathbf{p}. \quad (3.5)$$

Интегрируя по v_z , получаем

$$\gamma_{\mathbf{k}, 0}^\sigma = -(2\pi)^{3/2} \frac{e^2 n \exp \left\{ -\frac{(\omega_k^\sigma)^2}{2k_z^2 v_{Te}^2} \right\} \omega_k^\sigma}{m_e \frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \varepsilon_k^\sigma \Big|_{\omega=\omega_k^\sigma} |k_z| v_{Te}^5} \times$$

$$\times \int_0^\infty \left| e_z^{\sigma*} \frac{\omega_k^\sigma}{k_z} J_0(\zeta) - i e_y^{\sigma*} v_\perp J_0'(\zeta) \right|^2 e^{-\frac{v_\perp^2}{2v_{Te}^2}} v_\perp dv_\perp. \quad (3.6)$$

Учитывая сделанное при выводе вероятностей излучения предположение $k_y = 0$, получаем для продольных колебаний $e_{\mathbf{k}}^l = \frac{\mathbf{k}}{k}$,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \omega^2 \varepsilon_k^l}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_k^l} &= (\omega_k^l)^2 \frac{\partial \varepsilon_k^l}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_k^l}; \\ \gamma_{\mathbf{k}, 0}^l &= -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\omega_k^l \exp \left\{ -\frac{(\omega_k^l)^2}{2k_z^2 v_{Te}^2} \right\}}{\frac{\partial \varepsilon_k^l}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_k^l}} e^{-\mu} I_0(\mu) \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 k_z v_{Te}^3}; \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

где I_0 — функция Бесселя мнимого аргумента

$$\mu = \frac{k_\perp^2 v_{Te}^2}{\omega_{He}^2}. \quad (3.8)$$

В (3.7) использовано значение интеграла

$$\int_0^\infty e^{-\frac{v_\perp^2}{2v_{Te}^2}} J_\nu^2 \left(\frac{k_\perp v_\perp}{\omega_{He}} \right) v_\perp dv_\perp = v_{Te}^2 e^{-\mu} I_\nu(\mu). \quad (3.9)$$

Формула (3.7) может быть использована для разнообразных спектров. Если электроны замагничены, т. е. длина волны пульсаций (точнее, значение λ , связанное с проекцией \mathbf{k} на направление, перпендикулярное H_0 , соотношением $\lambda = \frac{1}{k_{\perp}}$) намного превосходит средний ларморовский радиус электронов, то $\mu \ll 1$ и

$$\gamma_{\mathbf{k}, 0}^l = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{pe}^2 \omega_{\mathbf{k}}^l \exp \left\{ -\frac{(\omega_{\mathbf{k}}^l)^2}{2k_z^2 v_{Te}^2} \right\}}{k^2 k_z v_{Te}^3 \frac{\partial \varepsilon^l}{\partial \omega} \Big|_{\omega = \omega_{\mathbf{k}}^l}}. \quad (3.10)$$

Заметим, что волны, распространяющиеся строго поперек магнитного поля $k_z \rightarrow 0$, затухают экспоненциально слабо. Поэтому спектральная перекачка, которая уменьшает угол между \mathbf{k} и \mathbf{H}_0 , увеличивает и поглощение волн. Для высокочастотных пульсаций в магнитном поле согласно (1.39) имеется две ветви. Частота ветви ω_+ растет с ростом угла и, следовательно, уменьшение частоты турбулентных пульсаций приводит к уменьшению угла и увеличению поглощения. Для ветви ω_- имеет место обратная ситуация.

В слабом поле $\omega_{He} \ll \omega_{pe}$,

$$\omega_+^2 = \omega_{pe}^2 + \omega_{He}^2 \sin^2 \theta, \quad (\partial \varepsilon / \partial \omega) \simeq \frac{2}{\omega_{pe}}$$

и из (3.10)

$$\gamma_{\mathbf{k}, 0}^l = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \omega_{pe} \frac{\omega_{pe}^3}{k^2 k_z v_{Te}^3} \exp \left\{ -\frac{\omega_{pe}^2}{2k_z^2 v_{Te}^2} - \frac{\omega_{He}^2 \sin^2 \theta}{2k_z^2 v_{Te}^2} \right\}. \quad (3.11)$$

Другая ветвь $\omega_- = \omega_{He} |\cos \theta|$ затухает слабо

$$\gamma_{\mathbf{k}, 0}^l = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \omega_{He} |\cos \theta| \frac{\omega_{He}^3}{k^3 v_{Te}^3} \sin^2 \theta \exp \left\{ -\frac{\omega_{He}^2}{2k^2 v_{Te}^2} \right\}, \quad (3.12)$$

если ее длина волны больше ларморовского радиуса электронов.

В сильном магнитном поле $\omega_{He} \gg \omega_{pe}$ для волны

$$\omega_+^2 \simeq \omega_{He}^2 + \omega_{pe}^2 \sin^2 \theta$$

имеет

$$\gamma_{\mathbf{k}, 0}^l = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \omega_{pe} \frac{\sin^2 \theta}{|\cos \theta|} \cdot \frac{1}{k^3 d_e^3} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{\omega_{He}^2}{2k_z^2 v_{Te}^2} - \frac{\omega_{pe}^2 \sin^2 \theta}{2k_z^2 v_{Te}^2} \right\}, \quad (3.13)$$

т. е. затухание становится существенным, если длина волн сравнивается с дебаевским или ларморовским радиусом, а волна $\omega_- = \omega_{pe} \cos \theta$ затухает с декрементом (3.3), т. е. так, как если бы поле отсутствовало.

Переходя к низкочастотным пульсациям, заметим, что если электроны являются замагниченными, а $\omega^\sigma \ll k_z v_{Te}$, то декремент затухания согласно (3.10) имеет вид

$$\gamma_{k,0}^l = - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\omega_{pe}^2 \omega_k^l}{k^2 k_z v_{Te}^3 \partial \varepsilon^l / \partial \omega} \Big|_{\omega = \omega_k^l}. \quad (3.14)$$

Например, для замагниченных ионно-звуковых колебаний

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} = \frac{2\omega_{pi}^2}{(\omega)^3} \cos^2 \theta, \quad \omega_k^{Ms} = k_z v_s.$$

Имеем

$$\gamma_{k,0}^l = - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \omega_k^{Ms}. \quad (3.15)$$

Для ионной продольной волны $\omega = \omega_{Hi} \cos \theta$, к которой стремятся замагниченные ионно-звуковые колебания, при возрастании k в плотной плазме имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} &= \frac{2\omega_{pi}^2}{\omega_{Hi}^3 \sin^2 \theta \cos \theta}; \\ \gamma_{k,0}^l &= - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^2 \frac{\omega_{He}^3 \sin^2 \theta |\cos \theta|}{k^3 v_{Te}^3} \omega_{Hi}. \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

Незамагниченные ионно-звуковые колебания, частоты которых много больше ω_{Hi} , затухают относительно сильно

$$\gamma_{k,0} = - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \cdot \frac{k v_s}{|\cos \theta|}; \quad k_\perp v_{Te} < \omega_{He}. \quad (3.17)$$

Для непродольных волн следует использовать (3.6). Единичный вектор \mathbf{e}_k^σ альфвеновской волны направлен по x и согласно (3.6) для нее затухание Ландау обращается в нуль*. Для быст-

* Если учесть следующий член разложения по ω/ω_{Hi} , то затухание альфвеновской волны не обращается в нуль и равно $\gamma_{k,0}^A = - \sqrt{\frac{\pi}{2}} k v_A |\cos \theta| \times \frac{m_e}{m_i} \operatorname{ctg}^2 \theta \frac{v_{Te}}{v_A} \cdot \frac{\omega_A^2}{\omega_{Hi}^2}$ (незамагниченные ионы).

рой магнитозвуковой волны в случае, когда ее скорость $v_A = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi n m_i}} \gg v_s$, вектор поляризации направлен по y и согласно (3.6)

$$\gamma_{k,0}^M = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{m_e}{m_i} k v_A \frac{v_{Te}}{v_A} \frac{\sin^2 \theta}{|\cos \theta|}. \quad (3.18)$$

Для вистлеров $\omega_{Hi} \ll \omega \ll \omega_{He}$

$$\left. \begin{aligned} e_x^w &= \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 \theta}}; & e_y^w &= \frac{i |\cos \theta|}{\sqrt{1 + \cos^2 \theta}}; \\ \gamma_{k,0} &= -\sqrt{\frac{\pi}{2}} k v_{Te} \frac{\sin^2 \theta}{\omega_{He}} \omega^w; \\ \omega^w &= \frac{\omega_{He} k^2 |\cos \theta| c^2}{\omega_{pe}^2}; \\ \frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 e_k^\sigma &= \frac{2\omega_{pe}^2 |\cos \theta|}{\omega_{He} (1 + \cos^2 \theta)}. \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

Наряду с затуханием Ландау в магнитоактивной плазме возможно циклотронное поглощение турбулентных пульсаций. Оно соответствует процессам с $\nu \neq 0$.

Для максвелловского электронного распределения из (2.220)

$$\begin{aligned} \gamma_\nu &= -\frac{e^2 \omega_k^\sigma (2\pi)^{3/2} \exp \left\{ -\left(\frac{\omega^\sigma - \nu \omega_{He}}{\sqrt{2} k_z v_{Te}} \right)^2 \right\}}{k_z m_e v_{Te}^5 \frac{\partial \omega^2 e_k^\sigma}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega^\sigma}} \times \\ &\times \int |e_k^{\sigma*} \Gamma_{k\nu}|^2 \exp \left\{ -\frac{v_\perp^2}{2v_{Te}^2} \right\} v_\perp dv_\perp. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Для квазипродольных колебаний

$$|e_k^{\sigma*} \Gamma_{k\nu}| = \frac{1}{k} \left(k_z v_z + \frac{k_\perp v_\perp}{z} \nu \right) J_\nu = \frac{\omega^\sigma}{k} J_\nu$$

и

$$\gamma_\nu = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\omega_{pe}^2 \omega^\sigma}{k^2 k_z v_{Te}^3 \frac{\partial e_k^\sigma}{\partial \omega}} \exp \left\{ -\frac{(\omega^\sigma - \nu \omega_{He})^2}{2k_z^2 v_{Te}^2} \right\} e^{-\mu} I_\nu(\mu). \quad (3.21)$$

Здесь использовано (3.9). Циклотронное поглощение на электронах может быть существенным в том случае, когда частоты турбулентных пульсаций близки к частотам, кратным циклотронной частоте ω_{He} . В слабом магнитном поле $\omega_{pe} \gg \omega_{He}$ затухание высокочастотных колебаний ветви $\omega_- = \omega_{He} \cos \theta$ описывается формулой ($\nu = 1$)

$$\gamma_1 = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \omega_{He} |\cos \theta| \frac{\omega_{He}^3 \sin^2 \theta}{(k v_{Te})^3} \exp \left\{ -\frac{2\omega_{He}^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}}{k^2 v_{Te}^2 \cos^2 \theta} \right\}. \quad (3.22)$$

Для сильного магнитного поля $\omega_{He} \gg \omega_{pe}$ частоту, близкую к циклотронной, имеет ветвь $\omega_+^2 = \omega_{He}^2 + \omega_{pe}^2 \sin^2 \theta$. Для этой волны

$$\begin{aligned} \gamma_1 = & -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \omega_{pe} \frac{\omega_{pe}^3 \sin^2 \theta}{k^3 v_{Te}^3 |\cos \theta|} \times \\ & \times \exp \left\{ -\frac{\omega_{pe}^4 \sin^4 \theta}{8\omega_{He}^2 \cos^2 \theta k^2 v_{Te}^2} \right\}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Циклотронное затухание в отличие от затухания Ландау не обращается в нуль для поперечных волн, если частота их близка к циклотронным частотам плазмы. Для определения коэффициента поглощения обратимся к общей формуле (3.20). Очевидно, что в данном случае

$$|\mathbf{e}_k^{\sigma*} \Gamma_{kv}|^2 = |\mathbf{e}_k^{\sigma*} (\Gamma_{kv})_{\perp}|^2,$$

где $(\Gamma_{kv})_{\perp}$ — проекция вектора Γ_{kv} на плоскость, перпендикулярную к \mathbf{k} . Для того чтобы найти $(\Gamma_{kv})_{\perp}$, повернем систему координат вокруг оси y , так чтобы ось z совпала с \mathbf{k} . Из (2.16) получим

$$\begin{aligned} (\Gamma_{kv})_{x'} &= (\Gamma_{vk})_x \frac{k_z}{k} - (\Gamma_{kv})_z \frac{k_x}{k} = \\ &= \frac{\omega^{\sigma} k_z - k^2 v_z}{k_{\perp} k} J_{\nu}; \quad (\Gamma_{kv})_{y'} = (\Gamma_{kv})_y. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Теперь x' и y' перпендикулярны к \mathbf{k} , и поэтому две компоненты (3.24) описывают две возможные поляризации поперечных волн. Для поляризации по x' при $\omega^{\sigma} \rightarrow \nu \omega_{He}$ из (3.20) следует

$$\begin{aligned} \gamma_{\nu} = & -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \omega_{He}^2 \nu^2 \frac{\omega_{pe}^2}{k^3 v_{Te}^3} \cdot \frac{|\cos \theta|}{\sin^2 \theta} \times \\ & \times \exp \left\{ -\frac{(\omega - \nu \omega_{He})^2}{2k_z^2 v_{Te}^2} \right\} e^{-\mu} I_{\nu}(\mu). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Для $\nu = 1$

$$I_1 \approx \frac{\mu}{2} = \frac{k^2 \sin^2 \theta v_{Te}^2}{\omega_{He}^2} \quad (3.26)$$

получаем

$$\gamma_1 = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \cdot \frac{\omega_{pe}^2}{2k v_{Te}} |\cos \theta| \exp \left\{ -\frac{(\omega - \omega_{He})^2}{2k^2 v_{Te}^2} \right\}. \quad (3.27)$$

Если ω очень близко к ω_{He} , то γ_1 может стать больше ω_{He} , что уже противоречит исходному допущению при выводе формулы для поглощения.

Итак, поперечные волны могут весьма интенсивно поглощаться вблизи частот ω_{He} на электронах плазмы. Поэтому любая спектральная перекачка высокочастотных пульсаций в поперечные волны с частотами, близкими к циклотронным частотам, может привести к интенсивному нагреву электронов. По-видимому, достаточно лишь возможность перекачки в поперечные волны таких частот, для которых спектральная перекачка идет в сторону ω_{He} .

Циклотронный нагрев плазмы внешними электромагнитными волнами в ряде случаев трудно осуществим из-за того, что вследствие интенсивного поглощения в поверхностном слое электромагнитные волны не проникают на большую глубину в плазму и, следовательно, нагревают лишь малый поверхностный слой. При турбулентном нагреве пульсации, как правило, возникают вне области интенсивного поглощения, в частности вне циклотронного резонанса. Это связано с тем, что раскачка колебаний возможна в области, где их поглощение невелико. Такие турбулентные пульсации, согласно изложенному, могут спектрально перекачаться, в частности, в область интенсивного циклотронного поглощения. При этом возникнет нагрев во всем объеме плазмы. Такая возможность турбулентного нагрева обсуждалась в работе [81].

Циклотронное поглощение на ионах, т. е. в случае, когда частоты турбулентных пульсаций перекачиваются в область ионно-циклотронного поглощения, может привести к турбулентному нагреву ионов. Соответствующая формула для циклотронного поглощения на ионах отличается от (3.20) заменой всех индексов, относящихся к электронам (e), индексами ионов (i).

Таким образом, в плазме в отсутствие соударений имеются весьма интенсивные механизмы поглощения турбулентных пульсаций, поглощение Ландау и циклотронное поглощение, которые могут приводить к коэффициентам поглощения, намного превосходящим поглощение из-за парных соударений.

Существенный вывод состоит также в том, что низкочастотные турбулентные пульсации затухают, как правило, более интенсивно, чем высокочастотные, поэтому в проблеме турбулентного нагрева существенную роль играют процессы перекачки, приводящие к понижению частоты турбулентных пульсаций. Наконец, поглоще-

ние на электронах низкочастотных пульсаций всегда эффективно, и поэтому следует ожидать, что от низкочастотных пульсаций более интенсивно могут нагреваться электроны.

Для эффективного нагрева ионов требуется выполнение ряда условий. Энергия низкочастотных пульсаций должна успеть поглотиться ионами, не нагрев электроны. Резонансность эффектов поглощения может особенно сказаться на ионах, приводя не к нагреву всех ионов, а к ускорению лишь небольшой части их.

Далее в ограниченной плазме существенно, чтобы размер плазмы был больше пути, на котором могут поглотиться турбулентные пульсации,

$$L > \frac{v_g}{\gamma}. \quad (3.28)$$

С этой точки зрения наилучшие условия для поглощения имеются для волн малых групповых скоростей и больших декрементов затухания. Если спектральная перекачка переводит турбулентные пульсации в ту область, где их групповые скорости малы, то это может способствовать нагреву плазмы.

Поперечные волны, имеющие большие v_g , порядка скорости света, могут не удовлетворять (3.29) даже для частот волны первой циклотронной гармоники. Тогда слой плазмы толщины L прозрачен для циклотронного излучения (оптическая толща меньше единицы). В этом случае нужно учитывать лишь спонтанное циклотронное излучение, описываемое формулами (2.199). Потери энергии плазмы из-за спонтанного циклотронного излучения рассматривались в работах [82, 83].

Наконец, существенное предположение при выводе коэффициентов поглощения состояло в том, что распределение частиц близко к максвелловскому. В общем случае знак γ_k для произвольных распределений может быть различным. При $\gamma_k > 0$ имеет место раскачка колебаний. Можно показать, что каково бы ни было распределение частиц плазмы, если оно изотропно, то для продольных турбулентных пульсаций всегда имеет место поглощение. Любой процесс изотропизации распределений частиц приводит к увеличению поглощения турбулентных пульсаций.

Остановимся коротко на нелинейных механизмах диссипации турбулентности. Одним из таких механизмов является изменение частот пульсаций при спектральных перекачках и превращение рассматриваемого типа пульсаций в другие. В этих случаях общая энергия колебаний либо не меняется (распадный процесс), либо часть энергии переходит к частицам плазмы (процесс рассеяния). В последнем случае о диссипации энергии турбулентности имеет смысл говорить лишь тогда, когда частота турбулентных пульсаций понижается в результате нелинейных взаимодействий. Другим эффектом, существенно влияющим на характер поглощения, является изменение функции распределения резонансных частиц из-за нелинейных и квазилинейных эффектов. Действительно, механизмы

линейного поглощения связаны с черенковским циклотронным резонансом. Резонансному условию, как правило, удовлетворяет малое число частиц. Благодаря воздействию турбулентности их распределение может стать отличным от максвелловского. В частности, из-за диффузии резонансных частиц в пространстве скоростей может уменьшиться df/dp , определяющий линейный декремент. Такое уменьшение поглощения возможно, когда резонансной является малая доля частиц, такая, что энергии турбулентных пульсаций достаточно для изменения их состояния существенным образом.

§ 3.2. МЕХАНИЗМЫ ВОЗБУЖДЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Возбуждение турбулентности относится к наиболее сложным проблемам физики турбулентной плазмы. Поэтому здесь будет дан лишь краткий обзор некоторых механизмов возбуждения. Сложность этой проблемы связана с тем, что, во-первых, во многих случаях начальная стадия возбуждения не является турбулентной, так как возбуждается небольшое число мод колебаний и лишь постепенно система переходит в турбулентный режим. По-видимому, такая начальная стадия имеет место для аperiodических неустойчивостей плазмы, когда инкремент возбуждения порядка или больше частоты пульсаций. В этих условиях система может пройти через ряд состояний, в которых существенно изменятся некоторые параметры и произойдет стохастическое возбуждение колебаний. Проблемы стохастизации тесно связаны с проблемами эргодичности системы [84—86], и общего ответа на вопрос о времени стохастизации нет. Во-вторых, сама стадия перехода системы в режим стационарной турбулентности (если такой переход происходит) есть сложный процесс, в котором играют существенную роль как линейные, так и нелинейные явления. В-третьих, теория устойчивости турбулентной плазмы может приводить к резко отличным выводам, нежели теория устойчивости нетурбулентной плазмы. Электромагнитные свойства турбулентной плазмы для низких частот существенно иные, чем для нетурбулентной. Например, турбулентная плазма могла бы быть устойчивой относительно возникновения определенного типа колебаний, тогда как нетурбулентная плазма неустойчива. В условиях лабораторного эксперимента, естественно, может представить интерес постановка такого вопроса для низкочастотных неустойчивостей, наиболее опасных для проблем магнитного удержания плазмы. С вопросом о неустойчивости турбулентной плазмы тесно связан эффект последействия при возбуждении турбулентности.

Предположим, например, что некий агент возбуждает турбулентность плазмы за время τ_0 , а распадается турбулентность за время $\tau'_0 \gg \tau_0$. Пусть таким агентом будет пучок заряженных частиц, пронизывающий плазму и действующий конечное время τ_0 . Если после возбуждения турбулентности вновь начинает действовать

этот агент, причем промежуток времени между двумя актами воздействия значительно меньше τ_0 , то агент может не возбудить колебаний плазмы. Турбулентные пульсации, возбужденные в первом акте, могут из-за спектральной перекачки перейти в область больших фазовых скоростей и во втором акте взаимодействия будут стабилизировать пучковые неустойчивости, откачивая все возникающие пульсации в область, где они практически не взаимодействуют с пучком. Этот пример показывает, сколь важное значение может иметь в теории возбуждения даже относительно слабая предварительная турбулизация плазмы.

В условиях лабораторного эксперимента плазма ограничена, а следовательно, неоднородна, что приводит к специфической неустойчивости, связанной с неоднородностью, от которой трудно избавиться и которая также может приводить к предварительной турбулизации. Наконец, контакт со стенками камеры, в которую заключена плазма, может играть отнюдь не второстепенную роль в механизмах отвода тепла и гибели турбулентных пульсаций.

Из сказанного видно, что в условиях лабораторного эксперимента часто начальное состояние плазмы до действия агента, возбуждающего турбулентность (например, пучка заряженных частиц), точно неизвестно. Это в ряде случаев затрудняет детальное сравнение теории с экспериментом, хотя в целом эффекты, предсказываемые теорией турбулентности, хорошо согласуются с данными наблюдений.

Можно классифицировать механизмы генерации турбулентности плазмы, указав на начальное состояние системы (например, плазмы и пучка) или на то, что с чем взаимодействует. Начальное состояние определяет тип линейной или нелинейной неустойчивости плазмы, которая в дальнейшем может сильно модифицироваться благодаря развитию многих каналов, по которым идет процесс турбулизации.

Наиболее просты механизмы возбуждения, которые могут быть описаны инкрементами $\gamma \ll \omega_k^{\sigma}$.

Обрисовав, таким образом, общие трудности описания процессов возбуждения турбулентности, перечислим те начальные состояния, являющиеся часто исходными, с которых происходит развитие турбулентности плазмы [6].

1. Взаимодействие пучков с плазмой. Пучки или группа частиц могут создаваться вне плазмы и инжектироваться извне либо по тем или иным причинам возникать внутри плазмы. Неустойчивость появляется тогда, когда скорость частиц пучка достаточно велика [87, 88]. Аперриодические неустойчивости могут развиваться при малых скоростях пучка.

2. Неустойчивость, связанная с анизотропией распределения частиц по скоростям. Такая анизотропия может быть вызвана различием температур частиц в разных направлениях вследствие неравномерности их нагрева, обусловленной геометрией системы. К числу такого рода неустойчивостей нужно отнести:

3. Конусную неустойчивость, возникающую в магнитных ловушках из-за того, что магнитные ловушки не способны удерживать частицы, движущиеся в некоем конусе углов вдоль внешнего магнитного поля.

4. Циклотронная неустойчивость является сочетанием пучковой и анизотропной. Она возникает, в частности, когда пучок частиц инжектируется поперек внешнего магнитного поля.

5. При действии на плазму внешнего электрического поля возникают неустойчивости пучкового типа и анизотропные и циклотронные неустойчивости. Они могут быть связаны с появлением эффектов турбулентной электропроводности плазмы.

6. Специфическая неустойчивость возникает при наличии неоднородности плазмы, удерживаемой магнитным полем, это — дрейфовая неустойчивость. Она связана с тем, что в результате неоднородности плазмы на поверхности плазмы возникают токи, которые неустойчивы так же, как и токи, создаваемые внешним электрическим полем. Эти неустойчивости могут приводить к турбулентной диффузии и турбулентной теплопроводности [6].

7. Сходные механизмы возникают при взаимодействии с плазмой аксиальных нелинейных и ударных волн [21]. На фронте таких волн возникают токи и поля, приводящие к неустойчивостям.

8. Аналогично действуют механизмы турбулентности при взаимодействии плазмы с сильными высокочастотными полями.

9. К числу нелинейных механизмов возбуждения турбулентности следует отнести возбуждения турбулентности интенсивным излучением, в частности высокочастотными полями, и излучением оптических квантовых генераторов.

§ 3.3. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПУЧКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ С ПЛАЗМОЙ

3.3.1. Линейные эффекты

1. Линейные эффекты неустойчивости пучков в плазме рассматривали Бом и Гросс [87], А. И. Ахиезер и Я. Б. Файнберг [88]. В рамках линейной теории возбуждение продольных волн описывается общим дисперсионным уравнением [89, 90]

$$\varepsilon'_k = \frac{k_i \varepsilon_{ij} k_j}{k^2} = 0. \quad (3.29)$$

Если рассматривать моноэнергетические пучки, то диэлектрическую проницаемость плазмы и пучка можно найти, если известна отдельно проницаемость плазмы ε'_0 и пучка ε'_1 :

$$\varepsilon^l = \varepsilon'_0 + \varepsilon'_1 - 1, \quad (3.30)$$

а диэлектрическую проницаемость пучка можно найти, перейдя к системе, в которой пучок покоится [89]. При этом для нерелятивистских пучков необходимо учесть лишь эффект Доплера

(в ε_1^l ω заменить $(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u})$, где \mathbf{u} — скорость пучка). Если тепловое движение несущественно, то $\varepsilon_0^l = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}$, т. е.

$$\varepsilon_k^l = 1 - \frac{\omega_{p1}^2}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u})^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}; \quad \omega_{p1}^2 = \frac{4\pi n_1 e^2}{m_e}. \quad (3.31)$$

При $\frac{n_1}{n_0} \ll 1$ решение (3.31) есть

$$\omega = \mathbf{k}\mathbf{u} \pm \omega_{p1} \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\mathbf{k}\mathbf{u})^2} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.32)$$

Это решение записано для $\mathbf{k}\mathbf{u}$, не близком к ω_{pe} . Неустойчивость возникает при $\mathbf{k}\mathbf{u} < \omega_{pe}$. Максимальный инкремент, однако, имеет место при ω_{pe} , близком к $\mathbf{k}\mathbf{u}$, когда

$$\omega = \omega_{pe} \left[1 - \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2^{4/3}} \left(\frac{n_1}{n_0} \right)^{1/3} \right]. \quad (3.33)$$

Область применимости этих формул довольно узка, и уже при относительно небольшой «немоноэнергетичности» $\frac{\Delta u}{u} \sim \left(\frac{n_1}{n_0} \right)^{1/3}$ можно пользоваться формулами слабого возбуждения и $\gamma \sim \omega_{pe} \frac{n_1}{n_0} \left(\frac{u}{\Delta u} \right)^2$ (см. гл. 2). Этот критерий следует из сравнения, записанного γ с инкрементом (3.33). Раскачка (3.33) является гидродинамической, и для ее описания статистические методы, строго говоря, неприменимы. Однако, как показано в работе [91], на гидродинамической стадии может происходить быстрое увеличение Δu , и пучок, незначительно изменив свои параметры, перейдет в область слабого возбуждения.

Неустойчивость, связанная с анизотропией функции распределения системы пучок—плазма [92, 93], согласно работам [59, 94], также малосущественна для пучков с $n_1/n_0 \ll 1$. Такая ситуация связана с тем, что появление небольшого разброса либо поперечных, либо продольных скоростей может ликвидировать такого рода неустойчивости.

Остановимся более подробно на неустойчивостях, возникающих для пучков с достаточно большим разбросом скоростей. Для малоплотных пучков можно пренебречь изменением дисперсионных свойств пульсаций плазмы из-за присутствия пучка и учитывать лишь эффект их нарастания, описываемый инкрементом (2.198)

$$\begin{aligned} \gamma_k^\sigma = & \frac{e^2}{2\pi} \sum_{\nu, \alpha} \int \frac{|\Gamma_\nu^\alpha \mathbf{e}_{\mathbf{k}^*}^\sigma|^2}{\frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \varepsilon_k^\sigma} \delta(\omega_k^\sigma - k_z v_z - \nu \omega_{H\alpha}) \times \\ & \times \left(k_z \frac{\partial f_p^\alpha}{\partial p_z} + \frac{\omega_{H\alpha} \nu}{v_\perp} \cdot \frac{\partial f_p^\alpha}{\partial p_\perp} - \frac{k_x c}{eH} \cdot \frac{\partial f_p^\alpha}{\partial y} \right) dp. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Пусть f_1^z — функция распределения частиц пучка, которая может быть неоднородной в направлении y , перпендикулярном к внешнему магнитному полю.

Если пучок движется вдоль магнитного поля, то

$$f_1^z = \frac{(2\pi)^{3/2} n_1(y)}{v_{T\perp}^2 v_{T\parallel} m_\alpha^3} \exp \left\{ -\frac{v_\perp^2}{2v_{T\perp}^2} - \frac{(v_z - u_\alpha)^2}{2v_{T\parallel}^2} \right\}.$$

Тогда (3.34) можно записать для продольных волн в виде

$$\begin{aligned} \gamma_k^l &= \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{v_{T\parallel}^2 k^2 \frac{\partial}{\partial \omega} \varepsilon_k^l} \sum_{\nu, \alpha} I_\nu(\mu_\alpha) e^{-\mu_\alpha} \frac{\omega_{1\alpha}^2}{|k_z| v_{T\parallel}} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{(\omega_k^l - \nu \omega_{H\alpha} - k_z u_\alpha)^2}{2k_x^2 v_{T\parallel}^2} \right\} \left[(k_z u_\alpha - \right. \\ &\quad \left. - \omega_k^l + \nu \omega_{H\alpha}) \left(1 + \frac{k_x}{k_z \omega_{H\alpha}} \cdot \frac{\partial u_\alpha}{\partial y} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{v_{T\parallel}^2}{v_{T\perp}^2} \left(\omega_{H\alpha} \nu + \frac{k_x}{\omega_{H\alpha}} v_{T\perp}^2 \frac{\partial}{\partial y} \ln n_1 \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Здесь использовано (3.9):

$$\mu_\alpha = \frac{k_x^2 v_{T\perp}^2}{\omega_{H\alpha}}; \quad (k_y = 0), \quad \omega_{1\alpha}^2 = \frac{4\pi n_{1\alpha} e^2}{m_\alpha}.$$

Из (3.34) и (3.35) отчетливо видно, что существуют следующие механизмы возбуждения: черенковский $\nu = 0$ и циклотронный $\nu \neq 0$. Кроме того, при наличии неоднородности по y в распределении плотности и скорости частиц пучка появляются новые возможности циклотронной и черенковской раскачки.

Если $\mu_{\alpha \text{ макс}} \ll 1$, то эффективное возбуждение может быть лишь на первых гармониках $\nu = 0, \pm 1$; при этом для $\nu = 0$ и электронного пучка

$$\begin{aligned} \gamma_{k, \nu=0}^l &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{1e}^2}{\frac{\partial}{\partial \omega} \varepsilon_k^l} \frac{1}{k^2 v_{T\parallel}^2 |k_z| v_{T\parallel}} \times \\ &\times \left[(k_z u_e - \omega_k^l) \left(1 + \frac{k_x}{k_z \omega_{He}} \cdot \frac{\partial u_e}{\partial y} \right) - \frac{k_x}{|k_x|} \omega_1 \right], \end{aligned} \quad (3.36)$$

где

$$\omega_1 = \frac{|k_x| v_T^2}{\omega_{He}} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \ln n_1$$

дрейфовая частота частиц пучка. Отсюда видно, что эффекты неоднородности плотности пучка могут проявляться лишь при возбуждении частот порядка дрейфовых частот пучка. Если неоднородности отсутствуют, то раскочки осуществляются для волн с $k_z u_e > \omega_k^l$ (черенковское условие). Эффект, связанный с неоднородностью профиля скоростей пучка du_e/dy , тоже может вызвать неустойчивость — это так называемая слиппинг-неустойчивость, исследованная в гидродинамическом пределе в [95—97]. Она может проявляться и при $\omega_k^l < k_z u_e$, если

$$\frac{k_x}{k_z} \frac{\omega_{He}}{\omega_{He}} \cdot \frac{\partial u_e}{\partial y} > 0. \quad (3.37)$$

В случае однородной плазмы имеем оценку максимального инкремента для возбуждения ветвей высокочастотных плазменных волн в сильном магнитном поле ($\omega_{pe} \ll \omega_{He}$)

$$\begin{aligned} \gamma_{k, v=0}^\sigma &= \sqrt{\frac{\pi}{8} \cdot \frac{n_1}{n_0} \cdot \frac{\omega_{pe}^4 \sin^2 \theta}{\omega_{He} |\cos \theta|}} \times \\ &\times \frac{(k_z u_e - \omega_{He})}{k^3 v_T^3} e^{-\frac{(\omega_{He} - k_z u_e)^2}{2k_z^2 v_T^2}}; \quad \omega \sim \omega_{He} \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{k, v=0}^\sigma &= \sqrt{\frac{\pi}{8} \cdot \frac{n_1}{n_0} \cdot \frac{\omega_{pe}^3}{k^3 v_T^3}} (k_z u_e - \omega_{pe}) e^{-\frac{(\omega_{pe} - k_z u_e)^2}{2k^2 v_T^2}}; \\ \omega &= \omega_{pe} |\cos \theta|. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Оценка инкремента из-за циклотронной неустойчивости для ветви ω_{He} имеет вид

$$\gamma_k \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{n_1}{n_0} \cdot \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{He}} \sin^2 \theta} \frac{u_e}{v_T}, \quad (3.40)$$

а для ветви $\omega_{pe} \cos \theta$

$$\gamma_k \approx \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{n_1}{n_0} \frac{\sin^2 \theta |\cos \theta| \omega_{pe}^3}{\omega_{He}^2}} \cdot \frac{u_e}{v_T}. \quad (3.41)$$

Таким образом, при циклотронной неустойчивости пучков имеет место увеличение инкремента с ростом скоростей пучка, перпендикулярных к направлению магнитного поля. Экспериментально эффект сильного возрастания раскачки частот $\omega \sim \omega_{He}$ с увеличением $v_{T\perp}$ наблюдался в работе [98].

Следует отметить важность исследований временного хода развития турбулентности пучков — плазма, предпринятых в работе [98].

3.3.2. Квазилинейные эффекты при взаимодействии пучков с плазмой

Эффекты квазилинейной релаксации могут существенно изменить распределение электронов пучка, который может потерять заметную долю своей энергии [55, 56, 99, 100]. Наиболее отчетливо это было показано в работе [91]. Согласно работе [91] даже пучки с малым разбросом по скоростям [«моноэнергетические» пучки; их неустойчивость описывается (3.33)] под воздействием генерируемых колебаний быстро переходят в режим слабого возбуждения, когда

$$\gamma \sim \omega_{pe} \frac{n_1}{n_0} \left(\frac{u}{\Delta u} \right)^2, \quad (3.42)$$

увеличивая разброс по скоростям до *

$$\frac{\Delta u}{u} \gtrsim \left(\frac{n_1}{n_0} \right)^{1/3}. \quad (3.43)$$

В дальнейшем возникает квазилинейная релаксация, которая в случае одномерности процесса (что возможно лишь в сильном магнитном поле $\omega_{He} \gg \omega_{pe}$) приводит к образованию плато на функции распределения (рис. 3.1). Экспериментально образование плато на функции распределения пучка было обнаружено в работе [101].

Из одномерного квазилинейного уравнения может быть получен спектр ленгмюровских пульсаций, возникающих на стадии плато.

Ограничиться одномерной теорией можно, если все частицы пучка имеют одинаковое направление движения не только в начальный момент времени, но и на протяжении всего процесса квазилинейной релаксации. Строго говоря, это оправдано при условии, если имеется сильное внешнее магнитное поле в направлении движения пучка, ограничивающее возможность появления у частиц пучка компонент скорости, перпендикулярных к первоначальному движению. Кроме того, будем считать, что скорость пучка превосходит

* Теория [91] базируется на уравнениях для моментов функции распределения и позволяет оценить лишь среднее значение $(\Delta u)^2$.

v_{Te} , и рассмотрим генерацию ленгмюровских волн лишь в направлении пучка. Уравнения (2.139) и (2.52) приобретают вид

$$\frac{\partial f_p^R}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v} D \frac{\partial f_p^R}{\partial v}; \quad (3.44)$$

$$D = \frac{\omega_{pe}^3}{8\pi^2 m_e n_0 v} N \frac{\omega_{pe}}{v}; \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial N_k}{\partial t} = 2\gamma_k N_k; \quad \gamma_k = \frac{e^2 \omega_{pe}}{4\pi k^2} \cdot \left. \frac{\partial f_p^R}{\partial v} \right|_{v = \frac{\omega_{pe}}{k}}. \quad (3.46)$$

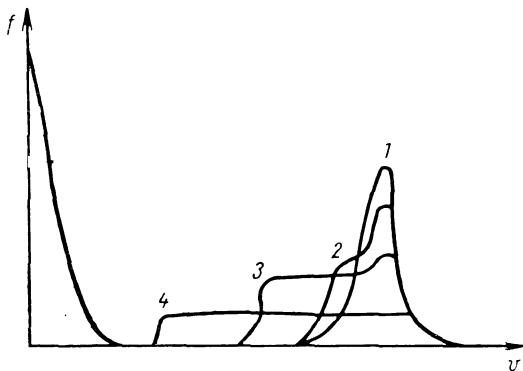


Рис. 3.1. Образование ударной волны в пространстве скоростей при развитии пучковой неустойчивости:

1—4 — различные стадии релаксации функции распределения пучка во времени.

Обозначим $N(v) = N_k \Big|_{k = \frac{\omega_{pe}}{v}}$, тогда

$$\frac{\partial N(v)}{\partial t} = \frac{\omega_{pe} v^2 m_e}{8\pi^2 n_0} \cdot \frac{\partial f^R(v)}{\partial v} N(v). \quad (3.47)$$

Подставив $\frac{\partial f^R(v)}{\partial v} N(v)$ из (3.49) в (3.47), получим из

$$\frac{\partial f^R(v)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial v} \cdot \frac{\omega_{pe}^2}{m_e^2 v^3} N(v) \quad (3.48)$$

интеграл

$$f^R(v, t) - f^R(v, 0) = \frac{\partial}{\partial v} \cdot \frac{\omega_{pe}^2}{m_e^2 v^3} \{N(v, t) - N(v, 0)\}. \quad (3.49)$$

Рассматривая те значения N , которые попадают в область вне начального распределения пучка $f^R(v, 0) = 0$, и считая, что плотность энергии пульсаций значительно превосходит ее начальное значение $N(v, 0)$, имеем

$$N(v, \infty) = \frac{v^3 m_e}{\omega_{pe}^2} \int^v dp f^R(v, \infty) \simeq (2\pi)^3 \frac{v^4 n_1 m_e}{\omega_{pe}^2 u}; \quad v = \frac{\omega_{pe}}{k},$$

где u — начальная скорость пучка $v_{Te} \ll v < u$. Спектральная плотность энергии турбулентных пульсаций имеет вид

$$W_k(\infty) = \frac{\omega_{pe}}{(2\pi)^3} N\left(\frac{\omega_{pe}}{k}, \infty\right) = \frac{n_1 m_e \omega_{pe}^3}{k^4 u};$$

$$\frac{\omega_{pe}}{u} < k < \frac{1}{d_e}. \quad (3.50)$$

Полная энергия, переданная в турбулентные пульсации,

$$W = \int W_k dk = \frac{n_1 m_e u^2}{3}. \quad (3.51)$$

Половина этой энергии есть энергия электрического поля турбулентных пульсаций, а половина содержится в нерезонансных частицах плазмы, адиабатически колеблющихся в поле турбулентных пульсаций. Заметим, что спектр турбулентных пульсаций является степенной функцией k . Однако в отличие от жидкостей вся область спектра (3.50) соответствует области возбуждения (энергосодержащей области).

Динамика образования плато изучалась теоретически в работе [102]. Согласно [102] образование плато происходит при распространении нелинейной автомодельной волцы в пространстве скоростей. Указанием на то, что такой эффект наблюдается, может служить работа [103]. Квазилинейный интеграл (3.49) позволяет исключить из (3.46) $f^R(v, t)$ и получить одно нелинейное уравнение для $N(v)$

$$\frac{\partial N(v)}{\partial t} = \frac{\omega_{pe} v^2 m_e}{8\pi^2 n_0} N(v, t) \frac{\partial f^R(v, 0)}{\partial v} + \frac{\omega_{pe}^3 v^2}{8\pi^2 n_0 m_e} N(v, t) \times$$

$$\times \frac{\partial^2}{\partial v^2} \cdot \frac{1}{v^3} (N(v, t) - N(v, 0)). \quad (3.52)$$

Автомодельное решение, получаемое ниже из (3.52), верно, если нелинейные взаимодействия не вступают в силу. Это возможно лишь при достаточно малых скоростях частиц пучка, так что эффекты индуцированного рассеяния на ионах несут существенны [104].

Пусть начальный пучок имеет узкий разброс по скоростям $\Delta u = \Delta v_1 \ll v_1 = u^*$. Рассмотрим те значения v , которые лежат вне Δv_1 [для них $f^R(v, 0) = 0$], и стадию, когда колебания имеют интенсивность, существенно большую, чем их начальное значение $N(v, t) \gg N(v, 0)$. Тогда уравнение (3.52) имеет вид

$$\frac{\partial W(v, t)}{\partial t} = \frac{\omega_{pe}^3}{8\pi^2 n_0 m_e} v^2 W(v, t) \frac{\partial^2 W(v, t)}{\partial v^2};$$

$$W(v, t) = \frac{N(v, t)}{v^3}. \quad (3.53)$$

Согласно предположению [102] динамика развития пучковой неустойчивости сводится к возникновению в пространстве скоростей волны (типа тепловой или ударной), на фронте которой величина W меняется относительно быстро, достигая за фронтом плато. Величина плато медленно уменьшается, когда фронт волны продвигается к меньшим значениям v (см. рис. 3.1). Вблизи фронта волны можно искать решение (3.53) в виде

$$W = W(v - v_*(t), t) = W(\xi, t); \quad \xi = v - v_*(t), \quad (3.54)$$

считая, что $W, \frac{dv_*}{dt}$ — медленные функции t . Пренебрегая производными по времени от W и полагая $\xi \ll v_*(t)$, получаем

$$-\frac{dv_*}{dt} \cdot \frac{dW}{d\xi} = \frac{\omega_{pe}^3}{8\pi^2 n_0 m_e} v_*^2 W \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2}. \quad (3.55)$$

Интегрируя (3.55) по ξ , имеем

$$-\frac{8\pi^2 n_0 m_e}{\omega_{pe}^3} \cdot \frac{dv_*}{dt} \cdot \frac{1}{v_*^2} \ln \frac{W(\xi, t)}{W(0, t)} = \frac{\partial W(\xi, t)}{\partial \xi}$$

$$-\frac{\partial W(\xi, t)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} \simeq \frac{[\partial W(\xi, t)]}{\partial \xi}. \quad (3.56)$$

Точка $\xi = 0$ выбрана так, что $\frac{\partial W}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0}$ мало в сравнении с $\frac{\partial W}{\partial \xi}$ при $\xi \neq 0$. Рассматривая такие ξ , для которых $W(\xi, t)$ достаточно велико, можно с необходимой точностью заменить \ln в (3.56) $\ln \frac{W(\infty, t)}{W(0, t)}$, где $W(\infty, t)$ значение W при $\xi \rightarrow \infty$, т. е. за

* Напомним, что для применимости статистического описания необходимо

$$\frac{\Delta v_1}{v_1} \gg \left(\frac{n_1}{n_0} \right)^{1/3}.$$

фронтом волны. Отсюда

$$W(\xi, t) = -\xi \frac{8\pi^2 n_0 m_e}{\omega_{pe}^3} \cdot \frac{1}{v_*^2} \cdot \frac{dv_*}{dt} \ln \frac{W(\infty, t)}{W(0, t)}. \quad (3.57)$$

Величина $W(\infty, t)$ должна быть найдена из условий сшивки. Из (3.49), интегрируя по области плато за фронтом волны, имеем

$$\int_{v_*}^{v_1} f^R(v, t) dv = \int_{\Delta v_1} f^R(v, 0) dv = n_1 m_e^{-1} = f(\infty, t)(v_1 - v_*), \quad (3.58)$$

что выражает закон сохранения числа частиц. С другой стороны, в области v вне Δv_1 вблизи фронта волны из (3.49)

$$\begin{aligned} f(v, t) &\simeq f(\infty, t) = \frac{\partial}{\partial v} \omega_{pe}^2 W / m_e^2 = \omega_{pe}^2 \frac{\partial W / m_e^2}{\partial \xi} = \\ &= -\frac{1}{v_*^2} \frac{dv_*}{dt} \ln \frac{W(\infty, t)}{W(0, t)} \frac{8\pi^2 n_0}{\omega_{pe} m_e}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Последнее равенство написано с помощью (3.57). Сравнение (3.58) и (3.59) позволяет найти уравнение для определения закона движения фронта волны:

$$\frac{n_1}{v_* - v_1} = \frac{1}{v_*^2} \cdot \frac{dv_*}{dt} \ln \frac{W(\infty, t)}{W(0, t)} \cdot \frac{8\pi^2 n_0}{\omega_{pe}}. \quad (3.60)$$

С необходимой точностью можно не учитывать зависимость выражения под знаком логарифма от времени. При $v_* - v_1 \ll v_1$ ($v_* - v_1 \gg \Delta v_1$) имеем

$$\frac{v_1 - v_*}{v_1} = \sqrt{\frac{\omega_{pe} t}{4\pi^2 \ln \frac{W(\infty, t)}{W(0, t)}} \cdot \frac{n_1}{n_0}}. \quad (3.61)$$

При $v_* \ll v_1$

$$\frac{v_*}{v_1} = \frac{8\pi^2}{t\omega_{pe}} \ln \frac{W(\infty, t)}{W(0, t)} \cdot \frac{n_0}{n_1}. \quad (3.62)$$

Характерное время изменения энергии пучка, когда изменение скоростей частиц в пучке составит величину порядка Δv_1 , может быть оценено из (3.61):

$$t = \frac{1}{\omega_{pe}} 4\pi^2 \ln \frac{W(\infty)}{W(0)} \cdot \frac{n_0}{n_1} \left(\frac{\Delta v_1}{v_1} \right)^2. \quad (3.63)$$

Изменение энергии пучка $m v_1 \Delta v_1$ при $\Delta v_1 \sim v_1$ составит $\sim m v_1^2$, т. е. пучок теряет энергию порядка начальной. По закону

сохранения энергии она переходит в колебания, т. е. $W(\infty) \sim \sim n_1 m v_1 \Delta v_1$. С другой стороны, начальная энергия колебаний $\sim \frac{T \omega_{pe}^3 \Delta v_1}{v_1^4}$, т. е.

$$\ln \frac{W(\infty)}{W(0)} \simeq \ln \left(\frac{v_1^2}{v_{Te}^2} n_1 \frac{v_1^3}{\omega_{pe}^3} \right).$$

Выражение под знаком логарифма обычно достаточно большое число.

По-видимому, вопрос о том, в каком случае квазилинейная релаксация идет до образования плато, зависит от граничных условий, нелинейных эффектов (см. ниже) и условий возбуждения (непрерывная или импульсная инжекция пучка).

Если пучок частиц непрерывно инжектируется в полупространство, занятое плазмой, то возможен эффект накопления колебаний [105, 106], связанный с тем, что групповые скорости ленгмюровских пульсаций много меньше скорости частиц пучка. Благодаря этим эффектам накопления большая энергия пульсаций концентрируется около границы плазмы. Такое неоднородное распределение пульсаций может создать неустойчивость, связанную с силой Миллера, и привести к значительно большей роли нелинейных эффектов.

Локальное увеличение интенсивности пульсаций может привести к весьма существенной роли нелинейных эффектов в этой области даже в случае, когда в других областях такие нелинейные эффекты слабы. В свою очередь, это приведет к локальной изотропизации турбулентных пульсаций, которые будут интенсивно рассеивать частицы пучка, проникающие в указанную область.

Нужно отметить также, что изменение функции распределения пучка в результате квазилинейной релаксации может, вообще говоря, привести к новым неустойчивостям, которые не проявлялись или слабо проявлялись для исходного распределения, имевшего место до квазилинейной релаксации [107, 108]. Физически это связано с тем, что образование плато может стабилизировать один тип колебаний, однако такое состояние не будет устойчивым для других колебаний.

Этот эффект может быть просто проиллюстрирован при помощи (3.34). Рассмотрим, например, черенковскую неустойчивость ($v = 0$) для двух колебаний — высокочастотного ω_k^σ и низкочастотного $\omega_k^{\sigma'}$. Инкремент каждого из них пропорционален

$$k_z \frac{\partial f_1^\alpha}{\partial v_z} - \frac{k_x c m}{e H} \frac{\partial f_1^\alpha}{\partial y}.$$

Пусть для высоких частот эффект неоднородности пучка, описываемый вторым числом, мало существен, т. е. их инкремент пропор-

ционален $\frac{\partial f_1^\alpha}{\partial v_z}$. Пренебречь неоднородностями в пучке можно в том случае, если

$$k_z \frac{\partial f_1^\alpha}{\partial v_z} \approx \frac{\omega^\sigma n_1}{m (\Delta v)^2 u}$$

много больше

$$\frac{ck_x n_1}{eHL (\Delta v)} \simeq \frac{n_1}{m\omega_H LL_1 (\Delta v)} \left(k_x \sim \frac{1}{L_1} \right).$$

Развитие неустойчивости высокочастотных колебаний приводит к образованию плато и $\Delta v \sim u$, т. е. неоднородность для высокочастотных колебаний незначительна при

$$\omega^\sigma \gg \omega_{D1} = \frac{u^2}{L\omega_H L_1}. \quad (3.64)$$

Здесь ω_{D1} — дрейфовая частота пучка ($k_x \sim \frac{1}{L}$ — для основной моды).

Рассмотрим теперь низкочастотные колебания $\omega_k^{\sigma'}$. Для них неоднородный член в инкременте может быть весьма существенным, и если колебание $\omega_k^{\sigma'}$ является резонансным по отношению к тем же частицам, то уменьшение $\frac{\partial f_1}{\partial v_z}$ приводит к тому, что инкремент низкочастотных пульсаций возрастает. Характерное значение инкремента легко оценить из (3.34) [108]

$$\gamma \simeq \frac{n_1}{n_0} \omega_{D1}. \quad (3.65)$$

Вообще говоря, (3.65) весьма мало. Однако для его ликвидации необходимо, чтобы $\frac{\partial f_1}{\partial v_z}$ уменьшилась дальше и стала отрицательной, но при этом высокочастотные пульсации начнут поглощаться. В силу закона сохранения энергии полная энергия пучка низкочастотных и высокочастотных пульсаций сохраняется. Однако пучок теряет энергию и, следовательно, поглощение высокочастотных пульсаций связано с перекачкой их энергии в низкочастотные. Этот процесс является достаточно медленным. Если пучок существует в плазме столь длительное время $\sim \frac{1}{\gamma}$, например из-за инжекции извне, то более существенную роль могут играть нелинейные процессы спектральной перекачки.

Квазилинейные эффекты циклотронного возбуждения низкочастотных пульсаций (в частности, альфвеновских волн и вистлеров) размытыми ионными пучками рассматривались в работе [109].

3.3.3. Нелинейная стабилизация пучковых неустойчивостей

Весьма существенная роль нелинейных эффектов для развития пучковой неустойчивости была продемонстрирована впервые в работе [104]. Согласно [104] эффекты спектральной перекачки при рассеянии турбулентных пульсаций на ионах могут переводить пульсации в нерезонансную по отношению к частицам пучка область и стабилизировать неустойчивость. При $T_i > T_e \frac{v_{Te}^2}{u^2} \cdot \frac{m_i}{m_e}$ условия стабилизации имеют вид $\frac{v_{Ti}}{u} \left(\frac{u}{\Delta u}\right)^3 \frac{T_i}{T_e} \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right)^2 \ll 1$. В этот критерий входят лишь параметры пучка и плазмы, но не энергия турбулентных пульсаций. Если выполнено обратное условие $T_i < T_e \frac{v_{Te}^2}{u^2} \cdot \frac{m_i}{m_e}$, то спектральная перекачка при рассеянии на ионах может осуществляться эстафетным образом, сопровождаясь довольно сильной изотропизацией. В этом случае также возможна стабилизация* при выполнении условия $\frac{m_i}{m_e} \left(\frac{v_{Te}}{u}\right)^3 \frac{v_{Te}}{\Delta u} \ll 1$.

При малых скоростях пучка в однородной плазме стабилизация оказывается невозможной. Так, если перекачка осуществляется из-за рассеяния на электронах и $\frac{u}{v_{Te}} < \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/5}$, то квазилинейная релаксация происходит быстрее, чем спектральная перекачка. С увеличением плотности плазмы роль кулоновских соударений в спектральной перекачке будет возрастать (см. § 4.5). Увеличение интенсивности спектральной перекачки в этом случае может привести к тому, что даже пучки относительно малых скоростей будут устойчивыми. Эффект зависимости интенсивности возбуждения турбулентности плазмы пучками от плотности плазмы экспериментально наблюдался в работе [98].

По-видимому, нелинейным эффектам нужно приписать наблюдавшееся в работах [98, 110] уменьшение интенсивности высокочастотных колебаний с ростом тока в пучке, а также расширение их спектра. Большое значение в проявлении нелинейных эффектов могут играть неоднородности распределения пульсаций, приводящие к эффектам накопления. Теоретическое исследование таких эффектов в рамках модели [105, 106], с учетом нелинейностей показало, что возникают решения типа периодически следующих срывов раскочки колебаний, чередующихся с эффектами квазилинейной релаксации. Такие низкочастотные колебания релаксационного характера были получены также в работе [111] при исследовании возможности стабилизации пучковой неустойчивости из-за распадных

* В известном смысле эта стабилизация неполная; нелинейные эффекты лишь существенно увеличивают время размытия пучка, которое оказывается намного больше величины, обратной линейному инкременту.

процессов. При этом возможны два квазистационарных состояния, которые поочередно срываются. Эти теоретические выводы качественно согласуются с экспериментальными результатами работы [98], в которой низкочастотные релаксационные колебания имели частоту, близкую к частоте ионно-звуковых колебаний, а также с эффектами срывов, наблюдаемых в работе [112].

§ 3.4. ВОЗБУЖДЕНИЕ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ИЗ-ЗА АНИЗОТРОПНОЙ И КОНУСНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТЕЙ

3.4.1. Линейные эффекты

Рассмотрим неустойчивости распределений частиц плазмы в магнитном поле, для которых отсутствуют направленные скорости вдоль магнитного поля. Будем считать, что функция распределения имеет вид

$$f_p = f(v_z^2, v_\perp). \quad (3.66)$$

Примером такого рода может служить пучок частиц, инжектируемый в плазму поперек магнитного поля, что обычно реализуется при заполнении магнитных ловушек. Как теория, так и общая картина явлений в данном случае в определенном отношении сходна с описанной выше теорией и явлениями прохождения пучков через плазму, за исключением того, что циклотронная неустойчивость в данном случае становится основной. Другим примером, соответствующим (3.66), является распределение частиц в магнитной ловушке, когда из-за конуса потерь частицы с малым v_\perp отсутствуют. Указанная анизотропия приводит к неустойчивости. Наконец, третьим примером может служить распределение, в котором температуры вдоль магнитного поля и поперек него различны. Такое распределение может возникнуть при циклотронном нагреве плазмы, когда в основном из-за нагрева увеличиваются скорости частиц перпендикулярно к внешнему магнитному полю. Все эти примеры объединены одной общей чертой — анизотропией распределения частиц плазмы при наличии магнитных полей. Так же как и для пучковой неустойчивости, в случае, когда степень анизотропии велика, возникает сильное возбуждение и неустойчивость носит аперриодический характер. Можно считать, что сильная неустойчивость также приводит к ликвидации сильной анизотропии и относительно быстро переходит в слабую неустойчивость, которая развивается более медленно и тем самым определяет временной масштаб процесса. В последнем случае можно использовать (3.34).

Пусть функция распределения частиц имеет вид

$$f_{p\alpha} = \frac{(2\pi) n_\alpha(y)}{m_\alpha^3 v_\perp^2 v_{T\alpha}^2(y)} \exp \left\{ -\frac{(v_\perp - u_\alpha)^2 + v_z^2}{2v_{T\alpha}^2(y)} \right\}. \quad (3.67)$$

Эта функция распределения описывает первый из приведенных выше примеров. Подставляя (3.67) в (3.34) для возбуждения продольных пульсаций, легко получаем

$$\begin{aligned} \gamma_k^l = & \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2 \sqrt{\pi/2}}{\sqrt{2\pi} \left| \frac{\partial \epsilon_k^l}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_k^l}} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \times \\ & \times \exp \left\{ -\frac{(\omega_k^l - \nu \omega_{H\alpha})^2}{2k_z^2 v_{T\alpha}^2} \right\} \cdot \frac{1}{v_{T\alpha}^2} \int_0^{\infty} \frac{dv_{\perp}}{v_{T\alpha}} \left\{ J_{\nu}^2(z_{\alpha}) \frac{\nu \omega_{H\alpha} \left(1 + \frac{v_{T\perp}^2}{v_{T\alpha}^2} \right) - \omega_k^l}{k_z v_{T\alpha}} \right. \\ & \left. - \nu J_{\nu}(z_{\alpha}) J'_{\nu}(z_{\alpha}) \frac{k_{\perp} v_{T\alpha}}{k_z v_{\perp}} - \frac{k_{\perp} c v_{T\alpha}}{eH k_z} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \ln f_{p\alpha} \right\} \exp \left[-\frac{(v_{\perp} - u_{\alpha})^2}{2v_{T\alpha}^2} \right]; \\ & z_{\alpha} = \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_{H\alpha}}. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Если неоднородности малы, то при $\nu = 0$, согласно (3.68), раскачка отсутствует. Другими словами, раскачка может носить лишь циклотронный характер. Из (3.68) могут быть получены различные предельные случаи (горячих и холодных электронов и ионов, анизотропных ионов и изотропных электронов или наоборот и т. д.). Они рассмотрены в работах [113—116, 109], а в случае сильного возбуждения — в работах [117—121].

Приведем несколько примеров. Пусть электроны замагничены, изотропны, а скорость ионов u_i существенно превышает тепловые скорости электронов ионов. В случае сильного магнитного поля ($\omega_{He} \gg \omega_{pe}$), пренебрегая эффектами неоднородности, рассмотрим возбуждения ленгмюровской продольной волны $\omega_{pe} \cos \theta$. Раскачка происходит из-за анизотропии распределения ионов. Из (3.68) имеем

$$\begin{aligned} \gamma_{k,\nu} = & \frac{1}{4} \cdot \frac{\omega_{pi}^2}{k^2 v_{Ti}^2} \omega_{pe} J_{\nu}^2 \left(\frac{k u_i \sin \theta}{\omega_{Hi}} \right) \frac{\nu \omega_{Hi} - \omega_{pe} \cos \theta}{k v_{Ti}} \times \\ & \times \exp \left\{ -\frac{(\omega_{pe} \cos \theta - \nu \omega_{Hi})^2}{2k^2 v_{Ti}^2 \cos^2 \theta} \right\}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Раскачка возникает при $\nu \omega_{Hi} > \omega_{pe} \cos \theta$. Для того чтобы эффективно раскачивались гармоники, необходимо $\frac{k u_i}{\omega_{Hi}} \sim 1$, т. е.

$$\gamma \sim \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{Hi}^2} \left(\frac{u}{v_{Ti}} \right)^3 \omega_{pe}.$$

Рассмотрим теперь волны, распространяющиеся вдоль магнитного поля $k_{\perp} = 0$. Согласно (3.68) при этом $\nu = 0$ и, следовательно, продольные волны затухают. Однако волны другого типа, например поперечные, могут раскачиваться [114]. Волны, для которых тепловое движение несущественно, т. е.

$$k\nu_{T\alpha} \ll |\omega_k^{\sigma} - \omega_{H\alpha}|; \quad k\nu_{T\alpha} \ll \omega_k^{\sigma},$$

при распространении вдоль поля представляют собой суперпозицию двух волн, поляризованных по кругу, т. е.

$$e_k^{\pm} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\mp i}{\sqrt{2}}, 0 \right\}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \gamma_k^{\pm} = & \frac{e^2}{4\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \sum_a \int \frac{v_{\perp}^2}{\frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \varepsilon_k^{\pm}} \left(\frac{\nu J_{\nu}(z_{\alpha})}{z_{\alpha}} \pm J'_{\nu}(z_{\alpha}) \right)^2 dp_{\alpha} \times \\ & \times \delta(\omega_k^{\pm} - k_z v_z - \nu \omega_{H\alpha}) \left(k_z \frac{\partial f_{p\alpha}}{\partial p_z} + \frac{\omega_{H\alpha} \nu}{v_{\perp}} \cdot \frac{\partial f_{p\alpha}}{\partial p_{\perp}} - \frac{k_{\perp} c}{eH} \cdot \frac{\partial f_{p\alpha}}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (3.70)$$

При $k_{\perp} \rightarrow 0$, $z_{\alpha} \rightarrow 0$ и для e_k^{+} остается лишь $\nu = 1$, а для e_k^{-} — лишь $\nu = -1$, т. е.

$$\begin{aligned} \gamma_k^{\pm} = & \frac{e^2}{2} \sum_a \int \frac{v_{\perp}^3 dv_{\perp}}{\frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \varepsilon_k^{\pm}} \delta(\omega_k^{\pm} - k v_z \mp \omega_{H\alpha}) \times \\ & \times \left(k_z \frac{\partial f_{p\alpha}}{\partial p_z} \pm \frac{\omega_{H\alpha}}{v_{\perp}} \cdot \frac{\partial f_{p\alpha}}{\partial p_{\perp}} - \frac{k_{\perp} c}{eH} \frac{\partial f_{p\alpha}}{\partial y} \right) m_{\alpha}^2 dp_z. \end{aligned} \quad (3.71)$$

В области $\omega \ll \omega_{Hi}$ для $\omega = k v_A^*$ и распределения (3.3) получим

$$\gamma_k = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{v_A u_i^2}{v_{Ti} c^2} \cdot \frac{\omega_{pi}^2}{k^2 v_{Ti}^2} (\pm 1) \omega_{Hi} e^{-\frac{\omega_{Hi}^2}{2k^2 v_{Ti}^2}}. \quad (3.72)$$

Для распределения, соответствующего анизотропии температур

$$f_p = \frac{(2\pi)^{3/2} n}{v_{T\parallel} v_{T\perp}^2 m^3} \exp\left(-\frac{v_{\perp}^2}{2v_{T\perp}^2} - \frac{v_z^2}{2v_{T\parallel}^2}\right), \quad (3.73)$$

* Рассматриваемые волны есть суперпозиция альфвеновской и магнитозвуковой.

получим [114], что максимум инкремента имеет место при

$$k \sim \frac{\omega_{Hi}}{v_A} \left| 1 - \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} \right| \text{ и}$$

$$\gamma_{k \text{ макс}} \simeq \omega_{pi} \frac{v_{T_{\parallel}}}{c} \exp \left\{ -\frac{v_A^2}{2v_{T_{\parallel}}^2} \cdot \frac{T_{\parallel}^2}{(T_{\perp} - T_{\parallel})^2} \right\}. \quad (3.74)$$

Аналогично нетрудно из (3.68) для распределения (3.73) найти раскачку вистлеров $\omega^{\sigma} = \frac{k^2 c^2 \omega_{He}}{\omega_{pe}^2}$

$$\gamma_{k \text{ макс}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \omega_{pe} \frac{v_{T_{\parallel}}}{c} \left(\frac{T_{\perp} - T_{\parallel}}{T_{\perp}} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{v_A^2}{2v_{T_{\parallel}}^2} \cdot \frac{T_{\perp}}{T_{\perp} - T_{\parallel}} \right\}. \quad (3.75)$$

Аналогично рассматривается конусная неустойчивость, соответствующая такому распределению частиц, при котором f обращается в нуль в определенном конусе углов $v_z > \frac{1}{\alpha} v_{\perp}$, где $\alpha = \frac{H_{\text{мин}}}{H_{\text{макс}}}$ — пробочное отношение. Очевидно, что в реальных условиях падение функции распределения при увеличении угла является достаточно плавным. В работе [122] рассматривалась конусная неустойчивость для горячих ионов $T_i \gg T_e$ относительно возбуждения продольной электронной волны $\omega = \omega_{pe} \cos \theta$ ($\omega_{pe} \ll \omega_{He}$). Если, кроме того, $\omega_{Hi} \ll \omega_{pe}$, то ионы можно считать немагнитными $\frac{kv_{Ti}}{\omega_{Hi}} \gg 1$, т. е. движущимися по прямым линиям, и записать вероятности в виде

$$\omega_p^l(\mathbf{k}) = \frac{e^2 (2\pi)^3}{\pi k^2} \frac{\partial \epsilon_k^l}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_k^l} \delta(\omega_k^l - \mathbf{k}\mathbf{v}). \quad (3.76)$$

Тогда при $k_{\perp} \gg k_z$

$$\gamma_k^l = \frac{e^2}{2\pi k^2} \frac{\partial \epsilon_k^l}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_k^l} \int \delta(\omega_k^l - \mathbf{k}\mathbf{v}) \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{v_{\perp}} \frac{\partial f_{pi}}{\partial p_{\perp}} + k_z \frac{\partial f_{pi}}{\partial p_z} \right) dp =$$

$$= \frac{\omega_{pi}^2 \omega_k^l m_i^{3/2}}{\sqrt{2} k^2} \frac{\partial \epsilon_k^l}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_k^l} \int_{\epsilon_{\perp} 0}^{\infty} \frac{d\epsilon_{\perp}}{k_{\perp} \sqrt{\epsilon_{\perp} - \epsilon_{\perp 0}}} \cdot \frac{\partial \varphi(\epsilon_{\perp})}{\partial \epsilon_{\perp}}; \quad (3.77)$$

где

$$\varphi(\varepsilon_{\perp}) = \int f_{pi} \frac{dp_z}{8\pi^2} m_i; \quad \varepsilon_{\perp 0} = \frac{m_i (\omega_k^l)^2}{2k_{\perp}^2}.$$

Функция $\varphi(\varepsilon_{\perp})$ описывает распределение частиц по энергиям $\varepsilon_{\perp} = \frac{m_i v_{\perp}^2}{2}$ и удовлетворяет условию нормировки $\int_0^{\infty} \varphi(\varepsilon_{\perp}) d\varepsilon_{\perp} = 1$.

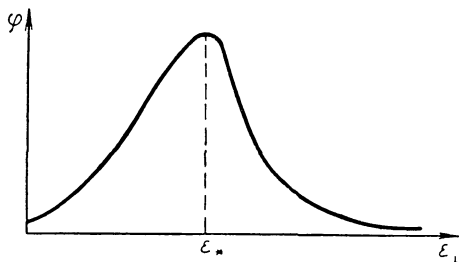


Рис. 3.2. Функция распределения частиц плазмы по энергиям $\varepsilon_{\perp} = \frac{mv_{\perp}^2}{2}$ при конусной неустойчивости: v_{\perp} — скорость частиц, перпендикулярная к внешнему магнитному полю H_0 .

Выражение для инкремента (3.77) было получено в работе [122]. Функция распределения $\varphi(\varepsilon_{\perp})$ должна обращаться в нуль при $\varepsilon_{\perp} \rightarrow 0$, так как таких частиц по условию нет из-за их потерь в пробках, и естественно $\varphi(\infty) = 0$. Если $\varphi(\varepsilon_{\perp})$ имеет один максимум (рис. 3.2) и ε_* есть то значение ε_{\perp} , в котором $\varphi(\varepsilon_{\perp})$ максимально, то очевидно, что при $\varepsilon_{\perp 0} > \varepsilon_*$, когда $\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{\perp}} < 0$, (3.77) отрицательно, т. е. дает затухание. Если же $\varepsilon_{\perp 0} < \varepsilon_*$, то, как правило, имеет место раскачка. В качестве примера рассмотрим распределение

$$\varphi(\varepsilon_{\perp}) = \frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_*^2} \exp\left(-\frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_*}\right), \quad (3.78)$$

Удовлетворяющее всем поставленным требованиям. Получаем

$$\gamma_k^l = \omega_{pe} \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} \sqrt{\pi \frac{m_i}{m_e} \cdot \frac{\omega_{pi}^3}{2k^3 v_*^3}} e^{-\frac{\varepsilon_{\perp 0}}{\varepsilon_*}} \left(1 - 2 \frac{\varepsilon_{\perp 0}}{\varepsilon_*}\right); \quad \varepsilon_* = \frac{m_i v_*^2}{2}. \quad (3.79)$$

Раскачка имеет место при $\varepsilon_{\perp 0} < \frac{\varepsilon_*}{2}$. При $\varepsilon_{\perp 0} \ll \varepsilon_*$ инкремент не зависит от $\varepsilon_{\perp 0}$. Это связано с тем, что основной вклад вносят частицы с энергией больше $\varepsilon_{\perp 0}$.

В этих условиях инкремент (3.77) приобретает в общем случае вид

$$\gamma_k^l = \frac{\omega_{pi}^2 \omega_k^l m_i^{3/2}}{k^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_k^l} \sqrt{2} k_{\perp}} \int_0^{\infty} \frac{d\varepsilon_{\perp}}{\sqrt{\varepsilon_{\perp}}} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{\perp}}. \quad (3.80)$$

Если $\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{\perp}} \rightarrow 0$ при $\varepsilon_{\perp} \rightarrow 0$ быстрее $\varepsilon_{\perp}^{1/2}$, то, интегрируя по частям (3.80), убеждаемся в том, что всегда имеет место раскачка

$$\gamma_k^l = \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega_{pi}^2 \omega_k^l m_i^{3/2}}{k^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_k^l} \sqrt{2} k_{\perp}} \int_0^{\infty} \frac{\varphi(\varepsilon_{\perp})}{\varepsilon_{\perp}^{3/2}} d\varepsilon_{\perp}. \quad (3.81)$$

Очевидно, что ликвидация неустойчивости может осуществиться лишь за счет диффузии частиц в область малых ε_{\perp} .

3.4.2. Квазилинейные и нелинейные эффекты

Квазилинейные эффекты для аperiодических неустойчивостей, связанных с анизотропией распределения в условиях $\gamma_k \ll kv_T$, рассматривались в работе [109] и было показано, что полная энергия, переданная колебаниям в условиях слабой надкритичности, пропорциональна малому параметру γ_k/kv_T , характеризующему степень надкритичности. Квазилинейная теория неустойчивости (3.77) рассматривалась в работе [123]. Соответствующая система квазилинейных уравнений, описывающих процессы диффузии, без труда находится с помощью общих квазилинейных уравнений гл. 2.

Остановимся более подробно на квазилинейных эффектах, связанных с конусной неустойчивостью при $\varepsilon_{\perp} \gg \varepsilon_{\perp 0}$. С помощью (3.77) получаем уравнение для $\varphi(\varepsilon_{\perp})$

$$\frac{\partial \varphi(\varepsilon_{\perp})}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{\perp}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{\perp}}} \cdot \frac{\partial \varphi(\varepsilon_{\perp})}{\partial \varepsilon_{\perp}}; \quad (3.82)$$

$$d\tau = dt \int \frac{(\omega_k^l)^2 e^2 N_k dk \sqrt{m_i/2}}{2\pi^2 k^2 k_{\perp} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_k^l}}.$$

Таким образом, рост энергии турбулентных пульсаций уменьшает временной масштаб диффузии, описываемой (3.82), а изменения $\varphi(\varepsilon_{\perp})$ сказываются на временном масштабе раскачки или затухания турбулентных пульсаций. Такая ситуация характерна для общего случая трехмерных процессов квазилинейной релаксации [107].

Из (3.82) следует, что конечному стационарному состоянию соответствует $\frac{1}{V\varepsilon_{\perp}} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_{\perp}} = \text{const}$. Но согласно (3.80) при этом всегда имеется либо раскачка, либо затухание. Для того чтобы была полная стационарность, необходимо $N_k = 0$ либо $\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_{\perp}} = 0$. Вместе с тем, плато по $\varphi(\varepsilon_{\perp})$ не может простираться до ∞ , так как $\varphi(\varepsilon_{\perp})$ убывает. Поэтому $d\varphi/d\varepsilon_{\perp}$ становится отрицательным и, следовательно, $N_k = 0$. Поэтому процесс квазилинейной релаксации происходит таким образом, что вначале ионы возбуждают турбулентные пульсации, а затем, изменив распределение, поглощают все возбужденные пульсации.

В случае инжекции пучка поперек магнитного поля свидетельством развития нелинейных эффектов могут служить последовательные процессы релаксационных срывов неустойчивости [124].

§ 3.5. ВОЗБУЖДЕНИЕ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПОСТОЯННЫМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ПОЛЕМ

3.5.1. Линейные эффекты

Если сила, действующая на электроны плазмы со стороны внешнего поля, превышает максимальное значение силы торможения из-за парных соударений электронов и ионов

$$eE > (v_{\text{ст макс}} m_e v_{Te}) = m_e n_0 4\pi v_{Te}^2 \left(\frac{e^2}{m_e v_{Te}^2} \right)^2 \Lambda = \frac{e^2 \omega_{pe}^2}{v_{Te}^2} \Lambda = eE_D \quad (3.83)$$

(Λ — кулоновский логарифм), то возникает беспрепятственное ускорение электронов [125]. Здесь E_D — поле Драйсера [126].

Когда направленная скорость электронов $u = \frac{eE}{m_e} t$ превысит v_{Te} , возникает гидродинамическая бунемановская неустойчивость, рассмотренная впервые в работе [127]. Выражение для соответствующего инкремента легко получить из (3.31) и (3.33), учитывая, что в данном случае удобно рассматривать эффекты раскачки в системе отсчета, в которой электроны покоятся, когда вместо ω_{p1}^2 войдет ω_{pi}^2 , т. е. параметр $\frac{n_1}{n_0}$ следует заменить $\frac{m_e}{m_i}$

$$\gamma = \text{Im}\omega_k = \frac{\sqrt{3}}{2^{4/3}} \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/3} \omega_{pe} \quad (3.84)$$

Это значение инкремента достигается фактически, если u намного превосходит v_{Te} . Как показано в работе [128] численным расчетом и в работе [129] аналитически, развитие бунемановской неустойчивости приводит к быстрому нагреву электронов, так что условие $v_{Te} < u$ нарушается.

В плазме, в которой $T_e \gg T_i$, возможно возбуждение ионно-звуковых, а также других низкочастотных колебаний. Это возбуждение не является апериодическим как для бунемановской неустойчивости, и поэтому основные турбулентные эффекты могут определяться именно этой, более медленной стадией. Следует отметить, что бунемановские и ионно-звуковые пульсации представляют собой одну и ту же ветвь колебаний. Если в самого начала $T_e \gg T_i$, то ионно-звуковые колебания начинают развиваться при значительно меньших скоростях дрейфа u : $u > 3v_{Ti}$. Инкремент раскочки можно получить, если в (3.34) подставить

$$f_p^e = (2\pi)^{3/2} m_e^{-3} v_{Te}^{-3} (\exp [-(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2 / 2v_{Te}^2]) n_0;$$

$$\gamma_k^e = \frac{e^2}{2\pi \frac{\partial \epsilon_k^l}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_k^l}} \int \delta(\omega_k^l - k\mathbf{v}) \left(\mathbf{k} \frac{\partial f_p^e}{\partial \mathbf{p}} \right) d\mathbf{p} =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{8}} \cdot \frac{kv_s}{(1 + k^2 d_e^2)^{3/2}} e^{-\frac{(\omega_k^l - k\mathbf{u})^2}{2k^2 v_{Te}^2}} \left(\frac{\mathbf{u}\mathbf{k}}{kv_{Te}} - \sqrt{\frac{m_e/m_i}{1 + k^2 d_e^2}} \right). \quad (3.85)$$

Если $u/v_{Te} \gg (m_e/m_i)^{1/2}$, то (3.85) всегда описывает генерацию колебаний. При $k \gg 1/d_e$ величина γ_k падает как $1/k^2$, а при $k \ll 1/d_e$ величина $\gamma_k \sim k$. Максимальный инкремент приходится на $k \sim 1/d_e$. В этой области затухание Ландау на ионах

$$\gamma_{ki} = -\omega_{pi} \sqrt{\frac{\pi}{8}} \left(\frac{T_e}{T_i} \right)^{3/2} e^{-\frac{T_e}{2T_i}}.$$

Требования на неизотермичность с ростом направленной скорости снижаются и при $u \sim v_{Te}$ (на границе применимости (3.85)) неизотермичность плазмы роли не играет. Заметим, что при $T_e \gg T_i$, когда затухание Ландау на ионах экспоненциально мало, инкремент (3.85) необходимо сравнивать с затуханием ионно-звуковых волн из-за ион-ионных соударений [130].

Подробный численный расчет инкрементов линейной теории приведен в работе [131]. Результаты этих расчетов представлены на рис. 3.3, где изображены значения максимальных инкрементов как функции неизотермичности и направленной скорости электронов. На этом пути удается проследить переход от ионно-звуковой

к бунемановской неустойчивости. При $u = v_{Te}$, как следует из этих результатов, $\gamma_{\text{макс}} \approx 0,2 \omega$, т. е. еще можно говорить о слабом возбуждении.

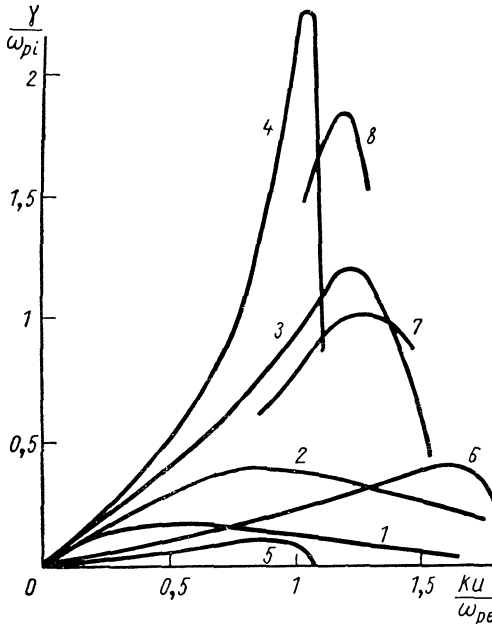


Рис. 3.3. Инкременты γ/ω_{pi} раскачки колебаний в долях ионной частоты ω_{pi} при наличии направленного движения электронов относительно ионов со скоростью u как функции ku/ω_{pe} (k — волновое число возбуждаемых пульсаций). Графики получены численным расчетом в работе [131]:

| № кривой | T_i/T_e | u/v_{Te} |
|----------|-----------|------------|
| 1 | 0 | 0,707 |
| 2 | 0 | 1,414 |
| 3 | 0 | 2,83 |
| 4 | 0 | 5,66 |
| 5 | 1 | 1,7 |
| 6 | 1 | 2,12 |
| 7 | 1 | 2,83 |
| 8 | 1 | 3,85 |

В магнитоактивной плазме инкремент возбуждения различных низкочастотных пульсаций определяется (3.34). Можно фактически воспользоваться уже полученным результатом (3.35), заменив $\omega_{i\alpha}^2$ величиной ω_{pi}^2 . В плазме малого давления ($v_A^2 \gg v_s^2$) раскачка замагниченных звуковых колебаний описывается формулой

$$\gamma_k = \sqrt{\frac{\pi}{8}} |\cos \theta| k v_s \left(\frac{u}{v_{Te}} - \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \right). \quad (3.86)$$

При $\cos \theta \sim 1$ это дает тот же порядок, что и (3.85). Для продольной ионной волны $\omega_{Hi} \cos \theta$ в тех же условиях из (3.35) имеем

$$\gamma_k = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \omega_{Hi} |\cos \theta| \frac{v_A^2}{v_{Te}^2} \cdot \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \sin^2 \theta \left(\frac{u}{v_{Te}} - \frac{\omega_{Hi}}{k v_{Te}} \right). \quad (3.87)$$

Аналогичным образом из (3.35) при $v_A \gg v_s$ получим инкремент возбуждения продольной ионно-циклотронной волны [132, 133]. Для получения инкремента раскачки магнитозвуковых и альфвеновских волн достаточно в (3.34) использовать соответственно нормальные орты

$$\mathbf{e}_k^A = \{1, 0, 0\}; \quad \mathbf{e}_k^M = \{0, 1, 0\}. \quad (3.88)$$

Например,

$$\gamma_k^M = k v_A \sin^2 \theta \frac{v_s^2}{v_A^2} \left(\frac{u}{v_{Te}} - \frac{v_A}{v_{Te} |\cos \theta|} \right) \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (3.89)$$

Раскачка таких волн осуществляется при $u > v_A$.

Раскачка циркулярно поляризованных волн, распространяющихся вдоль \mathbf{H}_0 , может быть описана (3.71). Для возможности такой раскачки существенное значение имеет анизотропия температур электронов в направлении электрического поля и перпендикулярно к нему. Эти неустойчивости весьма сходны с теми, которые рассмотрены в § 3.4*. Существенное значение могут иметь неустойчивости, связанные с неоднородностью температур и плотности плазмы, а также профиля направленных скоростей электронов [95—97, 135]. Эти неустойчивости в условиях слабого возбуждения могут быть описаны с помощью (3.35) для продольных волн или в более общем случае с помощью (3.34). В области $\omega \gg \omega_{Hi}$ ионно-звуковые колебания не замагничены и их инкремент имеет то же значение, что и в отсутствие магнитного поля. Его максимум приходится на $k \sim \frac{1}{d_e}$. По сравнению с этим инкрементом все остальные (3.86)—(3.89) оказываются существенно меньшими и их следует принимать во внимание, если условие $T_e \gg T_i$ не выполнено.

При наличии неоднородности в профиле направленных скоростей электронов указанный максимальный инкремент может возрасти. Как следует из (3.35), слиппинг-неустойчивость может возникнуть и при $u < \frac{\omega \sigma}{k_z}$, если $\frac{k_x u}{k_z \omega_{He} L} > 1$. Точно так же анизотропия температур, входящая в (3.35) в виде множителя

$$-v \omega_{He} \left(1 - \frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}} \right), \quad (3.90)$$

* Гидродинамические неустойчивости такого типа рассматривались в работе [134].

который отсутствует при $T_{\parallel} = T_{\perp}$, может сказаться весьма сильно при больших магнитных полях. Если $k \sim \frac{1}{d_e}$ соответствует немагнитным электронам $k \gg \omega_{He}/v_{Te}$, движение которых можно считать прямолинейным, то инкремент описывается (3.85) и указанная зависимость от ω_{He} отсутствует.

3.5.2. Квазилинейные эффекты

Начальная стадия квазилинейной релаксации из-за развития ионно-звуковой неустойчивости в электрическом поле рассматривалась в работе [136] численным интегрированием квазилинейных уравнений в предположении, что электрическое поле достаточно слабое $E \ll \frac{n_0 v_{Te}^3}{\omega_{pe}^3} E_D \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}$ или $\frac{E^2}{8\pi n_0 T_e} \ll \frac{m_e}{m_i}$. При выполнении этого неравенства можно в первом приближении пренебречь влиянием электрического поля на эффекты квазилинейного взаимодействия частиц с турбулентными пульсациями и использовать уравнения

$$\frac{\partial f_p^R}{\partial t} + \frac{e}{m_e} \mathbf{E} \frac{\partial f_p^R}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial p_i} D_{ij} \frac{\partial f_p^R}{\partial v_j}; \quad (3.91)$$

$$D_{ij} = \int \frac{k_i k_j}{\pi k^2} \frac{\partial \epsilon_k^{\sigma}}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_k^{\sigma}} \delta(\omega_k^{\sigma} - \mathbf{k}v) N_k^{\sigma} \frac{dk}{(2\pi)^3}. \quad (3.92)$$

В работе [136] было высказано утверждение, что неоднородность диффузии играет весьма существенную роль. Последнее легко понять, если учесть, что скорости электронов существенно превосходят фазовые скорости волн, и поэтому в основном с электронами взаимодействуют волны, распространяющиеся почти поперек направленной скорости электронов.

На рис. 3.4 и 3.5 приведены графики зависимости средней скорости электронов от времени, показывающие, что вначале она растет линейно во времени, а затем из-за развития интенсивной турбулентности начинает падать, выходя на примерно постоянное значение.

Решение квазилинейных уравнений в квазистационарных условиях, когда ускорение электрическим полем компенсируется силой трения ионно-звуковых колебаний, рассматривалось в работе [137], а с учетом парных соударений с нейтралами в слабоионизованной плазме — в [138, 6, 139], с учетом кулоновских соударений в полностью ионизованной плазме — в работе [140]. Не останавливаясь на подробностях такого анализа, укажем, что согласно [137] работа электрического поля расходуется в основном на увеличение энергии колебаний и нагрев электронов, тогда как величина тока остается примерно постоянной и не зависит от электрического поля

$j = en_0 u_*$, где u_* — критическое значение скорости электронов, начиная с которой возникает ионно-звуковая неустойчивость. В работе [137] показано также, что энергия ионно-звуковых пульсаций линейно растет во времени. Такой рост естественно имеет место лишь до тех пор, пока не вступят в игру нелинейные взаимодействия. В работе [140] показано, что учет соударений приводит к ограничению роста энергии турбулентных пульсаций во времени.

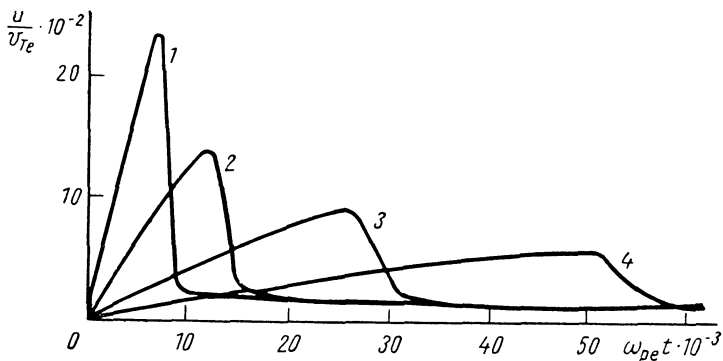


Рис. 3.4. Средняя направленная скорость электронов плазмы u при наличии электрического поля как функция времени t на начальной стадии развития неустойчивости (приближение моментов), полученная в результате численного расчета в работе [136]:

| № кривой | E_0/E_D | ω_{pe}/ν_e |
|----------|-----------|---------------------|
| 1 | 60 | $2 \cdot 10^6$ |
| 2 | 20 | $2 \cdot 10^6$ |
| 3 | 60 | $2 \cdot 10^7$ |
| 4 | 20 | $2 \cdot 10^7$ |

Однако в большинстве случаев нелинейные взаимодействия вступают в игру при энергии турбулентных пульсаций меньше тех, для которых наступает насыщение. Вместе с тем, согласно работе [139] в сильных магнитных полях, ограничивающих диффузию по углам, существенным будет образование плато на функции распределения электронов, которое прекращает диффузию, но не ликвидирует полностью квазилинейный инкремент.

3.5.3. Нелинейные эффекты

Влияние нелинейных эффектов впервые обсуждалось в работе [138], где рассматривались эффекты индуцированного рассеяния ионно-звуковых пульсаций на ионах. Характерный нелинейный инкремент спектральной перекачки имеет порядок $\gamma \sim \omega_{pi} \times$

$\times \frac{W}{nT_i} \theta_0^2$, где θ_0 — раствор углов взаимодействующих колебаний. Благодаря этой спектральной перекачке звуковые колебания трансформируются в область малых k , где они поглощаются из-за парных соударений. Это приводит к ликвидации малого инкремента, не ликвидированного квазилинейной релаксацией. Более строгие решения нелинейных уравнений, учитывающие эффекты неоднотер-

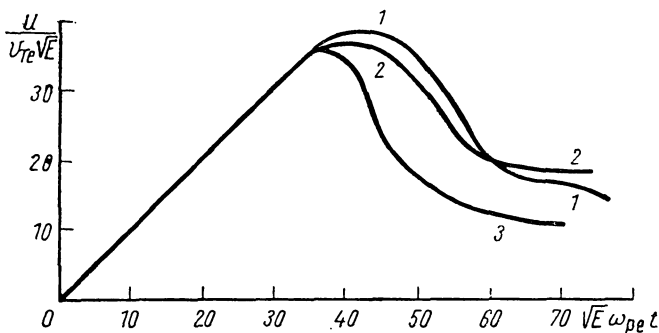


Рис. 3.5. Направленная скорость электронов в сильном электрическом поле E_0 как функция времени ($E = \frac{eE_0}{m_e v_{Te} \omega_{pe}}$):

| № кривой | E_0/E_D | ω_{pe}/v_e |
|----------|-----------|-------------------|
| 1 | 50 | 10^6 |
| 2 | 10 | 10^6 |
| 3 | 10 | $2 \cdot 10^6$ |

ной спектральной перекачки, рассматривались в работе [141]. Процессы распада ионно-звуковых волн будут приводить к более интенсивной спектральной перекачке [142] (более подробно см. гл. 4).

Большое турбулентное сопротивление было обнаружено многими авторами [26, 31—33]. Одним из свидетельств того, что сопротивление плазмы велико, является равномерное распределение тока по сечению и отсутствие скинирования внешнего поля. Согласно работам [143—146] до 30% энергии вкладывается в плазму и электроны могут быть нагреты до 1,5—10 кэв, а ионы — до 200 эв. Аномальное сопротивление плазмы было обнаружено также при попытке создания сильноточного плазменного бетатрона [147] и при работе источников плазмы [148]. Аномальное турбулентное сопротивление наблюдалось также в работе [31]. Оно сопровождалось ускорением частиц. Возбуждение ионно-циклотронных волн в плазме с током наблюдалось в работе [149]. Спектры ионно-звуковой неустойчивости при наличии тока подробно изучали экспериментально в работах [150, 151].

§ 3.6. ВОЗБУЖДЕНИЕ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ. ДРЕЙФОВЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПЛАЗМЫ

Вопросы неустойчивости неоднородной плазмы и связанной с ней турбулентной диффузии имеют важное значение для проблем удержания плазмы. Конкретно эффекты диффузии нельзя рассматривать без детального анализа структуры и топологии удерживающих магнитных полей применительно к конкретным установкам для удержания плазмы. Такие задачи скорее являются техническими и требуют анализа многих деталей, связанных с устройством установок.

Отсылая читателя за подробностями такого рода к обстоятельному обзору [152, 6, 153], остановимся здесь кратко на некоторых основных положениях, позволяющих уяснить физический смысл неустойчивостей неоднородной плазмы.

3.6.1. Линейные эффекты

Не касаясь здесь круга задач, связанных с аperiодическими гидродинамическими неустойчивостями неоднородной плазмы, рассмотрим, как и выше, лишь эффекты, приводящие к слабому возбуждению турбулентных пульсаций. Обратимся к (3.34), предполагая, что функция распределения имеет вид

$$f_p^a = \frac{n_a(y)}{(2\pi)^{-3/2} v_{T_{\perp, a}}^2 v_{T_{\parallel, a}}} \exp \left\{ -\frac{v_{\perp}^2}{2v_{T_{\perp, a}}^2(y)} - \frac{v_z^2}{2v_{T_{\parallel, a}}^2} \right\}, \quad (3.93)$$

т. е. учтем неоднородность плотности частиц и неоднородность и анизотропию температур. Вместо (3.35) легко получим для продольных волн, используя (3.9),

$$\begin{aligned} \gamma_k^l = & \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{v_{T_{\parallel, a}}^3 k_z^2 k_z \frac{\partial e^l}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_k^l}} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \left\{ \exp \left(-\frac{(\omega_k^l - \nu\omega_{H_a})^2}{2k_z^2 v_{T_{\parallel, a}}^2} \right) \right\} \times \\ & \times \left\{ \left[\nu\omega_{H_a} \left(1 - \frac{T_{\parallel, a}}{T_{\perp, a}} \right) - \omega_k^l - \frac{k_{\perp} v_{T_{\parallel, a}}^2}{eH} \left(\frac{1}{n_a} \cdot \frac{dn_a}{dy} - \frac{1}{2T_{\parallel, a}} \times \right. \right. \right. \\ & \times \left. \left. \frac{dT_{\perp, a}}{dy} \left(1 - \frac{(\omega_k^l - \nu\omega_{H_a})^2}{k_z^2 v_{T_{\parallel, a}}^2} \right) \right) \right] e^{-\mu_a} I_{\nu}(\mu_a) - \frac{k_{\perp} v_{T_{\parallel, a}}^2}{eH} \cdot \frac{1}{T_{\perp, a}} \times \\ & \times \left. \frac{dT_{\perp, a}}{dy} \mu_a \frac{d}{d\mu_a} I_{\nu}(\mu_a) e^{-\mu_a} \right\}. \quad (3.94) \end{aligned}$$

Рассмотрим частоты, лежащие в области

$$k_z v_{Ti} \ll \omega_k^l \ll k_z v_{Te} (\omega_k \ll \omega_{Hi}).$$

В этом случае в силу множителя

$$\exp \left\{ - \frac{(\omega_k^l - v\omega_{Hi})^2}{2k_z^2 v_{Ti}^2} \right\}$$

раскачка или затухание на ионах являются экспоненциально малыми, если только ω_k^l не очень близко к $v\omega_{Hi}$. Исключая этот случай, рассмотрим эффект, возникающий от электронов. Считая электроны замагниченными $\mu_e \ll 1$, видим из (3.94), что член, описывающий неоднородность поперечных температур, мал и существенна лишь нециклотронная раскачка $v = 0$

$$\gamma_k^l = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\omega_{pe}^2}{v_{T\parallel}^3 k^2 k_z \left. \frac{\partial \epsilon^l}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_k^l}} \left(\omega_D - \omega_k^l - \omega_D \frac{1}{2} \cdot \frac{d \ln T_{\parallel}}{d \ln n} \right), \quad (3.95)$$

где $\omega_D = - \frac{k_x v_{T\parallel}^2}{eH} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{dn}{dy}$; $|\omega_D|$ — дрейфовая частота.

Если рассматривать раскачку дрейфовых волн, т. е. $\omega^l \approx \omega_D$, то из (3.95) следует критерий неустойчивости [154, 155] (впервые неустойчивость неоднородной плазмы рассматривалась в работе [156])

$$\frac{d \ln T_{\parallel}}{d \ln n} < 0. \quad (3.96)$$

Учитывая, что $\frac{\partial \epsilon^l}{\partial \omega} = \frac{\omega_{pi}^2}{k^2 v_s^2} \omega_D^{-1}$, получаем

$$\gamma_k^{\sigma} = - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \cdot \frac{\omega_D^2}{k_z v_{T\parallel}} \cdot \frac{d \ln T_{\parallel e}}{d \ln n}. \quad (3.97)$$

Здесь инкремент много меньше частоты в силу $\omega_D \ll k_z v_{T\parallel e}$. Кроме того, $\omega_D \gg k_z v_s$, что необходимо для того, чтобы ω_k^l была близка к дрейфовой. Если учесть слабое отличие ω_k^l от ω_D , т. е.

$$\omega_k^l = \omega_D + \frac{k_z^2 v_s^2}{\omega_D},$$

то получим критерий неустойчивости [157]

$$\frac{1}{2} \frac{d \ln T_{\parallel, e}}{d \ln n} < - \frac{k_z^2 v_s^2}{\omega_D^2}. \quad (3.98)$$

Как показано в работе [157], при $\frac{d \ln T_{\parallel, e}}{d \ln n} = 0$ плазма может оказаться неустойчивой для достаточно малых k_z , поскольку при $\frac{d \ln T_{\parallel, e}}{d \ln n_e} = 0$ в (3.95) очень существенны даже малые отличия ω_k^σ от ω_D . Такое отличие имеется даже при $k_z \rightarrow 0$, если учесть малые поправки, связанные с возможным смещением ионов в волне поперек сильного магнитного поля. Частота колебаний находится из уравнения

$$\varepsilon^l = \varepsilon_{ij} \frac{k_i k_j}{k^2} = \varepsilon_{zz} \frac{k_z^2}{k^2} + \varepsilon_{xx} \frac{k_x^2}{k^2} = 0,$$

которое при пренебрежении ε_{xx} дает

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\omega_{pi}^2}{k_z^2 v_s^2} \left(1 - \frac{\omega_D}{\omega} \right) = 0,$$

$$\omega_k = \omega_D; \quad (k_z v_s \ll \omega_D).$$

При $\omega_k \ll \omega_{Hi}$ значение $\varepsilon_{xx} = 1 + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{Hi}^2}$, т. е.

$$\omega_k = \frac{\omega_D}{1 + \frac{k_x^2 v_s^2}{\omega_{Hi}^2}}; \quad \omega_D - \omega_k = \omega_D \frac{k_x^2 v_s^2}{\omega_{Hi}^2}. \quad (3.99)$$

Это дает для инкремента при $\frac{d \ln T_{\parallel, e}}{d \ln n} = 0$ выражение

$$\gamma = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\omega_D^2}{k_z v_{Te}} \cdot \frac{k_\perp^2 v_s^2}{\omega_{Hi}^2}. \quad (3.100)$$

Очевидно, эта раскачка имеет место при

$$k_\perp > k_z \frac{\omega_{Hi}}{\omega_D}.$$

Заметим, что согласно (1.124)–(1.127) при $T_e \gg T_i$ одна ветвь переходит в ω_D , а другая стремится к $\frac{k_z^2 v_s^2}{\omega_D}$ при $k_z \rightarrow 0$. Таким

образом, для нее в пределе из (3.95) следует условие неустойчивости

$$\frac{d \ln T_{\parallel, e}}{d \ln n} > 2. \quad (3.101)$$

Так как по условию $\omega_k^\sigma > k_z v_{Ti}$, то, строго говоря, (3.101) относится к случаю холодных ионов $T_i \rightarrow 0$. Однако и для изотермической плазмы $T_e = T_i$, как показано в работе [154], возникает условие (3.101), если рассмотреть область частот $\omega \ll k_z v_{Ti}$ и учесть, что возбуждение может быть неслабым. Фактически уже в (3.100) учтены эффекты конечности ларморовского радиуса ионов, имеющие порядок $\frac{k_\perp^2 v_{Ti}^2}{\omega_{Hi}^2}$. Выше уже было проиллюстрировано,

почему учет таких эффектов важен. К этому кругу вопросов интерес возник в связи с работой [158], в которой показано, что эффект конечности ларморовского радиуса ионов может привести к стабилизации некоторых низкочастотных пульсаций плазмы. Исследования, проведенные в работах [156, 155], показали, что с учетом конечности ларморовского радиуса плазма оказывается неустойчивой при любых $\frac{d \ln T}{d \ln n}$.

В отсутствие градиента температуры, но при наличии большого градиента плотности величина ω_D может быть больше ω_{Hi} ; тогда в условиях $T_e \gg T_i$ могут возбуждаться обычные замагниченные звуковые колебания $\omega = kv_s$, $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} = 2 \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_s^3}$ и из (3.95)

получим [159]

$$\gamma_k^\sigma = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \cdot \frac{k}{k_z} (\omega_D - kv_s). \quad (3.102)$$

Таким образом, в данном случае неустойчивость возникает, когда дрейфовая скорость превышает звуковую.

Для рассмотрения возбуждения непродольных волн достаточно учесть лишь отличие единичных ортов поляризации этих волн в (3.34), что приводит к формуле, аналогичной (3.94). Учет непотенциальности необходим, если $\frac{\omega_k^\sigma}{k_z} = v_p > v_A$ [160]. Раскачка ионно-циклотронных волн в неоднородной плазме рассматривалась в работе [161]. В условиях $k_z \neq 0$ раскачка дрейфовых волн происходит на электронах при

$$\omega_D > \omega_{Hi}. \quad (3.103)$$

Общее условие нециклотронной раскачки при замагниченных электронах легко получить из (3.34) (см. работу [162])

$$k_z \frac{\partial f_p^e}{\partial v_z} - \frac{k_\perp}{\omega_{He}} \cdot \frac{\partial f_p^e}{\partial y} > 0. \quad (3.104)$$

3.6.2. Квазилинейные и нелинейные эффекты

Функцию распределения частиц при учете обратного влияния генерируемых волн уже нельзя считать максвелловской, как в (3.93). Для замагниченных электронов получим из (3.34) при $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}}^{\sigma}}{\partial t} = 2\gamma_{\mathbf{k}}^{\sigma} N_{\mathbf{k}}^{\sigma} = \frac{e^2 N_{\mathbf{k}}^{\sigma}}{k^2 m_e \pi \frac{\partial \varepsilon^{\sigma}}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_{\mathbf{k}}^{\sigma}}} \int \left(k_z \frac{\partial f_{p_z}^e}{\partial v_z} - \frac{k_x}{\omega_{He}} \cdot \frac{\partial f_{p_z}^e}{\partial y} \right) \times \\ \times \delta(\omega_{\mathbf{k}}^{\sigma} - k_z v_z) dp_z. \quad (3.105)$$

Здесь $f_{p_z} = \int f_p dp_x dp_y$ — одномерная функция распределения, зависящая от p_z и y . Из общего уравнения диффузии аналогичным образом имеем

$$\frac{df_{p_z}}{dt} = \int d\mathbf{k} \left(k_z \frac{\partial}{\partial v_z} - \frac{k_x}{\omega_{He}} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{e^2 \delta(\omega_{\mathbf{k}}^{\sigma} - k_z v_z) N_{\mathbf{k}}^{\sigma}}{k^2 m_e^2 \pi \frac{\partial \varepsilon^{\sigma}}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_{\mathbf{k}}^{\sigma}}} \times \\ \times \left(k_z \frac{\partial}{\partial v_z} - \frac{k_x}{\omega_{He}} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \right) f_{p_z}. \quad (3.106)$$

Из уравнений (3.105) и (3.106) видно, что диффузия частиц происходит как по скоростям, так и по координате y , т. е. перпендикулярно к удерживающему внешнему магнитному полю. Заметим, что (3.106) описывает не только эффекты диффузии под действием турбулентных пульсаций, связанных с неоднородностью плазмы, но и эффекты, возникающие под действием других продольных пульсаций, энергетический режим возбуждения и диссипации которых, а следовательно, и уровень энергии определяются факторами, не связанными с неоднородностью плазмы.

Отметим, что (3.106) описывает диффузию резонансных частиц. Как показано в гл. 2, можно ограничиться эффектами, связанными с резонансными частицами, учитывая, что импульс нерезонансных частиц однозначно связан с импульсом резонансных.

Изменение среднего значения импульса для резонансных частиц при взаимодействии с продольными колебаниями в точности равно изменению импульса нерезонансных. Импульс нерезонансных частиц есть импульс плазмонов. Если турбулентные пульсации высокочастотные, то резонансные и нерезонансные частицы являются электронами. Поэтому такие процессы не приведут к изменению плотности плазмы, т. е. к эффектам турбулентной диффузии. С эффектами турбулентной диффузии связаны лишь низкочастотные колебания.

Квазилинейные уравнения (3.105), (3.106) рассматривались в работах [162—164]. Согласно [162] квазилинейная раскачка

спектра (3.99) приводит к тому, что образуется узкий пакет волн с $k_x = \bar{k}_x$, удовлетворяющий условию

$$\omega_{He} \frac{\omega_k^\sigma}{v_z} \cdot \frac{\partial f_{p_z}}{\partial v_z} = \bar{k}_x \frac{\partial f_{p_z}}{\partial y}. \quad (3.107)$$

Так же как и в работе [107], замена переменной в уравнениях (3.105), (3.106) приводит их к одномерным и диффузия происходит вдоль линий

$$\xi = \frac{v_z^2 k_z}{2\omega_k^\sigma} + \frac{\omega_{He} y k_z}{\bar{k}_x} = \text{const.}$$

Отсюда $\delta y \sim \frac{v_z \delta v_z \bar{k}_x}{\omega_{He} k_z \omega_D} \sim L \frac{v_A}{v_{Te}} \ll L$, т. е. смещение частиц мало

по сравнению с размером неоднородности. В работе [164] показано, однако, что неоднородность процесса диффузии, так же как и в работе [107], оказывается весьма существенной.

Нелинейные эффекты распадного типа рассматривались в работах [162, 165]. Они приводят к расширению спектра указанного пакета волн и эффективной спектральной перекачки дрейфовых турбулентных пульсаций в область интенсивного поглощения Ландау на ионах. Нелинейные эффекты взаимодействия дрейфовых колебаний при рассеянии на частицах рассматривались в работе [166].

3.6.3. Турбулентная диффузия плазмы

Интегрируя (3.106) по импульсам частиц p_z и учитывая, что $n = \int f_{p_z} \frac{dp_z}{(2\pi)^3}$, получаем

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} (\langle n v_y \rangle + \langle n v_y \rangle^T) = 0, \quad (3.108)$$

где

$$\begin{aligned} \langle n v_y \rangle^T &= \int d\mathbf{k} \frac{e^2 k_x N_k^\sigma \delta(\omega_k^\sigma - k_z v_z)}{k^2 \omega_{He} \pi \frac{\partial \epsilon^\sigma}{\partial \omega} \Big|_{\omega = \omega_k^\sigma}} \times \\ &\times \left(k_z \frac{\partial}{\partial v_z} - \frac{k_x}{\omega_{He}} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{f_{p_z} dp_z}{(2\pi)^3}. \end{aligned} \quad (3.109)$$

Таким образом, наряду с обычным потоком вещества поперек магнитного поля, связанным с макроскопическим движением плазмы, существует еще турбулентный поток (3.109). Он определяет эффекты турбулентной диффузии плазмы. Выражение (3.109) описывает полный поток, связанный не только с наличием градиента кон-

центрации плазмы. Коэффициентом турбулентной диффузии называется коэффициент пропорциональности между частью турбулентного потока, пропорциональной $\frac{dn}{dy}$, и $\frac{dn}{dy}$

$$\langle nv_y \rangle^T = \langle nv_y \rangle' - D^T \frac{dn}{dy}. \quad (3.110)$$

Если $f = n(y) f'(v_z)$, где $f'(v_z)$ не зависящая от y функция, которая характеризует распределение частиц по скоростям, то

$$D^T = \int \frac{e^2 k_x^2 N_k^\sigma \delta(\omega_k^\sigma - k_z v_z) f'(v_z)}{k^2 \omega_{He}^2 \pi \frac{\partial \varepsilon^\sigma}{\partial \omega} \Big|_{\omega = \omega_k^\sigma}} \cdot \frac{dp_z}{(2\pi)^3}. \quad (3.111)$$

Заметим, что (3.109) содержит полный турбулентный поток плазмы поперек магнитного поля, который, очевидно, и представляет интерес с экспериментальной точки зрения. Этот поток может быть связан не только с градиентом плотности, но и с градиентом температуры. Кроме того, первый член (3.109), пропорциональный $\partial/\partial v_z$, может вносить вклад в случае, когда распределение пульсаций несимметрично по k_x . (Если N_k^σ зависит от $|k_x|$, то этот член выпадает из-за нечетности подынтегрального выражения по k_x .) Поскольку от градиента плотности зависит целый ряд величин, в частности дрейфовые частоты и т. п., то иногда удобно ввести эффективный коэффициент турбулентной диффузии, определяемый по полному турбулентному потоку,

$$\langle nv_y \rangle^T = -D_{\text{эфф}}^T \frac{dn}{dy}. \quad (3.112)$$

Не представляет труда написать общее выражение для $D_{\text{эфф}}^T$. Из общих уравнений гл. 2 получаем

$$D_{\text{эфф}}^T = \sum_{\alpha, \nu = -\infty}^{\infty} \int \frac{dp e^2 |\Gamma_\nu e_k^{\sigma*}|^2 dk N_k^\sigma k_x^2 v_{T\alpha}^2}{\pi \frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \varepsilon^\sigma \Big|_{\omega = \omega_k^\sigma} \omega_{Dn}^2 (2\pi)^3} \times \\ \times \delta(\omega_k^\sigma - k_z v_z - \nu \omega_{H\alpha}) \left(k_z \frac{\partial}{\partial v_z} - \frac{k_x}{\omega_{H\alpha}} \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\nu \omega_{H\alpha}}{v_\perp} \cdot \frac{\partial}{\partial v_\perp} \right) f_p, \quad (3.113)$$

а также общее выражение для полного турбулентного потока.

Так, для циклотронной неустойчивости ионно-циклотронных волн в плазме с током (см. § 3.4) оценка по квазилинейной теории дает [132] $D_{\text{эфф}}^T \simeq \frac{c T_e}{eH} \left(\frac{T_e}{T_i} \right)^2 \left(\frac{u}{v_{Te}} \right)^2$, где $u \ll v_{Te}$ — скорость

направленного движения электронов относительно ионов. Учет парных соударений [167] увеличивает коэффициент диффузии в $\alpha = \left(\frac{v_{ст}}{\omega_{Hi}}\right)^{1/2} \left(\frac{v_{Te}}{u}\right)^{7/2}$ раз, если $\alpha \gg 1$. Оценки для дрейфовой неустойчивости дают [162] $D_{эфф}^T \approx \frac{cT}{eH} \cdot \frac{c}{\omega_D n_0} \cdot \frac{dn_0}{dy}$. Согласно работе [6], если $\frac{8\pi nT}{H^2} > \frac{m_i}{m_e}$, то

$$D_{эфф}^T \approx \frac{cT}{eH} \cdot \frac{c^2}{\omega_{pe}^2} \cdot \frac{\omega_{He}}{v_{Te}} \cdot \frac{1}{n_0} \cdot \frac{dn_0}{dy}.$$

Оценки коэффициентов диффузии содержатся также в работах [6, 166, 168, 169]. Во всех приведенных формулах коэффициент диффузии пропорционален боровскому $\frac{cT_e}{eH}$. По-видимому, максимально возможный коэффициент диффузии соответствует $\frac{cT_e}{eH}$. Экспериментальное изучение турбулентной диффузии плазмы проводилось во многих работах [6, 170].

Нужно сказать, что оценки коэффициентов диффузии в ряде случаев достаточно грубы (это связано с тем, что ни квазилинейные, ни нелинейные уравнения точно не решались), и поэтому точное количественное соответствие с теорией установить трудно. Исключение составляет работа [171], в которой показано прекрасное соответствие с экспериментом.

3.6.4. Турбулентная теплопроводность плазмы

Для нахождения турбулентной теплопроводности можно, например, с помощью (3.106) вычислить изменение энергии электронов плазмы перпендикулярно к H_0

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int f_p \frac{v_{\perp}^2 m_e}{2} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} = \\ & = \frac{\partial}{\partial y} \int \frac{k_x^2 N_k^{\sigma} dke^2 \delta(\omega_k^{\sigma} - k_z v_z)}{\omega_{He}^2 k^2 m_e^2 \pi} \frac{\partial \varepsilon^{\sigma}}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_k^{\sigma}} \frac{\partial}{\partial y} \frac{mv_{\perp}^2}{2} \cdot \frac{f_p d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}. \end{aligned} \quad (3.114)$$

Здесь, простоты ради, пренебрегли частью потока тепла, не зависящей от $\frac{\partial f}{\partial y}$ [так же, как и в (3.111), считая, например, что N_k^{σ}

четно по k_x]. Результат (3.114) можно записать так ($f = f(v_\perp)f'(v_z)$):

$$\frac{\partial T_\perp}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} q = 0; \quad q = -\kappa \frac{\partial T_\perp}{\partial y};$$

$$\kappa = \int \frac{k_x^2 N_k^\sigma e^2 \delta(\omega_k^\sigma - k_z v_z)}{\omega_{He}^2 k^2 m_e^2 \pi \frac{\partial \epsilon^\sigma}{\partial \omega} \Big|_{\omega = \omega_k^\sigma}} f'(v_z) \frac{d p_z}{(2\pi)^3}. \quad (3.115)$$

Здесь $T_\perp = \int f(v_\perp) \frac{m v_\perp^2}{2} d p_\perp$, а величина q — поток тепла. Коэффициент κ называется коэффициентом турбулентной теплопроводности плазмы поперек магнитного поля. Не представляет труда написать общее выражение для $\kappa_{эфф}$, аналогичное $D_{эфф}$ (3.113).

Эффекты турбулентной теплопроводности с учетом парных соударений изучались в работе [172].

§ 3.7. ВОЗБУЖДЕНИЕ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМИ ВОЛНАМИ И ЛАЗЕРАМИ

3.7.1. Взаимодействие сильных нелинейных и ударных волн с плазмой

Если в плазме распространяется интенсивная нелинейная волна, то на ее фронте, с одной стороны, возникают достаточно большие электрические поля, создающие большой направленный поток электронов, с другой стороны, распределение плазмы становится неоднородным и анизотропным, т. е. создаются условия, необходимые для проявления рассмотренных выше неустойчивостей пучкового типа, связанных с током, анизотропной и дрейфовой неустойчивостей.

Эти эффекты должны хорошо проявляться, в особенности для волн низкой частоты и большой длины волны, создающих относительно слабые неоднородности. Таким образом, на фронте нелинейной низкочастотной волны могут возникнуть условия, необходимые для проявления процессов турбулентной электропроводности, турбулентной диффузии, турбулентной теплопроводности и т. п.

Сильные низкочастотные волны в жидкости могут превращаться в ударные [1]. В плазме именно турбулентные процессы определяют структуру бесстолкновительных ударных волн [21]. Теоретически такая структура с учетом нелинейных эффектов изучалась в работах [173—175]. Структура нелинейных волн без учета эффектов турбулентной диссипации рассматривалась в работах [176—180]. Следует заметить, что турбулентная структура и ширина фронта ударных волн могут быть получены из общей феноменологической теории [181], если воспользоваться оценкой коэффициентов турбулентного переноса (см. § 3.6). Экспериментально турбулентная структура ударных волн изучалась во многих работах (см. [182]).

3.7.2. Взаимодействие интенсивных высокочастотных полей с плазмой

Вопрос о турбулентных процессах при взаимодействии интенсивных высокочастотных полей с плазмой был поднят В. И. Векслером [28] в связи с предложенными им новыми методами ускорения. Интенсивная высокочастотная волна, которая при $\omega < \omega_{pe}$ не проникает в плазму, может оказывать интенсивное давление на плазму и ускорять ее. В силу того, что действие электромагнитной волны испытывают лишь частицы в скин-слое и распределение электромагнитного поля на границе плазмы резко неоднородно, то в первую очередь должны развиваться низкочастотные неустойчивости в плазме. Они могли бы быть механизмом турбулентной передачи импульса плазме. Наряду с неустойчивостями, связанными с неоднородностью электромагнитного поля волны, проникающей в плазму, возможны также специфические неустойчивости, связанные с анизотропией функции распределения. В данном случае анизотропия создает внешнее высокочастотное поле, колеблющее заряды плазмы лишь в направлении, соответствующем электрическому полю волны. Теория такой неустойчивости развивалась в работе [183]. Если внешнее высокочастотное поле окажется достаточно сильным $eE_0/m\omega > v_{Te}$, то возникает неустойчивость, сходная с бунемановской [184]. По-видимому, она приведет к быстрому нагреву плазмы, так что условие $eE_0/m\omega > v_{Te}$ нарушится и останутся лишь слабые неустойчивости [185].

Аналогичные эффекты возникают при взаимодействии лазеров с плазмой [185—192].

Обратимся к уравнениям (2.113) и (2.124), которые учитывают эффекты корреляций при взаимодействии пульсаций между собой. Будем интересоваться возбуждением продольных полей, считая, что их источником являются интенсивные высокочастотные поля. Отличие уравнений, учитывающих поперечные высокочастотные поля от (2.124), будет состоять в том, что ϵ_k^N и R_k^N зависят от плотности энергии высокочастотных полей W_k^t . Коэффициенты при этих членах отличаются от записанных тем, что нелинейные токи плазмы необходимо помножить не на продольные, а на поперечные e_k^t (например, \sum_{k, k_1, k_2, k_3} в ϵ_k^N будет $\sum_{ijnl} \frac{k_i}{k} \cdot \frac{k_{1j}}{k_1} e_{k_2 n}^t e_{k_3 l}^t$). Если уровень энергии продольных полей невелик, то можно пренебречь взаимодействием продольных пульсаций между собой (линейная стадия возбуждения), а плотность энергии высокочастотных полей считать заданной:

$$\left. \begin{aligned} \omega (\epsilon_k^l + \epsilon_k^N) I_k^l &= R_k^N; \\ \epsilon_k^N &= -\frac{8\pi i}{\omega} \int I_{k_1}^t dk_1 \sum_{k, k_1}^{\text{эфф}}; \end{aligned} \right\} \quad (3.116)$$

$$R_k^N = 32\pi^2 \int \frac{|S_{k, k_1, k_2}|^2}{\omega (\epsilon_{-k}^l + \epsilon_{-k}^N)} I_{k_1}^t I_{k_2}^t dk_1 dk_2 \delta(k - k_1 - k_2). \quad (3.117)$$

Величина R_k^N играет роль внешнего источника возбуждения, ε_k^N описывает нелинейные инкременты возбуждения.

Если частоты достаточно высоки $\omega \gg \omega_{pe}$, то R_k^N , вообще говоря, весьма мало (см. работы [185—187]), а при относительно низком уровне энергии W_k^l , когда можно пренебречь нелинейными эффектами взаимодействия продольных волн, и левая часть (3.116) много больше правой. Последнее означает, что можно использовать для анализа возбуждения дисперсионное уравнение

$$\varepsilon_k^l + \varepsilon_k^N = 0.$$

Для волн высоких частот наиболее существенны распады, так как рассеяние мало на тепловых частицах плазмы. Это значит, что следует учесть лишь выражение, аналогичное второму члену (2.117), имеющее резонансный знаменатель для частот, близких к линейным собственным частотам [$1/\varepsilon_k^l$ в (2.117)].

Рассмотрим возбуждение ионно-звуковых колебаний. Пусть ω_k^s — линейный спектр ионно-звуковых колебаний

$$\left| \frac{\omega - \omega_k^s}{\omega_k^s} \right| \ll 1,$$

и спектр поперечных волн имеет среднюю ширину $\Delta\omega_*$, среднюю частоту ω_* и средний угловой разброс $\Delta\theta$. Обозначив разность между ω и $\omega^s(k)$ величиной Ω , получим следующее выражение для $\varepsilon_k^N + \varepsilon_k^l$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_k^N + \varepsilon_k^l &= \frac{2\Omega \omega_{pi}^2}{(\omega^s(k))^3} + \frac{\omega_{pe}^2}{8k^2 v_{Te}^2} \int \frac{\omega_{pe}^4}{\omega_1^2} \times \\ &\times \frac{k \frac{\partial}{\partial k_1}}{n_0 m_e v_{Te}^2} \cdot \frac{I_{k_1}^l dk_1}{\Omega + \omega^s(k) - kv_g} = 0. \end{aligned} \quad (3.118)$$

В том случае, когда $\Omega \ll \Delta(kv_g)$, в знаменателе (3.118) можно пренебречь Ω . Заменяя же $\frac{1}{\omega - kv_g} = -i\pi\delta(\omega^s - kv_g)$, получаем эффект распадной неустойчивости поперечных волн (на звуковые волны)

$$\begin{aligned} i\gamma = \Omega &= \frac{i\pi(\omega^s(k))^3}{16k^2 v_{Te}^4 \omega_{pi}^2} \int \frac{\omega_{pe}^6}{n_0 m_e \omega_1^2} \left(k \frac{\partial}{\partial k_1} \right) \times \\ &\times \frac{I_{k_1}^l}{4\pi} \cdot \frac{1}{\omega_1} \delta(\omega^s(k) - kv_g) dk_1. \end{aligned} \quad (3.119)$$

Если частоты возбуждаемых колебаний близки к ленгмюровским частотам плазмы, дисперсионное уравнение, описывающее процесс возбуждения, имеет вид ($\Omega = \omega - \omega_{k_1}^l$)

$$\varepsilon_k^N + \varepsilon_k^l = \frac{2\Omega}{\omega_{pe}} + \int d\mathbf{k}_1 \omega_{k k_1} \times$$

$$\times \frac{I_{k_1}^t \frac{1}{\omega_{k_1}^t} - I_{k_1-k}^t \frac{1}{\omega_{k_1-k}^t}}{\Omega + \omega_k^l - \omega_{k_1}^t + \omega_{k_1-k}^t} = 0; \quad (3.120)$$

$$\omega_{k, k_1} = \frac{1}{16\pi} \cdot \frac{\omega_{pe}^2 k^2}{n_0 m_e \omega_{k_1}^t \omega_{k-k_1}^t} \left(1 + \frac{(k_1(k-k_1))^2}{k_1^2(k-k_1)^2} \right). \quad (3.120')$$

Если $\Omega \ll \Delta\omega_{\text{макс}}(\mathbf{k})$, где $\Delta\omega_{\text{макс}}(\mathbf{k})$ — максимально возможное значение разности $\omega_k^l - \omega_{k_1}^t + \omega_{k_1-k}^t = \Delta\omega(\mathbf{k})$, когда \mathbf{k}_1 в $I_{k_1}^t$ пробегает возможные значения, соответствующие спектру поперечных волн, то возникает распадная неустойчивость

$$i\gamma = \Omega = \frac{\pi\omega_{pe}}{2} i \int d\mathbf{k} \omega_{k k_1} \delta(\Delta\omega(\mathbf{k})) \left(I_{k_1}^t \frac{1}{\omega_{k_1}^t} - I_{k_1-k}^t \frac{1}{\omega_{k_1-k}^t} \right). \quad (3.121)$$

Подробное исследование инкрементов распадной неустойчивости было проведено в работах [185 — 189]. Если изменения импульса поперечной волны в распадном процессе малы, т. е. $k \ll k_1$, то закон сохранения энергий при распаде, описываемый δ -функцией, дает $\omega = \mathbf{k} \mathbf{v}_g$. В направлении пучка поперечных волн генерируются плазменные волны, фазовая скорость которых совпадает с групповой скоростью поперечных волн. Фактор релятивизма волн

$$\gamma_p = \frac{1}{\sqrt{1-v_p^2}}; \quad v_p = \frac{\omega}{kc}$$

может достигать больших значений

$$\gamma_p \simeq \frac{\omega^t}{\omega_{pe}}.$$

Если ширина спектра поперечных волн $\Delta\omega_* \gg \omega_{pe}$, т. е. спектр является широким, для нахождения инкремента можно использовать разложение по импульсам отдачи \mathbf{k} . В направлении пучка имеем

$$\gamma_k \simeq \int \omega \left(k \frac{\partial}{\partial k_1} \right) N^t(k_1) dk_1, \quad (3.122)$$

где

$$\omega \simeq \delta(kv_g - \omega_{pe}) \frac{e^2 \omega_{pe}}{4\pi m_e^2} \left(\frac{k}{k_1} \right)^2. \quad (3.123)$$

Таким образом,

$$\gamma_k = \omega_{pe} \frac{e^2}{4\pi m_e^2} \omega_1 \frac{dN(\omega_1)}{d\omega_1} \bigg|_{\omega_1 = \frac{\omega_{pe} v_p}{\sqrt{1-v_p^2}}} ; \quad v_p = \frac{\omega}{kc} . \quad (3.124)$$

Инкремент генерации волн вдоль пучка оказывается пропорциональным производной по частоте от функции распределения поперечных волн. Вводя спектральную плотность энергии поперечных волн $W^t(\omega)$ соотношением

$$W^t = \frac{1}{(2\pi)^3} \int 2 \sqrt{k_1^2 c^2 + \omega_{pe}^2} N_{k_1}^t dk_1 = \int_0^\infty W^t(\omega_1) d\omega_1,$$

можно в (3.124) при $\Delta\omega_* \ll \omega_*$ величину γ_k записать в виде [185]

$$\gamma_k \simeq \omega_{pe} \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\omega_{pe}^2}{nm_e c^2} \cdot \frac{dW^t(\omega)}{d\omega} . \quad (3.125)$$

Считая

$$W^t \sim W^t(\omega) \Delta\omega_* \quad \text{и} \quad \frac{dW^t(\omega)}{d\omega} \sim \frac{W^t}{(\Delta\omega_*)^2}, \quad \text{имеем}$$

$$\gamma_k \simeq \omega_{pe} \frac{\pi}{4} \left(\frac{\omega_{pe}}{\Delta\omega_*} \right)^2 \frac{W^t}{nm_e c^2} . \quad (3.126)$$

Еще большие инкременты возникают для «монохроматических» пучков, а именно, если $\Delta\omega_* \ll \omega_{pe}$. В направлении пучка

$$\gamma_k \simeq \omega_{pe} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\omega_{pe}}{\Delta\omega_*} \cdot \frac{W^t}{nm_e c^2} . \quad (3.127)$$

При получении (3.127) учтен лишь эффект распада, так как эффекты слияния при $\Delta\omega_* \ll \omega_{pe}$ возможны лишь для других k . Интервал фазовых скоростей генерируемых волн Δv_p около v_p для (3.127) меньше, нежели для (3.126). Для монохроматических пучков поперечных волн инкремент имеет величину (3.133) вплоть до углов θ порядка $\sqrt{\frac{\omega_{pe}}{\omega_*}}$. Для монохроматических пучков в результате развития неустойчивости появляются боковые частоты — сателлиты. Эти результаты относятся к случаю генерации плазменных волн пучком поперечных волн малой апертуры

$$\Delta\theta \ll \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega_*} \right)^{3/2} . \quad (3.128)$$

При неравенстве $\Delta\theta \gg \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega_*}\right)^{3/2}$ инкремент при той же полной энергии пучка электромагнитных волн оказывается меньшим [189]

$$\gamma = \omega_{pe} \frac{\omega_*}{\Delta\omega_*} \cdot \frac{W^t}{nm_e c^2} \cdot \frac{1}{(\Delta\theta)^2} \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega_*}\right)^3. \quad (3.129)$$

Рассмотрим в (3.120) предел $\Omega \gg \Delta\omega_{\text{макс}}$, когда мнимая часть знаменателя в нем несущественна. Для пакета поперечных волн, имеющих широкий разброс по углам $\theta \sim 1$ при $|\Omega| \ll kc$ и $\theta \ll \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega_*}\right)^2$ при $|\Omega| \gg \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega_*}\right)^2 kc$, получим

$$\Omega + i\gamma_k^l = \frac{1}{2\Omega} \int d\mathbf{k}_1 I_{k_1}^t \left(\mathbf{k} \cdot \frac{\partial \omega_{k\mathbf{k}_1}}{\partial \mathbf{k}_1} \right) \frac{\omega_{pe}}{\omega_*}. \quad (3.130)$$

Для $\theta \sim 1$ и $|\Omega| \ll kc$ в случае $\theta \ll \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega_*}\right)^2$ и $|\Omega| \ll \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega_*}\right)^2 kc$ имеем

$$\Omega + i\gamma_k^l = -\frac{\omega_{pe}}{2\Omega^2} \int d\mathbf{k}_1 I_{k_1}^t \omega_{k\mathbf{k}_1} \frac{1}{(\omega_*)^2} \left(k^2 - \frac{(\mathbf{k}\mathbf{k}_1)^2}{(\omega_*)^2} \right). \quad (3.131)$$

Подставляя в (3.130) выражение (3.120'), находим

$$\Omega (\Omega + i\gamma_k^l) = -\frac{e^2 k^2 \omega_{pe}}{4m_e^2} \int d\mathbf{k}_1 I_{k_1}^t \frac{(\mathbf{k}\mathbf{k}_1)}{(\omega_*)^5}. \quad (3.132)$$

Если в линейном приближении волны не затухают и не распадаются, т. е. $\gamma_k^l = 0$, то для волн, распространяющихся в направлении пучка поперечных волн, имеет место раскачка колебаний. Из (3.139) можно оценить нелинейный инкремент

$$\gamma_k^N \sim \omega_{pe} \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega_*}\right)^2 \left(\frac{W^t}{nm_e v_p^2}\right)^{1/2}. \quad (3.133)$$

Динамика распадной генерации ленгмюровских волн при $\Delta\omega_* \gg \omega_{pe}$ во многом аналогична рассмотренной выше динамике развития пучковой неустойчивости.

При этом доля теряемой пучком поперечных волн энергии может иметь порядок величины исходной энергии, а могут также развиваться процессы, аналогичные пучковой неустойчивости, в частности пространственная неустойчивость, которая вызовет запираание пучка поперечных волн. Динамика распадной генерации для узких линий лазера соответствует появлению сателлита. При этом диффузия по сателлитам соответствует ударной волне в пространстве волновых чисел волн k^t .

Качественно о возбуждении турбулентности при взаимодействии высокочастотных полей могут свидетельствовать эксперименты [193], а при взаимодействии лазеров с плазмой — аномальное поглощение энергии в экспериментах [194, 195].

§ 3.8. МЕХАНИЗМЫ ГЕНЕРАЦИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В АСТРОФИЗИЧЕСКИХ УСЛОВИЯХ

В астрофизических условиях осуществляется большое разнообразие физических условий, которые могут приводить к неустойчивостям и турбулизации плазмы [46].

Однако, несмотря на многообразие механизмов турбулизации, имеется ряд характерных черт, которые приводят к тому, что турбулентные процессы в космической плазме играют особо важную роль.

Во-первых, основная масса вещества во Вселенной находится в ионизованном состоянии, т. е. представляет собой плазму.

Во-вторых, не вызывает сомнения то, что многие наблюдаемые в астрофизических условиях процессы носят нестационарный, а иногда и взрывной характер. Например, часто происходят взрывные процессы на поверхности Солнца, взрывы сверхновых звезд. Далее, нестационарными являются такие объекты, как квазары [196], происходят взрывы в ядрах галактик [46] и т. п. Наконец, Метагалактика также, по-видимому, образовалась в результате взрыва [197]. Во всех перечисленных нестационарных процессах плазма, по-видимому, турбулентна.

В-третьих, существуют непрерывно действующие энергетические источники, которые могут поддерживать долго турбулентное состояние плазмы, в частности ядерная энергия звезд и гравитационная энергия.

В-четвертых, с механизмами ускорения частиц в турбулентной плазме обычно связывают происхождения космических лучей [46, 45]. Космические лучи играют существенную роль в энергетическом балансе Галактики, так как их энергия сравнима с энергией магнитного поля и тепловой энергией межзвездной плазмы. Все сказанное позволяет понять большой интерес, проявляемый в последнее время к проблемам турбулентности космической плазмы. Имеются также способы [198] оценки энергии низкочастотной турбулентности из данных наблюдений.

Говоря о специфических механизмах возбуждения турбулентности в астрофизических условиях, необходимо выделить три механизма. Один из них приводит к притоку энергии от низкочастотных возбуждений — это гравитационные неустойчивости [199]. Другой механизм связан с притоком энергии турбулентности от весьма высоких частот — это нелинейная неустойчивость излучения в плазме. Наконец, третий связан с генерацией турбулентности космическими лучами. При гравитационной неустойчивости возникают возмущения гидродинамического типа, соответствующие бесстолк-

новительным ударным волнам, магнитогидродинамическим или альфвеновским волнам большой амплитуды.

Такие низкочастотные волны могут стать источником высокочастотной турбулентности, если на фронте волны скорости частиц будут превышать средние тепловые скорости и возникнет пучковая неустойчивость [200, 201]. На фронте нелинейных гидромагнитных волн может возникнуть также специфическая неустойчивость, связанная с появлением встречных электронных потоков [202]. Весьма большие потоки излучения возникают в процессах взрывного характера. Такое излучение может носить также направленный характер. В этом случае для оценок необходимо использовать формулы § 3.7. Они приводят к большим инкрементам. Особенно эффективной оказывается в данном случае генерация нерелятивистских плазменных волн. Весьма эффективной является также генерация ионно-звуковых волн.

Заметим, что в космических условиях часто электромагнитное излучение может быть локально изотропно. Тогда найденные из ϵ_k^N инкременты оказываются отрицательными, т. е. турбулентность не генерируется. Однако согласно (3.116) возможен также другой механизм генерации, связанный с тем, что электромагнитное излучение играет роль внешней силы, возбуждающей турбулентность. Количество энергии, которое генерируется этим источником в 1 сек [203], определяется квадратом спектральной интенсивности поперечных волн; $\frac{I}{4\pi} = \frac{1}{4\pi} \int I_\omega d\omega n$ энергия волн в 1 см³. В большинстве приложений генерация ленгмюровских пульсаций на много порядков эффективнее пульсаций других типов и сильно возрастает с уменьшением частоты электромагнитных волн. Если ω_* — минимальная частота в их спектре, то согласно [203]

$$Q \approx \omega_{pe} \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega_*} \right)^3 I. \quad (3.134)$$

Остановимся теперь на вопросе генерации турбулентности космическими лучами. Если, например, космические лучи образовались в процессе взрыва, то их проникновение в окружающую плазму приведет к локальной анизотропии космических лучей и появлению неустойчивостей пучкового типа [201]. Соответствующие инкременты генерации ленгмюровских пульсаций максимальны для фазовых скоростей порядка c [199]

$$\gamma_k = \int \omega_e(\mathbf{k}) \left(\mathbf{k} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{p}} \right) \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sim \omega_{pe} \frac{n_1}{n_0} \cdot \frac{m_e}{m} \frac{1}{\Delta\theta}. \quad (3.135)$$

Здесь n_1 и n_0 — концентрации соответственно космических лучей и плазмы, m — масса частиц космических лучей, $1/\Delta\theta$ — степень анизотропии распределения космических лучей. Существенно, что неустойчивость легко стабилизируется нелинейными эффектами.

Эти выводы, однако, относятся к случаю, когда отсутствуют ускоренные частицы меньших энергий, например субкосмические лучи, т. е. частицы нерелятивистских энергий [46], продолжением спектра которых являются космические лучи. Максимум энергии может приходиться на эти частицы, и они будут в основном ответственны за генерацию турбулентности. В этом случае можно говорить о генерации турбулентности субкосмическими лучами. Вместе с тем для частиц нерелятивистских скоростей нелинейные эффекты не могут сорвать неустойчивость, и энергия генерированной ими турбулентности порядка энергии быстрых частиц. Таким образом, на фронте разлетающейся оболочки, возникшей, например, при взрыве сверхновой звезды, должна образоваться турбулентная область, продвигающаяся в плазме со скоростью медленных частиц. Космические лучи, рассеиваясь на этой области, могут быть заперты внутри оболочки [201].

Отметим также, что неустойчивость плазмы солнечного ветра [205] приводит к турбулизации межпланетной плазмы. Интенсивная турбулентность возникает в хромосферных вспышках [206]. В плазме околоземного пространства, по-видимому, имеет место циклотронная неустойчивость и анизотропная конусная неустойчивость для частиц, запертых в магнитную ловушку радиационных поясов [207]. Кроме того, неустойчивости развиваются на фронте ударной волны, образующейся при обтекании Солнечным ветром магнитосферы Земли [208].

Вопросы турбулентного нагрева космической плазмы привлекали до последнего времени небольшое внимание, хотя такие процессы нагрева, возможно, широко распространены. Вопрос о нагреве межзвездной и межгалактической плазмы космическими лучами обсуждался в работе [209]. Турбулентный нагрев, по-видимому, весьма эффективен во всех процессах, в которых низкочастотные пульсации возбуждаются непосредственно, например из-за гравитационной неустойчивости или ударными волнами.

Процессы турбулентного нагрева могут быть ответственны за рентгеновское тормозное излучение нагретого газа [144]. Согласно работе [144] такими процессами может быть объяснено мощное рентгеновское излучение рентгеновских источников.

СПЕКТРЫ СТАЦИОНАРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПЛАЗМЫ

§ 4.1. КЛАССИФИКАЦИЯ ТИПОВ СТАЦИОНАРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПЛАЗМЫ

Результаты предыдущих глав позволяют подойти к одному из важных вопросов теории турбулентности — определению спектров стационарной турбулентности плазмы. Стационарная турбулентность возникает при балансе генерации поглощения и трансформации энергии пульсаций по спектру. Такая трансформация необходима, так как в области волновых чисел, в которой происходит генерация, естественно, нет поглощения (баланс раскачки и затухания таков, что раскачка доминирует), а в области поглощения отсутствует генерация. Стационарность в области генерации обеспечивается балансом притока энергии колебаний из-за возбуждения и оттоком ее из-за нелинейной перекачки по спектру, в области поглощения — балансом притока из-за спектральной перекачки и оттоком энергии из-за поглощения. Наконец, в области, в которой отсутствуют поглощение и генерация, баланс для данного k возникает из-за притока и оттока энергии при нелинейной трансформации энергии. В этой области спектр пульсаций не зависит от типа неустойчивости, приводящей к возбуждению колебаний, и, следовательно, в этом смысле универсален.

Однако соображения размерности, использованные в турбулентности жидкостей, в данном случае неприменимы, так как для пульсаций, имеющих вполне определенные собственные частоты, всегда можно ввести специфические для данных пульсаций величины размерности длины. Спектр пульсаций для различных коллективных движений плазмы существенно различен. В области перекачки энергии пульсаций от источников турбулентности остается одна характеристика — мощность генерации турбулентности Q (энергия пульсаций, генерируемая в 1 см^3 в 1 сек), которая определяет поток энергии вдоль спектра. Вместе с тем возможный тип механизма поглощения пульсаций может более существенно сказаться на спектре турбулентности. Связано это по крайней мере с двумя обстоятельствами. Во-первых, если темп поглощения не очень велик или существуют определенные полосы поглощения на спектре, указывающие на неравномерный характер поглощения, то перекачка может приводить к концентрации турбулентных пульсаций в определенных областях и в этих областях могут вступить в действие другие типы нелинейных перекачек, которые малы в об-

ласти более низкого уровня турбулентных пульсаций. Наличие этих перекачек существенно изменит спектр турбулентных пульсаций. Во-вторых, возможны нелинейные механизмы потерь энергий, которые будут действовать в некотором смысле наравне с нелинейными спектральными перекачками.

Целесообразно классифицировать типы турбулентности плазмы по тем механизмам поглощения, которые указывают на окончательную стадию процесса трансформации пульсации для данного типа турбулентности [58]. Такой тип классификации наиболее удобен для практических приложений, так как указывает на окончательный результат развития неустойчивости в системе (нагрев, излучение и т. п.).

Выделим следующие классы стационарной турбулентности плазмы.

1. Турбулентность, диссипируемая из-за поглощения пульсаций при парных соударениях частиц. Такой тип турбулентности возможен для слабоионизованной плазмы, а также в условиях, когда энергия колебаний эффективно откачивается из области коллективного поглощения и возможным оказывается лишь поглощение из-за парных соударений (это имеет место для изотропной ленгмюровской турбулентности). Этот тип турбулентности аналогичен турбулентности жидкостей, где диссипация осуществляется благодаря вязкости, обязанной эффектам парных соударений частиц.

2. Турбулентность, диссипируемая из-за коллективного поглощения пульсаций. Такая турбулентность приводит к эффективному турбулентному нагреву плазмы.

3. Турбулентность, диссипируемая из-за ускорения быстрых частиц плазмы. Как правило, низкочастотные пульсации либо эффективно поглощаются электронами, либо эффективно взаимодействуют с пульсациями, поглощаемыми электронами. Поэтому для ускорения наиболее эффективны высокочастотные пульсации. Можно полагать, что тип турбулентности, диссипируемой из-за ускорения частиц, наиболее вероятен для высокочастотных пульсаций.

4. Пульсации, диссипируемые из-за аномального излучения электромагнитных волн турбулентной плазмы. С ростом магнитного поля, как правило, возрастают процессы излучения, точно так же как и с ростом числа быстрых частиц, ускоренных турбулентностью. Поэтому в сильных магнитных полях и в условиях интенсивного ускорения частиц может существовать турбулентность, диссипируемая в излучение.

Ясно, что в смысле практических приложений создание турбулентности второго типа желательно для турбулентного нагрева, третьего — для ускорения частиц, а четвертого — для использования плазмы как генератора электромагнитного излучения. В реальных условиях не всегда можно строго провести деления на указанные типы, т. е. все процессы диссипации в той или иной мере имеют место. Однако указанное деление удобно и его следует понимать

в смысле наиболее важного доминирующего процесса диссипации турбулентности данного типа.

§ 4.2. НЕЛИНЕЙНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ ПЕРЕКАЧКИ ЭНЕРГИИ ЛЕНГМЮРОВСКИХ ПУЛЬСАЦИЙ В ИЗОТРОПНОЙ ПЛАЗМЕ

Наиболее существенными взаимодействиями ленгмюровских пульсаций являются процессы индуцированного рассеяния плазмонов l на электронах e и ионах i плазмы и взаимодействие плазмонов l между собой, обязанное рассеянию плазмона на плазмоне. Символически эти процессы записываются так:

$$l + i \rightleftharpoons l' + i'; \quad (4.1)$$

$$l + e \rightleftharpoons l' + e'; \quad (4.2)$$

$$l + l_1 \rightleftharpoons l' + l'_1. \quad (4.3)$$

В неизотермической плазме ($T_e \gg T_i$) возможен также процесс возбуждения ионно-звуковых пульсаций

$$l \rightleftharpoons l' + s. \quad (4.4)$$

Рассмотрим здесь взаимодействие пульсаций в изотермической плазме, когда процесс (4.4) невозможен. Процессы (4.1) и (4.2) при взаимодействии с тепловыми электронами и ионами трансформируют энергию пульсаций в сторону меньших частот. Действительно, из (2.88) следует

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_k^l}{\partial t} &= N_k^l \int \omega_p^{ii}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1) \left((\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \frac{\partial f_p^{(e,i)}}{\partial \mathbf{p}} \right) N_{k_1}^l \frac{d\mathbf{p} d\mathbf{k}_1}{(2\pi)^6} = \\ &= -N_k^l \int (\omega_k^l - \omega_{k_1}^l) N_{k_1}^l \frac{f_p^{(e,i)}}{(2\pi)^6 m v_T^2} \omega_p^{ii}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1) d\mathbf{p} d\mathbf{k}_1, \end{aligned} \quad (4.5)$$

т. е. рост волн N_k^l происходит в случае $\omega_k^l < \omega_{k_1}^l$. Из (4.5) следует сохранение полного числа волн, а так как частота (энергия) каждой волны слабо зависит от \mathbf{k}

$$\omega_{\mathbf{k}}^l \simeq \omega_{pe} + \frac{3}{2} \cdot \frac{k^2 v^2 T_e}{\omega_{pe}},$$

то приближенно сохраняется энергия. Таким образом, (4.1) и (4.2) являются процессами, трансформирующими энергию турбулентности к малым k .

Приближенное выражение для вероятности рассеяния на электронах плазмы согласно (2.90), (2.97) и (2.101) имеет вид

$$\omega_p^{ll}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1) = \frac{4e^4 |\Lambda_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{(e)}|^2 \delta(\omega_{\mathbf{k}}^l - \omega_{\mathbf{k}_1}^l - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{v}) (2\pi)^3}{\frac{\partial \varepsilon_{\mathbf{k}}^l}{\partial \omega} \Big|_{\omega = \omega_{\mathbf{k}}^l} \frac{\partial \varepsilon_{\mathbf{k}_1}^l}{\partial \omega_1} \Big|_{\omega_1 = \omega_{\mathbf{k}_1}^l}}; \quad (4.6)$$

$$\Lambda_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{(e)} = \frac{1}{m_e (\omega_{\mathbf{k}}^l)^2} \cdot \frac{(\mathbf{k} \mathbf{k}_1)}{k k_1} \left(\frac{2k v}{\omega_{\mathbf{k}}^l} + \frac{\varepsilon_i^l(\omega_-, \mathbf{k}_-)}{\varepsilon^l(\omega_-, \mathbf{k}_-)} \right); \quad (4.7)$$

$$\omega_- = \omega_{\mathbf{k}}^l - \omega_{\mathbf{k}_1}^l; \quad \mathbf{k}_- = \mathbf{k} - \mathbf{k}_1.$$

Подставляя это выражение в (4.5) при условиях, когда фазовые скорости $v_p = \omega_{pe}/k$ удовлетворяют неравенству

$$\frac{v_p}{v_{Te}} \ll \left(\frac{3m_i}{m_e} \right)^{1/3}, \quad (4.8)$$

а член $\varepsilon_i/\varepsilon$ в (4.7) много меньше $k v/\omega_{\mathbf{k}}^l$, получаем выражение для нелинейного взаимодействия

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}}^l}{\partial t} = \frac{3v_{Te}}{2m_e n_0 \omega_{pe}} N_{\mathbf{k}}^l \int \frac{N_{\mathbf{k}_1}^l d\mathbf{k}_1}{(2\pi)^{5/2}} \cdot \frac{(\mathbf{k} \mathbf{k}_1)^2}{k^2 k_1^2} \cdot \frac{[k k_1]^2}{|k - k_1|} (k_1^2 - k^2). \quad (4.9)$$

Из (4.9) можно оценить характерное время спектральной перекачки энергии τ на $\Delta k \sim k$

$$\frac{1}{\tau} \approx \omega_{pe} \frac{W}{n_0 T_e} \cdot \frac{v_{Te}^3}{v_p^3}. \quad (4.10)$$

Так как в процессе перекачки возбуждаются волны со всевозможными направлениями с тем же характерным временем, то перекачка сопровождается быстрой изотропизацией колебаний. Особенно быстро изотропизация происходит при рассеянии на ионах, которое эффективно, если $\omega_- < |\mathbf{k}_-| v_{Ti}$ (для электронов аналогичное условие $\omega_- < |\mathbf{k}_-| v_{Te}$ всегда выполнено в силу $v_p > v_{Te}$). Это условие означает, что модуль вектора изменяется мало ($\omega_- = 0$ при $k = k_1$). Но направление распространения пульсаций может измениться на угол порядка единицы. Величина $\Lambda_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}$ для ионов велика, так как отсутствует компенсация нелинейного и комптоновского рассеяний (комптоновское рассеяние мало из-за большой массы иона)

$$\Lambda_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{(i)} = \frac{(\mathbf{k} \mathbf{k}_1)}{k k_1} \cdot \frac{1}{(1 + T_e/T_i) m_e (\omega_{\mathbf{k}}^l)^2}. \quad (4.11)$$

Нелинейное взаимодействие описывается формулой

$$\frac{\partial N_k^l}{\partial t} = N_k^l \frac{3\omega_{pe} T_e/T_i}{8n_0 m_e v_{Ti} (1 + T_e/T_i)^2} \int \frac{N_{k_1}^l (kk_1)^2 (k_1^2 - k^2) dk_1}{(2\pi)^{5/2} k^2 k_1^2 |k - k_1|} \times \exp\left(-\frac{\omega_-^2}{2k_-^2 v_{Ti}^2}\right). \quad (4.12)$$

Следует выделить две области фазовых скоростей. Если $v_p \gg \gg 3v_{Te}^2/v_{Ti}$, то немалой является перекачка на Δk порядка k и экспоненту в (4.12) можно опустить. В результате интегрирования по углам для изотропных турбулентных пульсаций получим:

$$\frac{dW_k^l}{dt} = W_k^l \int_k^\infty Q(k, k_1) W_{k_1}^l dk_1 - W_k^l \int_0^k Q(k_1, k) W_{k_1} dk_1; \quad (4.13)$$

$$W_k^l = \omega_k^l \frac{k^2}{2\pi^2} N_k^l \approx \omega_{pe} \frac{k^2}{2\pi^2} N_k^l; \quad k = |k|$$

$$Q(k, k_1) = \frac{\sqrt{2\pi} T_e (k_1^2 - k^2) (k_1^2 + 2k^2/5)}{8n_0 m_e v_{Ti} T_i (1 + T_e/T_i)^2 k_1^3}. \quad (4.14)$$

Если же $v_p \ll 3v_{Te}^2/v_{Ti}$, то экспонента в (4.12) разрешает процессы взаимодействия лишь между пульсациями, для которых $\frac{\Delta k}{k} \ll \frac{v_p v_{Ti}}{3v_{Te}^2} = \frac{\Delta k_*}{k}$.

Для плавных спектров турбулентности, существенное изменение спектральной плотности которых происходит на интервале волновых чисел, намного превосходящих Δk_* , величина Δk_* играет роль физически бесконечно малой величины. В этом приближении спектральная перекачка является дифференциальной. Конкретное выражение для нее легко получается из (4.12), если воспользоваться соотношением

$$\delta'(\omega_-) \rightarrow -\frac{\omega_-}{\sqrt{2\pi} k_-^3 v_{Ti}^3} e^{-\frac{\omega_-^2}{2k_-^2 v_{Ti}^2}}. \quad (4.15)$$

В результате имеем

$$\frac{\partial W_k}{\partial t} = \alpha W_k \frac{\partial W_k}{\partial k}; \quad \alpha = \frac{\omega_{pe}^3 \pi}{27m_i n_0 v_{Te}^4 \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right)^2}. \quad (4.16)$$

Оценка характерного времени спектральной перекачки (4.16) имеет вид

$$\gamma \simeq \frac{1}{30} \left(\frac{v_p}{v_{Te}} \right)^2 \frac{W}{n_0 T_e} \cdot \frac{m_e}{m_i}. \quad (4.17)$$

Сравнивая это выражение с (4.10), легко находим, что рассеяние на ионах доминирует над рассеянием на электронах при выполнении неравенства

$$\frac{v_p}{v_{Te}} \gg \left(\frac{3m_i}{m_e} \right)^{1/5}. \quad (4.18)$$

Поскольку $v_p/v_{Te} > 3 \div 2$, то область применимости рассеяния на электронах относительно узкая и имеет заметную ширину $15 v_{Te} > v_p > v_{Te}$ лишь для плазмы с очень тяжелыми ионами.

Энергия колебаний весьма эффективно перекачивается в сторону малых k . Все пульсации будут стремиться сосредоточиться вблизи $k = k_0 \rightarrow 0$. Однако фазовый объем пульсаций, пропорциональный k_0^3 , будет также весьма малым и должно возникнуть интенсивное столкновение плазмонов*. Это есть процесс (4.3), который должен привести к разбрасыванию плазмонов из области малых k . Нелинейное уравнение, описывающее указанное взаимодействие плазмонов (4.3), имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{\mathbf{k}}^l}{\partial t} = & \int \omega_{ll}''(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) (N_{\mathbf{k}_1}^l N_{\mathbf{k}_2}^l N_{\mathbf{k}_3}^l + N_{\mathbf{k}}^l N_{\mathbf{k}_2}^l N_{\mathbf{k}_3}^l - \\ & - N_{\mathbf{k}}^l N_{\mathbf{k}_1}^l N_{\mathbf{k}_2}^l - N_{\mathbf{k}}^l N_{\mathbf{k}_1}^l N_{\mathbf{k}_3}^l) \frac{d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3}{(2\pi)^9}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Вероятность четырехплазмонного взаимодействия (4.3) находится изложенными выше методами из нелинейного тока третьего порядка Σ , а также при учете процессов итерации взаимодействий более низкого порядка по полю [59, 80, 210] (см. графики рис. 2.8). Согласно [210] взаимодействие (4.3) резко падает при $v_p \ll 3v_{Te}^2/v_{Ti}$, где оно для плавных спектров не может превосходить нелинейное рассеяние на ионах (4.16). В области же $v_p \gg 3v_{Te}^2/v_{Ti}$ вероятность процесса (4.3) имеет вид

$$\begin{aligned} \omega_{ll}''(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) = & \frac{(2\pi)^6 e^4}{8m_e^4 v_{Te}^4} \left[\frac{(k_1 k_2)(k k_3) + (k k_2)(k_1 k_3)}{kk_1 k_2 k_3} \right]^2 \times \\ & \times \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \delta(\omega_{\mathbf{k}}^l + \omega_{\mathbf{k}_1}^l - \omega_{\mathbf{k}_2}^l - \omega_{\mathbf{k}_3}^l). \end{aligned} \quad (4.20)$$

* Отметим здесь, что уменьшение фазового объема при рассеянии сопровождается ростом энтропии из-за нагрева ионов, забирающих энергию колебаний.

Оценка характерного времени взаимодействия плазмонов в процессе (4.3) есть

$$\frac{1}{\tau} \simeq \omega_{pe} \left(\frac{W}{n_0 T_e} \right)^2 \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_{Te}^2}. \quad (4.21)$$

Эффективность взаимодействия растет с ростом v_p , что и не позволяет сконцентрироваться плазмонам при очень малых k .

§ 4.3. СПЕКТРЫ СТАЦИОНАРНОЙ ЛЕНГМЮРОВСКОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЫ

Будем считать, что турбулентность изотропна, а источник ее генерации сосредоточен в области больших k . Нужно сказать, что все линейные и нелинейные механизмы генерации турбулентности соответствуют возбуждению пульсаций с $v_p < c$ (пучки частиц и электромагнитные волны, например, не возбуждают пульсаций с $v_p > c$). Однако наиболее эффективное возбуждение имеет место при $v_p \ll c$ (гл. 3). Источник возбуждения будем характеризовать мощностью генерации турбулентности Q (энергией, генерируемой в 1 см^3 в 1 сек). Так как энергия турбулентности в изотропной плазме перекачивается к малым k , то одним из важных механизмов диссипации является поглощение плазмонов из-за парных соударений

$$\left(\frac{dW_k}{dt} \right)_{\text{ст}} = -2\nu_e W_k, \quad (4.22)$$

где W_k есть спектральная плотность энергии турбулентности

$$W_k = \frac{k^2}{2\pi^2} \omega_k^l N_k^l, \quad (4.23)$$

ν_e — средняя частота соударений электронов в плазме

$$\nu_e = \frac{\omega_{pe}^4 \Lambda}{3(2\pi)^{3/2} n_0 v_{Te}^3}, \quad (4.24)$$

$\Lambda = \ln 4\pi n_0 \frac{v_{Te}^3}{\omega_{pe}^3}$ — кулоновский логарифм.

Трансформация в поперечные колебания из продольных в однодальной изотропной плазме происходит таким образом, что частоты поперечных колебаний меньше частот продольных. Это видно непосредственно из соотношений типа (4.5) для такой трансформации. Такие поперечные колебания имеют частоты, очень близкие к ω_{pe} ,

$$\omega_k^t = \omega_{pe} + \frac{k^2 c^2}{2\omega_e}. \quad (4.25)$$

Выход этих колебаний из плазмы весьма затруднен, так как показатель преломления этих волн близок к нулю. Действительно, из $\omega_k^t < \omega_{k_1}^l$ следует

$$k^2 < 3\omega_{pe}^2 \frac{v_{Te}^2}{v_p^2 c^2}, \quad (4.26)$$

где v_p — фазовая скорость продольных ленгмюровских пульсаций. Таким образом, целесообразно называть волны (4.25) поперечными плазмонами, подчеркивая близость их частоты к плазменной и то, что около половины их энергии сосредоточено в движении плазмы, так же как и для ленгмюровских плазмонов.

Эффекты взаимодействия продольных и поперечных плазмонов специально обсуждаются в гл. 6. Здесь мы будем рассматривать чисто ленгмюровскую турбулентность, не учитывая взаимодействие продольных плазмонов с поперечными. В ограниченной или неоднородной плазме взаимодействие с поперечными плазмонами может приводить к радиационным потерям турбулентной энергии на плазменной частоте.

Начнем рассмотрение с области больших фазовых скоростей $v_p \gg 3v_{Te}^2/v_{Ti}$, когда существенны лишь процессы (4.22), (4.1) и (4.3). Считаем, что источник генерации турбулентности находится вне области, т. е. при $v_p < 3v_{Te}^2/v_{Ti}$. Это охватывает большую часть неустойчивостей достаточно горячей плазмы, включая также неустойчивость релятивистских пучков, если

$$\frac{3v_{Te}^2}{v_{Ti}} > c, \quad (4.27)$$

т. е. для водородной изотермической плазмы $T_i = T_e > 15$ эв.

Изложенные выше качественные соображения о природе взаимодействия турбулентных пульсаций позволяют предположить, что энергия, входящая в область $v_p \sim \frac{3v_{Te}^2}{v_{Ti}}$, перекачивается к весьма малым k на ионах, а затем разбрасывается процессом (4.3), т. е. спектр должен иметь характерный максимум при некотором $k = k_0$ (рис. 4.1). Обозначим

$$k_0 = 2\pi/L \quad (4.28)$$

и назовем L основным масштабом турбулентности. В данном случае в отличие от жидкостей он определяется мощностью генерации турбулентности Q , так как от этой величины зависит уровень энергии турбулентных колебаний, а следовательно, и эффективность нелинейных взаимодействий. Рассмотрим вид асимптотического спектра при $k \gg k_0$. Уравнение, описывающее процессы (4.1), (4.3) и (4.22),

и возбуждение пульсаций с инкрементом γ_k имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dW_k}{dt} = & -2\nu_e W_k + 2\gamma_k W_k + W_k \left[\int_k^\infty Q(k, k_1) W_{k_1} dk_1 - \right. \\ & \left. - \int_0^k Q(k_1, k) W_{k_1} dk_1 \right] + \int dk_1 dk_2 dk_3 R(k, k_1, k_2, k_3) \times \\ & \times (k^2 W_{k_1} W_{k_2} W_{k_3} + k_1^2 W_{k_2} W_k W_{k_3} - \\ & - k_2^2 W_k W_{k_1} W_{k_3} - k_3^2 W_k W_{k_1} W_{k_2}), \end{aligned} \quad (4.29)$$

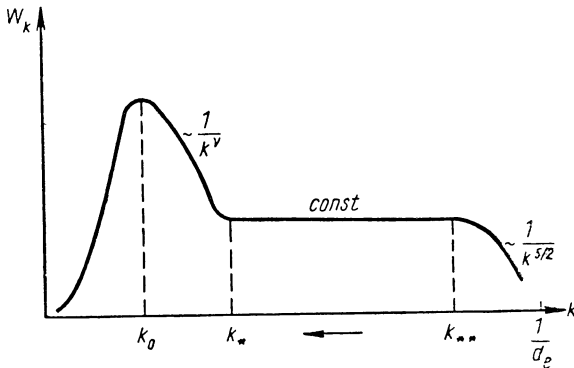


Рис. 4.1. Схематический вид спектра ленгмюровских пульсаций турбулентной плазмы, $k_0 = 2\pi/L$ — основной масштаб турбулентности, зависящий от величины потока турбулентной энергии. Стрелкой отмечено направление потока турбулентной энергии

$$k_* = \frac{\omega_{pe} \nu_{Ti}}{3\nu_{Te}^2}; \quad k_{**} = \frac{\omega_{pe}}{\nu_{Te}} \left(\frac{m_e}{3m_i} \right)^{1/5}.$$

где $Q(k, k_1)$ задается (4.14), а $R(k, k_1, k_2, k_3)$ из (4.20) есть

$$\begin{aligned} R(k, k_1, k_2, k_3) = & \frac{\omega_{pe}^3 \delta(k^2 + k_1^2 - k_2^2 - k_3^2)}{6\pi n_0^2 T_i^2 \nu_{Te}^2 4^3 (1 + T_e/T_i)^2} \times \\ & \times \int d\Omega_1 d\Omega_2 d\Omega_3 \delta_i^*(k + k_1 - k_2 - k_3) \left(\frac{(k k_3)(k_2 k_1)}{k k_3 k_2 k_1} + \frac{(k_2 k)(k_3 k_1)}{k_2 k k_3 k_1} \right)^2. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Здесь $W_k = \frac{\omega_{pe} k^2 N_k}{2\pi^3}$, $d\Omega_1 d\Omega_2 d\Omega_3$ — элементы телесных углов векторов $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$. Выражение (4.30) справедливо для изотропной турбулентности. Интегрирование (4.30) по углам элементарно,

но весьма громоздко [211]. При $kk_1 < k_2 k_3$ и $k > k_1$ получим

$$R(k, k_1, k_2, k_3) = \frac{\pi \omega_{pe}^3 \delta(k^2 + k_1^2 - k_2^2 - k_3^2)}{48 v_{Te}^2 n_0^2 T_i^2 \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right)^2 k^3 k_1^3 k_2^3 k_3^3} \times \\ \times \left\{ \frac{k_1^5}{5} \cdot \frac{(k_2^2 - k_3^2)^4}{(k^2 - k_1^2)^3} \left(k^2 - \frac{3}{7} k_1^2\right) + \frac{(k_2^2 - k_3^2)^2 k_1^2}{15 (k^2 - k_1^2)} \times \right. \\ \left. \times (-5k^4 + 24k^2 k_1^2 - 43k_1^4) + \frac{k_1^3}{315} (622k_1^6 + 825k_1^4 k^2 + \right. \\ \left. + 672k_1^2 k^4 + 105k^6) \right\}. \quad (4.31)$$

Если $k < k_1$, но $kk_1 < k_2 k_3$, то следует в (4.31) сделать замену $k \leftrightarrow k_1$. Если $kk_1 > k_2 k_3$ и $k_2 > k_3$, то $k \leftrightarrow k_2$, $k_3 \leftrightarrow k_1$, и если $kk_1 > k_2 k_3$, $k_2 < k_3$, то $k \leftrightarrow k_3$, $k_2 \leftrightarrow k_1$. Для нахождения асимптотического спектра форма спектра при $k \sim k_0$ не очень существенна и можно считать, что спектр имеет вид

$$W_k = (v-1) \frac{W}{k_0} \left(\frac{k_0}{k}\right)^v \begin{cases} 1 & k > k_0; \\ 0 & k < k_0, \end{cases} \quad (4.32)$$

или, вводя $\xi = (k_1/k)^2$ и $\eta = (k_2/k)^2$ для $kk_1 < k_2 k_3$; $\xi = (k_3/k)^2$; $\eta = (k_2/k)^2$ для $kk_1 > k_2 k_3$, получим следующее уравнение, описывающее процесс (4.3):

$$\frac{1}{W_k} \cdot \frac{dW_k}{dt} = \frac{\pi}{6} \omega_{pe} \left[\frac{W}{8n_0 (T_i + T_e)} \right]^2 \frac{\omega_{pe}^2 (v-1)^2}{k_0^2 v_{Te}^2} \xi_0^v (G_1 + G_2 + G_3) = 0; \quad (4.33)$$

$$G_1 = \int_{\xi_0}^1 d\eta \int_{\xi_0}^{\eta} d\xi L(\xi, \eta) v(\xi, \eta); \quad (4.34)$$

$$G_2 = \int_1^{\infty} d\eta \int_{\eta}^{\infty} d\xi M(\xi, \eta) v(\xi, \eta); \quad (4.35)$$

$$G_3 = 2 \int_{\xi_0}^1 d\xi \int_1^{\infty} d\eta N(\xi, \eta) u(\xi, \eta). \quad (4.36)$$

Здесь

$$\xi_0 = (k_0/k)^2; \quad (4.37)$$

$$v(\xi, \eta) = \frac{1 + \xi^{\frac{v}{2}+1} - \eta^{\frac{v}{2}+1} - (1 + \xi - \eta)^{\frac{v}{2}+1}}{\eta^{\frac{v}{2}+2} \xi^{\frac{v}{2}+2} (1 + \xi - \eta)^{\frac{v}{2}+2}}; \quad (4.38)$$

$$u(\xi, \eta) = \frac{1 + (\xi + \eta - 1)^{\frac{\nu}{2} + 1} - \xi^{\frac{\nu}{2} + 1} - \eta^{\frac{\nu}{2} + 1}}{\eta^{\frac{\nu}{2} + 2} \xi^{\frac{\nu}{2} + 2} (\xi + \eta - 1)^{\frac{\nu}{2} + 2}}, \quad (4.39)$$

а коэффициенты L , M и N есть

$$L(\xi, \eta) = \frac{(2\eta - \xi - 1)^4}{5(1 - \xi)^3} \xi^{5/2} \left(1 - \frac{3}{7} \xi\right) + \frac{\xi^{3/2} (2\eta - \xi - 1)^2}{15(1 - \xi)} \times \\ \times (-5 + 24\xi - 43\xi^2) + \frac{\xi^{3/2}}{315} (622\xi^3 + 825\xi^2 + 672\xi + 105); \quad (4.40)$$

$$M(\xi, \eta) = \frac{(2\eta - \xi - 1)^4}{5(\xi - 1)^3} \left(\xi - \frac{3}{7}\right) + \frac{(2\eta - \xi - 1)^2}{15(\xi - 1)} (-5\xi^2 + 24\xi - 43) + \\ + \frac{1}{315} (622 + 825\xi + 672\xi^2 + 105\xi^3); \quad (4.41)$$

$$N(\xi, \eta) = \frac{(2 - \xi - \eta)^4 \xi^{5/2}}{5(\eta - \xi)^3} \left(\eta - \frac{3}{7} \xi\right) + \frac{\xi^{3/2}}{15(\eta - \xi)} (2 - \eta - \xi)^2 \times \\ \times (-5\eta^2 + 24\xi\eta - 43\xi^2) + \frac{\xi^{3/2}}{315} (622\xi^3 + 825\xi^2\eta + 672\xi\eta^2 + 105\eta^3). \quad (4.42)$$

В асимптотической области $\xi_0 \ll 1$. Из (4.34) и (4.38) следует, что основной вклад в G_1 вносят: а) область малых ξ и малых η , когда ξ порядка η и порядка ξ_0 ; б) область малых ξ , но η , близких к единице, когда ξ порядка $1 - \eta$ и порядка ξ_0 . Основной вклад в G_3 вносит лишь вторая область. Величина G_2 не содержит больших множителей типа $1/\xi_0^\alpha$ и является пренебрежимо малой. В области $\xi, \eta \ll 1$ из (4.40) получим

$$L(\xi, \eta) \approx \frac{4}{3} \xi^{3/2} \left(\eta + \frac{11}{5} \xi\right); \quad (4.43)$$

$$v(\xi, \eta) = \frac{\left(\frac{\nu}{2} + 1\right) (\eta - \xi)}{\xi^{\frac{\nu}{2} + 2} \eta^{\frac{\nu}{2} + 2}}. \quad (4.44)$$

Вклад этой области в G_1 составит при $\nu > \frac{3}{2}$

$$\delta G_1 = \frac{16(4\nu - 3)}{15\nu \left(\frac{\nu}{2} - 1\right) \left(\nu - \frac{3}{2}\right) \xi_0^{\nu - 3/2}}. \quad (4.45)$$

Вклад области $\xi \ll 1, 1 - \eta \ll 1$ в G_1 совпадает с (4.45), в чем можно убедиться, изменив порядок интегрирования и сделав замену $1 + \xi - \eta = \eta'$. Итак, $G_1 = 2\delta G_1$. Для G_3 удобно перейти к интегрированию по $\eta' = \xi + \eta - 1$. Для $\eta - 1 \sim \xi_0, \eta \ll 1$ имеет место $u(\xi, \eta') \approx -v(\xi, \eta'), N(\xi, \eta') \simeq L(\xi, \eta')$. Это позволяет легко вычислить G_3 . Получим, что в этом приближении G_3 и G_1 точно компенсируют друг друга. Можно учесть следующие члены разложения по ξ и η . Они должны дать $G_1 \sim 1/\xi_0^{v-5/2}$, если $v > 5/2$, и то же самое $G_3 \sim 1/\xi_0^{v-5/2}$ (компенсация в этом приближении отсутствует). Наряду с областью малых η следует рассмотреть также область конечных и произвольных η , но малых ξ . Так как L и M пропорциональны $\xi^{3/2}$, а v и u пропорциональны $\xi_0^{-(v/2+2)}$, то результат будет $G_1 + G_3 \sim \xi_0^{-\left(\frac{v}{2}-\frac{1}{2}\right)}$. Сравнивая эту зависимость с $\xi_0^{-(v-5/2)}$, убеждаемся в том, что при $v > 4$ преобладают члены $\xi_0^{-(v-5/2)}$, а при $v < 4$ преобладают $\xi_0^{-\left(\frac{v}{2}-\frac{1}{2}\right)}$.

Рассмотрим вначале $v > 4$. Используя более точные разложения L, M и u, v , получаем

$$G_1 + G_3 = \frac{16 \left(\frac{v}{2} + 2 \right) (16v - 34)}{\left(v - \frac{5}{2} \right) v \left(\frac{v}{2} - 1 \right) \left(\frac{v}{2} - 2 \right) \xi_0^{v-5/2}}. \quad (4.46)$$

Выражение (4.46) не имеет нулей при $v > 4$, т. е. решения нелинейных уравнений отсутствуют. Это утверждение верно для достаточно сильной турбулентности, когда эффекты столкновений и спектральной перекачки на ионах являются лишь малыми поправками к взаимодействию (4.3). Рассмотрим теперь $v < 4$. Преобразуем G_1 , изменив порядок интегрирования по ξ и η и введя новую переменную $\eta' = \frac{2\eta}{1+\xi} - 1$. В переменной η' интегрирование происходит в симметричных пределах, а подынтегральная функция четна по η' . Записывая получающийся интеграл в виде удвоенного интеграла от 0 до $\eta'_{\text{макс}}$ и возвращаясь к старым переменным, получаем

$$G_1 = 2 \int_{\xi_0}^1 d\xi \int_{\xi}^{\frac{1+\xi}{2}} d\eta L(\xi, \eta) v(\xi, \eta). \quad (4.47)$$

Этот интеграл имеет особенность лишь при малых ξ . Особенность при малых η в (4.47) компенсируется такой же в G_3 , т. е. полный интеграл $G_1 + G_3$ не имеет особенности при малых η . Это позволяет использовать разложения L и M при малых ξ , но произвольных η

$$L(\xi, \eta) = \frac{4}{3} \eta(1-\eta) \xi^{3/2}. \quad (4.48)$$

Отсюда

$$G_1 = \frac{8}{3} \int_{\xi_0}^1 \frac{d\xi}{\xi^{\frac{\nu+1}{2}}} \int_{\xi}^{1/2} \frac{d\eta \left(1 - \eta^{\frac{\nu}{2}+1} - (1-\eta)^{\frac{\nu}{2}+1} \right)}{\eta^{\frac{\nu}{2}+1} (1-\eta)^{\frac{\nu}{2}+1}}. \quad (4.49)$$

Аналогичным образом

$$G_3 = \frac{8}{3} \int_{\xi_0}^1 \frac{d\xi}{\xi^{\frac{\nu+1}{2}}} \int_{\xi}^{\infty} \frac{d\eta \left(1 + \eta^{\frac{\nu}{2}+1} - (1+\eta)^{\frac{\nu}{2}+1} \right)}{\eta^{\frac{\nu}{2}+1} (1+\eta)^{\frac{\nu}{2}+1}}. \quad (4.50)$$

Воспользовавшись значением интеграла

$$I_{\pm} = \int_{\xi}^{\infty} \frac{d\eta}{\eta^{\frac{\nu}{2}+1} (1 \pm \eta)^{\frac{\nu}{2}+1}} = \frac{2}{\xi^{\nu/2} \nu} \times \\ \times F\left(\frac{\nu}{2}+1, -\frac{\nu}{2}, -\frac{\nu}{2}+1, \mp \xi\right), \quad (4.51)$$

где F — гипергеометрическая функция, а также его асимптотическим разложением

$$I_{\pm} \simeq \frac{2}{\xi^{\nu/2} \nu} \mp \frac{\nu/2+1}{\left(\frac{\nu}{2}-1\right) \xi^{\nu/2-1}}, \quad (4.52)$$

получим

$$G_1 + G_3 = \frac{2^{\frac{\nu}{2}+5}}{3\nu(\nu-1)\xi_0^2} \left[2\left(1 - \frac{1}{2^{\nu/2}}\right) - \right. \\ \left. - F\left(\frac{\nu}{2}+1, -\frac{\nu}{2}, -\frac{\nu}{2}+1, \frac{1}{2}\right) \right]. \quad (4.53)$$

Таким образом, искомое уравнение для спектра имеет вид

$$F\left(\frac{\nu}{2}+1, -\frac{\nu}{2}, -\frac{\nu}{2}+1, \frac{1}{2}\right) = \Gamma_0, \quad (4.54)$$

где

$$\Gamma_0 = 2\left(1 - \frac{1}{2^{\nu/2}}\right). \quad (4.55)$$

На рис. 4.2 изображены правая (кривая 2) и левая (кривая 1) части уравнения (4.54) как функции ν . Пересечение этих кривых дает

$$\nu = 2,84. \quad (4.56)$$

Такой спектр в асимптотической области имеет место при условии, если можно пренебречь столкновениями и перекачкой на ионах. Их учет приводит к тому, что в (4.54) величину Γ_0 нужно заменить

$$\Gamma = \Gamma_0 - \delta\Gamma_Q - \delta\Gamma_\nu, \quad (4.57)$$

где

$$\delta\Gamma_\nu = \frac{36\nu_e n_0^2 (T_e + T_i)^2 \nu \left(\frac{k_0 v_{Te}}{\omega_{pe}} \right)^2}{\pi \omega_{pe} W^2 (\nu - 1) 2^{\frac{\nu}{2} - 1} \frac{\nu + 1}{\xi_0^2}} \quad (4.58)$$

описывает эффекты поглощения из-за столкновений, а

$$\delta\Gamma_Q = \frac{n_0 T_i 9\nu}{W \sqrt{\pi} 2^{\frac{\nu+1}{2}} (\nu-1)} \times \left(\frac{k_0 v_{Te}}{\omega_{pe}} \right)^3 \frac{v_{Te}}{v_{Ti}} \cdot \frac{1}{\xi_0 \nu^{2+1}} \quad (4.59)$$

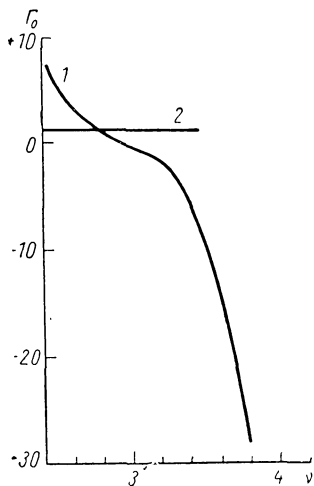


Рис. 4.2. Численное решение уравнения (4.54), определяющего показатель ν в спектре турбулентности:

1 — левая часть уравнения (4.54); 2 — правая часть уравнения (4.54).

спектральной перекачки на ионах.

В силу резкой зависимости кривой 1 от ν спектр остается приближенно степенным, однако величина спектрального индекса ν , характеризующего спектр турбулентности, возрастает вплоть до $\nu = 4$.

Уравнение (4.29) строго решалось в работе [212] при использовании метода введения непрерывного параметра. В качестве начального вида спектра использовался спектр, найденный приближенными аналитическими методами, а именно в области $k \gg k_0$ степенной спектр с $\nu = 3$, а при $k \leq k_0$ $W_h = \text{const} (k/k_0)^2 \times \exp(-k^2/k_0^2)$. Эти два решения сшивались при $k \sim k_0$.

Начальное решение оказалось очень близким к конечному, а сходимость процедуры очень быстрой. Результат расчета для значений параметров

$$\frac{W}{n_0 T_e} \sim 10^{-6}; \quad \omega_{pe} = 5,6 \cdot 10^3 \text{ сек}^{-1}; \quad \nu_e = 2,4 \cdot 10^{-6} \text{ сек}^{-1}; \quad (4.60)$$

$$T_e = T_i; \quad n_0 \sim 10^{-2}; \quad v_{Te} \simeq 4,8 \cdot 10^7 \text{ см/сек}; \quad v_{Ti} = 1,1 \cdot 10^8 \text{ см/сек}$$

приведен на рис. 4.3. В области $k > k_0$, которая, строго говоря, не достигала асимптотических значений $k \sim 7k_0$, методом наименьших квадратов получено, что лучшей аппроксимацией точного спектра является $\nu = 3,9$. Нужно отметить также, что при значениях параметров (4.60) вклады $\delta\Gamma_\nu$ и $\delta\Gamma_Q$ сравнимы с Γ_0 и следует ожидать по формулам (4.57), (4.54) значение $\nu = 3,7$.

Таким образом, численный расчет подтверждает правильность аналитической теории спектра. Кроме того, он доказывает устойчивость стационарного спектра в малом, т. е. в рамках тех отклоне-

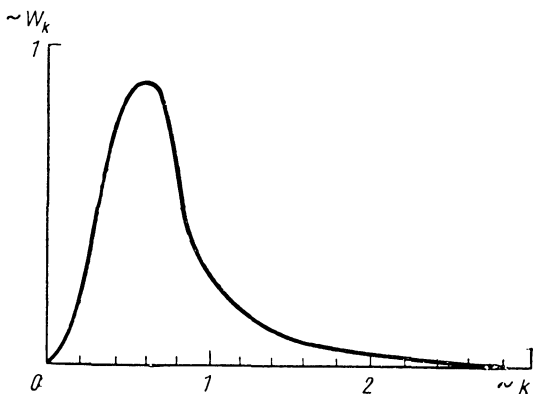


Рис. 4.3. Результаты численного расчета спектра турбулентности на вычислительных машинах.

ний от истинного распределения, которые соответствуют различию между начальным аппроксимационным спектром и конечным, полученным в результате численного эксперимента. Наконец, численные расчеты позволяют определить вид спектра в области основного масштаба турбулентности. Для использованных параметров (4.60) он хорошо аппроксимируется следующей формулой:

$$W_k = \begin{cases} \sim k^2 \exp\left(1 - \frac{k^2}{k_0^2}\right); & 0 \leq k \leq k_0; \\ \sim \left(\frac{k_0}{k}\right)^\nu; & \nu = 3,9; \quad k_0 \leq k \leq 7k_0. \end{cases} \quad (4.61)$$

Перейдем теперь к анализу спектров турбулентности в области $v_p \ll \frac{3v_{Te}^2}{v_{Ti}}$ [213]. В достаточно горячей плазме это может быть область вне источников генерации турбулентности. Однако и в холодной плазме ($T_e < 15 \text{ эВ}$) источники турбулентности могут находиться при фазовых скоростях, существенно меньших интересующих. Характерным для $v_p \ll 3v_{Te}^2/v_{Ti}$ является пренебрежимо

малый вклад процесса (4.3)* и существенно дифференциальный характер трансформации энергии на ионах (4.16). Пусть $v_p \gg \gg v_{Te} (3m_i/m_e)^{1/5}$, когда рассеяние на электронах пренебрежимо мало. Тогда

$$\frac{dW_k}{dt} = -2\nu_e W_k + \alpha W_k \frac{\partial W_k}{\partial k} = 0 \quad (4.62)$$

и в пренебрежении ν_e , $W_k = \text{const} = A$. Если обозначить k_* характерное значение k , при котором этот спектр должен быть

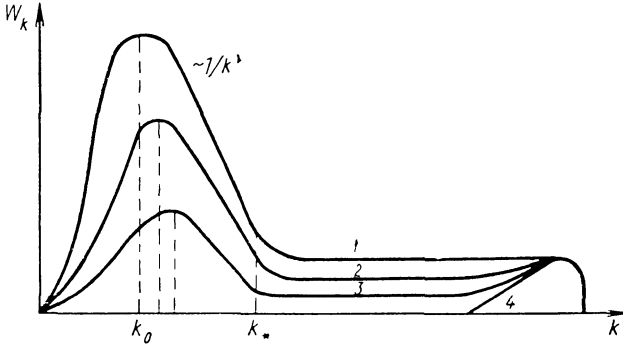


Рис. 4.4. Изменение ленгмюровского спектра турбулентности при увеличении поглощения ν_e турбулентных пульсаций в условиях неизменного значения потока турбулентной энергии по спектру.

счит с $W_k = \frac{W_0(\nu - 1)}{k_0} \left(\frac{k_0}{k} \right)^\nu$

$$k_* \simeq \frac{\omega_{pe}}{3\nu_{Te}^2} \nu_{Ti}, \quad (4.63)$$

то значение const в спектре при $k > k_*$ есть $A = \frac{\nu - 1}{k_0} \left(\frac{k_0}{k_*} \right)^\nu W_0$.

Если учесть поглощение пульсаций, то

$$W = \frac{2\nu_e}{\alpha} k + B; \quad B = \text{const}, \quad (4.64)$$

* Оценка инкремента (4.3) в этом случае имеет вид [214,80]

$$\gamma \sim \omega_{pe} (v_{Te}^2/v_p^2) (W/n_0 T_e)^2.$$

Этот инкремент превосходит (4.17) или (4.10), только если v_p близко к $v_{Te} (m_i/m_e)^{1/5}$, а энергия турбулентности W удовлетворяет неравенствам

$$1 \gg W/nT \gg (m_e/m_i)^{1/5}.$$

Таким образом, получаемая область столь узка, что спектры работы [214], в которой учитывался лишь процесс (4.3), здесь не рассматриваются.

т. е. спектр спадает в сторону меньших k . При сшивке с решением при $k < k_*$ надо учесть, что столкновения увеличивают ν . Таким образом, с ростом ν увеличивается провал в спектре турбулентности (ср. кривые 1—3 на рис. 4.4). При достаточно большом поглощении в условиях, когда область генерации соответствует $k \ll k_*$, этот провал может дойти до нуля, т. е. исчезнет максимум в спектре и энергия турбулентности не сможет просочиться через область поглощения (кривая 4 на рис. 4.4)

Критерий исчезновения максимума зависит от мощности генерации турбулентности Q . Для нахождения такого критерия рассмотрим область генерации турбулентности при $v_p > v_{Te} (3m_i/m_e)^{1/5}$. Предположим, что инкремент в области

$$k_g < k < k_g - \Delta k_g \quad (4.65)$$

постоянен и равен γ_g . Надо иметь в виду, что γ_g есть некий эффективный инкремент, характеризующий скорость нарастания всех пульсаций с заданным k в интервале Δk независимо от их направления. Возможность введения такого эффективного инкремента связана с быстрой изотропизацией пульсаций из-за рассеяния на ионах [59]. Как следует из (4.12) и (4.13), характерное время τ изотропизации имеет порядок

$$\frac{1}{\tau} \simeq \omega_{pe} \frac{W}{n_0 T_e},$$

где W — энергия, заключенная в данном интервале $\Delta k = \Delta k_g$.

Считая $\gamma_g \gg \nu_e$ (существенно надкритический режим возбуждения), получаем в области возбуждения

$$W_k = \frac{\gamma_g}{\alpha} (k_g - k).$$

А из сшивки с (4.64) получим

$$B + \frac{2\nu_e}{\alpha} k_g = \frac{\gamma_g}{\alpha} \Delta k_g,$$

и мощность генерации в виде

$$Q = \int_{k_g - \Delta k_g}^{k_g} \gamma_g W_k dk = \frac{\gamma_g^2 (\Delta k_g)^2}{2\alpha}, \quad (4.66)$$

т. е. $B + \frac{2\nu_e k_g}{\alpha} = \sqrt{\frac{2Q}{\alpha}}$. Итак, вместо (4.64) можно написать

$$W = \frac{2\nu_e}{\alpha} (k - k_g) + \sqrt{\frac{2Q}{\alpha}}. \quad (4.67)$$

Условие исчезновения максимума в спектре при $k_g \gg k_*$ соответствует из (4.67)

$$\frac{2\nu_e}{\alpha} (k_g - k_*) \approx \frac{2\nu_e}{\alpha} k_g > \sqrt{\frac{2Q}{\alpha}}$$

или

$$Q < Q_g = \frac{2\nu_e^2 k_g^2}{\alpha} = \frac{2\nu_e^2 27 m_i \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right)^2}{\pi \omega_{pe}^2 m_e} \frac{\nu_{Te}^2}{\nu_{pg}^2} \omega_{pe} n_0 T_e. \quad (4.68)$$

По-другому это условие можно записать как условие на инкремент

$$\gamma_g < 2\nu_e \frac{k_g}{\Delta k_g}. \quad (4.69)$$

Сделаем теперь оценку основного масштаба турбулентности или параметра k_0 , характеризующего значение максимума спектра в условиях, когда неравенства (4.68), (4.69) не выполнены с большим запасом. Тогда можно пренебречь поглощением в (4.64) и, следовательно, $A = B$ или

$$\sqrt{\frac{2Q}{\alpha}} = \frac{W_0 (\nu - 1)}{k_0} \left(\frac{k_0}{k_*}\right)^\nu. \quad (4.70)$$

Будем считать, что основная энергия турбулентности заключена при $k \ll k_*$. Положим, простоты ради, что при $k < k_0$ спектр аппроксимируется $\frac{1}{k_0} \left(\frac{k}{k_0}\right)^s W_0 (\nu - 1)$. Тогда полная энергия турбулентности имеет оценку

$$W = \int_0^\infty W_k dk = \frac{\nu + s}{s + 1} W_0. \quad (4.71)$$

С другой стороны, по уравнению баланса

$$Q = 2\nu_e W = 2\nu_e \frac{s + \nu}{1 + s} W_0. \quad (4.72)$$

Исключая W_0 из (4.72) и (4.70), получаем

$$k_0 = k_* \left(\frac{\nu + s}{(s + 1)(\nu - 1)} \right)^{\frac{1}{\nu - 1}} \left(\frac{Q_*}{Q} \right)^{\frac{1}{2(\nu - 1)}}, \quad (4.73)$$

где

$$Q_* = \frac{\nu_e^2 k_*^2}{2\alpha}. \quad (4.74)$$

При такой оценке численному фактору перед k_* в (4.73) придавать значение нельзя и поэтому

$$k_0 \approx k_* \left(\frac{Q_*}{Q} \right)^{\frac{1}{2(v-1)}}. \quad (4.75)$$

Заметим, что Q_* в $(k_*/k_g)^2$ раз меньше значения Q_g [см. (4.68)], для которого пропадает максимум в спектре. Для справедливости (4.75) необходимо $k_0 \ll k_*$. Следует также обратить внимание на весьма медленную зависимость k_0 от Q .

Перейдем теперь к рассмотрению области самых больших k , а именно $v_p \ll v_{Te} (3 m_i/m_e)^{1/5}$, в которой основным процессом трансформации энергии вдоль спектра является индуцированное рассеяние на электронах плазмы. Эта область узка, так как $v_p > (2 \div 3)v_{Te}$. Однако, если источник турбулентности возбуждает колебания с фазовыми скоростями, очень близкими к v_{Te} , и масса ионов плазмы велика, ее необходимо учитывать. Интегрируя (4.9) по углам, получаем для изотропной турбулентности

$$\begin{aligned} \frac{dW_k}{dt} = \alpha^* W_k \left\{ \int_k^\infty W_{k_1} dk_1 \frac{k^2}{k_1^3} (k_1^2 - k^2) \left(\frac{1}{3} k_1^2 + \frac{4}{7} k^2 \right) - \right. \\ \left. - \int_0^k W_{k_1} dk_1 \frac{k_1^2}{k^3} (k^2 - k_1^2) \left(\frac{1}{3} k^2 + \frac{4}{7} k_1^2 \right) \right\} = 0, \end{aligned} \quad (4.76)$$

где

$$\alpha^* = \frac{6v_{Te} \sqrt{2\pi}}{5m_e n_0 \omega_{pe}^2}. \quad (4.77)$$

При многократном последовательном дифференцировании и умножении на $1/k$ уравнение (4.76) можно свести к дифференциальному

$$2 \frac{d^3 W_k}{dk^3} + \frac{21}{k} \cdot \frac{d^2 W_k}{dk^2} + \frac{46}{k^2} \cdot \frac{dW_k}{dk} + \frac{10W_k}{k^3} = 0. \quad (4.78)$$

Три линейно независимых решения уравнения (4.78) представляют собой $\sqrt[3]{v}$ -степенные функции $W_k = \frac{\text{const}}{k^v}$, где v — один из корней уравнения

$$2v^3 - 15v^2 + 29v - 10 = 0, \quad (4.79)$$

т. е.

$$v_1 = \frac{5}{2}; \quad v_{2,3} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}. \quad (4.80)$$

Легко видеть, что лишь v_1 удовлетворяет условию локальности передачи энергии вдоль спектра, т. е. независимости спектра от источников и затухания турбулентности. Это условие есть $2 < v < 3$. Если v лежит вне указанного интервала, то формально оно не является решением интегрального уравнения (4.76), так как либо первый, либо второй интеграл расходятся. В случае же $2 < v < 3$ основной вклад как в первый, так и во второй интеграл (4.76) вносят лишь k_1 , близкие к k (условие локальности передачи взаимодействия). Уравнение (4.76) имеет ограниченную применимость, и значения k ограничены сверху необходимостью учета поглощения Ландау, а снизу вкладом ионов в перекачку. Поэтому решение v_2 , з фактически требует использования других уравнений.

Таким образом, единственно приемлемым решением, удовлетворяющим предположению о том, что только рассеяние на электронах определяет спектр, является

$$W_k = \frac{\text{const}}{k^{5/2}}. \quad (4.81)$$

§ 4.4. СПЕКТРЫ НИЗКОЧАСТОТНЫХ ПУЛЬСАЦИЙ, ВОЗБУЖДАЕМЫХ ЛЕНГМЮРОВСКОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТЬЮ В ИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЕ

Как отмечалось в § 2.5, корреляция ленгмюровских пульсаций может привести к возникновению низкочастотных пульсаций на частотах, равных разности частот ленгмюровских пульсаций и не имеющих однозначной связи частоты и волнового числа. При взаимодействии с частицами плазмы эти корреляционные хвосты играют роль части индуцированного рассеяния. Однако эти пульсации могут быть непосредственно детектированы экспериментально и ряд экспериментов по пучковым взаимодействиям указывает на то, что максимум частоты в спектре низкочастотных пульсаций совпадает с разностью частот высокочастотных пульсаций. Приближенное выражение для нелинейного тока S_{k, k_1, k_2} при $(\omega_1 + \omega_2) \ll \omega_1$ (ω_2 имеет знак, противоположный ω_1) имеет вид

$$S_{k, k_1, -k_2} = \frac{(k_1 k_2) e \omega k}{8\pi m_e k_2 k_1 \omega_{pe}^2} (\varepsilon_k^{l(e)} - 1). \quad (4.82)$$

И, следовательно, согласно (2.124)

$$\begin{aligned} \frac{I_k}{8\pi} = \frac{|E_{k,\omega}|^2}{8\pi} = \frac{k^2}{2} \left| \frac{\varepsilon_k^{l(e)} - 1}{\varepsilon_k^l} \right|^2 \int dk_1 dk_2 \frac{(k_1 k_2)^2}{4 k_1^2 k_2^2 \omega_{pe}^2 n_0 m_e} \times \\ \times W_{k_1}^l W_{k_2}^l \delta(\omega - \omega_{k_1}^l + \omega_{k_2}^l) \delta(k - k_1 + k_2). \end{aligned} \quad (4.83)$$

Для изотропной турбулентности, интегрируя это выражение по углам, получаем

$$\frac{I_k}{8\pi} = \frac{k}{512\pi m_e n_0 \omega_{pe}^2} \left| \frac{\epsilon_k^{l(e)} - 1}{\epsilon_k^l} \right|^2 \int_0^\infty \frac{W_{k_1}^l dk_1}{k_1^3} \times$$

$$\times \int_{(k-k_1)^2}^{(k+k_1)^2} W_{k_2}^l \frac{dk_2^2}{k_2^4} (k_1^2 + k_2^2 - k^2)^2 \delta(\omega - \omega_{k_1}^l + \omega_{k_2}^l). \quad (4.84)$$

Здесь I_k, ω характеризует распределение электрических полей низкочастотных пульсаций, а $W^l = \int_0^\infty W_k^l dk = \int dk W_k^l$. Пусть $\omega > 0$. Тогда из δ -функций (4.84) следует, что

$$k_2^2 = k_1^2 - \frac{2\omega\omega_{pe}}{3v_{Te}^2} < k_1^2.$$

Это значение k_2 попадает в интервал интегрирования, если

$$k_1 > \frac{k}{2} + \frac{\omega\omega_{pe}}{3v_{Te}^2 k}. \quad (4.85)$$

Итак,

$$\frac{I_k}{8\pi} = \frac{k}{192\pi\omega_{pe}n_0T_e} \left| \frac{\epsilon_k^{l(e)} - 1}{\epsilon_k^l} \right|^2 \int \frac{W_{k_1}^l dk_1 W^l}{k_1^3} \sqrt{k_1^2 - \frac{2\omega\omega_{pe}}{3v_{Te}^2}} \times$$

$$\frac{k}{2} + \frac{\omega\omega_{pe}}{3v_{Te}^2 k}$$

$$\times \frac{\left(k_1^2 - \frac{k^2}{2} - \frac{\omega\omega_{pe}}{3v_{Te}^2}\right)^2}{\left(k_1^2 - \frac{2\omega\omega_{pe}}{3v_{Te}^2}\right)^2}. \quad (4.86)$$

Рассмотрим $k \gg k_*$ и $\omega \ll k_*^2 \frac{3v_{Te}^2}{\omega_{pe}}$. Тогда $\frac{\omega}{kv_{Ti}} \ll 1$.

$$\frac{I_k}{8\pi} = \frac{kQ}{96\pi \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right)^2 \omega_{pe} n_0 T_e \alpha} \int_{k/2}^\infty \frac{dk_1}{k_1^7} \left(k_1^2 - \frac{k^2}{2}\right)^2. \quad (4.87)$$

Здесь использовано (4.67) $W_k = \sqrt{2Q/\alpha}$. Из (4.87) имеем

$$\frac{I_k}{8\pi} = \frac{3}{16\pi^2} \cdot \frac{m_i v_{Te}^2 Q}{m_e k \omega_{pe}^4} \quad (4.88)$$

или для $W_{k, \omega} = 4\pi k^2 I_k / 8\pi$ ($I_k = I_{k, \omega}$, $W_{k, \omega} = W_{|k|, \omega}$)

$$W_{k, \omega} = \frac{3Qm_i}{4\pi m_e \omega_{pe}^4} k v_{Te}^2. \quad (4.89)$$

Полная энергия электрического поля флуктуаций получится из (4.89) по формуле

$$W = \int W_{k, \omega} dk d\omega. \quad (4.90)$$

В рассматриваемой области частот спектр пульсаций белый, т. е. не зависит от частоты. Рост энергии с ростом k не беспредельный, а имеет место лишь при $\frac{k}{2} \ll k_g$, где k_g — волновое число ленгмюровских пульсаций, соответствующее области генерации турбулентности. Из (4.87) видно, что $W_{k, \omega} = 0$ при $k > 2k_g$.

Точно так же спектр по ω является белым лишь при $\omega \ll \frac{3k^2 v_{Te}^2}{2\omega_{pe}}$. Максимум энергии пульсаций достигается при $\omega \sim \frac{3k^2 v_{Te}^2}{2\omega_{pe}}$. По-

лагая $\omega = \frac{3k^2 v_{Te}^2}{2\omega_{pe}} + \Delta\omega$, где $\Delta\omega \ll \omega$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{I_k}{8\pi} &= \frac{k \left| \frac{e_k^{l(e)} - 1}{e_k^l} \right|^2}{192\pi\omega_{pe} n_0 T_e} \int_{k \left(1 + \frac{\Delta\omega}{2\omega}\right)}^{\infty} \frac{W_{k_1}^l}{k_1^3} W^l \sqrt{\frac{1}{k_1^2 - k^2 \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega}\right)}} dk_1 \times \\ &\times \left(k_1^2 - k^2 \left(1 + \frac{\Delta\omega}{2\omega}\right) \right)^2 \left(k_1^2 - k^2 \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega}\right) \right)^{-2}. \quad (4.91) \end{aligned}$$

Из (4.91) следует, что резкое возрастание энергии $I_k/8\pi$ возможно из-за того, что $W^l \sqrt{\frac{1}{k_1^2 - k^2 (1 + \Delta\omega/\omega)}}$ приблизится к максимуму в спектре $k \sim k_0$. Минимальное значение $k_1^2 - k^2 \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega}\right)$

в (4.91) есть $k^2 \frac{(\Delta\omega)^2}{4\omega^2}$. Таким образом, возрастание имеет место в частотном интервале $\frac{\Delta\omega}{\omega} \approx \frac{k_0}{k}$. Полагая $\Delta\omega = 0$, получаем энергию пульсаций в максимуме

$$\frac{I_k}{8\pi} = \frac{k \sqrt{2Q/\alpha}}{384\pi\omega_{pe}n_0T_e} \int_0^\infty \frac{W_{k_2} dk_2^2}{(k_2^2 + k^2)^2} \left| \frac{\varepsilon_k^{l(e)} - 1}{\varepsilon_k^l} \right|^2. \quad (4.92)$$

Учитывая, что основной вклад в интеграл (4.92) вносят $k_2 \ll k$, и считая, что основная энергия ленгмюровской турбулентности сосредоточена при $k \simeq k_0$; $W_k = W_0 \frac{(v-1)}{k_0} \left(\frac{k_0}{k}\right)^v$, получаем оценку $W_{k,\omega}$ согласно (4.72), (4.74) и (4.75):

$$W_{k,\omega} \approx \frac{Q}{2\pi\omega_{pe}^2 k} \left(\frac{Q_*}{Q}\right)^{\frac{1}{2(v-1)}} \sqrt{\frac{Q}{Q_*}}. \quad (4.93)$$

Здесь $\left| \frac{\varepsilon_k^{l(e)} - 1}{\varepsilon_k^l} \right|^2$ опущена как величина порядка единицы.

Значение (4.93) больше (4.89) в $\left(\frac{k_*}{k_0}\right)^v \frac{k_0^2}{k^2}$ раз. Интеграл $\int W_{k,\omega} d\omega$ по частотному интервалу $\Delta\omega$ имеет оценку

$$W_k = \int W_{k,\omega} d\omega \approx W_{k,\omega} \Delta\omega \approx W_{k,\omega} \omega \frac{k_0}{k} \approx \frac{3}{2} \times \\ \times \frac{k k_0 v_{Te}^2}{\omega_{pe}} W_{k,\omega} = \frac{Q v_{Ti}}{4\pi\omega_{pe}^2} \left(\frac{Q_*}{Q}\right)^{\frac{1}{(v-1)}} \sqrt{\frac{Q}{Q_*}}. \quad (4.94)$$

В то же время $\int W_{k,\omega} d\omega$ вне $\Delta\omega$, оцененный по (4.89), равен ($T_e = T_i$)

$$\int W_{k,\omega} d\omega \approx \frac{9Q m_i}{8\pi m_e \omega_{pe}^5} k^3 v_{Te}^4 \approx \frac{v_{Ti}}{24\pi} \cdot \frac{Q}{\omega_{pe}^2} \left(\frac{k}{k_*}\right)^3 \quad (4.95)$$

и быстро растет с ростом k . Максимальное k есть k_g , т. е. отношение полных энергий (4.95) к (4.94) имеет порядок $\left(\frac{k_g}{k_*}\right)^3 \times \left(\frac{k_*}{k_0}\right)^{v-3}$ и при $v=3$ всегда велико ($k_g \gg k_*$). Для частот, много

больших $3k^2 v_{Te}^2 / 2\omega_{pe}$, спектр пульсаций быстро падает:

$$W_{k,\omega} = \frac{81Qm_i}{4m_e} \left| \frac{\varepsilon_k^{l(e)} - 1}{\varepsilon_k^l} \right|^2 \left(1 + \frac{T_e}{T_i} \right)^2 \frac{k^5 v_{Te}^6}{\omega^2 \omega_{pe}^6}.$$

§ 4.5. СПЕКТРЫ ЛЕНГМЮРОВСКИХ ПУЛЬСАЦИЙ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЫ

В неизотермической плазме ($T_e \gg T_i$) разрешен процес распадов ленгмюровских волн на ионно-звуковые пульсации [59]

$$v_p < 3v_{Te} \sqrt{\frac{m_i}{m_e}}; \quad k > k_*^s = \frac{\omega_{pe}}{3v_{Te}} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} = k_* \sqrt{\frac{T_e}{T_i}} \gg k_*.$$

Это соответствует в изотермической плазме области, в которой имеет место дифференциальная перекачка на ионах или перекачка на электронах. Распадное взаимодействие является резонансным, поэтому эффекты рассеяния рассматривать не следует. Вероятность распада при $k_s \ll \omega_{pe}/v_{Te}$ имеет вид [69]

$$\omega_{l',s}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}) = \frac{e^2 k v_s (2\pi)^6}{8\pi m_e^2 v_{Te}^2} \times \\ \times \left(\frac{k_1 k_2}{k_1 k_2} \right)^2 \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) \delta(\omega_{k_1}^l - \omega_{k_2}^l - \omega_k^s).$$

Уравнение для ионно-звуковых (s) волн приобретает вид

$$-\gamma_k^s N_k^s = \int \omega_{l',s}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}) \frac{d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2}{(2\pi)^6} (N_{k_1}^l N_{k_2}^l + N_k^s N_{k_1}^l - N_k^s N_{k_2}^l). \quad (4.96)$$

Здесь написано стационарное уравнение баланса, когда приток энергии ионно-звуковых плазмонов идет из-за нелинейных взаимодействий с ленгмюровскими, а убыль энергии происходит из-за поглощения ионно-звуковых пульсаций электронами плазмы, γ_k^s — декремент затухания ионно-звуковых пульсаций.

Будем считать, что непосредственное возбуждение ионно-звуковых пульсаций не происходит или им можно пренебречь, а источником ионно-звуковой турбулентности является лишь конверсия энергии из ленгмюровских пульсаций (источник турбулентности имеется лишь для l-волн). Будем считать как ленгмюровскую, так и ионно-звуковую турбулентность изотропной. Уравнение (4.94) можно записать в виде

$$-(\gamma_k^s + \gamma_k^N) N_k^s = \int \omega_{l',s}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}) \frac{N_{k_1}^l N_{k_2}^l}{(2\pi)^6} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 = \frac{Q_k^s (2\pi)^3}{\omega_k^s}, \quad (4.97)$$

где γ_k^N — нелинейный декремент

$$- \gamma_k^N = \int \omega_l^{ls}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}) \frac{dk_1 dk_2}{(2\pi)^6} (N_{k_2}^l - N_{k_1}^l). \quad (4.98)$$

В условиях изотропной ленгмюровской турбулентности $\gamma_k^N < 0$. Ясно поэтому, что для проявления непосредственного возбуждения турбулентности внешним источником необходимо, чтобы линейный инкремент превосходил нелинейный декремент — γ_k^N или $\gamma_k^s > \gamma_k^N$. Таким образом, непосредственное возбуждение низкочастотных колебаний может быть сильно подавлено высокочастотными колебаниями. Этот эффект имеет значительно более общее значение, например, для подавления дрейфовых колебаний, которые препятствуют удержанию плазмы. Известно, например, что при развитии пучковой неустойчивости или неустойчивости ВЧ-полей инкременты нарастания высокочастотных пульсаций могут быть на много порядков больше, чем низкочастотных. Утверждение о стабилизации нужно понимать лишь в том смысле, что характерные линейные инкременты низкочастотных пульсаций не влияют на их спектры. Возбуждение же низкочастотных пульсаций имеет все же место и связано с их генерацией высокочастотными. Источник такой генерации описывается правой частью (4.97). Правая часть (4.97) сходна с источником возбуждения, рассмотренным в предыдущем параграфе в отсутствие распадного резонанса*.

Несмотря на то что в рассматриваемом резонансном случае, соответствующем распаду, уровень низкочастотных пульсаций намного выше, чем в отсутствие резонанса, однако в силу большого линейного поглощения ионно-звуковых пульсаций ($\gamma_k^s \sim \omega_k^s \sqrt{m_e/m_i}$), а также нелинейного, величина N_k^s может быть много меньше N_k^l . В этом случае в общем уравнении распадного взаимодействия для l -волн

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{k_1}^l}{\partial t} = & -2\nu_e N_{k_1}^l - \int \omega_l^{ls}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}) \frac{1}{(2\pi)^6} \times \\ & \times (N_k^s N_{k_1}^l - N_{k_2}^l N_k^s + N_{k_1}^l N_{k_2}^l) dk dk_2 + \\ & + \int \omega_l^{ls}(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}) (N_{k_1}^l N_{k_2}^l - N_k^s N_{k_1}^l + N_k^s N_{k_1}^l) \frac{dk dk_2}{(2\pi)^6} \end{aligned} \quad (4.99)$$

можно пренебречь членами, содержащими N_k^s , и записать уравнение баланса в виде

$$\begin{aligned} 2\nu_e W_{k_1}^l = & W_{k_1}^l \int [\omega_l^{ls}(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}) - \omega_l^{ls}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k})] \times \\ & \times W_{k_2}^l \frac{dk_2 dk}{\omega_{pe}(2\pi)^3} \cdot \frac{d\Omega_2}{4\pi}. \end{aligned} \quad (4.99a)$$

* В § 4.4 в силу $\text{Re } \varepsilon_k^l \gg 1$ мнимой частью ε и γ_k^N можно пренебречь. Это видно из того, что для слабой турбулентности $\gamma_k^N \ll \omega \ll \omega \text{Re } \varepsilon_k^l$. В условиях резонанса $\text{Re } \varepsilon_k^l = 0$ и учет γ_k^N необходим.

В дальнейшем будет найдено, когда выполняется неравенство $N_k^s \ll N_k^l$.

Интегрируя по k и Ω_2 , получаем уравнение для определения спектра ленгмюровской турбулентности

$$2\nu_e = \frac{\pi}{32} \cdot \frac{\omega_{pe}}{(k_*^s)^2 n_0 T_e} \left\{ \int_{k_1}^{k_1+2k_*^s} \frac{(k_1^2 - k_2^2)^2}{4k_1^3 k_2^3} \times \right. \\ \times \left(k_1^2 + k_2^2 - \frac{(k_1^2 - k_2^2)^2}{4(k_*^s)^2} \right)^2 W_{k_2}^l dk_2 - \\ \left. - \int_{k_1-2k_*^s}^{k_1} \frac{1}{4k_1^3 k_2^3} (k_1^2 - k_2^2)^2 \left(k_1^2 + k_2^2 - \frac{(k_1^2 - k_2^2)^2}{4(k_*^s)^2} \right)^2 W_{k_2}^l dk_2 \right\}, \quad (4.100)$$

где $k_*^s = \omega_{pe} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} / 3v_{Te}$, $k_2 > 2k_*^s - k_1$. Рассмотрим предельный случай $k_1 \gg k_*^s$. Раскладывая по k_*^s/k_1 , получаем

$$2\nu_e W_k = \alpha' W_k \frac{\partial W_k}{\partial k}, \quad (4.101)$$

где

$$\alpha' = \alpha \left(1 + \frac{T_e}{T_i} \right)^2. \quad (4.102)$$

Так как $T_e \gg T_i$, то α' в $(T_e/T_i)^2$ раз больше α .

В интервале от k_*^s до $k_* = k_*^s \sqrt{\frac{T_i}{T_e}}$ во взаимодействии участвуют пульсации с $k_2 > k_*$. Они нерезонансны и, следовательно, взаимодействуют из-за индуцированного рассеяния на ионах. Если пренебречь столкновениями, то

$$\frac{\partial W_k}{\partial k} = - \left(\frac{T_e}{T_i} \right)^2 \frac{\pi \omega_{pe}}{3\alpha' n_0 T_e} k_*^s W_{k_*^s}. \quad (4.103)$$

Согласно (4.101) при $k \ll k_*^s$ $W_k = \text{const} = \sqrt{\frac{2Q}{\alpha'}}$, если ν_e мало.

Этот уровень турбулентности в два раза меньше, чем в изотермической плазме при той же мощности генерации. В области же $k_* < k \ll k_*^s$ этот уровень поднимается. Сделаем грубую оценку

этого эффекта, считая $W_{k_*^s} = \sqrt{\frac{2Q}{\alpha'}} = \sqrt{\frac{2Q}{\alpha}} \cdot \frac{T_i}{T_e}$. Получим согласно (4.103)

$$W_{k_*} = \frac{(k_*^s)^2 \pi \omega_{pe}}{3\alpha' n_0 T_i} \sqrt{\frac{2Q}{\alpha}} = \frac{T_e}{T_i} \sqrt{\frac{2Q}{\alpha}}. \quad (4.104)$$

При меньших k существенны четырехплазмонные взаимодействия*. Схематически вид турбулентного спектра в сильно неизотермической плазме приведен на рис. 4.5 (кривая 1), где для сравнения (кри-

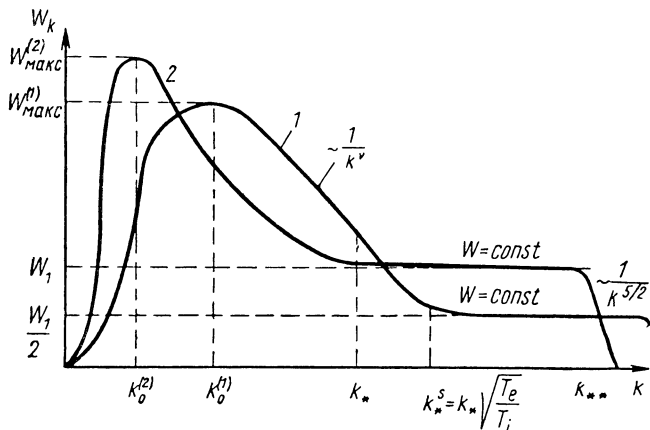


Рис. 4.5. Схематическое изображение спектра турбулентности изотермической и неизотермической плазмы при одинаковых потоках турбулентной энергии:

1 — $T_e \gg T_i$; 2 — $T_e = T_i$. Для кривых 1 и 2 величины $T_e, n_0, Q...$ совпадают, T_i разные.

вая 2) приведен спектр турбулентности изотермической плазмы при той же мощности генерации. Основной масштаб турбулентности в неизотермической плазме меньше по сравнению с изотермической

$$k_0 \simeq k_* \left(\frac{Q^s}{Q_*} \right)^{\frac{1}{2(\nu-1)}}; \quad Q_*^s = Q_* \left(\frac{T_e}{T_i} \right)^2. \quad (4.105)$$

* Вообще говоря, четырехплазмонные взаимодействия падают при $T_e \gg T_i$, однако это сказывается лишь на уровне энергии, начиная с которой они существенны. Кроме того, такие взаимодействия могут заходить и в область $k_* < k < k_*^s$.

Обратимся теперь к выражению для нелинейного декремента (4.98), получим

$$-\gamma_k^N = \frac{\pi}{32} \cdot \frac{k_*^s \omega_{pe}}{n_0 T_e} \left\{ \int_{|k_*^s - k/2|}^{\infty} \frac{dk_2 W_{k_2}^l}{k_2^3} \cdot \frac{(2k_2^2 + 2kk_*^s - k^2)^2}{k_2^2 + 2kk_*^s} - \int_{k_*^s + k/2}^{\infty} dk_2 \frac{W_{k_2}^l}{k_2^3} \cdot \frac{(2k_2^2 - 2kk_*^s - k^2)^2}{k_2^2 - 2kk_*^s} \right\}. \quad (4.106)$$

Если $k \gg k_*^s$, то

$$-\gamma_k^N = \frac{\pi (k_*^s)^2 \omega_{pe}}{2n_0 T_e} \left(\frac{W_{k/2}^l}{k} + \frac{k^3}{4} \int_{k/2}^{\infty} \frac{(2k_2^2 - k^2)}{k_2^7} W_{k_2}^l dk_2 \right). \quad (4.107)$$

Считая $W_k = \text{const} = \sqrt{\frac{2Q}{\alpha'}}$, имеем

$$-\gamma_k^N = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{(k_*^s)^2 \omega_{pe}}{n_0 T_e k} \sqrt{\frac{2Q}{\alpha'}}. \quad (4.108)$$

Таким образом, γ_k^N растет с падением k и достигает максимума при $k \sim k_*^s$. При $k \ll k_*^s$

$$-\gamma_k^N \approx \frac{\pi}{8} \cdot \frac{k \omega_{pe}}{n_0 T_e} W_{k_*^s}^l. \quad (4.109)$$

Оценка максимума инкремента

$$-(\gamma_k^N)_{\text{макс}} \approx \omega_{pe} \sqrt{\frac{\pi Q}{6n_0 T_e \omega_{pe}}}. \quad (4.110)$$

Поскольку зависимость от k в (4.109) и линейном инкременте одинакова, то доминирование (4.110) над линейным инкрементом в максимуме означает доминирование и при всех меньших k . Критерий доминирования (4.110) над γ_k^s есть *

$$Q > Q_{\text{кр}} = \frac{\omega_{pe} n_0 T_e}{12} \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^3. \quad (4.111)$$

* Число частиц N_D в сфере дебаевского радиуса должно удовлетворять порядковому неравенству $N_D < 1.21 \pi \Lambda (m_i/m_e)^3$.

Нелинейный инкремент (4.109) или (4.110) может оказаться большим ω_k^s . Это имеет место при

$$Q > \omega_{pe} n_0 T_e \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^2. \quad (4.112)$$

В этом случае вообще теряет смысл говорить об ионно-звуковых колебаниях, т. е. турбулентность на высокой частоте коренным образом меняет свойства плазмы на низкой частоте*. Подробно теория этих эффектов излагается в гл. 8.

Интерес представляет также величина нелинейного декремента для максимальных k порядка ω_{pe}/v_{Te} , когда максимум имеется в линейном затухании и линейном возбуждении. Для таких k плотность энергии ленгмюровских пульсаций $W_{k/2}^l$ не может быть большой ввиду большого затухания Ландау на электронах. Однако при $k \sim \frac{1}{4} \cdot \frac{\omega_{pe}}{v_{Te}}$, $\frac{k}{2} \sim \frac{1}{8} \cdot \frac{\omega_{pe}}{v_{Te}}$ и поглощение Ландау мало. Кстати, при $T_e \gg T_i$ области, где происходит трансформация энергии l -плазмонов на электронах, не существует и спектр высокочастотных пульсаций $W_k = \text{const}$ практически продолжается до k порядка ω_{pe}/v_{Te} и минимальные k лимитируются источниками и поглощением Ландау. Таким образом, полагая $k \sim \frac{1}{3} \cdot \frac{\omega_{pe}}{v_{Te}}$, получаем

$$\gamma_k^N \approx \frac{3v_{Te} (k^s)^2 \pi}{8n_0 T_e} \sqrt{\frac{2Q}{\alpha'}}. \quad (4.113)$$

Условие доминирования над линейным поглощением имеет вид

$$Q > \omega_{pe} n_0 T_e \frac{m_e}{m_i}. \quad (4.114)$$

Рассмотрим теперь вопрос о мощности источника Q_k^s возбуждения ионно-звуковой турбулентности ленгмюровской

$$Q_k^s = \frac{\omega_k^s}{2n_0 T_e} \int_0^\infty dk_1 \int_{(k_1-k)^2}^{(k_1+k_2)^2} dk_2^2 \frac{W_{k_1}^l W_{k_2}^l k_*^s}{k_1^3 k_2^4 \cdot 48} (k_1^2 + k_2^2 - k^2)^2 \times \\ \times \delta(k_1^2 - k_2^2 - 2kk_*^s). \quad (4.115)$$

* Более строго надо сравнивать не только γ_k^N с ω_k^s , но также нелинейный сдвиг частоты ω_k^N (см. гл. 8).

Это выражение аналогично (4.84), однако отличается от него тем, что частота и волновое число низкочастотных пульсаций связаны между собой соотношением $\omega_k^s = k v_s$. Полная мощность генерации ионно-звуковых колебаний

$$Q^s = \int Q_k^s dk. \quad (4.116)$$

Соотношение (4.115) удобно записать в виде

$$Q_k^s = \frac{\omega_k^s k_*^s}{96n_0 T_e} \int_{\frac{k}{2} + k_*^s}^{\infty} dk_1 W_{k_1}^l W^l \sqrt{\frac{k_1^2 - 2kk_*^s}{k_1^3 (k_1^2 - 2kk_*^s)^2}}. \quad (4.117)$$

Легко видеть, что как при $k \gg k_*^s$, так и при $k \ll k_*^s$ в (4.117) существенны значения $W_{k_1}^l$ и $W^l \sqrt{\frac{k_1^2 - 2kk_*^s}{k_1^3 (k_1^2 - 2kk_*^s)^2}}$ лишь при $k_1 \gg k_*^s$. Ана-

логично предыдущему имеется узкая область около $k = 2k_*^s$, когда в $W^l \sqrt{\frac{k_1^2 - 2kk_*^s}{k_1^3 (k_1^2 - 2kk_*^s)^2}}$ вклад могут вносить k , близкие к основному масштабу порядка k_0 . Поскольку исследование этой области производится аналогично, должна существовать специфическая концентрация энергии ионно-звуковых колебаний при $k \simeq 2k_*^s$.

В областях $k \gg k_*^s$ и $k \ll k_*^s$ в (4.117) можно вместо W_{k_1} и $W^l \sqrt{\frac{k_1^2 - 2kk_*^s}{k_1^3 (k_1^2 - 2kk_*^s)^2}}$ подставить значения $\sqrt{\frac{2Q}{\alpha'}}$. Получим после интегрирования по k_1

$$Q_k^s = \frac{\omega_k^s k_*^s Q}{48n_0 T_e \alpha'} \left\{ \frac{2}{\left(\frac{k}{2} + k_*^s\right)^2} - \frac{k^2}{\left(\frac{k}{2} + k_*^s\right)^4} + \frac{k^4}{6\left(\frac{k}{2} + k_*^s\right)^6} \right\}. \quad (4.118)$$

При $k \ll k_*^s$

$$Q_k^s = Q \frac{k}{k_*^s} \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \cdot \frac{27}{24\pi} \cdot \frac{v_{Te}^3}{\omega_{pe}^3}, \quad (4.119)$$

а при $k \gg k_*^s$

$$Q_k^s = \frac{3}{2\pi} Q \frac{k_*^s}{k} \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \cdot \frac{v_{Te}^3}{\omega_{pe}^3}. \quad (4.120)$$

Энергия ионно-звуковой турбулентности может быть найдена из (4.97)

$$W_k^s = \frac{4\pi k^2 \omega_k^s}{(2\pi)^3} N_k^s = -\frac{4\pi k^2 Q_k^s}{\gamma_k^s + \gamma_k^N}. \quad (4.121)$$

Если критерий (4.111) не выполнен и доминирует линейное затухание, то

$$W_k^s = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{Q}{k_*^2 v_{Te}} \delta; \quad (4.122)$$

$$\delta = \begin{cases} \frac{k^2}{(k_*)^2}; & k \ll k_*^s; \\ \frac{4}{3}; & k \gg k_*^s. \end{cases} \quad (4.123)$$

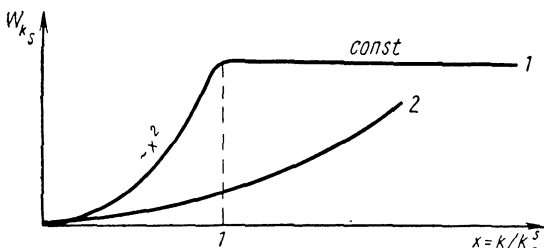


Рис. 4.6. Спектры ионно-звуковой турбулентности, возбуждаемой ленгмюровской турбулентностью. Кривая 1 соответствует $Q \ll Q_{кр}$; 2 — $Q \gg Q_{кр}$.

Если же критерий (4.111) выполнен, то

$$W_k^s = \frac{2\sqrt{2}m_e}{3m_i \sqrt{3\pi}} \cdot \frac{k^2}{(k_*^s)^3} n_0 T_e \sqrt{\frac{Q}{n_0 T_e \omega_{pe}}} \quad (4.124)$$

как при $k \ll k_*^s$, так и при $k \gg k_*^s$.

Характерный вид спектра при $Q \ll Q_{кр}$ и $Q \gg Q_{кр}$ изображен на рис. 4.6. При $Q \ll Q_{кр}$ основная энергия заключена в области $k > k_*^s$, играющей роль основного масштаба турбулентности ионно-звуковых пульсаций, причем $W^s \simeq Q m_i / \omega_{pe} m_e \ll W^l \simeq Q / v_e$, если $v_e / \omega_{pe} \ll m_e / m_i$, т. е. $N_D \gg \frac{m_i}{m_e} \ln \Lambda$.

При $Q \gg Q_{кр}$ оценка полной энергии ионно-звуковых колебаний имеет вид

$$\frac{W^s}{n_0 T_e} \approx \frac{m_e}{m_i} \sqrt{\frac{Q}{Q_{кр}}}; \quad \frac{W^s}{W^l} \approx \frac{v_e}{\omega_{pe}} \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^2 \sqrt{\frac{Q_{кр}}{Q}}. \quad (4.125)$$

Можно теперь поставить вопрос о том, оправдано ли предположение о $N_k^s \ll N_k^l$. При сравнимых волновых числах ионно-звуковых и ленгмюровских пульсаций отношение $\varepsilon = N_k^s/N_k^l$ для $Q \gg Q_{кр}$ при $k \gg k_*^s$ имеет порядок $\varepsilon \sim k_*^s/k_e$. Для сравнимых k_s и k_l $k \gg k_*^s$ невозможно, так как такое взаимодействие запрещено. Для $k_s \ll k_l$ воздействие s -волн на l -волны ослаблено в k_s^2/k_l^2 раз и согласно (4.123) $\varepsilon_{эфф} \approx \varepsilon k_s^2/k_l^2 \approx k_s/k_* \ll 1$. Точно так же можно проверить, что для $Q \ll Q_{кр}$

$$\varepsilon_{\text{макс}} \approx \sqrt{\frac{Q}{Q_{кр}}}. \quad (4.126)$$

Следует, наконец, рассмотреть узкую область волновых чисел ионно-звуковых пульсаций около $k = 2k_*^s$ с шириной $\Delta k \sim k_0$, когда вклад может давать основной масштаб ленгмюровской турбулентности. Имеем из (4.106) по порядку величины

$$\gamma_k^N \simeq \frac{k_*^s}{k_0} \omega_{pe} \frac{W}{n_0 T_e}; \quad (4.127)$$

$$Q_k^s \simeq \frac{v_{Te}^2}{k_*^s \omega_{pe}} W \sqrt{\frac{2Q}{\omega_{pe} n_0 T_e} \frac{k_0}{k_*^s}}, \quad (4.128)$$

т. е. при $\gamma_k^N \gg \gamma_k^s$ и $Q \gg Q_{кр}$ при $k = 2k_*^s$ имеется провал в спектре ионно-звуковых пульсаций, где интенсивность падает в $(k_0/k_*^s)^2$ раз.

§ 4.6. КОРРЕЛЯЦИИ И НЕЛИНЕЙНЫЕ СДВИГИ ЧАСТОТ ЛЕНГМЮРОВСКИХ ПУЛЬСАЦИЙ В ТУРБУЛЕНТНОЙ ПЛАЗМЕ

Корреляции ленгмюровских пульсаций специфичны ввиду запрета распадного взаимодействия трех ленгмюровских волн. Поэтому следует остановиться на этом вопросе, учитывая эффекты четырехплазмонных взаимодействий, играющих большую роль в формировании спектра ленгмюровской турбулентности.

Учтем влияние процессов четырехплазмонного взаимодействия на корреляционные эффекты. Опуская подробности расчетов, аналогичных § 2.5, отметим, что члены, пропорциональные $I_{k,r}^2$, должны быть включены в нелинейную проницаемость ε_k^N , которая учитывает, таким образом, и процессы четырехплазмонного взаимодей-

ствия. Результат расчетов имеет вид

$$I_k = \frac{32\pi^2}{\omega^2} \int \frac{|\sum_{i\bar{k}, \bar{k}_1, k_2, k_3}^{\text{эфф}}|^2 I_{k_1} I_{k_2} I_{k_3}}{|\varepsilon_{\bar{k}}^l + \varepsilon_{\bar{k}}^N|^2} \delta(k - k_1 - k_2 - k_3) dk_1 dk_2 dk_3. \quad (4.129)$$

В области, где четырехплазмонными взаимодействиями можно пренебречь, уравнение для I_k сводится к

$$I_k (\varepsilon_{\bar{k}}^l + \varepsilon_{\bar{k}}^N) = 0. \quad (4.130)$$

Это уравнение можно использовать при $k \gg k_*, k^*$. Оно имеет вид нелинейного дисперсионного уравнения

$$\varepsilon_{\bar{k}}^l I_k = \frac{8\pi i}{\omega} I_k \int \sum_{i\bar{k}, \bar{k}_1}^{\text{эфф}} I_{\bar{k}_1} dk_1; \quad (4.131)$$

$$\sum_{i\bar{k}, \bar{k}_1}^{\text{эфф}} = \sum_{k, k_1 | k, -k_1} - \frac{8\pi i S_{k-k_1, k, -k_1} S_{k, k_1, k-k_1}}{(\omega - \omega_1) \varepsilon_{k-k_1}^l}. \quad (4.132)$$

Отличие (4.130) от обычных дисперсионных соотношений состоит в том, что ни частота, ни волновой вектор по смыслу не могут быть комплексными (ω, k , входящие в действительную I_k , также действительны). Приравнивая действительные и мнимые части уравнения (4.131), получаем два уравнения:

$$\text{Re } \varepsilon_{\bar{k}}^l = - \int \text{Im } \sum_{i\bar{k}, \bar{k}_1}^{\text{эфф}} I_{\bar{k}_1} \frac{8\pi}{\omega} dk_1; \quad (4.133)$$

$$\text{Im } \varepsilon_{\bar{k}}^l = \int \text{Re } \sum_{i\bar{k}, \bar{k}_1}^{\text{эфф}} I_{\bar{k}_1} \frac{8\pi}{\omega} dk_1. \quad (4.134)$$

Конкретное приближенное выражение для $\sum_{i\bar{k}, \bar{k}_1}^{\text{эфф}}$ легко вычисляется, если считать, что $\omega \gg kv_{Te}$, $\omega_1 \gg k_1 v_{Te}$,

$$\frac{8\pi}{\omega} \sum_{i\bar{k}, \bar{k}_1}^{\text{эфф}} = \frac{i(k-k_1)^2}{4\pi\omega_{pe}^2 n_0 m_e} \cdot \frac{(kk_1)^2}{k^2 k_1^2} \cdot \frac{\varepsilon_{k-k_1}^{l(e)} \varepsilon_{k-k_1}^{l(i)}}{\varepsilon_{k-k_1}^{l(e)} + \varepsilon_{k-k_1}^{l(i)}}. \quad (4.135)$$

Рассмотрим уравнение (4.133), так как (4.134) описывает энергетический баланс, обсужденный выше. Выражение $\sum_{i\bar{k}, \bar{k}_1}^{\text{эфф}}$ весьма велико для малых $\omega - \omega_1$, а $I_{\bar{k}_1}$ имеет максимум при $\omega_1 = \omega_{k_1}$,

где имеет место $\text{Re } \varepsilon_{\bar{k}}^l \approx (\omega - \omega_k^l) \left. \frac{\partial \varepsilon_{\bar{k}}^l}{\partial \omega} \right|_{\omega = \omega_k^l} \approx \frac{2(\omega - \omega_k^l)}{\omega_{pe}}$. Обозна-

чим далее $\omega' = \omega - \omega_k^l$

$$-G_k = \text{Re} \frac{\varepsilon_k^{l(e)} \varepsilon_k^{l(i)} k^2}{\omega_{pe} \varepsilon_k^l 8\pi n_0 m_e} \approx \frac{\omega_{pe}}{8n_0 T_e} \cdot \frac{\varepsilon_k^{l(i)}}{\varepsilon_k^l}. \quad (4.136)$$

Тогда уравнение (4.20) запишется в виде

$$\omega' = \int W_{k_1 \omega_1}^l dk_1 d\omega_1 x_1^2 G_{\omega' - \omega_1 + \omega_k^l - \omega_{k_1}^l, |k - k_1|} dx_1; \quad (4.137)$$

$$x_1 = \cos(k, k_1),$$

где

$$W_{k, \omega'}^l = I_{k, \omega' + \omega_k^l} k^2; \quad W^l = \int W_{k, \omega}^l dk d\omega. \quad (4.138)$$

Заметим, что левая часть (4.137) не зависит от k , тогда как правая является функцией k . Поэтому ω' должно быть функцией k . Это возможно, если $W_{k, \omega'} = W_k \delta(\omega' - \omega_k^N)$, т. е. сокращение на I_k в (4.131) возможно лишь при $\omega' = \omega_k^N$. Это означает сохранение определенной зависимости частоты от k , но возникает нелинейный сдвиг частоты. Аргументом в пользу именно такой ситуации является баланс мнимых частей, описываемый (4.134), и, как следствие этого, $\gamma_k^l + \gamma_k^N = 0$. Пусть $T_e = T_i$, пренебрегая в правой части (4.136) ω' и ω_1 , получаем оценку ω_k^N

$$\omega_k^N \approx \omega_{pe} \sqrt{\frac{2Q}{\alpha}} \cdot \frac{k_*}{2n_0 T_e}, \quad (4.139)$$

что много меньше ω_{pe} и ω_k^N не зависит от k . Это оправдывает пренебрежение $\omega' - \omega_1$ в (4.137).

В изотермической плазме распады запрещены и корреляции пульсаций связаны только с четырехплазмонным взаимодействием. В области $k \gg k_*$ эти процессы сильно подавлены компенсацией двух типов четырехплазмонных взаимодействий, γ^N имеет оценку [210]

$$\gamma_k^N \approx \frac{\omega_{pe}}{4} \left(\frac{W_{k > k_*}}{n T_e} \right)^2 \left(\frac{k_*}{k} \right)^4 \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_{Te}^2} \approx v_e \frac{W}{n T_e} \frac{m_i}{m_e} \cdot \frac{k_g^2}{k_*^2} \cdot \frac{k^6}{k^6}, \quad (4.140)$$

т. е. меньше разности частот ленгмюровских волн $\omega_{pe} \frac{k^2}{k_*^2} \cdot \frac{m_e}{m_i}$

при выполнении следующего неравенства:

$$\frac{W}{n T_e} \ll \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^2 \left(\frac{\omega_{pe}}{v_e} \right) \left(\frac{k}{k_*} \right)^8 \left(\frac{k_*}{k_g} \right)^2 = \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^2 \frac{\omega_{pe}}{v_e} \begin{cases} \left(\frac{k_g}{k_*} \right)^6; & k = k_g \\ \left(\frac{k_*}{k_g} \right)^2; & k = k_*. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь корреляции при $k \ll k_*$. Пусть четырехплазменные процессы доминируют.

Для оценки γ_k^N , обязанного четырехплазменному взаимодействию, следует обратиться к уравнению (4.33), оставив только индуцированные процессы, пропорциональные W_k^I . Это значит, что необходимо произвести замену v и u в (4.34) и (4.35) величинами v' и u' :

$$\left. \begin{aligned} v' &= \frac{\xi^{\frac{v}{2}+1} - \eta^{\frac{v}{2}+1} - (1 + \xi - \eta)^{\frac{v}{2}+1}}{\eta^{\frac{v}{2}+2} \xi^{\frac{v}{2}+2} (1 + \xi - \eta)^{\frac{v}{2}+2}}; \\ u' &= \frac{(\xi + \eta - 1)^{\frac{v}{2}+1} - \xi^{\frac{v}{2}+1} - \eta^{\frac{v}{2}+1}}{\eta^{\frac{v}{2}+2} \xi^{\frac{v}{2}+2} (\xi - \eta - 1)^{\frac{v}{2}+2}}, \end{aligned} \right\} \quad (4.141)$$

а вместо (4.33) следует записать

$$\gamma_k^N = \frac{\pi}{6} \omega_{pe} \left(\frac{W}{8n_0(T_e + T_i)} \right)^2 \frac{\omega_{pe}^2 (v-1)^2}{k_0^2 v_{Te}^2} \xi_0^v (G'_1 + G'_2 + G'_3), \quad (4.142)$$

где G'_1, G'_2, G'_3 отличаются от G_1, G_2, G_3 заменой v и u величинами v' и u' . Ввиду иной структуры последних лишь область малых $\xi \sim \xi_0$ и $\eta \sim \xi_0$ дает вклад в G'_1 . Производя замену переменных в G'_3 ; $\eta' = \xi + \eta - 1$, легко видеть, что существенны лишь $\xi \sim \xi_0$, $\eta' \sim \xi_0$ и $G'_3 = 2G'_1$. Наконец,

$$G'_1 + G'_2 + G'_3 \simeq G'_1 + G'_3 \simeq 3G'_1 = - \frac{8(8v+5)}{5\xi_0^{v-1/2} v \left(\frac{v}{2} + 1 \right) \left(\frac{v}{2} - 1 \right)}. \quad (4.143)$$

Отсюда при $T_e = T_i$

$$\gamma_k^N = \omega_{pe} \frac{\omega_{pe}^2}{kk_0 v_{Te}^2} \left(\frac{W}{n_0 T_e} \right)^2 \xi, \quad (4.144)$$

где

$$\xi = \frac{\pi (v-1)^2 (8v+5)}{960v (v-1/2) \left(\frac{v}{2} + 1 \right)} = \begin{cases} 0,06; & v=3 \\ 0,025; & v=4. \end{cases} \quad (4.145)$$

Оценим γ_k^N для $k \sim k_0$.

Используя (4.75), получаем условие того, что γ_k^N не превосходит разности частот взаимодействующих волн порядка $\omega_{pe} \frac{k_0^2 v_{Te}^2}{\omega_{pe}^2}$,

$$k_0 > k_* \left(\frac{W}{n_0 T_e} \cdot \frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2} = k_* \left(\frac{Q}{Q_*} \cdot \frac{24}{\pi} \cdot \frac{m_i}{m_e} \cdot \frac{v_e}{\omega_{pe}} \right)^{1/2}, \quad (4.146)$$

или если $k_0 \ll k_*$; $\frac{W}{nT} < \frac{m_e}{m_i}$, $k_0 = k_* \left(\frac{Q_*}{Q} \right)^{\frac{1}{2(\nu-1)}}$,

то

$$Q_* < Q < Q_* \left(\frac{m_e \cdot \omega_{pe}}{m_i \cdot v_e} \right)^{\frac{\nu-1}{\nu}}. \quad (4.147)$$

Отсюда видно, что для наличия максимума при $k \sim k_0$ и спектра того вида, который описан в § 4.3, необходимо

$$\ln \Lambda \frac{m_i}{m_e} < N_D. \quad (4.148)$$

Впрочем, столкновения сказываются и в том, что все взаимодействия существенно меняются, когда разность частот взаимодействующих пульсаций становится сравнимой с частотой столкновений (см. § 4.7). Тогда для основного масштаба $\frac{k_0^2 v_{Te}^2}{\omega_{pe}} > v_e$ получим условия

$$Q_* < Q < Q_* \left(\frac{\omega_{pe} \cdot m_e}{v_e \cdot m_i} \right)^{(\nu-1)}, \quad (4.149)$$

что также требует выполнения (4.148).

§ 4.7. ВЛИЯНИЕ ПАРНЫХ СОУДАРЕНИЙ ЧАСТИЦ НА КОРРЕЛЯЦИИ И СПЕКТРЫ ЛЕНГМЮРОВСКОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Помимо учтенного выше тривиального влияния парных соударений на спектры турбулентности плазмы, связанного с поглощением энергии пульсаций, парные соударения могут изменить характер взаимодействия пульсаций между собой. Это имеет место в условиях, когда разность частот взаимодействующих волн может быть меньше частоты парных соударений. Точнее, должно осуществляться неравенство [215]

$$\max(\omega_1 - \omega_2, |\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2| v_{T\alpha}) < \nu_\alpha; \quad \alpha = e, i. \quad (4.150)$$

Здесь ν_e — полная частота соударений электронов и ν_i — ионов со всеми частицами плазмы (электронами, ионами, нейтралами).

Следует отметить, что парные соударения, согласно современным воззрениям [216], связаны с процессами флуктуаций электромагнитных полей. Однако частоты соответствующих флуктуационных полей много больше турбулентных частот и можно пользоваться обычным интегралом соударений. Учет коллективных эффектов (обмен плазмонами и спонтанное их излучение) дает в столкновениях малые поправки, лишь слегка изменяя значение кулоновского логарифма. Можно при этом использовать интеграл соударений в форме, полученной Л. Д. Ландау [217].

Задачей теории является вычисление нелинейных токов плазмы с учетом парных соударений частиц. Если известны нелинейные токи, то спектры турбулентности могут быть получены, например, из (4.131) или (4.129). Значения нелинейных токов с помощью кинетических уравнений были рассчитаны в работе [215].

В целях большей наглядности и выявления физического смысла результата удобно исходить из уравнений гидродинамики, полученных из кинетических уравнений с интегралом соударений Ландау в работе [218]. Для обоснования этого заметим, что в (4.132) лишь одна из частот нелинейных токов S попадает в гидродинамическую область (4.146), тогда как две другие находятся в области редких соударений. Уравнения гидродинамики предполагают, что все частоты находятся в области частых соударений. Несмотря на это, если отбросить все диссипативные члены, которые пренебрежимо малы в области высоких частот, из уравнений гидродинамики могут быть получены спектры ленгмюровских пульсаций. Эффекты теплового движения в нелинейных токах оказываются пренебрежимо малыми (так же, как и в бесстолкновительном случае). Что же касается частоты пульсаций, то при расчете нелинейного тока она произвольна, а конкретная зависимость $\omega = \omega_k^l$ (если пренебречь корреляциями) получается лишь после того, как I_h в (4.131) конкретизируется с помощью (2.51). В (2.51) естественно фигурируют частоты, правильно учитывающие тепловое движение. Строгое доказательство возможности использования гидродинамических взаимодействий состоит в совпадении расчетов с результатами кинетического рассмотрения [215].

Уравнения гидродинамики, которые следует использовать для вычисления нелинейных токов, имеют вид уравнений непрерывности

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} n_e \mathbf{v}_e = 0; \quad \frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} n_i \mathbf{v}_i = 0 \quad (4.151)$$

и гидродинамических уравнений для электронов и ионов:

$$m_e n_e \left(\frac{\partial}{\partial t} + \left(\mathbf{v}^{(e)} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \right) v_j^{(e)} = - \frac{\partial}{\partial x_j} n_e T_e - \frac{\partial \pi_{ij}^{(e)}}{\partial x_i} - \\ - en_e \left(E_j + \frac{1}{c} [\mathbf{v}^{(e)} \mathbf{H}]_j \right) + R_j; \quad (4.152)$$

$$m_i n_i \left(\frac{\partial}{\partial t} + \left(\mathbf{v}^{(i)} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \right) v_j^{(i)} = - \frac{\partial}{\partial x_j} n_i T_i - \frac{\partial \pi_{ij}^{(i)}}{\partial x_l} + \\ + en_i \left(E_j + \frac{1}{c} [\mathbf{v}^{(i)} \mathbf{H}]_j \right) - R_j, \quad (4.153)$$

где члены $\frac{\partial}{\partial x_j} nT$ описывают вклад давления газа электронов и ионов, а $\pi_{ij}^{(e)}$ и $\pi_{ij}^{(i)}$ — тензоры электронной и ионной вязкости

$$\left. \begin{aligned} \pi_{ij}^{(e)} &= -0,73 \frac{n_e T_e}{\nu_e} \omega_{ij}^{(e)}; \quad \pi_{ij}^{(i)} = -0,96 \frac{n_i T_i}{\nu_i} \omega_{ij}^{(i)}; \\ \omega_{ij} &= \frac{\partial}{\partial x_j} v_l + \frac{\partial}{\partial x_l} v_j - \frac{2}{3} \delta_{lj} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{v}, \end{aligned} \right\} \quad (4.154)$$

\mathbf{R} — сила трения между электронами и ионами

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_u + \mathbf{R}_T; \quad (4.155)$$

\mathbf{R}_u — сила относительного трения, зависящая лишь от относительной скорости электронов и ионов $\mathbf{u} = \mathbf{v}^{(e)} - \mathbf{v}^{(i)}$,

$$\mathbf{R}_u = -0,51 n_e m_e \nu_e \mathbf{u}; \quad \omega \ll \nu_e; \quad (4.156)$$

$$\mathbf{R}_u = -n_e m_e \nu_e \mathbf{u}; \quad \omega \gg \nu_e. \quad (4.157)$$

Различие в численных коэффициентах для $\omega \gg \nu_e$ и $\omega \ll \nu_e$ легко получить, если вычислить по теории возмущений силу трения между электронами и ионами из кинетического уравнения. Коэффициент 0,51 получен в гидродинамическом пределе в работе [218], \mathbf{R}_T — термосила

$$\mathbf{R}_T = -0,71 n_e \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} T_e. \quad (4.158)$$

Наконец, следует использовать уравнение баланса температуры электронов и ионов:

$$\frac{3}{2} n_e \left(\frac{\partial}{\partial t} + \left(\mathbf{v}^{(e)} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \right) T_e + n_e T_e \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{v}^{(e)} = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{q}^{(e)} - \\ - \pi_{ij}^{(e)} \frac{\partial v_l^{(e)}}{\partial x_j} + Q_e; \quad (4.159)$$

$$\frac{3}{2} n_i \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}^{(i)} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) T_i + n_i T_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{v}^{(i)} = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{q}^{(i)} - \\ - \pi_{ij}^{(i)} \frac{\partial v_l^{(i)}}{\partial x_j} + Q_i. \quad (4.160)$$

Здесь $\mathbf{q} = \mathbf{q}_u + \mathbf{q}_r$ — поток тепла;

$$\mathbf{q}_u^{(e)} = 0,71 n_e T_e \mathbf{u}; \quad \mathbf{q}_r^{(e)} = -3,16 \frac{n_e T_e}{m_e v_e} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} T_e; \quad (4.161)$$

$$\mathbf{q}^{(i)} = -3,9 \frac{n_i T_i}{m_i v_i} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} T_i; \quad Q_e = -(\mathbf{R}\mathbf{u}) - Q_i; \quad (4.162)$$

$$Q_i = 3 \frac{m_e}{m_i} n_e v_e (T_e - T_i). \quad (4.163)$$

Рассмотрим здесь лишь случай

$$\omega_1 - \omega_2 \gg 3 \frac{m_e}{m_i} v_e, \quad (4.164)$$

т. е. будем считать, что разность частот пульсаций хотя и меньше частоты парных соударений, однако превосходит характерную частоту $3 \frac{m_e}{m_i} v_e$, равную величине обратного времени выравнивания температур между электронами и ионами. Рассмотрим потенциальные пульсации ($\mathbf{H} = 0$). Разложим все величины по степеням электрического поля E . В S_{k-k_1} , k , k_1 частоты k и k_1 высокие и для величин первого порядка по полю можно пренебречь всеми членами правой части (4.152), за исключением $-enE$, а в левой — нелинейным членом и написать

$$\mathbf{v}_k^{(e)(1)} = \frac{e}{m_e i \omega} \mathbf{E}_k = \frac{ek}{m_e i \omega k} E_k = \frac{k}{k} v_k^{(e)(1)}. \quad (4.165)$$

Соответственно из уравнения непрерывности получим

$$n_{e,k}^{(1)} = n_0 \frac{k v_k^{(e)(1)}}{\omega}; \quad (4.166)$$

а из уравнения баланса энергии (4.159)

$$\frac{3}{2} n_e \frac{\partial T_e^{(1)}}{\partial t} + n_e T_e \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{v}^{(e)(1)} \approx -0,71 n_e T_e \frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial \mathbf{r}}; \quad (4.167)$$

$$u^{(1)} \approx v^{(e)(1)}; \quad T_{e,k}^{(1)} = \frac{2}{3} 1,71 \frac{T_{e,0} k v_k^{(e)(1)}}{\omega}. \quad (4.168)$$

Из выписанной выше системы уравнений легко составить соотношение, связывающее $\mathbf{v}_k^{(2)}$ с $\mathbf{v}_k^{(1)}$. Учтем, что частота и волновое число в $\mathbf{v}_k^{(2)}$ весьма малы и удовлетворяют (4.150). Этим можно воспользоваться, чтобы сразу отбросить ряд членов в уравнении для

$v_k^{(2)}$, имеющих относительный порядок $\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega}$ или более высокий порядок по $\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega}$, где ω — высокая частота порядка ω_{pe} , $\omega_1 - \omega_2 = \omega$, удовлетворяющая (4.150). Рассмотрим сначала уравнение баланса энергии электронного газа (4.159). При частотах $\omega \gg \frac{3m_e}{m_i} v_e$ обменом энергии между электронами и ионами можно пренебречь $Q_i \ll Q_e$, с другой стороны, $v^{(i)(1)} \approx \frac{m_e}{m_i} v^{(e)(1)}$ согласно (4.165), и, следовательно,

$$Q_e \approx -(\mathbf{Rv}^{(e)}) = 0,51 n_e m_e v_e (v^{(e)})^2. \quad (4.169)$$

Фурье-компонента Q_e имеет вид

$$\begin{aligned} Q_{e,k} &= 0,51 n_e m_e v_e \int v_{k_1}^{(e)(1)} v_{k_2}^{(e)(1)} \frac{(k_1 k_2)}{k_1 k_2} \delta(k - k_1 - k_2) dk_1 dk_2 = \\ &= 0,51 \frac{e^2 n_e v_e}{m_e^2} \int \frac{E_{k_1} E_{k_2}}{\omega_1 \omega_2} \cdot \frac{(k_1 k_2)}{k_1 k_2} \delta(k - k_1 - k_2) dk_1 dk_2. \end{aligned} \quad (4.170)$$

Этот нелинейный член является основным в уравнениях для $v_k^{(2)}$.

Для оценки остальных нелинейных членов надо иметь в виду, что Q_k пропорционально E^2/ω_{pe}^2 . Нелинейный член $n_e^{(1)} T_e \frac{\partial}{\partial r} v^{(e)(1)}$ согласно (4.166) $\sim (v^{(1)})^2 \omega_{pe}^{-1} \sim E^2/\omega_{pe}^3$, то же имеет место для $n_{e,0} T_{e,0}^{(1)} \frac{\partial}{\partial r} v^{(e)(1)}$ и $v^{(e)(1)} \frac{\partial}{\partial r} T_e^{(1)}$. Таким образом, в левой части (4.159) остаются лишь члены, линейные по возмущениям второго порядка. То же, как легко убедиться, верно для члена $\frac{\partial}{\partial r} q_e$. Наконец, $\pi_{ij}^{(e)(1)} \partial v_i^{(e)(1)}/\partial x_j$ имеет порядок $\frac{k^2 v_{Te}^2}{v_e} Q_e \ll \ll Q_e$ в силу (4.150), и этим членом можно пренебречь

$$\begin{aligned} \left(-\frac{3}{2} i\omega + 3,16 \frac{k^2 v_{Te}^2}{v_e} \right) \frac{T_{e,k}^{(2)}}{T_e^{(0)}} &= -ikv_k^{(e)(2)} - \\ &- 0,71 iku_k^{(2)} + \frac{1}{n_0 T_e^{(0)}} Q_{e,k}. \end{aligned} \quad (4.171)$$

Аналогичным образом получаем для ионов

$$\left(-\frac{3}{2} i\omega + 3,9 \frac{k^2 v_{Ti}^2}{v_i} \right) \frac{T_{ik}^{(2)}}{T_i^{(0)}} = -ikv_k^{(i)(2)}. \quad (4.172)$$

В уравнении движения электронов членом $\frac{\partial}{\partial x_j} n_e^{(1)} T_e^{(1)} \sim \frac{E^2}{\omega_{pe}^4}$

можно пренебречь, а $\pi_{ij}^{(e)}$ положить равным

$$\frac{-0,73n_{e,0} T_e^{(0)}}{v_e} \omega_{ij}^{(e) (2)}. \quad (4.173)$$

Сравнивая это с первым членом в выражении для силы трения

$$\mathbf{R} \approx -n_0 m_e v_e 0,51 \mathbf{u}^{(2)} - 0,71 n_0 \frac{\partial T_e}{\partial \mathbf{r}}, \quad (4.174)$$

убеждаемся, что он имеет относительную малость $k^2 v_{Te}^2 / v_e^2$ и должен быть отброшен. Окончательно уравнение для электронов с учетом нелинейного члена $\mathbf{v}^{(1)} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{v}^{(1)}$ запишется в виде

$$\left(-i\omega + i \frac{k^2 v_{Te}^2}{\omega} \right) \mathbf{v}_k^{(e) (2)} = -0,51 v_e \mathbf{u}_k^{(2)} - 1,71 i k v_{Te}^2 \frac{T_k^{(e) (2)}}{T_e^{(0)}} - i \int \frac{(k k_2) (k_1 k_2)}{k k_1 k_2} v_{k_1}^{(e) (1)} v_{k_2}^{(e) (1)} \delta(k - k_1 - k_2) dk_1 dk_2. \quad (4.175)$$

Сравним нелинейный член (4.175) с нелинейным членом (4.173). Если по порядку величины приравнять силу трения в (4.175) нелинейному члену, то

$$v_k^{(2)} \sim \frac{k}{v_e} \int v_{k_1}^{(e) (1)} v_{k_2}^{(e) (1)} dk_1 dk_2 \delta(k - k_1 - k_2), \quad (4.176)$$

и, приравнявая $k v_k^{(e) (2)}$ нелинейному члену $Q_{e,k} / n_0 T_e^{(0)}$, получаем

$$v_k^{(2)} \sim \frac{v_e}{k v_{Te}^2} \int v_{k_1}^{(e) (1)} v_{k_2}^{(e) (1)} \delta(k - k_1 - k_2) dk_1 dk_2,$$

т. е. величину, в $v_e^2 / k^2 v_{Te}^2 \gg 1$ раз большую. Таким образом, в уравнении (4.175) нелинейным членом можно пренебречь

$$\left(-i\omega + i \frac{k^2 v_{Te}^2}{\omega} \right) \mathbf{v}_k^{(e) (2)} = -0,51 v_e \mathbf{u}_k^{(2)} - 1,71 i k v_{Te}^2 \frac{T_{e,k}^{(2)}}{T_e^{(0)}}. \quad (4.177)$$

Аналогично для ионов получим

$$\left(-i\omega + 1,28 \frac{k^2 v_{Ti}^2}{v_i} + i \frac{k^2 v_{Ti}^2}{\omega} \right) \mathbf{v}_k^{(i) (2)} = -i k v_{Ti}^2 \frac{T_{i,k}^{(2)}}{T_i^{(0)}} + + 0,71 i k v_{Ti}^2 \frac{T_{e,k}^{(2)}}{T_i^{(0)}} = 0. \quad (4.178)$$

Одним из важных следствий проведенного анализа является вывод об изменении характера нелинейных взаимодействий в области, когда разность частот или одна из частот взаимодействующих пульсаций лежит в области частых соударений, т. е. удовлетворяет (4.150). Именно более важными становятся нелинейности, обязанные диссипативному нагреву плазмы пульсациями, нежели обычные нелинейности, возникающие из-за членов $(\mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \Gamma})\mathbf{v}$ в уравнениях движения частиц (см. работу [219]).

Система уравнений (4.171), (4.172), (4.177) и (4.178) легко решается и определяет ток

$$j_k^{(2)} = -en_0(v_k^{(e) (2)} - v_k^{(i) (2)}) = \int S_{k, k_1, k_2} E_{k_1} E_{k_2} \delta(k - k_1 - k_2) dk_1 dk_2 \quad (4.179)$$

Заметим, что в силу (4.166) член $e \int n_{k_1}^{(2)} v_{k_2}^{(1)} \delta(k - k_1 - k_2) \sim \frac{E^2}{\omega_{pe}^3}$

пренебрежимо мал. Обозначим $S_{k, k_1, k_2}^{(1)}$ компоненты нелинейного тока, симметризованного по k_1 и k_2 , для которого k соответствует низким частотам (4.150), а k_1 и k_2 — высоким частотам порядка частот турбулентных пульсаций. Пусть $S_{k, k_1, k_2}^{(2)}$ аналогичные компоненты, в которых одна из частот векторов k_1 и k_2 является низкой, а две остальные — высокими. Тогда

$$S_{k, k_1, -k_2}^{(1)} = i \frac{kn_0 e^3 1,71 v_e (k_1 k_2)}{m_e^2 \omega_{pe}^2 \Omega \Omega_e k_1 k_2} \quad (4.180)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= -i\omega + 0,51 v_e + i \frac{k^2 v_{Te}^2}{\omega} \left(1 - 2,96 \frac{i\omega}{\Omega_e} \right); \\ \Omega_e &= -\frac{3}{2} i\omega + 3,16 \frac{k^2 v_{Te}^2}{v_e}. \end{aligned} \right\} \quad (4.181)$$

Расчет $S_{k, k_1, k_2}^{(2)}$ несколько проще расчета $S_{k, k_1, k_2}^{(1)}$. Так как k соответствует высокой частоте, то для $v_k^{(2)}$ нужно использовать уравнения гидродинамики, выбросив все диссипативные члены и силы газового давления. Отсюда $v_k^{(e) (2)}$ пропорционально E^2/ω_{pe}^2 .

$$j_k^{(2)} = -en_0(v_k^{(e) (2)} - v_k^{(i) (2)}) = -e \int n_{k_1}^{(1)} v_{k_2}^{(1)} \frac{(kk_2)}{kk_2} \delta(k - k_1 - k_2) dk_1 dk_2$$

второй член содержит один из множителей низкой частоты и поэтому имеет порядок $E^2/\omega_{pe} \omega$.

Итак, с необходимой точностью

$$j_k^{(2)} = -e \int v_{k_2}^{(e) (1)} n_{e, k_1}^{(1)} \delta(k - k_1 - k_2) \frac{(kk_2)}{kk_2} dk_1 dk_2. \quad (4.182)$$

Далее легко понять, что в (4.182) существует лишь случай, когда $n_{ek}^{(1)}$ соответствует низкой частоте, а $v_{k_2}^{(e) (1)}$ — высокой. Это следует из соотношения (4.166), показывающего, что $n_{k_1}^{(1)}$ высокой частоты пропорционально $1/\omega_{pe}^2$. Воспользовавшись (4.166), можно записать

$$j_k^{(2)} = \frac{ie}{m_e} \int \frac{E_{k_2}}{\omega_{k_2}} n_{k_1}^{(1)} \frac{(kk_2)}{kk_2} \delta(k - k_1 - k_2) dk_1 dk_2. \quad (4.183)$$

Остается найти $n_k^{(1)}$ для низких частот, что легко делается линеаризацией записанных гидродинамических уравнений. Удобно записать результат для компонент нелинейного тока, поменяв обозначения $k \rightarrow k_1$:

$$S_{k_1, k_2, k}^{(2)} = \frac{-i e^3 k (k_1 k_2)}{m_e^2 \omega_{pe} \kappa \omega_e \omega k_1 k_2}, \quad (4.184)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \kappa &= 1 + \left(0,51 v_e + 1,22 \frac{k^2 v_{Te}^2}{\Omega_e} \right) \left(\frac{1}{\omega_e} + \frac{m_e}{m_i} \cdot \frac{1}{\omega_i} \right); \\ \omega_e &= -i\omega + i \frac{k^2 v_{Te}^2}{\omega} \left(1 - 1,71 \frac{i\omega}{\Omega_e} \right); \\ \omega_i &= -i\omega + i \frac{k^2 v_{Ti}^2}{\omega} \left(1 - i \frac{\omega}{\Omega_i} - 1,28 \frac{i\omega}{v_i} + 0,71 i \frac{T_e}{T_i} \cdot \frac{\omega}{\Omega_e} \right); \\ \Omega_i &= -\frac{3}{2} i\omega + 3,9 \frac{k^2 v_{Ti}^2}{v_i}. \end{aligned} \right\} \quad (4.185)$$

Из линеаризованной системы уравнений легко найти также линейную диэлектрическую проницаемость плазмы в области низких частот

$$\varepsilon_k^l = 1 + i \frac{\omega_{pe}^2}{\kappa \omega \omega_e} + i \frac{\omega_{pi}^2}{\kappa \omega \omega_i}. \quad (4.186)$$

Для окончательного вывода нелинейных уравнений необходимо найти компоненты нелинейного тока третьего порядка. Аргументы, которые использовались при получении (4.183), дают

$$j_k^{(3)} = \frac{ie^2}{m_e \omega} \int \frac{(kk_1)}{kk_1} E_{k_1} n_{k_2}^{(e) (2)} \delta(k - k_1 - k_2) dk_1 dk_2, \quad (4.187)$$

где $n_{k_2}^{(e) (2)}$ — возмущение плотности низких частот, легко получаемое из системы (4.170) — (4.178). Окончательно имеем

$$\frac{1}{2} (\sum_{k_1, k_2, k_1, -k_2} + \sum_{k_1, k_2, -k_2, k_1}) =$$

$$= - \frac{n_0 e^4 k_-^2 (k_1, k_2)^2 1,71 v_e}{\omega_- k_1^2 k_2^2 m_e^3 \omega_{pe}^3 \Omega \Omega_e}; \quad k_- = k_1 - k_2 \quad (4.188)$$

$$\omega_- = \omega_1 - \omega_2.$$

Эти результаты можно использовать для анализа роли соударений частиц при взаимодействии турбулентных пульсаций [216]. Заметим в первую очередь, что в области низких частот, удовлетворяющих

$$\max(\omega, kv_{T\alpha}) \ll v_\alpha, \quad (4.189)$$

всегда существуют колебания звукового типа — это обычные акустические колебания (правда, для их существования необходимо, чтобы длины волн были достаточно велики или частоты соударений велики: $k v_{T\alpha} \ll v_\alpha$). В этом существенное отличие области частот, меньших частот парных соударений, от области кинетической, когда звуковые колебания возможны лишь при $T_e \gg T_i$. В условиях (4.189) слабо затухающие звуковые колебания возможны при $T_e = T_i$. Считать $T_e \neq T_i$ для таких колебаний имеет смысл, если их частота много больше $3 \frac{m_e}{m_i} v_e$ — частоты, характеризующей выравнивание температур электронов и ионов. В сделанных утверждениях легко убедиться, решая дисперсионное уравнение $\epsilon_k^l = 0$, где ϵ_k^l есть (4.186).

Получим при $\omega_k^s v_e \ll k^2 v_{Te}^2$ (т. е. примерно $\omega^s \gg \frac{m_e}{m_i} v_e$, кроме того, единицей пренебрежем)

$$\omega = \omega_k^s = kv_s; \quad v_s = v_{Te} \sqrt{\frac{m_e}{m_i} \left(1 + \frac{5}{3} \cdot \frac{T_i}{T_e}\right)}. \quad (4.190)$$

Затухание этих колебаний определяется

$$\text{Im } \omega = \gamma_k^s = \gamma_k^{(e)} + \gamma_k^{(i)},$$

где $\gamma_k^{(e)}$ и $\gamma_k^{(i)}$ — соответственно затухания на электронах и ионах:

$$\gamma_k^{(e)} = -0,41 \frac{m_e}{m_i} v_e; \quad \gamma_k^{(i)} = - \frac{1,92 + 0,64 \frac{T_e}{T_i}}{\frac{5}{3} + \frac{T_e}{T_i}} \cdot \frac{k^2 v_{Ti}^2}{v_i}. \quad (4.191)$$

В области $\omega_k^s \nu_e \gg k^2 v_{Te}^2$ (низкочастотные акустические колебания $\omega_k^s \ll \frac{m_e}{m_i} \nu_e$ и, следовательно, $T_e = T_i$)

$$\omega_k^s = k v_s; v_s = v_{Ti} \sqrt{\frac{10}{3}}; \quad (4.192)$$

$$\gamma_k^{(e)} = -0,08 \frac{k^2 v_{Te}^2}{\nu_e}; \quad \gamma_k^{(i)} = -0,9 \frac{k^2 v_{Ti}^2}{\nu_i}. \quad (4.193)$$

В основном затухание этих колебаний происходит из-за электрон-ной теплопроводности.

При взаимодействии ленгмюровских пульсаций акустические колебания играют важную роль, так как именно распады на акустические колебания могут определять спектральную перекачку их энергии. Это имеет место лишь при $k > k_*^s \left(1 + \frac{5}{3} \cdot \frac{T_i}{T_e}\right)^{1/2}$

для (4.190) и при $k > k_*^s \sqrt{\frac{10}{3}}$ для (4.192) $k_*^s = \frac{\omega_{pe}}{3v_{Te}} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}$.

Только при этих условиях выполнены резонансные условия распада, когда $\varepsilon_{k-k_1}^l$ в (4.132) проходит через нуль. Используя для $\text{Im} \frac{1}{\varepsilon_{k-k_1}^l} = -\frac{\omega - \omega_1}{|\omega - \omega_1|} \pi \delta(\varepsilon_{k-k_1}^l)$, получаем с помощью конкрет-

ных выражений для $S_{k, k_1, k_2}^{(1)}$; $S_{k, k_1, k_2}^{(2)}$ при $\omega_k^s \gg \frac{m_e}{m_i} \nu_e$

$$2\nu_e W_k^l = \frac{\pi}{2} W_k^l \int W_{k_1}^l dk_1 \frac{\delta(\varepsilon_{k-k_1}^l) (\omega_1 - \omega) \nu_e^2 1,71 \omega_{pe}^3 (k_1 k)^2}{|\omega - \omega_1| 3,16 |k - k_1|^4 v_{Te}^4 n_0 T_e k^2 k_1^2} \quad (4.194)$$

и при $\omega_k^s \ll \frac{m_e}{m_i} \nu_e$

$$2\nu_e W_k^l = -0,05 \text{Im} W_k^l \int \frac{W_{k_1}^l dk_1 i \nu_e \omega_{pe}^3 (k_1 k)^2}{(\omega - \omega_1) \varepsilon_{k-k_1}^l n_0 T_e |k - k_1|^2 v_{Te}^2 k^2 k_1^2}. \quad (4.195)$$

При выводе (4.195) необходимо использовать более точные выражения для $S_{k, k_1, k_2}^{(1)}$ и $S_{k, k_1, k_2}^{(2)}$, учитывающие выравнивание температур, которые нетрудно найти с помощью описанной выше методики из гидродинамических уравнений.

Следует в первую очередь сравнить результат (4.194) с тем, который был получен в неизотермической плазме ($T_e \gg T_i$) для перекачки ленгмюровских волн при распаде на ионно-звуковые (4.99а). Если воспользоваться приближенным выражением для ди-

электрической проницаемости в области низких частот, следующим из (4.186),

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{k-k_1}^l &\approx \frac{\omega_{pe}^2}{|k-k_1|^4 v_{Te}^4} \cdot \frac{m_i}{m_e} \{ (\omega - \omega_1)^2 - (k - k_1)^2 v_s^2 \}; \\ v_s &= v_{Te} \sqrt{\frac{m_e}{m_i} \left(1 + \frac{5}{3} \cdot \frac{T_i}{T_e} \right)}, \end{aligned} \right\} \quad (4.196)$$

то нетрудно (4.194) записать в виде

$$\begin{aligned} 2v_e W_{\omega, k}^l &= 0,13 \pi W_{\omega, k}^l \int W_{\omega_1, k_1}^l dk_1 \frac{v_e^2}{|k-k_1|^2 v_{Te}^2} \omega_{pe} \frac{(kk_1)^2}{k^2 k_1^2} \times \\ &\times \frac{|k-k_1| v_s}{n_0 \left(T_e + \frac{5}{3} T_i \right)} [\delta(\omega - \omega_1 + |k - k_1| v_s) - \delta(\omega - \omega_1 - |k - k_1| v_s)]. \end{aligned} \quad (4.197)$$

Для сравнения удобно (4.99а) привести к виду

$$\begin{aligned} v_e W_{\omega, k}^l &= \frac{\pi}{4} W_{\omega, k}^l \int W_{\omega_1, k_1}^l d\omega_1 dk_1 \omega_{pe} \frac{(kk_1)^2}{k^2 k_1^2} \times \\ &\times \frac{|k-k_1| v_s}{n_0 T_e} [\delta(\omega - \omega_1 + |k - k_1| v_s) - \delta(\omega - \omega_1 - |k - k_1| v_s)]. \end{aligned} \quad (4.198)$$

Здесь $v_s = \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} v_{Te}$ и совпадает с v_s в (4.196) лишь при $T_e \gg T_i$.

Уравнение (4.198) также несколько точнее (4.99а), так как не предполагает δ -образными корреляции. Самое существенное различие (4.197) и (4.198) в появлении в (4.197) большого фактора $0,54 \frac{v_e^2}{|k-k_1|^2 v_{Te}^2}$. Интегрирование в (4.197) происходит по области,

удовлетворяющей неравенствам (4.150), тогда как в (4.198) по области, удовлетворяющей противоположным неравенствам. Хотя первая область меньше второй, фактор $v_e^2/|k-k_1|^2 v_{Te}^2$ может скомпенсировать это различие, и поэтому столкновения частиц могут существенно влиять на взаимодействие ленгмюровских пульсаций. Здесь следует сразу выделить, по крайней мере, два обстоятельства.

Во-первых, звуковые пульсации имеют, как правило, довольно большие длины волн и соответственно для проявления взаимодействия (4.197) необходимо, чтобы характерные размеры a объема, который занимает плазма, или ее плотность были достаточно велики. Если для $k \sim 1/a$ условия $\omega, k v_{Te} \ll v_a$ не выполняются, то акустические колебания не существуют и взаимодействие (4.197)

не имеет места. Во-вторых, парные столкновения сказываются на квазистационарных спектрах, если характерные времена их существования много больше частоты парных соударений. Если источник турбулизации плазмы действует в течение времени, меньшего $1/\nu_e$, то столкновения не могут существенно сказаться на спектрах. Формально же это видно из того, что нестационарность пульсаций приводит к зависимости W от двух ω (или $W_h(t, t')$) и зависимость от $\frac{\omega + \omega' }{2}$ дает «размазку», большую частот ν_α , если турбулентность нестационарна за времена, меньшие $1/\nu_\alpha$. Наконец, корреляции турбулентных пульсаций размазывают по частотам спектры пульсаций и уменьшают относительное число волн, удовлетворяющих (4.150) даже в условиях полной стационарности турбулентности.

Выпишем взаимодействие (4.195), используя конкретное выражение для $\epsilon'_k - k_1$,

$$2\nu_e W_{\omega, \mathbf{k}}^l = 0,05 \nu_e W_{\omega, \mathbf{k}}^l \int \frac{W_{\omega_1, \mathbf{k}_1}}{\omega_1 - \omega} \cdot \frac{2,14 \omega_{pe}}{[(\omega - \omega_1)^2 - |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1|^2 v_s^2]} \times \\ \times [(\omega - \omega_1)^2 - 1,19 |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1|^2 v_{Ti}^2] \frac{(\mathbf{k}\mathbf{k}_1)^2}{k^2 k_1^2} d\omega_1 d\mathbf{k}_1. \quad (4.199)$$

Из сравнений с (4.198) видно, что и в этом случае эффективность взаимодействия возрастает в $\frac{\nu_e}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}_1| v_s} \gg 1$ раз. Относительная доля волн, разности частот которых удовлетворяют условию $|\omega - \omega_1| \ll 3 \frac{m_e}{m_i} \nu_e$, необходимому для справедливости (4.199), существенно меньше, чем число волн, удовлетворяющих (4.150).

Ограничимся рассмотрением взаимодействия (4.197). Составим уравнение баланса, проинтегрировав (4.198) по частоте,

$$2\nu_e W_{\mathbf{k}}^l = 2\nu_e \int W_{\omega, \mathbf{k}}^l d\omega = 0,13 \pi \int W_{\omega, \mathbf{k}}^l W_{\omega_1, \mathbf{k}_1}^l d\omega d\omega_1 d\mathbf{k}_1 \times \\ \times \frac{\nu_e^2}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}_1|^2 v_{Te}^2} \omega_{pe} \frac{(\mathbf{k}\mathbf{k}_1)^2}{k^2 k_1^2} \cdot \frac{|\mathbf{k} - \mathbf{k}_1| v_s}{n_0 \left(T_e + \frac{5}{3} T_i \right)} \times \\ \times [\delta(\omega - \omega_1 + |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1| v_s) - \delta(\omega - \omega_1 - |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1| v_s)]. \quad (4.200)$$

Будем считать, что $|\mathbf{k} - \mathbf{k}_1| v_s$ удовлетворяет условию (4.150). Интегрирование по ω и ω_1 в (4.200) происходит в таком интервале, где $\omega - \omega_1$ может быть больше $|\mathbf{k} - \mathbf{k}_1| v_s$. В этих условиях можно использовать разложение δ -функций

$$\delta(\omega - \omega_1 \pm |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1| v_s) \approx \delta(\omega - \omega_1) \pm |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1| v_s \delta'(\omega - \omega_1). \quad (4.201)$$

Получаем

$$2\nu_e W_k^l = \omega_{pe} \frac{0,54 \pi \nu_e^2}{2} \int W_{\omega, k}^l \frac{\partial W_{\omega, k_1}^l}{\partial \omega} \times \\ \times \frac{d\omega m_e}{n_0 T_e m_i} \frac{(kk_1)^2}{k^2 k_1^2} dk_1. \quad (4.202)$$

Дальнейший ход расчетов зависит от соотношения между корреляционной шириной γ_k^N и частотой $|\mathbf{k} - \mathbf{k}_1| v_s$. Предположим, что в соответствии с выявленным выше характером зависимости корреляционных функций от частоты

$$W_{\omega, k}^l = \frac{1}{\pi} W_k^l \frac{\gamma_k^N}{(\omega - \omega_k)^2 + (\gamma_k^N)^2}, \quad (4.203)$$

так что $\int W_{\omega, k}^l d\omega = W_k^l$. Воспользовавшись соотношением

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{\gamma_k^N \gamma_{k_1}^N d\omega}{[(\omega - \omega_{k_1})^2 + (\gamma_{k_1}^N)^2] [(\omega - \omega_k)^2 + (\gamma_k^N)^2]} = \\ = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\gamma_{k_1}^N + \gamma_k^N}{[(\omega_{k_1} - \omega_k)^2 + (\gamma_k^N + \gamma_{k_1}^N)^2]}, \quad (4.204)$$

получим

$$2\nu_e = 0,54 \omega_{pe} \nu_e^2 \int \frac{m_e W_{k_1}^l dk_1 (kk_1)^2 (\omega_{k_1} - \omega_k) (\gamma_k^N + \gamma_{k_1}^N)}{m_i k^2 k_1^2 n_0 T_e [(\omega_{k_1} - \omega_k)^2 + (\gamma_k^N + \gamma_{k_1}^N)^2]^2}. \quad (4.205)$$

Интегрирование по k_1 в (4.205) должно быть распространено лишь на те значения k_1 , для которых $|\mathbf{k} - \mathbf{k}_1| v_s < \nu_e$, ν_i и выполнено (4.150).

Будем считать $T_e = T_i$. Тогда $\nu_s \sim \nu_{Ti}$ и $\nu_i \sim \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \nu_e$, т. е. при

$$|\mathbf{k} - \mathbf{k}_1| v_s < \nu_i. \quad (4.206)$$

выполнены все условия (4.150).

Если $k v_s \gg \nu_i$, то (4.206) выполняется лишь при k_1 , близких к k , и при $k = k_1$, если угол \mathbf{k} и \mathbf{k}_1 удовлетворяет соотношению $\theta < \sqrt{2} \nu_i / k v_s = \theta_{\text{макс}}$. Разница абсолютных значений волновых чисел $\Delta k = k - k_1$ также не должна превосходить ν_i / v_s , следова-

тельно, $\Delta\omega = \omega_{k_1} - \omega_k \approx \frac{3v_{Te}^2}{\omega_{qe}} k \frac{v_i}{v_s}$. Когда $\Delta\omega$ много больше корреляционной ширины γ_k^N , то правая часть (4.205) имеет оценку

$$m_e \omega_{pe} v_e^2 \frac{\partial}{\partial \omega_k} \int \frac{W_{k_1} \delta(\omega_k - \omega_{k_1}) dk_1}{m_i n_0 T_e} \theta_{\max}^2 \simeq \simeq \frac{\omega_{pe}^3}{18} \cdot \frac{v_e^4}{k^3 v_{Te}^6} \cdot \frac{\partial}{\partial k} \cdot \frac{W_k}{k} \cdot \frac{m_e}{m_i n_0 T_e}. \quad (4.207)$$

Сравнивая коэффициент в (4.207) с коэффициентом α в (4.62), получаем, что столкновения будут определять взаимодействия лишь при

$$\frac{v_e^4}{k^4 v_{Te}^4} > 1. \quad (4.208)$$

Это условие может быть выполнено лишь в весьма плотной плазме. Условия плотной плазмы встречаются в экспериментах по лазерной искре [190, 194] или в экспериментах, в которых плазма создается при взаимодействии луча лазера с поверхностью твердых тел.

Заметим, что если $\Delta\omega \sim \frac{3v_{Te}}{\omega_{pe}} kv_e \ll \gamma_k^N$, то взаимодействие (4.205) сильно ослабляется, примерно в $(\Delta\omega/\gamma_k^N)^3$ раз. Пусть $kv_s \ll v_i$. Для $k = k_*$ это означает $N_D < m_i/m_e$, и тогда в (4.205) можно провести интегрирование по углам. Если при этом

$$\frac{3v_{Te} kv_e}{\omega_{pe}} > \gamma_k^N, \quad (4.209)$$

то уравнение (4.205) приобретает вид

$$2v_e = 0,54 \frac{v_e^2 \omega_{pe}^3}{72 k} \cdot \frac{\partial}{\partial k} \cdot \frac{W_k}{k} \frac{1}{n_0 T_e} \cdot \frac{m_e}{m_i v_{Te}^4}. \quad (4.210)$$

Решение (4.209) легко находится. В частности, если турбулентность достаточно сильная и левую часть (4.209) можно положить равной нулю, то

$$W_k = k \sqrt{\frac{288 m_i Q n_0 T_e v_{Te}^4}{m_e 0,54 \omega_{pe}^3 v_e^2}} \quad \text{при} \quad k \ll k_g. \quad (4.211)$$

Парные соударения могут быть особенно существенными для больших фазовых скоростей, так как с ростом фазовых скоростей улучшаются возможности выполнения условий (4.150). Известно,

что с ростом мощности генерации Q максимум в спектре турбулентности сдвигается в область больших фазовых скоростей. Можно думать, что с увеличением Q роль столкновений возрастает. Однако при $k > k_*$ взаимодействия могут быть резонансными и соответствовать распаду на акустические колебания. Нерезонансный характер взаимодействия сказывается в том, что (4.188) начинает вносить вклад, сравнимый с $S^{(1)} \frac{1}{e} S^{(2)}$, и происходит существенное уменьшение $\Sigma^{\text{эф}}$ [см. (4.132)] из-за компенсации двух членов

$$\Sigma_{k_1, k_2}^{\text{эф}} \simeq -i \frac{(k_1 k_2)^2 1,71 v_e e^2 (k_1 - k_2)^2 e_{k_1 - k_2}^{(i)}}{k_1^2 k_2^2 \omega_{pe} (\omega_1 - \omega_2) \Omega \Omega_e m_e^2 e_{k_1 - k_2}^l}. \quad (4.212)$$

Мнимая часть $\Sigma_{k_1, k_2}^{\text{эф}}$ играет роль аналога рассеяния на электронах и ионах. Однако если рассеяние связано с бесстолкновительным затуханием Ландау виртуальной волны частоты $\omega_1 - \omega_2$, то взаимодействие, описываемое (4.212), соответствует затуханию виртуальной волны из-за парных соударений. Отметим, что во многих случаях характерное время трансформации оказывается меньшим v_e^{-1} при $\frac{W}{n_0 T_e} \ll 1$ и, тем самым, относительный вклад парных соударений во взаимодействие невелик [215]. Наиболее существенным эффектом оказывается нелинейный сдвиг частот, описываемый действительной частью (4.212). Он существенно зависит от k . Действительно, при $|\omega_1 - \omega| \ll \frac{|k_1 - k|^2 v_{Te}^2}{v_e}$ получим из (4.212)

$$\omega_k^N = -\omega_{pe} \int \frac{1,71 v_e^2 W_{k_1}^l dk_1 (kk_1)^2}{v_{Te}^2 |k - k_1|^2 k^2 k_1^2 n_0 T_e \left(1 + \frac{T_i}{2,14 T_e}\right)}, \quad (4.213)$$

а при $|\omega_1 - \omega| \gg |k_1 - k|^2 v_{Te}^2 / v_e$

$$\omega_k^N = \omega_{pe} \int \frac{W_{k_1}^l dk_1 3,84 |k - k_1|^2 v_{Te}^2}{(\omega_1 - \omega)^2 n_0 T_e \left(2,14 + \frac{T_i}{T_e}\right)}. \quad (4.214)$$

Из (4.213) и (4.214) следует, что сдвиг частоты увеличивается на большой параметр $\frac{v_e^2}{|k - k_1|^2 v_{Te}^2} \gg 1$ при $|\omega_1 - \omega| \ll \frac{|k_1 - k|^2 v_{Te}^2}{v_e}$,

а затем падает с ростом разности частот. Поэтому при интенсивной турбулентности в области $k v_{Te} \ll v_e$, когда взаимодействующие волны при любых углах распространения и разности волновых чисел Δk порядка k находятся в области частых соударений ($|\omega_{k_1}^l - \omega_k^l| < v_e$), порядок величины разности частот взаимо-

действующих пульсаций есть

$$\Delta\omega \approx \frac{k^2 v_{Te}^2}{v_e}. \quad (4.215)$$

Это намного больше бесстолкновительной разности частот $\Delta\omega \sim \frac{3k^2 v_{Te}^2}{\omega_{pe}}$ и всегда меньше v_e в силу $\frac{k^2 v_{Te}^2}{v_e^2} \ll 1$. Такая ситуация имеет место, если в области максимума спектра

$$\frac{W}{nT} \geq \frac{k^4 v_{Te}^4}{v_e^4} \cdot \frac{v_e}{\omega_{pe}}. \quad (4.216)$$

Увеличение разности частот взаимодействующих пульсаций имеет важное значение во многих отношениях. Во-первых, эту разность частот следует сравнивать с корреляционным уширением [см. (4.209)] и увеличение $\Delta\omega$ облегчает соответствующие условия. В условиях, когда дисперсионные эффекты определяются нелинейным эффектом, изменяются и взаимодействия (4.210), записанные для линейной дисперсии $\left(\omega_k^l = \omega_{pe} + 3 \frac{k^2 v_{Te}^2}{2\omega_{pe}} \right)$. Во-вторых, увеличение разности частот скажется на оценке роли корреляционных эффектов в четырехплазмонном взаимодействии (см. § 4.6). Однако соударения меняют также интенсивность четырехплазмонных взаимодействий, вероятность которых определяется вычисленным выше $\Sigma^{\text{эфф}}$ [см. (4.212)]. Результирующее уравнение баланса, используя выражение для $\Sigma^{\text{эфф}}$, можно записать через вероятность четырехплазмонного взаимодействия в стандартном виде

$$2v_e N_k^l = \int \omega_{ll}^{ll}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) (N_{k_1}^l N_{k_2}^l N_{k_3}^l + N_k^l N_{k_2}^l N_{k_3}^l - N_k^l N_{k_1}^l N_{k_2}^l - N_k^l N_{k_1}^l N_{k_3}^l) \frac{dk_1 dk_2 dk_3}{(2\pi)^9}, \quad (4.217)$$

где

$$\begin{aligned} \omega_{ll}^{ll}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) &= \frac{(2\pi)^9 e^4}{(4\pi)^3 m_e^4} \times \\ &\times \left| \frac{1,71 v_e k_-^2}{\omega_- \Omega \Omega_e} \cdot \frac{\varepsilon_{k_-}^{l(i)}}{\varepsilon_{k_-}^l} \cdot \frac{(\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2)}{k_1 k_2} \cdot \frac{(\mathbf{k}_3 \mathbf{k})}{k_3 k} + \mathbf{k} \leftrightarrow \mathbf{k}_1 \right|^2 \times \\ &\times \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \delta(\omega_k^N + \omega_{k_1}^N - \omega_{k_2}^N - \omega_{k_3}^N), \quad (4.218) \end{aligned}$$

$$k_- = \{\omega_{k_1}^N - \omega_{k_2}^N, \quad \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2\}. \quad (4.219)$$

В области $k \gg k_*$; $\varepsilon_{k-}^{(i)} \approx \varepsilon_{k-}^l$ отличие вероятности (4.228) от бесстолкновительной состоит лишь в множителе

$$v_{Te}^4 \left| \frac{1,71 v_e k_-^2}{\omega_- \Omega \Omega_e} \right|^2, \quad (4.220)$$

который при $\omega_- \gg \frac{k_-^2 v_{Te}^2}{v_e}$ имеет вид

$$0,29 \frac{v_e^4}{k_-^4 v_{Te}^4}. \quad (4.221)$$

Этот фактор весьма велик, так как

$$\frac{v_e}{k v_{Te}} \gg 1, \quad (4.222)$$

и физически это означает сильное увеличение расталкивания плазмонов.

Предположим, что мощность генерации турбулентности достаточно велика, так что максимум в спектре по оценкам, соответствующим бесстолкновительному пределу, подходит или расположен в области, где выполнены условия (4.150). Пренебрежем здесь так называемой эстафетной трансформацией энергии. Тогда, грубо говоря, при $k v_{Te} \sim v_e$, т. е. при

$$\frac{v_p}{v_{Te}} \simeq \frac{\omega_{pe}}{v_e} \sim N_D, \quad (4.223)$$

включаются эффекты столкновений. Фактически они могут быть существенны значительно раньше, и эстафетная перекачка сглаживает переход. Когда v_p меньше предела (4.223), то четырехплазменное взаимодействие хотя и разбрасывает плазмоны по волновым числам, но оно не в состоянии остановить систематический поток энергии, обязанный рассеянию на ионах. Если v_p переходит предел (4.223), то систематический поток резко уменьшается и становится пренебрежимо малым по сравнению с тривиальным поглощением пульсаций из-за парных соударений. Бесстолкновительный поток может остановиться раньше предела (4.223) при малой мощности генерации. Если этого не произошло, то он должен остановиться при v_p , соответствующем (4.223).

Можно сказать, что взаимодействие (4.217) описывает дробление масштабов турбулентных пульсаций*. Поток энергии, подходя

* Для бесстолкновительной области укрупнение масштабов сопровождалось ростом энтропии из-за бесстолкновительности нагрева ионов плазмы.

к значению масштабов, определяемых (4.223), как бы наталкивается на эффективную стенку и останавливается. Эстафетные процессы могут существенно уменьшить значение критических фазовых скоростей, при которых возникает такая ситуация [216].

§ 4.8. СПЕКТРЫ ИОННО-ЗВУКОВОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

В отличие от проведенного выше анализа здесь будем считать, что источник турбулентности возбуждает ионно-звуковые колебания. Появление же других типов пульсаций представляет собой эффект взаимодействия пульсаций между собой. Вначале рассмотрим случай, когда возбуждены лишь ионно-звуковые пульсации (что имеет место в изотропной плазме).

Как показано в § 2.8, взаимодействие пульсаций определяется ионами, нелинейный ток Σ для которых имеет вид

$$\sum_{k, k_1, k, -k_1}^{(i)} + \sum_{k, k_1, -k, k}^{(i)} = \frac{\pi e^4 \omega (kk_1)^2}{m_i^2 k^2 k_1^2} \times \int \frac{dp}{(2\pi)^3} \cdot \frac{\delta(\omega - \omega_1 - (k - k_1)v)}{(\omega - kv)^4} \left((k - k_1) \frac{\partial f^{R(i)}}{\partial p} \right). \quad (4.224)$$

Весь эффект в силу доказанного выше сводится к индуцированному рассеянию ионно-звуковых колебаний на ионах плазмы и может быть найден через вероятность рассеяния. Величина $\Sigma^{\text{эфф}}$, входящая в нелинейное взаимодействие, отличается от (4.224) тем, что вместо

$\frac{1}{(\omega - kv)^4}$ необходимо поставить

$$\left[\frac{1}{(\omega - kv)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right]^2. \quad (4.225)$$

Первый член в квадратных скобках учитывает комптоновское рассеяние, описываемое (4.224), а второй — нелинейное рассеяние. В пределе $T_e \gg T_i$, когда только и существуют ионно-звуковые колебания,

$$\Sigma_{k, k_1}^{\text{эфф}} = \frac{2e^4 \pi (k, k_1)^2}{m_i^2 k_1^2 \omega^2 \omega_1^3 k^2} \int (kv)^2 \delta(\omega - \omega_1 - (k - k_1)v) \times \times \left((k - k_1) \frac{\partial f^{R(i)}}{\partial p} \right) \frac{dp}{(2\pi)^3} \approx \frac{\omega_{pi}^4 T_i (kk_1)^2 [kk_1]^2}{8\pi \omega^2 n_0 m_i^2 k^2 k_1^2 \omega_1^3} \delta'(\omega - \omega_1). \quad (4.226)$$

Отсюда

$$-2\gamma_k^s I_k = I_k \int \frac{8\pi \text{Re} \Sigma_{k, k_1}^{\text{эфф}} I_{k_1} dk_1}{\left| \omega \frac{\partial \epsilon_k^I}{\partial \omega} \right|_{\omega = \omega_k^s}}. \quad (4.227)$$

Здесь γ_k^s — линейное затухание Ландау ионно-звуковых волн плюс инкремент неустойчивости, приводящей к возбуждению ионно-звуковых колебаний. Если корреляциями ионно-звуковых колебаний можно пренебречь, то

$$I_{k_1} = \frac{2\pi (\omega_{k_1}^s)^2}{\omega_{pi}^2} \{ W_{k_1}^s \delta(\omega_1 - \omega_{k_1}^s) + W_{-k_1}^s \delta(\omega_1 + \omega_{k_1}^s) \} \quad (4.228)$$

и уравнение (4.227) приобретает вид

$$-2\gamma_k^s W_k^s = W_k^s \int dk_1 W_{k_1}^s 2\pi \frac{(kk_1)^2}{k^2 k_1^2} [kk_1]^2 \frac{T_i \delta'(\omega_k^s - \omega_{k_1}^s)}{m_i^2 n_0 \omega_{k_1}^s}. \quad (4.229)$$

Для изотропной турбулентности легко получим

$$-2\gamma_k^s = \frac{4\pi T_i}{15 m_i^2 n_0} \cdot \frac{k^2}{\frac{d\omega_k^s}{dk}} \cdot \frac{d}{dk} \left(\frac{W_k^s}{\omega_k^s} \cdot \frac{k^2}{\frac{d\omega_k^s}{dk}} \right). \quad (4.230)$$

Взаимодействие (4.229) было найдено впервые в работе [220], а анализ спектров колебаний для слабоионизованной плазмы дан в работе [6].

Рассмотрим область, в которой имеются лишь затухания Ландау и нелинейная перекачка колебаний, т. е. отсутствует генерация (имеющая место при больших значениях волновых чисел). Тогда из (4.230) следует

$$W_k^s = \frac{15}{4 \sqrt{2\pi}} \cdot \frac{T_e}{T_i} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \cdot \frac{1}{k} n_0 T_e \ln \frac{k}{k_0}. \quad (4.231)$$

Значение $k = k_0$ соответствует точке, в которой энергия турбулентности обращается в нуль. Величина k_0 близка к максимуму в спектре, который достигается при $k = k_{0e}$, где e — основание натуральных логарифмов (рис. 4.7). Общая энергия, заключенная в ионно-звуковых колебаниях, составляет

$$\frac{W^s}{n_0 T_e} = \int_{k_0}^{k_g} \frac{W_k^s dk}{n_0 T_e} = \frac{15}{8 \sqrt{2\pi}} \ln^2 \frac{k_g}{k_0} \cdot \frac{T_e}{T_i} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}. \quad (4.232)$$

Величина k_g определяется значением волновых чисел, для которых генерация превосходит поглощение Ландау. Если область генерации очень узкая от k_g до $k_g + \Delta k_g$, то в этой области инкремент можно приближенно заменить его средним значением γ_g . Предпо-

ложив, что $\gamma_g \gg \gamma_k^s$, легко получить в этой области

$$W_k^s = \frac{15 m_i n_0 T_e \gamma_g (k_g + \Delta k_g - k)}{T_i 4\pi k_g^3} \sqrt{\frac{T_e}{m_i}}, \quad (4.233)$$

и мощность генерации турбулентности есть

$$Q = \int_{k_g}^{k_g + \Delta k_g} \gamma_g W_k^s dk = \frac{15 m_i n_0 T_e}{T_i (4\pi) k_g^3} \cdot \frac{\gamma_g^2 \Delta k_g^2}{2} \sqrt{\frac{T_e}{m_i}} \quad (4.234)$$

и

$$W_{k=k_g} = \sqrt{\frac{Q 15 m_i n_0 T_e v_s}{2 T_i \pi k_g^3}}. \quad (4.235)$$

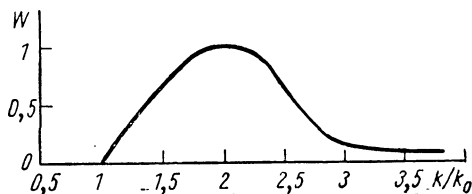


Рис. 4.7. Спектр ионно-звуковых колебаний, возникающий как результат баланса нелинейной трансформации энергии по спектру и затухания Ландау

$$\left(W = \frac{4W_k^s \sqrt{2\pi} T_i}{15T_e^2 n_0 k_0} \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \right).$$

Это позволяет с помощью сшивки с (4.231) найти зависимость k_0 от Q :

$$\ln \frac{k_g}{k_0} = \sqrt{\frac{Q}{Q_*^s}}; \quad (4.236)$$

$$Q_*^s = \frac{15}{16} k_g v_s n_0 T_e \frac{m_e}{m_i} \cdot \frac{T_e}{T_i}. \quad (4.237)$$

Таким образом, полная энергия турбулентности выражается через мощность генерации следующим образом:

$$\frac{W^s}{n_0 T_e} = \frac{15}{8 \sqrt{2\pi}} \cdot \frac{Q}{Q_*^s} \cdot \frac{T_e}{T_i} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}, \quad (4.238)$$

а

$$k_0 = k_g \exp \left(-\sqrt{\frac{Q}{Q_*^s}} \right). \quad (4.239)$$

Записанные результаты справедливы лишь в условиях, когда генерация турбулентности происходит в ограниченном интервале волновых чисел, что возможно, например, при генерации турбулентности высокочастотными полями и другими нелинейными процессами. Существенно, чтобы инкремент не зависел от k , подобно декременту, и были бы области пересечения γ_k^s и γ_g .

К рассмотренному случаю не подходит декремент, линейно зависящий от k , когда отсутствуют пересечения с бесстолкновительным затуханием Ландау, и если при некоторых k инкремент превосходит декремент, то он превосходит всюду в бесстолкновительной области.

Такова ситуация, когда в плазме имеется направленная скорость электронов относительно ионов — ток. Легко сообразить, что при наличии постоянного внешнего электрического поля направленная скорость электронов в m_i/m_e раз больше скорости ионов и в этом случае целесообразно учитывать лишь движение электронов. Поэтому нелинейность, которая определяется ионами, остается той же, наличие направленной скорости у электронов скажется лишь на γ_k^s , в котором следует учесть доплеровское изменение частоты заменив ω_k^s величиной $\omega_k^s - ku$, где u — скорость дрейфа (направленного движения) электронов

$$\gamma_k^s = - \sqrt{\frac{\pi}{8} \cdot \frac{m_e}{m_i}} k \left(v_s - \frac{(ku)}{k} \right). \quad (4.240)$$

Если u существенно больше v_s , то для всех k , но не для всех углов возникает неустойчивость. Для создания стационарного спектра нелинейные процессы, помимо изменения частот, должны изменять угловое распределение пульсаций, переводя их из области генерации в область поглощения.

Если спектр оценить из (4.229), то (см. работу [220])

$$W_k = \frac{\text{const}}{k} \ln \frac{k_0}{k}. \quad (4.241)$$

Область же поглощения колебаний возникает лишь при малых значениях k , когда вступают в игру эффекты поглощения из-за парных соударений частиц. Согласно работе [130] затухание ионно-звуковых колебаний из-за ион-ионных соударений имеет вид

$$v_s = \frac{2 \sqrt{2} \Lambda \omega_{pe}^4}{15 (2\pi)^{3/2} n_0 v_{Te}^3} \left(\frac{m_e}{m_i} \cdot \frac{T_e}{T_i} \right)^{1/2}. \quad (4.242)$$

Таково затухание колебаний в полностью ионизованной плазме. В слабоионизованной плазме затухания определяются соударе-

ниями ионов с нейтралами [220]. Порядок величин k , для которых столкновения существенны, можно оценить из

$$k_v \simeq \frac{v_s}{v_{Te}} \cdot \frac{m_i}{m_e} \sqrt{\frac{8}{\pi}}. \quad (4.243)$$

Приведенный выше спектр (4.231) возможен при $k_0 \gg k_v$. В области, где доминирует затухание из-за соударений,

$$W_k^s = \frac{15 v_s m_i n_0 v_s T_e}{2\pi T_i k} \left(\frac{1}{k_*} - \frac{1}{k} \right). \quad (4.244)$$

Пусть $k_0 \ll k_v$. Сшивая (4.244) с (4.231), получаем

$$\frac{1}{k_*} - \frac{1}{k_v} \simeq \frac{1}{k_v} \ln \frac{k_v}{k_0}, \quad (4.245)$$

т. е. k_* может быть меньше k_v лишь в $\ln \frac{k_v}{k_0}$ раз. Другими словами, при $k < k_v$ спектр быстро обращается в нуль. Таким образом, основной масштаб турбулентных пульсаций $1/k_*$ в этом случае имеет порядок $1/k_v$. Та же оценка имеет место и при наличии направленного дрейфа электронов [220]. Однако согласно работе [137] внешнее электрическое поле может создать анизотропное распределение ионно-звуковых колебаний с максимумом интенсивности вдоль направления поля. Нелинейные эффекты определяют максимальную амплитуду пульсаций в первую очередь в этом направлении.

Корреляции ионно-звуковых пульсаций приводят к трехплазмонному распаднему взаимодействию [142]

$$s \rightarrow s' + s''. \quad (4.246)$$

Сам же процесс (4.246) может приводить к уширению резонансной кривой корреляций. Распадные процессы определяются значением действительных частей S_{k, k_1, k_2} , на которых рассмотренные в гл. 2 эффекты насыщения резонансов практически не сказываются. Итак,

$$S_{k, k_1, k_2}^{(e)} \simeq - \frac{e^3 \omega n_0}{2k_1 k_2 k T_e^2}. \quad (4.247)$$

Покажем, что корреляционное уширение из-за процесса (4.248) в случае изотропной турбулентности больше уширения, связанного с индуцированным рассеянием на ионах. Нелинейный распадный инкремент γ_k^N имеет порядок

$$\gamma_k^N = \text{Im} \frac{S^2 \delta}{\left(\frac{\partial \epsilon_k^l}{\partial \omega} \right)^2 \omega^3 \frac{\partial \epsilon_k^l}{\partial \omega} (\omega - \omega_1 - \omega_{k-k_1})}, \quad (4.248)$$

где δ — относительный фазовый объем, в котором может выполняться резонансное распадное условие. Запрет на распад в области $k^2 d_e^2 \ll 1$ связан с тем, что частоты колебаний отличны от $k v_s$ на величину порядка $k^2 d_e^2$. Таким образом, для возникновения распада необходимо

$$\gamma_k^N > \omega k^2 d_e^2. \quad (4.249)$$

В этих условиях резонансный знаменатель имеет порядок γ_k^N а δ также порядка γ_k^N . Действительно, для волн, распространяющихся в одинаковом направлении, тождественно выполнено

$$k v_s \equiv k_1 v_s + v_s (k - k_1) \quad (4.250)$$

при любых k_1 и k , т. е. нарушение резонанса происходит лишь из-за различия углов k_1 и k . При $k_1 \sim k$ резонансный знаменатель имеет порядок $\theta^2 \omega_1$, где θ — угол между k_1 и k . Нарушение резонанса возникает при

$$\theta^2 \omega \sim \gamma_k^N. \quad (4.251)$$

Относительный фазовый объем, в котором разрешен распад, имеет порядок γ_k^N / ω , т. е. γ_k^N выпадает из правой части (4.297). Отсюда следует оценка

$$\gamma_k^N \simeq \omega \frac{W}{n_0 T_e}. \quad (4.252)$$

Этот результат справедлив лишь для малых k , когда выполняются условия

$$k \ll \frac{\omega_{pe}}{v_{Te}} \sqrt{\frac{W}{n_0 T_e}}. \quad (4.253)$$

Заметим, что (4.252) определяет также по порядку величины интенсивность нелинейного взаимодействия, которое из-за разрешенности распада в T_e/T_i раз превосходит рассеяние на ионах.

При выполнении неравенства (4.253) распадный резонанс работает (фактически) как δ -функция, поэтому можно написать обычные распадные уравнения, пренебрегая отличием частоты от $k v_s$. Для наглядности запишем их как уравнения баланса для числа ионно-звуковых квантов [142]

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_k^s}{\partial t} = & \frac{\pi \omega_k^s}{2n_0 m_i} \int \frac{dk_1 |k - k_1|}{(2\pi)^3} \{ \delta(\omega_k^s + \omega_{k_1}^s - \omega_{k-k_1}^s) \times \\ & \times 2(N_{-k_1}^s N_{k-k_1}^s + N_k^s N_{k-k_1}^s - N_k^s N_{-k_1}^s) + (N_{k_1}^s N_{k-k_1}^s - \\ & - N_k^s N_{k-k_1}^s - N_k^s N_{k_1}^s) \delta(\omega_k^s - \omega_{k_1}^s - \omega_{k-k_1}^s) \}. \quad (4.254) \end{aligned}$$

Выражение для вероятности распадного процесса [коэффициента в (4.254)] легко получить из (4.251), а также непосредственно из гидродинамических уравнений. Если турбулентные пульсации изотропны, то (4.254) дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_k^s}{\partial t} = & \int_0^k \frac{k_1^2 (k-k_1)^2 dk_1}{8\pi^2 n_0 m_i} (N_{k_1}^s N_{k-k_1}^s - N_k^s N_{k-k_1}^s - N_k^s N_{k_1}^s) + \\ & + 2 \int_0^{k_{\text{макс}}} \frac{k_1^2 (k+k_1)^2 dk_1}{8\pi^2 n_0 m_i} (N_{k_1}^s N_{k+k_1}^s + N_k^s N_{k+k_1}^s - N_k^s N_{k_1}^s). \end{aligned} \quad (4.255)$$

Здесь $k_{\text{макс}}$ соответствует (4.253). Подробный анализ решения уравнения (4.255) с учетом затухания и раскачки (4.240) дан в работе [142]. Рассмотрим здесь качественно эффекты, описываемые взаимодействием (4.255), положив, что большая часть энергии колебаний сосредоточена в области $k \sim k_0$. При $k \gg k_0$, т. е. в асимптотической области, взаимодействие пульсаций с пульсациями энерго-содержащей области легко найти разложением (4.255) по малому параметру k_0/k , считая члены, содержащие N_k^s , малыми,

$$\frac{\partial N_k^s}{\partial t} = \frac{1}{k^2} \cdot \frac{\partial}{\partial k} D k^4 \frac{\partial N_k^s}{\partial k}; \quad D = \int_{k_{\text{мин}}}^k \frac{k_0^4 dk_0 N_{k_0}^s}{4\pi^2 n_0 m_i}. \quad (4.256)$$

Строго говоря, (4.256) справедливо при $k_0/k \ll 1$, однако для качественных оценок можно интегрирование распространить до $k_0 \simeq k$. Из баланса затухания Ландау и нелинейного взаимодействия (4.256) получим при $\ln \frac{k_*}{k} \gg 1$

$$\frac{W_k^s}{n T_e} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{2} \frac{m_e}{m_i}} \frac{1}{k} \ln \frac{k_*}{k}. \quad (4.257)$$

Этот спектр близок по структуре к (4.231), однако (если не учитывать изменения логарифмического множителя) исчезает большой параметр $\frac{15}{\pi} \cdot \frac{T_e}{T_i}$. Уменьшение плотности энергии ионно-звуковых волн связано с усилением нелинейного взаимодействия и находится в соответствии с измеренной шириной бесстолкновительных ударных волн. При наличии дрейфа электронов в (4.257) в области генерации появляется множитель порядка $\frac{u}{v_s}$, спектр становится анизотропным, изменяется логарифмический множитель [142]. Диффузия (4.256) ограничена сверху «стенкой» в пространстве волновых чисел, что видно из (4.253). Диффузия приводит к трансформации спектра

к меньшим волновым числам с одновременной диффузией по углам, переводящим в конце концов пульсации в область вне черенковского конуса $\cos \theta = \frac{v_s}{u}$, где они и поглощаются. Шаг диффузии по углам определяется (4.251). Спектр типа (4.257) соответствует измеренному в сильном электрическом поле [151] и на фронте ударных волн [150]. Наблюдениям соответствует и предсказание анизотропии: преимущественного распределения пульсации в направлении электрического поля. Используя угловое распределение пульсаций [142], можно найти величину аномальной проводимости плазмы

$$\sigma = \frac{\omega_{pe}^2}{4\pi\nu_{эфф}}; \quad \nu_{эфф} \simeq \frac{u}{v_s} \frac{\omega_{pi}}{100}, \quad (4.258)$$

которая находится в хорошем согласии с наблюдениями [150, 151].

В относительно несильном электрическом поле $\frac{E^2}{8\pi n T_e} < \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^2 \cdot 10^{-3}$, как показано в работе [137], колебания в квазилинейном приближении сосредотачиваются по модулям при некоторых $k \sim k_0$, однако остаются анизотропными, и энергия колебаний в направлении внешнего электрического поля растет во времени до тех пор, пока она не ограничивается нелинейными эффектами.

§ 4.9. ВЛИЯНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И СПЕКТРЫ ПРОДОЛЬНЫХ ПУЛЬСАЦИЙ ПЛАЗМЫ

Магнитное поле сказывается как в том, что появляются новые ветви колебаний, так и в связи с видоизменением взаимодействия колебаний в пределах одной ветви. Для высокочастотных пульсаций можно воспользоваться выражениями (2.242) — (2.244) для нелинейных токов. В случае продольных волн получим

$$S_{k, k_1, k-k_1} = \frac{e |k - k_1| (\varepsilon_k^{l(e)} - 1)}{8\pi m_e k k_1 (\omega^2 - \omega_{He}^2)} \times \\ \times \left\{ (\mathbf{k}k_1)\omega - \frac{\omega_{He}^2}{\omega} (\mathbf{k}_1 \mathbf{h}) (\mathbf{k} \mathbf{h}) + i\omega_{He} ([\mathbf{k}k_1] \mathbf{h}) \right\}. \quad (4.259)$$

Здесь $\mathbf{h} = \frac{H_0}{H_0}$. Вероятность рассеяния на ионах через виртуальную продольную волну задается (2.238).

Используя эти выражения, нетрудно получить для нелинейных взаимодействий продольных волн

$$\frac{\partial N_k^\sigma}{\partial t} = - \int \frac{(\omega_k^\sigma - \omega_{k'}^\sigma) \omega_{pe}^4 N_{k_1}^\sigma N_k^\sigma dk_1 ((\omega_k^\sigma)^2 - \omega_{He}^2)^{-1}}{|k_z - k_{1z}| v_{Ti} \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right)^2 n_0 T_i (2\pi)^{5/2} \omega_k^\sigma \omega_{k_1}^\sigma \left. \frac{\partial \varepsilon_k^l}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_k^\sigma}} \times$$

$$\times \frac{((\omega_{k_1}^\sigma)^2 - \omega_{He}^2)^{-1}}{\frac{\partial \epsilon_{k_1}^1}{\partial \omega_1} | \omega_1 = \omega_{k_1}^\sigma} \left\{ \omega_{He}^2 \frac{([\mathbf{k}\mathbf{k}_1] \mathbf{h})^2}{k^2 k_1^2} + \left(\omega_k^\sigma \frac{(\mathbf{k}\mathbf{k}_1)}{kk_1} - \frac{\omega_{He}^2}{\omega_k^\sigma} \cdot \frac{(\mathbf{k}_1 \mathbf{h})(\mathbf{k}\mathbf{h})}{kk_1} \right)^2 \right\}. \quad (4.260)$$

Здесь $|\omega_k^\sigma - \omega_{k_1}^\sigma - \nu \omega_{Hi}| \ll |k_{1z} - k_z| v_{Ti}$. Последнее неравенство для немагнитных ионов ($k v_{Ti} \gg \omega_{Hi}$) выполнено для всех ν , если $|\omega_k^\sigma - \omega_{k_1}^\sigma|$ достаточно мало. Для замагниченных ионов неравенство выполняется лишь для $\nu = 0$. Однако легко видеть, что циклотронное рассеяние с $\nu \neq 0$ для замагниченных ионов мало и поэтому (4.260) справедливо и в этом случае.

Нетрудно получить выражения для спектральной перекачки. В слабом магнитном поле $\omega_{He} \ll \omega_{pe}$ перекачка на ветви $\omega_k^\sigma \approx \omega_{pe}$ приближенно совпадает с (4.12), а для ветви $\omega_k^\sigma = \omega_{He} \cos \theta$ получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_k^\sigma}{\partial t} = & -N_k^\sigma \int \frac{N_{k_1}^\sigma dk_1 (\omega_k^\sigma - \omega_{k_1}^\sigma) \omega_{He}^2}{4(2\pi)^{5/2} |k_z - k_{1z}| v_{Ti} n_0 T_i \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right)^2} \times \\ & \times \left\{ \left(\cos \theta \frac{(\mathbf{k}\mathbf{k}_1)}{kk_1} - \cos \theta \cos \theta_1 \right)^2 + \frac{1}{k^2 k_1^2} ([\mathbf{k}\mathbf{k}_1] \mathbf{h})^2 \right\}. \end{aligned} \quad (4.261)$$

В сильном поле $\omega_{He} \gg \omega_{pe}$ для ветви $\omega_k^\sigma = \omega_{pe} \cos \theta$ имеем для замагниченных ионов $k v_{Ti} \ll \omega_{Hi}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_k^\sigma}{\partial t} = & -N_k^\sigma \int \frac{(\omega_k^\sigma - \omega_{k_1}^\sigma) \omega_{pe}^2 \cos^2 \theta |\cos^2 \theta_1| N_{k_1}^\sigma dk_1}{|k_z - k_{1z}| v_{Ti} \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right)^2 n_0 T_i^4 (2\pi)^{5/2}} \times \\ & \times \exp \left\{ - \frac{(\omega_k^\sigma - \omega_{k_1}^\sigma)^2}{2 (k_z - k_{1z})^2 v_{Ti}^2} \right\}. \end{aligned} \quad (4.262)$$

Для немагнитных ионов $|k_z - k_{1z}|$ следует заменить $|\mathbf{k} - \mathbf{k}_1|$. Аналогично для ветви $\omega_k^\sigma \approx \omega_{He}$ имеем ($k v_{Ti} \ll \omega_{Hi}$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_k^\sigma}{\partial t} = & -N_k^\sigma \int \frac{(\omega_k^\sigma - \omega_{k_1}^\sigma) N_{k_1}^\sigma dk_1 \omega_{pe}^4 \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta}{4(2\pi)^{5/2} |k_z - k_{1z}| v_{Ti} \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right)^2 \omega_{He}^2} \times \\ & \times \exp \left\{ - (\omega_k^\sigma - \omega_{k_1}^\sigma)^2 / 2 |k_z - k_{1z}|^2 v_{Ti}^2 \right\}. \end{aligned} \quad (4.263)$$

Заметим, что спектральная перекачка (4.262) падает с увеличением угла ленгмюровских волн с магнитным полем, т. е. магнитное поле препятствует изотропизации колебаний. Существенно, что рассеяние на ионах при наличии магнитных полей может происходить не только в том случае, когда разность частот мала, но и в том случае, когда она достаточно близка к $\nu\omega_{Hi}$.

Однако ленгмюровские пульсации способны изотропизироваться даже в бесконечно сильном магнитном поле. Фактически ограничение на раствор углов волн, эффективно взаимодействующих друг с другом, задается экспоненциальным множителем. Рассмотрим взаимодействие волн с $k = k_1$. Тогда экспоненциальный множитель имеет вид

$$\exp \left\{ -\frac{\omega_{pe}^2}{2k^2 v_{Ti}^2} \left(\frac{|\cos \theta| - |\cos \theta_1|}{\cos \theta - \cos \theta_1} \right)^2 \right\} \quad (4.264)$$

и, следовательно, эффективно взаимодействуют лишь волны противоположных направлений. В результате двукратного процесса такого взаимодействия изменение угла волны составит $(\Delta\theta) \sim \frac{kv_{Ti}}{\omega_{pe}} \times \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$. Если не рассматривать углы, близкие к $\pi/2$, можно сказать, что процесс изотропизации замедляется в v_p/v_{Ti} раз.

Увеличение угла между направлением колебаний и магнитным полем может привести к существенному снижению частоты и сползанию пульсаций к гибриднему резонансу $\omega = \sqrt{\omega_{Hi}\omega_{He}}$, осуществляющемуся при $\left| \theta - \frac{\pi}{2} \right| < \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}$. Хотя этот эффект и может привести к заметному турбулентному нагреву плазмы, параллельно с ним идет процесс увеличения фазовых скоростей пульсаций, который этому препятствует. Одномерная трансформация энергии ленгмюровских волн вдоль H при рассеянии на ионах мало чем отличается от аналогичной трансформации в случае изотропной турбулентности без магнитного поля. Когда взаимодействие осуществляется через замагниченные частицы ($v = 0$), возникает новый эффект насыщения взаимодействия [221]. Особенно наглядно он проявляется для электронов при трансформации энергии между волнами, распространяющимися вдоль H . Тогда только электроны, имеющие $v_z \approx \frac{v_{Te}^2}{v_p} \ll v_{Te}$, участвуют во взаимодействии. Их число мало по сравнению с полным числом электронов, и энергия, переданная им при взаимодействии ($\sim W$), может быть сравнима с их энергией. Это значит, что при малых скоростях может установиться плато по v_z на функции распределения электронов и, следовательно, трансформация энергии, пропорциональная df^R/dv_z , резко уменьшится.

Для ионов такие эффекты наступают при $v_p \gg \frac{3v_{Te}^2}{v_{Ti}}$. В области дифференциальной спектральной перекачки они невозможны, так как при этом взаимодействии участвуют все ионы. Точно так же при $v_p \gg 3v_{Te}^2/v_{Ti}$ перекачка по углам может осуществляться всеми ионами, и поэтому переход колебаний в области гибридного резонанса мало чувствителен к указанным эффектам насыщения. Магнитное поле, создавая новую область эффективного поглощения при гибридном резонансе, открывает новый канал диссипации турбулентной энергии, т. е. создает возможность турбулентного нагрева плазмы. Другая возможность нагрева связана с изменением направления спектральной перекачки в случае анизотропно распределенных электронов и ионов. Возникновение таких распределений значительно более вероятно при наличии магнитных полей. Они возникают естественным образом в магнитных ловушках из-за конуса потерь. Анизотропная неустойчивость может развиваться за времена, много большие характерных времен трансформации энергии по спектру, и поэтому пульсации могут быстрее поглотиться, нежели разовьется анизотропная неустойчивость. Изменение направления перекачки приведет к тому, что колебания могут диссипировать из-за поглощения Ландау. При рассеянии на электронах для изменения направления перекачки, как показывают оценки, необходимо, чтобы степень анизотропии $\alpha \sim \Delta\theta/\theta$ удовлетворяла неравенству $\alpha_e > v_{Te}/v_p$ и соответственно для ионов $\alpha_i > v_{Te}^2/v_p v_{Ti}$.

Наиболее благоприятная ситуация имеет место для ловушек с горячими ионами, когда конусная неустойчивость соответствует черенковскому возбуждению ионами ленгмюровских пульсаций $\omega_{pe} \cos \theta$. Рассеяние на ионах неэффективно в силу тех же аргументов, согласно которым рассеяние на электронах неэффективно для ионно-звуковой неустойчивости. Поэтому нелинейная трансформация энергии осуществляется электронами, для которых условие изменения направления перекачки наиболее легкое. В ловушках с горячими ионами могут быть выполнены условия, необходимые для турбулентного нагрева электронов. Ионы же находятся в режиме статистического ускорения, когда лишь небольшая их доля может получить энергию от колебаний.

Обсуждение эффектов взаимодействия колебаний с частотой $\omega \sim \omega_{He}$ отложим до гл. 6, так как наиболее сильным нелинейным эффектом для них является превращение колебаний в электромагнитное излучение.

Взаимодействие немагнитных ионно-звуковых колебаний остается практически таким же, каким оно было в отсутствие магнитного поля, поэтому все оценки § 4.8 сохраняют силу. Можно указать два новых существенных момента. Во-первых, появляется сильное поглощение пульсаций на ионах вблизи ионно-циклотрон-

ного резонанса при $k \sim \omega_{Hi}/v_s$. Это поглощение является механизмом эффективного турбулентного нагрева ионов.

Практический вопрос о том, какова эффективность турбулентного нагрева ионов при ионно-звуковой неустойчивости и каково соотношение между нагревом электронов и ионов, зависит от величины магнитного поля. Для нагрева ионов необходимо, чтобы по пути трансформации энергии к волновым числам порядка ω_{Hi}/v_s энергия пульсаций не была потеряна из-за поглощения на электронах. Трансформация энергии осуществляется из-за рассеяния на ионах и поэтому при сохранении числа квантов изменение их частоты на $\Delta\omega$ порядка ω приводит к нагреву ионов на W . Время такого увеличения $\frac{1}{\gamma_k^s} \sim \frac{T_e}{T_i} \cdot \frac{1}{\omega_k^s} \cdot \frac{n_0 T_e}{W^s}$, т. е.

$\frac{dT_i}{dt} \sim \omega_k^s T_i \left(\frac{W^s}{n_0 T_e} \right)^2$. Нагрев же электронов из-за нелинейного

затухания оценивается как $\frac{dT_e}{dt} \approx \gamma_k^s \frac{W^s}{n_0} \sim \omega_k^s \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} T_e \left(\frac{W^s}{n_0 T_e} \right)$.

Из этих оценок можно заключить, что нагрев ионов может быть более существен при $\frac{W^s}{n_0 T_e} > \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}$. Наличие магнитного поля дает дополнительный сток энергии в области ионно-циклотронного резонанса. При этом плазмоны поглощаются на ионах, увеличивая их энергию. Время этой трансформации составляет

$\frac{1}{\omega_{Hi}} \cdot \frac{n_0 T_e^2}{T_i W}$ и падает с ростом магнитного поля.

Во-вторых, магнитное поле оказывает существенное влияние на ионно-звуковую турбулентность в результате появления канала превращения энергии колебаний в вистлеры, что может служить, как отмечено в работах [222, 223], эффективным методом диагностики ионно-звуковой турбулентности. Наконец, замагниченные звуковые колебания, имеющие $k \ll \omega_{Hi}/v_s$, взаимодействуют между собой примерно так же, как и незамагниченные. В частности, рассеяние на ионах имеет тот же порядок, что и в отсутствие магнитного поля.

§ 4.10. СПЕКТРЫ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ВИСТЛЕРОВ

Вистлеры, имеющие частоты

$$\omega_k^{\omega} = \frac{k^2 c^2 |\omega_{He}| |\cos \theta|}{\omega_{pe}^2 + k^2 c^2}, \quad (4.265)$$

могут возбуждаться из-за анизотропной неустойчивости при конверсии из ионно-звуковых и ленгмюровских пульсаций и т. п., они слабо затухают при распространении преимущественно вдоль магнитного поля и при $\omega_k^{\omega} > kv_{Te}$. Рассмотрим длинноволновую

часть спектра (4.265), в которой $k \ll \omega_{pe}/c$ и соответственно $\omega_k^w \ll \omega_{He}$. Собственно при $k \gg \omega_{pe}/c$ спектр (4.265) совпадает со спектром продольной гирочастотной плазменной волны и взаимодействия таких пульсаций описываются (4.261). Итак,

$$\omega_k^w = \frac{k^2 c^2 |\omega_{He}| |\cos \theta|}{\omega_{pe}^2}. \quad (4.266)$$

Распадные процессы

$$\omega \rightarrow \omega' + \omega'' \quad (4.267)$$

для такого спектра запрещены, только если все волны распространяются вдоль H_0 . В изотермической плазме $T_e = T_i$ процессы распадов на ионно-звуковые колебания невозможны. Если $k v_{Te}/\omega \gg 1$, то линейное затухание на электронах не мало (при $\theta \neq 0$) и спектры турбулентности могли бы формироваться в результате возбуждения вистлеров вдоль H нелинейной трансформацией к $\theta \neq 0$ с последующим затуханием на электронах. Рассеяние на электронах, как показывают оценки (см. работу [224]), существенно при

$$v_{Te} \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/4} \gg v_A > v_{Te} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}, \quad (4.268)$$

и так же, как для ионно-звуковых колебаний, рассеянием на электронах следует пренебречь в области, где одновременно возможно линейное затухание и рассеяние на электронах. Значения магнитных полей, определяемых неравенством (4.268), лежат в весьма узких пределах, и мы органичимся здесь рассмотрением распадных взаимодействий, рассеяния на ионах и линейного затухания на электронах. Заметим, что если распады разрешены законами сохранения, то они доминируют над процессами рассеяния на ионах.

В общем случае решение распадных уравнений представляется довольно сложной задачей. Однако если именно распады определяют спектры и энергия колебаний концентрируется в некоей области волновых чисел $k \approx k_0$, которую целесообразно назвать энергосодержащей, то можно предположить, что спектры асимптотической области $k \gg k_0$ определяются их взаимодействием с наиболее интенсивными колебаниями, имеющимися в энергосодержащей области. Тогда уравнения для спектра описывают процессы диффузионного рассеяния колебаний:

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}}^w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial k_i} D_{ij} \frac{\partial N_{\mathbf{k}}^w}{\partial k_j}; \quad (4.269)$$

$$D_{ij} = \int \mathbf{k}_{1i} \mathbf{k}_{1j} \omega(\mathbf{k}\mathbf{k}_1) N_{\mathbf{k}}^w \frac{d\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3}, \quad (4.270)$$

где $\omega(kk_1)$ — вероятность распада,

$$\omega(kk_1) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\omega_{pe}^4 \omega_1^2}{|k_z| n_0 m_e \omega_{He}^3 c^2 \cos^2 \theta} \delta\left(\frac{k_1 k}{k} + \frac{k_{1z} k}{k_z}\right) \frac{[k_1 k]^2}{k^2 k_1^2}. \quad (4.271)$$

Мы не будем обсуждать решения уравнений (4.270) (см. работу [224]). Отметим лишь, что согласно (4.265) с колебаниями, имеющими угол θ с магнитным полем, взаимодействуют лишь энергосодержащие колебания с

$$\cos^2 \theta_1 < \frac{\cos^2 \theta \sin^2 \theta}{1 + 3 \cos^2 \theta} < \frac{1}{9}. \quad (4.272)$$

Поэтому если в энергосодержащей области вистлеры имеют направления вдоль H_0 , то их воздействие на асимптотические колебания оказывается равным нулю. В тех случаях, когда это не так, спектры вистлеров в асимптотической области могут иметь вид $\sim W(x)/\omega^{\nu}$, причем численное значение ν зависит от деталей распределения колебаний в энергосодержащей области [224].

Рассмотрим здесь более подробно процессы рассеяния на ионах. Согласно (2.242) и таблице ортов гл. 2 нелинейный ток, определяющий рассеяние на ионах, создается электронами

$$S_{kk_1k_2} = - \frac{\omega_{pe}^2 k_2 (e_{k_2}^{(e)} - 1) (1 - k_{1z} v_z / \omega_1)}{2(4\pi)^2 e n_0 (1 + \cos^2 \theta)^{1/2} (1 + \cos^2 \theta_1)^{1/2} \omega_{He}} \times \\ \times (i \cos(\varphi - \varphi_1) (|\cos \theta| + |\cos \theta_1|) - \sin(\varphi - \varphi_1) (1 + |\cos \theta| |\cos \theta_1|)). \quad (4.273)$$

Здесь учтены по теории возмущений дополнительно малые поправки* порядка $\frac{k_{1z} v_z}{\omega_1}$, уточняющие (2.273). Максимальным матричный элемент S является при $\theta = \theta_1 = 0$ и $\theta = 0$; $\theta_1 = \pi$; $\theta = \pi$; $\theta_1 = 0$.

Легко видеть, что наиболее вероятным процессом будет рассеяние вистлера при приблизительном равенстве частот взаимодействующих волн

$$k_1^2 |\cos \theta_1| = k^2 |\cos \theta|. \quad (4.274)$$

Таким образом, турбулентность принципиально неоднородна, а баланс между генерацией и поглощением может осуществляться из-за перекачки по углам.

* Их необходимо учесть, так как в первом приближении по этому параметру матричный элемент оказывается равным $(\omega - \omega_1) \delta(\omega - \omega_1)$, т. е. нулю.

Для замагниченных ионов легко получим

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}}^{\omega}}{\partial t} = N_{\mathbf{k}}^{\omega} \int \frac{dk_1 N_{\mathbf{k}_1}^{\omega} (\omega_{\mathbf{k}_1}^{\omega} - \omega_{\mathbf{k}}^{\omega}) (\omega_{\mathbf{k}_1}^{\omega})^2 \left(1 - 2k_{1z} \frac{\omega - \omega_1}{\omega_1(k_z - k_{1z})}\right)}{4(2\pi)^{5/2} n_0 T_i |k_z - k_{1z}| v_{Ti} \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right)^2} \times$$

$$\times \frac{1}{2|\cos \theta \cos \theta_1|} [(|\cos \theta| + |\cos \theta_1|)^2 + (1 + |\cos \theta \cos \theta_1|)^2] \times$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{(\omega_{\mathbf{k}}^{\omega} - \omega_{\mathbf{k}_1}^{\omega})^2}{2v_{Ti}^2 |k_z - k_{1z}|^2} \right\}. \quad (4.275)$$

Для незамагниченных ионов необходимо $|k_z - k_{1z}|$ заменить $|\mathbf{k} - \mathbf{k}_1|$, а также k_{1z} величиной $\frac{k_1(k - k_1)}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}_1|}$. Выражение (4.275) не имеет особенности при $\theta, \theta_1 \rightarrow \frac{\pi}{2}$, так как $\omega_{\mathbf{k}_1}^{\omega}$ и $\omega_{\mathbf{k}}^{\omega}$ пропорциональны $|\cos \theta_1| |\cos \theta|$. Если ввести функцию распределения вистлеров по частотам и углам $W_{\omega\Omega}$

$$\int W_{\omega\Omega} d\omega d\Omega = \int \frac{N_{\mathbf{k}}^{\omega} \omega_{\mathbf{k}}^{\omega} dk}{(2\pi)^3} \quad (4.276)$$

[причем в силу $k \ll \frac{\omega_{pe}}{c}$ в (4.266) интегрирование по углам ограничено условием $\cos \theta > \frac{\omega}{\omega_{He}}$], то уравнение (4.275) можно записать в виде

$$\frac{\partial W_{\omega, \Omega}}{\partial t} = \alpha^{\omega} W_{\omega, \Omega} \int d\Omega_1 \frac{1}{|\cos \theta| |\cos \theta_1|} [(|\cos \theta| + |\cos \theta_1|)^2 +$$

$$+ (1 + |\cos \theta \cos \theta_1|)^2] \left[\omega^2 \left(\frac{\partial}{\partial \omega} W_{\omega\Omega_1} \left(\frac{\cos \theta}{\sqrt{|\cos \theta|}} - \frac{\cos \theta_1}{\sqrt{|\cos \theta_1|}} \right)^2 + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \omega W_{\omega\Omega_1} \frac{\cos \theta}{\sqrt{|\cos \theta|}} \left(\frac{\cos \theta}{\sqrt{|\cos \theta|}} - \frac{\cos \theta_1}{\sqrt{|\cos \theta_1|}} \right) \right] \right], \quad (4.277)$$

где

$$\alpha^{\omega} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{He} n_0 m_i c^2 \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right)^2}. \quad (4.278)$$

Заметим, что ионы можно считать замагниченными $\frac{kv_{Ti}}{\omega_{Hi}} < 1$ до максимальных k в спектре (4.265), если $v_A \gg v_{Te}$. При $v_{Ti} \ll v_A \ll$

$\ll v_{Te}$ условие замагниченности выполняется, если $\omega < \omega_{Hi} \frac{v_A^2}{v_{Ti}^2}$.

Уравнение, аналогичное (4.277), которое описывает процессы рассеяния на немагниченных ионах, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_{\omega\Omega}^w}{\partial t} = & \alpha^w W_{\omega\Omega}^w \int d\Omega_1 \frac{[(|\cos \theta| + |\cos \theta_1|)^2 + (1 + |\cos \theta \cos \theta_1|)^2]}{|\cos \theta| |\cos \theta_1|} \times \\ & \times \left[\omega^2 \frac{\partial}{\partial \omega} W_{\omega\Omega_1}^w \left(\frac{1}{|\cos \theta_1|} + \frac{1}{|\cos \theta|} - \frac{2 \cos \theta \cos \theta_1}{\sqrt{|\cos \theta \cos \theta_1|}} \right) + \right. \\ & \left. + \omega W_{\omega\Omega_1}^w \left(\frac{1}{|\cos \theta|} - \frac{\cos \theta \cos \theta_1}{\sqrt{|\cos \theta \cos \theta_1|}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.279)$$

Стационарные решения уравнения (4.279), как легко видеть, должны иметь вид

$$W_{\omega\Omega}^w = \frac{1}{\omega^v} W(\cos \theta). \quad (4.280)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} v \int_{-1}^1 W(x_1) dx_1 \frac{1}{|x_1|} [(|x| + |x_1|)^2 + (1 + |xx_1|)^2] \left(\frac{x}{\sqrt{|x|}} - \frac{x_1}{\sqrt{|x_1|}} \right)^2 = \\ = \int_{-1}^1 W(x_1) dx_1 \frac{1}{|x_1|} \cdot \frac{x}{\sqrt{|x|}} \left(\frac{x}{\sqrt{|x|}} - \frac{x_1}{\sqrt{|x_1|}} \right) [(|x| + |x_1|)^2 + \\ + (1 + |xx_1|)^2]. \end{aligned} \quad (4.281)$$

В тех же предположениях (4.277) уравнение, заменяющее (4.281) для рассеяния на немагниченных ионах, имеет вид

$$\begin{aligned} v \int_{-1}^1 W(x_1) dx_1 [(|x| + |x_1|)^2 + (1 + |xx_1|)^2] \frac{1}{|x_1|} \left(\frac{1}{|x|} + \frac{1}{|x_1|} - \right. \\ \left. - \frac{2xx_1}{\sqrt{|x||x_1|}} \right) = \int_{-1}^1 W(x_1) dx_1 [(|x| + |x_1|)^2 + (1 + |xx_1|)^2] \frac{1}{|x_1|} \times \\ \times \left(\frac{1}{|x|} - \frac{xx_1}{\sqrt{|xx_1|}} \right). \end{aligned} \quad (4.282)$$

При заданном v из (4.281) и (4.282) следуют интегральные условия на $W(x_1)$, ограничивающие возможные типы угловых зависимостей спектра турбулентности. Из (4.281) и (4.282) видно, что угловая зависимость становится δ -образной, т. е. все волны концентрируются к определенному направлению.

При $\nu = \frac{1}{2}$ пучки волн вдоль поля и против поля устойчивы, а пучки, распространяющиеся под углом $x = x_0$, неустойчивы относительно возбуждения колебаний с $|x| > |x_0|$. Это значит, что пучки с $|x_0| \neq 1$ концентрируются в два пучка, распространяющихся вдоль и против поля. Для $\nu = 1$ пучки с $|x| = |x_0|$ неустойчивы только относительно возбуждения волн с $x > |x_0|$, а пучки с $x = -|x_0|$ — относительно волн с $x < -|x_0|$.

Таким образом, спектры с $\nu = \frac{1}{2}$ должны перейти к стационарным спектрам, распространяющимся вдоль поля. Этот эффект самоканализации вистлеров вдоль магнитного поля, где отсутствует линейное затухание, представляет интерес как для интерпретации геофизических явлений в магнитосфере Земли, где возбуждение вистлеров играет существенную роль, так и в лабораторном эксперименте. Заметим также, что в случае распространения вдоль поля распадные взаимодействия, как отмечалось, несущественны.

Рассмотрим теперь вопрос о роли затухания на электронах. Оно существенно при $\omega < kv_{Te}$, т. е.

$$\omega < \omega_{Hi} \frac{v_{Te}^2}{v_A^2}, \quad (4.283)$$

и имеет вид

$$\gamma \simeq -\frac{\sqrt{2\pi}}{2} \cdot \frac{\omega^{3/2}}{|\omega_{He}|^{3/2}} \cdot \frac{v_{Te}}{c} \omega_{pe} \frac{1-x^2}{\sqrt{|x|}}.$$

Максимальное значение затухания в области (4.283) имеет оценку

$$\gamma_{k \text{ макс}}^{\omega} \simeq \omega_{Hi} \frac{m_i}{m_e} \left(\frac{v_s}{v_A} \right)^4,$$

тогда как характерное время спектральной перекачки на $\Delta\omega \sim \omega$ есть

$$\gamma^N \sim \omega_{Hi} \frac{W}{n_0 m_i v_A^2} \sim \omega_{Hi} \frac{4\pi W}{H_0^2}. \quad (4.284)$$

Если $W < \frac{H_0^2}{4\pi}$, а $v_A < v_s \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/4}$, то нелинейное взаимодействие не сможет сбалансировать затухания и это означает, что колебания будут поглощены. Таким образом, при $v_A < v_s (m_i/m_e)^{1/4}$ в условиях, когда генерация колебаний происходит при $\omega > \omega_{Hi} v_{Te}^2/v_A^2$, вистлеры перекачиваются до $\omega \sim \omega_{Hi} v_{Te}^2/v_A^2$, где будут поглощены. Энергия колебаний сосредоточивается при $\omega \simeq \omega_{Hi} v_{Te}^2/v_A^2$, соответствующей обратным длинам волн

$$k = k_0 = \frac{\omega_{pi}}{c} \cdot \frac{v_{Te}}{v_A}. \quad (4.285)$$

Величина k_0 играет роль основного масштаба турбулентности. Надо, однако, также иметь в виду, что затухание колебаний происходит на электронах и вызывает нагрев электронов. Нагрев электронов приведет к выполнению $T_e \gg T_i$, и вступят в силу, вообще говоря, более мощные взаимодействия вистлеров с ионно-звуковыми колебаниями (см. ниже)*.

Легко видеть теперь, что декремент становится порядка ω_{Hi} , если частота вистлеров имеет порядок

$$\omega \sim \omega_* \sim \omega_{Hi} \left(\frac{v_A}{v_s} \right)^{2/3} \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/3}. \quad (4.286)$$

Эта величина больше $\omega_{Hi} v_A^2 / v_{Ti}^2$ при $v_A < v_s \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/4}$. В условиях, когда $\gamma^N \lesssim \omega_{Hi}$, линейный декремент может быть скомпенсирован нелинейными эффектами (4.284), если они достаточно сильны.

Рассмотрим теперь неизотермическую плазму $T_e \gg T_i$, когда существуют ионно-звуковые колебания. В этих условиях даже в отсутствие ионно-звуковых колебаний появляется новый канал трансформации энергии. В результате возникает вопрос, будут ли возбуждены при этом ионно-звуковые колебания? Если же существует источник ионно-звуковых колебаний, то такие колебания могут перекачивать свою энергию в вистлеры, и тем самым как спектры вистлеров, так и спектры ионно-звуковых колебаний зависят в определенной мере от их взаимодействия. Такая ситуация возникает из-за того, что частоты вистлеров и ионно-звуковых колебаний могут совпадать. Области совпадения частот имеются всегда, если $\omega_{pi} > \omega_{Hi}$, т. е. при

$$\frac{v_A}{c} < 1. \quad (4.287)$$

При совпадении частот эффективным становится индуцированное рассеяние на электронах и ионах. Возможны также распадные процессы. Однако они разрешены в относительно узком интервале частот и углов (см. ниже). Рассеяние на ионах, если ионно-звуковые колебания изотропны, получим с помощью (2.242) (см. также [225])

$$\frac{\partial W_{\omega, \Omega}^{\omega}}{\partial t} = \frac{W_{\omega, \Omega}^{\omega} \pi (1 - \cos^2 \theta) \omega}{2n_0 m_i v_A^2 \left(1 + \frac{T_e}{T_i} \right)^2} \frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 W_{\omega}^s; \quad (4.288)$$

$$\frac{\partial W_{\omega}^s}{\partial t} = W_{\omega}^s \frac{\pi}{2} \int \frac{d\Omega (1 - \cos^2 \theta) \omega^3}{n_0 m_i v_A^2 \left(1 + \frac{T_e}{T_i} \right)^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \omega} W_{\omega, \Omega}^{\omega}. \quad (4.289)$$

* Взаимодействие $\omega \rightarrow s$, как оказывается, не приводит к генерации s -волн для спектров (4.280), но приводит к генерации ω -волн из s -волн.

Если имеется ионно-звуковая турбулентность, но отсутствуют вистлеры, то можно прийти к выводу о возможности раскачки вистлеров ионно-звуковыми колебаниями. Действительно, если воспользоваться спектром ионно-звуковых колебаний (4.238)

$$W_{\omega}^s = \frac{2W^s}{\ln^2 \frac{\omega_*}{\omega_0}} \cdot \frac{1}{\omega} \ln \frac{\omega}{\omega_0}, \quad (4.290)$$

то согласно (4.288) получим раскачку вистлеров. Это значит, что ионно-звуковая турбулентность сопровождается турбулентностью вистлеров, и полное стационарное турбулентное состояние в магнитном поле должно учитывать это обстоятельство. Характерные времена раскачки вистлеров определяются порядковым соотношением для инкремента их возбуждения

$$\gamma_k^N \simeq \omega_k^{\omega} \left(\frac{T_i}{T_e} \right)^2 \frac{W^s}{n_0 m_i v_A^2}. \quad (4.291)$$

Надо также отметить, что весьма существенно соотношение между ω_{pi} и ω_{He} . Максимальные эффекты возникают при $\omega_{He} = \omega_{pi}$ или при

$$\frac{v_A}{c} \sim \frac{m_e}{m_i}. \quad (4.292)$$

Если понижать магнитное поле, то все s -волны, частоты которых больше ω_{He} , регулируют свой спектр из-за $s \rightarrow s$ -взаимодействия и картина остается той же, что и в отсутствие поля. Раскачка вистлеров происходит до тех пор, пока либо откачка энергии из-за $\omega \rightarrow \omega$ -рассеяния не сбалансирует приток энергии из s -волн, либо интенсивность s -волн не упадет из-за генерации ω -волн. При этом, если взаимодействие (4.289) станет сильнее линейного затухания s -волн и взаимодействия $s \rightarrow s$, а (4.288) превзойдет взаимодействие (4.275), то стационарному условию соответствует равенство нулю правых частей (4.288) и (4.289), т. е.

$$W_{\omega}^s = \frac{\text{const}}{\omega^2};$$

$$W_{\omega, \Omega}^{\omega} = \text{const}. \quad (4.293)$$

Рассмотрим теперь распадные процессы. В принципе возможны следующие взаимодействия вистлеров и ионно-звуковых пульсаций: $\omega \rightleftharpoons \omega' + s$; $\omega + \omega' \rightleftharpoons s$; $s \rightleftharpoons s' + \omega'$; $\omega \rightleftharpoons s + s'$. Первый и второй процессы практически запрещены законами сохранения. Действительно, из

$$|k_1 \pm k_s| |k_{1z} \pm k_z^s| \mp k_1 |k_{1z}| = \frac{\omega_{pi}}{c} \cdot \frac{v_s}{v_A} k_s, \quad (4.294)$$

а также из того, что максимальное k_s не может превосходить $2k_1$, левая часть (4.294) меньше или порядка $2k_1 k_s$, т. е. $k_1 < \frac{1}{2} \times \frac{\omega_{pi}}{c} \cdot \frac{v_s}{v_A}$, что невозможно при $v_A > v_s$. Для процесса $s \rightleftharpoons s' + \omega$ получим

$$|k_1 + k| - k_1 = \frac{k^2 v_A c |\cos \theta|}{\omega_{pi} v_s}. \quad (4.295)$$

Так как k вистлеров много меньше, чем для ионно-звуковых колебаний, и $v_A \gg v_s$, то (4.295) можно записать в виде

$$\cos \theta \cos \theta_1 + \sin \theta \sin \theta_1 \cos(\varphi - \varphi_1) = \frac{kc}{\omega_{pi}} \cdot \frac{v_A}{v_s} |\cos \theta|. \quad (4.296)$$

Так как $\frac{kc}{\omega_{pi}} \gg 1$, $\frac{v_A}{v_s} \gg 1$, то правая часть (4.296) велика, тогда как в левой части стоит величина меньше единицы. Таким образом, $|\cos \theta| \ll 1$. С другой стороны, $\cos(kk_1)$ не должен быть малым, т. е. ионно-звуковые волны будут распространяться под углом, близким $\pi/2$, к направлению магнитного поля. Общий фазовый объем для таких колебаний мал и они не играют заметной роли.

Остается единственный процесс $s + s' \rightleftharpoons \omega$, вероятность которого легко находится из (2.242). Выражение для вероятности максимально при $k_1, k_2 \approx \frac{\omega_{pe}}{v_{Te}}$ и имеет вид

$$\begin{aligned} \omega_{\omega}^{s, s'}(k, k_1, k_2) &= (2\pi)^4 \delta(k_1 + k_2 - k) \delta(\omega_{k_1}^s + \omega_{k_2}^s - \omega_k^\omega) \times \\ &\times \frac{\sin^2 \theta \omega_k^\omega \omega_{k_1}^s \omega_{k_2}^s}{n_0 m_i v_A^2 (1 + k_1^2 d_e^2) (1 + k_2^2 d_e^2)}. \end{aligned} \quad (4.297)$$

Отсюда получим оценку мощности генерации вистлеров в условиях, когда их реабсорбцией из-за обратного процесса $\omega \rightarrow s + s'$ можно пренебречь для изотропной турбулентности и $k_1 \gg k$:

$$\frac{\partial W_{\omega, \Omega}^\omega}{\partial t} = \frac{v_s \omega_{pi}^3 \sqrt{\omega} \sin^2 \theta}{c^3 |\cos \theta| \sqrt{|\cos \theta|} n_0 m_i v_A^2 \omega_{Hi}^{3/2}} (W_{\frac{\omega}{2v_s}}^s)^2. \quad (4.298)$$

Полная энергия, генерируемая в 1 см^3 в 1 сек , есть

$$\frac{\partial W^\omega}{\partial t} = \left(\frac{v_{Te}}{c}\right)^3 \omega_{pi} \frac{\omega_{pi}^3}{\omega_{He}^3} \frac{(W^s)^2}{n_0 m_i v_A^2}. \quad (4.299)$$

Наблюдение частоты $2\omega_{pi}$ в спектре вистлеров может служить хорошим методом диагностики ионно-звуковой турбулентности, так как измерения амплитуд колебаний вистлеров представляются существенно более простыми, нежели измерения амплитуд ионно-звуковых волн.

§ 4.11. СПЕКТРЫ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПЛАЗМЫ

Перейдем теперь к рассмотрению спектров турбулентности самых низкочастотных колебаний однородной плазмы — магнитогидродинамических [226]. Считая $v_A \gg v_s$, можно в изотермической плазме ограничиться анализом взаимодействия альфвеновских и быстрых магнитозвуковых волн

$$\omega_k^M = kv_A^s; \quad \omega_k^A = |k_z| v_A. \quad (4.300)$$

Если использовать уравнения магнитной гидродинамики, как это было сделано в работах [227, 228], то можно получить распадные взаимодействия альфвеновских и магнитозвуковых волн. Законами сохранения разрешены лишь распады $M \rightleftharpoons M + A$; $A \rightleftharpoons A + M$. Мы рассмотрим здесь лишь специальный случай одномерной магнитогидродинамической турбулентности, когда распады при пренебрежении корреляциями запрещены. Тогда рассеяние на ионах является определяющим. Характерное время взаимодействия может быть оценено из нелинейного инкремента

$$\gamma_k^N \approx \omega \frac{W}{n_0 m_i v_A^2} = \omega \frac{4\pi W}{H_0^2} \quad (4.301)$$

и имеет тот же порядок величины, что и распадное взаимодействие волн, распространяющихся под углом порядка единицы к H_0 . Помимо процесса рассеяния на ионах следует учитывать затухание Ландау магнитогидродинамических волн, которое может сказываться на спектрах при $v_A < v_{Te}$.

Нелинейные уравнения, описывающие такое рассеяние на ионах для процессов

$$A \rightleftharpoons A; \quad M \rightleftharpoons M; \quad A \rightleftharpoons M, \quad (4.302)$$

имеют вид

$$\frac{\partial W_\omega^+}{\partial \tau} = W_\omega^+ \omega^2 \left(\omega \frac{\partial W_\omega^-}{\partial \omega} + W_\omega^- \right); \quad (4.303)$$

$$\frac{\partial W_\omega^-}{\partial \tau} = W_\omega^- \omega^2 \left(\omega \frac{\partial W_\omega^+}{\partial \omega} + W_\omega^+ \right); \quad (4.304)$$

$$\text{где} \quad \tau = t\pi \left(1 + \frac{v_A^2}{c^2}\right)^{-1} \frac{1}{4(1+T_e/T_i)^2} \cdot \frac{v_{Ti}^2}{v_A^2 n_0 T_i}. \quad (4.305)$$

Здесь $W_\omega = W_\omega^A + W_\omega^M$ — сумма спектральных функций — альфвеновских и магнитогиродинамических пульсаций, а индексы плюс и минус соответствуют волнам, распространяющимся вдоль магнитного поля и в противоположном направлении. Полная энергия магнитных возмущений имеет вид

$$W = \int_0^\infty (W_\omega^+ + W_\omega^-) d\omega. \quad (4.306)$$

Из (4.304) и (4.305) следует, что стационарные решения имеют вид $W_\omega^\pm = \frac{\text{const}}{\omega}$, т. е.

$$v = 1. \quad (4.307)$$

При этом возможны решения, когда: 1) $W_\omega^- = 0$; $W_\omega^+ = \frac{\text{const}}{\omega}$;

2) $W_\omega^+ = 0$; $W_\omega^- = \frac{\text{const}}{\omega}$ и 3) $W_\omega^+ = \frac{\text{const}}{\omega}$; $W_\omega^- = \frac{\text{const}}{\omega}$.

Рассмотрим далее кратко случай неизотермической плазмы, когда возможны взаимодействия с замагниченными ионно-звуковыми колебаниями. Так как эти взаимодействия существенно зависят от отношения энергий ионно-звуковых и магнитных пульсаций, то при достаточно большом уровне магнитозвуковых пульсаций распадами магнитных пульсаций на магнитные можно пренебречь по сравнению с рассеянием на ионах в ионно-звуковые волны. Распадные взаимодействия типа $Ms \leftrightarrow Ms' + A$ либо запрещены, либо относительный фазовый объем, в котором они разрешены, мал. Указанные взаимодействия записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_{\omega, x}^{Ms}}{\partial t} &= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{W_{\omega, x}^{Ms}}{m_i n_0 v_A^2} \cdot \frac{(1-x^2)}{x^2} \left(\frac{T_i}{T_e}\right)^2 \frac{\omega^4}{\omega_{Hi}^2} \times \\ &\times \int x_1^2 dx_1 \left(\omega \frac{\partial W_{\omega, x_1}^M}{\partial \omega} + 2W_{\omega, x_1}^M \right); \end{aligned} \quad (4.308)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_{\omega, x}^M}{\partial t} &= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{W_{\omega, x}^M}{m_i n_0 v_A^2} \cdot \frac{\omega^4}{\omega_{Hi}^2} x^2 \left(\frac{T_i}{T_e}\right)^2 \times \\ &\times \int \frac{1-x_1^2}{x_1^2} dx_1 \left(\omega \frac{\partial W_{\omega, x_1}^{Ms}}{\partial \omega} + 2W_{\omega, x_1}^{Ms} \right); \end{aligned} \quad (4.309)$$

$$\frac{\partial W_{\omega, x}^A}{\partial t} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{W_{\omega, x}^A}{n_0 m_i v_A^2} \cdot \frac{\omega^4}{\omega_{Hi}^2} \cdot \frac{1}{x^2} \left(\frac{T_i}{T_e} \right)^2 \int \frac{(2x_1^2 + x^2 - 3x^2 x_1^2)}{x_1^2} dx_1 \times \\ \times \left(\omega \frac{\partial W_{\omega, x_1}^{Ms}}{\partial \omega} - 2W_{\omega, x_1}^{Ms} \right); \quad (4.310)$$

$$\frac{\partial W_{\omega, x}^{Ms}}{\partial t} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{W_{\omega, x}^{Ms}}{n_0 m_i v_A^2} \cdot \frac{1}{x^2} \left(\frac{T_i}{T_e} \right)^2 \frac{\omega^4}{\omega_{Hi}^2} \int dx_1 \left(\frac{1-x_1^2}{x_1^2} x^2 - \frac{1-x^2}{2} \right) \times \\ \times \left(\omega \frac{\partial W_{\omega, x_1}^A}{\partial \omega} + 4W_{\omega, x_1}^A \right). \quad (4.311)$$

Во-первых, небезынтересно отметить, что спектр замагниченных ионно-звуковых колебаний

$$W_{\omega}^{Ms} = \frac{\text{const}}{\omega} \ln \frac{\omega}{\omega_0}, \quad (4.312)$$

устанавливающийся благодаря процессам взаимодействия Ms -волн между собой согласно (4.310) и (4.309), устойчив относительно возбуждения альфвеновских волн и неустойчив относительно возбуждения магнитозвуковых волн. Накопление последних может привести к обратному действию на ионно-звуковые колебания. Спектр M -волны должен перестраиваться так, чтобы это воздействие обращалось в нуль, тогда из (4.308) получим

$$W_{\omega, x_1} = \frac{W(x_1)}{\omega^2} \quad (4.313)$$

или $\nu = 2$.

С уменьшением ω роль взаимодействия Ms -волны с M -волнами уменьшается и спектр стремится к (4.307).

В заключение следует сказать о некоторых направлениях развития теории стационарной турбулентности. Одно из таких направлений—исследование роли анизотропии турбулентности, особенно вблизи области генерации. Другое направление — исследование единственности стационарных состояний. Часто важно знать, может ли существовать несколько стационарных состояний при заданной мощности генерации турбулентности, и если это возможно, то при каких начальных условиях система приходит к какому-либо из них и возможна ли ситуация, когда система не приходит ни к одному из таких стационарных состояний.

К этим вопросам примыкает более общая проблема—динамика развития турбулентного состояния плазмы. Определенную информацию об этой динамике вблизи состояния стационарной турбулентности может дать изучение второго звука (гл. 8).

СТОХАСТИЧЕСКОЕ УСКОРЕНИЕ ЧАСТИЦ В ТУРБУЛЕНТНОЙ ПЛАЗМЕ

§ 5.1. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ

Взаимодействие заряженных частиц с турбулентной плазмой характеризуется эффективным обменом энергией между частицами и пульсациями, который может привести к эффективному ускорению частиц [229]. Характерно, что обмен энергией может быть сильным для быстрых частиц, энергия которых намного превышает среднюю тепловую энергию основной массы частиц. В жидкостях отсутствует разделение зарядов в коллективных движениях, и для проявления взаимодействий с быстрыми частицами необходимо, чтобы турбулентные пульсации несли магнитные поля. Движущийся элемент жидкости с вмороженным магнитным полем создает электрические поля, пропорциональные его скорости. Эти поля могут ускорять частицы.

Исторически исследование эффектов ускорения быстрых частиц началось именно с этих малоэффективных механизмов, являющихся тем или иным видоизменением механизма Ферми [230], описывающим ускорения частиц при столкновении со случайно движущимися магнитными облаками [46, 231]. Ясно, что в этих условиях ускорение возникает при наличии градиентов магнитного поля, а они в магнитогидродинамических пульсациях весьма малы — порядка длин свободного пробега (см. также ниже), и поэтому эффективность ускорения такими пульсациями весьма низкая. Однако уже в первых работах по теории высокочастотной турбулентности [56] было показано, что существует эффективное непосредственное взаимодействие частиц и турбулентных пульсаций [229]. Эффективность статистического ускорения быстро растет с увеличением частоты пульсаций. Это связано с тем, что с ростом частоты все большую долю полной энергии турбулентных пульсаций составляет энергия их электрического поля. С другой стороны, характерные длины волн высокочастотных пульсаций, как правило, существенно меньше низкочастотных. Стохастический характер взаимодействия частиц в турбулентной плазме обеспечивается случайностью полей турбулентных пульсаций.

Из простого подсчета «числа турбулентных столкновений» следует, что ускорение тем эффективнее, чем меньше время между такими столкновениями. Если, например, $\Delta\epsilon_+$ — энергия, получаемая частицей в отдельном акте взаимодействия, а $\Delta\epsilon_-$ — энергия, теряемая в отдельном акте, то в результате большого числа N актов

взаимодействия, в каждом из которых частица может случайно терять или приобретать энергию, частица получит энергию $\nu\Delta\varepsilon$; $0 < \nu < N$.

Среднее значение энергии ускоряемых частиц может возрастать во времени либо из-за того, что $\Delta\varepsilon_+$ несколько больше $\Delta\varepsilon_-$, либо из-за того, что число актов взаимодействия, приводящих к увеличению энергии частицы ν_+ , несколько превосходит число актов уменьшения энергии ν_- . Для фермиевского ускорения $\Delta\varepsilon_+ = \Delta\varepsilon_-$ и $\nu_+ > \nu_-$. Отдельным актом взаимодействия в этом случае является соударение заряда с движущейся магнитной стенкой. Из элементарной кинематики соударений следует, что при встречных соударениях заряд приобретает энергию $\Delta\varepsilon_+ = 2\varepsilon \frac{u}{c^2} v$, где u — скорость стенки, ε и v — энергия и скорость заряда. При догоняющих соударениях заряд теряет такую же энергию. Если L — среднее расстояние между магнитными стенками, то число встречных соударений $\nu_+ = \nu + \frac{u}{L}$, а догоняющих $\nu_- = \nu - u/L$, поэтому

$$\frac{d}{dt} \langle \varepsilon \rangle = \Delta\varepsilon (\nu_+ - \nu_-) = \frac{4\varepsilon v u}{L c^2}. \quad (5.1)$$

Выражение (5.1) — формула фермиевского ускорения. В конкретных приложениях (см. монографию [46]) величина L принималась равной среднему расстоянию между двумя турбулентными элементами, несущими магнитное поле. Следует отметить, что статистическое ускорение частиц можно осуществить в лабораторном эксперименте с помощью специально создаваемых полей, меняющихся по закону случая. Такой механизм ускорения был предложен Э. Л. Бурштейном, В. И. Векслером и А. А. Коломенским [232]. На этом принципе работают ускорители, получившие название стохатронов [233]. В плазме случайные поля создаются естественным образом при возбуждении турбулентности.

Характерно, что ускорение [см. формулу (5.1)] тем эффективней, чем меньше масштаб турбулентности. Указанные факторы делают как бы наиболее «приспособленными» для ускорения быстрых частиц именно высокочастотные пульсации, среди которых следует выделить ленгмюровские. Заметим, что ленгмюровские пульсации весьма быстро возбуждаются и быстро устанавливается стационарная турбулентность. Вместе с тем все высокочастотные пульсации имеют экспоненциально малое затухание на тепловых частицах, что отражает нерезонансность их с тепловыми частицами. Такие пульсации резонансны именно с быстрыми частицами и поэтому «приспособлены» к ускорению быстрых частиц. Низкочастотные пульсации обычно резонансны с тепловыми частицами и поэтому сильно затухают и приводят к турбулентному нагреву основной массы частиц. Быстрая частица отличается от других частиц тем, что имеет резонансные взаимодействия, которые невозможны для

тепловых частиц. Например, ленгмюровские пульсации, фазовые скорости которых больше v_{Te} , могут ускорять лишь быстрые частицы со скоростями больше v_{Te} .

Надо также отметить, что с общей точки зрения трудно выделить электромагнитные поперечные волны из общего числа турбулентных пульсаций. Во-первых, в пределе малых частот $\omega \rightarrow \omega_{pe}$ они не сильно отличаются от плазмонов. Во-вторых быстрые частицы, ускоренные в турбулентной плазме, становятся источником электромагнитного излучения на частотах $\omega \gg \omega_{pe}$ из-за их рассеяния на турбулентных пульсациях. Это излучение приходит в квазиравновесное состояние с быстрыми частицами и турбулентностью. Поэтому окончательное квазиравновесное распределение быстрых частиц и турбулентности устанавливается вместе с установлением квазиравновесного распределения высокочастотного излучения. Так как с ростом частоты стохастического поля растет эффективность ускорения, то следует специально учитывать эффекты ускорения на высокочастотном излучении. Существенно в данном случае, находится ли это излучение в равновесии с быстрыми частицами и турбулентностью, что зависит от характерной длины L , на которой такое равновесие может установиться. В астрофизических условиях часто характерные размеры плазмы много больше указанного L , тогда как в лабораторных — меньше. В этом существенное различие в типах турбулентности лабораторной и астрофизической плазмы.

Статистическое ускорение частиц в турбулентной плазме — весьма распространенное явление. Достаточно сказать, что именно с наличием турбулентности плазмы связывается ускорение космических лучей. Это было отправной точкой во многих исследованиях по проблеме ускорения космических лучей [46, 229]. С развитием лабораторных экспериментов, в которых тем или иным путем (по желанию экспериментаторов или вопреки ему) возникает турбулентность в плазме, были сразу обнаружены быстрые ускоренные частицы [42—45]. Возникли также практические возможности использования этого эффекта для заполнения магнитных ловушек, получения мощных источников излучения и т. д. Наиболее существенной является энергетическая проблема, а именно: какая доля турбулентной энергии может быть передана в конкретных экспериментальных условиях быстрым частицам и какая идет на нагрев плазмы? Ответ на этот вопрос зависит от типа турбулентных пульсаций, конкретных условий и целей эксперимента. Нагрев наиболее эффективен, когда на пути потоков турбулентной энергии расставлены «ловушки» — области интенсивного циклотронного и черенковского поглощения, тогда как для ускорения необходимо слабое поглощение пульсаций на тепловых частицах. Обе ситуации могут быть экспериментально реализованы.

Эффект ускорения частиц, вообще говоря, не безобиден для турбулентности, так как при большом числе ускоряемых частиц он может существенно сказаться на спектрах турбулентности. При

малом числе ускоряемых частиц можно считать, что спектры турбулентности регулируются внутренними процессами генерации поглощения и спектральной перекачки. Число ускоряемых частиц зависит от мощности инжекции частиц в режим ускорения. Если нет специфического механизма инжекции, то она осуществляется естественным путем с хвостов максвелловских распределений самой турбулентностью (из-за эффектов взаимодействий частиц и пульсаций, пропорциональных W^2 , W^3 , ...) либо парными столкновениями частиц. Следует также подчеркнуть, что плотность энергии ускоренных частиц может существенно превосходить плотность энергии турбулентных пульсаций. Действительно, если имеется стационарная турбулентность, то имеется и постоянный поток турбулентной энергии по спектру. Ускоряемые частицы будут слабо влиять на значение W и спектр турбулентности, если энергия, отобранная ими за время, в течение которого турбулентные пульсации переходят из области генерации в область поглощения, меньше W .

Как было показано в гл. 2, взаимодействие частиц и турбулентных пульсаций приводит к эффектам, описываемых уравнениями диффузии частиц в пространстве скоростей или импульсов частиц. Эти уравнения могут быть использованы для исследования обмена энергией между быстрыми частицами и турбулентными пульсациями

$$\frac{df_p}{dt} = \frac{\partial}{\partial p_i} D_{ij} \frac{\partial f_p}{\partial p_j}. \quad (5.2)$$

Коэффициент диффузии может быть разложен по степеням энергии турбулентности W . Линейный по W член описывает индуцированное излучение и поглощение волн частицами, квадратичный по W член — индуцированное рассеяние и т. д. Вероятности этих процессов найдены выше (см. гл. 2). Диффузию [формула (5.2)] можно рассматривать как процессы, приводящие к изменению модуля импульса $|\mathbf{p}| = p$ и направления движения частиц. Если турбулентность изотропна, то

$$D_{ij} = D_p^l \frac{p_i p_j}{p^2} + D_p^t \left(\delta_{ij} - \frac{p_i p_j}{p^2} \right). \quad (5.3)$$

Коэффициент D^l описывает диффузию по модулям p , а D^t — по углам. Диффузия по углам приводит к изотропизации ускоряемых частиц. В изотропной плазме $D^t \gg D^l$, если $v \gg v_p$, т. е. частицы до приобретения энергии успевают быстро изотропизироваться. Если частицы распределены изотропно, то член с D^t выпадает из (5.2) и оно приобретает вид*

$$\frac{df_p}{dt} = \frac{1}{p^2} \cdot \frac{\partial}{\partial p} p^3 D_p^l \frac{\partial f_p}{\partial p}. \quad (5.4)$$

* Для фермиевского ускорения $D_p^l = \frac{2u^2}{3L} \varepsilon_p$ [234].

Пусть \bar{L}_p — среднее значение величины L_p , относящейся к ускоряемым частицам*, т. е.

$$\bar{L}_p = \int f_p L_p \frac{dp}{(2\pi)^3} \Big/ \int f_p \frac{dp}{(2\pi)^3}. \quad (5.5)$$

Из (5.4) легко найти скорость увеличения средней энергии частиц

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\varepsilon}_p = \overline{\dot{\varepsilon}_p} \quad (5.6)$$

и скорость увеличения среднего квадратичного разброса

$$\frac{\partial}{\partial t} \{ \overline{\varepsilon_p^2} - (\bar{\varepsilon}_p)^2 \} = \overline{(\Delta \dot{\varepsilon}_p)^2}. \quad (5.7)$$

Тогда

$$\dot{\varepsilon}_p = \frac{1}{p^2} \cdot \frac{\partial}{\partial p} p^2 D_p^l \frac{d\varepsilon_p}{dp}; \quad (5.8)$$

$$(\Delta \dot{\varepsilon}_p)^2 = 2D_p^l \left(\frac{d\varepsilon_p}{dp} \right)^2 + 2(\varepsilon_p - \bar{\varepsilon}_p) \dot{\varepsilon}_p. \quad (5.9)$$

Для нерелятивистских скоростей удобно (5.8) записать в виде

$$\dot{\varepsilon}_p = \frac{2}{m \sqrt{\varepsilon_p}} \cdot \frac{\partial}{\partial \varepsilon_p} \varepsilon_p^{3/2}; D^l(\varepsilon_p); \quad \varepsilon_p = \frac{p^2}{2m}. \quad (5.8a)$$

Предположим теперь, что при $t=0$ в турбулентной плазме появляются частицы с энергией $\varepsilon = \varepsilon_0$, т. е. $f(\varepsilon, 0) = n_1 \delta(\varepsilon - \varepsilon_0)$. Тогда при $t=0$ $\bar{\varepsilon}_p = \varepsilon_0$ темп набора энергии есть $\dot{\varepsilon}_p|_{\varepsilon=\varepsilon_0}$, а увеличение разброса по энергиям $(\Delta \dot{\varepsilon}_p)^2|_{t=0} = 2D_p^l \left(\frac{\partial \varepsilon_p}{\partial p} \right)^2 \Big|_{\varepsilon=\varepsilon_0} = G(\varepsilon_0)$.

Поскольку значения средних не зависят от числа ускоряемых частиц n_1 , то можно сказать, что в пределе $n_1 \rightarrow 0$ $\dot{\varepsilon}_p(\varepsilon_0)$ описывает систематическое ускорение отдельной частицы, а $G(\varepsilon_0)$ — флуктуационное ускорение частицы.

Для описания эффектов ускорения часто используется функция распределения, нормированная на энергию f_ε

$$f_p = \frac{1}{4\pi p^2} \cdot \frac{d\varepsilon_p}{dp} f_\varepsilon (2\pi)^3; \quad (5.10)$$

$$\int f_\varepsilon d\varepsilon = n_1. \quad (5.11)$$

* Усреднение по распределению быстрых частиц обозначается чертой сверху в отличие от усреднения по статистическому ансамблю, обозначаемого $\langle \rangle$; масса ускоряемой частицы обозначается m .

Уравнение (5.4) для этой функции распределения записывается в виде

$$\frac{df_{\varepsilon}}{dt} = \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} D^l \left(\frac{d\varepsilon}{dp} \right)^2 f_{\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[\frac{1}{p^2} \cdot \frac{\partial}{\partial p} \cdot p^2 D^l \frac{d\varepsilon}{dp} \right] f_{\varepsilon}. \quad (5.12)$$

В (5.12) отчетливо виден физический смысл отдельных членов. Последний член описывает систематическое ускорение, а первый — флуктуационное. Уравнение (5.12) можно также записать через величины $\dot{\varepsilon}_p$ и $G(\varepsilon)$, характеризующие изменение средних параметров ускоряемых частиц во времени [9],

$$\frac{df_{\varepsilon}}{dt} = \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} \cdot \frac{1}{2} G(\varepsilon) f_{\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (\dot{\varepsilon}_p f_{\varepsilon}). \quad (5.13)$$

Следует заметить, что уравнение (5.4) может быть получено для неанізотропной турбулентности, если считать распределение ускоряемых частиц изотропным. Тогда, усреднив (5.2) по направлениям вектора p , получим (5.4), в котором коэффициент диффузии D усреднен по углам ускоряемых частиц. Так, для индуцированного излучения и поглощения пульсаций частицами магнитоактивной плазмы из (2.195) получим в результате такого усреднения

$$D_p^l = \sum_{\sigma} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int \frac{N_k^{\sigma} dk}{(2\pi)^3} \cdot \frac{(\omega_k^{\sigma})^2}{v^2} \omega_p^{\sigma}(k, \nu) \frac{d\Omega_p}{4\pi}, \quad (5.14)$$

где $d\Omega_p$ — элемент телесного угла вектора p . Для изотропной турбулентности можно записать

$$D_p^l = \sum_{\sigma} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{1}{8\pi v^2} \int_0^{\infty} W_k^{\sigma} dk \int_{-1}^1 \omega_k^{\sigma} dx \int_{-1}^1 dy \int_0^{2\pi} d\varphi \omega_{p,y}^{\sigma}(k, x, \nu), \quad (5.14')$$

$x = \cos(k, \mathbf{H}_0)$; $y = \cos(p, \mathbf{H}_0)$. Для замагниченных частиц удобно пользоваться вероятностями (2.220), тогда как для незамагниченных — (2.223). Следует заметить, что быстрые частицы чаще можно считать незамагниченными, чем тепловые.

В случае неанізотропного распределения частиц также может быть получено уравнение (5.4). Однако коэффициент D^l представляет собой выражение, усредненное по угловому распределению ускоряемых частиц, если их функция распределения есть произведение угловой части на функцию распределения по энергиям. Для изотропных частиц, но неанізотропных пульсаций вместо D^l фигурирует величина, усредненная с функцией, описывающей распределение пульсаций по углам. Быстрая изотропизация пульсаций из-за нелинейных эффектов и ускоряемых частиц в поле изотропных пульсаций делает наиболее интересным анализ эффектов ускорения для изотропных частиц и пульсаций. В магнитном поле, как было выяс-

нено, для некоторых спектров пульсаций не существует изотропных распределений. В этом случае следует учитывать эффекты анизотропии*. Ускоренные частицы, наблюдаемые в экспериментах, могут быть обязаны эффектам ускорения на различных модах турбулентности, но, как правило, распределение ускоренных частиц по направлениям оказывается более или менее изотропным. По-

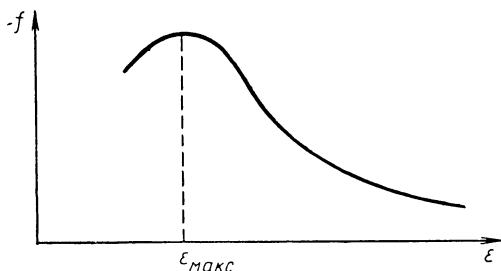


Рис. 5.1. Спектр частиц, ускоренных в турбулентной плазме.

этому ниже мы разберем ускорения на разных типах турбулентных пульсаций, предполагая изотропными быстрые частицы и турбулентность (там, где это возможно). Ускоренные быстрые частицы наблюдались уже в первых опытах по мощным импульсным самосжатым разрядам [236—238] в экспериментах, где плазма возбуждалась быстрыми пучками заряженных частиц [43, 239—241], в экспериментах по турбулентному нагреву [26] и других, когда плазма находилась во внешнем электрическом поле [31, 148], а также при воздействии мощных высокочастотных полей на плазму [44].

Спектры ускоренных частиц, как правило, имеют максимум с относительно слабым спадом в область больших энергий (рис. 5.1). Любопытно, что они как бы в миниатюре напоминают спектры космических электронов и ионов и указывают, по-видимому, на то, что мы сталкиваемся с одним и тем же явлением, характерным для турбулентной плазмы, разнящимся по масштабам. Часто в лабораторных экспериментах эффекты ускорения скоррелированы с возбуждением определенного типа турбулентных пульсаций (высокочастотных или низкочастотных) [43, 148, 98]. Это не оставляет сомнений в том, что ускорение возникает из-за обмена энергией между быстрыми частицами и турбулентными пульсациями.

Задачей теории является исследование относительной эффективности ускорения быстрых частиц различными типами турбулентных пульсаций, влияние эффектов ускорения на спектры турбулентности и объяснение наблюдаемых спектров ускоренных частиц. Часть этих вопросов переплетается с вопросами излучения турбулентной плазмы (см. гл. 6).

* О влиянии эффектов анизотропии турбулентности на ускорение при $H_0 = 0$ см. работу [235].

§ 5.2. СТОХАСТИЧЕСКОЕ УСКОРЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ ЛЕНГМЮРОВСКИМИ ПУЛЬСАЦИЯМИ

Высокочастотными мы называем пульсации, в создании которых участвуют лишь электроны плазмы, а ионы представляют собой неподвижный фон. Для ленгмюровских пульсаций при $H_0 = 0$ из (5.14) получим

$$D^l = \frac{2\pi^2 e^2 \omega_{pe}^2}{v^3} \int_{\frac{\omega_{pe}}{v}}^{\infty} \frac{W_k^l}{k^3} dk. \quad (5.15)$$

Существенная зависимость коэффициента диффузии от энергии частиц возникает для нерелятивистских частиц. Из (5.8) следует [242, 229]

$$\dot{\epsilon}_p = \frac{2\pi^2 e^2}{p} \left\{ \frac{m^2 c^4}{\epsilon_p^2} W_{\frac{\omega_{pe}}{v}}^l + 2 \frac{\omega_{pe}^2}{c^2} \int_{\frac{\omega_{pe}}{v}}^{\infty} \frac{W_k^l}{k^3} dk \right\}. \quad (5.16)$$

Для нерелятивистских скоростей второй член (5.16) имеет относительно первого порядок $\frac{v^2}{c^2} \ll 1$, т. е. темп ускорения полностью определяется спектром турбулентности

$$\dot{\epsilon}_p = \frac{\pi \omega_{pe}^2 m_e}{2n_0 \sqrt{2m\epsilon_p}} W_{\frac{\omega_{pe}}{v}}^l \sqrt{\frac{m}{2\epsilon_p}}. \quad (5.17)$$

Здесь $\epsilon_p = \frac{p^2}{2m}$ — нерелятивистская кинетическая энергия частиц. Наоборот, для ультрарелятивистских частиц темп ускорения падает с ростом энергии

$$\dot{\epsilon}_p = \frac{\omega_{pe}^4 \pi}{\epsilon_p n_0 c} \int_{\frac{\omega_{pe}}{c}}^{\infty} \frac{W_k^l dk}{k^3}. \quad (5.18)$$

Этот эффект имеет простое объяснение. Дело в том, что частица с заданной скоростью взаимодействует со всеми пульсациями, фазовые скорости которых меньше ее скорости. С увеличением скорости частиц увеличивается число турбулентных пульсаций, участвующих в ускорении, и эффект может быстро расти с ростом энергии частиц. Скорость ультрарелятивистских частиц близка к c , и она взаимодействует с одними и теми же пульсациями вне зави-

симости от энергии частиц. Коэффициент диффузии по энергиям постоянен и не зависит от энергии. Отсюда из простой формулы $\epsilon^2 \simeq 4Dt$ получим $\frac{\epsilon}{t} \sim \frac{D}{\epsilon}$, что фактически и содержится в (5.18).

Для ультрарелятивистских частиц уравнение (5.12) приобретает вид

$$\frac{df_{\epsilon}}{dt} = D \frac{\partial^2 f_{\epsilon}}{\partial \epsilon^2} - 2D \frac{\partial}{\partial \epsilon} \cdot \frac{f_{\epsilon}}{\epsilon}; \quad D = D^1 c^2. \quad (5.19)$$

Для нерелятивистских энергий (5.12) можно записать в виде

$$\frac{df_{\epsilon}}{dt} = \frac{2}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \epsilon} \epsilon^{3/2} D^1(\epsilon) \frac{\partial}{\partial \epsilon} \cdot \frac{f_{\epsilon}}{\sqrt{\epsilon}}; \quad \epsilon = \frac{p^2}{2m}. \quad (5.20)$$

Рассмотрим теперь эффекты ускорения, учтя конкретные спектры турбулентности (см. гл. 4), пренебрегая вначале влиянием ускорения на спектры. Для процессов ускорения быстрых частиц существенное значение имеет отношение

$$\eta = \frac{3v_{Te}^2}{cv_{Ti}}. \quad (5.21)$$

Если $\eta \ll 1$, то существуют нерелятивистские частицы, ускоряемые спектром $\frac{\text{const}}{k^{\nu}}$; $2,84 < \nu < 4$, найденным в работе [211].

Тогда $D \sim \epsilon^{\frac{\nu-1}{2}}$ и $\dot{\epsilon}_p \sim \epsilon^{\frac{\nu-1}{2}}$.

При $\nu = 2,84$ имеем $\dot{\epsilon}_p \sim \epsilon^{0,92}$, а при $\nu = 4$: $\dot{\epsilon} \sim \epsilon^{3/2}$. Эти механизмы ускорения значительно более эффективнее фермиевского, для которого при нерелятивистских скоростях $\dot{\epsilon} \sim \sqrt{\epsilon}$ (не говоря уже о том, что безразмерная константа фермиевского ускорения много меньше аналогичной безразмерной константы для ускорения ленгмюровскими пульсациями). При $\epsilon \ll mc^2 \eta^2$ в ускорении участвует спектр $W_k = \text{const}$, т. е. $\nu = 0$ и $\dot{\epsilon} \sim 1/\sqrt{\epsilon}$. При $\eta > 1$, т. е. в достаточно горячей плазме, участок эффективного ускорения исчезает, так как спектр $\nu = 0$ простирается до фазовых скоростей, равных скорости света ($k \sim \frac{\omega_{pe}}{c}$). Наконец, при малых энергиях $\epsilon \ll T_e \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{2/5}$

ускорение определяется спектром $\nu = 5/2$ и $\dot{\epsilon} \sim \epsilon^{3/4}$. Наконец, для ультрарелятивистских частиц $\dot{\epsilon} \sim 1/\epsilon$ темп ускорения электронов и ионов одинаков при $\epsilon \gg m_i c^2$. Схематически темпы ускорения электронов и ионов изображены на рис. 5.2 и 5.3 соответственно для $\eta \ll 1$ и $\eta \gg 1$. Кривая ускорения имеет два максимума — первый в области скоростей частиц порядка $\left(\frac{3m_i}{m_e}\right)^{1/5} v_{Te}$, лишь в несколько раз превышающих тепловую скорость электронов плазмы, а второй — при $\epsilon = mc^2$. Для ионов этот максимум соответствует зна-

чению энергии в m_i/m_e раз большей, а темп ускорения в максимуме $\dot{\varepsilon} = m_e c^2$ для электронов в m_i/m_e раз больше, чем в максимуме $\dot{\varepsilon} = m_i c^2$ для ионов. В области $v < v_{Te} \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/5}$ ускорение электронов эффективнее в $(m_i/m_e)^{7/4}$, а в области $v > v_{Te} (m_i/m_e)^{1/5}$ до $v = \eta c$ — в $(m_i/m_e)^{1/2}$ раз. Коэффициенты пропорциональности в законах ускорения $\dot{\varepsilon}_p \sim \varepsilon^{\frac{v-1}{2}}$ легко находятся через мощность генерации турбулентности Q , если подставить конкретные спектры, найденные в гл. 4. В качестве примера приведем выражение (5.17) для $W = \text{const} = \sqrt{2Q/\alpha}$

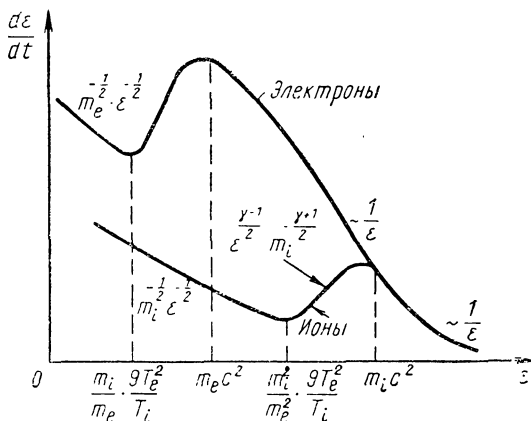


Рис. 5.2. Темпы ускорения электронов и ионов для ленгмюровской турбулентности при $\eta \ll 1$;

$$\eta = \frac{3v_{Te}^2}{cv_{Ti}}$$

$$\frac{\dot{\varepsilon}}{mc^2} = \Gamma \sqrt{\frac{mc^2}{\varepsilon}}; \quad \Gamma = \frac{3\sqrt{3\pi}}{2} \omega_{pe} \frac{v_{Te}^3}{c^3} \cdot \frac{m_e^{3/2} m_i^{1/2}}{m^2} \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right) \sqrt{\frac{Q}{Q_0}}; \quad (5.22)$$

$$Q_0 = \omega_{pe} n_0 T_e.$$

Спектры ускоренных частиц устанавливаются тогда, когда возникает баланс ускорения и торможения. Торможение обязано многим эффектам, среди которых можно выделить специфические для турбулентной плазмы механизмы торможения и механизмы обычные, которые имеют место как в турбулентной, так и нетурбулентной плазме. В качестве примера механизма первого типа можно назвать обратный комптон-эффект ускоренных частиц на турбулентных пульсациях, а в качестве второго — ионизационные потери.

Обратный комптон-эффект наступает при больших энергиях и связан с процессами излучения, которые будут рассмотрены в следующей главе. Наряду с ионизационными потерями возможны и другие, например связанные с адиабатическим расширением плазмы после ее турбулентного нагрева или после ее создания лазером, а в астрофизических условиях — как результат разлета оболочки Сверхновой [243—245]. Устойчивое равновесие между ускорением и торможением возможно в том случае, если кривая торможения

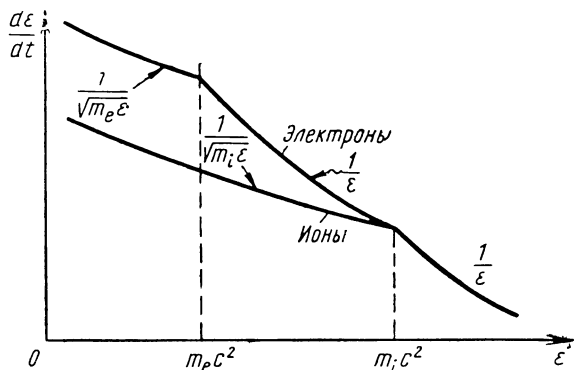


Рис. 5.3. Темпы ускорения электронов и ионов для ленгмюровской турбулентности при $\eta \gg 1$

$$\eta = \frac{3v_{Te}^2}{cv_{Ti}}$$

$\dot{\epsilon}_{\text{дисс}} = f(\epsilon)$ является более крутой, нежели кривая ускорения* (см. рис. 5.2 и 5.3). Если торможение осуществляется из-за ионизационных потерь, то в сильно разреженной плазме ($\epsilon \ll mc^2$) [246]

$$\dot{\epsilon}_{p, \text{ион}} \simeq \frac{\sqrt{m} e^2 \omega_{pe}^2}{\sqrt{2} \epsilon^{1/2}} \ln \frac{\epsilon}{\hbar \omega_{pe}} \quad (5.23)$$

Из рис. 5.2 и 5.3 видно, что участки перед максимумом кривой ускорения не могут давать устойчивых распределений — частицы **будут** «проскакивать» эти участки. Это не значит, что в указанных областях не может быть равновесных распределений ускоряемых частиц. Однако такие равновесные распределения существуют лишь в условиях, когда ускорение намного превосходит торможение. Действительно, уравнение (5.4) имеет стационарное решение

$$p^2 D_p^l \frac{\partial f_p}{\partial p} = \text{const.} \quad (5.24)$$

* Действительно, если это имеет место, то частица с энергией большей, чем равновесная ϵ_* (соответствует пересечению кривых ускорения и торможения), будет тормозиться и частица с энергией меньше ϵ_* — ускоряться.

Это решение означает постоянство потока частиц по энергиям и имеет место, если существует непрерывная инжекция. Ясно, однако, что этот поток останавливается балансом ускорения и торможения. Другими словами, кривая торможения в участке (5.24) всюду значительно ниже кривой ускорения на рис. 5.2 и 5.3. Сделанное утверждение означает, что пересечение кривых ионизационного торможения и ускорения не может приходиться на области энергий максимумов кривых, где $\frac{d}{d\varepsilon} \dot{\varepsilon} > 0$.

Из (5.24) легко определить спектры ускоренных частиц, так как $D \sim \varepsilon^{\frac{\nu-1}{2}}$, то $f_p \sim \varepsilon^{-\nu/2}$ и $f_e \sim f_p \varepsilon^{1/2} \sim \varepsilon^{\frac{-\nu+1}{2}}$, т. е. при $\nu = 2,84$ $f_e \sim 1/\varepsilon^{0,92}$, при $\nu = 0$ $f_e \sim \sqrt{\varepsilon}$, при $\nu = 4$ $f_e \sim 1/\varepsilon^{3/2}$ и $\nu = 5/2$ $f_e \sim 1/\varepsilon^{3/4}$. Мы видим, что спектры ускоренных частиц — степенные, т. е. довольно плавно спадают в область больших энергий, а в ряде случаев и растут ($\nu = 0$). Резкие падения числа ускоренных частиц с ростом энергии наблюдаются в областях эффективного ускорения, темп которого быстро растет с ростом энергии. Это связано с тем, что в таких областях приобретение энергии частицей делает более эффективным дальнейшее ускорение. Следовательно, стационарный поток (5.24) как баланс числа частиц, попадающих в данный интервал энергий $d\varepsilon$ со стороны меньших ε и уходящих из $d\varepsilon$ к большим ε , возникает тогда, когда число частиц больших энергий меньше, чем число частиц меньших энергий. Равновесие с ионизационными потерями в области нерелятивистских энергий возможно на участке $\varepsilon \sim 1/\sqrt{\varepsilon}$, когда согласно (5.15)

$$D^I(\varepsilon) = \frac{3\sqrt{3\pi} \omega_{pe} v_{Te}^3}{4\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{m m_i} m_e^{3/2} \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right) \sqrt{\frac{Q}{Q_0}}. \quad (5.25)$$

Здесь $W_k = \text{const} = \sqrt{\frac{2Q}{\alpha}}$; $\varepsilon = \frac{mv^2}{2}$, Q_0 задается (5.22).

Уравнение (5.20) с учетом ионизационных потерь приобретает вид*

$$\begin{aligned} \frac{df_e}{dt} = & \frac{3\sqrt{3\pi} m_e^{3/2} m_i^{1/2}}{2m^{1/2}} \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right) \omega_{pe} v_{Te}^3 \sqrt{\frac{Q}{Q_0}} \cdot \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{f_e}{\sqrt{\varepsilon}} + \\ & + \frac{v_e}{\sqrt{2}} \sqrt{m} m_e v_{Te}^3 \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{f_e}{\sqrt{\varepsilon}} + T_e \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{f_e}{\sqrt{\varepsilon}} \right) = 0. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Если бы отсутствовала турбулентность $Q = 0$, то ионизационные потери привели бы быстрые частицы в равновесие с электронами

* Второй член (5.26) в ионизационных столкновениях дает флуктуационный разброс энергий, т. е. $\dot{\varepsilon} = 0$, а первый — систематическое торможение $\dot{\varepsilon} \neq 0$.

$f_\varepsilon = \text{const} \sqrt{\varepsilon} e^{-\varepsilon/T_e}$. При наличии турбулентности условие равенства полного потока нулю дает

$$\frac{\sqrt{m_e m_i}}{m} \cdot \frac{3\sqrt{3\pi}}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right) \frac{\omega_{pe}}{v_e} \sqrt{\frac{Q}{Q_0}} \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{f_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{f_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} + T_e \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{f_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} = 0. \quad (5.27)$$

Отсюда

$$f_\varepsilon = \text{const} \sqrt{\varepsilon} \frac{1}{(\varepsilon + \gamma T_e)^\gamma}, \quad (5.28)$$

где

$$\gamma = \frac{m}{\sqrt{m_e m_i}} \sqrt{\frac{2}{3\pi}} \cdot \frac{T_i}{3(T_e + T_i)} \cdot \frac{v_e}{\omega_{pe}} \sqrt{\frac{Q_0}{Q}}. \quad (5.29)$$

Если $\varepsilon \gg T_e \gamma$, то спектр практически является степенным. Заметим здесь также, что (5.29) собственно справедливо при $T_e \lesssim T_i$. При $T_e \gg T_i$, согласно гл. 4, $\alpha \rightarrow \alpha' = \alpha \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right)^2$ и, следовательно, множитель $\frac{T_i}{T_e + T_i}$ в (5.29) должен быть опущен. Формула (5.28) показывает, что в турбулентной плазме функции распределения частиц при больших скоростях никогда не являются максвелловскими, а «отрастают» длинными хвостами ускоренных частиц, плавно по степенному закону спадающими в область больших энергий. Величина показателя степенного спектра γ зависит от мощности генерации Q и резко различна для электронов и ионов. Для электронов величина $\gamma \sim (1-5)$ при $Q \sim Q_0 \frac{1}{N_D^2} \frac{m_e}{m_i} = Q_e^{\text{кр}}$,

а для ионов при $Q \sim Q_0 \frac{1}{N_D^2} \frac{m_i}{m_e} = Q_i^{\text{кр}}$. Ввиду того, что N_D в реальных условиях весьма большое число, даже $Q_i^{\text{кр}}$ невелико. При $Q \gg Q_{e,i}^{\text{кр}}$ $\gamma \rightarrow 0$, т. е. $f_\varepsilon \sim \sqrt{\varepsilon}$. Но это есть решение, которое возникает, если вообще отбросить столкновения. Последнее означает, что для нерелятивистских энергий имеет место постоянный поток ускоряемых частиц по энергиям, а равновесие между ускорением и торможением может наступить лишь при ультрарелятивистских энергиях ускоряемых частиц. Для нахождения спектра ускоренных частиц в этом пределе необходимо использовать уравнение (5.19)

$$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial t} = D \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{f_\varepsilon}{\varepsilon^2} + v_e^{\text{эфф}} \frac{m_e v_{Te}^3}{c} \cdot \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial \varepsilon} = 0. \quad (5.30)$$

Здесь записан лишь эффект систематического уменьшения энергии частиц из-за ионизационных потерь*, $v_e^{\text{эфф}}$ — эффективная частота столкновений, которая лишь численным множителем порядка единицы отличается от v_e ; $v_e^{\text{эфф}}$ описывает эффективную силу трения релятивистских частиц о плазму. Из (5.30) получим

$$f_\varepsilon = \text{const } \varepsilon^2 e^{-\frac{\varepsilon}{mc^2 T_*}}, \quad (5.31)$$

где

$$T_* = \frac{Dc}{mc^2 v_e^{\text{эфф}} m_e v_{Te}^3} \quad (5.32)$$

играет роль эффективной температуры ускоренных частиц в единицах mc^2 . Если $\eta > 1$ [см. (5.21)], то согласно (5.15)

$$D = \frac{3 \sqrt{3\pi} m_e^{3/2} \omega_{pe}}{2 \sqrt{2} n_0} v_{Te}^3 m_i^{1/2} \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right) \sqrt{\frac{Q}{Q_0}} c \quad (5.33)$$

и, следовательно, $T_* = 1/2 \gamma$, где γ выражено формулой (5.29).

Последнее соотношение и показывает, что при $\gamma \ll 1$, когда для нерелятивистских скоростей $f_\varepsilon \sim \sqrt{\varepsilon}$ и столкновения не останавливают потока ускоряемых частиц, эффективная температура $T_* mc^2$ оказывается ультрарелятивистской. Если $\eta \ll 1$, то T_* оказывается в $\frac{2}{2+\nu} \frac{1}{\eta^\nu}$ раз больше (5.33), где ν — показатель спектра турбулентности. Значение $Q^{\text{кр}}$, при котором $\gamma < 1$ и, следовательно, ускорительные процессы приводят, так сказать, автоматически к наличию релятивистских частиц в турбулентной плазме, весьма низко. Так, если $N_D \sim 10^8 \div 10^{10}$, что характерно для астрофизических условий, то $Q_e^{\text{кр}} \sim (10^{-20} \div 10^{-22}) Q_0$. Если теперь обратиться к формуле (4.66), то легко получить оценку, например, при генерации пучком $\Delta v_p \sim v \sim v_{Te} \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/5}$; $Q \sim Q_0 \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{3/5} \frac{108}{\pi} \left(\frac{n_1}{n_0}\right)^2$;

$\gamma \sim \frac{n_1}{n_0} \omega_{pe}$. Сопоставление этого выражения с $Q_e^{\text{кр}}$, как, впрочем, и с $Q_i^{\text{кр}}$, показывает, что даже пучки чрезвычайно малых концентраций уже дают $T_* \gg 1$, т. е. ультрарелятивистские ускоренные электроны и ионы. Фактически минимальные n_1 определяются условием наличия неустойчивости. Граница устойчивости оценивается как $\gamma > v_e$, т. е. $n_1 > n_0 \frac{\omega_{pe}}{v_e} \sim \frac{n_0}{N_D}$ или $Q_{\text{мин}} \sim Q_e^{\text{кр}} \frac{108}{\pi} \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{8/5} \gg Q_e^{\text{кр}}$.

Естественно, при $Q \sim Q_{\text{мин}}$ нельзя пользоваться спектром $W_k = \sqrt{\frac{2Q}{\alpha}}$.

* Флуктуационный член пренебрежимо мал, если $T_e \ll m_e c^2$.

Однако вывод, который получается из этой оценки, весьма ясен и состоит в том, что в условиях сколько-нибудь развитой надкритической турбулентности появление релятивистских ускоренных частиц становится совершенно необходимым, если только турбулентность существует время, достаточное для установления стационарности в спектре турбулентности и спектре ускоренных частиц. Этот вывод имеет важное значение для проблемы происхождения космических лучей и фактически объясняет, почему космическая плазма, которая обычно турбулентна, является универсальным источником, генерирующим релятивистские электроны и ионы.

Следует также отметить, что при больших энергиях частиц вступает в игру торможение из-за обратного комптон-эффекта на турбулентных пульсациях, имеющего оценку (см. гл. 6)

$$\dot{\varepsilon} = - \left(\frac{m_e}{m} \right)^2 \frac{\omega_{pe}^4}{\pi n_0^2 c^3} \left(\frac{\varepsilon}{mc^2} \right)^2 W^l; \quad W^l = \frac{Q}{v_e}. \quad (5.34)$$

Эти потери больше ионизационных при $\frac{\varepsilon}{mc^2} = T_*$, если

$$Q > Q_{кр} \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \cdot \frac{c}{v_{Te}} \sqrt{\frac{\omega_{pe}}{v_e}} = Q_{кр}^*. \quad (5.35)$$

Если $Q \gg Q_{кр}^*$, то потери (5.34) превосходят ионизационные при $\frac{\varepsilon}{mc^2} \ll T_*$. В плотной высокотемпературной плазме $Q_{кр}^*$ лишь на несколько порядков отличается от $Q_{кр}$. Важно, однако, абсолютное значение $Q_{кр}^*$, которое достаточно мало. Действительно, требования $W \ll n_0 T_e$ приводят $Q < Q_{макс} \approx v_e n_0 T_e \approx Q_0 \frac{v_e}{\omega_{pe}}$ и

$Q_{кр}^*/Q_{макс} \approx \sqrt{\frac{v_e}{\omega_{pe}}} \cdot \frac{c}{v_{Te}} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}$. Таким образом, спектр ускоренных частиц при больших ультрарелятивистских энергиях определяется уже радиационным торможением из-за обратного комптон-эффекта, и как будет видно из дальнейшего, здесь возникают и более мощные радиационные механизмы ускорения (см. гл. 6)*. Механизм ускорения на ленгмюровских колебаниях, таким образом, приводит к генерации ультрарелятивистских электронов и ионов, т. е. в космических масштабах космических и субкосмических лучей. Он может рассматриваться как механизм инжекции для радиационных механизмов ускорения, работающих при $Q > Q_{кр}^*$ (гл. 6). Быстрые ускоренные частицы становятся мощным источником излучения турбулентной плазмы (гл. 6). На рис. 5.4 изображены спектры ускоренных электронов и ионов при $Q_{кр} < Q < Q_{кр}^*$ и на рис. 5.5 при $Q \ll Q_{кр}$ и $Q > Q_{кр}^*$. В лабораторных экспериментах очень боль-

* При чем спектры ускоренных частиц становятся степенным $\text{const} \frac{1}{\varepsilon \nu}$.

шие энергии не достигаются либо потому, что плазма существует относительно небольшое время, либо потому, что ускоренные частицы не в состоянии удерживаться магнитным полем, и, тем самым, выходят из объема плазмы. Последний эффект может быть грубо учтен в (5.26) членом с «катастрофическими потерями» — f_e/τ . Максимальная энергия частиц тогда будет порядка энергии, при которой ларморовский радиус частиц сравнивается с размером системы.

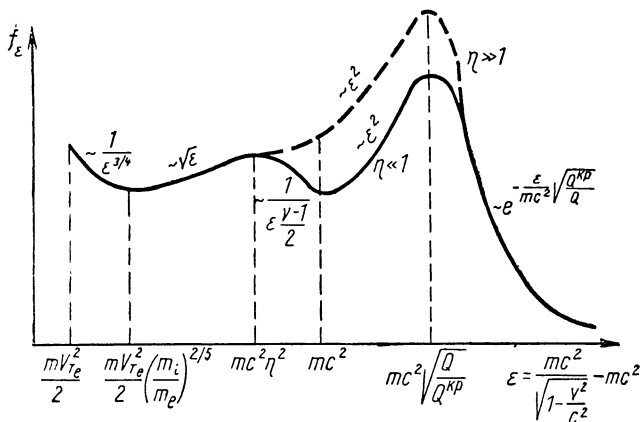


Рис. 5.4. Примерный вид спектров электронов и ионов, ускоренных ленгмюровской турбулентностью при $Q^{KP} < Q < Q_{KP}^*$.

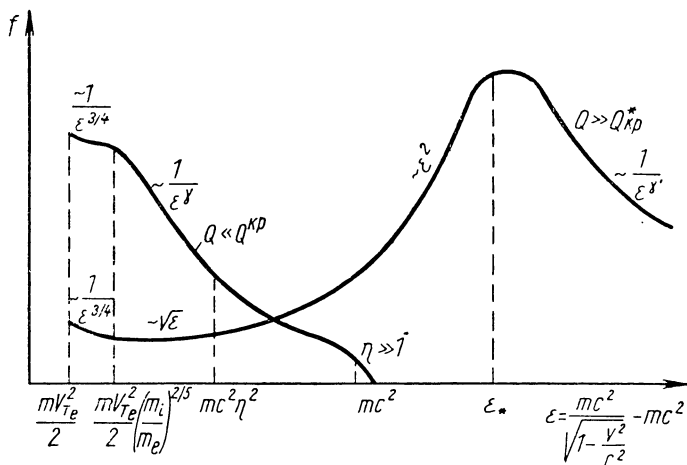


Рис. 5.5. Примерный вид спектров электронов и ионов, ускоренных ленгмюровской турбулентностью при $Q \ll Q^{KP}$ и $Q \gg Q_{KP}^*$.

§ 5.3. СТОХАСТИЧЕСКОЕ УСКОРЕНИЕ ВЫСОКОЧАСТОТНЫМИ ПУЛЬСАЦИЯМИ В МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ

При наличии магнитных полей возникает новый параметр, характеризующий замагниченность ускоряемых частиц

$$\beta = \frac{kv}{\omega_H}. \quad (5.36)$$

При $\beta \ll 1$ частицы замагничены, а при $\beta \gg 1$ — нет. В слабом магнитном поле $\omega_{pe} \ll \omega_{He}$ ленгмюровские пульсации и их спектр мало меняются. С другой стороны, $v > \frac{\omega_{pe}}{k} \gg \frac{\omega_{He}}{k} \gg \frac{\omega_H}{k}$ (последнее равенство только для нерелятивистских электронов), т. е. $\beta \gg 1$. Поэтому, казалось бы, можно использовать вероятность (2.223) для незамагниченных частиц, и результаты совпадут с полученными в § 5.2. Это в общем и подтверждается непосредственным расчетом с помощью коэффициента диффузии (5.14). Применительно к продольным пульсациям (5.14) может быть записано в виде

$$D^l = \sum_{v=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi^2 e^2}{v^2} \int_0^{\infty} dk \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 dy \frac{W_k^l \omega_k^l}{k^2 \left. \frac{\partial \epsilon_k^l}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_k^l}} J_v^2(\xi) \times \\ \times \delta(\omega_k^l - kvxy - v\omega_H); \quad (5.37)$$

$$\xi = \frac{kv}{\omega_H} \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2} = \beta \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2}. \quad (5.38)$$

При $\beta \gg 1$ законами сохранения разрешены процессы до очень больших v ($\beta \sim v$), и следовательно, суммирование по v можно заменить интегрированием, так как $\frac{\Delta v}{v} \sim \frac{1}{v} \ll 1$. Получим

$$D^l = \frac{2\pi^2 e^2}{v^2} \int_0^{\infty} dk \frac{W_k}{k^2} \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 dy \frac{\omega_k^l}{\left. \frac{\partial \epsilon_k^l}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_k^l}} \times \\ \times \frac{1}{|\omega_H|} J_{\alpha-\beta xy}^2 (\beta \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2}); \quad (5.39) \\ \alpha = \omega_k^l / \omega_H$$

Наибольший вклад дают точки, в которых аргумент функции Бесселя равен индексу $\omega_k^l = kvxy + kv \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2} = k_z v_z + k_{\perp} v_{\perp}$. Но это как раз соответствует резонансному черенковскому условию без магнитных полей. Фактически функция Бесселя, входящая в (5.39), заменяющая δ -функцию, дает конечную ширину резонанса $\omega = kv$. Из асимптотики функции Бессе-

$$\begin{aligned} & \frac{J_{\omega_k^\sigma - kvxy}}{\omega_H} \left(\frac{kv}{\omega_H} \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2} \right) = \\ & = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{(\omega_k^\sigma - kvxy)^2 - k^2 v^2 (1-x^2)(1-y^2)}{3(\omega_k^\sigma - kvxy)}} \times \\ & \times K_{1/3} \left(\frac{[(\omega_k^\sigma - kvxy)^2 - k^2 v^2 (1-x^2)(1-y^2)]^{3/2}}{3\omega_H (\omega_k^\sigma - kvxy)^2} \right), \end{aligned} \quad (5.40)$$

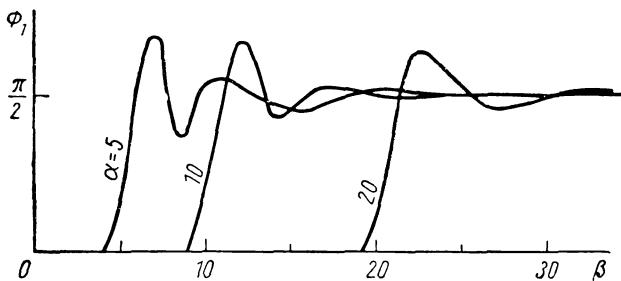


Рис. 5.6. График $\Phi_1(\alpha, \beta)$.

записанной для $(\omega_k^\sigma - kvxy)^2 > k^2 v^2 (1-x^2)(1-y^2)$, можно оценить ширину резонанса

$$\frac{\Delta\omega}{kv} \sim \left(\frac{\omega_H}{kv} \right)^{2/3} = \frac{1}{\beta^{2/3}}. \quad (5.41)$$

Асимптотика (5.40) дает экспоненциально быстрое убывание, если смещение от резонанса превосходит (5.41). Это соответствует тому, что подынтегральное выражение (5.39) попадает в область, запрещенную $\delta(\omega - kv)$ ($\omega > kv$). При выполнении обратного неравенства $(\omega_k^\sigma - kvxy)^2 < k^2 v^2 (1-x^2)(1-y^2)$ необходимо использовать асимптотику функций Бесселя через $J_{1/3}$ и $J_{-1/3}$ (см. работу [248]). Она дает затухающие осцилляции. Это соответствует области, разрешенной $\delta(\omega - kv)$. Коэффициент диффузии можно записать в виде, близком к (5.15) [249],

$$D^I = \frac{4\pi e^2 \omega_{pe}^2}{v^3} \int_0^\infty dk \frac{W_k}{k^3} \Phi_1(\alpha, \beta); \quad \alpha = \frac{\omega_{pe}}{\omega_H}, \quad \beta = \frac{kv}{\omega_H}, \quad (5.42)$$

где при $\alpha = \frac{\omega_{pe}}{\omega_H} \rightarrow \infty$ имеем $\Phi_{1, \infty}(\alpha, \beta) \rightarrow \begin{cases} \pi/2 & \beta > \alpha \\ 0 & \beta < \alpha. \end{cases}$

Вид $\Phi_1(\alpha, \beta)$ как функции β для $\alpha = 5; 10; 20$, полученный численным расчетом, приведен на рис. 5.6. Из рисунка видно, что кривые очень мало заходят в область, запрещенную резонансом. Однако осцилляции в разрешенной области при не очень больших α затухают не очень быстро. Для другой ветви продольных колебаний $\omega_k^\sigma = \omega_{He} |\cos \theta|$ получим:

$$D^l = \frac{4\pi e^2 \omega_{He}^4}{\omega_{pe}^2 v^3} \int_0^\infty dk \frac{W_k}{k^3} \Phi_2(\alpha, \beta); \quad (5.43)$$

$$\alpha = \frac{\omega_{He}}{\omega_H}, \quad \beta = \frac{kv}{\omega_H}.$$

В данном случае условие $\omega = kv$ фактически означает $k > \frac{\omega_{He} |x|}{v(xy + \cos \varphi \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2})}$, и в принципе при $x \rightarrow 0$ возможны весьма малые значения k . Однако минимальные k определяются либо условием замагниченности $k > \frac{\omega_H}{v}$, либо условием существования продольных гирочастотных плазменных волн $k > \frac{\omega_{pe}}{c}$. Условие замагниченности легче всего получить из (5.37). При $\omega_k^\sigma \rightarrow 0$ работает только $v=1$ и отсюда $kv > \omega_H$. В соответствии со сказанным $\Phi_2(\alpha, \beta)$ не обращается быстро в нуль при $\beta < \alpha$ в отличие от рис 5.6. На рис. 5.7 изображен график Φ_2 , из которого видно, что Φ_2 обращается в нуль при $\beta < 1$. Асимптотическое значение Φ_2 при $\beta \rightarrow \infty$ равно $\frac{\pi}{15}$. Оно достигается при $\beta \gg \alpha$. В области $k \ll \frac{\omega_{pe}}{c}$ ветвь $\omega_k^\sigma = \omega_{He} |\cos \theta|$ непрерывно переходит в вистлеры. Для электронов наибольшее значение параметра $\beta \approx \frac{\omega_{pe}}{\omega_{He}} \cdot \frac{v}{c}$, и их можно считать незамагниченными при $\frac{v}{c} \gg \frac{\omega_{He}}{\omega_{pe}}$. Для ионов же $\beta_{\text{макс}} \approx \frac{m_i}{m_e} \cdot \frac{\omega_{pe}}{\omega_{He}} \cdot \frac{v}{c}$. Минимальное значение β в $\sqrt{\frac{m_e}{m_i}}$ раз меньше, и поэтому в не очень слабом магнитном поле электроны могут быть замагниченными. В условиях незамагниченности

$$D^l = \frac{2\pi^2 \omega_{He}^2 e^2 c^2}{3v\omega_{pe}^4} \int \frac{W_k^w}{\omega_H} k dk. \quad (5.44)$$

Нижний предел здесь приближенный и соответствовал бы в (5.43) замене Φ_2 асимптотическим значением $\pi/15$ вплоть до $\beta \sim 1$ (см. графики функций Φ_2 на рис. 5.7). Однако для оценки эффекта (5.44) является удобной формулой. На рис. 5.8 приведены значения $\Phi_3(\alpha, \beta)$ для вистлеров в формуле

$$D^I = \frac{4\pi\omega_{He}^2 e^2}{v\omega_{pe}^4} \int \Phi_3(\alpha, \beta) W_k^\omega k dk; \quad (5.45)$$

$$\alpha = \frac{\omega_k^\omega}{\omega_H}; \quad \beta = \frac{kv}{\omega_H}.$$

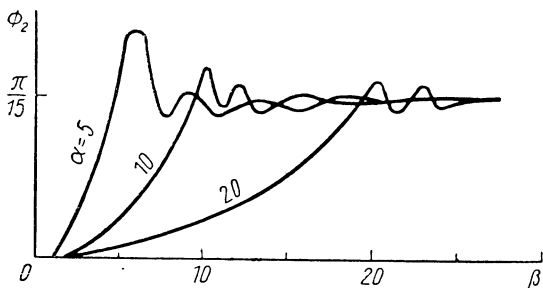


Рис. 5.7. График $\Phi_2(\alpha, \beta)$.

Надо также иметь в виду, что нижний предел в (5.44) следует опустить, если $\frac{v}{c} \gg \frac{\omega_H}{\omega_{pi}}$, так как минимальные k для вистлеров есть ω_{pi}/c и в этом случае коэффициент диффузии (5.44) хорошо аппроксимирует точный результат. Условие

$$\frac{v}{c} \gg \frac{\omega_H}{\omega_{pi}} \quad (5.46)$$

может быть хорошо выполнено для ионов, и особенно тяжелых. Эффект ускорения на вистлерах в пределе (5.46) не зависит от спектра турбулентности вистлеров. При этом D пропорционально $1/\sqrt{\epsilon}$, а следовательно, согласно (5.8') $\dot{\epsilon} \sim 1/\sqrt{\epsilon}$ и, вообще говоря, ускорение вистлерами значительно менее эффективно, чем ленгмюровскими пульсациями. Однако оно обладает тем преимуществом, что ускоряться могут частицы весьма малых энергий и, в частности, тяжелые ионы, тогда как ленгмюровские пульсации могут эффективно ускорять лишь частицы, скорости которых больше v_{Te} . Для случая замагниченных частиц основной вклад в коэффициент диффузии дают резонансы $\nu = \pm 1$ и

$$D^I = \frac{\pi^2 e^2}{3\omega_{pe}^2} \omega_{He} \int_{\frac{2}{k} > \frac{\omega_{pe}^2}{c^2} \left| \frac{\omega_H}{\omega_{He}} \right|} W_k^\omega dk \left(1 - \frac{|\omega_H| \omega_{pe}^2}{|\omega_{He}| k^2 c^2} \right)^2. \quad (5.47)$$

Так как $k \ll \omega_{pe}/c$, то коэффициент диффузии (5.47) не обращается в нуль лишь для ионов или ультрарелятивистских электронов.

В сильном магнитном поле $\omega_{He} \gg \omega_{pe}$ ускорение на ветви $\omega = \omega_{He}$ обычно соответствует немагнитным частицам

$$D^l = \frac{4\pi e^2 \omega_{pe}^2}{v^3} \int_{\frac{\omega_{He}}{v}}^{\infty} \frac{W_k}{k^3} dk \Phi_4(\alpha, \beta). \quad (5.48)$$

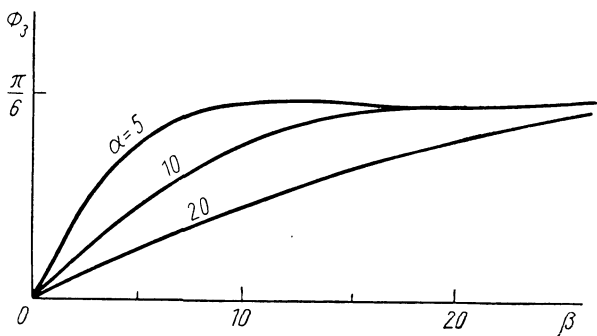


Рис. 5.8. График $\Phi_3(\alpha, \beta)$.

Для нерелятивистских электронов нижний предел является приближенным, так как на этом пределе электроны становятся немагнитными. Точное значение форм-фактора $\Phi_4(\alpha, \beta)$ при $\beta \rightarrow 1$ есть

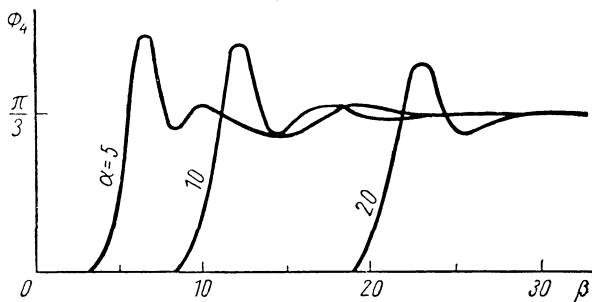


Рис. 5.9. График $\Phi_4(\alpha, \beta)$.

$\frac{1}{6}(1 - \beta)^3$, а при $\beta \gg 1$ есть $\frac{\pi}{3}$. Для релятивистских электронов и ионов $\alpha \gg 1$ и поэтому формула (5.48) с $\Phi_4 = \frac{\pi}{3}$ может хорошо аппроксимировать результат. На рис. 5.9 изображены функции $\Phi_4(\alpha, \beta)$. Для ветви замагниченных ленгмюровских колебаний $\omega = \omega_{pe} |\cos \theta|$ в сильном магнитном поле

$$D^l = \frac{4\pi e^2 \omega_{pe}^2}{v^3} \int \frac{W_k dk}{k^3} \Phi_5(\alpha, \beta). \quad (5.49)$$

Величина Φ_5 при $\alpha > \beta$, $\beta \gg 1$ равна $\pi/6$. Однако для колебаний $\omega_{He} |\cos \theta|$ (в слабом поле) нижний предел (5.49), грубо говоря, определяется условием замагниченности частиц $k > \frac{\omega_H}{v}$. На рис. 5.10 изображена функция Φ_5 . Из этого рисунка также следует, что замагниченность колебаний снижает запрет на ускорение частиц малых энергий.

Приведем, наконец, для замагниченных потенциальных колебаний результат, соответствующий пределу $\beta \ll 1$, т. е. в области,

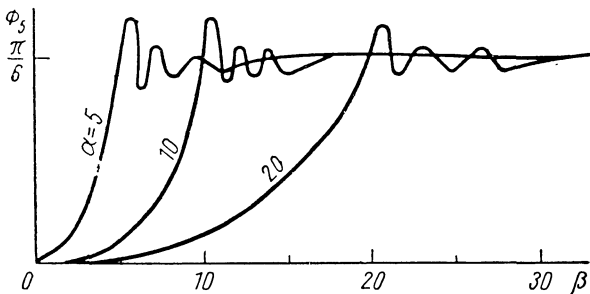


Рис. 5.10. График $\Phi_5(\alpha, \beta)$.

в которой частицы являются замагниченными. Кривые рис. 5.7 и 5.10 весьма слабо заходят в эту область, однако относящиеся сюда результаты важны для проблем инжекции. В этой области можно получить явные аналитические выражения для коэффициентов диффузии.

Из (5.14') легко получить, что в слабом магнитном поле для $\omega_k^\sigma = \omega_{He} |\cos \theta|$ лишь $v = 1$ дает вклад

$$D^l = \frac{\pi^2}{3} \cdot \frac{\omega_{He} e^2}{\omega_{pe}^2} \left(1 - \frac{\omega_H^2}{\omega_{He}^2}\right)^2 \int W_k dk. \quad (5.50)$$

Для ультрарелятивистских электронов и ионов $\omega_H \ll \omega_{He}$ коэффициент диффузии оказывается одинаковым. Для ветви $\omega_{pe} |\cos \theta|$ в сильном магнитном поле получим в условиях сильной замагниченности и $v < \omega_{pe}/k$

$$D^l = \frac{2\pi^2 e^2}{3\omega_{pe}} \left(1 - \frac{\omega_H^2}{\omega_{pe}^2}\right) \int W_k dk. \quad (5.51)$$

Темп инжекции (5.51) трудно сравнивать с (5.50), так как они относятся к разным значениям магнитных полей. Условие $\omega_H < \omega_{pe}$ вместе с $\omega_{He} \gg \omega_{pe}$ указывает, что в очень сильных магнитных полях $\omega_{Hi} \gg \omega_{pe}$ инжектироваться механизмом (5.51) могут только тяжелые ионы $m > m_i$. Как (5.50), так и (5.51) не зависят от детального вида спектра турбулентности.

§ 5.4. СТОХАСТИЧЕСКОЕ УСКОРЕНИЕ ЧАСТИЦ
 ВЫСОКОЧАСТОТНЫМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ
 В МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ

Как было выяснено, возникновение релятивистских электронов в турбулентной плазме является совершенно естественным ее проявлением. При наличии магнитных полей также по необходимости должно возникнуть интенсивное синхронное излучение [46]. Однако частицы, находящиеся в поле этого излучения, не только спонтанно теряют энергию на излучение, но могут приобретать ее за счет индуцированного поглощения и излучения [250]. Действительно, вывод о том, что эффект ускорения должен существовать непосредственно, следует из (5.14). В пределе весьма высоких частот $\omega \gg \omega_{pe}$ можно пренебречь наличием плазмы. Проектируя Γ_{ν} на два ортогональных поперечных орта [см. (2.216)], получаем

$$\Gamma_{1, \nu} = \frac{\omega k_z - k^2 v_z}{k_{\perp} k} J_{\nu}(\xi); \quad \Gamma_{2, \nu} = -i v_{\perp} J'_{\nu}(\xi). \quad (5.52)$$

Усредненная по поляризациям вероятность излучения приобретает хорошо известный вид [247]

$$\begin{aligned} \omega_p^t(\mathbf{k}, \nu) = (2\pi)^2 \frac{e^2}{\omega} & \left\{ \frac{(\cos \theta - v_z)^2}{\sin^2 \theta} J_{\nu}^2 \left(\frac{kv_{\perp} \sin \theta}{\omega_H} \right) + \right. \\ & \left. + v_{\perp}^2 J_{\nu}^2 \left(\frac{kv_{\perp} \sin \theta}{\omega_H} \right) \right\} \delta(\omega - \nu \omega_H - kv_z \cos \theta). \end{aligned} \quad (5.53)$$

При больших частотах спектр излучения практически непрерывен и можно сумму по ν в (5.14) заменить интегралом

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_p = \frac{e^2}{2} \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 dy \int_0^{\infty} W_{\omega}^t d\omega & \left\{ \omega x \frac{\partial}{\partial p_z} + \frac{\omega \omega_H}{v_{\perp}} \cdot \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} \cdot \frac{(1 - v_z x)}{\omega_H} \right\} \times \\ \times \frac{2\pi^2}{\omega \omega_H} & \left\{ \frac{(x - vy)^2}{1 - x^2} J_{\frac{\omega}{\omega_H}(1 - vxy)}^2 \left(\frac{\omega}{\omega_H} v \sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - y^2} \right) + \right. \\ & \left. + v^2 (1 - y^2) J_{\frac{\omega}{\omega_H}(1 - vxy)}^2 \left(\frac{\omega}{\omega_H} v \sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - y^2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Здесь $W^t = \int W_{\omega}^t d\omega$ — плотность энергии электромагнитного излучения.

Рассмотрим два случая: 1) релятивистские частицы движутся почти поперек магнитного поля; 2) распределение релятивистских частиц изотропно. В первом случае можно в (5.54) опустить интегрирование по y , положив $y = 0$. Если использовать далее асимпто-

$$J_{\frac{\omega}{\omega_H}} \left(\frac{\omega}{\omega_H} v \sqrt{1-x^2} \right) = \frac{\sqrt{2\rho}}{\pi \sqrt{3}} K_{1/3} \left(\frac{1}{3} (2\rho)^{3/2} \right); \quad (5.55)$$

$$2\rho = \frac{m^2 c^4}{e^2} + x^2$$

($x^2 \ll 1$ в силу того, что релятивистская частица излучает в основном по направлению своего движения), то (5.54) приобретает вид [250]

$$\varepsilon_p = \frac{9\sqrt{3}\pi}{2\varepsilon} e^2 \omega_H^3 \left(\frac{\varepsilon}{mc^2} \right)^7 \int_0^\infty \frac{W_\omega^t}{\omega^3} c^2 \xi^3 K_{5/3}(\xi) d\xi, \quad (5.56)$$

где

$$\xi = \frac{2}{3} \cdot \frac{\omega}{\omega_H} \left(\frac{mc^2}{\varepsilon} \right)^3. \quad (5.57)$$

Распределение электромагнитного излучения по частотам может быть различным, но наибольший интерес представляет тот спектр, который естественным образом вырабатывается самими релятивистскими электронами. Как показано в работе [46] (см. также гл. 6), в области низких частот, где существенную роль играет реабсорбция,

$$W_\omega^t \simeq \text{const } \omega^{5/2}. \quad (5.58)$$

Тогда легко получить из (5.56) $\varepsilon_p \simeq \text{const } \varepsilon^2$, т. е. значительно более быструю зависимость эффекта ускорения от энергии, нежели для фермиевского ускорения. Спектр (5.58) не может простирается до $\omega \rightarrow \infty$ и обрывается обычно при ω_* , величина которой зависит от размеров объекта и длины реабсорбции излучения. В условиях, когда спектр излучения W_ω^t обрывается на ω_* или спадает по степенному закону $W_\omega = \frac{\text{const}}{\omega^v}$; $v > 1$, эффективное ускорение $\sim \varepsilon^2$ прекращается при $\left(\frac{\varepsilon_*}{mc^2} \right)^2 \simeq \frac{\omega_* mc}{eH}$, коэффициент диффузии по энергиям становится постоянным, а $\varepsilon \simeq \frac{\text{const}}{\varepsilon}$. Сходные результаты получаются при изотропном распределении релятивистских частиц. В этом случае коэффициент диффузии согласно (5.53) и (5.14) может быть записан в виде

$$D^t = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{e^2 \pi^2}{v^2} \int_0^\infty d\omega W_\omega^t \left(\frac{\nu \omega_H}{\omega} \right)^2 \int_{-1}^1 dx' \int_{-1}^1 dy \times$$

$$\times \delta \left(v\omega_H - \omega \frac{1-v^2 y^2}{1-vx' y} \right) \left[v^2 \frac{1-y^2}{1-v^2 y^2} J_v^2(\xi') + \frac{x'^2}{1-x'^2} J_v^2(\xi') \right]; \quad (5.59)$$

$$\xi' = v\nu \frac{\sqrt{1-x'^2} \sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-v^2 y^2}}, \quad (5.60)$$

где x' — косинус угла между направлением \mathbf{k} и \mathbf{H}_0 в системе отсчета, в которой частицы имеют $v_z = 0$. Интегрирование по углам x' производится так же, как и для отдельной частицы в вакууме (см. работу [247]), если учесть, что $x' \ll 1$, так как частица излучает в основном в направлении своего движения,

$$D^I = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} 2 \frac{e^2 \pi^2}{v^2} \int_0^{\infty} d\omega W_{\omega}^t \left(\frac{v\omega_H}{\omega} \right)^2 \int_{-1}^1 dy \delta(v\omega_H - \omega + \omega v^2 y^2) \times \\ \times \left[\frac{1}{v} u J'_{2\nu}(2\nu u) - \frac{1-u^2}{u} \int_0^u J_{2\nu}(2\nu\xi) d\xi \right]; \quad (5.61)$$

$$u = \sqrt{1 - \frac{m^2 c^4 \omega}{\varepsilon^2 v\omega_H}}. \quad (5.62)$$

Используя асимптотику функций Бесселя [247], получаем [251]

$$D^I = \frac{e^2 \pi}{\sqrt{3}} \omega_H^{1/2} \frac{m^2 c^4}{\varepsilon^2} \int_0^{\infty} d\omega \frac{W_{\omega}^t}{\omega^{3/2}} \int_{\frac{\omega}{\omega_H}}^{\infty} d\xi' K_{5/3}(\xi') \times \\ \times \sqrt{\frac{\omega}{\omega_H}} \sqrt{1 - \frac{\xi'^2}{\xi'^2}}. \quad (5.63)$$

Если вместо (5.58) записать

$$W_{\omega}^t = \frac{1}{\omega_*} I \left(\frac{\omega}{\omega_*} \right)^{\nu'}, \quad (5.64)$$

то при $\frac{\varepsilon}{mc^2} \ll \sqrt{\frac{mc\omega_*}{eH}}$ получим [251]

$$D^I = \frac{\pi^{3/2} 3^{\nu'-1/2} I e^2}{8eH} mc \left(\frac{eH}{mc\omega_*} \right)^{\nu'-1} \times \\ \times \left(\frac{\varepsilon}{mc^2} \right)^{2\nu'-2} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu'}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu'}{2} + \frac{4}{3}\right) \Gamma\left(\frac{\nu'}{2} - \frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu'}{2} + \frac{3}{2}\right)}. \quad (5.65)$$

Таким образом, при $v' = \frac{5}{2}$, $D \sim \epsilon^3$ и $\dot{\epsilon} \sim \epsilon^2$, т. е. изотропный случай качественно совпадает с рассмотренным выше (отличаются численные коэффициенты в D). Однако анизотропные распределения релятивистских частиц могут быстро ликвидироваться хотя бы из-за синхротронной неустойчивости [252] и изотропные распределения больше соответствуют реальным распределениям в космических объектах.

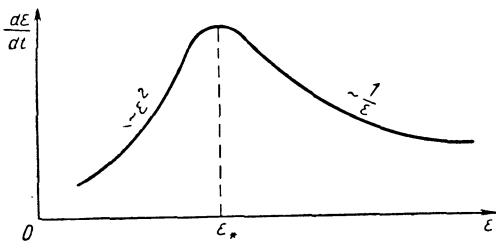


Рис. 5.11. Темп ускорения релятивистских электронов синхротронным излучением.

На рис. 5.11 схематически изображен ход кривой $\dot{\epsilon} = f(\epsilon)$ при ускорении высокочастотным излучением. Кривая сходна по виду с кривой ускорения ленгмюровскими пульсациями, однако максимум находится в области ультрарелятивистских энергий и зависит существенно от размера объекта, плотности излучения и других характеристик. Увеличение темпа ускорения с ростом энергии частиц аналогично случаю ленгмюровских пульсаций происходит от увеличения интенсивности с частотой и, следовательно, связано с тем, что на частицы больших энергий действует большая суммарная плотность излучения. Падение эффекта ускорения объясняется насыщением D .

Обсудим теперь роль плазмы в рассмотренных механизмах ускорения. Пусть, как и выше, $\omega \gg \omega_{He}$. В тензоре диэлектрической проницаемости можно пренебречь ω_{He}

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}. \quad (5.66)$$

Несмотря на то, что показатель преломления слабо отличается от единицы, наличие плазмы может существенно сказаться на ускорении ультрарелятивистских частиц [253]. В данном случае важно, насколько $v^2 = c^2 \left(1 - \frac{m^2 c^4}{\epsilon^2}\right)$ близко $\frac{c^2}{\epsilon(\omega)} = c^2 \left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\right)$. Из сравнения следует, что плазма существенно сказывается при $\omega < \omega_{pe} \frac{\epsilon}{mc^2}$. Вероятность излучения при $\epsilon(\omega) \neq 1$ легко найти из общих формул, если использовать (5.52) и $k^2 c^2 = \omega^2 \epsilon(\omega)$, и является несложным обобщением результата, полученного впервые в ра-

боте [248] (см. также [254])

$$\omega_{p_z, p_\perp}(\mathbf{k}, \nu) = \frac{(2\pi e)^2}{\varepsilon(\omega)\omega} \delta(\omega - \omega_H \nu - \omega v_z x \sqrt{\varepsilon(\omega)}) \times \\ \times \left\{ \frac{(x - \sqrt{\varepsilon(\omega)} v_z)^2}{1 - x^2} J_\nu^2(\xi') + v_\perp^2 \varepsilon(\omega) J_\nu^2(\xi') \right\}. \quad (5.67)$$

$$\xi' = (1 - \sqrt{\varepsilon} v_z x)^{-1} \nu \sqrt{\varepsilon} v_\perp \sqrt{1 - x^2}; \quad x = \cos \theta.$$

Поскольку качественно изотропный случай и случай движения частиц перпендикулярно к магнитному полю дают одинаковые результаты, рассмотрим здесь более простой случай $v_z = 0$. Тогда получим соотношения, сходные с (5.56):

$$\dot{\varepsilon}_p = \frac{e^2 \omega_H^3 2\pi^2}{\varepsilon \sqrt{3}} \int_0^\infty v^2 dv \left\{ 2(\eta_1 + \eta) \xi_1 K_{5/3}(\xi_1) - \right. \\ \left. - 3\eta \xi_1 K_{1/3}(\xi_1) - 2\eta \int_{\xi_1}^\infty K_{1/3}(\xi_1) d\xi_1 \right\} \frac{W_\omega^t}{\omega^3}; \quad (5.68)$$

$$\omega = \omega_H \nu; \quad \eta_1 = \frac{m^2 c^4}{\varepsilon^2}; \quad \eta = 1 - \varepsilon^2(\omega) = \frac{\omega_{pe}^2 m^2 c^2}{\nu^2 e^2 H^2 \eta_1};$$

$$\xi_1 = \frac{2\nu}{3} (\eta_1 + \eta)^{3/2}.$$

Зависимость ξ_1 от ν схематически изображена на рис. 5.12. Можно выделить три области для ν :

$$a) \nu \gg \frac{\omega_{pe} mc}{eH} \left(\frac{\varepsilon}{mc^2} \right)^2; \quad \eta_1 > \eta; \quad \xi_1 = \xi = \frac{2\nu}{3} \eta_1^{3/2}.$$

В этой области плазма на ускорение не влияет и результат совпадает с (5.56);

$$b) \nu \ll \frac{\omega_{pe} mc}{eH} \left(\frac{\varepsilon}{mc^2} \right)^2; \quad \eta_1 \ll \eta; \quad \xi_1 = \frac{2}{3\nu^2} \left(\frac{\omega_{pe} \varepsilon}{eHc} \right)^3.$$

Здесь

$$\dot{\varepsilon} = \frac{2\pi^2 e^2 \omega_{pe}^{7/2}}{3\pi \sqrt{2}} \left(\frac{mc}{eH} \right)^{1/2} \left(\frac{\varepsilon}{mc^2} \right)^{7/2} \int_0^\infty \frac{d\xi_1}{\omega^3 \xi_1^{3/2}} W_\omega^t \Phi(\xi_1); \quad (5.69)$$

$$\Phi(\xi_1) = 2 \int_{\xi_1}^\infty K_{5/3}(\xi_1') d\xi_1' - \xi_1 K_{5/3}(\xi_1).$$

График $\Phi(\xi_1)$ изображен на рис. 5.13. При $\xi_1 \gg 1$ $\Phi(\xi_1)$ отрицательно и ускорение заменяется торможением. Это означает, что частицы отдают энергию на излучение, т. е. возникает возможность генерации поперечных волн [255]. Однако относительный вклад области $\xi_1 \gg 1$ для многих распределений невелик;

в) $v \sim \frac{\omega_{pe} mc}{eH} \left(\frac{\epsilon}{mc^2}\right)^2$ или $\eta_1 \sim \eta$. Это область минимума на кривой рис. 5.12. Наименьшие значения ξ_1 есть $\xi_{1\text{мин}} =$

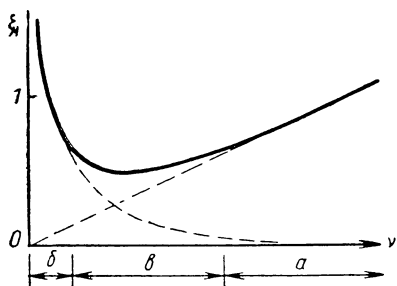


Рис. 5.12. Примерный вид кривой $\xi_1(v)$ (пунктир — асимптотические предельные кривые). Отмечены три области (а, б и в) изменения ξ_1 .

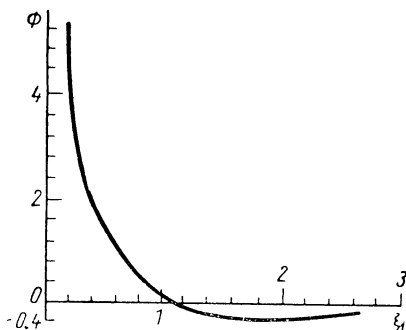


Рис. 5.13. График $\Phi(\xi_1)$.

$= \frac{\omega_{pe} \sqrt{3} m^2 c^3}{eH}$, при этом $v = v_m = \sqrt{2} \omega_{pe} \frac{mc}{eH} \left(\frac{\epsilon}{mc^2}\right)^2$. Если $\frac{\epsilon}{mc} \gg \frac{\omega_{pe} mc}{eH}$, то $\xi_{1\text{мин}} \ll 1$ и в (5.68) можно воспользоваться асимптотической формулой

$$\int_{\xi}^{\infty} K_{5/3}(\xi) d\xi = \frac{3}{2} \cdot \frac{2^{2/3} \Gamma(5/3)}{\xi^{2/3}},$$

тогда

$$\epsilon = \frac{4\pi e^2 \omega_H^3}{\epsilon} 3^{1/6} \Gamma(5/3) \int \frac{\omega^{4/3} d\omega}{\omega^3} \omega_H^{7/3} W_{\omega}^t.$$

Область применимости этой формулы перекрывается с (5.56) и (5.68). Отсюда следует, что (5.56) применима при $v \gg \left(\frac{\omega_{pe} \epsilon}{eHc}\right)^{1/2}$, а (5.68) — при $v \ll \left(\frac{\epsilon}{mc^2}\right)^3$.

Наряду с синхронными эффектами ускорения в турбулентной плазме возникают другие эффекты, связанные с наличием турбу-

лентных полей. Они во многом сходны с описанными здесь и должны трактоваться совместно. Поэтому обсуждение вопроса о спектрах частиц, ускоренных излучением, мы отложим до следующей главы, в которой разбирается вопрос о спектрах излучения турбулентной плазмы.

§ 5.5. СТОХАСТИЧЕСКОЕ УСКОРЕНИЕ ЧАСТИЦ НИЗКОЧАСТОТНЫМИ ИОННО-ЗВУКОВЫМИ ПУЛЬСАЦИЯМИ

Рассмотрим теперь пульсации, связанные с такими коллективными движениями, в которых принимают участие ионы плазмы.

Для ионно-звуковых пульсаций $\omega_k^s = \frac{kv_s}{\sqrt{1+k^2 d_e^2}}$ при $v > v_s$; $kv \gg$

$\gg \omega_H$ получим

$$D^s = \frac{2\pi^2 e^2}{v^3} \int \frac{k W_k^s dk \omega_{pi}^2 v_{Te}^4}{(\omega_{pe}^2 + k^2 v_{Te}^2)^2} \equiv D_0 \frac{e^2 m^{3/2}}{4\epsilon_p^{3/2}}. \quad (5.70)$$

Пределы интегрирования в (5.70) не зависят от скорости ускоряемой частицы, если эта скорость больше скорости звука, а поэтому ускорение на ионно-звуковых колебаниях не зависит от спектра ионно-звуковой турбулентности. Из (5.70), в частности, следует, что в первом приближении систематическое ускорение равно нулю. Однако при этом флуктуационное ускорение весьма велико. Из-за $\dot{\epsilon}_p = 0$ $(\Delta \dot{\epsilon})^2 = \dot{\epsilon}^2$

$$\dot{\epsilon}^2 = 2D^s v^2 = D_0 \frac{e^2 \sqrt{m}}{\sqrt{\epsilon_p}}; \quad \epsilon_p = \frac{p^2}{2m}. \quad (5.71)$$

Последняя формула показывает, что темп ускорения (или нагрева) быстрых частиц тем больше, чем больше их масса и заряд, т. е. многозарядные тяжелые ионы ускоряются лучше всего. Этот вывод важен для теории происхождения космических лучей [46]. Существенное различие в ускорениях на ионно-звуковых и ленгмюровских колебаниях состоит в том, что ускорение на ионно-звуковых колебаниях возможно при существенно меньших скоростях ($v \sim v_s \sim \sim v_{Te} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}$), что важно для ускорения ионов и инжекции в режим ускорения высокочастотными колебаниями. Как показано в гл. 4. развитие высокочастотной турбулентности приводит к нагреву электронов плазмы и к генерации ионно-звуковой турбулентности, даже если отсутствуют непосредственные источники ее возбуждения. Отсюда следует, что эффекты (5.71), приводящие к инжекции, возникнут с необходимостью при длительном существовании турбулентности. Целесообразно сравнить коэффициенты диффузии D^l и D^s в условиях, когда ионно-звуковые и ленгмюровские пульсации создаются источником ленгмюровских пульсаций мощностью Q .

Тогда при $\frac{\omega_{pe}}{k_*^s} > c$, т. е. для достаточно горячих электронов,

$$W_k^l = \sqrt{\frac{2Q}{\alpha'}} \text{ и}$$

$$D^l = \frac{3\sqrt{3}\pi}{2\sqrt{2}} m_e^{3/2} m_i^{1/2} Z^2 \sqrt{\frac{m}{2\varepsilon_p}} v_{Te}^3 \sqrt{\frac{Q}{Q_0}}; \quad e_m = Ze. \quad (5.72)$$

С другой стороны, используя (4.123), получаем из (5.70)

$$D^s = \frac{m_e^{5/2}}{m_i^{1/2}} \omega_{pe} \sqrt{\frac{Q}{Q_0}} v_{Te}^5 \left(\frac{m}{2\varepsilon_p}\right)^{3/2} Z^2; \quad (5.73)$$

$$Q \gg Q_0 \frac{1}{12} \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^3. \quad (5.74)$$

Формулы (5.73), (5.74) написаны с точностью до численного коэффициента порядка единицы. При $v \sim v_{Te}$ величина D^s в $\frac{m_e}{m_i}$ раз меньше D^l и, кроме того, существенно быстрее падает с ростом энергии частиц. Таким образом, действительно механизм (5.73) может играть роль естественного механизма инжекции.

Если ионно-звуковая неустойчивость возбуждается непосредственно и можно использовать (4.231) и (4.236), то

$$D^s = \frac{15\sqrt{\pi} Z^2}{8\sqrt{2}} m_e^2 v_{Te}^5 \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{3/2} \frac{T_e}{T_i} k_g v_{Te} \times \\ \times \left(\frac{m}{2\varepsilon_p}\right)^{3/2} \left(\sqrt{\frac{Q}{Q_*^s}} + e^{-\sqrt{\frac{Q}{Q_*^s}}} - 1 \right). \quad (5.75)$$

Коэффициент диффузии D^s при $Q \ll Q_*^s$ линеен по Q , а при $Q \gg Q_*^s$ пропорционален $\sqrt{\frac{Q}{Q_*^s}}$. Если воспользоваться спектром (4.257), то

$$D^s = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2} \frac{Z^2}{4} k_* v_{Te} m_e^2 v_{Te}^5 \left(\frac{m}{2\varepsilon_p}\right)^{3/2} \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{3/2}, \quad (5.76)$$

что в общем меньше (5.75), т. е. основное ускорение производится пульсациями с частотами, близкими к ω_{pi} . Если равновесное распределение частиц возникает как баланс между ускорением (5.70) и торможением из-за столкновений, то

$$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial t} = \frac{e^2 \sqrt{m} Z^2}{2} D_0 \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} \cdot \frac{f_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{v_{e,i} \sqrt{m} m_{e,i}}{\sqrt{2}} v_{Te,i}^3 \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{Z^2 f_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} = 0, \quad (5.77)$$

т. е.

$$f_e = \text{const} \sqrt{\varepsilon} e^{-\varepsilon/T_{\text{эфф}}}. \quad (5.78)$$

Для быстрых электронов и ионов ($v \gg v_{Te}$) необходимо учитывать столкновения с электронами, и для (5.73) получим

$$T_{\text{эфф}} = T_e \frac{\omega_{pe}}{v_e} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \sqrt{\frac{Q}{Q_0}}. \quad (5.79)$$

Последнее соотношение дает представление о том, каков должен быть поток турбулентной энергии, чтобы инжекция была эффективной, т. е. $T_{\text{эфф}} \gg T_e \left(\frac{m}{m_e}\right)$,

$$Q \gg Q_0 \left(\frac{v_e}{\omega_{pe}}\right)^2 \frac{m_i}{m_e} \cdot \frac{m^2}{m_e^2} \simeq v_e n_0 T_e \frac{m_i m^2 v_e}{m_e^3 \omega_{pe}}. \quad (5.80)$$

Таким образом, видно, что при большой мощности Q ускорительный механизм диссипации становится необходимым элементом развития турбулентности. В условиях, когда справедливо (5.74), эффективная температура инжекции имеет оценку

$$T_{\text{эфф}} \simeq \frac{\omega_{pe}}{v_e} T_e \frac{T_e}{T_i} \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{3/2} \left(\sqrt{\frac{Q}{Q_*^s}} + e^{-\sqrt{\frac{Q}{Q_*^s}}} - 1 \right). \quad (5.81)$$

Так как в силу (4.236) $Q \gg Q_*^s$, то $T_{\text{эфф}}$ всегда больше T_e , если

$$\frac{\omega_{pe}}{v_e} > \frac{T_i}{T_e} \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{3/2}. \quad (5.82)$$

Последнее условие легко удовлетворяется, и ионно-звуковая турбулентность является хорошим инжектором быстрых частиц.

Рассмотрим теперь качественно эффекты, возникающие при возбуждении турбулентности постоянным внешним электрическим полем. Если скорость направленного движения электронов близка к v_s (см. [137]), то

$$Q \simeq eEn_0 v_s, \quad (5.83)$$

и, следовательно, при $Q \gg Q_*^s$, т. е. согласно (4.237) при

$$\frac{E^2}{8\pi n_0 T_e} \gg \frac{m_e \varepsilon}{m_i}; \quad \varepsilon = \frac{m_e}{m_i} \cdot \frac{T_e^2}{T_i^2} \ll 1, \quad (5.84)$$

получим

$$T_{\text{эфф}} = T_e \frac{\omega_{pe}}{v_e} \cdot \frac{T_e}{T_i} \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} \left(\frac{E m_i T_i}{m_e T_e \sqrt{4\pi n_0 T_e}} \right)^{1/2}. \quad (5.85)$$

Заметим, что в силу (4.243) $Q < Q^s / \sqrt{\epsilon}$. Если $Q < Q^s$, то нелинейность мала и равновесие может возникнуть за счет квазилинейного уменьшения инкремента. При этом очевидно $2W\gamma_k^s = Q$, т. е.

$$W \approx \frac{m_i e E n_0 v_s}{m_e \omega_{pe}} \sqrt{\frac{2}{\pi}}; \quad D_0 \approx \frac{v_{Te}^3}{\omega_{pe}^2} e E n_0 v_s. \quad (5.86)$$

Отсюда

$$T_{\text{эфф}}^{(i)} = \frac{E}{E_k} \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} T_e; \quad E_k = v_e v_{Te} \frac{m_e}{e}. \quad (5.87)$$

Формула (5.87) была получена в работе [256].

§ 5.6. УСКОРЕНИЕ АЛЬФВЕНОВСКИМИ И МАГНИТОЗВУКОВЫМИ ПУЛЬСАЦИЯМИ

Условие немагнитности ускоряемых частиц выполнено при $\omega = kv_A > \omega_H v_A / v$. Таким образом, для нерелятивистских электронов $\omega > \omega_{He} v_A / v$, но $\omega < \omega_{Hi}$, т. е. $v > v_A \frac{m_i}{m_e} = v_{\text{инж}}$ и порог инжекции весьма высок. Даже при $v_A = v_s$ имеем $v_{\text{инж}} \approx \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} v_{Te}$, и энергия электронов по крайней мере в 10^3 раз превосходит тепловую. Обычно же $v_A \gg v_s$ и энергия инжекции для электронов еще больше (при $v_A \sim v_{Te}$ она составляет $\left(\frac{m_i}{m_e}\right)^2 T_e$). Это говорит о том, что нерелятивистские электроны практически не могут эффективно ускоряться такими пульсациями. Ультрарелятивистские электроны могут ускоряться. Наоборот, для нерелятивистских ионов условия немагнитности практически выполнены всегда, если $v > v_A$, и особенно хорошо для тяжелых ионов $m \gg m_i$. Коэффициент диффузии для альфвеновских и магнитозвуковых пульсаций имеет вид [257, 249]

$$D_A = \sum_{v=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi^2 e^2 v_A^4 Z^2 \omega_H^2}{v^2 \left(1 + \frac{v_A^2}{c^2}\right) c^2} \int_0^{\infty} d\omega \frac{W_{\omega}^A}{\omega^2} \int_{-1}^1 dx x^2 W^A(x) \times \\ \times \int_{-1}^1 dy \frac{v^2 J_v^2(\xi)}{1-x^2} \delta(\omega - kvxy - v\omega_H); \quad (5.88)$$

$$\xi = \frac{\kappa v}{\omega_H} \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)};$$

$$2\pi W_{\omega, \Omega}^A = W_{\omega}^A W^A(x); \quad \int_{-1}^1 W^A(x) dx = 1; \quad x = \cos \theta;$$

$$D_M = \sum_{v=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi^2 e^2 v_A^2 Z^2}{1 + \frac{v_A^2}{c^2}} \int_0^{\infty} d\omega W_{\omega}^M \int_{-1}^1 dy (1-y^2) W^M(x) \times \\ \times (J'_v(\xi))^2 \delta(\omega - \kappa v x y - v\omega_H); \quad (5.89)$$

$$2\pi W_{\omega, \Omega}^M = W_{\omega}^M W^M(x); \quad \int W^M(x) dx = 1; \quad x = \cos \theta.$$

Для немагнитных частиц можно использовать вероятности (2.223)

$$D_A = \frac{2\pi^2 e^2 v_A^3 Z^2}{c^2 v \left(1 + \frac{v_A^2}{c^2}\right)} \int_{\frac{v_A |x|}{\omega_H}}^{\omega_H} \frac{W_{\omega}^A}{\omega} d\omega \int_{-1}^1 |x|^3 dx W^A(x) \times \\ \times \left[\frac{v_A^2}{v^2} \cdot \frac{(2-3x^2)}{2} + \frac{1}{2} \right]; \quad (5.90) \\ |x| < \frac{v}{v_A}.$$

Верхний предел (5.90) несуществен, так как плотность энергии альфвеновских пульсаций стремится к нулю при $\omega \rightarrow \omega_{Hi}$ (по определению альфвеновской ветви). Нижний предел $\omega_H v_A/v$ написан приблизительно из условий немагнитности. Заметим, что угловая зависимость альфвеновских пульсаций оказывается малосущественной при $v \gg v_A$. Действительно, в D_A в этом случае войдет лишь интеграл $\int_{-1}^1 |x|^3 W^A(x) dx$, определяющий лишь численную константу*. Эта константа в силу условия нормировки порядка единицы. Если $v \ll v_A$, то (5.90) имеет приближенный вид

$$D_A = \frac{\pi^2 e^2 v_A Z^2 W^A(0) v}{2 \left(1 + \frac{v_A^2}{c^2}\right) c^2} \int_{\omega_H}^{\infty} \frac{W_{\omega}^A}{\omega} d\omega. \quad (5.91)$$

* Нижний предел можно приближенно положить $\omega_H \frac{v_A}{v}$, так как $x \sim 1$.

Из (5.88) следует, что в условиях замагниченности $kv \ll \omega_H$ имеем $\omega = \omega_H$, т. е. $v \ll v_A$, $x < v_A$, и интегрирование распространяется на область, которая не охватывается (5.90). Из (5.88) следует

$$D_A = \frac{2\pi^2 e^2 v_A^2 Z^2}{3c^2 \left(1 + \frac{v_A^2}{c^2}\right)} W_{\omega_H}^A \int_{x \gg \frac{v}{v_A}} W^A(x) dx. \quad (5.92)$$

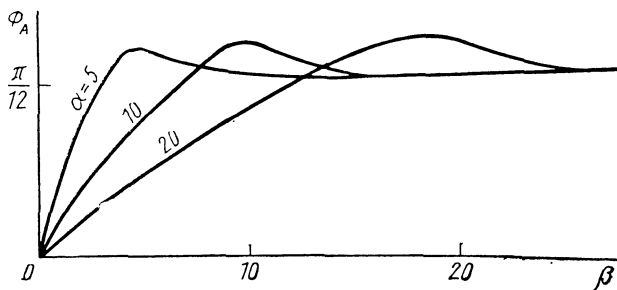


Рис. 5.14. График $\Phi_A(\alpha, \beta)$.

Из сравнения (5.92) с (5.91) получим, что область незамагниченных частиц вносит пренебрежимо малый вклад и можно использовать (5.92) (естественно, в условиях, когда угловое распределение более или менее изотропно, а точнее, если нет такого положения, когда все волны идут вдоль поля). Формулы (5.92) и (5.90) являются приближенными (предельными случаями). Даже при $v \gg v_A$ нижний предел (5.90) приближенный и в точной формуле имеется форм-фактор, зависящий от $\alpha = \frac{\omega}{\omega_H}$ и

$$\beta = \frac{kv}{\omega_H} = \frac{v}{v_A} \cdot \frac{\omega}{\omega_H |x|},$$

$$D_A = \frac{3\pi e^2 Z^2 v_A^3}{c^2 v \left(1 + \frac{v_A^2}{c^2}\right)} \int \Phi_A(\alpha, \beta) \frac{W_{\omega}^A}{\omega} d\omega. \quad (5.93)$$

На рис. 5.14 изображена функция Φ_A для случая изотропной турбулентности.

Для магнитогидродинамических пульсаций и незамагниченных частиц получим

$$D_M = \frac{3\pi^2 v_A^3 e^2 Z^2}{c^2 v \left(1 + \frac{v_A^2}{c^2}\right)} \int_{\omega_H \frac{v}{v_A}} \frac{W_{\omega}^M}{\omega} d\omega \left(1 - \frac{v_A^2}{v^2}\right). \quad (5.94)$$

Здесь интеграл не нуль лишь при $v > v_A$. Угловая зависимость в (5.94) вообще выпала в силу $\int W^M(x) dx = 1$ и эффекты ускорения не зависят от угловых распределений турбулентных пульсаций. В общем случае коэффициент D_M может быть представлен в форме, аналогичной (5.93). Функция $\Phi_M(\alpha, \beta)$ изображена на рис. 5.15. В условиях замагниченности $kv \ll \omega_H$ имеем $\omega_H = \omega(v = 1)$ и $v \ll v_A$.

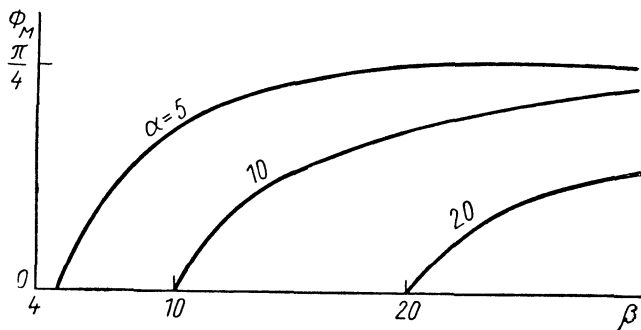


Рис. 5.15. График $\Phi_M(\alpha, \beta)$.

Тогда из (5.89) получим

$$D_M = \frac{2\pi^2 e^2 Z^2 v_A^2}{3c^2 \left(1 + \frac{v_A^2}{c^2}\right)} W_{\omega_H}^M \int_{-1}^1 dx W^M(x). \quad (5.95)$$

Из (5.92) и (5.95) следует, что инжекция в режим ускорения альфвеновскими и магнитозвуковыми колебаниями определяется спектральной плотностью альфвеновских и магнитозвуковых пульсаций при $\omega = \omega_H$. Согласно гл. 4 для одномерного спектра $W_{\omega}^A = \frac{\text{const}}{\omega^{\nu}}$; $\nu = 1$, т. е.

$$D = \text{const} \frac{e^2 v_A^2 mc Z^2}{\left(1 + \frac{v_A^2}{c^2}\right) |eH| Z}, \quad (5.96)$$

и, следовательно, $\dot{\epsilon} \sim \frac{3}{2m} D \sim Z$ не зависит от массы частиц. Для магнитозвуковых пульсаций при $T_e \gg T_i$ возможно $\nu = 2$, т. е. $D \sim m\epsilon$ и $\dot{\epsilon} = \text{const} \epsilon$. Этот механизм ускорения более эффективен, чем фермиевский $\dot{\epsilon} = \text{const} \sqrt{\epsilon}$. Очевидно, что в силу $\omega \ll \omega_{Hi}$ и $\omega = \omega_H$ протоны, так же как и электроны, не могут инжектироваться этим механизмом.

Общий вид ускорения, следующего из (5.92), (5.96),

$$\dot{\varepsilon} = 2\pi^2 \frac{e^2 Z^2 v_A^2}{\left(1 + \frac{v_A^2}{c^2}\right) m} \left(W_{\omega_H}^A + W_{\omega_H}^M \right) \frac{1}{c^2} \quad (5.97)$$

был получен в работе [258] (при $v_A \ll c$), где было показано, что преимущественное ускорение тяжелых ионов возникает при $v > 1$. Если считать, что в одномерном случае

$$W_{\omega} = \frac{W}{\ln \frac{\omega_{\text{макс}}}{\omega_{\text{мин}}}}, \quad (5.98)$$

то равновесное распределение ионов будет

$$f_{\varepsilon} = \text{const} \sqrt{\varepsilon}^{-1} e^{\left(\frac{T_{\text{эфф}}}{\varepsilon}\right)^{1/2}}; \quad (5.99)$$

$$T_{\text{эфф}} = 18 \frac{v_i^2 m c^2}{\omega_{\rho i}^2 \pi^2} \left(1 + \frac{v_A^2}{c^2}\right)^2 \frac{v_{Ti}^2}{v_A^2} \left(\frac{n_0 T_i}{W}\right)^2 \left(\ln \frac{\omega_{\text{макс}}}{\omega_{\text{мин}}}\right) Z^2.$$

Значение $T_{\text{эфф}}$ указывает на ту энергию, для которой распределение выходит на $f = \text{const} \sqrt{\varepsilon}$. Если инжекция производится магнито-звуковыми колебаниями при $v = 2$, то

$$f_{\varepsilon} = \text{const} \sqrt{\varepsilon}^{-1} e^{\left(\frac{T_{\text{эфф}}}{\varepsilon}\right)^{1/2}}; \quad (5.100)$$

$$T_{\text{эфф}}^{1/2} = \frac{H^2}{W^M} \cdot \frac{3v_i m_i \sqrt{m} v_{Ti}^3 L}{v_A^3 8m\pi^3} Z^2 \left(1 + \frac{v_A^2}{c^2}\right).$$

Распределения (5.100) и (5.99) имеют место лишь при $\frac{mv_A^2}{2} > \varepsilon > \frac{mv_{Ti}^2}{2}$. В (5.100) предположено, что спектр $W^M = \frac{\text{const}}{\omega^2}$ имеет место лишь до $k > k_0 = \frac{2\pi}{L}$, где L — основной масштаб турбулентности, т. е.

$$W_{\omega}^M = \frac{2\pi}{L} v_A \frac{W^M}{\omega^2}. \quad (5.101)$$

Величины $T_{\text{эфф}}$ играют роль тех энергий, для которых столкновения не способны сбалансировать ускорение и частицы, непрерывно ускоряясь, достигают $v = v_A$.

В области $v \ll v_{Ti}$ вместо (5.99) получим

$$f_\varepsilon = \text{const} \sqrt{\varepsilon} \exp(-\varepsilon/T_{\text{эфф}}); \quad (5.102)$$

$$T_{\text{эфф}} = T_i \frac{4\pi W v_A^2 m}{Z v_i m_i n_0 c v_A v^2 T_i m_i \ln \frac{\omega_{\text{макс}}}{\omega_{\text{мин}}}}; \quad (5.103)$$

Это указывает на то, что эффективные температуры для тяжелых ионов больше, т. е. имеет место преимущественное ускорение тяжелых ионов. Аналогичный результат был получен и для фермиевского ускорения [46]. Рассмотрим теперь ускорение частиц больших энергий $v \gg v_A$. Учитывая, что одномерный спектр есть $\nu = 1$, получаем с точностью до коэффициента порядка единицы

$$D = \frac{W e^2 v_A^2 Z^2}{\left(1 + \frac{v_A^2}{c^2}\right) \omega_H} \begin{cases} 1; & \varepsilon \ll \varepsilon_*; \\ \frac{\varepsilon_*}{\varepsilon}; & \varepsilon \gg \varepsilon_*; \end{cases} \quad (5.104)$$

где для нерелятивистских энергий $\varepsilon_* = \left(\frac{Z}{2\pi}\right)^2 \frac{m_i}{m} \frac{H^2 \omega_{pi}^2 L^2}{8c^2 n_0 \pi}$, а для ультрарелятивистских $\varepsilon_* = LeHZ$. ε_* — энергия, при которой основной масштаб турбулентности сравнивается с ларморовским радиусом ускоряемой частицы.

Если $v_A > c \frac{m}{Z m_i} \left(\frac{c}{\omega_{pi} L}\right)$, то $\varepsilon_* \gg mc^2$. В астрофизических условиях обычно $\varepsilon_* \gg mc^2$. В лабораторных — величина L может быть порядка размера системы и соответственно ε_* — нерелятивистской. Считая $\varepsilon_* \gg mc^2$, получаем для (5.104) при $\varepsilon \ll \varepsilon_*$ $\dot{\varepsilon} = \text{const}$; $\varepsilon \gg \varepsilon_*$; $\dot{\varepsilon} \sim \frac{1}{\varepsilon}$.

Для магнитозвуковых пульсаций при $T_e \gg T_i$ картина существенно иная, если $\nu = 2$. При этом согласно (5.94) с точностью до константы порядка единицы

$$D_M = \frac{v \varepsilon^2}{L} v_A^2 \frac{W^M}{H^2} \begin{cases} 1; & \varepsilon \ll \varepsilon_*; \\ \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon_*^2}; & \varepsilon \gg \varepsilon_*; \end{cases} \quad (5.105)$$

$$(5.106)$$

Результат (5.105) был получен в работах [258, 45]. Сходный результат для одномерного случая — в работе [259]. Формула (5.105) аналогична формуле фермиевского ускорения, где вместо

скорости облака входит v_A , а вместо расстояния между облаками — основной масштаб турбулентности. Из-за того что спектральная перекачка в бесстолкновительной области уменьшает частоты пульсаций, основной масштаб должен определяться длиной свободного пробега, если она меньше размеров системы, т. е. областью применимости бесстолкновительной теории $\omega \sim \frac{2\pi}{L} v_A \sim v_i$ или $L \sim \frac{v_A}{v_i}$.

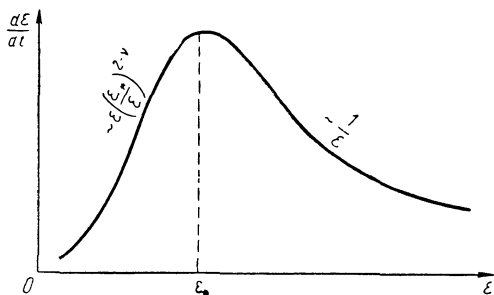


Рис. 5.16. Темп ускорения ионов магнито-гидродинамическими и альфвеновскими турбулентными пульсациями ($\varepsilon_* = ZeHL$).

Это верно, конечно, если источник турбулентности действует время, достаточное для того, чтобы энергия турбулентности перекачалась в эту область. В столкновительной области направление перекачки противоположное. Таким образом, первоначальная, сделанная еще в работе [260], грубая оценка $L \sim \frac{v_A}{v_i}$ оказывается правильной. На рис 5.16 приведена характерная кривая, описывающая эффективность ускорения как функцию энергии частицы. Падение ускорения при $\varepsilon > \varepsilon_*$ имеет объяснение, сходное с приведенным выше. Оно связано с тем, что все пульсации ускоряют частицы и коэффициент диффузии становится постоянным [см. (5.106)]. Функции распределения ускоренных частиц для $\varepsilon \ll \varepsilon_*$ согласно (5.105) являются степенными $\sim \frac{1}{\varepsilon^\gamma}$, где γ существенно зависит от природы частиц и т. п.

Хотя ε_* обычно релятивистская, механизм (5.105) не может объяснить происхождения космических лучей по двум причинам: 1) γ в законе $1/\varepsilon^\gamma$ не универсально, 2) эффективность ускорения очень мала ввиду больших значений $L \sim \frac{v_A}{v_i}$ (см. [46]). В следующей главе будут рассмотрены специфические механизмы ускорения, связанные с излучением турбулентной плазмы, которые могут быть также эффективными для ультрарелятивистских энергий.

§ 5.7. УСКОРЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ ПРИ ИНДУЦИРОВАННОМ РАССЕЯНИИ НА ТУРБУЛЕНТНЫХ ПУЛЬСАЦИЯХ

Эффекты ускорения при индуцированном рассеянии пропорциональны второй степени энергии турбулентных пульсаций и поэтому более слабые, нежели рассмотренные выше эффекты, возникающие при индуцированном излучении и поглощении. Такого рода эффекты интересны тем, что в ряде случаев ускорение, связанное с излучением и поглощением пульсаций, либо строго запрещено законами сохранения, либо малоэффективно в силу того, что законы сохранения разрешают процессы лишь в узком интервале углов между частицами и волнами или узком интервале скоростей и т. п.

Например, законы сохранения запрещают (в отсутствие магнитных полей) взаимодействие между ленгмюровскими пульсациями и частицами, имеющими скорость $v < v_{Te}$. Процессы такого рода интересны как механизмы инжекции ионов в ускорительный механизм, связанный с воздействием ленгмюровских пульсаций. Другой пример также касается ленгмюровских пульсаций. Как показано в гл. 4, ленгмюровские пульсации в изотропной плазме перекачиваются в область больших фазовых скоростей. Для нелинейных взаимодействий значение $v_p = c$ ничем не выделено и пульсации перекачиваются в область $v_p > c$, где черенковское взаимодействие и ускорение частиц невозможны.

Если $k \gg \omega_{pe} \frac{v}{v_{Te}^2}$; $v \ll v_{Te}$, то для ионов массы m получим $D = \text{const}$

$$\dot{\varepsilon} = \frac{4\pi^2 e^2 Z^4}{9mn_0 T_e \omega_{pe}} \int_{\frac{\omega_{pe} v}{3v_{Te}^2}}^k k (W'_k)^2 dk \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right)^{-2}. \quad (5.107)$$

Если $v > v_{Ti}$, то нижний предел больше $\omega_{pe} \frac{v_{Ti}}{3v_{Te}^2}$ и можно использовать $W_k = \sqrt{\frac{2Q}{\alpha}}$, т. е., полагая $k_{\text{макс}} \approx \frac{\omega_{pe}}{v_{Te}} \left(\frac{m_e}{3m_i}\right)^{1/5}$,

$$\dot{\varepsilon} = \frac{8\pi e^2 Z^4}{\pi^2 m \omega_{pe}^2} \left(\frac{3m_i}{m_e}\right)^{3/5} Q. \quad (5.108)$$

Механизм инжекции (5.108) весьма эффективен для протонов. Если $k \ll \omega_{pe} \frac{v}{v_{Te}^2}$, то ускорение резко падает.

Эффекты индуцированного рассеяния для $v \gg v_{Te}$ и $v_p < c$ рассматривались в работе [60]. Здесь мы остановимся на случае $v_p \gg c$, так как именно в этой области фазовых скоростей сосредоточена основная энергия ленгмюровских пульсаций, а черенковское ускорение запрещено. Получим

$$\begin{aligned}
 (\dot{\epsilon})^2 &\simeq Z^4 \frac{W^2}{n_0^2} \left(\frac{k_0 v_{Te}}{\omega_{pe}} \right)^3 \omega_{pe} \sqrt{\frac{m v_{Te}^2}{2\epsilon}} = \\
 &= \frac{Z^4 Q^2}{n_0^2 v_e^2} \omega_{pe} \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{3/2 (v-1)} \left(\frac{Q_*}{Q} \right)^{3/2 (v-1)} \sqrt{\frac{m v_{Te}^2}{2\epsilon}}. \quad (5.109)
 \end{aligned}$$

Здесь использовано $k_0 = k_*(Q_*/Q)^{1/2(v-1)}$. Эта формула также описывает преимущественное ускорение нерелятивистских тяжелых многозарядных ионов.

§ 5.8. ЭФФЕКТИВНОСТЬ РАЗЛИЧНЫХ МЕХАНИЗМОВ УСКОРЕНИЯ И ИХ ВЛИЯНИЕ НА СПЕКТРЫ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Все рассмотренные механизмы описываются характерными кривыми с максимумами. Поэтому целесообразно сравнивать эффективность ускорения по значению $\dot{\epsilon}$ в максимуме. Сравнивая (5.109) с ускорением на резонансных плазмонах, находим, что (5.109) меньше. При сравнении эффектов ускорения частиц больших энергий следует иметь в виду, что ускорение ионно-звуковыми пульсациями имеет максимум при $v \sim v_s$ и неэффективно для частиц очень больших скоростей. Сравнивая же ускорение магнитогидродинамическими пульсациями с ускорениями ленгмюровскими, получаем

$$\frac{(\dot{\epsilon}^I)_{\text{макс}}}{(\dot{\epsilon}^M)_{\text{макс}}} = \frac{Z v_{Te}}{v_A} \cdot \frac{m_i}{m} \cdot \frac{n_0 T_e}{W^M} \sqrt{\frac{W^I}{n_0 T_e}} \sqrt{\frac{v_e}{\omega_{pe}}}. \quad (5.110)$$

Здесь $Q^I = W^I v_e$. Важным является временной масштаб ускорения, т. е. время, в течение которого частица достигает максимума $t_{\text{макс}}$, грубо говоря $(\dot{\epsilon}^I)_{\text{макс}} = \frac{\epsilon_{\text{макс}}}{t_{\text{макс}}} = \epsilon_{\text{макс}}^I \gamma_{\text{макс}}^I$.

Ясно, что

$$\frac{\gamma_{\text{макс}}^I}{\gamma_{\text{макс}}^M} \simeq \frac{(\dot{\epsilon}^I)_{\text{макс}} \epsilon_{\text{макс}}^M}{(\dot{\epsilon}^M)_{\text{макс}} \epsilon_{\text{макс}}^I}, \quad (5.111)$$

тогда

$$\frac{\gamma_{\text{макс}}^l}{\gamma_{\text{макс}}^M} \approx \frac{eHL}{mc^2} \cdot \frac{v_{Te}}{v_A} Z^2 \frac{m_i}{m} \cdot \frac{nT_e}{W^M} \sqrt{\frac{W^l}{n_0 T_e}} \sqrt{\frac{v_e}{\omega_{pe}}} \quad (5.112)$$

Если

$$L = \frac{v_A}{v_i} \approx \frac{v_A}{v_e} \sqrt{\frac{m_i}{m_e}}, \text{ то } \frac{eHL}{mc^2} = \frac{m_i}{m} v_A^2 \frac{\omega_{pe}}{v_e} c^{-2}$$

и

$$\frac{\gamma_{\text{макс}}^l}{\gamma_{\text{макс}}^M} = \sqrt{\frac{\omega_{pe}}{v_e} Z^2 \frac{n_0 T_e}{W^M}} \sqrt{\frac{W^l}{n_0 T_e}} v_A v_{Te} c^{-2}. \quad (5.113)$$

Как правило, большой множитель $\sqrt{\frac{\omega_{pe}}{v_e}}$ в астрофизических условиях делает ускорение высокочастотными ленгмюровскими пульсациями наиболее эффективным. Ускорение на магнитогидродинамических пульсациях играет чаще всего роль инжекции.

В свою очередь, ускорение ленгмюровскими пульсациями служит инжекцией в ускорение электромагнитной радиацией (см. также гл. 6). Каскад взаимодействий приведет к возникновению в плазме частиц очень большой энергии (космических лучей) и к следующему

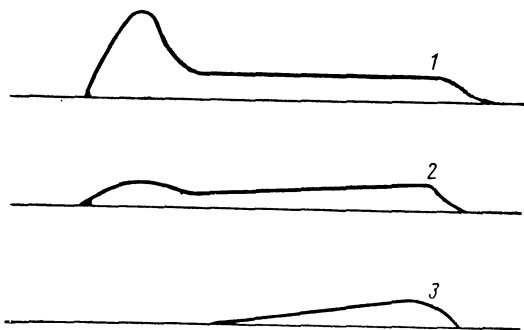


Рис. 5.17. Изменение спектра ленгмюровской турбулентности из-за ускорения частиц. Последовательные состояния 1, 2, 3 соответствуют увеличению числа ускоренных частиц.

изменению состояния высокочастотных пульсаций. Число ускоряемых частиц возрастает благодаря тому, что сама турбулентность осуществляет инжекцию. Высокочастотные пульсации не имеют другого поглощения, кроме поглощения на быстрых частицах, ускоряемых ими. Поглощение возрастает и это продолжается до тех

пор, пока основными в поглощении пульсаций не станут эффекты ускорения. Число ускоряемых частиц возрастает медленно из-за малой эффективности механизмов инжекции. Последнее является необходимым, ибо в противном случае быстро нагрелась бы основная масса частиц и турбулентность упала. Следовательно, строго говоря, высокочастотная турбулентность квазистационарна и постепенно переходит в режим ускорительной турбулентности, когда вся мощность Q расходуется на ускорения частиц. Последовательные стадии такой деформации с исчезновением максимума в спектре изображены на рис. 5.17. Поглощение ленгмюровских пульсаций релятивистскими частицами с $f_e = \text{const} \varepsilon^2 e^{-\varepsilon/T_{\text{эфф}}}$

$$\gamma = -\frac{\omega_{pe}}{\pi^{-1}} Z^2 \frac{n_1}{n_0} \cdot \frac{m_e c^2}{T_{\text{эфф}}} \cdot \frac{\omega_{pe}^3}{k^3 c^3} \begin{cases} 1; & \omega_{pe} < kc \\ 0; & \omega_{pe} > kc \end{cases} \quad (5.114)$$

максимально при $k \sim \omega_{pe}/c$ и растет с падением $T_{\text{эфф}}$ и увеличением числа быстрых частиц n_1 . Как только максимум в спектре исчезает из-за накопления ускоренных частиц, ускорение резко снижается и уменьшение плотности энергии W (при постоянном Q) резко замедляется. Еще до исчезновения максимума вступают в игру радиационные процессы на быстрых частицах, и энергия, отданная быстрым частицам, идет на излучение. Установление равновесия в излучении приводит к спектрам частиц $1/\varepsilon^\nu$, которые, вообще говоря, вырабатываются до исчезновения максимума в спектре турбулентности. Поглощение турбулентности на космических лучах играет важную роль в равном распределении энергии между космическими лучами и турбулентностью.

ИЗЛУЧЕНИЕ ТУРБУЛЕНТНОЙ ПЛАЗМЫ

§ 6.1. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Излучение — важнейшее проявление турбулентности плазмы и имеет многочисленные приложения. С излучением турбулентной плазмы пришлось встретиться в первых же лабораторных экспериментах, в которых возбуждалась турбулентность плазмы пучками заряженных частиц, электрическим полем и т. п. (см. [24, 31, 32]). Одним из важных приложений излучения турбулентной плазмы является возможность получения определенных сведений о параметрах плазмы (температуры, плотности и т. п.), а также диагностика спектров турбулентности плазмы. Излучающую турбулентную плазму можно использовать как источник электромагнитных волн. Как правило, спектр излучения довольно широк. Эффекты излучения турбулентной плазмы могут приводить к излучательной диссипации турбулентности плазмы и возможности установления стационарной турбулентности, диссипируемой на излучение. Излучение турбулентной плазмы вместе с механизмом спектральной перекачки способно демпфировать (стабилизировать) раскачивающиеся пульсации.

Среди механизмов излучения турбулентной плазмы можно выделить такие, которые связаны с нелинейной конверсией пульсаций в электромагнитное излучение на основной массе частиц и на быстрых ускоренных частицах (см. гл. 5). Фактически функция распределения частиц в турбулентной плазме не максвелловская и имеет длинные хвосты в сторону больших энергий. Отсюда следует, что само деление частиц на частицы, составляющие собственно плазму, и быстрые частицы условно. Вместе с тем излучение быстрых частиц обладает некоторыми специфическими особенностями. Одна из особенностей излучения быстрых частиц — существенное повышение частоты излучаемых волн, которая для ультрарелятивистских частиц может намного превосходить частоту турбулентных пульсаций. Наоборот, при конверсии в электромагнитное излучение на основной массе тепловых частиц плазмы частота, как правило, либо меняется очень мало, либо может удвоиться, т. е. не может измениться по порядку величины. Действительно, в процессах нелинейного слияния и распадов турбулентных пульсаций могут появиться частоты

$$\omega^t = \omega^\sigma \pm \omega^{\sigma'}. \quad (6.1)$$

Так как при слиянии двух ленгмюровских волн возникают волны с частотой $\sim 2\omega_{pe}$, при слиянии двух волн $\omega \sim \omega_{He}$ в сильном магнитном поле появляются волны с частотой $2\omega_{He}$, слияние плазменной и любой низкочастотной волны дает излучение на частоте, близкой к плазменной, и т. п. При рассеянии пульсаций на тепловых частицах изменение частоты может быть лишь порядка доплеровского смещения частоты, связанного с тепловым движением частиц $k v_{Te}$, $k v_{Ti}$. Для ленгмюровских пульсаций эта величина много меньше самой частоты $\frac{\Delta\omega}{\omega_{pe}} \sim \frac{v_{Ta}}{v_p} \ll 1$. Это означает, что изменения частоты практически не происходит. Из равенства частот поперечных и продольных волн находим

$$\omega_{pe} + \frac{k^2 c^2}{2\omega_{pe}} = \omega_{pe} + \frac{3k_1^2 v_{Te}^2}{2\omega_{pe}}, \quad (6.2)$$

$k = \sqrt{3} \frac{v_{Te}}{c} k_1$, т. е. длины поперечных волн в c/v_{Te} раз больше, чем продольных. Такие поперечные волны с частотами, близкими к ω_{pe} , мы условились называть поперечными плазмонами. Возбуждение поперечных плазмонов еще не означает излучения плазмы на частотах, близких к ω_{pe} , так как выход таких волн из плазмы сильно затруднен из-за того, что их показатель преломления n близок к нулю, а нелинейные эффекты спектральных перекачек лишь приближают его к нулю. Имеется все же ряд обстоятельств, которые делают возможным и эффективным излучение на частотах, близких к ω_{pe} . Во-первых, это неоднородности плазмы, из-за которых возникает поток в сторону увеличения волновых чисел. При этом, однако, градиенты концентрации должны быть весьма большими, чтобы «противостоять» нелинейному потоку энергии из-за спектральных перекачек в противоположном направлении. Во-вторых, это возбуждение турбулентности при больших волновых числах, когда $\omega_{pe} + \frac{3k_1^2 v_{Te}^2}{2\omega_{pe}}$ заметно отличается от ω_{pe} ($\omega - \omega_{pe}$ может быть порядка $\frac{1}{6} \omega_{pe}$). Правда, при интенсивной турбулентности основная энергия быстро перекачивается в область $v_p \gg c$ и доля энергии, приходящаяся на $v_p \sim v_{Te}$, относительно мала. В-третьих, эффекты анизотропии распределения тепловых частиц могут изменить направления перекачки. В-четвертых, наконец, спектральная перекачка может быть для поперечных плазмонов подавлена их выходом из системы. Действительно, согласно (6.2) групповая скорость поперечных плазмонов в c/v_{Te} раз больше, и если γ^N — нелинейный инкремент перекачки, то длина, на которой происходит процесс, описываемый γ^N для поперечных плазмонов, в c/v_{Te} раз больше. Если размеры системы L меньше этой длины конверсии, то о перекачке поперечных плазмонов говорить нельзя. Это не мешает про-

дольным плазмонам сконцентрироваться в области, где их конверсия в поперечные затруднена.

В силу малого изменения частоты на тепловых частицах другие моды пульсаций, кроме ленгмюровских, превратятся в электромагнитное излучение не могут, если $\omega_{He} \ll \omega_{pe}$. В сильном поле $\omega_{He} \gg \omega_{pe}$ в электромагнитное излучение могут легко превращаться пульсации $\omega^\sigma \approx \omega_{He}$, причем, так как для электромагнитных волн, возникающих при конверсии, $n \approx 1$, то трудностей с выходом излучения из плазмы не возникает и конверсия на тепловых частицах может дать интенсивное излучение турбулентной плазмы на частотах, близких к ω_{He} .

Наличие в турбулентной плазме быстрых ускоренных частиц значительно упрощает всю проблему выхода излучения при $\omega_{He} \ll \ll \omega_{pe}$. Действительно, доплеровское изменение частоты для нерелятивистских частиц составляет уже $k v \sim \frac{v}{v_p} \omega_{pe}$ и при $v \gg v_p$ может быть существенно большим ω_{pe} . Кстати, экспериментальные данные по излучению турбулентной плазмы на Солнце [261] указывают на то, что частоты излучения, как правило, близки к ω_{pe} , но систематически превосходят ω_{pe} .

В предыдущей главе было показано, что турбулентная плазма по необходимости генерирует релятивистские частицы. Изменение частот при конверсии на релятивистских частицах оказывается еще более значительным.

Действительно, если частицы не замагничены, то из закона сохранения энергии при рассеянии

$$\omega - \omega^\sigma = (\mathbf{k} - \mathbf{k}^\sigma) \mathbf{v} \quad (6.3)$$

получим

$$\omega = \frac{\omega^\sigma - \mathbf{k}^\sigma \mathbf{v}}{1 - v \cos \theta}, \quad (6.4)$$

где θ — угол между направлением излучаемой волны и скоростью частицы. При $\theta \ll \frac{mc^2}{\varepsilon}$ имеем

$$\omega_{\text{макс}} \simeq |\omega^\sigma - \mathbf{k}^\sigma \mathbf{v}| 2 \frac{\varepsilon^2}{(mc^2)^2}. \quad (6.5)$$

Если $\frac{\omega^\sigma}{k^\sigma} = v_p$ — фазовая скорость пульсаций много меньше c , то

$$\omega_{\text{макс}} \simeq \frac{2c}{v_p} \omega^\sigma \left(\frac{\varepsilon}{mc^2} \right)^2. \quad (6.6)$$

а если $v_p \gg c$, то

$$\omega_{\text{макс}} \simeq 2\omega^\sigma \left(\frac{\varepsilon}{mc^2} \right)^2. \quad (6.7)$$

Сильное отличие максимальной излучаемой частоты от частоты турбулентных пульсаций приводит к возможности возникновения излучения от низкочастотных пульсаций. С ростом ε/mc^2 могут излучать даже самые низкочастотные магнитогидродинамические и альфвеновские пульсации. Такое излучение становится уже сходным с синхротронным излучением в случайных магнитных полях. Однако, поскольку (6.6) возможно для незамагниченных частиц, возникающие эффекты могут качественно отличаться от эффектов синхротронного излучения.

Итак, мы видим, что турбулентная плазма может быть источником электромагнитного излучения в очень широком диапазоне частот. Для описания эффектов возбуждения и распространения электромагнитных волн в турбулентной плазме можно воспользоваться уравнениями для числа квантов, описывая их взаимодействие с пульсациями и частицами с помощью вероятностей распада и рассеяния. Приведем здесь общий вид таких уравнений, записав их для I_k :

$$\langle E_k^t E_{k'}^t \rangle = I_k \delta(k + k'); \int_0^\infty \frac{I_k}{4\pi} \left(\frac{1}{\omega} \cdot \frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \varepsilon \right) d\omega = \omega_k N_k^t (2\pi)^{-3}; \quad (6.8)$$

$$I_k = \int_0^\infty I_k d\omega;$$

$$\frac{\partial I_k}{\partial t} + \mathbf{v}_g \frac{\partial I_k}{\partial \mathbf{r}} = \gamma_k I_k + Q_k \frac{4\pi\omega}{\frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \varepsilon} \Bigg|_{\omega=\omega_k} \quad (6.9)$$

Здесь выделен член, пропорциональный интенсивности излучения I_k . Он описывает эффекты реабсорбции излученных волн (если $\gamma_k < 0$), тогда как последний член (6.9) — эффекты спонтанного излучения. Наряду с реабсорбцией возможна и раскачка электромагнитных волн ($\gamma_k > 0$), когда возникает усиление электромагнитных волн турбулентной плазмой. Часто удобно ввести интенсивность излучения

$$I_{\omega, \Omega} = I_k k^3 \left(\frac{dk}{d\omega} \right)^2 \frac{1}{2\pi}. \quad (6.10)$$

Спектральная плотность электромагнитного излучения тогда запишется в виде

$$I_\omega = \int I_{\omega, \Omega} d\Omega, \quad (6.11)$$

а полная интенсивность

$$I = \int_0^\infty I_\omega d\omega. \quad (6.12)$$

В случае изотропного и однородного распределения излучения уравнение (6.9) можно записать в виде

$$\frac{\partial I_{\omega}}{\partial t} = -\gamma_{\omega} I_{\omega} + Q_{\omega}. \quad (6.13)$$

Здесь $Q_{\omega} = \int Q_k k^2 \frac{dk}{d\omega} d\Omega$, $\gamma_{\omega} = \gamma_k(\omega)$. В общем случае Q_k и γ_k могут быть записаны в виде

$$\gamma_k = \sum_{\sigma} \gamma_k^{\sigma} + \sum_{\sigma} \int \gamma_{k, k_1}^{\sigma} W_{k_1}^{\sigma} dk_1; \quad (6.14)$$

$$Q_k = \sum_{\sigma} Q_k^{\sigma} + \sum_{\sigma} \int Q_{k, k_1}^{\sigma} W_{k_1}^{\sigma} dk_1 + \\ + \sum_{\sigma, \sigma'} \int Q_{k, k_1, k_2}^{\sigma\sigma'} W_{k_1}^{\sigma} W_{k_2}^{\sigma'} dk_1 dk_2. \quad (6.15)$$

В γ_k достаточно ограничиться линейным по энергии турбулентности членом, тогда как в Q_k необходимо учесть и квадратичный, так как уравнения переноса учитывают все члены, квадратичные по I_k и W_k^{σ} . Первый член (6.15) возникает из-за процессов спонтанного рассеяния пульсаций на тепловых и ускоренных частицах. Если слой плазмы достаточно тонок (оптически тонок), а именно его толщина L много меньше длины реабсорбции v_g/γ_k , то индуцированные процессы в (6.9) несут существенны и мощность излучения $\partial I_k/\partial t$ определяется спонтанным излучением. Величина Q_k дает энергию, излучаемую спонтанно в 1 сек из 1 см³ плазмы и отнесенную к dk . Q_{ω} — спектральная плотность мощности излучения. Если слой плазмы толстый $L \gg \frac{v_g}{\gamma_k}$, то интенсивность излучения при $\gamma_k > 0$ достигает насыщения

$$\left. \frac{4\pi\omega}{\frac{\partial}{\partial\omega} \omega^2 \epsilon} \right|_{\omega=\omega_k}; \quad I_k = \frac{Q_k}{|\gamma_k|}. \quad (6.16)$$

Если $\gamma_k < 0$ (т. е. имеет место мазер-эффект), то в стационарных условиях $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0\right)$

$$\left. \frac{4\pi\omega}{\frac{\partial}{\partial\omega} \omega^2 \epsilon} \right|_{\omega=\omega_k}; \quad I_k = \frac{Q_k}{|\gamma_k|} \left(e^{|\gamma_k| \frac{L}{v_g}} - 1 \right), \quad (6.17)$$

т. е. $Q_k/|\gamma_k|$ определяет начальный уровень интенсивности, с которого можно считать рост интенсивности с расстоянием экспоненциальным.

§ 6.2. ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССОВ
ИЗЛУЧЕНИЯ И РАСПРОСТРАНЕНИЯ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ТУРБУЛЕНТНОЙ ПЛАЗМЕ
С ПОМОЩЬЮ ПАРАМЕТРОВ СТОКСА

Будем считать, что излучаемые волны поперечны. В слабом магнитном поле $\omega_{He} \ll \omega_{pe}$ поперечными будут приближенно волны, имеющие частоты, близкие к ω_{pe} , и все волны с $\omega \gg \omega_{pe}$. В сильном поле поперечными будут приближенно волны с $\omega \gg \omega_{pe}$. Исследуем поляризационные свойства таких волн, испускаемых турбулентной плазмой. Удобно ввести параметры Стокса [46, 262]. Рассмотрим случайное поле поперечных электромагнитных волн E_k . Так как $E_k k = 0$, то E_k имеет лишь две ортогональные компоненты, перпендикулярные k и обозначенные ниже $E_{k,1}$ и $E_{k,2}$. Среднее по статистическому ансамблю от произведений этих компонент обозначим*

$$\langle E_{k,i}^t E_{k',j}^t \rangle = I_{k,ij} \delta(k+k'); \quad (6.18)$$

$$i = 1, 2 \quad k = \{k, \omega\}.$$

Введем далее

$$I_{k,ij} = \int_0^\infty d\omega I_{k,\omega,ij}. \quad (6.19)$$

Если пренебречь корреляциями электромагнитных полей, то

$$I_{k\omega,ij} = I_{k,ij} \delta(\omega - \omega_k) + I_{-k,ij} \delta(\omega + \omega_k). \quad (6.20)$$

Из четырех величин $I_{k,ij}$ можно составить четыре комбинации, обозначаемые I_k, G_k, U_k, V_k и носящие название параметров Стокса:

$$\left. \begin{aligned} I_k &= I_{k,11} + I_{k,22}; & G_k &= I_{k,11} - I_{k,22}; \\ U_k &= I_{k,12} + I_{k,21}; & V_k &= \frac{1}{i} (I_{k,12} - I_{k,21}); \\ I_{k,12} &= \frac{1}{2} (U_k + iV_k); & I_{k,21} &= \frac{1}{2} (U_k - iV_k). \end{aligned} \right\} \quad (6.21)$$

Смысл компонент $I_{k,11}$ и $I_{k,22}$ очевиден — это величины, пропорциональные интенсивности излучения; компоненты $I_{k,12}$ и $I_{k,21} = I_{k,12}^*$ характеризуют корреляцию проекций напряженностей поля излучения на два взаимно перпендикулярных направления, т. е. поляризацию излучения. Все четыре введенных параметра действительны (не комплексны) и обладают свойством аддитивности для совокупности независимых электромагнитных излучений. Для

* Здесь записано соотношение для однородного и стационарного поля излучения, которое может быть обобщено на случай слабой неоднородности электромагнитного поля, в приближении геометрической оптики (см. [262]).

того чтобы более отчетливо выявить смысл отдельных параметров Стокса, рассмотрим некоторые частные примеры.

Удобно ввести E_k , если пренебречь корреляциями

$$E_{k, \omega}^t = E_k^t \delta(\omega - \omega_k) + E_{-k}^t \delta(\omega + \omega_k). \quad (6.22)$$

Тогда

$$I_{k, ij} \sim \langle E_{ki}^t E_{kj}^{t*} \rangle.$$

Рассмотрим поле излучения, для которого разность фаз между проекциями E_k на два заданных направления неизменна, тогда как сама фаза испытывает случайные изменения. При заданной разности фаз конец вектора E_k в плоскости, перпендикулярной к k , как известно [263], всегда описывает эллипс. Если фаза такого колебания испытывает резкое изменение, то вектор E_k скачкообразно (достаточно быстро по сравнению с периодом) изменяет свое значение, оставаясь все время на одном и том же эллипсе. В среднем за достаточно большой промежуток времени конец вектора E_k с одинаковой вероятностью можно встретить в любой точке эллипса. Среднее значение поля равно нулю. Не равны нулю средние квадратичные комбинации. Среднее во времени равно среднему по статистическому ансамблю.

Пусть ось 1 направлена вдоль большой оси эллипса, а 2 — вдоль малой. Сдвиг фаз двух колебаний в этом случае равен $\pm \pi/2$, т. е.

$$I_{k, 12} \sim \langle |E_{k,1}^{(0)}| e^{-i\varphi_1} |E_{k,2}^{(0)}| e^{-i\varphi_2} \rangle = \langle |E_{k,1}^{(0)}| |E_{k,2}^{(0)}| \rangle \frac{1 \pm i}{\sqrt{2}}$$

или

$$U_{k,0}^2 = V_{k,0}^2 \sim \frac{1}{2} |E_{k,1}^{(0)}|^2 |E_{k,2}^{(0)}|^2,$$

где $E_{k,1}^{(0)}$, $E_{k,2}^{(0)}$ — полуоси эллипса. Если оси 1 и 2 не направлены по главным осям эллипса, то проекции $E_{k,1}$, $E_{k,2}$ можно выразить через проекции по главным осям

$$\begin{aligned} E_{k,1} &= E_{k,1}^{(0)} \cos \varphi + E_{k,2}^{(0)} \sin \varphi; \\ E_{k,2} &= -E_{k,1}^{(0)} \sin \varphi + E_{k,2}^{(0)} \cos \varphi. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} I_{k,12} &\sim \langle E_{k,1} E_{k,2}^* \rangle = \frac{1}{2} \sin 2\varphi (\langle E_{k,2}^{(0)} E_{k,2}^{(0)*} \rangle - \langle E_{k,1}^{(0)} E_{k,1}^{(0)*} \rangle) + \\ &+ \cos^2 \varphi \langle E_{k,1}^{(0)} E_{k,2}^{(0)*} \rangle - \sin^2 \varphi \langle E_{k,2}^{(0)} E_{k,1}^{(0)*} \rangle \sim -\frac{1}{2} \sin 2\varphi Q_{k,0} + \\ &+ \frac{\cos^2 \varphi}{2} (U_{k,0} + iV_{k,0}) - \frac{\sin^2 \varphi}{2} (U_{k,0} - iV_{k,0}) = \\ &= -\frac{1}{2} \sin 2\varphi Q_{k,0} + \frac{1}{2} \cos 2\varphi U_{k,0} + \frac{1}{2} iV_{k,0} = \frac{1}{2} (U_k + iV_k). \end{aligned}$$

Итак,

$$U_k = -\sin 2\varphi Q_{k,0} + \cos 2\varphi U_{k,0};$$

$$V_k = V_{k,0}. \quad (6.24)$$

Аналогичным образом легко показать, что

$$Q_k = Q_{k,0} \cos 2\varphi + U_{k,0} \sin 2\varphi. \quad (6.25)$$

Эти формулы справедливы также при переходе между любыми парами осей 1,2 и показывают, что существует ряд инвариантов. Так, V является инвариантной величиной. Лишь инварианты имеют определенное физическое толкование. Смысл инварианта V можно уяснить следующим образом. Пусть одна из полуосей эллипса обращается в нуль. Тогда $E_{k,1}^{(0)} = 0$ и $V_k = V_{k,0} = 0$, т. е. излучение будет линейно поляризовано. До сих пор предполагалось, что все элементы ансамбля описывают одни и те же эллипсы. Более сложный случай соответствует смеси элементов с различными эллипсами, что можно трактовать как смесь ансамблей рассмотренного выше типа. Если для каждого из них $V = 0$, то $V = 0$ и для всего ансамбля. В этом случае имеется смесь линейных поляризаций. Исходя из этих соображений, нужно считать, что инвариант V характеризует эллиптичность электромагнитного поля. Степенью эллиптичности называют отношение двух инвариантов

$$q = \frac{V}{I}. \quad (6.26)$$

Из (6.24) и (6.25) следует также, что инвариантной является величина $U^2 + G^2$. Она характеризует степень поляризации излучения.

Степенью поляризации называют величину p

$$p^2 = \frac{U^2 + G^2}{I^2}. \quad (6.27)$$

Легко уяснить смысл такого определения. Для этого достаточно рассмотреть «интенсивность» излучения в заданном выделенном направлении поляризации $I_{k,11} \sim \langle E_{k,1} E_{k,1}^* \rangle$. Из (6.23) следует

$$I_{k,11} = I_{k,11,0} + (I_{k,22,0} - I_{k,11,0}) \sin^2 \varphi + (I_{k,12,0} + I_{k,21,0}) \times \\ \times \sin \varphi \cos \varphi = I_{k,11,0} - G_{k,0} \sin^2 \varphi + U_{k,0} \sin \varphi \cos \varphi.$$

Проследим за значением $I_{k,11}$ при изменении φ , что соответствует изменению положения анализатора. Легко найдем экстре-

мумы $I_{k, 11}$

$$I_{k, 11, \text{ макс}} = I_{k, 11, 0} - \frac{G_{k, 0}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{U_{k, 0}^2 + G_{k, 0}^2};$$

$$I_{k, 11, \text{ мин}} = I_{k, 11, 0} - \frac{G_{k, 0}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{U_{k, 0}^2 + G_{k, 0}^2}.$$

Отсюда

$$I_{k, 11, \text{ макс}} - I_{k, 11, \text{ мин}} = \sqrt{U_{k, 0}^2 + G_{k, 0}^2};$$

$$I_{k, 11, \text{ макс}} + I_{k, 11, \text{ мин}} = 2I_{k, 11, 0} - G_{k, 0} = I_{k, 0}.$$

Таким образом,

$$p^2 = \left(\frac{I_{k, 11, \text{ макс}} - I_{k, 11, \text{ мин}}}{I_{k, 11, \text{ макс}} + I_{k, 11, \text{ мин}}} \right)^2 \quad (6.28)$$

что соответствует часто употребляемому определению степени поляризации через интенсивность $I_{\text{макс}}$ и $I_{\text{мин}}$ (обозначаемую здесь $I_{k, 11, \text{ макс}}$ и $I_{k, 11, \text{ мин}}$), регистрируемой анализатором. Заметим, что при степени поляризации, равной нулю, $p = 0$, эллиптичность может быть не равной нулю $q \neq 0$. Иногда поляризационные свойства излучения характеризуют величиной π

$$\pi^2 = p^2 + q^2 = \frac{V^2 + U^2 + G^2}{I^2}. \quad (6.29)$$

Неполяризованным называют излучение, для которого $\pi = 0$, что эквивалентно $p = 0$, $q = 0$. В этом случае излучение характеризуется единственной величиной — интенсивностью I и

$$I_{k, ij} = \frac{1}{2} I \delta_{ij}; \quad i, j = 1, 2. \quad (6.30)$$

Здесь i, j проекции на направления, перпендикулярные к \mathbf{k} . В общем случае в системе координат, в которой ни одна из осей не направлена по \mathbf{k} ,

$$I_{k, ij} = \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) I_k; \quad i, j = 1, 2, \{3. \quad (6.31)$$

При анализе космического излучения особое внимание уделяется поляризационным свойствам излучения турбулентной плазмы. Это связано с тем, что принимаемое космическое излучение часто является поляризованным.

Уравнения, описывающие изменения параметров Стокса в результате процессов, происходящих в турбулентной плазме, могут быть найдены следующим образом. Пусть $j_{k, i}$ — ток в плазме, приводящий к излучению электромагнитных волн. Уравнения для

поля поперечных волн, возбуждаемых током $j_{k, i}$, имеют вид

$$(k^2 c^2 - \omega^2 \epsilon_k^t) E_{k, i}^t = 4\pi i \omega j_{k, i}^t, \quad (6.32)$$

где $j_{k, i}^t = j_{k, i} - \frac{k_i (k j_k)}{k^2}$. Из (6.32) легко получить

$$\begin{aligned} (k^2 c^2 - \omega^2 \epsilon_k^t - k_1^2 c^2 + \omega_1^2 \epsilon_{k_1}^{t*}) \langle E_{k, i}^t E_{k_1, j}^{t*} \rangle = \\ = 4\pi i \omega \langle j_{k, i}^t E_{k_1, j}^{t*} \rangle + 4\pi i \omega_1 \langle j_{k_1, j}^{t*} E_{k, i}^t \rangle. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Простоты ради считаем плазму однородной, характерное время изменения параметров Стокса много больше частоты поперечных волн, характерный масштаб длины, на которой изменяются параметры Стокса, много больше длины волны поперечных волн. Так же, как и в гл. 2, вместо $\langle E_{k, i}^t E_{k_1, j}^{t*} \rangle = I_{ij}(\kappa, \Delta k)$; $2\kappa = k + k_1$; $\frac{\kappa}{k} \Delta k = k - k_1$ удобно ввести параметры Стокса, зависящие от времени координат,

$$I_{ij}(x, k) = \int I_{ij}(\kappa, \Delta k) e^{i \Delta k x} d\Delta k; \quad [x = \{r, t\}; \quad \Delta k = \{\Delta k, \Delta \omega\}]. \quad (6.34)$$

Учитывая $\Delta k \ll \kappa \approx k$, получаем, что выражение в скобках левой части (6.33) имеет приближенный вид

$$\Delta k \frac{\partial}{\partial k} (k^2 c^2 - \omega^2 \epsilon_k^t) - \Delta \omega \frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \epsilon_k^t = \frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \epsilon_k^t (-\Delta \omega + \Delta k v_g^t).$$

Здесь использовано то, что для коэффициентов перед малыми $\Delta \omega$ и Δk можно пренебречь слабой нестационарностью и неоднородностью поля поперечных волн и считать, что оно удовлетворяет дисперсному уравнению $k^2 c^2 - \omega^2 \epsilon_k^t = 0$. Умножая (6.33) на $e^{i \Delta k x}$ и интегрируя по Δk , получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \epsilon_k^t \left(\frac{\partial}{\partial t} I_{k, ij} + v_g^t \frac{\partial}{\partial r} I_{k, ij} \right) = -4\pi \int e^{i \Delta k x} d\Delta k \times \\ \times [\omega \langle j_{k, i}^t E_{k_1, j}^{t*} \rangle + \omega_1 \langle j_{k_1, j}^{t*} E_{k, i}^t \rangle]. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Удобно E из (6.32) выразить через j

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} I_{k, ij} + v_g^t \frac{\partial}{\partial r} I_{k, ij} = \frac{(4\pi)^2}{\frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \epsilon_k^t} \int e^{i \Delta k x} i \omega \omega_1 d\Delta k \times \\ \times \langle j_{k, i}^t j_{k_1, j}^{t*} \rangle [(k_1^2 c^2 - \omega_1^2 \epsilon_{k_1}^{t*})^{-1} - (k^2 c^2 - \omega^2 \epsilon_k^t)^{-1}]. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Так как E^t — случайное поле, то согласно (6.32) и j^t также случайное, т. е.

$$\langle j_{k, i}^t j_{k_1, j}^{t*} \rangle = R_{k, ij} \delta(k - k_1). \quad (6.37)$$

Подставляя (6.37) в (6.36) и учитывая, что

$$\frac{1}{k^2 c^2 - \omega^2 \varepsilon_k^t} - \frac{1}{k^2 c^2 - \omega^2 \varepsilon_k^t} = -2\pi i \delta(k^2 c^2 - \omega^2 \varepsilon_k^t), \text{ получаем}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} I_{k, ij} + \mathbf{v}_g^t \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} I_{k, ij} \right) \frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \varepsilon_k^t = 4(2\pi)^3 R_{k, ij} \omega^2 \delta(k^2 c^2 - \omega^2 \varepsilon_k^t). \quad (6.38)$$

Так как $I_{k, ij}$ в рассматриваемом приближении удовлетворяет $k^2 c^2 - \omega^2 \varepsilon^t = 0$, то оно должно быть пропорционально $\delta(k^2 c^2 - \omega^2 \varepsilon^t)$.

Обозначая $I_{k, ij} = \int_0^\infty I_{k, ij} d\omega$ и интегрируя (6.38) по ω , получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} (I_{k, ij}) + \mathbf{v}_g \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} I_{k, ij} = \frac{4(2\pi)^3 \omega^2 R_{k, ij}}{\left(\frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \varepsilon_k^t \right)^2} \Big|_{\omega=\omega_k}. \quad (6.39)$$

Отметим, что плотность энергии поля излучения определяется по следующей формуле:

$$W = \int \frac{1}{\omega_k} \cdot \frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \varepsilon_k^t \Big|_{\omega=\omega_k} \frac{I_{k, ij} dk}{4\pi} = \int \omega_k \frac{N_k^t dk}{(2\pi)^3}. \quad (6.40)$$

Как видно из (6.40), уравнение (6.39) для диагональных матричных элементов матрицы $I_{k, ij}$, определяющей коэффициенты Стокса, совпадает с общим уравнением для числа квантов N_k^t , т. е. описывает процессы спонтанного и индуцированного рассеяния турбулентных пульсаций в электромагнитное излучение, а также нелинейные процессы слияния турбулентных пульсаций в электромагнитные волны. Уравнение (6.38) более общее, так как учитывает корреляционные эффекты. Рассмотрим параметры Стокса для электромагнитного излучения из-за спонтанного рассеяния турбулентных пульсаций на частицах плазмы. Общее выражение для тока, линейного по полю рассеивающихся турбулентных пульсаций, имеет вид ($H_0 = 0$)

$$j_{k, i} = \int \Lambda_{ij}(k, k_1) e^{i(k-k_1) \cdot \mathbf{r}_0} dk_1 \delta(\omega - \omega_1 - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{v}) E_{k_1, j}^\sigma. \quad (6.41)$$

Здесь записан ток, создаваемый отдельной рассеивающейся частицей, которая в начальный момент времени имела координату \mathbf{r}_0 . При вычислении среднего значения $\langle j_{k, i}^t j_{k', j}^{t*} \rangle$ усредним результат по начальным \mathbf{r}_0 (так как рассеивающаяся частица может иметь произвольное \mathbf{r}_0) $\frac{1}{V} \int d\mathbf{r}_0 \langle j_{k, i}^t j_{k', j}^{t*} \rangle$ и также по скоростям,

умножив результат на число частиц со скоростью v в объеме V :
 $f_p dp (2\pi)^{-3} V \left[(2\pi)^{-3} \int f_p dp V = nV = N \right]$, где n — число частиц в единице объема, N — число частиц в объеме V]. Итак,

$$\langle j_{k,i}^t j_{k',j}^{t*} \rangle = \int f_p dp dr_0 \Lambda_i^t(k, k_1) \Lambda_j^{t*}(k', k_1) dk_1 dk_1' \times \\ \times (2\pi)^{-3} \exp [i(k - k_1 - k' + k_1) r_0] \delta(\omega - \omega_1 - (k - k_1)v) \times \\ \times \delta(\omega' - \omega_1' - (k - k_1')v) \langle E_{k_1}^\sigma E_{k_1'}^{\sigma'} \rangle, \quad (6.42)$$

где $\Lambda_i^t(k, k_1) = e_{k_1, i}^\sigma \left(\Lambda_{ij}(k, k_1) - \frac{k_i k_s \Lambda_{sj}(k, k_1)}{k^2} \right)$; $e_{k_1, j}^\sigma$ — нормальный

орт для рассматриваемых турбулентных пульсаций. Учитывая $\langle E_k^\sigma E_{k'}^{\sigma*} \rangle = I_k^\sigma \delta(k - k')$, получаем

$$R_{k, ij} = \int \Lambda_i^t(k, k_1) \Lambda_j^{t*}(k, k_1) f_p dp I_{k_1}^\sigma \delta(\omega - \omega_1 - (k - k_1)v) dk_1. \quad (6.43)$$

В случае, когда рассеяние происходит на пульсациях, уровень которых соответствует тепловому равновесию, формула (6.43) приводит к обычным формулам, описывающим рассеяния из-за флуктуаций плотности плазмы [264, 265].

Рассмотрим далее параметры Стокса для электромагнитного излучения из-за спонтанного нелинейного слияния волн σ и σ' . Нелинейный ток, описывающий такой процесс, имеет вид

$$j_{k, \mathbf{i}} = 2 \int S_{ijl}(k, k_1, k_2) e_{k_1, j}^\sigma e_{k_2, l}^{\sigma'} E_{k_1}^\sigma E_{k_2}^{\sigma'} dk_1 dk_2 \delta(k - k_1 - k_2). \quad (6.44)$$

Отсюда

$$R_{k, ij} = \int \Lambda_i(k, k_1, k_2) \Lambda_j^*(k, k_1, k_2) I_{k_1}^\sigma I_{k_2}^{\sigma'} \delta(k - k_1 - k_2), \quad (6.45)$$

где

$$\Lambda_i(k, k_1, k_2) = 2 S_{mjl}(k, k_1, k_2) e_{k_1, j}^\sigma e_{k_2, l}^{\sigma'} \left(\delta_{im} - \frac{k_i k_m}{k^2} \right). \quad (6.46)$$

Рассмотрим параметры Стокса для спонтанного излучения электромагнитных волн частицами плазмы. Ток, создаваемый зарядом, движущимся по винтовой линии в плазме, находящейся во внешнем магнитном поле, имеет вид

$$j_{k, i} = \frac{e}{(2\pi)^3} \sum_{v=-\infty}^{\infty} \Gamma_{vi} e^{i k r_0 + i v \varphi_0} \delta(\omega - k_z v_z - v \omega_H), \quad (6.47)$$

где φ_0 — начальная фаза вращения заряда по окружности. Для нахождения $\langle j_{k, i}^t j_{k', j}^{t*} \rangle$ усредняем результат как по $\mathbf{r}_0, v_\perp, v_z$, так и по φ_0 . Учитывая $\frac{1}{2\pi} \int d\varphi_0 e^{i(v-v')\varphi_0} = \delta_{v, v'}$, получаем

$$\langle j_{k, i}^t j_{k', j}^{t*} \rangle = \delta(k - k') e^2 \sum_{v=-\infty}^{\infty} \int \frac{f_p dp}{(2\pi)^6} \Gamma_{v, i}^t \Gamma_{v, j}^{*t} \times \\ \times \delta(\omega - k_z v_z - v\omega_H) \delta(\omega' - k'_z v_z - v\omega_H), \quad (6.48)$$

т. е.

$$\Gamma_{v, i}^t = \Gamma_{v, j} (\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2});$$

$$R_{k, ij} = \frac{e^2}{(2\pi)^6} \int f_p^* dp \sum_{v=-\infty}^{\infty} \Gamma_{v, i}^t \Gamma_{v, j}^{*t} \delta(\omega - k_z v_z - v\omega_H). \quad (6.49)$$

Этим исчерпываются спонтанные процессы, возможные с точностью до членов, квадратичных по энергии турбулентности.

Мощность спонтанного излучения, входящая в (6.9), очевидно, выражается через сумму найденных $R_{k, ij}$ по формуле

$$Q_k = \frac{2(2\pi)^2 \omega}{\left(\frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \varepsilon_k^t\right)} \text{Sp } R_{k, ij} \Big|_{\omega=\omega_k}. \quad (6.50)$$

Перейдем теперь к нахождению уравнения для параметров Стокса при индуцированном рассеянии частиц на турбулентных пульсациях. Эффекты индуцированного рассеяния относятся к числу нелинейных процессов, и поэтому удобно использовать уравнения (6.35), подставив в правую часть вместо тока j_k^t нелинейный ток, квадратичный и кубичный по полям E . Используя известную (см. гл. 2 § 3) процедуру усреднения трех и четырех случайных полей, получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} I_{k, ij} + v_g \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} I_{k, ij}\right) = -\frac{4i \omega (4\pi)^2}{\frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \varepsilon_k^t} \left\{ \int S_{ilm}^{t i} (k, k - k_1, k_1) (\omega - \omega_1) dk_1 \times \right. \\ \times \Pi_{ln} (k - k_1) S_{nqp}^{t p} (k - k_1, -k_1, k) e_{k_1, m}^\sigma e_{-k_1, q}^\sigma I_{k_1}^\sigma I_{k, pj} - \\ - \int S_{ijl}^{t i} (k, k - k_1, k_1) dk_1 (\omega - \omega_1) \Pi_{ln}^* (k - k_1) \times \\ \left. \times S_{nqp}^{t p*} (k - k_1, -k_1, k) e_{k_1, m}^\sigma e_{-k_1, q}^{\sigma*} I_{k_1}^\sigma I_{kpi}^* \right\} - \frac{8\pi\omega}{\frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \varepsilon_k^t} \times \\ \times \left\{ \int dk_1 \sum_{jnls}^{t i t_l} (k, k_1, k, -k_1) e_{k_1, n}^\sigma e_{-k_1, s}^\sigma I_{k_1}^\sigma I_{k, lj} + \right. \\ \left. + \int dk_1 \sum_{jnls}^{t j t_l^*} (k, k_1, k, -k_1) e_{k_1, n}^{\sigma*} e_{-k_1, s}^{\sigma*} I_{k_1}^\sigma I_{kji}^* \right\}. \quad (6.51)$$

Здесь

$$S_{ijl}(k, k_1, k_2) = \frac{1}{2} (S_{ijl}(k, k_1, k_2) + S_{ijl}(k, k_2, k_1))$$

— симметризованные по осям 1 и 2 компоненты нелинейного тока второго порядка по полю; $\Sigma_{ijls}(k, k_1, k_2, k_3) = \frac{1}{2} (\Sigma_{ijls}(k, k_1, k_2, k_3) + \Sigma_{ijsl}(k, k_1, k_3, k_2))$ — симметризованные по осям 3 и 2 компоненты нелинейного тока третьего порядка по полю; e_k^σ — орт полей турбулентных пульсаций; верхние индексы t_i, t_l означают, что для соответствующих индексов (i, l) должны учитываться лишь составляющие, перпендикулярные к k [например,

$S_i^{t_i} = S_j \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right)$]. В уравнении (6.51) учтены лишь индуцированные процессы излучения, пропорциональные I_{ij} (эффекты индуцированного рассеяния и индуцированных распадов).

Рассмотрим, наконец, уравнения для параметров Стокса при индуцированном излучении волн частицами плазмы. Эффекты индуцированного излучения и поглощения электромагнитных волн частицами плазмы описываются мнимой (точнее, антиэрмитовой) частью диэлектрической проницаемости плазмы. О поперечных волнах и, следовательно, поляризационных эффектах имеет смысл говорить лишь для высоких частот, для которых действительная часть ε_{ij} с необходимой точностью соответствует изотропной плазме. Антиэрмитова часть ε_{ij} может быть различной для различных поляризаций. Поляризации раскачиваются или затухают с разными γ . Для рассмотрения эффектов поляризации при излучении волн достаточно воспользоваться линейным уравнением

$$(k^2 c^2 - \omega^2 \varepsilon^t) E_{k, j}^t - \omega^2 \varepsilon_{ji}^A E_{k, i}^t = 0, \quad (6.52)$$

где ε_{ij}^A — антиэрмитова, а ε^t — эрмитова часть. Составим уравнение для $E_{k, i}^{t*}$, умножим соответствующие уравнения на $E_{k', i}^{t*}$ и $E_{k, j}^t$ и вычтем одно из другого

$$\begin{aligned} & (k^2 c^2 - \omega^2 \varepsilon_k^t - k'^2 c^2 + \omega'^2 \varepsilon_{k'}^t) \langle E_{k, j}^t E_{k', i}^{t*} \rangle = \\ & = \omega^2 \varepsilon_{j, l}^A(k) \langle E_{k, l}^t E_{k', i}^{t*} \rangle - \omega'^2 \varepsilon_{l, i}^{A*}(k') \langle E_{k', l}^{t*} E_{k, j}^t \rangle. \end{aligned} \quad (6.53)$$

Левая часть уравнения (6.53) совпадает с левой частью (6.33) и преобразуется таким же образом. В правой же части (6.53) в силу малости ε^A можно приближенно считать поперечное поле стационарным и использовать $\langle E_{k, l}^t E_{k', j}^{t*} \rangle = I_{k, l j} \delta(k - k')$. В резуль-

тате имеем

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \omega \varepsilon_k^t \left(\frac{\partial}{\partial t} I_{k, ij} + \mathbf{v}_g \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} I_{k, ij} \right) = i \omega^2 (\varepsilon_{il}^A I_{k, lj} - \varepsilon_{j, l}^{A*} I_{k, li}^*). \quad (6.54)$$

Соотношения (6.51) и (6.54) описывают все индуцированные процессы и совместно с найденными выше $G_{k, ij}$ для спонтанных процессов дают общее уравнение для параметров Стокса [266]. Заметим, что правая часть (6.51) имеет ту же структуру, что и правая часть (6.54), т. е. может быть введена эффективная нелинейная проницаемость ε^N , зависящая от энергии турбулентных пульсаций, так что полное уравнение имеет структуру (6.54), в котором ε_{ij}^A — сумма линейного ε_{ij}^A и нелинейного ε_{ij}^N . Далее полное уравнение может быть преобразовано к более простому виду, если использовать соотношение $I_{li}^* = I_{il}$

$$\frac{\partial}{\partial t} I_{k, ij} + \mathbf{v}_g \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} I_{k, ij} = \gamma_{il} I_{k, lj} + \gamma_{ji}^* I_{k, il} + Q_{kij};$$

$$\gamma_{ij} = \frac{i \omega^2 \tilde{\varepsilon}_{ij}}{\frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \varepsilon_k^t}; \quad \tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij}^A + \varepsilon_{ij}^N. \quad (6.55)$$

Найдем $\varepsilon_{i, l}^A$ для плазмы в постоянном магнитном поле. Заметим, что $\text{Im} \varepsilon^\sigma = \varepsilon_{k, i}^{\sigma*} \varepsilon_{ij}^A \varepsilon_{k, j}^\sigma$ затухание волны σ из $k^2 c^2 - \omega^2 \varepsilon^\sigma = 0$ при малом $\text{Im} \varepsilon^\sigma$ имеет вид $\gamma = -\frac{\omega^2 \text{Im} \varepsilon^\sigma}{\frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \varepsilon^\sigma}$. С другой стороны, $\frac{\partial N_k^\sigma}{\partial t} = 2 \gamma N_k^\sigma$

$$\gamma = \frac{1}{2} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \omega_{p_z, \nu}^\sigma(\mathbf{k}\nu) \left(k_z \frac{\partial f_p}{\partial p_z} + \frac{\omega_H \nu}{v_\perp} \cdot \frac{\partial f_p}{\partial p_\perp} \right) \frac{dp}{(2\pi)^3} =$$

$$= \frac{e^2}{2\pi \frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \varepsilon_k^t} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int d\mathbf{p} \varepsilon_{ki}^{\sigma*} \Gamma_{\nu, i} \Gamma_{\nu, j}^* \varepsilon_{kj}^\sigma \delta(\omega^\sigma - k_z v_z - \nu \omega_H) \times$$

$$\times \left(k_z \frac{\partial f_p}{\partial p_z} + \frac{\omega_H \nu}{v_\perp} \cdot \frac{\partial f_p}{\partial p_\perp} \right).$$

Здесь использовано выражение для вероятности (2.220). Так как $\epsilon_{k,i}^\sigma$ произвольны, то из этого сопоставления получаем

$$\omega^2 \epsilon_{ij}^A = \frac{e^2}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int dp \Gamma_{\nu, i} \Gamma_{\nu, j}^* \delta(\omega - k_z v_z - \nu \omega_H) \times \\ \times \left(k_z \frac{\partial f_p}{\partial p_z} + \frac{\omega_H v}{v_\perp} \cdot \frac{\partial f_p}{\partial p_\perp} \right). \quad (6.56)$$

Естественно, что выражение может быть получено путем непосредственного решения кинетического уравнения [267, 83].

Уравнения (6.55) совместно с (6.56) в отсутствие турбулентности описывают перенос и генерацию поляризованного синхротронного излучения [268].

Уравнение (6.55) несложно обобщается для учета слабых эффектов вращения плоскости поляризации высокочастотного излучения ($\omega \gg \omega_{pe}$), если учесть малые эрмитовы части ϵ_{ij} [269]. Полученные уравнения сходны с (6.9). Уравнение (6.9) получится из (6.55), если считать излучение неполяризованным, т. е. для $I_{k, ij}$ считать выполненным (6.30). Для качественного суждения о новых эффектах, содержащихся в (6.55), рассмотрим простейший случай однородной турбулентности ($\frac{\partial}{\partial r} = 0$)

$$\frac{\partial}{\partial t} I_{k, ij} = \gamma_{il} I_{kij} + \gamma_{jl}^* I_{kii} + Q_{kij}. \quad (6.57)$$

Если происходит раскачка электромагнитных волн, то спонтанным излучением Q_{ij} можно пренебречь. В этом случае можно использовать однородную систему уравнений, решения которой, как обычно, следует искать в виде $e^{i\lambda t}$, причем для λ получится в общем случае дисперсионное уравнение четвертого порядка. Если решение этого уравнения известно, то по начальным коэффициентам Стокса можно определить коэффициенты Стокса для момента t , а следовательно, и величины p , q , т. е. степень поляризации и эллиптичности. Рассмотрим простой пример, когда коэффициенты γ_{ij} являются действительными и $\gamma_{11} = \gamma_{22}$. Учитывая действительность I_{11} и I_{22} , получаем уравнения для $V = \text{Im} I_{12}$ и G :

$$\frac{dV}{dt} = 2\gamma_{11} V; \quad \frac{dG}{dt} = 2\gamma_{11} G.$$

Если при $t=0$ $G = V = 0$, то $V = G = 0$. В этом случае уравнение (6.57) дает уравнение второго порядка для λ . Отсюда

$$\lambda_{\pm} = 2(\gamma_{11} \pm \gamma_{12}); \quad I = \frac{I_0 + U_0}{2} \exp 2t(\gamma_{11} + \gamma_{12}) + \\ + \frac{I_0 - U_0}{2} \exp 2t(\gamma_{11} - \gamma_{12}); \quad U = \frac{I_0 + U_0}{2} \exp 2t(\gamma_{11} + \gamma_{12}) - \\ - \frac{I_0 - U_0}{2} \exp 2t(\gamma_{11} - \gamma_{12}), \quad (6.58)$$

где I_0 и U_0 —значения параметров I и U при $t=0$. Пусть конкретности ради $U_0 > 0$, тогда начальная степень поляризации $p_0 = \frac{|U_0|}{I_0}$ и к моменту t она будет

$$p^2 = \left(1 - \frac{1+p_0}{1-p_0} e^{4\gamma_{12}t}\right) \left(1 + \frac{1+p_0}{1-p_0} e^{4\gamma_{12}t}\right)^{-1}. \quad (6.59)$$

Заметим, что при любом знаке γ_{12} поляризация стремится к единице, т. е. излучение станет полностью поляризованным вне зависимости от начальной степени поляризации (в частности, и полностью не поляризованное излучение $p_0 = 0$ превращается в поляризованное). Этот пример качественно иллюстрирует ситуацию, возникающую в турбулентной плазме. Для возникновения поляризационных эффектов требуется наличие некоторых выделенных направлений. Например, турбулентные пульсации при $H_0 \neq 0$ могут быть распределены анизотропно по отношению к магнитному полю. Спонтанные процессы, так же как и для поляризованного излучения, определяют начальные интенсивности I_0 и U_0 .

Если раскачка отсутствует, то в оптически толстой плазме (6.55) определяет стационарное значение интенсивности и других параметров Стокса. Как правило, степень поляризации этого излучения невелика.

§ 6.3. ИЗЛУЧЕНИЕ ЛЕНГМЮРОВСКОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТЬЮ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН С ЧАСТОТАМИ ПОРЯДКА ω_{pe}

Излучение частот от ω_{pe} до $2\omega_{pe}$ может происходить без ускоренных быстрых частиц. Возможность излучения частот ω_{pe} связана с процессами рассеяния на электронах и ионах

$$l + e \rightarrow t + e'; \quad l + i \rightarrow t + i', \quad (6.60)$$

при наличии ионно-звуковых пульсации s с процессами слияний

$$l + s \rightarrow t; \quad l \rightarrow t + s. \quad (6.61)$$

В магнитном поле возможны также процессы слияний с другими низкочастотными пульсациями.

Излучение на частотах $2\omega_{pe}$ дают процессы

$$l + l' \rightarrow t. \quad (6.62)$$

Процессы излучения могут относительно слабо сказываться на спектрах турбулентности, а могут служить основным механизмом диссипации. Для оценки роли тех или иных механизмов излучения необходимо в первую очередь знать оптическую толщину плазмы для данного процесса, так как если размер плазмы меньше оптической толщины, то излучение определяется спонтанными процессами, если больше, то индуцированными. Начнем с оценок и сравнения про-

цессов (6.60). Наибольший интерес с точки зрения излучения представляет область малых v_p ленгмюровских волн, генерирующих электромагнитное излучение, которое может более или менее свободно покидать плазму. Рассмотрим процесс рассеяния на ионах (6.60) при $\frac{v_p}{v_{Te}} \ll 3 \sqrt{\frac{m_i}{m_e}}$, где такой процесс может идти лишь дифференциально на $\Delta\omega \lesssim k^l v_{Ti}$. Используя выражение для вероятности рассеяния (гл. 2), получаем

$$\frac{dN_k^t}{dt} = -N_k^t \int \frac{dk_1 N_{k_1}^l \omega_{pe}^2 (\omega - \omega_1) [k_1 k]^2 \exp\left\{-\frac{(\omega - \omega_1)^2}{2(k - k_1)^2 v_{Ti}^2}\right\}}{4n_0 m_i v_{Ti}^3 (2\pi)^{5/2} \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right)^2 |k - k_1| k^2 k_1^2}. \quad (6.63)$$

Так как частота практически не меняется при конверсии, удобно поперечные волны относить к тем значениям k продольных волн, частоты которых совпадают с частотами поперечных, вводя

$$W_{k^l}^t = \frac{4\pi k^2 \omega_{pe} N_k^t \sqrt{3} v_{Te}}{(2\pi)^3 c} \Big|_{k = \sqrt{3} \frac{v_{Te}}{c} k^l}, \quad (6.64)$$

так что плотность энергии поперечных волн есть

$$W^t = \int W_{k^l}^t dk^l. \quad (6.65)$$

В дальнейшем индекс l у k будем опускать. Используя

$$\delta'(\omega_-) = \frac{-\omega_-}{\sqrt{2\pi} k_-^3 v_{Ti}^3} \exp\left\{-\frac{\omega_-^2}{2k_-^2 v_{Ti}^2}\right\}, \quad (6.66)$$

получаем

$$\frac{dW_k^t}{dt} = \alpha W_k^t \frac{1}{k} \cdot \frac{\partial}{\partial k} k W_k^t. \quad (6.67)$$

Здесь $W_k^l = (2\pi)^{-3} \omega_{pe} 4\pi k^2 N_k^l$, а α — константа, точно равная (4.16). Аналогичные уравнения для изменения l -волн есть

$$\frac{dW_k^l}{dt} = \alpha W_k^l k \frac{\partial}{\partial k} \cdot \frac{1}{k} W_k^l + \alpha W_k^l \frac{\partial W_k^l}{\partial k}. \quad (6.68)$$

Здесь учитывается также член, описывающий ll -взаимодействия.

Член tt -рассеяния в (6.67) имеет относительную малость $\frac{v_{Te}^2}{c^2}$

и отброшен. Согласно определениям (6.64) величины W_k^l , W_k^t отличаются лишь множителем ω_{pe} от числа квантов. Из (6.67) и (6.68) легко получить

$$\frac{d}{dt} \int (W_k^l + W_k^t) dk = 0,$$

что отражает закон сохранения числа квантов при рассеянии. Можно сравнить рассеяния на электронах и ионах. В области $\omega_- \ll kv_{Ti}$ рассеяние на электронах по крайней мере в $\frac{v_{Ti}}{v_{Te}}$ раз менее эффективно. Поэтому разумно сравнить перекачку на $\Delta k \sim k$. При рассеянии на электронах имеем согласно работе [59] следующую оценку:

$$\gamma_e^N \approx \omega_{pe} \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^2 \left(\frac{v_p}{v_{Te}} \right)^3 \frac{W}{n_0 T_e}, \quad (6.69)$$

тогда как (6.67) приводит к оценке

$$\gamma_i^N \approx \frac{\omega_{pe}}{10} \cdot \frac{m_e}{m_i} \left(\frac{v_p}{v_{Te}} \right)^2 \frac{W}{n_0 T_e}. \quad (6.70)$$

Так как $v_p \ll 3v_{Te} \sqrt{\frac{m_i}{m_e}}$, то (6.69) всегда меньше (6.70) и рассеяние на электронах практически можно отбрасывать.

Уравнение (6.68) имеет стационарное решение $W_k^t = 0$, $W_k^l = \text{const} = \sqrt{\frac{2Q}{\alpha}}$, которое было найдено выше. Это решение, однако, согласно (6.67) неустойчиво относительно возбуждения поперечных квантов в области $v_p \gg v_{Te} \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/5}$. В области же $v_p < v_{Te} \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/5}$, если $W_k^l \simeq \text{const} k^{-5/2}$, согласно (6.67) имеет место затухание поперечных плазмонов, т. е. они не возбуждаются. Очевидно, что индуцированное возбуждение существенно, если толщина L плазмы (ее характерный размер) больше оптической толщи относительно этого процесса. Подставив $W_k^l = \sqrt{\frac{2Q}{\alpha}}$, получим для оптической толщи L_*

$$L_* = \frac{v_g k}{\alpha} \sqrt{\frac{\alpha}{2Q}}. \quad (6.71)$$

Характерно, что $v_g = \sqrt{3} kv_{Te} c / \omega_{pe}$ достаточно велико, и L_* принимает вид

$$L_* = \frac{9}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \left(1 + \frac{T_e}{T_i} \right) \frac{k^2 v_{Te}^2}{\omega_{pe}^2} \cdot \frac{c}{\omega_{pe}} \sqrt{\frac{Q_0}{Q}}. \quad (6.72)$$

Длина, на которой устанавливается равновесие II -рассеяния, в $\frac{v_{Te}}{c}$ раз меньше. Если $L \ll L_*$, то необходимо учитывать лишь процессы спонтанного излучения t -волн.

Мощность излучения согласно (6.50) и (6.43), если учесть, что

$$\Lambda_i = \frac{i e^2}{m_e (2\pi)^3} \cdot \frac{k_{1i}}{k_1 \omega_{pe}} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right)}, \quad (6.73)$$

имеет вид

$$Q_k^t = 4\pi k_1^2 Q_{k_1} \left. \frac{\sqrt{3} v_{Te}}{c} \right|_{k_1 = \frac{\sqrt{3} k v_{Te}}{c}} = \frac{(4\pi)^{-1} v_{Te} k \omega_{pe}^3}{\sqrt{3} n c^3 \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right)^2} W_k^t. \quad (6.74)$$

Здесь мощность излучения отнесена к значениям продольных волн, частоты которых совпадают с частотами поперечных. Результат (6.74) совпадает с тем, который был впервые получен в работах [264, 265] при $T_e = T_i$. Подставляя $W_k^t = \sqrt{\frac{2Q}{\alpha}}$ и учитывая, что вклад вносят максимально возможные k порядка $\frac{\omega_{pe}}{v_{Te}} \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/5}$, получаем оценку полной мощности излучения

$$Q^t = \int_0^\infty Q_k^t dk \approx T_e \frac{\omega_{pe}^3}{c^3} \omega_{pe} \sqrt{\frac{Q}{Q_0}}. \quad (6.75)$$

Если $L \ll L_* \left| k \sim \frac{\omega_{pe}}{v_{Te}} \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/5} \right.$, то интенсивность порядка (6.75) теряется плазмой на излучение. Без учета радиационных потерь вся мощность расходовалась на нагрев плазмы из-за поглощения пульсации при парных столкновениях частиц. Мощность излучения может сравниться с мощностью генерации Q , если Q настолько мало, что уровень турбулентности меньше уровня тепловых флуктуаций. Величина L_* согласно (6.72) достаточно велика из-за $Q \ll Q_0$, и поэтому условие $L \ll L_*$ в лабораторных условиях часто выполнено. Наоборот, в астрофизических условиях может выполняться противоположное неравенство. Считая $L \gg L_*$ и пренебрегая спонтанными процессами, рассмотрим более подробно решение (6.67) и (6.68). В области, в которой нет источников возбуждения турбулентности, пренебрегая парными столкновениями, получаем из уравнения (6.67) при $\frac{d}{dt} = 0$

$$W_k^t = \frac{\text{const}}{k} = \frac{A}{k}, \quad (6.76)$$

а из (6.68)

$$W_k^t = Bk - \frac{A}{2k} = \frac{A}{k} \left(\frac{k^2 - k_*^2}{2k_*^2} \right); \quad B = \frac{A}{2k_*^2}, \quad (6.77)$$

где k_* — значение k , при котором интенсивность поперечных волн обращается в нуль.

Учтем теперь, что возникновение поперечных плазмонов есть вторичный эффект, а в области генерации, где W_k^t круто падает, (6.67) не дает возбуждения t -волн. Поэтому k_* должно быть равным k_g . Но при $k < k_*$ $W_k^t < 0$, что невозможно, т. е. либо стационарного решения нет, либо $W_k^t = 0$. Численный расчет, проведенный в работе [270], показал, что имеет место непрерывная перекачка из продольных волн в поперечные и наоборот, и эти осцилляции затухают весьма медленно. В этом случае спектр $W_k = \sqrt{\frac{2Q}{\alpha}}$ можно рассматривать лишь как приближенное выражение, усредненное по указанным осцилляциям.

Четырехплазменные взаимодействия $t + t' \rightleftharpoons t_1 + t'_1$; $t + l \rightarrow t_1 + l_1$ имеют тот же порядок величины в переменных k^l [см. (6.64)], что и взаимодействие $l + l' \rightleftharpoons l_1 + l'_1$. Таким образом, расталкивание поперечных плазмонов при малых k имеет качественно тот же характер и порядок величины, что и описанное в гл. 4 расталкивание продольных плазмонов.

Рассмотрим теперь процесс (6.62). Вероятность его имеет вид [39]

$$\begin{aligned} \omega_i^{ll}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) &= \frac{e^2 (2\pi)^6 (k_1^2 - k_2^2)^2}{32\pi m_e^2 k^2 \omega_{pe}} \cdot \frac{[k_1 k_2]^2}{k_1^2 k_2^2} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \times \\ &\times \delta \left(\omega - 2\omega_{pe} - \frac{3v_{Te}^2}{2\omega_{pe}} (k_1^2 + k_2^2) \right). \end{aligned} \quad (6.78)$$

Мощность спонтанного излучения будет задаваться формулой

$$Q_k = \int Q_{k, k_1, k_2} W_{k_1}^l W_{k_2}^l dk_1 dk_2; \quad (6.79)$$

$$\begin{aligned} Q_{k, k_1, k_2} &= \frac{\pi\omega (k_1^2 - k_2^2)^2 [k_1 k_2]^2}{8m_e n_0 k^2 \omega_{pe} k_1^2 k_2^2} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \times \\ &\times \delta \left(\sqrt{k^2 c^2 + \omega_{ie}^2} - 2\omega_{pe} - \frac{3v_{Te}^2 (k_1^2 + k_2^2)}{2\omega_{pe}} \right). \end{aligned} \quad (6.80)$$

Тепловые поправки к спектру продольных волн малы, поэтому $(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)^2 \approx \frac{3\omega_{pe}^2}{c^2}$. Если для обеих сливающихся волн $v_p \ll c$, то

слияние возможно в случае, когда их направления распространения почти противоположны. Если одна из сливающихся волн имеет $v_p \approx c$, то вторая должна иметь $v_p \approx c$. Если $v_p \gg c$, то первая, в свою очередь, имеет v_p в узком интервале около $c/\sqrt{3}$. Относительная доля волн, распространяющихся навстречу друг другу, невелика, и поэтому с уменьшением фазовых скоростей волн излучение падает. Считая $k_1, k_2 \gg \frac{\omega_{pe}}{c}$, получаем

$$Q_k = \int Q_{k, k_1} W_{k_1}^l W_{-k_1}^l dk_1; \quad (6.81)$$

$$Q_{k, k_1} = \frac{\pi \omega [k_1 k]^2 (kk_1)^2}{2k^2 m_e n_0 \omega_{pe} k_1^4} \delta \left(\sqrt{k^2 c^2 + \omega_{pe}^2} - 2\omega_{pe} - \frac{3k_1^2 v_{Te}^2}{\omega_{pe}} \right). \quad (6.82)$$

Для изотропной турбулентности, вводя $W_{k_1}^l = 4\pi k_1^2 W_{k_1}^l$;

$$\int_0^\infty W_{k_1}^l dk_1 = W^l,$$

$$Q_k^t = \int \frac{\omega dk_1 k^2 \delta \left(\sqrt{k^2 c^2 + \omega_{pe}^2} - 2\omega_{pe} - \frac{3k_1^2 v_{Te}^2}{\omega_{pe}} \right)}{60 k_1^2 m_e n_0 \omega_{pe}} (W_{k_1}^l)^2. \quad (6.83)$$

Эта формула позволяет описать крыло линии излучения на частоте $\sim 2\omega_{pe}$. Очевидно, что излучение частот, меньших $2\omega_{pe}$, невозможно, т. е. интенсивность при $\omega < 2\omega_{pe}$ равна нулю. Если $\omega - 2\omega_{pe} \gg \frac{v_{Te}^2}{c^2} \omega_{pe}$, то могут вносить вклад лишь $v_p \gg c$, т. е. ре-

зультат описывается (6.83). Принимая $W_k = \text{const} = \sqrt{\frac{2Q}{\alpha}}$, получаем для интенсивности излучения на крыле линии

$$4\pi Q_k^t k^2 \frac{dk}{d\omega} = Q_\omega^t = Q \frac{324 m_i v_{Te}^5}{5m_e c^5} \left(1 + \frac{T_e}{T_i} \right)^2 \frac{\sqrt{\omega_{pe}}}{(\omega - 2\omega_{pe})^{3/2}}. \quad (6.84)$$

Здесь пренебрежено разностью между ω и $2\omega_{pe}$ в коэффициенте перед резонансным множителем $\frac{1}{(\sqrt{\omega - 2\omega_{pe}})^3}$. Множитель $\left(1 + \frac{T_e}{T_i} \right)$ при $T_e \gg T_i$ должен быть заменен единицей. Формула (6.84) справедлива до v_p порядка c , если $\frac{3v_{Te}^2}{v T_i} > c$. Полная мощность,

излучаемая на частотах, больших ω_* , имеет вид

$$Q_*^t = \int_{\omega_*}^{\infty} Q_{\omega} d\omega = \frac{648 Q m_i v_{Te}^5}{5 m_e c^5} \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right)^2 \sqrt{\frac{\omega_{pe}}{\omega_* - 2\omega_{pe}}}. \quad (6.85)$$

Этой формулой можно пользоваться для оценок по порядку величины при $\omega_* - 2\omega_{pe} \sim 2\omega_{pe} \frac{v_{Te}^2}{c^2}$

$$Q^t \approx 10^2 \frac{m_i}{m_e} Q \frac{v_{Te}^4}{c^4} \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right)^2. \quad (6.86)$$

Очевидно, если $Q^t \sim Q$, то вся мощность расходуется на излучение при прохождении через интервал значений k , соответствующих $v_p < c$. В этом случае турбулентность становится излучательной. Наличие большого численного коэффициента в (6.86) показывает, что такая ситуация возможна при $\frac{v_{Te}}{c} \sim \frac{1}{30}$. Для этого, естественно, надо, чтобы размер плазмы был меньше оптической толщи. Прежде чем ее оценивать, рассмотрим более подробно вклад в излучение волн $v_p \sim c$ и $v_p \gg c$. Для этого приведем общий результат для изотропной турбулентности, получаемой из (6.79) после интегрирования по углам,

$$Q_{\omega}^t = \frac{\pi}{16 m_e n_0 \omega_{pe}} \int_0^{\infty} \frac{dk_1}{k_1} W_{k_1}^l \int_{\left|k_1 - \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_{pe}^2}\right|}^{k_1 + \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_{pe}^2}} dk_2 W_{k_2}^l \frac{\omega^2}{k_2 c^2} \times \\ \times (k_1^2 - k_2^2)^2 \frac{1}{k^2} \left[1 - \frac{(k_1^2 + k_2^2 - k^2)^2}{4k_1^2 k_2^2}\right] \delta\left(\omega - 2\omega_{pe} - \frac{3v_{Te}^2}{2\omega_{pe}} (k_1^2 + k_2^2)\right). \quad (6.87)$$

Из (6.87) нетрудно получить приближенную формулу (6.83) для области $v_p \ll c$.

В условиях, когда одна из волн k_1 имеет $v_p \gg c$, из (6.87) следует приближенная формула

$$Q_{\omega}^t = \frac{\pi \sqrt{3} \omega_{pe}^2}{3c^2 m_e n_0} \int W_{k_1} dk_1 W_{\sqrt{3} \omega_{pe}/c} \times \\ \times \delta\left(\omega - 2\omega_{pe} \left(1 + \frac{9}{4} \frac{v_{Te}^2}{c^2}\right) - \frac{3k_1^2 v_{Te}^2}{2\omega_{pe}}\right). \quad (6.88)$$

При

$$k_* < \sqrt{3} \omega_{pe}/c \quad (6.89)$$

имеем

$$Q_{\omega}^t = \frac{2\sqrt{\pi}\omega_{pe}}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right) \sqrt{\frac{Q}{Q_0} \frac{v_{Te}}{c}} \sqrt{\frac{m_i}{m_e} \frac{(v-1)\omega_{pe}}{k_0^2 c^2}} \times \\ \times W(k_0 \sqrt{3} v_{Te})^{\nu} \left(2\omega_{pe} \left(\omega - 2\omega_{pe} \left(1 + \frac{9}{4} \cdot \frac{v_{Te}^2}{c^2}\right)\right)\right)^{-\nu/2}. \quad (6.90)$$

Таким образом, интенсивность возрастает до тех пор, пока $\omega - 2\omega_p \left(1 + \frac{9}{4} \cdot \frac{v_{Te}^2}{c^2}\right)$ не станет равной по порядку величины $k_0^2 v_{Te}^2 / \omega_{pe}^2 \left(k_0 \ll \frac{\omega_{pe}}{c}\right)$. Полная интенсивность излучения найдется из (6.88)

$$Q^t = W^l \frac{\pi \sqrt{3} \omega_{pe}^2}{3c^3 m_e n_0} \sqrt{\frac{2Q}{\alpha}}. \quad (6.91)$$

Если считать, что турбулентность диссипирует из-за столкновений, то $W^l = Q/v_e$, т. е.

$$Q^t = Q \frac{6\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \sqrt{\frac{Q}{Q_0}} \cdot \frac{\omega_{pe}}{v_e} \cdot \frac{v_{Te}^3}{c^3} \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right). \quad (6.92)$$

Значение потока турбулентной энергии Q , начиная с которой доминирует излучение (6.92) в сравнении с (6.86), есть

$$Q_1^R = Q_0 \frac{v_e^2}{\omega_{pe}^2} 10^4 \frac{m_i}{m_e} \cdot \frac{v_{Te}^2}{c^2}, \quad (6.93)$$

а значение Q , для которой мощность излучения (6.92) сравнивается с Q , есть

$$Q_2^R = Q_0 \frac{v_e^2}{\omega_{pe}^2} \cdot \frac{m_e}{m_i} \cdot \frac{c^6}{v_{Te}^6}. \quad (6.94)$$

Естественно, что если энергия турбулентности сможет диссипировать в излучение при $v_p < c$, т. е. $10^2 \frac{m_i}{m_e} \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right)^2 v_{Te}^4 / c^4 > 1$, то $Q_1^R > Q_2^R$, если же имеет место обратное неравенство, то $Q_1^R < Q_2^R$. В этом случае вся энергия турбулентности сосредотачивается при $v_p \gg c$ и при $Q > Q_2^R$ турбулентность становится излучательной.

Для описания излучательной турбулентности заметим, что излучаемые волны по условию покидают систему, и поэтому их плотность энергии внутри плазмы мала. Это означает, что в уравне-

ниях, описывающих изменение спектра турбулентности из-за излучения, можно пренебречь членами, пропорциональными интенсивности излучения. Если интересоваться $v_p \ll c$, то с помощью (6.78) получим

$$\frac{\partial W_k^l}{\partial t} = - \frac{\pi \sqrt{3} \omega_{pe}^4 (W_k^l)^2}{5n_0 m_e c^5 k^2} + \alpha W_k \frac{\partial W_k}{\partial k}. \quad (6.95)$$

Здесь учтено также взаимодействие, связанное с рассеянием на ионах плазмы. Равновесный спектр, получаемый из (6.95), имеет вид

$$W_k^l = W_0^l e^{-k_r/k}; \quad k_r = \frac{27 \sqrt{3} v_{Te}^4}{5c^4} \cdot \frac{\omega_{pe}}{c} \cdot \frac{m_i}{m_e} \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right)^2. \quad (6.96)$$

Условие $k_r > \omega_{pe}/c$ лишь численным множителем отличается от условия излучательной диссипации, получаемого из (6.86). Если генерация турбулентности происходит при $k \gg k_r$, то, как видно из (6.96), в области генерации излучением можно пренебречь и при $k_g < \frac{\omega_{pe}}{v_{Te}} \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/5}$

$$W_0^l = \sqrt{\frac{2Q}{\alpha}}. \quad (6.97)$$

Следовательно, излучение практически не сказывается на спектре турбулентности до $k \sim k_r$, а затем круто уменьшает интенсивность.

Рассмотрим теперь $v_p \gg c$, предполагая, что на области $v_p \ll c$ излучение сказалось слабо. Тогда получим интенсивность излучательного поглощения в виде

$$\frac{\partial W_k^l}{\partial t} = - W_k^l \frac{\pi}{4 \sqrt{3}} \cdot \frac{\omega_{pe}^2}{c^3 n_0 m_e} W_k^l \frac{\omega_{pe}}{c}. \quad (6.98)$$

Если $\sqrt{3} \frac{\omega_{pe}}{c} > k_*$, то (6.98) может быть записано как эффективное поглощение

$$\frac{\partial W_k^l}{\partial t} = - \nu_{эфф} W_k^l; \quad \nu_{эфф} = \frac{3 \sqrt{\pi}}{2 \sqrt{2}} \omega_{pe} \frac{v_{Te}^3}{c^3} \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right) \sqrt{\frac{Q m_i}{Q_0 m_e}}. \quad (6.99)$$

Условие доминирования $\nu_{эфф}$ над парными столкновениями совпадает с $Q > Q_2^R$ [см. (6.94)]. Таким образом, в режиме излучательной диссипации получим качественно такие же спектры турбулентности, которые были исследованы в гл. 4, причем v_e необходимо заменить $\nu_{эфф}$ согласно (6.99). В частности, основной масштаб турбулент-

ности будет определяться формулой

$$k_0 = k_* \left(\frac{27 \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right)^4 m_i v_{Te}^6}{16 m_e c^6} \right)^{\frac{1}{2(\nu-1)}}. \quad (6.100)$$

Как видно из этого результата, основной масштаб турбулентности перестает зависеть от мощности генерации Q . Как отмечалось выше (см. гл. 4), максимум в спектре турбулентности имеет место, если $k_0 \ll k_*$. Таким образом, если температура плазмы достаточно высока (для водородной изотермической плазмы $\frac{v_{Te}}{c} \sim 10^{-1}$) и $Q > Q_2^R$, максимум в спектре турбулентности исчезает. Все эти результаты относятся к оптически тонкому слою плазмы, когда излучение свободно покидает плазму. Необходимо теперь получить выражения для оптической толщи, т. е. длины, на которой реабсорбция излучения становится существенной.

Если $\omega - 2\omega_{pe} \gg \omega_{pe} \frac{v_{Te}^2}{c^2}$, то основной вклад дают $k_1 \gg k$ и

$$\gamma_k = - \frac{\pi \omega_{pe}^2}{5 n_0 m_e c^2} \int W_{k_1}^l dk_1 \delta \left(\omega - 2\omega_{pe} - \frac{3v_{Te}^2 k_1^2}{\omega_{pe}} \right). \quad (6.101)$$

Приняв $W_{k_1} = \sqrt{2Q/\alpha}$, получим

$$\gamma_\omega = \gamma_{k(\omega)} = \frac{3}{5} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \omega_{pe} \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right) \sqrt{\frac{m_i}{m_e} \cdot \frac{v_{Te}^2 \sqrt{\omega_{pe}}}{c^2 \sqrt{\omega - 2\omega_{pe}}}} \sqrt{\frac{Q}{Q_0}}. \quad (6.102)$$

Отсюда и из (6.84) спектр излучения в оптически толстой плазме имеет вид

$$I_\omega = \frac{Q_\omega^t}{\gamma_\omega} = 108 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{Q m_i}{Q_0 m_e} \cdot \frac{v_{Te}^3}{c^3} \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right) \frac{n_0 T_e}{(\omega - 2\omega_{pe})}}. \quad (6.103)$$

Полная интенсивность излучения для частот, больших ω_* , отличается от (6.103) тем, что $\frac{1}{\omega - 2\omega_{pe}}$ заменено $\ln \frac{\omega_{\max} - 2\omega_{pe}}{\omega_* - 2\omega_{pe}} \sim \ln \left[3 \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{2/5} \frac{c^2}{v_{Te}^2} \right]$.

Таким образом, порядок величины интенсивности электромагнитных волн на крыле линий есть

$$\int_{\omega_*}^{\infty} \frac{I_\omega d\omega}{n_0 T_e} \simeq 10^3 \sqrt{\frac{Q m_i}{Q_0 m_e} \cdot \frac{v_{Te}^3}{c^3}}, \quad (6.104)$$

что примерно в $10^2 v_{Te}^3/c^3$ меньше энергии ленгмюровских колебаний. Оптическая толщина L_* из (6.102) имеет вид

$$L_* = \frac{\sqrt{3} c}{2\gamma_\omega}. \quad (6.105)$$

Если $\omega - 2\omega_{pe} \approx \omega_{pe} v_{Te}^2/c^2$, то основной вклад вносят $k_1 \ll k$ (если спектр имеет максимум при $k_0 \gg \frac{\omega_{pe}}{c}$)

$$\gamma_k = \frac{\pi \omega_{pe}^2}{4c^2 n_0 m_e} \int W_{k_1}^l dk_1 \delta \left(\omega - 2\omega_{pe} \left(1 + \frac{9}{4} \cdot \frac{v_{Te}^2}{c^2} \right) - \frac{3v_{Te}^2 k_1^2}{2\omega_{pe}} \right). \quad (6.106)$$

Вместе с (6.89) получим, что при этом

$$I_\omega = \text{const} = \frac{24}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{n_0 T_e}{\omega_{pe}} \cdot \frac{v_{Te}}{c} \left(1 + \frac{T_e}{T_i} \right) \sqrt{\frac{Q m_i}{Q_0 m_e}}. \quad (6.107)$$

Это по порядку величины соответствует (6.103) при $\omega - 2\omega_{pe} \sim \omega_{pe} v_{Te}^2/c^2$. Последнее означает, что оценка (6.104) сохраняет силу для полной интенсивности излучения. Так как энергия излучения в оптически толстой среде составляет относительно небольшую долю всей энергии турбулентности, то ее влияние на спектры турбулентности незначительно.

Наконец, следует в неизотермической плазме $T_e \gg T_i$ рассмотреть роль процессов $l \rightleftharpoons t + s$, $l + s \rightleftharpoons t$. Вероятность первого из этих процессов имеет вид

$$\omega(k_l, k_t) = \frac{e^2 (2\pi)^6 \omega_{pe}^3 \omega_s^3 [k_t, k_l]^2}{8\pi m_e^2 v_{Te}^4 \omega_{pi}^2 k_s^2 \omega_{kt}^2 k_l^2};$$

$$\omega_{l^s}^t(k_l, k_t, k_s) = \omega(k_l, k_t) \delta(k_l - k_t - k_s) \delta(\omega_{k_l}^l - \omega_{k_t}^t - \omega_{k_s}^s), \quad (6.108)$$

а второго отличается от (6.108) знаком k_s и $\omega_{k_s}^s$ в δ -функции. При расчете мощности спонтанного излучения необходимо учитывать оба указанных процесса. Для изотропной турбулентности, пренебрегая ω_s , в сравнении $\omega_{k_l}^l$ и ω_k , получаем

$$Q_{k_t}^t = \int Q_{k_t, k_l} W_{k_l}^l W_{k_l - k_t}^s \delta(\omega_{k_l}^l - \omega_{k_t}^t) dk_l. \quad (6.109)$$

Это показывает, что излучаются частоты, равные частотам ленгмюровских пульсаций. Вводя $k_t = \frac{\sqrt{3} v_{Te}}{c} k$, получим, что мощность

излучения согласно (6.74) можно записать при $k^t \ll k_l$ в виде

$$Q_k^t = \frac{V\sqrt{3} v_{Te} \omega_{pe}}{kc^3} W_k^l W_k^s \eta_k, \quad Q^t = \int Q_k^t dk, \quad (6.110)$$

где η_k связано с коэффициентом $\omega(\mathbf{k}_l, \mathbf{k})$ перед δ -функцией в вероятности (6.108) соотношением

$$\eta_k = \frac{\omega^t}{(2\pi)^3 \omega^l \omega^s} \int \omega(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}) \frac{d\Omega_1}{4\pi}, \quad (6.111)$$

где Ω_1 — телесный угол \mathbf{k}_1 .

Полученные формулы носят более общий характер и могут быть использованы для слияния высокочастотных пульсаций с любыми низкочастотными в магнитоактивной плазме. Для вероятности (6.108)

$$\eta_k = \frac{\pi \omega_{pe}^2}{6n_0 T_e}. \quad (6.112)$$

Итак,

$$Q_k^t = \frac{\pi V\sqrt{3} \omega_{pe}^3 v_{Te}}{6n_0 T_e kc^3} W_k^l W_k^s. \quad (6.113)$$

Считая $k_s \gg k_*^s$ и используя (4.123) при $Q \ll Q_0 \frac{1}{12} \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^3$, получаем

$$Q_k^t = Q \frac{12}{k} \sqrt{\frac{Q}{Q_0}} \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{3/2} \frac{v_{Te}^3}{c^3}. \quad (6.114)$$

Если же $Q \gg Q_0 \frac{1}{12} \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^3$, то следует использовать (4.124)

$$Q_k^t = \frac{9V\sqrt{3}}{2} k \frac{v_{Te}^2}{\omega_{pe}^2} Q \frac{4m_i}{m_e} \cdot \frac{v_{Te}^3}{c^3}. \quad (6.115)$$

Из последнего соотношения следует, что основное излучение происходит на больших k порядка $\frac{\omega_{pe}}{v_{Te}} \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/5}$. Но в этом случае мощность излучения может сравниться с Q лишь в очень горячей плазме $\frac{v_{Te}}{c} > \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/5}$. Если в плазме возбуждена только ионно-звуковая турбулентность, то излучение (6.113) возникает на тепловых ленгмюровских плазмонах. Если использовать (4.231), то можно интен-

сивность излучения записать в виде

$$Q_k = \frac{5\sqrt{3}}{8(2\pi)^{3/2}} \cdot \frac{\omega_{pe}^3}{c^3} v_{Te} \frac{T_e^2}{T_i} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \ln \frac{k}{k_0}. \quad (6.116)$$

Рассмотрим теперь эффекты реабсорбции излучения. В случае, когда возбуждены ленгмюровские пульсации,

$$\gamma_{kt} = - \int N_{k_1}^l \omega_t^{ls}(\mathbf{k}^t, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_s) \frac{d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_s}{(2\pi)^6} + \int N_{k_1}^l \times \\ \times \omega_t^{ts}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}^t, \mathbf{k}_s) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_s (2\pi)^{-3}. \quad (6.117)$$

Введя $k^t = k \sqrt{3} \frac{v_{Te}}{c}$ при $k \gg k_*^s = \frac{2\omega_{pe}}{3v_{Te}} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}$, получим

$$\gamma_k = \alpha' \frac{1}{k} \cdot \frac{\partial}{\partial k} kW_k^l; \quad \alpha' = \alpha \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right)^2. \quad (6.118)$$

α определяется формулой (4.16). Так же как и в динамике взаимодействий l -волн отличие рассеяния на ионах от распадов заключается в замене α величиной α' [см. (6.67)]. Из (6.118), так же как и из (6.67), следует неустойчивость ленгмюровской турбулентности относительно возбуждения поперечных волн. Это непосредственно видно из (6.118), если подставить $W_k^l = \sqrt{\frac{2Q}{\alpha'}}$.

Если возбуждены ионно-звуковые пульсации с $k_s \gg \frac{\omega_{pe}}{c}$, то

$$\gamma_k = - \frac{\pi \omega_{pe}^3}{18n_0 T_e v_{Te}^2} \cdot \frac{W_k^s}{k}. \quad (6.119)$$

Используя (6.116) и (6.119), получаем для интенсивности поперечных колебаний формулу Рэля — Джинса, т. е. возбуждение поперечных волн чисто ионно-звуковой турбулентностью невозможно (о других нераспадных возбуждениях см. ниже). В неизотермической плазме уравнение для изменения l -волн из-за lts -распадов приобретает вид (6.68) с заменой α величиной α' . Узкие линии поперечных волн с частотой $\sim \omega_{pe}$ всегда должны возбуждать ленгмюровскую турбулентность, что наблюдалось в ряде экспериментальных работ. Согласно (6.119) внешние электромагнитные волны эффективно поглощаются в плазме с ионно-звуковой турбулентностью.

§ 6.4. ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ТУРБУЛЕНТНОЙ ПЛАЗМОЙ, НАХОДЯЩЕЙСЯ ВО ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В слабом магнитном поле $\omega_{He} \ll \omega_{pe}$ процессы излучения на частотах $2\omega_{pe}$, процессы $l \leftrightarrow t$ рассеяния и lt -распады мало изменяются. Новым процессом является слияние ленгмюровских волн с вистлерами и плазменными гирочастотными волнами

$l + \omega \rightleftharpoons t$, $l \rightleftharpoons t + \omega$ и слияние с альфвеновскими и магнитогидродинамическими волнами

$$l \rightleftharpoons t + A; \quad l \rightleftharpoons t + M; \quad l + A \rightleftharpoons t, \quad l + M \rightleftharpoons t.$$

Вероятность распада на вистлеры имеет вид

$$w_t^{l, \omega} = \frac{(2\pi)^4 k_w^2 \omega_{pe}^2 [k_t k_l]^2}{2n_0 m_e \omega_{He} k_t^2 k_l^2} \cdot \frac{\sin^2 \theta_w}{|\cos \theta_w|} \delta(k_l - k_l - k_w) \times \\ \times \delta(\omega_t - \omega_l - \omega_w) [\sin^2 \varphi_w \cos^2 \varphi_w + \frac{1}{4} \cos^2 \theta_w (\cos^2 \varphi_w - \sin^2 \varphi_w)^2]. \quad (6.120)$$

Если $\frac{\omega_{He}}{\omega_{pe}} \gg \frac{v_{Te}^2}{c^2}$, то $|k_t| \ll |k_l|$, $|k_w|$ из законов сохранения, поправки на тепловое движение много меньше ω_w , т. е. $k_t = \sqrt{\frac{2\omega_{He}}{\omega_{pe}}} k_w |\cos \theta_w|$; $k_w = -k_l$; $|k_w| = |k_l|$ и ω_t максимально отличается от ω_{pe} на ω_{He} . В записанных условиях процесс $l \rightarrow t + \omega$ не идет. Интенсивность излучения удобно ввести так, чтобы она была нормирована на dk_l ,

$$Q_{k, \Omega}^t = k_l^2 Q_{k_l, \Omega} \sqrt{\frac{2\omega_{He}}{\omega_{pe}} |\cos \theta_w|} \Big|_{k_t = k_l} \sqrt{\frac{2\omega_{He}}{\omega_{pe}} |\cos \theta_w|}. \quad (6.121)$$

Считая распределение пульсаций симметричным относительно направления магнитного поля, из (6.120) получаем

$$Q_{k, \Omega}^t = \int d\Omega_w \left\{ \sqrt{\frac{2\omega_{pe}}{\omega_{He}}} \cdot \frac{\omega_{pe}^4 \sin^2 \theta_w \rho(\theta, \theta_w) W_k^l W_{k, -\Omega_w}^w}{16\omega_{He} k n_0 m_e |\cos \theta_w|^{3/2} c^4}; \right. \\ \left. \rho(\theta, \theta_w) = \frac{1}{2} (1 - \cos^2 \theta \cos^2 \theta_w) (\cos^2 \theta_w + 1) - \right. \\ \left. - \sin^2 \theta \sin^2 \theta_w \frac{1}{4} (\cos^2 \theta_w + 1). \right\} \quad (6.122)$$

Формулу (6.122) можно сравнить с (6.113). При сравнимых энергиях ω - и s -волн мощности излучения на вистлерах сравнимы с мощностями излучения на ионно-звуковой турбулентности при $\frac{\omega_{He}}{\omega_{pe}} \sim \sim \left(\frac{v_{Te}}{c}\right)^{2/3}$. Нужно при этом иметь в виду, что излучаемые частоты всегда достаточно близки к ω_{pe} ($\omega_{\text{макс}} = \omega_{pe} + \omega_{He}$) и их выход из плазмы затруднен.

Выпишем здесь еще поглощение поперечных волн в плазме с возбужденными вистлерами

$$\gamma_k = -\frac{\pi}{8c^2} \int W_{k,-\omega}^w d\Omega_\omega \frac{\omega_{pe}^6 \sin^2 \theta_\omega}{k\omega_{He}^3 |\cos \theta_\omega|^3} \rho(\theta, \theta_\omega). \quad (6.123)$$

Это поглощение при сравнимых энергиях вистлеров и ионно-звуковых пульсаций может превосходить поглощение (6.119) на ионно-звуковых колебаниях (при $\frac{\omega_{He}}{\omega_{pe}} \sim \left(\frac{v_{Te}}{c}\right)^{4/3}$), однако при этом частота поперечной волны должна быть достаточно близкой к ω_{pe} . В оптически толстой среде интенсивность излучения имеет оценку

$$\int I_{k,\Omega} d\Omega = \int \frac{Q_{k,\Omega}^t d\Omega}{\gamma_{k,\theta}} \approx W_k^l \left(\frac{\omega_{He}}{\omega_{pe}}\right)^{3/2}, \quad (6.124)$$

т. е. полная энергия, трансформируемая в поперечные волны из-за этого процесса, много меньше энергии ленгмюровских волн.

Частоты, еще более близкие к ω_{pe} ($\omega_{\max}^t \lesssim \omega_{pe} + \omega_{Hi}$), участвуют во взаимодействиях $t \rightleftharpoons l + A$, $t \rightleftharpoons l + M$. Вероятность этого взаимодействия имеет вид

$$\omega_i^{l,M} = \frac{(2\pi)^4 \omega_A \omega_{pi}^2 \sin^2 \theta_M}{4n_0 m_e v_A^2} \delta(\mathbf{k}_t - \mathbf{k}_l - \mathbf{k}_M) \delta(\omega_t - \omega_l - \omega_M) \times \quad (6.125)$$

$$\times \frac{[\mathbf{k}_l \mathbf{k}_t]^2}{4k_l^2 k_t^2};$$

$$\omega_i^{l,A} \simeq \omega_i^{l,M} \frac{\omega_{Hi}^2}{\omega_A^2} \ll \omega_i^{l,M}.$$

Если $k_l \ll 3\omega_{pe} v_A / 2v_{Te}^2$ (в силу $k_t \ll k_l$, k_M имеем $k_l \approx k_M \ll \omega_{pi}/c$ и записанное условие всегда выполнено, если $v_A > v_{Ti} \frac{v_{Te}}{c}$), то лишь процесс $t \rightleftharpoons l + M$ является существенным, причем $k_t = \sqrt{k_l} \sqrt{\frac{2\omega_{pe} v_A}{c^2}}$. Мощность излучения, нормированная на dk_l , дается выражением

$$Q_{k,\Omega}^t = \frac{\omega_{pe}^2}{8n_0 m_e v_A} W_k^l \int d\Omega_M W_{k,\Omega_M}^M \sin^2 \theta_M \frac{\omega_{pi}^2 \rho_{\theta, \theta_M}}{c^3 (2\omega_{pe} v_A k^3)^{1/2}};$$

$$\rho_{\theta, \theta_M} = \left[1 - \cos^2 \theta \cos^2 \theta_M - \frac{1}{2} \sin^2 \theta \sin^2 \theta_M \right], \quad (6.126)$$

а декремент затухания поперечных волн на магнитозвуковой турбулентности

$$\gamma_{k_t} = - \frac{\pi \omega_{pi}^2}{8n_0 m_e v_A^2} \int d\Omega_A W_{\omega, \Omega_M}^M \frac{\sin^2 \theta_M}{\cos^2 \theta_M} \Big|_{\omega = \frac{k_t^2 c^2}{2\omega_{pe}}} \times \quad (6.127)$$

$$\times \rho^{s_{\theta, \theta_M}}.$$

Перейдем далее к рассмотрению сильных магнитных полей $\omega_{He} \gg \omega_{pe}$. Новым в этом случае будет появление колебаний плазмы с частотами, близкими к ω_{He} ,

$$\omega_k^h = \omega_{He} + \frac{\omega_{pe}^2 \sin^2 \theta}{2\omega_{He}} + \frac{2\omega_{He}}{\omega_{He}^2} k^2 v_{Te}^2 \text{ctg}^2 \theta. \quad (6.128)$$

Характерным для конверсии таких волн в излучение является то, что электромагнитные волны, частоты которых близки к ω_{He} , имеют показатели преломления, близкие к единице (за исключением направления распространения, очень близкого к H_0). Поэтому конвертированные волны свободно могут покидать плазму. Одним из эффективных механизмов превращения волн (6.128) в электромагнитные служит рассеяние на ионах. Другой характерной особенностью конверсии (6.128) является то, что нелинейное взаимодействие волн (6.128) в $\left(\frac{\omega_{pe}}{\omega_{He}}\right)^2$ раз меньше их конверсии в электромагнитное излучение [270].

Таким образом, указанная конверсия представляет собой единственный нелинейный процесс и турбулентность на частотах (6.128) всегда излучательная. Ионы можно считать немагнитными, если

$v_p = \frac{\omega_{He}}{k} \ll \frac{m_i}{m_e} v_{Ti}$. Условие слабого затухания h -волн есть $v_p \gg \frac{\omega_{He}}{\omega_{pe}} v_{Te}$. Таким образом, область, в которой рассеяние происходит на немагнитных ионах, существует при

$$1 \ll \frac{\omega_{He}}{\omega_{pe}} \ll \sqrt{\frac{m_i T_i}{m_e T_e}}. \quad (6.129)$$

Вероятность рассеяния в условиях (6.129) имеет вид

$$\omega_p(\mathbf{k}_t, \mathbf{k}_h) = \frac{\pi \omega_{pe}^2}{2n_0^2} \cdot \frac{[k_t k_h]^2}{k_t^2 k_h^2} (1 + \cos^2 \theta_t) \times$$

$$\times \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right)^{-2} \delta(\omega_t - \omega_h - (\mathbf{k}_t - \mathbf{k}_h) \mathbf{v}). \quad (6.130)$$

Отсюда получим следующее выражение для взаимодействия t и h -волн

$$\frac{\partial W_{\omega, \Omega}^t}{\partial t} = \alpha_* W_{\omega, \Omega}^t \int d\Omega_h \Psi(\theta, \theta_h) \frac{d}{d\tilde{\omega}} \tilde{\omega} W_{\tilde{\omega}, \Omega_h}^h; \quad (6.131)$$

$$\tilde{\omega} = \omega - \omega_{He} - \frac{\omega_{pe}^2}{2\omega_{He}} \sin^2 \theta_h;$$

$$\Psi(\theta, \theta_h) = \frac{\sin^2 \theta_h}{\cos^2 \theta_h} \left(1 - \cos^2 \theta_h \cos^2 \theta_t - \frac{1}{2} \sin^2 \theta_h \sin^2 \theta_t \right);$$

$$\alpha_* = \frac{\pi \omega_{pe}^4}{4v_{Te}^2 n_0 m_i \omega_{He}^2} \left(1 + \frac{T_e}{T_i} \right)^{-2}; \quad (6.132)$$

$$W^h = \int W_{\tilde{\omega}, \Omega_h}^h d\tilde{\omega} d\Omega_h;$$

$$\frac{\partial W_{\tilde{\omega}, \Omega_h}^h}{\partial t} = W_{\tilde{\omega}, \Omega_h}^h \int d\Omega \alpha_* \Psi(\theta, \theta_h) \tilde{\omega} \frac{d}{d\omega} W_{\omega, \Omega}^t. \quad (6.133)$$

Отсюда следует, что стационарному спектру соответствует

$$W_{\tilde{\omega}, \Omega_h}^h = \frac{W(\theta_h)}{\tilde{\omega}} \quad \text{или} \quad W_{k, \Omega_h}^h \sim \frac{W(\theta_h)}{k}, \quad (6.134)$$

а также белый спектр для поперечных волн $W_{\omega, \Omega}^t = W^t(\theta_t)$. Естественно, эти результаты имеют место вне области генерации и возможного циклотронного поглощения поперечных волн.

Полная мощность излучения при слиянии двух h -волн при их изотропном распределении имеет вид [270]

$$Q = \left. \begin{aligned} & \frac{32\pi\omega_{pe}^2}{5n_0 m_e c^5 \omega_{He}^{-2}} \int \frac{(W_k^h)^2 dk}{k^2}; \\ & \int W_k^h dk = W^h. \end{aligned} \right\} \quad (6.135)$$

Наконец, стоит сказать еще об одном механизме излучения магнитоактивной плазмы, связанном с наличием границ. Вообще говоря, размеры плазмы поперек поля ограничены. В процессе спектральных перекачек длины волн пульсаций могут сравниться с поперечным размером, т. е. будут возбуждены самые первые моды колебаний плазменного столба. Такие колебания, будучи, например,

дипольными, хорошо излучаются из плазмы. Суть этого эффекта в том, что длины излучаемых волн намного превосходят размеры плазмы. Такая ситуация возможна для ленгмюровских пульсаций и, особенно, для волн, распространяющихся только поперек магнитного поля, например циклотронных [271]. Возможно также увеличение сечения слияния двух ленгмюровских волн (длины волн которых существенно меньше размеров плазмы) в поперечную $2\omega_{pe}$ с длиной волны, превышающей размеры плазмы [272].

§ 6.5. ИЗЛУЧЕНИЕ НАДТЕПЛОВЫХ И РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ ТУРБУЛЕНТНОЙ ПЛАЗМЫ

Как было показано в гл. 4, турбулентность не может существовать без возбуждения быстрых частиц, максимальные энергии которых для стационарной турбулентности ультрарелятивистские. Излучение таких частиц может происходить на частотах, много больших ленгмюровских, и такие волны могут свободно покидать плазму, если ее оптическая толща мала. Сама оптическая толща определяется реабсорбцией на быстрых частицах. Это указывает на то, что излучение электромагнитных волн в оптически толстой плазме должно существенно видоизменять спектры быстрых частиц. Рассмотрим эффекты излучения быстрых частиц на ленгмюровской турбулентности, которая наиболее эффективна для ускорения частиц и излучения ими электромагнитных волн. Излучение на других модах турбулентных движений можно найти в работе [261]. Для ленгмюровской турбулентности быстрые частицы излучают $\omega \gg \omega_{pe}$. Процессы излучения таких больших частот допускают простую наглядную интерпретацию, с которой мы и начнем рассмотрение [66]. В этом случае за время одного периода высокочастотной волны распределение электрических полей турбулентных пульсаций изменяется слабо.

Пусть электрическое поле плазменной волны имеет вид

$$E^l = E_0 \cos(\omega_1 t - \mathbf{k}_1 \mathbf{r}); \quad \mathbf{E}_0 \parallel \mathbf{k}_1. \quad (6.136)$$

Для нахождения взаимодействия между волной и электроном используем метод последовательных приближений. В нулевом приближении считаем, что электрон движется равномерно и прямолинейно со скоростью v . Со стороны волны на него действует сила $eE_0 \cos(\omega_1 t - \mathbf{k}_1 \mathbf{v}t)$. В первом приближении к равномерному движению добавляются малые колебания $\mathbf{r} = \mathbf{v}t + \mathbf{q} \cos \Omega t$

$$\mathbf{q}'_i = -\frac{eE_0}{e_p \Omega^2 k_1} (\mathbf{k}_1 - v(\mathbf{k}_1 \mathbf{v})); \quad \bar{\Omega} = \omega_1 - \mathbf{k}_1 \mathbf{v} = \omega_1 - k_1 v \cos \theta_1.$$

Если электрон движется в вакууме, то для подсчета возникающего излучения достаточно найти осциллирующую часть дипольного момента $e\mathbf{r}$ и подсчитать интенсивность дипольного излучения. Однако рассматриваемый электрон движется в существенно неоднородной плазме. Неоднородность ее вызвана колебаниями элект-

ронной плотности n в волне, связанной с полем волны уравнением

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi e \mathbf{j}(n - n_0) \quad (6.137)$$

(n_0 — среднее значение электронной плотности). Одновременно с изменением плотности меняется диэлектрическая проницаемость, зависящая от n

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{4\pi e^2 n}{m\omega^2} = 1 + \frac{ek_1 E_0}{m\omega^2} \sin(\mathbf{k}_1 \mathbf{r} - \omega_1 t). \quad (6.138)$$

Вместе с электронами в плазме движется вызванная им поляризация. Из-за неоднородности ϵ возникает дипольный момент, частично, а для нерелятивистского электрона — полностью компенсирующий дипольный момент осциллирующий электрона.

Заряд, движущийся в среде с переменной во времени и пространстве ϵ , излучает поперечные волны. Заметим, что соответствующий механизм излучения имеет известную аналогию с излучением заряда в слоистой среде (см. [64, 65]). Такая трактовка возможна, когда частоты излучаемых поперечных волн значительно превосходят частоты продольных волн, создающих неоднородности в плотности.

Весьма существенно то, что фазы колебаний электрона и изменения ϵ не независимы. Полное рассеянное излучение не является суммой излучения, вызванного колебаниями электрона, и излучения за счет неоднородности среды.

Легко найти мощность излучения заряда, движущегося в среде с переменным ϵ и колеблющегося под действием волны. Для этого достаточно найти работу поля, создаваемого зарядом, над самим зарядом

$$\frac{1}{T} \int_{T \rightarrow \infty}^T (\mathbf{j} \mathbf{E}) \, d\mathbf{r} \, dt = \frac{(2\pi)^4}{T} \int d\mathbf{k} (\mathbf{j}_k^* \mathbf{E}_k). \quad (6.139)$$

Для нахождения поля E_k используем уравнения Максвелла

$$\Delta \mathbf{E} + \operatorname{grad} \operatorname{div} (\epsilon - 1) \mathbf{E} - \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} \epsilon \mathbf{E} = 4\pi \left(\frac{\partial \mathbf{j}}{c^2 \partial t} + \operatorname{grad} \rho \right). \quad (6.140)$$

В этом уравнении ϵ и \mathbf{j} известны. Решая (6.140) методом последовательных приближений по E_0 , получаем ($v_p \ll c$)

$$Q_p = \frac{e^4 E_0^2 k_1^2}{4\pi m_e^2} \int d\mathbf{k} |\omega| \delta(k^2 - \omega^2) \delta(\omega - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \mathbf{v}) |\Lambda^t|^2; \quad (6.141)$$

$$\Lambda^t = \Lambda' - \frac{\mathbf{k}(\mathbf{k}\Lambda')}{k^2};$$

$$\Lambda'_e = \frac{k_1}{\omega} \left[\frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right) k_1^2} - \frac{1}{(k-k_1)^2 - k^2} \right] + \\ + v \left[\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{(kk_1 - \omega c^2 (k_1 v))}{k_1^2 (k_1 v \cos \theta)^2} - \frac{1}{(k-k_1)^2 - k^2} \right]; \quad (6.142)$$

$$\Lambda'_i = \left(\frac{k_1}{\omega} + v \right) ((k_1 - k)^2 - k^2)^{-1}. \quad (6.143)$$

Первый член Λ'_e соответствует комptonовскому рассеянию, а второй — нелинейному. Этот же результат может быть получен с помощью общих выражений для вероятностей излучения при рассеянии на быстрых частицах, если для обратного максвелловского оператора Π_{ij} использовать его выражение для $\omega \gg \omega_{pe}$

$$\Pi_{ij} = - \frac{k_i k_j c^2}{k^2 \omega^2 \varepsilon(\omega)} + \frac{\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}}{k^2 - \omega^2 \varepsilon(\omega) c^{-2}}; \quad \varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}, \quad (6.144)$$

а для нелинейных токов использовать справедливое для больших частот выражение

$$S_{ijl} = - \frac{e \omega_{pe}^2}{8\pi m_e \omega_1 \omega_2} \left(\delta_{ij} \frac{k_{2l}}{\omega_2} + \delta_{il} \frac{k_{1j}}{\omega_1} + \delta_{jl} \frac{k_i}{\omega} \right) \quad (6.145)$$

и, наконец, для комptonовского рассеяния $\Lambda = \frac{ie k_1}{m_e (2\pi)^3} \Lambda'$ (см.(2.225))

$$\Lambda = \frac{ie^2}{(2\pi)^3 m_e k_1} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{1}{(\omega - kv)^2} \times \\ \times \left\{ v \left(kk_1 - \frac{\omega}{c^2} (k_1 v) \right) + k_1 (\omega - kv) \right\}. \quad (6.146)$$

Найденный из (6.144) и (6.146) результат соответствует замене в (6.141) энергии отдельной волны $E_{\delta}^2/4\pi$ величиной $W_{k_1}^l dk_1$ и интегрированию по k_1 . Таким образом, излучение высокочастотных волн $\omega \gg \omega_{pe}$ слабо зависит от характера плазменных колебаний — отдельная волна или широкий турбулентный спектр. Этот результат имеет простую интерпретацию, а именно излучение высокой частоты ω автоматически усреднено по периоду и, следовательно, по фазам турбулентных пульсаций.

Из (6.141) в пределе $v \ll c$ получаем следующие выражения для полной интенсивности излучения отдельных электронов и ионов:

$$Q_p^{(e)} = \frac{e^4 E_0^2}{15m_e^2} \cdot \frac{v^2}{c^5} (3 + 13 \cos^2 \theta_1); \quad (6.147)$$

$$Q_p^{(i)} = \frac{e E_0^2}{3m_e^2 c^3}. \quad (6.148)$$

Как ионы, так и электроны при $v \ll c$ излучают частоту $\omega = k_1 v |\cos \theta_1|$. Для быстрых (в общем случае релятивистских) частиц при изотропном распределении ленгмюровских пульсаций усредним Q по всем углам между плазменной волной и импульсом частицы:

$$\bar{Q}_p = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d \cos \theta_1 Q = \int_0^\infty Q_\omega^p d\omega; \quad (6.149)$$

$$Q_\omega^p = \frac{e^4 E_0^2 k_1^2 \omega^2}{16m_e^2 \pi} \int d \cos \theta_1 d \cos \theta d\varphi \left\{ \Lambda'^2 - \frac{(k\Lambda')^2}{k^2} \right\} \times \\ \times [\delta(\omega(1 - v \cos \theta) + k_1 v \cos \theta_1) + \delta(\omega(1 - v \cos \theta) - k_1 v \cos \theta_1)] \quad (6.150)$$

(φ — угол между плоскостями, в которых лежат векторы \mathbf{k}_1 , \mathbf{v} и \mathbf{k} , \mathbf{v}). Вычисление интеграла приводит к выражению [66]

$$Q_\omega^p = \frac{e^4 E_0^2 \varepsilon_p^2}{4m_e^4 \omega c^7} \Phi \left(\frac{\varepsilon_p}{mc^2}, q \right); \quad (6.151)$$

$$q = \frac{\omega(1-v/c)}{k_1 v}; \quad \Phi \left(\frac{\varepsilon}{mc^2}, q \right) = 0 \quad \text{при } q > 1, \quad (6.152)$$

где q — отношение частоты излученных волн к максимально возможной частоте при данных k_1 и θ . Функция $\Phi \left(\frac{\varepsilon}{mc^2}, q \right)$ представляется громоздким выражением. Поэтому приведем лишь графики $\Phi \left(\frac{\varepsilon_p}{mc^2}, q \right)$.

Наличие двух максимумов на кривых рис. 6.1 вызвано наложением двух рассмотренных механизмов рассеяния. При ультрарелятивистских энергиях $\left(\frac{\varepsilon_p}{mc^2} \gg 1 \right)$ основную роль играет излучение за счет колебаний электрона, которые создают широкий плавный максимум. Узкий максимум при малых q вызван механизмом, сходным

с механизмом переходного излучения (излучения на неоднородностях плотности, создаваемых плазменной волной). Поскольку последнее излучение имеет в пределе $\frac{\epsilon}{mc^2} \rightarrow \infty$ не растущую с ϵ/mc^2 постоянную интенсивность и среднюю частоту, в то время как в излучении за счет колебаний электрона эти величины растут с ростом ϵ/mc^2 пропорционально $\left(\frac{\epsilon}{mc^2}\right)^2$, то при $\frac{\epsilon}{mc^2} \rightarrow \infty$ левый максимум снижается и сдвигается влево. Предельное значение Φ при $\epsilon/mc^2 \rightarrow \infty$ легко вычисляется, если учесть лишь комптоновское рассеяние

$$\Phi(\infty, q) = \frac{8}{3} q [(1-q)^3 - 3q^2(1-q + \ln q)]. \quad (6.153)$$

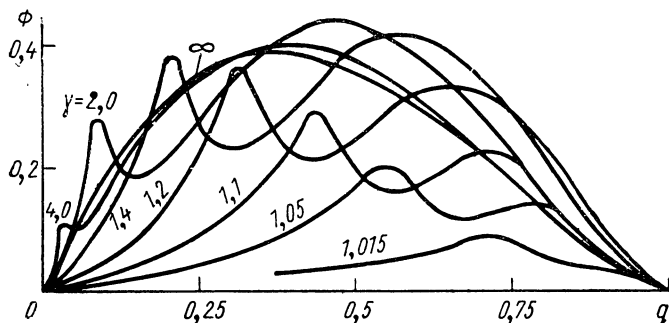


Рис. 6.1. Зависимость интенсивности спонтанного излучения электронов при рассеянии на изотропных ленгмюровских пульсациях от частоты:

$q = \frac{\omega}{k_1 v} \left(1 - \frac{v}{c}\right) < 1$ — отношение излучаемой частоты к максимально возможной. На кривых отмечены значения параметра $\gamma = \frac{\epsilon}{mc^2}$.

В нерелятивистском пределе $\left(\frac{\epsilon}{mc^2} \rightarrow 1\right)$ два максимума сливаются и оба механизма излучения подавляют друг друга. Для сравнения на рис. 6.2 приведены кривые для $\Phi_1\left(\frac{\epsilon}{mc^2}, q\right)$ без учета неоднородности плотности в плазменной волне. Эти кривые имеют ту же самую предельную кривую (6.153) при $\frac{\epsilon}{mc^2} \rightarrow \infty$, но совершенно по-другому ведут себя при $\frac{\epsilon}{mc^2} \rightarrow 1$.

При рассеянии плазменных волн на ионах для возникающего поперечного излучения имеет место формула (6.143), в которой $\Phi_2\left(\frac{\epsilon}{mc^2}, q\right)$ имеет вид, представленный на рис. 6.3.

Суммарную излученную электроном мощность находим, проинтегрировав численно (6.150)

$$Q_p = \frac{2e^4 E_0^2 \varepsilon^2}{9m_e^4 c^7} \Pi \left(\frac{v^2}{c^2} \right). \quad (6.154)$$

Зависимость $\Pi(v)$ показана на рис. 6.4. Коэффициент перед $\Pi(v)$ в формуле (6.154) подобран из условия $\Pi(v) \rightarrow 1$ при $v \rightarrow 1$.

Интенсивность спонтанного излучения отдельного ультрарелятивистского электрона может быть записана согласно (6.153) в виде $Q_\omega^p = 4 \pi k^2 Q_{p,k} c^{-1}$

$$Q_{p,k} = \frac{e^4}{3\omega^3} \int_{\frac{\omega m_e^2 c^3}{2\varepsilon^2}}^{\omega k_1} W_{k_1}^l \frac{\omega dk_1}{k_1} \left\{ \left(1 - \frac{\omega m_e^2 c^3}{k_1 \varepsilon^2} \right)^3 - 3 \frac{\omega^2}{k_1^2} \frac{m_e^4 c^6}{4\varepsilon^2} \times \right. \\ \left. \times \left(1 - \frac{\omega m_e^2 c^3}{k_1 2\varepsilon^2} + \ln \frac{\omega m_e^2 c^3}{2\varepsilon^2 k_1} \right) \right\} \frac{1}{m_e^2 c}. \quad (6.155)$$

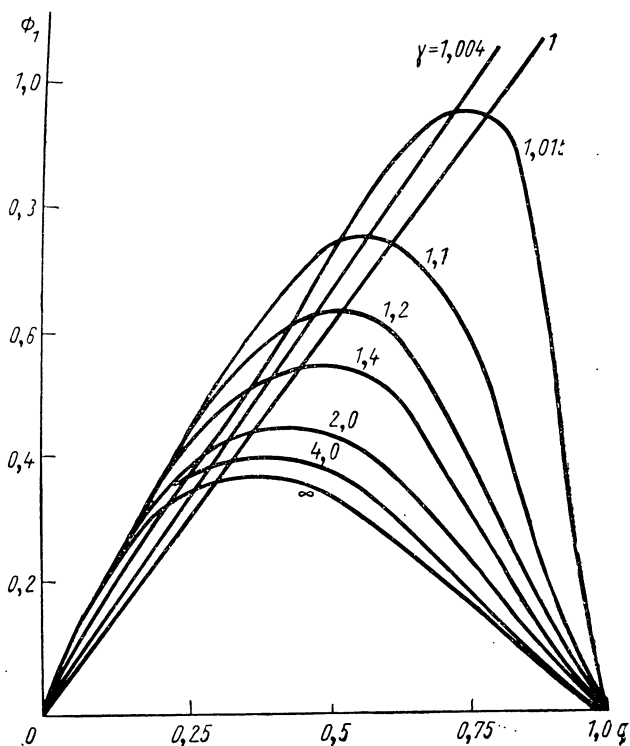


Рис. 6.2. Зависимость интенсивности спонтанного излучения электронов при рассеянии на ленгмюровских пульсациях от частоты без учета нелинейного рассеяния $\left(\gamma = \frac{\varepsilon}{mc^2} \right)$.

Интенсивность излучения всех ультрарелятивистских электронов имеет вид

$$Q_{\omega}^i = \int Q_{\omega}^p f_{\varepsilon} d\varepsilon = \frac{\omega_{pe}^4}{12\pi n_0^2} \int \frac{W_{k_1}^l dk_1}{k_1} \int_{mc^2 \sqrt{\frac{\omega}{2k_1 c}}} f_{\varepsilon} d\varepsilon \times \{(1-q)^3 - 3q^2(1-q + \ln q)\} c^{-4}. \quad (6.156)$$

Здесь $f_{\varepsilon} d\varepsilon$ — число частиц в интервале энергий $d\varepsilon$, $k_1 \gg \frac{\omega_{pe}}{c}$.

Используя $W_{k_1}^l = \sqrt{\frac{2Q}{\alpha}} = \text{const}$, введем вместо интегрирования по k интегрирование по $q = \frac{\omega}{2k_1 c} \left(\frac{mc^2}{\varepsilon}\right)^2$. Обозначим $q_{\text{макс}} = \frac{\omega}{2\omega_{pe}} \times \left(\frac{mc^2}{\varepsilon}\right)^2$; $q_{\text{мин}} = \frac{\omega}{\omega_{pe}} \cdot \frac{v_{Te}}{c} \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/5} \left(\frac{mc^2}{\varepsilon}\right)^2$. Эти значения $q_{\text{макс}}$

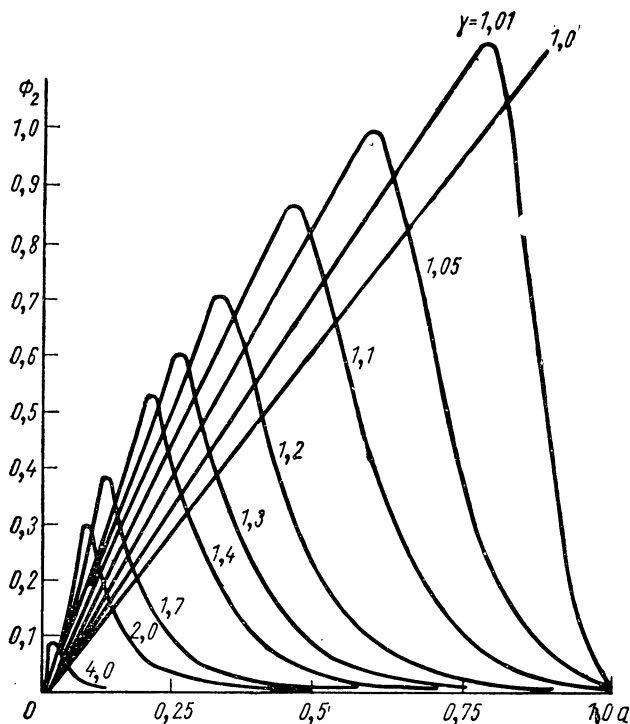


Рис. 6.3. Зависимость интенсивности спонтанного излучения ионов при рассеянии на изотропных ленгмюровских пульсациях от частоты $\left(\gamma = \frac{\varepsilon}{mc^2}\right)$.

и $q_{\text{мин}}$ соответствуют тем предельным значениям волновых чисел турбулентных пульсаций, для которых справедливо (6.156) и спектр $W'_{k_1} = \sqrt{\frac{2Q}{\alpha}}$. По условию $q < 1$. Для тех энергий частиц, для которых $q_{\text{макс}} > 1$,

$$Q_{\omega}^t = \frac{m_e \sqrt{6} \omega_{pe}^3 v_{Te}^3}{4\pi n_0 \sqrt{\pi} c^4} \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right) \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \int_{q_{\text{мин}} < 1}^{mc^2 \sqrt{\frac{\omega}{2\omega_{pe}}}} f_{\varepsilon} d\varepsilon \sqrt{\frac{Q}{Q_0}} \times$$

$$\times \left[\ln \frac{2\omega_{pe} c}{\omega v_{Te}} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \left(\frac{\varepsilon}{mc^2}\right)^2 - \frac{3}{2} \right]. \quad (6.157)$$

Подлогарифмическое выражение в (6.157), так же как и верхний предел по энергиям, носит приближенный характер. При $q_{\text{макс}} < 1$

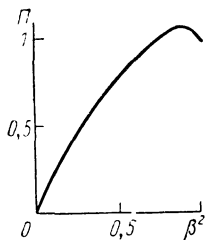


Рис. 6.4. Полная интенсивность излучения электронов как функция

$$\beta^2 \approx \frac{v^2}{c^2} \quad \left(\Pi(v) = \frac{9m^2 Q c^3}{2e^4 E_0^2 \gamma^2} \right)$$

получим

$$Q_{\omega}^t = \frac{m_e \sqrt{6} v_{Te}^3 \omega_{pe}^3}{4\pi^{3/2} n_0 c^4} \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right) \int_{mc^2 \sqrt{\frac{\omega}{2\omega_{pe}}}}^{\infty} f_{\varepsilon} d\varepsilon \sqrt{\frac{Q}{Q_0}} \times$$

$$\times \left\{ \ln \frac{c}{v_{Te}} \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/5} - 3 \frac{\omega}{2\omega_{pe}} \left(\frac{mc^2}{\varepsilon}\right)^2 + \frac{2}{3} \frac{\omega^3}{(2\omega_{pe})^3} \left(\frac{mc^2}{\varepsilon}\right)^6 - \frac{3}{2} \frac{\omega^2}{(2\omega_{pe})^2} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{mc^2}{\varepsilon}\right)^4 \ln \frac{\omega}{2\omega_{pe}} \cdot \frac{mc^2}{\varepsilon} + 3\omega^2 (2\omega_{pe})^{-2} \left(\frac{mc^2}{\varepsilon}\right)^4 \right\}. \quad (6.158)$$

Если f_{ε} — падающая функция энергии частиц, например

$$f_{\varepsilon} = \frac{(\gamma - 1) n_1}{m} \left(\frac{m}{\varepsilon}\right)^{\gamma} c^{2(\gamma-1)}, \quad (6.159)$$

то значение верхнего предела в (6.157) мало существенно и излучение (6.157) намного превосходит (6.158) и имеет оценку

$$Q_{\omega}^t = a(\gamma) \left(\frac{2\omega_{pe}}{\omega} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}} T_e \frac{n_1}{n_0} \left(\frac{c}{v_{Te}} \right)^{\frac{\gamma-3}{2}} \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{\frac{\gamma-6}{10}} \sqrt{\frac{Q}{Q_0}} \frac{\omega_{pe}^3}{c^3}, \quad (6.160)$$

$a(\gamma)$ — численный коэффициент порядка единицы. Для степенного спектра (6.159) можно получить выражение для интенсивности излучения, справедливое при произвольном спектре турбулентности [66]

$$Q_{\omega}^t = b(\gamma) \frac{\omega_{pe}^4}{2c^4 n_0} \cdot \frac{n_1}{n_0} \left(\frac{2c}{\omega} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}} \int W_{k_1}^l \frac{dk_1}{\frac{3-\gamma}{2} k_1^2}; \quad (6.161)$$

$$b(\gamma) = \frac{\gamma-1}{6\pi} \left[\frac{1}{\gamma-1} - \frac{3}{\gamma+1} + \frac{2}{\gamma+5} + \frac{6}{(\gamma+3)^2} \right]. \quad (6.162)$$

Для спектра $\sqrt{\frac{2Q}{\alpha}}$ из (6.161) получим при $\gamma > 1$ (6.160),

$$\text{где } a(\gamma) = b(\gamma) 3\sqrt{6}/(\gamma-1)\sqrt{\pi}.$$

Чтобы оценить полную интенсивность излучения, необходимо иметь представление об оптической толщине. Из общего выражения для инкремента рассеяния легко установить в случае изотропной турбулентности и изотропного распределения излучающих частиц, что

$$\gamma_k = \int \frac{d\Omega_k}{4\pi} \gamma_k = (2\pi)^3 \int Q_{p, k} \varepsilon^2 \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{f_{\varepsilon}}{\varepsilon^2} \right) d\varepsilon. \quad (6.163)$$

Используя (6.155), получаем

$$\gamma_k = - \frac{\pi \omega_{pe}^4}{8\omega^2 n_0^2 c} \int \frac{f_{\varepsilon} d\varepsilon}{\varepsilon} \Phi_*(\infty, q) W_{k_1}^l \frac{dk_1}{k_1}, \quad (6.164)$$

где

$$\Phi_*(\infty, q) = \frac{8}{3} [(1-q)^3 + 3q(1-q^2 + q \ln q)]. \quad (6.165)$$

Для степенного спектра (6.159) ускоренных частиц получим

$$\gamma_{\omega} = - \frac{\pi \omega_{pe}^4 n_1}{3n_0^2 c^5 m_e} \left(\frac{2c}{\omega} \right)^{\frac{\gamma}{2} + 2} c(\gamma) \int dk_1 k_1^{\frac{\gamma-2}{2}} W_{k_1}, \quad (6.166)$$

где

$$c(\gamma) = (\gamma - 1) \frac{1}{4} \left[\frac{1}{\gamma} + \frac{3}{\gamma + 4} - \frac{4}{\gamma + 6} - \frac{6}{(\gamma + 4)^2} \right]. \quad (6.167)$$

Как видно из результата (6.116), оптическая толщина $L_* = c/\gamma\omega$ относительно самопоглощения очень сильно зависит от частоты и тем больше, чем больше частота. Для спектра турбулентности $\sqrt{2Q/\alpha}$ имеем:

$$\gamma\omega = -d(\gamma) \frac{n_1}{n_0} \cdot \frac{v_{Te}^3}{c^3} \sqrt{\frac{Q}{Q_0}} \omega_{pe} \left(\frac{2\omega_{pe}}{\omega} \right)^{\frac{\gamma}{2} + 2} \left(\frac{c}{v_{Te}} \right)^{\frac{\gamma}{2}} \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{\frac{\gamma - 1}{2}};$$

$$d(\gamma) = c(\gamma) \sqrt{\frac{3\pi}{2}} \cdot \frac{8}{\gamma}. \quad (6.168)$$

Предположим, что слой плазмы настолько тонок, что при ω порядка ω_{pe} плазму можно считать оптически прозрачной. Тогда излучаются все частоты от ω_{pe} до тех максимальных частот, для которых спектр частиц является степенным (точнее, не спадает круто по энергиям). Предположим, что спектр является степенным до $\varepsilon = \varepsilon_*$. Согласно (6.160) при $\gamma < 3$ основная мощность излучения приходится на максимальные частоты. Из условия $q < 1$

$$\omega_{\text{макс}} = \left(\frac{\varepsilon_*}{mc^2} \right)^2 2 \frac{\omega_{pe} c}{v_{Te}} \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/5};$$

$$Q^t = \int Q_\omega^t d\omega = \frac{4a(\gamma)}{3-\gamma} Q_0 \left(\frac{\varepsilon_*}{mc^2} \right)^{3-\gamma} \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{3/10} \frac{n_1}{n_0} \sqrt{\frac{Q}{Q_0}} \times$$

$$\times \omega_{pe}^3 / n_0 c^3; \quad Q_0 = \omega_{pe} n_0 T_e. \quad (6.169)$$

Фактически (6.169) пригодна, когда низкие частоты не удовлетворяют условию прозрачности. Важно лишь, чтобы частоты порядка $\omega_{\text{макс}}$ и на порядок меньше удовлетворяли условию оптической прозрачности.

В предыдущей главе показано, что реализуются условия, когда энергия высокочастотной турбулентности почти целиком диссипирует в быстрые частицы, которые ускоряются турбулентностью. Необходимо определить условия, при которых энергия быстрых частиц диссипирует в излучение. В рассматриваемых здесь процессах энергия турбулентности практически не расходуется. Легко показать, что при $n_1 < n_0$ затухание ленгмюровской турбулентности из-за процессов конверсии всегда меньше, чем из-за парных соударений частиц. Энергия излучения почти полностью черпается из энергии ускоренных частиц. Таким путем может быть реализован канал диссипации турбулентности в излучение через ускоренные частицы. Очевидно, что излучение электронов (если они инжектируются в достаточном количестве и $n_1^{(e)}$ не очень мало) играет наи-

большую роль. Чтобы получить соответствующую оценку, можно использовать (6.169), однако для этого надо знать величину ε_* и ее зависимость от Q , а также знать величину γ (в § 6.6 и гл. 7 показано, что эффекты рассеяния в турбулентной плазме могут увеличивать ε_*).

Прежде чем обсуждать здесь эти проблемы, следует рассмотреть конверсию на пульсациях $v_p \gg c$. Как правило, оптическая толща относительно радиационных процессов на ω_{pe} и $2\omega_{pe}$ много меньше оптической толщи радиационных процессов на ускоренных частицах. Поэтому если предполагается, что плазма оптически толста относительно последних процессов, хотя бы до некоторых $\omega_* \gg \omega_{\text{макс}}$, то она оптически толста относительно процессов на частотах ω_{pe} и $2\omega_{pe}$ и в силу доказанного энергия в этих частотах мала и максимум турбулентного спектра при заметных Q лежит при $v_p \gg c$. Поэтому излучение на пульсациях $v_p \gg c$ может быть более существенным не только по мощности, но и по обратному воздействию на спектры излучающих частиц. Будем считать в соответствии со сделанным предположением, что существуют как ленгмюровские $\omega_k^l = \omega_{pe} + \frac{3}{2} \frac{k^2 v_{Te}^2}{\omega_{pe}}$,

так и поперечные (буква p) плазмоны $\omega_k^p = \omega_{pe} + \frac{k^2 c^2}{2\omega_{pe}}$.

Вероятности $l \rightarrow t$ и $p \rightarrow t$ рассеяний на релятивистских частицах, усредненные по направлениям пульсации и направлениям скоростей частиц, есть [251]

$$\omega_l^t = \frac{e^4 (2\pi)^3 c^4}{6\omega^2 \varepsilon_p^2 \omega_{pe}^2} \left(\omega_{pe} + \frac{\omega}{2\omega_{pe}} \cdot \frac{m^2 c^4}{\varepsilon_p^2} \left(\omega \frac{m^2 c^4}{\varepsilon_p^2} - 2\omega_{pe} \right) \right); \quad (6.170)$$

$$\omega_p^t \simeq \omega_l^t. \quad (6.171)$$

Эти вероятности при $\omega > 2\omega_{pe} \frac{\varepsilon_p^2}{m^2 c^4}$ равны нулю. Таким образом, максимальная излучаемая частота не зависит от волнового числа турбулентных пульсаций, если $k_1 \ll \frac{\omega_{pe}}{c}$. Этот результат имеет важные следствия. Одним из них является независимость мощности излучения и оптической толщи пульсации от спектра турбулентности, а именно:

$$Q_\omega = \frac{\omega^3}{c^3 \pi^2 \omega_{pe}} (W^l + W^p) \int_{mc^2 \sqrt{\frac{\omega}{2\omega_{pe}}}}^{\infty} \omega_l^t f_\varepsilon d\varepsilon; \quad (6.172)$$

$$\gamma_\omega = \frac{\omega}{\omega_{pe}} (W^l + W^p) \int_{mc^2 \sqrt{\frac{\omega}{2\omega_{pe}}}}^{\infty} \omega_l^t \varepsilon^2 d\varepsilon \frac{d}{d\varepsilon} \cdot \frac{f_\varepsilon}{\varepsilon^2}. \quad (6.173)$$

Здесь входят лишь полные энергии колебаний W^l и W^p . Для степенного спектра (6.159)

$$Q_{\omega} = \frac{\omega_{pe}^3}{6\pi} \left(\frac{2\omega_{pe}}{\omega} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}} \frac{n_1 (\gamma-1) [(\gamma^2+4\gamma+11)(W^l+W^p)]}{n_0^2 (\gamma+1)(\gamma+3)(\gamma+5)c^3}. \quad (6.174)$$

Считая, что $W^l = \frac{Q}{v_e}$, получаем оценку для

$$Q_{\omega} = \frac{n_1}{n_0} Q \frac{\omega_{pe}^3}{12\pi v_e n_0 c^3} \left(\frac{2\omega_{pe}}{\omega} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}}. \quad (6.175)$$

Сравнивая с (6.160), имеем, что уже при

$$Q > \frac{v_e}{\omega_{pe}} Q_{\text{макс}} \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{\frac{\gamma-6}{5}} \left(\frac{c}{v_{Te}} \right)^{\gamma-3} \quad (6.176)$$

доминирует излучение (6.175). Таким образом, при выполнении (6.176) необходимо учитывать в основном излучение на $v_p \gg c$. Однако $\omega_{\text{макс}}$ в (6.175) меньше, чем (6.160), в $\frac{c}{v_{Te}} \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/5}$ раз,

так как здесь $\omega_{\text{макс}} = 2\omega_{pe} \left(\frac{\varepsilon_*}{mc^2} \right)^2$.

Если же степенной спектр справедлив лишь до энергий, для которых среда оптически толстая относительно (6.175), то при $\omega = \omega_{\text{макс}}$ излучение (6.175) еще оптически непрозрачно и не служит источником радиационных потерь, поэтому только (6.169) дает радиационные потери, так как максимальные частоты здесь будут прозрачны*. Коэффициент реабсорбции излучения на волнах $v_p \gg c$ и релятивистских частицах, имеющих степенной спектр (6.159), легко найдется из (6.173)

$$\begin{aligned} -\gamma_{\omega} &= \frac{\pi}{24} \left(\frac{2\omega_{pe}}{\omega} \right)^{\frac{\gamma}{2}+2} \omega_{pe} \frac{n_1}{n_0^2 mc^2} (\gamma-1) \times \\ &\times \frac{[(\gamma^2+6\gamma+16)(W^l+W^p)]}{(\gamma+4)(\gamma+6)}. \end{aligned} \quad (6.177)$$

Заметим, что (6.168) применимо для частот, для которых (6.177) не имеет места.

* Надо иметь в виду возможность «расстройки» частот оптически прозрачных и излучаемых механизмов (6.175) из-за влияния синхротронного излучения (§ 6.6) и рассеяния (гл. 7).

Спектр излучения для оптически толстых частот найдется из (6.174) и (6.177)

$$I_{\omega} = \frac{Q_{\omega}}{|\gamma_{\omega}|} = m\omega_{pe}^2 \frac{4}{\pi^2 c} \left(\frac{\omega}{2\omega_{pe}} \right)^{5/2} \frac{(\gamma+4)(\gamma+6)}{(\gamma+1)(\gamma+3)(\gamma+5)} \times \\ \times \frac{[(\gamma^2+4\gamma+11)(W^l+W^p)]}{[(\gamma^2+6\gamma+16)(W^l+W^p)]}. \quad (6.178)$$

Спектр $I_{\omega} \sim \omega^{5/2}$ характерен также для синхротронного излучения в области реабсорбции.

§ 6.6. ВОЗДЕЙСТВИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНОЙ ПЛАЗМЫ НА СПЕКТРЫ БЫСТРЫХ ЧАСТИЦ

Обратное воздействие излучения на частицы, которые излучают, сводится не только к потерям их энергии, но и к приобретению энергии под действием турбулентности и излучения. Если потери энергии соответствуют спонтанным процессам рассеяния быстрых частиц на турбулентных пульсациях с излучением электромагнитных волн, то процессы ускорения обязаны вынужденным процессам рассеяния. Считая турбулентность достаточно сильной, будем учитывать лишь эффекты, возникающие от $v_p \gg c$. Тогда уравнение для релятивистских частиц приобретает вид [251]

$$\frac{\partial f_{\varepsilon}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} D_{\varepsilon}^p \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{f_{\varepsilon}}{\varepsilon^2} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} A_{\varepsilon}^p f_{\varepsilon}, \quad (6.179)$$

где $A_{\varepsilon}^p = Q_{\varepsilon}^p$ описывает спонтанное рассеяние (p — плазменный механизм)

$$A_{\varepsilon}^p = \frac{1}{\pi^2} (W^l + W^p) \int_0^{2\omega_{pe} \frac{\varepsilon^2}{m^2 c^4}} \omega_l^t \frac{\omega^3 d\omega}{\omega_{pe} c^3}, \quad (6.180)$$

а D_{ε}^p — индуцированное

$$D_{\varepsilon}^p = \int_0^{2\omega_{pe} \frac{\varepsilon^2}{m^2 c^4}} (W^l + W^p) \omega_l^t \frac{\omega}{\omega_{pe}} I_{\omega} d\omega. \quad (6.181)$$

Учтем далее синхротронное ускорение, рассмотренное в гл. 5, и синхротронное торможение, связанное с наличием магнитных полей (H — синхротронный механизм).

Тогда

$$A_{\varepsilon} = A_{\varepsilon}^p + A_{\varepsilon}^H = \frac{16\pi e^4}{9m^2 c^3} \cdot \frac{\varepsilon^2}{m^2 c^4} \left(W^l + W^p + 3 \frac{H^2}{8\pi} \right), \quad (6.182)$$

где A_{ε}^H — синхротронное торможение [46]. Для расчета ускорения необходимо знать I_{ω} . Рассмотрим частоты, меньшие тех, для которых плазма становится оптически прозрачной, тогда как синхротронное, так и плазменное излучения дают спектр $\sim \omega^{5/2}$. Учет синхротронного излучения сводится к тому, что следует изменить лишь некоторые численные факторы в (6.174), (6.177) и (6.178), так как зависимости от частоты интенсивности излучения и коэффициента реабсорбции для синхротронного и плазменного механизмов совпадают. В частности, квадратная скобка в (6.174) и числителе (6.178) должна быть заменена

$$(W^l + W^p) (\gamma^2 + 4\gamma + 11) + a_1(\gamma) \xi^{\frac{\gamma-3}{3}} \frac{H^2}{4\pi}; \quad (6.183)$$

$$a_1(\gamma) = (\gamma + 3)(\gamma + 5) \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{\gamma}{2} + 1} \frac{\Gamma\left(\frac{3\gamma-1}{12}\right) \Gamma\left(\frac{3\gamma+19}{12}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma+5}{4}\right)}{\sqrt{2\pi} \Gamma\left(\frac{\gamma+7}{4}\right)}; \quad (6.184)$$

$$\xi = \frac{eH}{mc\omega_{pe}},$$

а квадратная скобка в (6.177) и знаменателе (6.178) соответственно

$$(W^l + W^p) (\gamma^2 + 6\gamma + 16) + a_2(\gamma) \xi^{\frac{\gamma}{2} - 1} \frac{H^2}{4\pi}; \quad (6.185)$$

$$a_2(\gamma) = \frac{\gamma(\gamma+4)(\gamma+6)}{\gamma+2} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{\gamma+3}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+6}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3\gamma+2}{12}\right) \Gamma\left(\frac{3\gamma+22}{12}\right)}{\sqrt{2\pi} \Gamma\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)}. \quad (6.186)$$

Выражения для синхротронных коэффициентов реабсорбции и излучения получены в работе [46].

Наконец,

$$D_{\varepsilon} = D_{\varepsilon}^p + D_{\varepsilon}^H, \quad (6.187)$$

где D_{ε}^H — коэффициент диффузии на синхротронном излучении, рассчитанный в гл. 5. В соответствии с (6.178) аппроксимируем I_{ω} формулой

$$I_{\omega} = \begin{cases} \frac{I}{\omega_*} \left(\frac{\omega}{\omega_*}\right)^{\nu'} & \text{при } \omega < \omega_*; \\ \frac{I}{\omega_*} \left(\frac{\omega_*}{\omega}\right)^{\nu} & \text{при } \omega > \omega_*, \end{cases} \quad (6.188)$$

где ω_* частота, для которой плазма становится оптически прозрачной; для (6.178) $\nu' = 5/2$. Коэффициент D_{ε} является

быстро растущей функцией энергии частиц до $\varepsilon_* = m \sqrt{\frac{\omega_*}{2\omega_{pe}}}$.

При $\varepsilon < \varepsilon_*$

$$D_\varepsilon = \frac{\pi}{24} \cdot \frac{I}{n_0^2} \omega_{pe} \left(\frac{2\omega_{pe}}{\omega_*} \right)^{\nu'+1} \left(\frac{\varepsilon}{mc^2} \right)^{2(\nu'-1)} \frac{1}{\nu'(\nu'+1)(\nu'+2)} \times \\ \times \left[(W^l + W^p)(\nu'^2 + \nu' + 2) + a_3(\nu') \xi^{\nu'-2} \frac{H^2}{8\pi} \right]; \quad (6.189)$$

$$a_3(\nu') = \frac{12\sqrt{2}\nu'(\nu'+1)(\nu'+2)}{8\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\nu'+3}{2}\right)} \left(\frac{3}{2}\right)^{\nu'-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu'}{2}\right) \times \\ \times \Gamma\left(\frac{\nu'}{2} + \frac{4}{3}\right) \Gamma\left(\frac{\nu'}{2} - \frac{1}{3}\right). \quad (6.190)$$

Отсюда легко получить среднее возрастание энергии частиц

$$\dot{\varepsilon}_p = \alpha_T mc^2 \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{mc^2} \right)^2; \quad \nu' = \frac{5}{2}; \quad (6.191)$$

$$\alpha_T = \frac{1}{315\pi} \cdot \frac{\omega_{pe}^4 (\gamma+4)(\gamma+6)}{n_0^2 m (\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)c^5} \times \\ \times \left[43(W^l + W^p) + a_1(\gamma) \xi^{\frac{\gamma-3}{2}} \frac{H^2}{4\pi} \right] \times \\ \times \left[(W^l + W^p)(\gamma^2 + 6\gamma + 16) + a_2(\gamma) \xi^{\frac{\gamma-2}{2}} \frac{H^2}{4\pi} \right]^{-1}. \quad (6.192)$$

Здесь подставлено конкретное значение I из (6.178) с учетом синхротронных эффектов. Ускорение (6.191) является весьма мощным и может полностью компенсировать синхротронные потери.

Уравнение (6.179) может служить для определения равновесного спектра

$$D_\varepsilon \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{f_\varepsilon}{\varepsilon^2} + A_\varepsilon f_\varepsilon = \text{const} = 0 \quad (6.193)$$

или $A_\varepsilon = \beta \varepsilon^2$

$$\frac{\varepsilon^3 \alpha_T}{5} \cdot \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{f_\varepsilon}{\varepsilon^2} + \beta f_\varepsilon = 0, \quad (6.194)$$

где α_T есть (6.192). Тогда из (6.194)

$$f_\varepsilon = \frac{\text{const}}{\varepsilon^\nu},$$

где

$$\gamma + 2 = \frac{5\beta}{\alpha_T}. \quad (6.195)$$

Последнее соотношение служит уравнением для определения γ . Таким образом, показано, что спектр частиц становится степенным вплоть до $\epsilon_* = mc^2 \sqrt{\frac{\omega^*}{2\omega_{pe}}}$. Кстати, именно это значение ϵ_* должно фигурировать в (6.169).

Степенные спектры распределения релятивистских частиц по энергиям соответствуют наблюдаемым спектрам электронов и ионов космических лучей. Решения (6.195) дают представление о величинах γ . При $H \rightarrow 0$ $\gamma = 3$. При конечных H значения γ лежат между $1,9 < \gamma < 3$ (рис. 6.5). По γ можно найти $\nu = \frac{\gamma - 1}{2}$, и оказывается, что спектры большинства наблюдаемых источников космического радиоизлучения имеют степенные спектры со значением ν , попадающим в интервал, даваемый теорией. Наконец, γ , наблюдае-

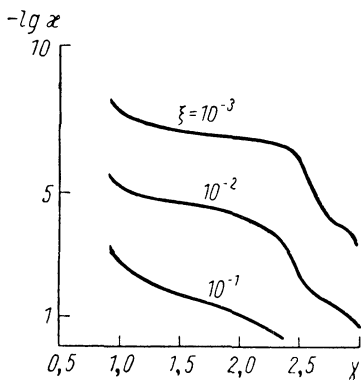


Рис. 6.5. Значения спектрального индекса γ при различных пара-

метрах $-\lg \kappa$, $\xi = \frac{\omega_{He}}{\omega_{pe}}$, где $\kappa = \frac{W}{n_0 m_e c^2}$, W — энергия турбулентности.

мое для космических лучей, попадает в этот интервал. Подчеркнем важный вывод общей теории турбулентности плазмы, состоящий в том, что в плазменном объекте достаточно больших размеров (оптически толстом относительно излучения быстрых релятивистских частиц, ускоренных турбулентностью) автоматически должен вырабатываться степенной спектр частиц, простирающийся до больших энергий. Максимальные значения энергий определяются условием запертости излучения. Условие запираения может зависеть как от

конкретных свойств объекта, так и от ряда эффектов, возникающих в турбулентной плазме. В частности, возможно самозапирание излучения, связанное с тем, что при выходе из любого объекта излучение становится локально анизотропным, а следовательно, согласно гл. 3 возбуждает интенсивную турбулентность. Запиранию излучения способствует рассеяние (гл. 7).

Итак, турбулентная плазма ускоряет частицы до релятивистских энергий ($T_{эфф} \gg mc^2$ гл. 5), их излучение распределяет частицы

так, что их спектр становится степенным при $\epsilon > \epsilon_{кр} = \left(\frac{5D_{k > \omega_{pe/c}}^l}{\alpha_T} \right)^{1/3}$,

где $D_{k > \omega_{pe/c}}^l$ — коэффициент диффузии на резонансных плазмонах. Этот критерий следует из сравнения (6.189) с $D_{k > \omega_{pe/c}}^l$, найденным в гл. 5. Качественно именно такой вид спектра характерен для космических лучей. Таким образом, теория турбулентности плазмы предсказывает существование ультрарелятивистских частиц в турбулентной плазме со спектрами, соответствующими наблюдаемым спектрам.

ПРОХОЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ЧЕРЕЗ ТУРБУЛЕНТНУЮ ПЛАЗМУ

§ 7.1. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В гл. 7 и 8 будет рассматриваться распространение электромагнитных волн и развитие неустойчивостей в турбулентной плазме. В этой главе исследуются эффекты, возникающие в турбулентной плазме, для волн, которые могут распространяться свободно в плазме в отсутствие турбулентности (распространяющиеся волны), тогда как в гл. 8 — низкочастотные волны и возмущения.

Постановка задачи в случае высоких и низких частот имеет существенные различия. Они состоят в том, что в области высоких частот турбулентная плазма не в состоянии изменить коллективные моды колебаний плазмы, тогда как в области низких частот появляются новые моды, например колебания типа второго звука, новые специфические неустойчивости, а также стабилизация тех неустойчивостей, которые были в отсутствие турбулентности. Вместе с тем, как для высоких, так и для низких частот будет предполагаться, что электромагнитное возмущение или волна является слабой, т. е. такое возмущение не в состоянии изменить спектра турбулентности. Ограничимся в этой главе рассмотрением достаточно высоких частот волн, проходящих через турбулентную плазму, предполагая $\omega \gg \omega_{He}, \omega_{pe}$, т. е. ω много больше всех возможных частот турбулентных пульсаций. Такие частоты могут излучаться ускоренными частицами турбулентной плазмы. Для дальнейшего мало существенно происхождение высокочастотных волн: возникли ли они из-за некоторых турбулентных процессов в плазме или являются волнами, попадающими в плазму извне. Наиболее важными для приложений являются три процесса, которые будут рассмотрены ниже: 1) рассеяние волн на турбулентных пульсациях; 2) усиление электромагнитных волн из-за анизотропии турбулентности или быстрых частиц; 3) флуктуации интенсивности электромагнитных волн.

Естественно, рассеяние не играет роли при изотропном распределении электромагнитного излучения пульсаций и частиц и поэтому им можно пренебречь в рассмотрении, проведенном в предыдущей главе. Однако при выходе излучения из плазмы автоматически возникает анизотропия, хотя бы вблизи поверхности. Рассеяние увеличивает путь луча в плазме и поэтому изменяет оптическую толщину. Следовательно, для оценки оптической толщины нужно принимать во внимание рассеяние.

Рассеяние влияет также на усиление электромагнитных волн, увеличивая путь луча. При однократном рассеянии изменение направления электромагнитной волны может быть не малым, а так как усиливаться могут лишь волны определенных направлений, то возможно усиление именно рассеянных волн. Таким образом, усиление волн может увеличивать рассеяние.

Если спектр падающего излучения достаточно узкий, то спектр волн, рассеянных на турбулентности, будет смещен вверх и вниз от частоты падающего излучения на частоту турбулентных пульсаций (комбинационное рассеяние). Действительно, в отсутствие быстрых частиц высокие частоты взаимодействуют с турбулентными пульсациями σ лишь в результате распадных процессов

$$t \rightleftharpoons t' + \sigma, \quad (7.1)$$

которые есть не что иное, как индуцированное комбинационное рассеяние. В тех случаях, когда ширина спектра рассеиваемой волны много меньше ω_σ , рассеяние приводит к возникновению комбинационных частот $\omega_t + \nu\omega_\sigma$, где ν — целое число. Как правило, для слабой волны $\nu = \pm 1$, так как последующие комбинационные частоты могут появиться лишь в результате повторного рассеяния уже рассеянных волн.

Если $\omega^\sigma \ll \omega^t$, то изменение энергии поперечного кванта является достаточно малым и в первом приближении процесс рассеяния можно считать упругим. Для квазиупругости рассеяния необходимо, чтобы изменение импульса рассеиваемой волны намного превосходило изменение ее энергии. Если изменение импульса равно импульсу турбулентных пульсаций, то необходимым условием является

$$\frac{v_p^\sigma}{c} = \frac{\omega^\sigma}{k^\sigma c} \ll 1. \quad (7.2)$$

Иными словами, рассеяние квазиупруго в том случае, когда оно происходит на турбулентных пульсациях, фазовые скорости которых много меньше скорости света.

Максимально возможный угол рассеяния равен 2π . Изменение импульса рассеиваемой волны составляет в этом случае $2k_t$, где k_t — импульс падающей волны. Это изменение импульса равно максимальному импульсу турбулентных пульсаций, на которых еще может рассеиваться волна, т. е.

$$k_\sigma < 2k_t \quad (7.3)$$

или $\lambda_t < 2\lambda_\sigma$, т. е. рассеиваемая волна «чувствует» лишь те турбулентные пульсации, длины волн которых больше половины длины рассеиваемой волны.

Появление рассеянных комбинационных частот играет важную роль в диагностике плазмы. Действительно, наблюдение комбина-

ционных частот позволяет идентифицировать тип турбулентных пульсаций, возбужденных в плазме, не меняя заметным образом состояние плазмы (ее турбулентности). Возможные другие методы диагностики (зонды и пр.) связаны с существенным, хотя, может быть и локальным изменением свойств плазмы. Особенно трудно идентифицировать низкочастотные турбулентные пульсации известными методами, тогда как эффекты комбинационного рассеяния открывают принципиальную возможность для измерения частот турбулентных пульсаций. Если имеются данные о том, что в плазме возбуждены именно турбулентные пульсации данного типа, то измерение ω^{σ} позволяет получить целый ряд сведений о параметрах плазмы: ее плотности, температуре электронов и ионов и т. п., так как частоты турбулентных пульсаций зависят от всех этих параметров.

Наконец, по интенсивности и угловому распределению рассеянного излучения можно судить об интенсивности и спектре турбулентных пульсаций.

На возможность использования процессов рассеяния волн в турбулентной плазме для ее диагностики по спектрам сателлитов обращалось внимание в работах [185, 273, 274]. Теория рассеяния развивалась во многих работах [265, 275, 272, 276]. Вопросы рассеяния в ограниченной плазме рассматривались в работе [272].

Первое экспериментальное подтверждение эффекта рассеяния в турбулентной плазме получено в работах [277—279] (см. также в [280—282]). Изучалось также рассеяние на крупномасштабных колебаниях всего плазменного столба [283, 284].

Эффекты рассеяния в турбулентной плазме играют важную роль в астрофизике [285—287]. По-видимому, они наблюдались также [288] в радиоизлучении квазаров [287], а эксперименты по радиолокации Солнца [289] находят объяснение на основе представлений о рассеянии в турбулентной плазме [290].

Усиление электромагнитных волн в турбулентной плазме имеет важное значение для использования плазмы как излучателя электромагнитных волн, интерпретации излучения космических объектов [291], а также для процессов возбуждения высокочастотной турбулентности посредством генерации интенсивных электромагнитных волн (уже в нелинейном режиме). Наконец, флуктуации интенсивности также играют важную роль в диагностике турбулентности [292]. Использование теории флуктуаций позволяет интерпретировать широко ведущиеся наблюдения по флуктуациям радиоизлучения, проходящего через плазму околоземного пространства и солнечного ветра [293]. Общий круг приложений теории прохождения электромагнитных волн через турбулентную плазму, таким образом, весьма широк. Ограничимся здесь изложением наиболее важных и принципиальных сторон теории и используем найденные выше спектры турбулентности для предсказания качественных свойств рассеяния излучения, усиления и флуктуаций его интенсивности.

Общие уравнения предыдущей главы, учитывающие поляризационные эффекты, могут быть использованы для описания рассеяния, если ограничиться распадными процессами и считать интенсивность малой. Если усреднять по поляризациям, то удобнее использовать непосредственно уравнения баланса для поперечных квантов и плазмонов, полученные в гл. 2.

Уравнение для изменения числа t -квантов можно записать:

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}}^t}{\partial t} + \mathbf{v}_g \frac{\partial N_{\mathbf{k}}^t}{\partial \mathbf{r}} = \int \frac{dk_1 dk'}{(2\pi)^6} N_{\mathbf{k}_1}^\sigma (N_{\mathbf{k}'}^{t'} - N_{\mathbf{k}}^t) \times \\ \times [\omega_i^{t\sigma}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}) \delta(k_1 - k + k') + \omega_i^{t\sigma}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}') \delta(k_1 - k' + k)], \quad (7.4)$$

где $\omega_i^{t\sigma}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}) \delta(k_1 - k + k')$ вероятность распадного процесса. Интегрируя по \mathbf{k}' , можно записать уравнение (7.4) в виде

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}}^t}{\partial t} + \mathbf{v}_g \frac{\partial N_{\mathbf{k}}^t}{\partial \mathbf{r}} = \int \frac{N_{\mathbf{k}_1}^\sigma dk_1}{(2\pi)^6} [(N_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1}^t - N_{\mathbf{k}}^t) \omega_i^{t\sigma}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}) \times \\ \times \delta(\omega_{\mathbf{k}_1}^\sigma - \omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1}) + (N_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1}^t - N_{\mathbf{k}}^t) \omega_i^{t\sigma}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k} + \mathbf{k}_1) \times \\ \times \delta(\omega_{\mathbf{k}_1}^\sigma - \omega_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1} + \omega_{\mathbf{k}})]. \quad (7.5)$$

В форме (7.5) уравнения особенно удобны в том случае, когда максимально возможное $|\mathbf{k}_1|$ турбулентных пульсаций много меньше $|\mathbf{k}|$ рассеиваемых электромагнитных волн. Тогда, если спектр частот рассеиваемых волн достаточно широк $\Delta\omega_{\mathbf{k}} \gg \omega_{\mathbf{k}_1}^\sigma$, т. е. ширина спектра намного превосходит частоту турбулентных пульсаций, допустимо разложение (7.5) по \mathbf{k}_1 , что дает уравнение диффузионного типа

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}}^t}{\partial t} + \mathbf{v}_g \frac{\partial N_{\mathbf{k}}^t}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial}{\partial k_i} D_{ij} \frac{\partial N_{\mathbf{k}}^t}{\partial k_j}; \quad (7.6)$$

$$D_{ij} = \int k_{1i} k_{1j} \frac{dk_1}{(2\pi)^6} \omega_i^{t\sigma}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}) \delta(\omega_{\mathbf{k}_1}^\sigma - k_1 v_{gk}) N_{\mathbf{k}_1}^\sigma.$$

Такой способ описания рассеяния непригоден даже при $\Delta\omega_{\mathbf{k}} \gg \omega_{\mathbf{k}_1}^\sigma$, если $|\mathbf{k}_1|$ может быть сравнимо с $|\mathbf{k}|$. Тогда рассеяние происходит на значительный угол и диффузионное приближение не описывает процесса. В ряде случаев при этом изменении частоты рассеянного фотона бывает малой по сравнению с изменением направления движения, т. е. рассеяние квазиупругое.

В приближении квазиупругого рассеяния уравнение (7.4) также допускает упрощение. Заметим, что для получения таких уравнений удобно в (7.4) использовать $\delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k} + \mathbf{k}')$ для интегрирования по \mathbf{k}_1 , а $\delta(\omega_{\mathbf{k}_1}^\sigma - \omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}'})$ — для интегрирования по моду-

лю k' . Уравнение (7.5) при этом приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{kn}^t}{\partial t} + \mathbf{v}_{g, k} \frac{\partial N_{kn}^t}{\partial \mathbf{r}} = \int \frac{k'^2 N_{kn-k'n'}^\sigma}{v_{gk'} (2\pi)^6} (N_{k'n'}^t - N_{kn}^t) d\mathbf{n}' \times \\ \times \omega_i^{t\sigma}(k\mathbf{n} - k'\mathbf{n}', k\mathbf{n}) + \int \frac{k''^2}{v_{gk''} (2\pi)^6} (N_{k''n'}^t - N_{kn}^t) N_{k''n' - k\mathbf{n}}^\sigma \times \\ \times \omega_i^{t\sigma}(k''\mathbf{n}' - k\mathbf{n}, k''\mathbf{n}') d\mathbf{n}'. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Здесь $d\mathbf{n}'$ — интеграл по телесному углу рассеянных фотонов; \mathbf{n}' — единичный вектор направления рассеянного фотона; \mathbf{n} — падающего; k' , k'' — функции k , \mathbf{n} , \mathbf{n}' , определяемые из решения уравнений:

$$\omega_{k_1}^\sigma = \omega_{k\mathbf{n} - k'\mathbf{n}'}^\sigma = \omega_k - \omega_{k'}; \quad (7.8)$$

$$\omega_{k_1}^\sigma = \omega_{k''\mathbf{n}' - k\mathbf{n}}^\sigma = \omega_{k''} - \omega_k. \quad (7.9)$$

Уравнения (7.7) являются строгим следствием уравнений (7.4) и справедливы также для неупругого рассеяния. Случай упругого рассеяния соответствует приближению, когда можно считать

$$k' \approx k'' \approx k; \quad \omega_{k'} \approx \omega_{k''} \approx \omega_k. \quad (7.10)$$

В этом случае (7.7) приобретает вид

$$\frac{\partial N_n^t}{\partial t} + \mathbf{v}_g \frac{\partial N_n^t}{\partial \mathbf{r}} = -N_n^t \int \gamma_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'} d\mathbf{n}' + \int N_{\mathbf{n}'}^t \gamma_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'} d\mathbf{n}', \quad (7.11)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'} = \frac{k^2}{v_{g, k}} (N_{k(\mathbf{n}-\mathbf{n}')}^\sigma \omega_i^{t\sigma}(k(\mathbf{n}-\mathbf{n}'), k\mathbf{n}) + \\ + N_{k(\mathbf{n}'-\mathbf{n})}^\sigma \omega_i^{t\sigma}(k(\mathbf{n}'-\mathbf{n}), k\mathbf{n}')) (2\pi)^{-6}. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Записанное в форме (7.11) уравнение — обычное в теории переноса излучения [9]. Существенно, что в турбулентной плазме рассеяние волн может намного превосходить томсоновское и поэтому указанные процессы рассеяния играют весьма важную роль. Наконец, следует указать еще на одну форму уравнений, описывающих рассеяние электромагнитных волн в турбулентной плазме в пределе, когда (7.11) и (7.6) неприменимы, а именно при $\Delta\omega_{k_1} \ll \omega_{k_1}^\sigma$. В этом случае рассеянные волны имеют частоты, отличные от падающей на $\nu\omega_{k_1}^\sigma$; $\nu = \pm 1, \pm 2, \dots$ и т. д., т. е. мы имеем характерное для индуцированного комбинационного рассеяния спутные спектральные линии. В указанном случае частоты линий оказываются вполне определенными и можно ввести функцию распределения для ν -го

спутника $N_{\nu, n}^t$, частота которого близка $\omega_k + \nu\omega_{k_1}^\sigma$, где ω_k — частота падающего фотона.

Общее уравнение такого типа есть

$$\frac{\partial N_{\nu, n}^t}{\partial t} + \mathbf{v}_{g, \nu} \frac{\partial N_{\nu, n}^t}{\partial \mathbf{r}} = -N_{\nu, n}^t \int \gamma_{\nu, n, n'} dn' + \\ + \int \gamma'_{\nu+1, n, n'} N_{\nu+1, n'}^t dn' + \int \gamma''_{\nu-1, n, n'} N_{\nu-1, n'}^t dn', \quad (7.13)$$

$$\gamma_{\nu, n, n'} = \gamma'_{\nu+1, n, n'} + \gamma''_{\nu-1, n, n'};$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma'_{\nu+1, n, n'} &= \frac{k''^2}{v_g k'' (2\pi)^6} N_{k'' n' - k n}^\sigma \omega_t^{t\sigma} (k'' n' - k n, k'' n') \Big|_{\omega = \omega_k + (\nu+1)\omega_{k_1}^\sigma}; \\ \gamma''_{\nu-1, n, n'} &= \frac{k'^2}{v_g k' (2\pi)^6} N_{k n - k' n'}^\sigma \omega_t^{t\sigma} (k n - k' n', k n) \Big|_{\omega = \omega_k + (\nu-1)\omega_{k_1}^\sigma}. \end{aligned} \right\} (7.14)$$

В проблемах, связанных с диагностикой плазмы, когда интенсивность рассеянных волн достаточно мала, фактически достаточно ограничиться рассмотрением лишь первых двух спутников, т. е. $\nu = 0, \pm 1$:

$$\frac{\partial N_{0, n}^t}{\partial t} + \mathbf{v}_{g, 0} \frac{\partial N_{0, n}^t}{\partial \mathbf{r}} = -N_{0, n}^t \int \gamma_{0, n, n'} dn'; \\ \frac{\partial N_{1, n}^t}{\partial t} + \mathbf{v}_{g, 1} \frac{\partial N_{1, n}^t}{\partial \mathbf{r}} \approx \int N_{0, n'}^t \gamma''_{0, n, n'} dn'; \quad (7.15) \\ \frac{\partial N_{-1, n}^t}{\partial t} + \mathbf{v}_{g, -1} \frac{\partial N_{-1, n}^t}{\partial \mathbf{r}} = \int N_{0, n'}^t \gamma'_{0, n, n'} dn'.$$

В общем случае магнитоактивной плазмы вероятности $\omega_t^{t\sigma}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k})$ могут быть найдены из нелинейного тока, полученного в § 2.10. Предполагая, что частота рассеиваемой (и рассеянной) волны много больше всех характерных плазменных частот (ω_{pe} , ω_{He}), получаем

$$S_{ijl} = \delta_{ij} \frac{e}{4\pi m_e \omega} (k_{1s} \varepsilon_{sl}^{(e)}(k_1) - k_{1l}) = \delta_{ij} S_l \frac{e}{4\pi m_e \omega}. \quad (7.16)$$

Здесь $\varepsilon_{ij}^{(e)}$ — электронная часть линейного тензора проницаемости плазмы. Вероятность рассеяния определяется $|S_{k_1}^\sigma|^2$

$$S_{k_1}^\sigma = S_l e_{k_1, l}^\sigma, \quad (7.16a)$$

где $\mathbf{e}_{k_1}^\sigma$ — орт, характеризующий поляризации турбулентных пульсаций рассматриваемого типа (см. (2.205))

$$\omega_i^{t\sigma}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}) = \frac{(2\pi)^6 e^2}{8\pi\omega^2 m_e^2} (1 + (\mathbf{nn}')^2) \frac{\omega_1^2 |S_{k_1}^\sigma|^2}{\frac{\partial}{\partial\omega_1} \omega_1^2 \varepsilon_{k_1}^\sigma \Big|_{\omega_1 = \omega_{k_1}^\sigma}}. \quad (7.17)$$

В формуле (7.17) произведено усреднение по поляризациям рассеянной и рассеиваемой волн. При рассеянии на продольных колебаниях $S_{k_1}^l = k_1 (\varepsilon_{k_1}^{(e)l} - 1)$. Для высокочастотных пульсаций $\varepsilon_{k_1}^{(e)l} = 0$; $S_{k_1}^l = -k_1$, а в области $\omega_1 \ll k_1 v_{Te}$

$$\varepsilon_{k_1}^{l(e)} = \frac{\omega_{pe}^2}{k_1^2 v_{Te}^2} \gg 1; \quad S_{k_1}^l = \frac{\omega_{pe}^2}{k_1 v_{Te}^2}. \quad (7.18)$$

Точная вероятность рассеяния на ленгмюровских пульсациях изотропной плазмы при любых ω есть

$$\omega_i^{tl}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}) = \frac{(2\pi)^6 e^2 \omega_{pe} k_1^2}{16\pi m_e^2 \omega_k \omega_{k-k_1}} (1 + (\mathbf{nn}')^2), \quad (7.19)$$

а на ионно-звуковых

$$\omega_i^{ts}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}) = \frac{e^2 (\omega_{k_1}^s)^3 m_i \omega_{pe}^2 (2\pi)^6}{16\pi m_e^3 v_{Te}^4 k_1^2 \omega_k \omega_{k-k_1}} (1 + (\mathbf{nn}')^2). \quad (7.20)$$

Точно так же легко могут быть найдены вероятности других процессов, описывающих рассеяния на h , ω , A , M , M_s и дрейфовых волнах d (см. [294]). Они приведены ниже. Чтобы в дальнейшем было проще обсуждать конкретные вопросы рассеяния электромагнитных волн на тех или иных типах пульсаций, рассмотрим более подробно изотропную турбулентность. Уравнение диффузии (7.6) отличается от уравнения (5.2), описывающего рассеяние и ускорение заряженных частиц в турбулентной плазме лишь обозначениями (вместо f_p — функции распределения частиц — входит N_k^f — функция распределения фотонов, а вместо скорости v входит групповая скорость волн). Из этой аналогии ясно, что рассеяние фотонов должно сопровождаться изменением как средней частоты, так и изменением распределения по частотам (аналогично систематическому и флуктуационному ускорению для частиц). Для изотропной турбулентности можно записать

$$D_{ij} = D^l \frac{k_i k_j}{k^2} + D^t \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right). \quad (7.21)$$

Коэффициент D^l описывает изменения частот фотонов, D^l — их рассеяние по углам. С помощью (7.6) и (7.17) можно записать

$$D^l = \frac{\pi}{2} \int \frac{(\omega_{k_1}^\sigma)^3 \omega_{pe}^2 |S_{k_1}^\sigma|^2}{k^2 m_e n_0 \left| \frac{\partial}{\partial \omega_1} \omega_1^2 \varepsilon_{k_1}^\sigma \right|_{\omega_1 = \omega_{k_1}^\sigma} c^4} \delta \left(\omega_{k_1}^\sigma - \frac{k k_1 c}{k} \right) W_{k_1}^\sigma dk_1; \quad (7.22)$$

$$D^t = \frac{\pi}{8} \int \frac{[k k_1]^2 \omega_{pe}^2 |S_{k_1}^\sigma|^2}{k^4 n_0 m_e \left| \frac{\partial}{\partial \omega_1^2} \omega_1^2 \varepsilon_{k_1}^\sigma \right|_{\omega_1 = \omega_{k_1}^\sigma} c^2} \delta \left(\omega_{k_1}^\sigma - \frac{k k_1 c}{k} \right) W_{k_1}^\sigma dk_1. \quad (7.23)$$

При

$$v_p^\sigma \ll c \quad D^t \approx \frac{c^2}{(v_p^\sigma)^2} D^l \gg D^l.$$

Особенно существенно изменение спектра для узких линий и менее существенно для широких спектров. Это уширение отлично от обычного штарковского уширения, связанного с воздействием электрических полей турбулентных пульсаций на излучающий атом.

В условиях $v_p^\sigma \ll c$ при анализе рассеяния можно выбросить член $\frac{k_i k_j}{k^2}$ перед D^t в (7.21). Учитывая, что при рассмотрении рассеяния можно пренебречь изменением частоты, получаем, что рассеяние описывается угловой частью оператора Лапласа. Введя интенсивность электромагнитных волн

$$I_{\omega, n} = I_{\omega, \Omega} = \frac{N_k^t \omega_k k^2}{(2\pi)^3} \cdot \frac{dk}{d\omega}, \quad (7.24)$$

получим для диффузионного рассеяния

$$\frac{\partial I_{\omega, n}}{\partial t} + c n \frac{\partial I_{\omega, n}}{\partial r} = \frac{\sigma_d}{2} \Delta_{\theta, \varphi} I_{\omega, n}; \quad (7.25)$$

$$\sigma_d = 2D^t \frac{c^2}{\omega^2}; \quad \Delta_{\theta, \varphi} = \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}}{\sin^2 \theta}. \quad (7.26)$$

Для больших частот согласно (7.22)

$$D^l = \text{const} \frac{1}{\omega^2} = \frac{\mu}{c^2 \omega^2} \quad (7.27)$$

и, таким образом, флуктуационное размытие частот излучения и уширения спектральных линий описывается следующим дополнительным членом правой части (7.25):

$$\mu\omega \frac{\partial^2}{\partial\omega^2} \cdot \frac{I_{\omega n}}{\omega^3} = \hat{\mu} I_{\omega, n}. \quad (7.28)$$

Вблизи частоты ω_* , соответствующей центру спектральной линии, зависимость $I_{\omega, n}$ от частоты наиболее сильна и можно использовать приближенное выражение для оператора $\hat{\mu}$

$$\hat{\mu} = \frac{\mu}{\omega_*^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial\omega^2}. \quad (7.29)$$

Угол θ в (7.25) удобно отсчитывать от направления первоначального распространения электромагнитных волн. Тогда, если начальные условия не зависят от φ , имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{\omega, n}}{\partial t} + c \cos \theta \frac{\partial I_{\omega, n}}{\partial z} = \frac{\sigma_d}{2} \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial I_{\omega, n}}{\partial \theta} + \\ + Q_{\omega, n} + \gamma_{\omega} I_{\omega, n} + \mu\omega \frac{\partial^2}{\partial\omega^2} \cdot \frac{I_{\omega, n}}{\omega^3}. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Это уравнение отличается от уравнений переноса излучений предыдущей главы учетом рассеяния и уширения линий. Как видно из (7.30), для анизотропных распределений интенсивности пренебрежение рассеянием является, вообще говоря, незаконным. Для качественной оценки при малых углах рассеяния имеем

$$\langle \theta^2 \rangle = \frac{\sigma_d}{2c} L, \quad (7.31)$$

где L — путь луча в плазме σ есть величина, играющая роль сечения рассеяния. Уравнение (7.11), описывающее упругое рассеяние на угол порядка единицы, может быть представлено в виде

$$-\frac{\partial I_{\omega, n}}{\partial t} + c\mathbf{n} \frac{\partial I_{\omega, n}}{\partial \mathbf{r}} = -\sigma I_{\omega, n} + \sigma \int \kappa_{\mathbf{nn}'} I_{\omega n'} d\mathbf{n}', \quad (7.32)$$

где

$$\sigma = \int \gamma_{\mathbf{nn}'} d\mathbf{n}'; \quad \kappa_{\mathbf{nn}'} = \frac{1}{\sigma} \gamma_{\mathbf{nn}'}. \quad (7.33)$$

Первый член описывает убыль квантов из направления \mathbf{n} из-за рассеяния в другие направления \mathbf{n}' , а второй — обратный эффект рассеяния из \mathbf{n}' в \mathbf{n} . Если рассеяние происходит на малый угол и \mathbf{n}' близко \mathbf{n} , то в (7.32) можно произвести разложение по $\mathbf{n}' - \mathbf{n} = \Delta\mathbf{n}$.

Получим уравнение

$$\frac{\partial I_{\omega n}}{\partial t} + c n \frac{\partial I_{\omega n}}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial n_i} D_{ij}^{(n)} \frac{\partial I_{\omega n}}{\partial n_j}; \quad (7.34)$$

$$D_{ij}^{(n)} = \int \frac{k^2}{v_g} \Delta n_i \Delta n_j N_{k\Delta n}^\sigma \omega_t^{t\sigma} (k\Delta n, kn) d\Delta n, \quad (7.35)$$

которое преобразуется к виду (7.25).

Рассмотрим качественно эффекты, возникающие при выходе излучения из плазмы. Пусть внутри плазмы из-за интенсивного рассеяния, а также изотропности и однородности источников, генерирующих излучение $Q_{\omega n} = Q_{\omega}$, излучение полностью изотропно $I_{\omega n} = I_{\omega}$.

Посмотрим, что произойдет при приближении к границе плазмы. Если расстояние до границы еще достаточно велико (критерий см. ниже), то излучение будет слабо анизотропно и $I_{\omega n}$ можно разложить по полиномам Лежандра. Ограничимся первыми двумя членами

$$I_{\omega n} = A_{\omega} + B_{\omega} \cos \theta. \quad (7.36)$$

Подставив (7.36) в (7.30) и усреднив по углам, получим, если пренебречь уширением спектра,

$$c^2 \frac{\partial^2 A_{\omega}}{\partial z^2} = 3(\gamma_{\omega} + \sigma_d) \gamma_{\omega} A_{\omega} + 3(\gamma_{\omega} + \sigma_d) Q_{\omega}, \quad (7.37)$$

т. е. характерная длина, на которой существенно меняется интенсивность

$$L_{\text{эфф}} = \frac{c}{\sqrt{3\gamma_{\omega}(\gamma_{\omega} + \sigma_d)}}, \quad (7.38)$$

видоизменяется из-за рассеяния, если

$$\sigma_d \gg \gamma_{\omega}, \quad (7.39)$$

равновесное же значение интенсивности

$$A_{\omega} = -\frac{Q_{\omega}}{\gamma_{\omega}} \quad (7.40)$$

остается тем же. Таким образом, при $\sigma_d \gg \gamma_{\omega}$ существенно уменьшается оптическая толщина плазмы. Уменьшение оптической толщины возникает и при раскатке излучения $\gamma > 0$ [286]. Такой же результат следует из (7.32) при рассеянии на угол порядка единицы, причем в (7.38) необходимо в этом случае заменить σ_d сечением σ [286]. Точно так же из (7.32) и (7.36), составив одно уравнение для A_{ω} типа (7.37), легко оценить эффекты уширения спектральных линий. В этом случае получим оценки уширения:

1) когда путь луча L много меньше длины рассеяния c/σ

$$(\Delta\omega)^2 \simeq 3 \frac{\mu}{\omega_*^2} L c^{-1}; \quad (7.41)$$

2) когда путь луча много больше длины рассеяния c/σ

$$(\Delta\omega)^2 \simeq 3 \frac{\mu}{\omega_*^2} \sigma L^2 c^{-2}, \quad (7.42)$$

т. е. уширение возрастает в $\sigma L c^{-1} \gg 1$ раз.

§ 7.3. РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ТУРБУЛЕНТНОЙ ПЛАЗМЕ

Рассмотрим эффекты рассеяния на ленгмюровских пульсациях. Из законов сохранения при распаде следует, что с поперечными волнами взаимодействуют лишь пульсации с $v_p < c$. Если $3 v_{Te}^2/v_{Ti} > c$, то практически спектр турбулентности можно считать плоским до $v_p \approx c$. Рассеяние на угол порядка единицы возможно, если $k \sim k'$

$$\omega < \omega_{pe} \frac{c}{v_{Te}}. \quad (7.43)$$

При $\omega \gg \omega_{pe}$ рассеяние на угол порядка единицы на $v_p \sim c$ невозможно. Итак, при использовании (7.12) можно считать $W_k = \text{const} = \sqrt{\frac{2Q}{\alpha}}$. С помощью вероятности (7.19) и (7.12) найдем

$$\gamma_{n, n'} = \frac{\omega_{pe} 3 \sqrt{6} \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right)}{16 \sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{Q}{Q_0}} \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \cdot \frac{v_{Te}^3}{c^3} (1 + (nn')^2), \quad (7.44)$$

$\gamma_{n, n'}$ не зависит от частоты лишь до частот $\omega \simeq \omega_{pe} \frac{c}{v_{Te}} \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/3}$. При больших частотах рассеяние на угол порядка единицы возможно, но как $1/\omega^{5/2}$ падает с частотой, а при $\omega \gg \omega_{pe} \frac{c}{v_{Te}}$ рассеяние всегда происходит на малые углы и справедливо диффузионное приближение. Из (7.44) получим

$$\sigma = \sqrt{6\pi} \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \cdot \frac{v_{Te}^3}{c^3} \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right) \omega_{pe} \sqrt{\frac{Q}{Q_0}}; \quad (7.45)$$

$$Q_0 = \omega_{pe} n_0 T_e.$$

При $T_e \gg T_i$ множитель $(1 + T_e/T_i)$ должен быть опущен. В случае диффузионного рассеяния

$$\sigma_d = \frac{\pi \omega_{pe}^2}{8m_e} \int \frac{k_1^4}{\omega^4} W_{k_1}^i \frac{dk_1 dn_1}{4\pi n_0} \delta(\omega_{pe} - k_1 n_1 c) c^2. \quad (7.46)$$

Учитывая, что основной вклад в интеграл (7.46) ввиду $W_k = \text{const}$ дают $k_1 \gg \omega_{pe}/c$, получим

$$\sigma_d = \frac{3\sqrt{6\pi}}{4} \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \cdot \frac{v_{Te}^3}{c^3} \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right) \sqrt{\frac{Q}{Q_0}} \times \\ \times \left(\frac{\omega_{pe} c}{2v_{Te} \omega} \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/5} \right)^4. \quad (7.47)$$

Здесь $k_{1\text{макс}} = \omega_{pe} \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/5} / v_{Te}$, т. е. рассеяние падает как $1/\omega^4$.

Целесообразно (7.45) сравнить с томсоновским рассеянием, для которого $\sigma = \sigma_T$

$$\sigma_T = \frac{4\omega_{pe}}{3\pi^2} \cdot \frac{\omega_{pe}^3}{n_0 c^3}. \quad (7.48)$$

Критическое значение $Q_{кр}$, для которых (7.45) превосходит (7.48), весьма мало

$$Q_{кр} = Q_0 \frac{m_e}{m_i} \left(\frac{2\sqrt{2}}{(3\pi)^{5/2}} \cdot \frac{\omega_{pe}^3}{n_0 v_{Te}^3} \right)^2 \sim Q_0 \frac{m_e}{m_i N_D^2} \sim Q_0 \left(\frac{v_e}{\omega_{pe}} \right)^2 \frac{m_e}{m_i}. \quad (7.49)$$

Таким образом, в турбулентной плазме рассеяние всегда аномально велико и обычно на много порядков превосходит томсоновское рассеяние.

Если в плазме возбуждены ионно-звуковые пульсации, то рассеяние хотя и всегда упруго (ввиду $\omega^s \ll \omega$), но возможно на угол порядка единицы. При этом из (7.20)

$$\gamma_{nn'} = \frac{\pi \omega_{pe}^4}{8cn_0 T_e \omega^2} \cdot \frac{(1 + (nn')^2) (W_k^s(n-n') + W_k^s(n'-n))}{(n-n')^2 (1 + 4\omega^2 v_{Te}^2 (1 - nn')/\omega_{pe}^2 c^2)}. \quad (7.50)$$

При $n \rightarrow n'$ $W^s \rightarrow 0$. С другой стороны, при $n' \rightarrow n$ необходимо пользоваться диффузионным приближением. Если воспользоваться спектром (4.231), то

$$\gamma_{nn'} \simeq \frac{\pi \omega_{pe} 15 T_e \omega_{pe}^3}{16 \sqrt{2\pi} T_i \omega^3} \cdot \frac{(1 + (nn')^2)}{|n - n'|^3} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \ln \frac{\omega |n - n'|}{k_0 c}. \quad (7.51)$$

При $|n - n'| \sim 1$ это рассеяние хотя и падает быстро с частотой, может в широком диапазоне параметров превосходить рассеяние на ленгмюровских пульсациях (7.45), что имеет место при

$$Q < Q_0 \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^2 \left(\frac{e\omega_{pe}}{v_{Te}\omega} \right)^6. \quad (7.52)$$

В диффузионном приближении, которое справедливо всегда при $\omega \gg \frac{\omega_{pe}c}{v_{Te}}$, имеем

$$\begin{aligned} \sigma_d &= \frac{\pi}{16} \cdot \frac{\omega_{pe}^4}{\omega^4} \int \frac{ck_1 dk_1 W_{k_1}^s}{n_0 T_e} = \frac{15\pi T_e}{64\sqrt{2\pi} T_i} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \omega_{pe} \times \\ &\times \frac{\omega_{pe}^3}{\omega^3} \cdot \frac{\omega_{pe}c}{v_{Te}\omega} \left(\ln \frac{\omega_{Te}}{v_{Te}k_0} - 1 \right). \end{aligned} \quad (7.53)$$

В последнем равенстве (7.53) приближенно $k_{\max} \simeq \frac{\omega_{pe}}{v_{Te}}$. Таким образом, в сравнении с (7.51) появляется дополнительный малый множитель $\frac{\omega_{pe}c}{v_{Te}\omega} \ll 1$.

Рассмотрим теперь плазму, помещенную в магнитное поле. Рассеяние на ленгмюровских и ионно-звуковых пульсациях имеет примерно тот же характер зависимости от частоты, что и в отсутствие магнитных полей. В сильном поле $\omega_{He} \gg \omega_{pe}$ появляется ветвь $\omega_k^h \approx \omega_{He}$. Расчет $\omega_i^{th}(k_1, \mathbf{k})$ для этой ветви по формуле (7.17) дает

$$\omega_i^{th}(k_1, \mathbf{k}) = \frac{(2\pi)^6 \omega_{pe}^4 (k - k')^2}{4n_0 \omega^2 |\omega_{He}| (4\pi)^2 m_e} (1 + (nn')^2) \left[1 - \frac{(h, k - k')^2}{(k - k')^2} \right], \quad (7.54)$$

где $\mathbf{h} = \mathbf{H}_0/H_0$. Из (7.54) следует

$$\gamma_{nn'} = \frac{\omega_{pe}^4 [1 + (nn')^2]}{32\omega_{He}^2 n_0 m_e c^2} \left(1 - \frac{(h(n - n'))^2}{4(1 - nn')} \right) (W_k^h(n - n') + W_{k(n' - n)}^h). \quad (7.55)$$

На поперечных волнах частоты $\omega \sim \omega_{He}$, в которые превращаются h -волны, рассеяние отсутствует, так как поперечные волны нераспадны. Для рассеяния на замагниченных ленгмюровских пульсациях $\omega = \omega_{pe} |\cos\theta|$ единственным различием с результатами, рассмотренными выше, для $H = 0$ будет появление в формуле (7.19) дополнительного множителя $\frac{(h, n - n')}{(n - n')}$.

В слабом магнитном поле $\omega_{He} \ll \omega_{pe}$ возникает новая ветвь вистлеров и $\omega_{He} |\cos \theta|$. Для вистлеров имеем

$$\omega_i^{tw}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}) = \frac{(2\pi)^6 e^2}{\omega^2 16\pi m_e^2} (1 + (\mathbf{nn}')^2) \frac{\omega_{pe}^2 k_1^2 \sin^2 \theta_1 |\cos \theta_1|}{\omega_{He}}. \quad (7.56)$$

Так как $\omega \gg \omega_{pe}$, $k_1 \ll \omega_{pe}/c$, а $\omega \gg k_1 c$, всегда справедливо диффузионное приближение

$$D_{ij} = \int_{x_1^2 < 1-x^2} k_{1i} k_{1j} \frac{d\omega_1 W_{\omega_1, \Omega_1}^w \pi d\Omega_1 (1-x_1^2) \omega_{pe}^6 c^{-3}}{4 \omega^2 \omega_{He}^2 n_0 m_e k_1 \sqrt{1-x^2-x_1^2}}. \quad (7.57)$$

Здесь $x_1 = \cos \theta_1$, $x = \cos \theta$, W_{ω_1, Ω_1}^w — введенная в гл. 4 энергия турбулентности вистлеров, нормированная на $d\omega_1 dx_1$. Согласно гл. 4 $W_{\omega_1, x_1} \simeq \frac{W(x_1)}{\omega^v}$, $v = \frac{1}{2}$ в отсутствие ионно-звуковых пульсаций и $v = 0$ при наличии интенсивных ионно-звуковых пульсаций. Подынтегральное выражение (7.57) пропорционально $\omega^{-\left(v - \frac{1}{2}\right)}$, и при любом из выписанных v основной вклад дают максимально возможные частоты $\sim \omega_{He}$. Отсюда следует оценка

$$\sigma_d \simeq \frac{2D}{\omega^2} \approx \omega_{pe} \frac{W^w}{n_0 m_e c^2} \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega} \right)^4 \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega_{He}} \right)^2. \quad (7.58)$$

Переходя к низкочастотным пульсациям, стоит отметить, что рассеяние на замагниченном звуке $\omega = kv_s |\cos \theta|$ ($v_A \gg v_s$) качественно мало отличается от рассмотренного выше незамагниченного звука [в вероятности (7.20) следует приписать дополнительный множитель $\left| \frac{h(n - n')}{n - n'} \right|$]. Вероятность рассеяния на продольной ионной волне $\omega_{Hi} |\cos \theta_1|$ имеет вид

$$\omega_i^{tl}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}) = \frac{(2\pi)^6 \omega_{pe}^4 \omega_{He} \omega_{Hi}^2 \sin^2 \theta_1 |\cos \theta_1|}{64\pi^2 k_1^2 v_{Te}^2 n_0 T_e \omega^2} (1 + (\mathbf{nn}')^2). \quad (7.59)$$

Считая $k_1 \sim \frac{\omega_{Hi}}{v_s}$, получаем оценку

$$\sigma_d \approx \omega_{Hi} \frac{c}{v_s} \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega} \right)^4 \frac{W}{n_0 T_e}. \quad (7.60)$$

Для альфвеновских пульсаций $\omega^A = kv_A |\cos \theta_1|$

$$\omega_i^{tA}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}) = \frac{(2\pi)^6 \omega_{pe}^2 k_1^3 |\cos \theta_1| \sin^2 \theta_1 c^2}{64\pi^2 n_0 m_e v_A \omega^2} (1 + (\mathbf{nn}')^2). \quad (7.61)$$

Коэффициент диффузии может быть записан в виде

$$D_{ij}^A = \int \frac{k_{1i} k_{1j} d\omega_1 d\Omega_1 W_{\omega_1, \Omega_1}^A \pi k_1 \omega_{pe}^2 c (1-x_1^2)}{4n_0 m_e v_A^2 \omega^2 \sqrt{1-x^2-x_1^2}}, \quad (7.62)$$

$x_1 = \cos\theta_1$, $x = \cos\theta$. Введенная в гл. 4 $W_{\omega_1}^A$ в стационарных одномерных условиях имеет вид const/ω_1 и основной вклад в интеграл (7.62) дают максимальные частоты порядка ω_{Hi} . Это позволяет получить оценку

$$\sigma_d = \frac{2Dc^2}{\omega^2} \approx \omega_{pi} \frac{4\pi W}{H_0^2} \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega} \right)^4. \quad (7.63)$$

Для магнитозвуковых волн $\omega^M = kv_A$ имеем

$$\omega_i^{tM}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}) = \frac{(2\pi)^6 \omega_{pe}^2 \omega_{pi}^2 k_1 \sin^2\theta_1}{64\pi^2 m_e \omega^2 v_A n_0} (1 + (\mathbf{nn}')^2),$$

а коэффициент диффузии

$$D_{ij}^M = \int \frac{c^{-1} k_{1i} k_{1j} \pi \omega_{pe}^2 \omega_{pi}^2 (1-x_1^2)}{4n_0 m_e v_A^2 k_1 \omega^2 \sqrt{1-x^2-x_1^2}} W_{\omega_1, \Omega_1}^M d\omega_1 d\Omega_1. \quad (7.64)$$

Если спектр имеет вид $W_{\omega_1, \Omega_1}^M = \frac{1}{\omega^\nu} W_{x_1}^M$, где $\nu = 2$, то

$$2\pi W_{\omega_1, \Omega_1}^M = \frac{W^M}{\omega_{\text{мин}}} \left(\frac{\omega_{\text{мин}}}{\omega} \right)^2 W^M(x_1); \quad \int W^M(x_1) dx_1 = 1,$$

где W^M — полная энергия магнитозвуковых пульсаций; $\omega_{\text{мин}} = k_0 v_A$ — минимальная частота, $2\pi/k_0 \simeq L_0$ — основной масштаб турбулентности. В этих условиях оценка σ_d имеет вид

$$\sigma_d = k_0 c \frac{4\pi W^M}{H_0^2} \ln \frac{\omega_{pi}}{k_0 c} \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega} \right)^4. \quad (7.65)$$

§ 7.4. УСИЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ В ТУРБУЛЕНТНОЙ ПЛАЗМЕ

Усиление возникает обычно либо при анизотропном распределении пульсаций, либо при анизотропном распределении быстрых частиц, ускоренных турбулентностью.

Рассмотрим вначале эффекты, связанные с анизотропией турбулентности. Ограничимся высокими частотами, много большими

всех характерных частот плазмы ω_{He} , ω_{pe} . В присутствии турбулентных пульсаций возникают эффективные соударения тепловых частиц плазмы с турбулентными пульсациями. Высокочастотная волна заставляет осциллировать частицы плазмы. Их столкновение с турбулентными пульсациями могло бы диссипировать энергию колебаний, а следовательно, и энергию высокочастотной волны. В действительности, однако, высокочастотная волна может нарушить резонансное условие, благодаря которому осуществлялось эффективное взаимодействие частиц и пульсаций, и ликвидировать указанную диссипацию. Возможность такой ситуации для высокочастотных электромагнитных волн видна хотя бы из общего квазилинейного уравнения (2.130). Действительно, учитывая $\delta(k - k_1 - k_2)$, можно резонансный знаменатель (2.130) записать в виде

$$\frac{1}{\omega_1 + \omega_2 - (k_1 + k_2) v + i\delta}$$

Для медленных низкочастотных движений частота ω_2 , характеризующаяся изменением регулярной составляющей функции распределения, мала и может выполняться резонанс $\omega_1 = k_1 v$, тогда как малые осцилляции высокой частоты дадут нерезонансный знаменатель $\frac{1}{\omega_2 - k_2 v}$ (так как $\omega_2/k_2 = v_p^t \simeq c$, а $v \ll c$).

Влияние турбулентных соударений на распространение электромагнитных волн описывается поправкой к интегралу столкновений, обязанной возмущению распределения частиц электромагнитной волной. Таким образом, эффективные турбулентные частоты для высокочастотного излучения имеют совершенно иную природу, нежели для возмущений низких частот. Поскольку турбулентность слабая, а частоты большие, следует найти нелинейное γ_k^N для поперечных волн при наличии низкочастотных пульсаций типа σ . Последние будем считать резонансными с частицами плазмы, т. е. при $H = 0$ $\omega_{k_1}^\sigma = k_1 v$, при $H \neq 0$ $\omega_{k_1}^\sigma = k_2 v_2 - v \omega_{Ha} = 0$. Используем уравнение, аналогичное (2.124), оставив линейные члены по интенсивности поперечных волн,

$$(k^2 c^2 - \omega^2 \epsilon_k) I_k^t = 8\pi i \omega I_k^t \int \sum_{k, k_1}^{\text{эфф}} I_{k_1}^\sigma dk_1 + \frac{32\pi^2 \omega^2}{k^2 c^2 - \omega^2 \epsilon_{-k}} \int |S_{k, k_1, k_2}|^2 I_{k_1}^\sigma I_{k_2}^t \delta(k - k_1 - k_2) dk_1 dk_2. \quad (7.66)$$

Здесь

$$S_{k, k_1, k_2} = S_{ijl}(k, k_1, k_2) e_{k_1, j}^\sigma e_{k, i}^{t*} e_{k_2, l}^t; \quad (7.67)$$

$$\sum_{k, k_1}^{\text{эфф}} = \sum_{ijls}^{\text{эфф}}(k, k_1, -k_1, k) e_{k, i}^{t*} e_{k, s}^t e_{k_1, j}^\sigma e_{k_1, l}^{s*};$$

$$\sum_{ijls}^{\text{эфф}}(k, k_1, -k_1, k) = \frac{1}{2} (\sum_{ijls}(k, k_1, -k_1, k) + \sum_{ijsl}(k, k_1, k, -k_1)) + S_{inj}(k, k - k_1, k_1) 8\pi i (\omega - \omega_1) \times \times \Pi_{nm}(k - k_1) S_{msl}(k - k_1, k, -k_1). \quad (7.68)$$

Здесь $\Pi_{nm}(k)$ — обратный максвелловский оператор

$$(k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{1}{c^2} \omega^2 \varepsilon_{ij}) \Pi_{jl}(k) = \delta_{il}. \quad (7.69)$$

Уравнение (7.66) получается аналогично (2.124), от которого оно отличается лишь типом взаимодействующих колебаний, поперечных t и турбулентных σ , что отражается в ортах e^t и e^σ , с которыми свертываются коэффициенты нелинейных токов второго порядка S_{ijl} и третьего Σ_{ijls} . Ограничимся в (7.66) областью высоких частот $\omega \gg \omega_{pe}, \omega_{He}$. Тогда в операторе (7.69) $\varepsilon_{ij} \approx \varepsilon(\omega) \delta_{ij} \simeq \delta_{ij}$

$$\Pi_{ij}(k) \simeq \frac{1}{k^2 - \omega^2/c^2} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right). \quad (7.70)$$

Для дальнейшего существенно лишь то, что в $\Pi_{ij}(k)$ имеется полюс при $k^2 = \omega^2/c^2$, соответствующий собственной моде поперечной волны. Используя конкретное выражение для S_{inj} (7.16), легко видеть, что во второй член (7.68) войдет лишь $|S_k^\sigma|^2$, где S_k^σ определяется (7.16)*. Но это означает, что в уравнениях баланса, которые получаются из (7.66) взятием мнимой части и интегрированием по ω , мнимость будет возникать лишь от знаменателя (7.70), $\frac{1}{k^2 - \omega^2/c^2} = i\pi \delta(k^2 - \omega^2/c^2)$. Аналогичный результат получается и для последнего члена (7.66). Отсюда следует, что последний член (7.68) и последний член (7.66) описывают только рассеяние и при любом анизотропном распределении турбулентных пульсаций не дают неустойчивостей.

Рассмотрим подробнее Σ_{ijls} . Собственно и этот член учитывает как анизотропию пульсаций, так и анизотропию быстрых частиц (последнее связано с тем, что нелинейный ток третьего порядка полностью описывает комптоновское рассеяние, которое только и существенно для релятивистских частиц). Рассмотрим влияние тепловых частиц. Как ясно из результатов гл. 2, Σ_{ijls} содержит знаменатель типа $\frac{1}{\omega - kv}$ для первого аргумента, разности второго и третьего и для четвертого аргументов. Резонансный знаменатель, который может приводить к раскачке, содержится лишь во втором члене (7.68). Первые два знаменателя этого Σ содержат высокие частоты ω и $\omega - \omega_1 \approx \omega$ и могут быть несложным путем разложены по $\frac{kv}{\omega}$ и $\frac{\omega_{He}}{\omega}$. Действительно, при решении, например, уравнения

$$\left(i(\omega - kv) + \omega_{He} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) f_k^{(3)} = e \int F_{k_1} \frac{\partial f_{k_2}^{(2)}}{\partial p} \delta(k - k_1 - k_2) dk_1 dk_2 \quad (7.71)$$

* Это следует из $\varepsilon_{-k} = \varepsilon_k^*$.

можно в первом приближении пренебречь в левой части $k\nu$ и $\omega_{He} \frac{\partial}{\partial \varphi}$, а затем найти вклад этих членов в первом приближении теории возмущений по $k\nu/\omega$ и ω_{He}/ω . Точно так же $f^{(2)}$ выражается через $f^{(1)}$. Интеграл от $f^{(1)}$ без всяких разложений может быть выражен через линейную диэлектрическую проницаемость. Получим

$$\sum_{ijls} (k, k_1, k, -k_1) \approx \frac{e^2}{m_e^2 \omega^2 4\pi i} \left\{ \delta_{ij} \frac{k_{1l}}{\omega_1} - \delta_{lj} \frac{k_{1i}}{\omega_1} - \delta_{ij} \frac{k_l}{\omega} - \delta_{li} \frac{k_j}{\omega} \right\} (k_{1m} \varepsilon_{ms}^{(e)}(-k_1) - k_{1s}). \quad (7.72)$$

Для продольных пульсаций большие члены c/v_p в (7.72) сокращаются и

$$\sum_{k, k_1} \varepsilon_{\Phi\Phi} = - \frac{e^2 (\mathbf{k} \mathbf{k}_1)}{m_e^2 \omega^3 8\pi e} (\varepsilon_{-k_1}^{l(e)} - 1). \quad (7.73)$$

Нелинейная проницаемость будет иметь вид

$$\varepsilon_k^N = - \frac{8\pi i}{\omega} \int \sum_{k, k_1} \varepsilon_{\Phi\Phi} I_{k_1}^\sigma dk_1 = \frac{\omega_{pe}^2}{4\pi n_0 m_e \omega^4} \int (\mathbf{k} \mathbf{k}_1) I_{k_1}^l dk_1 (\varepsilon_{-k_1}^{l(e)} - 1). \quad (7.74)$$

Последнее равенство написано для продольных турбулентных пульсаций. В (7.74) в силу нечетности $(\mathbf{k} \mathbf{k}_1)$ остается лишь мнимая часть $\varepsilon_{k_1}^{l(e)}$. Выражение (7.74) справедливо и в том случае, когда для пульсаций отсутствует однозначная связь ω и k . Если такая связь имеет место, то

$$I_{k_1}^l = \frac{4\pi}{\omega_1 \left. \frac{\partial \varepsilon_{k_1}^l}{\partial \omega_1} \right|_{\omega_1 = \omega_{k_1}^l}} (\mathcal{W}_{k_1}^l \delta(\omega - \omega_{k_1}^l) + \mathcal{W}_{-k_1}^l \delta(\omega + \omega_{k_1}^l)), \quad (7.75)$$

т. е.

$$\text{Im} \varepsilon_k^N = - \frac{2\omega_{pe}^2}{n_0 m_e \omega^4} \int \frac{(\mathbf{k} \mathbf{k}_1) \text{Im} \varepsilon_{k_1}^l dk_1}{\omega_1 \left. \frac{\partial \varepsilon_{k_1}^l}{\partial \omega_1} \right|_{\omega_1 = \omega_{k_1}^l}} \mathcal{W}_{k_1}^l; \quad (7.76)$$

$$\mathcal{W}^l = \int \mathcal{W}_{k_1}^l dk_1. \quad (7.77)$$

Итак, мнимая часть ε_k^N противоположна мнимой части $\varepsilon_{k_1}^l$. Это значит, что если есть выделенное направление распространения турбулентных пульсаций, то волны, имеющие острый угол с этим направлением, раскачиваются. Для изотропной турбулентности раскачка отсутствует. Возникающее затухание является следующим

порядком малости по параметру $\frac{kv}{\omega} \sim \frac{v_{Te}}{c}$. В силу того, что затухание электромагнитных волн возникает лишь в следующем порядке, для раскачки достаточна весьма малая степень анизотропии $\sim v_{Te}/c$. Для ленгмюровской турбулентности

$$\text{Im } \varepsilon_k^l = 0 \quad (7.78)$$

и к неустойчивости могут привести лишь быстрые частицы, которые создают эффективное поглощение Ландау. Для ионно-звуковой турбулентности

$$\gamma_k^N = - \frac{\omega^2 \text{Im } \varepsilon_k^N}{\frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \varepsilon_k^l} \approx - \frac{\omega}{2} \text{Im } \varepsilon_k^N = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} v_{\text{эфф}}; \quad (7.79)$$

$$v_{\text{эфф}} = \frac{v_{Te}}{2c} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int \frac{W_{k_1}^s}{n_0 T_e} \omega_{k_1}^s \frac{(kk_1)}{kk_1} dk_1. \quad (7.80)$$

По порядку величины $v_{\text{эфф}}$ в $\frac{v_{Te}}{c} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}$ раз меньше эффективной частоты квазилинейных столкновений тепловых частиц с турбулентными пульсациями. Если $\text{Im } \varepsilon$ в (7.73) связано с синхротронным излучением релятивистских частиц, то σ описывает электромагнитные волны. Этот процесс раскачки излучения высоких частот на анизотропных пульсациях низких частот качественно отличен от индуцированного комптоновского рассеяния.

Индукцированное комптоновское рассеяние турбулентных пульсаций в электромагнитное излучение описывается другим резонансом в выражении для Σ , а именно резонансом на частоте $\omega - \omega_1$. Возможность раскачки излучения в этом случае обязана анизотропному распределению релятивистских частиц. Впервые такой эффект для резко анизотропного распределения пучка релятивистских электронов в турбулентной плазме рассматривался в работе [68] и для слабо анизотропного распределения — в работе [261]. Ограничимся здесь именно последним случаем.

Пусть распределение электронов имеет вид

$$f_\varepsilon = f_\varepsilon^{(0)} (1 + \alpha \cos \theta), \quad (7.81)$$

где θ — угол скорости частиц с неким выделенным направлением. Для нахождения инкремента необходимо воспользоваться общим выражением для инкремента через вероятность рассеяния [см. (6.146) и (2.233)]. Тогда получим формулу (6.164), в которой вместо Φ_* будет

$$\Phi_{*,\alpha} = \frac{4}{3} \{ (2 + 3\alpha \cos \theta) (1 - q)^3 + 6\gamma (1 - q^2) - 3q^2 (1 - q) \times \\ \times \alpha \cos \theta + 3q^2 \ln q (2 + \alpha \cos \theta) \}, \quad (7.82)$$

где θ — угол между k и H . Для спектра (6.159) получим

$$\gamma_{\omega} = - \frac{\pi \omega^4 n_1}{3 \omega^2 n_0^2 c^5 m_e} \left(\frac{2c}{\omega} \right)^{\gamma/2} c_*(\gamma) \int k_1^{\gamma-2} W_{k_1}^l dk_1; \quad (7.83)$$

$$c_*(\gamma) = c(\gamma) + \frac{3}{2} \alpha \cos \theta (\gamma-1) \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{3}{\gamma+2} - \frac{2}{\gamma+4} - \frac{2}{(\gamma+4)^2} \right). \quad (7.84)$$

При α порядка 1 величина γ_{ω} может стать положительной, описывая раскачку колебаний. Раскачка излучения возможна без плазмы за счет индуцированного синхротронного излучения [269], однако для этого требуется степень анизотропии $\alpha \sim \frac{\varepsilon}{mc^2}$.

§ 7.5. ФЛУКТУАЦИИ ИНТЕНСИВНОСТИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ПРИ ПРОХОЖДЕНИИ ЧЕРЕЗ ТУРБУЛЕНТНУЮ ПЛАЗМУ

Наряду с рассмотренными эффектами рассеяния и усиления излучения в турбулентной плазме возможны флуктуации интенсивности. Согласно работе [295] такие флуктуации могут быть интерпретированы как результат интерференции волн, которые при прохождении через среду со случайными электромагнитными неоднородностями приобрели различные сдвиги фаз (о флуктуациях при прохождении турбулентных жидкостей и газов см. [296—298]). В турбулентной плазме случайные неоднородности и случайные электромагнитные характеристики создаются турбулентными пульсациями, а распределение неоднородностей по масштабам может быть найдено из спектров турбулентности (см. гл. 4). В принципе для интерференции волн наличие плазмы не является необходимым, плазма может создать, например, случайное распределение фаз электромагнитной волны на выходе из плазмы, а интерференция будет происходить в вакууме вне плазмы. Поэтому часто используются представления о фазовом экране, т. е. считается, что слой плазмы узкий и лишь модулирует по фазам проходящую электромагнитную волну. В реальных условиях, естественно, такое предположение слишком грубо, так как в действительности и изменение фазовых соотношений, и интерференция происходят одновременно. Кроме того, как мы видим на примере эффектов рассеяния, длины волн турбулентных пульсаций и проходящего электромагнитного излучения могут быть сравнимыми ($k \sim k_1$), и наглядная геометрико-оптическая картина с набегом фазы на неоднородности в этом случае непригодна.

Предположим, что на плазму послана монохроматическая высокочастотная волна

$$E^t = E_{k,\omega}^t e^{-i\omega t + ikr}. \quad (7.85)$$

Волна, которая взаимодействует с турбулентной плазмой, будет промодулирована во времени и в пространстве

$$E^t = E_{k\omega}^t(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega t + i \mathbf{k} \mathbf{r}}. \quad (7.86)$$

Интенсивность волны задается $|E_{k,\omega}^t(\mathbf{r}, t)|^2$, а флуктуация интенсивности

$$\langle \Delta I^2 \rangle = \langle |E_{k,\omega}^t(\mathbf{r}, t)|^4 \rangle - (\langle |E_{k\omega}(\mathbf{r}, t)|^2 \rangle)^2. \quad (7.87)$$

Последний член (7.87) — квадрат интенсивности, он может быть найден из уравнения рассеяния, поэтому рассмотрим более подробно первый член (7.87). Разложим $E_{k,\omega}(\mathbf{r}, t)$ в ряд Фурье

$$E_{k\omega}^t(\mathbf{r}, t) = \int E_{k,\omega,k_1,\omega_1} e^{-i\omega_1 t + i \mathbf{k}_1 \mathbf{r}} d\omega_1 d\mathbf{k}_1. \quad (7.88)$$

Если $E_{k,\omega}^t$ — полная компонента Фурье поля, то очевидно

$$E_{k,\omega,k_1,\omega_1}^t = E_{k+k_1,\omega+\omega_1}^t. \quad (7.89)$$

Среднее значение четвертой степени поля (7.87) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \langle |E_{k\omega}^t(\mathbf{r}, t)|^4 \rangle &= \int \langle E_{k+k_1,\omega+\omega_1}^t E_{k+k_2,\omega+\omega_2}^t \times \\ &\times E_{k+k_3,\omega+\omega_3}^{t*} E_{k+k_4,\omega+\omega_4}^{t*} \rangle dk_1 dk_2 dk_3 dk_4 \times \\ &\times \exp \{ -i(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4) t + i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) \mathbf{r} \}. \end{aligned} \quad (7.90)$$

Изменяя знаки dk_3, dk_4 и используя $E_{k,\omega}^* = E_{-k,-\omega}$, получаем

$$\begin{aligned} \langle |E_{k\omega}^t(\mathbf{r}, t)|^4 \rangle &= \int \langle E_{k_1\omega_1}^{t'} E_{k_2,\omega_2}^{t'} E_{k_3\omega_3}^{t'} E_{k_4\omega_4}^{t'} \rangle \times \\ &\times \exp \{ -i(\omega_1' + \omega_2' + \omega_3' + \omega_4') t + i(\mathbf{k}_1' + \mathbf{k}_2' + \mathbf{k}_3' + \mathbf{k}_4') \mathbf{r} \}, \end{aligned} \quad (7.91)$$

где

$$k_1' = k_1 + k; k_2' = k_2 + k; k_3' = k_3 - k; k_4' = k_4 - k. \quad (7.92)$$

Таким образом, задача сводится к вычислению среднего значения четырех поперечных полей, первые два из которых имеют значения четырехмерных волновых векторов, близкие к $+k$, а последние два — к $-k$. В условиях стационарности флуктуации,

как видно,

$$\langle E_k^t E_{k_1}^t | E_{k'}^t E_{k_1'}^t \rangle = \langle k k_1 | k', k_1' \rangle = I_{k, k_1, k', k_1'} \delta(k + k' + k_1 + k_1'). \quad (7.93)$$

Таким образом, лишь три вектора в (7.93) являются независимыми.

Если ввести

$$\kappa_1 = k_1 - k; \quad \kappa' = k' + k; \quad \kappa_1' = k_1' + k, \quad (7.94)$$

то $\kappa_1 = -\kappa - \kappa'$. Будем считать $I_{k, k_1, k', k_1'}$ функцией k, κ_1', κ' . Составим уравнение для $\langle k k_1 | k', k_1' \rangle$. Учитывая, что поле t является слабым и высокочастотным ($\omega \gg \omega_{He}, \omega_{pe}$), оставим лишь линейный по этому полю член в нелинейных уравнениях

$$(k^2 - \frac{1}{c^2} \omega^2) E_k^t = 8\pi i \omega \int S_{k, k\sigma, k_1} E_{k\sigma}^\sigma E_{k_1}^t \delta(k - k^\sigma - k_1) dk^\sigma dk_1 c^{-2}, \quad (7.95)$$

$S_{k, k\sigma, k_1}$ — компонента нелинейного тока второго порядка, свернутая с поперечными ортами и ортами турбулентных σ -волн, усредненная по поляризациям. В (7.95) входит полное поле. Его деление на случайные и неслучайные компоненты в данном случае неудобно.

Умножив (7.95) на три поля, усреднив по ансамблю, можно в правой части уточнить поперечные поля с помощью (7.95) и тем самым получить уравнение для $\langle k k_1 | k' k_1' \rangle$

$$\begin{aligned} (k^2 - \frac{1}{c^2} \omega^2) \langle k k_1 | k' k_1' \rangle &= 8\pi i \omega \langle k k_1 | k' k_1' \rangle \int S_{k, k\sigma, k-k\sigma} \times \\ &\times \frac{8\pi i (\omega - \omega^\sigma) c^{-4}}{(k - k^\sigma) - (\omega - \omega^\sigma)^2 c^{-2}} S_{k-k\sigma, -k\sigma, k} I_{k\sigma}^\sigma dk^\sigma - \frac{64\omega\omega_1 \pi^2 c^{-4}}{k_1^2 - \omega_1^2 c^{-2}} \times \\ &\times \int S_{k, k\sigma, k-k\sigma} S_{k_1, -k\sigma, k_1+k\sigma} \langle k - k^\sigma, k_1 + k^\sigma | k' k_1' \rangle I_{k\sigma}^\sigma dk^\sigma - \\ &- \frac{64\pi^2 \omega \omega' c^{-4}}{k'^2 - \omega'^2 c^{-2}} \int dk^\sigma S_{k, k\sigma, k-k\sigma} S_{k', -k\sigma, k'+k\sigma} \times \\ &\times \langle k - k^\sigma, k_1 | k' + k^\sigma, k_1' \rangle I_{k\sigma}^\sigma - \frac{64\pi^2 \omega \omega_1' c^{-4}}{k_1'^2 - \omega_1'^2 c^{-2}} \int dk^\sigma S_{k, k\sigma, k-k\sigma} \times \\ &\times S_{k_1', -k\sigma, k_1'+k\sigma} \langle k - k^\sigma, k_1 | k', k' + k^\sigma \rangle I_{k\sigma}^\sigma. \end{aligned} \quad (7.96)$$

Аналогично можно получить уравнение, содержащее слева

$$(k_1^2 - \omega_1^2 c^{-2}) \langle k k_1 | k', k_1' \rangle; (k'^2 - \omega'^2 c^{-2}) \langle k k_1 | k', k_1' \rangle \text{ и}$$

$$(k_1'^2 - \omega_1'^2 c^{-2}) \langle k k_1 | k', k_1' \rangle.$$

Будем теперь считать, что разница четырехмерных векторов k_1 , k' и k_1' и k мала в сравнении с k , т. е.

$$(k_1^2 - \omega_1^2 c^{-2}) = (\mathbf{k} + \boldsymbol{\kappa}_1)^2 - c^{-2} (\omega + \nu_1)^2 \approx 2\mathbf{k}\boldsymbol{\kappa}_1 - 2\omega\nu_1 c^{-2} + k^2 - \omega^2 c^{-2};$$

$$k'^2 - \omega'^2 c^{-2} = -2\mathbf{k}\boldsymbol{\kappa}' + 2\omega\nu' c^{-2} + k^2 - \omega^2 c^{-2};$$

$$k_1'^2 - \omega_1'^2 c^{-2} = -2\mathbf{k}\boldsymbol{\kappa}_1' + 2\omega\nu_1' c^{-2} + k^2 - \omega^2 c^{-2}; \boldsymbol{\kappa} = \{ \boldsymbol{\kappa}, \nu \}. \quad (7.97)$$

Складывая (7.96) с уравнением $(k_1^2 - c^{-2}\omega_1^2) \langle k k_1 | k', k_1' \rangle$ и вычитая два уравнения, содержащие $k'^2 - c^{-2}\omega'^2$ и $k_1'^2 - c^{-2}\omega_1'^2$, получаем в левой части $2\mathbf{k}(\boldsymbol{\kappa}_1 + \boldsymbol{\kappa}' + \boldsymbol{\kappa}_1') - 2\omega(\nu_1 + \nu' + \nu_1') c^{-2}$. Умножаем результат на

$$\exp [i(\boldsymbol{\kappa}_1 + \boldsymbol{\kappa}' + \boldsymbol{\kappa}_1') \mathbf{r} - i\omega(\nu_1 + \nu_1' + \nu') t] \quad (7.98)$$

и интегрируем по $\boldsymbol{\kappa}_1$, ν_1 . В правой части пренебрежем слабой нестационарностью, т. е. будем считать выполненным (7.93). Тогда для $I_{k, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\kappa}'}$ (\mathbf{r}, t), определяемой равенством

$$I_{k, \boldsymbol{\kappa}', \boldsymbol{\kappa}_1'}(\mathbf{r}, t) = \int I_{k, \boldsymbol{\kappa}_1, \boldsymbol{\kappa}' \boldsymbol{\kappa}_1'} e^{i(\boldsymbol{\kappa}_1 + \boldsymbol{\kappa}_1' + \boldsymbol{\kappa}') \mathbf{r} - i\omega(\nu_1 + \nu_1' + \nu') t} d\boldsymbol{\kappa}_1 d\nu_1, \quad (7.99)$$

получим уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\mathbf{k}}{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) I_{k, \boldsymbol{\kappa}' \boldsymbol{\kappa}_1'} = \int |S_{k, k\sigma}|^2 I_{k\sigma}^\sigma M_{k, k\sigma, \boldsymbol{\kappa}_1' \boldsymbol{\kappa}'} d k^\sigma. \quad (7.100)$$

Здесь

$$|S_{k, k\sigma}|^2 = \frac{e^2 \pi}{8m_e \omega_k^2} | (k_j^\sigma \epsilon_{jl}^{(e)}(k^\sigma) - k_l^\sigma) e_{lk\sigma}^\sigma |^2 \left(1 + \frac{(\mathbf{k}, \mathbf{k} - \mathbf{k}^\sigma)^2}{k^2 (k - k^\sigma)^2} \right). \quad (7.101)$$

В (7.100) учтен первый член разложения произведений нелинейных токов, входящих в (7.96), по малым параметрам $\boldsymbol{\kappa}'/k$,

κ'_1/k , κ_1/k и усреднено по поляризациям поперечных волн. Далее

$$\begin{aligned}
 M_{\mathbf{k}, k^\sigma, \kappa', \kappa'_1} = & -I_{\mathbf{k}, \kappa', \kappa'_1} \left\{ \delta(\omega_{\mathbf{k}} - \omega^\sigma - \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}^\sigma}) + \delta(\omega_{\mathbf{k}} - \nu' - \nu'_1 - \omega^\sigma - \right. \\
 & \left. - \omega_{\mathbf{k}-\kappa'-\kappa'_1-k^\sigma}) + \delta(\omega_{\mathbf{k}} - \nu - \omega^\sigma - \omega_{\mathbf{k}-\kappa'-k^\sigma}) + \delta(\omega_{\mathbf{k}} - \nu'_1 - \right. \\
 & \left. - \omega^\sigma - \omega_{\mathbf{k}-\kappa'_1-k^\sigma}) \right\} + I_{\mathbf{k}-k^\sigma, \kappa', \kappa'_1-k^\sigma} \left\{ \delta(\omega_{\mathbf{k}-k^\sigma} + \omega^\sigma - \right. \\
 & \left. - \nu' - \omega_{\mathbf{k}-\kappa'}) + \delta(\omega^\sigma + \omega_{\mathbf{k}-k^\sigma} - \omega_{\mathbf{k}}) \right\} + I_{\mathbf{k}-k^\sigma, \kappa'-k^\sigma, \kappa'_1} \times \\
 & \times \left\{ \delta(\omega_{\mathbf{k}-k^\sigma} + \omega^\sigma - \nu'_1 - \omega_{\mathbf{k}-\kappa'_1}) + \delta(\omega_{\mathbf{k}-k^\sigma} + \omega^\sigma - \omega_{\mathbf{k}}) \right\} + \\
 & + I_{\mathbf{k}, \kappa', \kappa'_1-k^\sigma} \left\{ \delta(\omega_{\mathbf{k}} - \nu'_1 - \omega_{\mathbf{k}-\kappa'_1}) + \delta(\omega_{\mathbf{k}} - \nu'_1 - \nu' - \omega_{\mathbf{k}-\kappa'-\kappa'_1}) \right\} + \\
 & + I_{\mathbf{k}, \kappa'-k^\sigma, \kappa'_1} \left\{ \delta(\omega_{\mathbf{k}} - \nu'_1 - \omega_{\mathbf{k}-\kappa'}) + \delta(\omega_{\mathbf{k}} - \nu'_1 - \nu' - \omega_{\mathbf{k}-\kappa'-\kappa'_1}) \right\} - \\
 & - I_{\mathbf{k}-k^\sigma, \kappa'-k^\sigma, \kappa'_1-k^\sigma} \left\{ \delta(\omega_{\mathbf{k}-k^\sigma} + \omega^\sigma - \nu' - \nu'_1 - \omega_{\mathbf{k}-\kappa'-\kappa'_1}) + \right. \\
 & \left. + \delta(\omega_{\mathbf{k}-k^\sigma} + \omega^\sigma - \omega_{\mathbf{k}}) \right\} - I_{\mathbf{k}, \kappa'-k^\sigma, \kappa'_1+k^\sigma} \times \\
 & \times \left\{ \delta(\omega_{\mathbf{k}} - \nu'_1 - \omega_{\mathbf{k}-\kappa'_1}) + \delta(\omega_{\mathbf{k}} - \nu' - \omega_{\mathbf{k}-\kappa'}) \right\}. \quad (7.102)
 \end{aligned}$$

Если k^σ порядка k , а по необходимости $\kappa', \kappa'_1 \ll k$, то во все члены (7.102), кроме первого, входят I , в которых вместо хотя бы одного κ' стоит k^σ . Они равны нулю и вследствие отрицательности первого члена флуктуации затухают. Если $k^\sigma \ll k$, то возможно как $\kappa \ll k^\sigma$, так и $\kappa \gg k^\sigma$. При оценках вклада тех или иных членов надо учитывать, что δ -функции, не содержащие k^σ , имеют порядок $1/\kappa$, а содержащие k^σ — порядок $1/k^\sigma$. Таким образом, при $\kappa', \kappa'_1 \ll k^\sigma$ получим приближенно

$$\begin{aligned}
 M_{\mathbf{k}, k^\sigma, \kappa', \kappa'_1} \simeq & I_{\mathbf{k}, \kappa', -k^\sigma} \left\{ \delta\left(\frac{k}{k} \kappa'_1\right) + \delta\left(\frac{k}{k} (\kappa' + \kappa'_1)\right) \right\} + \\
 & + I_{\mathbf{k}, -k^\sigma, \kappa'_1} \left\{ \delta\left(\frac{k}{k} \kappa'\right) + \delta\left(\frac{k}{k} (\kappa' + \kappa'_1)\right) \right\} - I_{\mathbf{k}, -k^\sigma, k^\sigma} \times \\
 & \times \left\{ \delta\left(\frac{k}{k} \kappa'\right) + \delta\left(\frac{k}{k} \kappa'_1\right) \right\}. \quad (7.103)
 \end{aligned}$$

Здесь предположено $\frac{\nu'}{|\kappa'|} , \frac{\nu'_1}{|\kappa'_1|} \ll 1$. При $\kappa', \kappa'_1 \gg k^\sigma$

$$M_{k, k^\sigma, \kappa', \kappa'_1} = \left\{ -I_{k, \kappa', \kappa'_1} + I_{k-k^\sigma, \kappa', \kappa'_1-k^\sigma} + I_{k-k^\sigma, \kappa'-k^\sigma, \kappa'_1} - I_{k-k^\sigma, \kappa'-k^\sigma, \kappa'_1-k^\sigma} \right\} \delta\left(\frac{k}{k} k^\sigma\right). \quad (7.104)$$

Из-за вычитаний в (7.104) флуктуации сильно уменьшаются. Таким образом, наиболее существенными являются значения κ' и κ'_1 вплоть до значений порядка k^σ .

Однако для полной флуктуации $\langle I^2 \rangle - (\langle I \rangle)^2 \simeq \langle I^2 \rangle = \int I_{k, \kappa, \kappa'} \times \times d\kappa d\kappa' d\nu d\nu'$ фазовый объем $d\kappa d\kappa' \sim \kappa^2 d\kappa d\kappa'$ и поэтому основной вклад дают κ' порядка k^σ . Это позволяет получить оценку флуктуации интенсивности. Например, для ленгмюровских пульсаций из (7.102) и (7.100) получим

$$\frac{\langle \Delta I^2 \rangle}{(\langle I \rangle)^2} \simeq \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega} \right)^2 \frac{L}{n_0 m_e c^2} \int k W_k^l dk, \quad (7.105)$$

где L — путь луча в плазме. Формула (7.105) справедлива при $k^2 \gg \frac{\omega}{Lc}$. При спектре $W_k = \sqrt{\frac{2Q}{\alpha}}$ получим, что последнее условие будет выполнено, если

$$\omega \ll \omega_{pe} \frac{\omega_{pe} Lc}{v_{Te}^2} \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{2/5}.$$

В практически интересных случаях L настолько велико, что (7.105) является хорошей оценкой.

Ограничимся здесь указанными оценками, отсылая читателя, интересующегося деталями анализа этих уравнений, к оригинальным работам [295, 297].

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ТУРБУЛЕНТНОЙ ПЛАЗМЫ

§ 8.1. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть в плазме установилась стационарная турбулентность. Проследим за поведением слабого электромагнитного поля E^R , возникшего в плазме либо как результат флуктуаций, либо из-за внешнего воздействия. Под действием поля E^R в турбулентной плазме изменятся потоки турбулентной энергии и распределение плазмонов, а также распределение заряженных частиц плазмы. Это изменение плазмонов и частиц вызовет дополнительный ток в плазме, который изменит поле. Этот эффект описывается диэлектрической проницаемостью турбулентной плазмы, являющейся откликом плазмы на слабое поле E^R . Существенное отличие турбулентной плазмы от нетурбулентной состоит в том, что в нетурбулентной плазме поле E^R может изменить лишь распределения частиц, тогда как в турбулентной плазме существенно могут изменяться состояния плазмонов. Важное значение имеет величина частоты ω поля возмущения. Если эта частота является достаточно низкой, например много меньшей характерных времен нелинейной трансформации турбулентной энергии вдоль спектра, то можно ожидать существенного отличия электромагнитных свойств турбулентной и нетурбулентной плазмы. В настоящей главе рассмотрим лишь область низких частот, в которой проявляются новые электромагнитные свойства, обязанные турбулентности плазмы. Целесообразно ввести понятие об эффективных турбулентных соударениях ν^T как эффективных частотах соударений пульсаций между собой и с частицами плазмы. Они зависят от энергии турбулентности.

В случае слабой турбулентности, которая только и будет предметом дальнейшего рассмотрения, эффективные турбулентные соударения, пропорциональные более высоким степеням энергии турбулентности, имеют более низкую частоту. Наибольшую частоту имеют турбулентные соударения, пропорциональные первой степени энергии турбулентности. Они описывают процессы квазилинейной релаксации, распадного взаимодействия и индуцированного рассеяния. В области частот возмущений, меньших эффективных турбулентных частот, тензор диэлектрической проницаемости не может быть разложен по эффективным турбулентным частотам, а следовательно, и энергии турбулентности. Последнее и показы-

вает, что электромагнитные свойства плазмы в этой области частот должны измениться коренным образом.

В области частот, больших эффективных турбулентных частот, диэлектрическая проницаемость разложима по турбулентным частотам и энергии турбулентности. В этом случае приближенно моды колебаний плазмы остаются такими же, как и в отсутствие турбулентности, а поправки, пропорциональные энергии турбулентности, описывают слабое изменение частоты, слабую линейную раскачку или затухание колебаний и рассеяние колебаний (см. гл. 7). Для возмущений низких частот в турбулентной плазме нельзя говорить о нелинейном взаимодействии различных мод, а следует говорить о коренном изменении мод и, в частности, об исчезновении старых и появлении новых мод. Заметим, что изменение низкочастотных свойств плазмы при наличии турбулентности представляет особый интерес ввиду того, что в области низких частот лежат наиболее опасные для удержания плазмы магнитогидродинамические и дрейфовые неустойчивости. Изменяя условия возбуждения и диссипации высокочастотной турбулентности, ее интенсивности, тип турбулентных пульсаций, можно в широких пределах регулировать низкочастотные свойства и неустойчивости плазмы.

Задачей является отыскание аналитического вида низкочастотного тензора проницаемости плазмы $\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}, W_{k_1})$, функционально зависящего от спектральной энергии турбулентности W_{k_1} ,

$$W = \int W_{k_1} d\mathbf{k}_1. \quad (8.1)$$

Здесь W — энергия турбулентных пульсаций в 1 см^3 , ω — частота, \mathbf{k} — волновой вектор возмущения. Для построения теории могут быть использованы физические представления, сходные с употребляемыми для описания слабой турбулентности. А именно, следует раскладывать по энергии турбулентности в ядрах интегралов соударений и учитывать процессы со все возрастающим числом внешних плазмонных линий. Общая схема расчетов обобщает ту, которая использовалась в гл. 2. Функции распределения частиц f^α и электрическое поле E разбиваются на сумму турбулентных $f^{T\alpha}$, E^T и регулярных $f^{R\alpha}$, E^R составляющих

$$f^\alpha = f^{T\alpha} + f^{R\alpha}; \quad E = E^T + E^R, \quad (8.2)$$

где $\langle f^{T\alpha} \rangle = 0$, $\langle E^T \rangle = 0$, усреднение производится по статистическому ансамблю. В результате усреднения по статистическому ансамблю уравнений движения и уравнений Максвелла и вычитания усредненных уравнений из исходных могут быть получены системы уравнений для регулярных и случайных компонент. Далее следует выделить величины, характеризующие стационарное турбулентное

состояние, обозначаемое ниже индексом (0): $f^{R(0)\alpha}$, $f^{T(0)\alpha}$, $E^{R(0)}$, $E^{T(0)}$. Рассматривается возмущение турбулентного поля и связанное с ним поле $E^{R(1)}$ (индекс (1) для возмущения). Все величины (E^T , E^R , f^T , f^R) раскладываются по $E^{R(1)}$ и оставляются лишь линейные по $E^{R(1)}$ члены*. Тем самым получается две системы уравнений для основного турбулентного состояния (0) и отклонения от него (1). Такие уравнения носят общий характер и в принципе пригодны для неслабой турбулентности. Для получения усеченных уравнений, описывающих слаботурбулентное состояние, можно, как обычно, в ядрах интегрального уравнения для исходного турбулентного состояния произвести разложение по турбулентному полю $E^{T(0)}$. Можно также использовать разложение по полю $E^{T(0)}$ в ядрах уравнения, описывающего отклонения от основного турбулентного состояния. Принимая во внимание лишь конечное число членов разложения, можно надеяться учесть лишь первые турбулентные частоты столкновений.

Это позволяет описать электромагнитные свойства плазмы при частотах, меньших этих турбулентных частот, но больших неучтенных турбулентных частот более высокого порядка по энергии турбулентности. Необходимость именно такого подхода к проблеме диктуется тем, что эффективные турбулентные частоты оказываются в ряде практически важных случаев зависящими не только от энергии турбулентности, но и от частоты ω и волнового возмущения k . Поэтому условие доминирования турбулентных соударений ($\omega \ll v^T$) представляет собой обычно условие, включающее в себя значения ω , k и энергии турбулентности.

Границы применимости подхода, основанного на разложении интегралов соударений частиц и турбулентных пульсаций по энергии турбулентности, в ряде случаев довольно жесткие. Эти критерии тесно связаны с эффектами нелинейного изменения дисперсионных свойств высокочастотных пульсаций. Хотя изменения частот высокочастотных пульсаций в условиях слабой турбулентности, как отмечалось, всегда малы, низкочастотные возмущения могут их эффективно «чувствовать» при частотах, грубо говоря, меньших этих нелинейных сдвигов. Учет этих эффектов приводит к «перенормировке» пропагаторов высокочастотных плазмонов и заряда частиц. Учесть эту перенормировку можно путем составления уравнения для интегралов соударений частиц и турбулентных пульсаций (ср. с эффектами корреляций гл. 2). Такие эффекты оказываются наиболее существенными для ленгмюровской турбулентности. Неустойчивость турбулентной плазмы, соответствующая неустойчивости газа холодных ленгмюровских плазмонов, исследованная впервые в работе [229]**, возникает в рамках подхода, использующего разложение интегралов соударений частиц и турбулентных пульсаций по

* Если $E^{R(0)} = 0$, то $E^{R(1)} = E^R$.

** Критерий неустойчивости [299] был получен также в работе [300] с помощью энергетического принципа.

энергии турбулентности. Такая неустойчивость оказывается возможной в узком интервале параметров плазмы и ее турбулентности и, в частности, лишь при малых фазовых скоростях плазмонов. Использование диэлектрической проницаемости, найденной суммированием рядов теории возмущений по энергии турбулентности в ядрах интеграла соударений частиц и турбулентных пульсаций, позволяет выявить новые неустойчивости турбулентной плазмы [301], которые развиваются при больших фазовых скоростях плазмонов. Такие неустойчивости представляют интерес в связи с тем, что энергия турбулентности из-за спектральных перекачек в основном сосредоточена при больших фазовых скоростях. Далее в неоднородной плазме возникают эффекты стабилизации дрейфовых колебаний высокочастотной турбулентностью и стохастическими ВЧ-полями [302]. Возможно также возбуждение магнитных полей турбулентными пульсациями потенциальной природы, например ленгмюровскими [303]. Это аналогично спонтанному возбуждению магнитных полей в турбулентной жидкости [304].

Известно, что электромагнитные волны низких частот не проникают в плазму (так называемый скин-эффект). Обычно толщина скин-слоя в нетурбулентной плазме существенно зависит от частоты парных соударений частиц. В турбулентной плазме роль соударений играют нелинейные эффекты взаимодействия турбулентных пульсаций между собой (столкновения плазмон — плазмон) и взаимодействия частиц с турбулентными пульсациями (столкновение плазмон — частица, два плазмона — частица и т. п.). Нужно полагать, что именно частоты таких процессов должны определять скин-эффект турбулентной плазмы. В частности, толщина скин-слоя должна зависеть от характерных спектральных перекачек, времен установления стационарной турбулентности и т. п.

Изучение скин-эффекта позволяет поэтому детектировать указанные процессы. Так как частоты этих эффективных соударений много больше частот парных соударений частиц, то и толщина скин-слоя в турбулентной плазме должна быть существенно большей, чем в нетурбулентной. Хотя в общем случае низкочастотные возмущения затрагивают как частицы плазмы, так и плазмоны, возможны случаи, когда доминирующим будет смещение плазмонов. Возмущения этих взаимодействий сказываются лишь на распределении плазмонов. В указанных условиях можно приближенно говорить о возмущениях в газе плазмонов, т. е. в терминологии Ландау [305], о втором звуке в турбулентной плазме. Вопрос о втором звуке в этом аспекте рассматривался в работе [306].

В целях упрощения при изложении принципиальных вопросов мы ограничимся случаем замагниченных электронов и ионов, находящихся в бесконечно сильном магнитном поле. В этих условиях движение частиц (но не плазмонов) становится одномерным вдоль силовых линий поля, которые предполагаются прямыми. Учет конечной величины поля позволяет несложно рассматривать дрейфовые неустойчивости, а обобщение на случай $H = 0$ и изотропной турбу-

лентности не представляет большого труда, и мы приведем лишь некоторые окончательные выражения для этих случаев.

§ 8.2. РАЗЛОЖЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ СОУДАРЕНИЙ ЧАСТИЦ И ТУРБУЛЕНТНЫХ ПУЛЬСАЦИЙ ПО ЭНЕРГИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Дрейфовое кинетическое уравнение, описывающее распределение центра ларморовских кружков в пределе $H \rightarrow \infty$ (т. е. в пренебрежении дрейфовыми эффектами в неоднородной плазме), имеет вид [307]

$$\frac{\partial f^{\alpha}}{\partial t} + v_z \frac{\partial f^{\alpha}}{\partial z} + \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} E \frac{\partial f^{\alpha}}{\partial v_z} = 0, \quad (8.3)$$

где v_z — скорость частицы, а E — компонента электрического поля вдоль H . Описанным выше путем получим систему уравнений для основного турбулентного состояния [индекс (0), $E_k^{R(0)} = 0$] и возмущения этого состояния [индекс (1)]

$$-i(\omega - k_z v_z) f_k^{T(0)\alpha} + \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} E_k^{T(0)} \frac{\partial f_k^{R(0)\alpha}}{\partial v_z} + \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \frac{\partial}{\partial v_z} \times \\ \times \int dk_1 dk_2 \delta(k - k_1 - k_2) (E_{k_1}^{T(0)} f_{k_2}^{T(0)\alpha} - \langle E_{k_1}^{T(0)} f_{k_2}^{T(0)\alpha} \rangle) = 0; \quad (8.4)$$

$$\left(1 + \frac{k_{\perp}^2 c^2}{c^2 k_z^2 - \omega^2}\right) E_k^{T(0)} = -\frac{4\pi i}{k_z} \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int f_k^{T(0)\alpha} dv_z; \quad (8.5)$$

$$-i(\omega - k_z v_z) f_k^{R(1)\alpha} + \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} E_k^{R(0)} \frac{\partial f_k^{R(0)\alpha}}{\partial v_z} = -\frac{\partial}{\partial v_z} \cdot \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \int dk_1 dk_2 \times \\ \times \delta(k - k_1 - k_2) (\langle E_{k_1}^{T(1)} f_{k_2}^{T(0)\alpha} + E_{k_1}^{T(0)} f_{k_2}^{T(1)\alpha} \rangle); \quad (8.6)$$

$$-i(\omega - k_z v_z) f_k^{T(1)\alpha} + \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} E_k^{T(1)} \frac{\partial f_k^{R(0)\alpha}}{\partial v_z} = - \\ -\frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \cdot \frac{\partial}{\partial v_z} \int dk_1 dk_2 \delta(k - k_1 - k_2) (E_{k_1}^{T(0)} f_{k_2}^{R(1)\alpha} + E_{k_1}^{R(0)} f_{k_2}^{T(0)\alpha} + \\ + E_{k_1}^{T(1)} f_{k_2}^{T(0)\alpha} + E_{k_1}^{T(0)} f_{k_2}^{T(1)\alpha} - \langle E_{k_1}^{T(1)} f_{k_2}^{T(0)\alpha} + E_{k_1}^{T(0)} f_{k_2}^{T(1)\alpha} \rangle); \quad (8.7)$$

$$\left(1 + \frac{k_{\perp}^2 c^2}{k_z^2 c^2 - \omega^2}\right) E_k^{T(1)} = -\frac{4\pi i}{k_z} \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int dv_z f_k^{T(1)\alpha}; \quad (8.8)$$

$$\left(1 + \frac{k_{\perp}^2 c^2}{k_z^2 c^2 - \omega^2}\right) E_k^{R(0)} = -\frac{4\pi i}{k_z} \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int dv_z f_k^{R(1)\alpha}. \quad (8.9)$$

Основное турбулентное состояние стационарно, т. е. $f_k^{R(0)\alpha} = \Phi^\alpha \delta(k)$, а спектр стационарной турбулентности I_k определяется из

$$\langle E_{k_1}^{T(0)} E_{k_2}^{T(0)} \rangle = I_{k_1} \delta(k_1 + k_2); \quad n_\alpha = \int \Phi^\alpha dv_z. \quad (8.10)$$

Частота линейных турбулентных пульсаций определяется дисперсионным уравнением

$$\Pi(k) = \Pi(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_0^{(e)}(\omega, \mathbf{k}) + \varepsilon_0^{(i)}(\omega, \mathbf{k}) - 1 + \frac{k_\perp^2 c^2}{k_z^2 c^2 - \omega^2} = 0; \quad (8.11)$$

$$\varepsilon_0^{(a)}(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \frac{4\pi e_a^2}{m_a k_z} \int dv_z \frac{\partial \Phi^a}{\partial v_z} \cdot \frac{1}{(\omega - k_z v_z + i\delta)}. \quad (8.12)$$

Для высокочастотных пульсаций, фазовые скорости которых много больше средних тепловых скоростей электронов, из (8.11), пренебрегая пространственной дисперсией, имеем

$$\omega^2 = \omega_{k_1, \pm}^2 = \frac{1}{2} [k_1^2 c^2 + \omega_{pe}^2 \pm \sqrt{(k_1^2 c^2 + \omega_{pe}^2)^2 - 4\omega_{pe}^2 k_{1z}^2 c^2}], \quad (8.13)$$

а величина I_{k_1} связана с введенной выше спектральной плотностью турбулентности W_{k_1} соотношением

$$I_{k_1} = 2\pi \sum_{s=\pm 1} \left[1 + \frac{k_{1\perp}^2 k_{1z}^2 c^4}{(k_{1z}^2 c^2 - \omega_{k_1, s}^2)^2} \right]^{-1} \times \\ \times \{W_{k_1}^s \delta(\omega - \omega_{k_1, s}) + W_{-k_1}^s \delta(\omega + \omega_{k_1, s})\}. \quad (8.14)$$

Для ленгмюровских пульсаций вдоль H имеем $\omega_{k_1} = \omega_{pe} + \frac{3k_1^2 v_{Te}^2}{2\omega_{pe}}$.

Ограничиваясь высокочастотными пульсациями, можно ионы трактовать линейно, в частности

$$\left. \begin{aligned} \dot{f}_k^{T(1)i} \\ \dot{f}_k^{R(1)i} \end{aligned} \right\} = \frac{e_i}{im_i (\omega - k_z v_z + i\delta)} \cdot \frac{\partial \Phi^i}{\partial v_z} \left\{ \begin{aligned} E_k^{T(1)} \\ E_k^R \end{aligned} \right\}. \quad (8.15)$$

Рассмотрим интеграл соударения электронов с турбулентными пульсациями, входящими в правую часть (8.6). Будем раскладывать этот интеграл по энергии турбулентности I_{k_1} или, что то же самое, по $E_{k_1}^{T(0)}$, учитывая $\langle E_{k_1}^{T(0)} \rangle = 0$. Ограничимся вначале членами, линейными по I_{k_1} . Тогда согласно вышеизложенному можно

ПОЛУЧИТЬ

$$-i(\omega - k_z v_z) f_k^{R(1)e} - \frac{e}{m_e} E_k^R \frac{\partial \Phi^e}{\partial v_z} = \frac{\partial}{\partial v_z} D_0 \frac{\partial f_k^{R(1)e}}{\partial v_z} + \frac{\partial}{\partial v_z} (E_k^R \hat{D} + D_1 + E_k^R D_2) \frac{\partial \Phi^e}{\partial v_z}; \quad (8.16)$$

$$D_0 = i \frac{e^2}{m_e^2} \int I_{k_1} dk_1 \frac{1}{(\omega + \omega_1 - (k_z + k_{1z}) v_z + i\delta)}; \quad (8.17)$$

$$\hat{D} = \frac{e^2}{m_e^2} \int I_{k_1} dk_1 \frac{1}{(\omega + \omega_1 - (k_z + k_{1z}) v_z + i\delta)} \times \times \frac{\partial}{\partial v_z} \cdot \frac{1}{(\omega_1 - k_{1z} v_z + i\delta)}; \quad (8.18)$$

$$D_1 = i \frac{e^2 \omega_{pe}^2}{m_e^2 n_0} \int \frac{I_{k_1} dk_1 (\omega - k_z v_z)}{\Pi(k + k_1)(k_z + k_{1z})(\omega_1 - k_{1z} v_z + i\delta)} \times \times \frac{1}{(\omega_1 + \omega_1 - (k_z + k_{1z}) v_z + i\delta)} \int dv'_z \frac{1}{(\omega + \omega_1 - (k_z + k_{1z}) v'_z + i\delta)} \cdot \frac{\partial f_k^{R(1)e}}{\partial v'_z}; \quad (8.19)$$

$$D_2 = - \frac{e^2 \omega_{pe}^2}{m_e^2 n_0} \int I_{k_1} dk_1 \frac{(\omega - k_z v_z)}{\Pi(k + k_1)(k_z + k_{1z})} \times \times \frac{1}{(\omega + \omega_1 - (k_z + k_{1z}) v_z + i\delta)} \int dv'_z \frac{1}{(\omega + \omega_1 - (k_z + k_{1z}) v'_z + i\delta)} \times \times \frac{\partial}{\partial v'_z} \cdot \frac{1}{(\omega_1 - k_{1z} v'_z - i\delta)} \cdot \frac{\partial}{\partial v'_z} \Phi^e(v'_z). \quad (8.20)$$

Различные члены интеграла соударений (8.16) имеют простой физический смысл. Коэффициент диффузии D_0 описывает изменение квазилинейных эффектов релаксации резонансных частиц, связанное с отклонением их распределения от равновесного Φ . Это утверждение верно при $\omega \ll \omega_1$, $k \ll k_1$. В отсутствие резонансных частиц, что является предметом рассмотрения в условиях $\omega \ll \omega_1$, $k \ll k_1$, два члена (8.14) сильно компенсируют друг друга и

$$D_0 = -i \frac{4\pi e^2}{m_e^2} (\omega - k_z v_z) \sum_{s=\pm 1} \int \frac{dk_1 W_{k_1}^s}{\omega_{k_1, s}^2}. \quad (8.21)$$

Сравнивая (8.21) с первым членом левой части (8.16), легко установить, что (8.21) имеет относительную малость $\frac{W}{n_0 T_e} \ll 1$ и должен быть отброшен. Член с \hat{D} в (8.16), описывающий изменение эф-

фктов индуцированного комptonовского рассеяния в тех же условиях, имеет малость $\frac{W}{n_0 T_e}$ относительно второго члена левой части (8.16). Коэффициент диффузии D_2 описывает нелинейное индуцированное рассеяние и D_1 — распадное взаимодействие*. Если наряду с $\omega \ll \omega_1$, $k \ll k_1$; $\frac{\omega_1}{k_1} \gg v_{Te}$ выполнено неравенство $\frac{\omega}{k} \ll \frac{\omega_1}{k_1}$, то D_2 мало в сравнении с D_1 , имеющим приближенный вид:

$$D_1 = -i(\omega - k_z v_z) n_k^{(1)e} d_1; \quad (8.22)$$

$$n_k^{(1)e} = \int f_k^R{}^{(1)e} dv_z;$$

$$d_1 = -\frac{\omega_{pe}^2}{n_0} \sum_{s=\pm 1} \frac{4\pi e^2}{m_e^2} \int \frac{dk_1}{(\omega - k v_{g, k_1}^s + i\delta)} \left(k \frac{\partial}{\partial k_1} \right) \frac{W_{k_1, s}^s}{\omega_{k_1, s}} \times$$

$$\times \left(\frac{\partial}{\partial \omega_1} \omega_1^2 \Pi(k_1) \right)_{\omega_1 = \omega_{k_1, s}}^{-2}, \quad (8.23)$$

$s = \pm 1$ соответствует двум знакам в (8.13), а $v_{g, k_1}^s = \frac{\partial}{\partial k_1} \omega_{k_1, s}$ — групповая скорость линейных спектров (8.13). Обратим внимание на наличие малого множителя $\Pi(k + k_1)$ в знаменателе (8.19). При получении (8.23) принято, что для линейных спектров (8.13) $\Pi(k_1) = 0$ и, следовательно, $\Pi(k_1 + k) \approx \left. \frac{\partial \Pi(k_1)}{\partial \omega_1} \right|_{\omega_1 = \omega_{k_1}}$ $(\omega - k v_{g, k_1})$.

Покажем вначале, как получить распадные неустойчивости. Они возникают, грубо говоря, при $\omega \gg v^T$, когда турбулентные соударения можно трактовать по теории возмущений. В уравнении

$$i(\omega - k_z v_z) f_k^R{}^{(1)e} = -\frac{e}{m_e} E_k^R \frac{\partial \Phi^e}{\partial v_z} + i n_k^{(1)e} d_1 \frac{\partial}{\partial v_z} (\omega - k_z v_z) \frac{\partial \Phi^e}{\partial v_z} \quad (8.24)$$

в первом приближении можно пренебречь членом с d_1 , найти $f_k^R{}^{(1)e}$ и подставить в $n_k^{(1)}$. Тогда при $k_z v_{Ti} \ll \omega \ll k_z v_{Te}$ легко получить $\Pi(k) = \varepsilon(k) + \frac{k_{\perp}^2 c^2}{k_z^2 c^2 - \omega^2} = 0$

$$\varepsilon(k) = 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{k_z^2 v_{Te}^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{k_z^2 v_{Te}^4} n_0 d_1, \quad (8.25)$$

что совпадает с нелинейной проницаемостью, описывающей распадные неустойчивости. Уравнение (8.24) допускает точное реше-

* Точнее, D_1 описывает такие турбулентные соударения, которые в условиях $\omega \gg \sqrt{T}$ являются распадными.

ние*

$$\varepsilon(k) = \varepsilon_0^{(i)}(k) + \frac{\varepsilon_0^{(e)}(k) - 1}{1 + k_z^2 n_0 (\varepsilon_0^{(e)}(k) - 1) d_1 / \omega_{pe}^2}. \quad (8.26)$$

В качестве примера, иллюстрирующего коренное изменение дисперсионных свойств плазмы в области низких частот, рассмотрим одномерную ленгмюровскую турбулентность $\omega_{k_1} = \omega_{pe} + \frac{3}{2} \frac{k_{1z}^2 v_{Te}^2}{\omega_{pe}}$, когда все пульсации направлены по H . Имеем

$$d_1 = -\frac{\omega_{pe}}{4n_0^2 m_e} \int_0^\infty dk_{1z} \frac{k_z \frac{\partial}{\partial k_{1z}} W_{k_{1z}}}{\omega - \frac{3v_{Te}^2 k_{1z} k_z}{\omega_{pe}} + i\delta}. \quad (8.27)$$

Если $\omega \gg k_z v_g$, то

$$d_1 \approx \frac{3k_z^2 v_{Te}^2}{4n_0^2 m_e \omega^2} W, \quad (8.28)$$

и при $k_z v_{Ti} \ll \omega \ll k_z v_{Te}$; $\varepsilon_0^{(i)}(k)$, $\varepsilon_0^{(e)}(k) \gg 1$ имеем

$$\varepsilon(k) \approx -\frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{k_z^2 v_{Te}^2} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{3W k_z^2}{4n_0 m_e \omega^2}\right)}; \quad (8.29)$$

$$\omega^2 = k_z^2 v_\pm^2; \quad v_\pm^2 = \frac{1}{2} v_s^2 \pm \sqrt{\frac{1}{4} v_s^4 + \frac{3W}{4n_0 m_e} v_s^2} \quad (8.30)$$

$$v_s = v_{Te} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}.$$

Решение со знаком минус аperiodически неустойчиво. Эта неустойчивость имеет сходство с той, которая найдена в работе [299] для холодных изотропных плазмонов.

Если $\omega \ll k_z v_g$ для всего турбулентного спектра (т. е. включая наименьшие v_g в спектре), то

$$d_1 = \frac{\omega_{pe}^2}{12n_0^2 m_e v_{Te}^2} \int \frac{W_{k_{1z}} dk_{1z}}{k_{1z}^2}, \quad (8.31)$$

* Оно находится формальным решением (8.24) относительно $f_k^{R(1)e}$ и составлением линейного уравнения для $n_k^{(1)e}$.

и в тех же условиях, что и (8.29), получим

$$\omega^2 = k_z^2 v_s^2 \left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{12n_0 T_e} \int \frac{W_{k_{1z}} dk_{1z}}{k_{1z}^2 v_{Te}^2} \right). \quad (8.32)$$

Решение (8.32) указывает на возможность существования звуковых колебаний в изотермической плазме, которые в отсутствие турбулентности сильно затухают из-за поглощения Ландау на ионах. Если $\frac{W}{n_0 T_e} \gg 12 \frac{v_{Te}^2}{v_p^2}$, где $v_p = \frac{\omega_{pe}}{k_{1z}}$ — фазовая скорость пульсаций, то скорость звука возрастает $\omega^2 = k^2 \tilde{v}_s^2$, где $\tilde{v}_s^2 \approx \frac{m_e}{12m_i} v_p^2 W/n_0 T_e$, а затухание на ионах становится экспоненциально малым $\sim \exp\{-W v_p^2/12v_{Te}^2 n_0 T_e\}$. Обнаруженный эффект имеет сходство с возможностью существования звука в плазме, находящейся в интенсивном ВЧ-поле [183]. Возможность возникновения изотермического звука (8.32) имеет порог по W . В силу $\omega \ll k_z v_g$ имеем $\frac{v_p^2}{v_{Te}^2} \ll \frac{9m_i}{m_e}$ и, следовательно, $\frac{W}{n_0 T_e} \gg \frac{4m_e}{3m_i}$.

В турбулентной плазме к оператору распространения плазмона $\Pi(k)$ [функция Грина $\Pi^{-1}(k)$] появляются нелинейные поправки, пропорциональные в первом приближении энергии турбулентности I_k и описывающие электромагнитную шубу плазмона. В отличие от обычной перенормировки зависимость $\Pi(k)$ от I_k представляет собой реальный эффект. Раскладывая в уравнениях (8.4) и (8.5) для соударений частиц и турбулентных пульсаций все величины по турбулентному полю $E_k^{T(0)}$, получаем

$$\begin{aligned} \Pi(k_1) I_{k_1} &= \frac{e^2}{m_e^2} I_{k_1} \int \tilde{\Sigma}_{k_1, k_2, k_1, -k_2} I_{k_2} dk_2 + \\ &+ \frac{e^2}{2m_e^2} \int dk_2 dk_3 \delta(k_1 - k_2 - k_3) I_{k_2} I_{k_3} |S_{k_1, k_2, k_3}|^2 \Pi^{-1}(-k_2 - k_3). \end{aligned} \quad (8.33)$$

Это уравнение аналогично (2.113). Здесь

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}^{k, k_1, k_2, k_3} &= \Sigma^{k, k_1, k_2, k_3} - S_{k, k_1, k-k_1} \times \\ &\times \Pi^{-1}(k - k_1) S_{k-k_1, k_2, k_3}; \end{aligned} \quad (8.34)$$

$$\begin{aligned} S_{k, k_1, k_2} &= \frac{\omega_{pe}^2}{n_0} \int dv_z \frac{d\Phi^e}{dv_z} (\omega - k_z v_z + i\delta)^{-1} \times \\ &\times (\omega_1 - k_{1z} v_z + i\delta)^{-1} (\omega_2 - k_{2z} v_z + i\delta)^{-1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k, k_1, k_2, k_3} = \frac{\omega_{pe}^2}{n_0} \int \frac{dv_z}{(\omega - k_z v_z + i\delta)^2} \left[\frac{2k_z}{(\omega - k_z v_z + i\delta)} + \right. \\ \left. + \frac{k_{2z} + k_{3z}}{(\omega_2 + \omega_3 - (k_{2z} + k_{3z})v_z + i\delta)} \right] (\omega_2 - k_{2z}v_z + i\delta)^{-1} \times \\ \times (\omega_3 - k_{3z}v_z + i\delta)^{-1} \frac{\partial \Phi^c}{\partial v_z}. \end{aligned}$$

Для нераспадной турбулентности, каковой является ленгмюровская, из (8.33) имеем вместо $\Pi(k) = 0$

$$\tilde{\Pi}(k_1) I_{k_1} = 0;$$

$$\tilde{\Pi}(k_1) = \Pi(k_1) - \frac{e^2}{m_e^2} \int I_{k_2} \tilde{\Sigma}_{k_1, k_2, k_1, -k_2} dk_2. \quad (8.35)$$

Заметим, что согласно (8.35) $\Pi(\omega_1, \mathbf{k}_1) \approx (\omega_1 - \omega_{k_1}) \frac{\partial \Pi(k_1)}{\partial \omega_1} \Big|_{\omega_1 = \omega_{k_1}} \neq 0$, а это означает, что множитель $\frac{1}{\Pi(k + k_1)}$ при $k \rightarrow 0$ не обладает резонансными свойствами. Отсюда можно заключить, что условие применимости результатов есть $\Pi(k_1) \ll \frac{\partial \Pi(k_1)}{\partial \omega_1} \Big|_{\omega_1 = \omega_{k_1}} |\omega - kv_{gk_1}|$, или, точнее, если учесть компенсацию положительно частотных и отрицательно частотных частей в (8.23) (малый фактор k/k_1),

$$\frac{k}{k_1} \max(\omega, kv_g) \gg |\omega_1 - \omega_{k_1}|. \quad (8.36)$$

Этот же критерий можно получить, если рассмотреть в интеграле соударений с турбулентными пульсациями члены следующего порядка по энергии турбулентности [308] ($\sim I_k^2$).

Применив критерий (8.36) для турбулентных звуковых колебаний (8.32), получим

$$\frac{W}{n_0 T_e} \cdot \frac{m_e}{54 m_i} \cdot \frac{v_D^4}{v_{Te}^4} \ll \frac{k^2}{k_1^2} \ll 1. \quad (8.37)$$

Это соответствует критерию пренебрежения нелинейной дисперсией и условию $\omega \ll kv_g$, при котором такие звуковые колебания возможны. Таким образом, звуковые турбулентные колебания (8.32) могут существовать в относительно широком диапазоне параметров, например для радиационной турбулентности (см. § 6.3).

Условия проявления неустойчивости (8.30) согласно критерию (8.36) весьма жесткие

$$\frac{12m_i}{m_e} \ll \frac{v_p^2}{v_{Te}^2} \ll \frac{9T_e m_i}{T_i m_e}; \quad T_e \gg T_i; \quad (8.38)$$

$$\frac{T_i m_e}{T_e m_i} \ll \frac{3W}{4n_0 T_e} \ll \frac{m_e}{m_i}.$$

Заметим, что ограничения, накладываемые (8.36), становятся менее жесткими для турбулентных пульсаций, разности частот которых больше, чем ленгмюровских. Это имеет место для непотенциальных пульсаций поперечных плазмонов.

§ 8.3. ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ СУММИРОВАНИЯ РЯДОВ ПО ЭНЕРГИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ИНТЕГРАЛЕ СОУДАРЕНИЙ ЧАСТИЦ И ТУРБУЛЕНТНЫХ ПУЛЬСАЦИЙ

Перенормированная групповая скорость плазмона, учитывающая нелинейную поправку к частоте, является физической величиной, и, следовательно, интеграл соударений частиц плазмы и турбулентных пульсаций должен содержать полную функцию Грина плазмона $\frac{1}{\tilde{\Pi}(k_1 + k)}$, а не $\frac{1}{\Pi(k_1 + k)}$, как в (8.19). Легко видеть, что при $k \rightarrow 0$ $\tilde{\Pi}(k + k_1)$ имеет порядок I_k , и, следовательно, все члены такого порядка должны быть учтены. В настоящем параграфе мы будем раскладывать интеграл соударений частиц и турбулентных пульсаций по малому параметру $\frac{W}{n_0 T_e} \ll 1$ и учитывать, например, лишь первый член разложения по этому параметру. Однако будем считать, что $\tilde{\Pi}(k_1 + k)$ имеет в первом приближении малость порядка I_k .

Составим уравнение для ядер интеграла соударений частиц и турбулентных пульсаций. Покажем, что такое уравнение естественным образом может быть получено в рамках предположения о слабой корреляции полей $E_k^{T(0)}$ между собой и с полем возмущения $E_k^{T(1)}$ (т. е. в предположении, обычно используемом в теории слабой турбулентности). Удобно записать уравнение (8.6) в несколько иной форме. Вводя величины

$$\begin{aligned} \tilde{f}_k^{T(1)\alpha} &= f_k^{T(1)\alpha} - \frac{e_\alpha E_k^{T(1)} \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial v_z}}{m_\alpha i(\omega - k_z v_z + i\delta)}; \\ \tilde{f}_k^{T(0)\alpha} &= f_k^{T(0)\alpha} - \frac{e_\alpha E_k^{T(0)} \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial v_z}}{m_\alpha i(\omega - k_z v_z + i\delta)}, \end{aligned} \quad (8.39)$$

ИМЕЕМ

$$\begin{aligned}
 & -i(\omega - k_z v_z) f_k^R (1)^\alpha + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} E_k^R \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial v_z} - \frac{\partial}{\partial v_z} \langle D^* \rangle \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial v_z} = \\
 & = -\frac{\partial}{\partial v_z} \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \int dk_1 dk_2 \delta(k - k_1 - k_2) \langle E_{k_1}^T (1) \tilde{f}_{k_2}^T (0)^\alpha + E_{k_1}^T (0) \tilde{f}_{k_2}^T (1)^\alpha \rangle;
 \end{aligned} \tag{8.40}$$

$$\Pi(k) E_k^T (1) + \frac{4\pi i}{k_z} \sum_\alpha e_\alpha \int \tilde{f}_k^T (1)^\alpha dv_z = 0; \tag{8.41}$$

$$\begin{aligned}
 & -i(\omega - k_z v_z) \tilde{f}_k^T (1)^\alpha + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \int dk_1 dk_2 \delta(k - k_1 - k_2) \times \\
 & \times E_{k_1}^T (0) \frac{\partial}{\partial v_z} f_{k_2}^R (1)^\alpha - \frac{\partial}{\partial v_z} (D^* - \langle D^* \rangle) \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial v_z} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \frac{\partial}{\partial v_z} \times \\
 & \times \int dk_1 dk_2 \delta(k - k_1 - k_2) \{ E_{k_1}^R f_{k_2}^T (0)^\alpha + E_{k_1}^T (1) \tilde{f}_{k_2}^T (0)^\alpha + \\
 & + E_{k_1}^T (0) \tilde{f}_{k_2}^T (1)^\alpha - \langle E_{k_1}^T (1) \tilde{f}_{k_2}^T (0)^\alpha + E_{k_1}^T (0) \tilde{f}_{k_2}^T (1)^\alpha \rangle = 0;
 \end{aligned} \tag{8.42}$$

$$\begin{aligned}
 & -i(\omega - k_z v_z) \tilde{f}_k^T (0)^\alpha = -\frac{e_\alpha \partial}{m_\alpha \partial v_z} \int dk_1 dk_2 \delta(k - k_1 - k_2) \times \\
 & \times (E_{k_1}^T (0) f_{k_2}^T (0)^\alpha - \langle E_{k_1}^T (0) f_{k_2}^T (0)^\alpha \rangle).
 \end{aligned} \tag{8.42a}$$

Здесь

$$D^* = i(\omega - k_z v_z) \frac{e_\alpha^2}{m_\alpha^2} \int \frac{dk_1 dk_2 \delta(k - k_1 - k_2) E_{k_1}^T (0) E_{k_2}^T (1)}{(\omega_1 - k_{1z} v_z + i\delta)(\omega_2 - k_{2z} v_z + i\delta)}. \tag{8.43}$$

Из (8.40) можно усмотреть, что при малых частотах ($k \rightarrow 0$) интеграл соударений, содержащий D^* , много больше остальных, отнесенных к правой части (8.40). Действительно, при $k \rightarrow 0$, $k_2 \rightarrow -k_1$ и в силу того, что $E_{k_1}^T (0)$ близко к линейному полю, получим, что $E_{k_2}^T (1)$, которое в силу (8.41) содержит $\frac{1}{\Pi(k_2)}$, есть большая величина. В правой части (8.40) $\tilde{f}_k^T (1)$ не содержит указанного больше множителя, а $\tilde{f}_k^T (0)^\alpha$ согласно (8.42a) является нелинейным по $E_k^T (0)$, т. е. $\langle E_{k_1}^T (1) \tilde{f}_{k_2}^T (0)^\alpha \rangle$ пропорционально более высоким степеням энергии турбулентности.

Поэтому начнем вычисления с составления уравнения для D^* . Правая часть (8.40) ниже не используется, однако мы покажем, что использование тех же методов при известном $\langle D^* \rangle$ позволяет вычислить также эти интегралы. Из (8.41) и (8.42) можно составить

выражения для $\langle E_{k_1}^{T(0)} E_{k_2}^{T(1)} \rangle$

$$\begin{aligned}
 & \Pi(k_2) \langle E_{k_1}^{T(0)} E_{k_2}^{T(1)} \rangle + i \frac{e}{m_e} \int dk'_1 dk'_2 \delta(k_2 - k'_1 - k'_2) \times \\
 & \times S_{k_2, k'_1, k'_2} \langle E_{k_1}^{T(0)} E_{k'_1}^{T(0)} E_{k'_2}^{T(1)} \rangle + \frac{\omega_{pe}^2}{n_0 k_{2z}} \int \frac{dv_z dk'_1 dk'_2}{(\omega_2 - k_{2z} v_z)} \times \\
 & \times \delta(k_2 - k'_1 - k'_2) \frac{\partial}{\partial v_z} \left(\langle f_{k'_1}^{T(0)e} E_{k_1}^{T(0)} E_{k'_2}^{T(1)} \rangle + \right. \\
 & \left. + \langle E_{k_1}^{T(0)} E_{k'_1}^{T(0)} f_{k'_2}^{T(1)e} \rangle \right) = - \frac{\omega_{pe}^2}{n_0} \int I_{k_1} \frac{\delta(k_1 + k_2 - k') dk'}{k_{2z} (\omega_2 - k_{2z} v_z + i\delta)} \times \\
 & \times \frac{\partial f_{k'}^{R(1)e}}{\partial v_z} dv_z - \frac{\omega_{pe}^2}{n_0 k_{2z}} \int \frac{dv_z dk'_1 dk'_2}{(\omega_2 - k_{2z} v_z + i\delta)} \cdot \frac{\partial}{\partial v_z} \times \\
 & \times \langle E_{k_1}^{T(0)} f_{k'_2}^{T(0)} \rangle E_{k_1}^R \delta(k_2 - k'_1 - k'_2) \equiv G. \quad (8.44)
 \end{aligned}$$

Правая часть (8.44) не содержит $E_k^{T(1)}$ и может быть вычислена стандартным образом при помощи (8.42а) как сумма по степеням I_{k_1} . В первом приближении она имеет вид

$$\begin{aligned}
 G &= - \frac{\omega_{pe}^2 I_{k_1}}{n_0 k_{2z}} \int \frac{dv_z dk' \delta(k_1 + k_2 - k')}{(\omega_2 - k_{2z} v_z + i\delta)} \times \\
 & \times \left(\frac{\partial f_{k'}^{R(1)e}}{\partial v_z} - \frac{e}{m_e} i E_{k'}^R \cdot \frac{\partial}{\partial v_z} \frac{1}{(\omega_1 - k_{1z} v_z + i\delta)} \cdot \frac{\partial \Phi^e}{\partial v_z} \right). \quad (8.45)
 \end{aligned}$$

Для преобразования среднего $\langle E_{k_1}^{T(0)} E_{k_1}^{T(0)} E_{k_2}^{T(1)} \rangle$ в среднее от четырех E_k^T используем предположение о слабой корреляции полей. Для выражения $E_{k_1}^{T(0)}$ через квадратичные комбинации полей следует использовать

$$\begin{aligned}
 \Pi(k_1) E_{k_1}^{T(0)} &= \frac{ie}{2m_e} \int dk_2 dk_3 \delta(k_1 - k_2 - k_3) S_{k_1, k_2, k_3} \times \\
 & \times (E_{k_2}^{T(0)} E_{k_3}^{T(0)} - \langle E_{k_2}^{T(0)} E_{k_3}^{T(0)} \rangle), \quad (8.46)
 \end{aligned}$$

а для $E_{k_1}^{T(1)}$ — соотношение, получающееся из (8.41), (8.42), если ограничиться линейными и квадратичными членами по $E_k^{T(1)}$ и $E_k^{T(0)}$. Линейные члены в этом соотношении содержат лишь $E_k^{T(0)}$ и в $\langle E_k^{T(0)} E_{k_1}^{T(0)} E_{k_2}^{T(1)} \rangle$ они дадут члены $\sim I_k^2$, которые должны быть отнесены к правой части (8.44) (не зависящей от $E_k^{T(1)}$) и в приближении (8.45) отброшены. Поэтому уточнение $E_k^{T(1)}$

можно сделать с помощью соотношения

$$-\Pi(k) \frac{e}{m_e} E_k^{T(1)} = \frac{\omega_{pe}^2}{n_0 k_z} \int \frac{dv_z}{(\omega - k_z v_z)} \cdot \frac{\partial}{\partial v_z} (D^* - \langle D^* \rangle) \frac{\partial \Phi^e}{\partial v_z}. \quad (8.47)$$

Аналогичные соображения приводят к тому, что при вычислении $\langle \tilde{f}_{k_2}^{T(1)e} E_{k_1}^{T(0)} E_{k_1'}^{T(0)} \rangle$ можно для $\tilde{f}_k^{T(1)e}$ записать соотношение

$$-i(\omega - k_z v_z) \tilde{f}_k^{T(1)e} = \frac{\partial}{\partial v_z} (D^* - \langle D^* \rangle) \frac{\partial \Phi^e}{\partial v_z}. \quad (8.48)$$

Наконец, при вычислении $\langle \tilde{f}_k^{T(0)} E_{k_1}^{T(0)} E_{k_1'}^{T(1)} \rangle$ достаточно использовать первое приближение для $f_k^{T(0)}$ из (8.42). В результате этих расчетов левая часть (8.44) приводится к виду, содержащему лишь средние от четырех турбулентных полей, которые приближенно можно разбить на возможные произведения от средних двух полей. Получаем

$$\begin{aligned} G = & \tilde{\Pi}(k_2) \langle E_{k_1}^{T(0)} E_{k_2}^{T(1)} \rangle - \frac{e^2}{m_2^2} I_{k_1} \int dk_2' dk_2'' \times \\ & \times \delta(k_1 + k_2 - k_2' - k_2'') \tilde{\Sigma}_{k_2, k_2', -k_1, k_2''} \left(\langle E_{k_2'}^{T(0)} E_{k_2''}^{T(1)} + E_{k_2''}^{T(0)} E_{k_2'}^{T(1)} \rangle \right) + \\ & + \frac{e^2}{m_e^2} \int dk_2' dk_2'' \delta(k_1 + k_2 - k_2' - k_2'') S_{k_2, k_2' - k_1, k_2''} \times \\ & \times I_{k_2' - k_1} \frac{1}{\Pi(k_1)} S_{k_1, -k_2' + k_1, k_2''} \langle E_{k_2''}^{T(0)} E_{k_2'}^{T(1)} \rangle. \end{aligned} \quad (8.49)$$

Заметим, что в (8.49) автоматически возник оператор $\tilde{\Pi}(k_2)$ и дополнительные члены $\sim I_k$, которые имеют тот же порядок, что и $\Pi(k_2)$ или $\tilde{\Pi}(k_2)$. Для нераспадной турбулентности последний член (8.49) равен нулю и искомого уравнение приобретает вид

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}(k - k_1) \langle E_{k_1}^{T(0)} E_{k - k_1}^{T(1)} \rangle = & - \frac{\omega_{pe}^2 I_{k_1}}{n_0 (k_z - k_{1z})} \int dv_z \frac{1}{\omega - \omega_1 - (k_z - k_{1z}) v_z + i\delta} \times \\ & \times \left(\frac{\partial f_k^{R(1)e}}{\partial v_z} + i \frac{e}{m_e} E_k^R \frac{\partial}{\partial v_z} \frac{1}{(\omega_1 - k_{1z} v_z + i\delta)} \cdot \frac{\partial \Phi^e}{\partial v_z} \right) + \\ & + \frac{e^2}{m_e^2} I_{k_1} \int dk_1' \langle E_{k_1'}^{T(0)} E_{k - k_1}^{T(1)} \rangle \left[\tilde{\Sigma}_{k - k_1, k_1', -k_1, k - k_1'} + \right. \\ & \left. + \tilde{\Sigma}_{k - k_1, k - k_1', -k_1, k_1'} \right]. \end{aligned} \quad (8.50)$$

Если интегральное уравнение (8.50) решено, то легко находится и интеграл столкновений, содержащий D^* . Наконец, интеграл столкновений в правой части (8.40), содержащий $\langle E_{k_1}^{T(1)} \tilde{f}_{k_2}^{T(0)\alpha} \rangle$, имеет порядок $\frac{W}{n_0 T_e}$ относительно члена с D^* .

Решим полученное интегральное уравнение в предельном случае $|\omega_1 - \omega'_1| \ll |k_{1z} - k'_{1z}| v_{Ti}$; $\omega_1 \ll k_{1z} v_{Ti}$, который соответствует для рассмотренного выше примера одномерной ленгмюровской турбулентности $v_p \gg \frac{3v_{Te}^2}{v_{Ti}}$, т. е. пределу, в котором отсутствует область применимости результатов, получаемых при разложении интеграла соударений по I_k . Из (8.34) имеем

$$\sum_{k-k_1, k'_1, -k_1, k-k'_1} \approx - \frac{\omega_{pe}^2 T_e}{(T_e + T_i) v_{Te}^2 \omega_1 \omega'_1 (\omega_1 - \omega) (\omega'_1 - \omega)}. \quad (8.51)$$

Этот результат имеет место, если знаки частот ω_1 и ω'_1 противоположны, в случае одинаковых знаков ω_1 и ω'_1 (8.51) равно нулю. Величина $\sum_{k-k_1, k-k'_1, -k_1, k'_1}$ не нуль при одинаковых знаках ω_1 и ω'_1 и равна (8.51). Разделим (8.50) на $\tilde{\Pi}(k-k_1)$ и составим уравнения для

$$S_{\pm}(k) = \int \frac{\langle E_{k_1}^{T(0)} E_{k-k_1}^{T(1)} \rangle}{\omega_1 (\omega_1 - \omega)} dk_{1,\pm}, \quad (8.52)$$

где в S_+ интегрирование распространяется на область положительных частот, а в S_- — отрицательных. Для S_{\pm} получаем линейную алгебраическую систему уравнений, решение которой имеет вид

$$\begin{aligned} S_+(k) + S_-(k) = & - \left[1 + \frac{\omega_{pe}^4}{4\pi n_0 (T_e + T_i)} \int \frac{I_{k_1} dk_1}{\omega_1^2 (\omega_1 + \omega)^2 \tilde{\Pi}(k_1 + k)} \right]^{-1} \times \\ & \times \frac{\omega_{pe}^2}{n_0} \int \frac{I_{k_1} dk_1}{\tilde{\Pi}(k_1 + k) (k_{1z} + k_z)} \int dv_z \frac{1}{(\omega_1 + \omega - (k_{1z} + k_z) v_z + i\delta)} \times \\ & \times \left[\frac{\partial f_k^{R(1)e}}{\partial v_z} + i \frac{e}{m_e} E_k^R \frac{\partial}{\partial v_z} \frac{1}{(\omega_1 - k_{1z} v_z + i\delta)} \cdot \frac{\partial \Phi^e}{\partial v_z} \right]. \quad (8.53) \end{aligned}$$

Здесь интегрирование распространено на всю область частот. С необходимой точностью

$$\langle D^* \rangle = -i (\omega - k_z v_z) \frac{e^2}{m_e^2} (S_+(k) + S_-(k)), \quad (8.54)$$

это позволяет получить коэффициенты D_1 и D_2 в уравнении (8.16). Например,

$$D_1 = -i \frac{\omega_{pe}^2}{n_0} (\omega - k_z v_z) n_k^{(1)} \frac{e^2}{m_e^2} \int I_{k_1} dk_1 \frac{1}{\tilde{\Pi}(k_1+k) \omega_1 (\omega_1+\omega)^3} \times \\ \times \left[1 + \frac{\omega_{pe}^4}{4\pi n_0 (T_e + T_i)} \int \frac{I_{k_1} dk_1}{\omega_1^2 (\omega_1+\omega)^2 \tilde{\Pi}(k_1+k)} \right]^{-1}. \quad (8.55)$$

Это выражение отличается от полученного выше путем разложения по I_k тем, что в знаменателе стоит выражение, отличное от единицы, а в числителе функция Грина плазмона $\frac{1}{\tilde{\Pi}(k)}$ заменена $\tilde{\Pi}^{-1}(k)$. Результат, таким образом, сводится к перенормировке пропагатора плазмона и перенормировке эффективного заряда электрона. Знаменатель, аналогичный знаменателю (8.55), входит также в D_2 , и оценка $\frac{D_2}{D_1} \ll 1$, полученная выше при $\frac{\omega}{k} \ll \frac{\omega_1}{k_1}$, $\omega \ll \omega_1$, $k \ll k_1$, сохраняется и в данном случае. Из (8.55), (8.16) получим диэлектрическую проницаемость

$$\varepsilon(k) = \varepsilon_0^{(i)}(k) + (\varepsilon_0^{(e)}(k) - 1) \left(1 + \frac{n_0 m_e}{T_e + T_i} d_2 \right) \times \\ \times \left(1 + \frac{(\varepsilon_0^{(e)}(k) - 1) n_0 k_z^2}{\omega_{pe}^2} d_1 + \frac{n_0 m_e}{T_e + T_i} d_2 \right)^{-1}; \quad (8.56)$$

$$d_1 = \frac{e^2 \omega_{pe}^2}{m_e^2 n_0} \int \frac{I_{k_1} d k_1}{\tilde{\Pi}(k+k_1) \omega_1 (\omega_1+\omega)^3}; \\ d_2 = \frac{e^2 \omega_{pe}^2}{m_e^2 n_0} \int \frac{I_{k_1} dk_1}{\tilde{\Pi}(k_1+k) \omega_1^2 (\omega_1+\omega)^2}. \quad (8.57)$$

Рассмотрим, например, одномерную ленгмюровскую турбулентность. В области $v_p \gg \frac{3v_{Te}^2}{v_{Ti}}$ групповые скорости плазмонов не меняются. Поэтому в (8.57) $\tilde{\Pi}$ можно заменить Π . Далее в пределе $\omega \ll \omega_1$, $k \ll k_1$, $\frac{\omega}{k} \ll \frac{\omega_1}{k_1}$ получим $d_2 \approx d_1$ и равным (8.23). В пределе $\omega \gg k_z v_g$, d_1 совпадает с (8.28). Если еще $k_z v_{Ti} \ll \omega \ll k_z v_{Te}$, то (8.56) дает

$$\varepsilon(k) = -\frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{k_z^2 v_{Te}^2} \left(1 + \frac{3k_z^2 W T_e}{4\omega^2 n_0 m_e (T_e + T_i)} \right) \times \\ \times \left(1 + \frac{3k_z^2 W (2T_e + T_i)}{4\omega^2 n_0 m_e (T_e + T_i)} \right)^{-1}; \quad (8.58)$$

$$\omega^2 = k_z^2 \tilde{v}_\pm^2; \quad \tilde{v}_\pm^2 = \frac{1}{2} \left(v_s^2 - v_\sim^2 \frac{T_e}{T_e + T_i} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(v_s^2 - v_\sim^2 \frac{T_e}{T_e + T_i} \right)^2 + v_\sim^2 v_s^2 \frac{2T_e + T_i}{T_e + T_i}}. \quad (8.59)$$

Здесь $v_\sim^2 = \frac{3W}{4n_0 m_e}$. Неустойчивость (8.59) качественно отлична от (8.30). При $v_\sim^2 \gg v_s^2$ квадрат инкремента (8.59) пропорционален W . Наконец, при $\omega \ll k_z v_{Ti}$, $\omega \ll k_z v_g$ получим

$$\omega^2 = -2k_z^2 v_\sim^2 \frac{T_e + T_i}{T_e}. \quad (8.60)$$

§ 8.4. ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ ИЗОТРОПНОЙ ТУРБУЛЕНТНОЙ ПЛАЗМЫ

Считая $H=0$, предположим, что в плазме установилась стационарная турбулентность на ленгмюровских частотах

$$\omega_k^l = \omega_{pe} + \frac{3k^2 v_{Te}^2}{2\omega_{pe}}. \quad (8.61)$$

Уравнение для возмущенной функции распределения $f_k^{R(1)}$, заменяющее (8.16), приобретает вид

$$-i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) f_k^{R(1)} + \mathbf{F}_k^R \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial}{\partial v_i} D_{ij}^{(0)} \frac{\partial}{\partial v_j} f_k^{R(1)} + F_{k,j}^R \frac{\partial}{\partial v_i} \hat{D}_{ijl} \frac{\partial}{\partial v_l} \Phi + \frac{\partial}{\partial v_i} (D_{ij,1} + D_{ij,2}) \frac{\partial}{\partial v_j} \Phi; \quad (8.62)$$

$$\mathbf{F}_k^R = \frac{-e}{m_e} (\mathbf{E}_k^R + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}_k^R]) = \frac{-e}{m_e} \left(\mathbf{E}_k^R \left(1 - \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{\omega} \right) + \frac{\mathbf{k}}{\omega} (\mathbf{v} \mathbf{E}_k^R) \right). \quad (8.63)$$

Причем выражения для коэффициентов D_{ij} имеют вид

$$D_{ij,1} = i \frac{\omega_{pe}^2}{n_0} \int \frac{I_{k_1} dk_1}{\varepsilon_{k_1 - k}} \left[\frac{-k_1 i (k_j - k_{1j})}{k_1^2 (k_1 - k)^2} \cdot \frac{1}{(\omega_1 - \omega - (k_1 - k) \mathbf{v} - i\delta)} + \frac{k_{1j} (k_i - k_{1i})}{k_1^2 (k_1 - k)^2} \cdot \frac{1}{(\omega_1 - k_1 \mathbf{v} + i\delta)} \right] \int \frac{dv'}{(\omega_1 - \omega - (k_1 - k) \mathbf{v}' - i\delta)} \times \left(\mathbf{k} \frac{\partial f_k^{R(1)}(p')}{\partial \mathbf{v}'} \right) \frac{e^2}{m_e^2}; \quad n = \int \Phi d\mathbf{v} \quad (8.64)$$

$$D_{ij, 2} = -\frac{\omega_{pe}^2}{n_0} \int \frac{I_{k_1} dk_1}{\varepsilon_{k_1-k}} \left[\frac{k_{1i} (k_{1j} - k_j)}{\omega_1 - \omega - (k_1 - k)v - i\delta} - \frac{k_{1j} (k_{1i} - k_i)}{\omega_1 - k_1 v + i\delta} \right] \times$$

$$\times \frac{1}{k_1^2 (k_1 - k)^2} \int \frac{dv'}{(\omega_1 - \omega - (k_1 - k)v' - i\delta)} \left(F_k^R \frac{\partial}{\partial v'} \right) \times$$

$$\times \frac{1}{\omega_1 - k_1 v' - i\delta} \left(k_1 \frac{\partial}{\partial v'} \right) \Phi(v') \frac{e^2}{m_e^2}; \quad (8.65)$$

$$D_{ij}^{(0)} = -\int \frac{I_{k_1} dk_1 k_{1i} k_{1j} (\omega - kv) k_{1j} e^2 / m_e^2}{k_1^2 (\omega_1 - \omega - (k - k_1)v - i\delta) (\omega_1 + \omega - (k_1 + k)v + i\delta)}; \quad (8.66)$$

$$\hat{D}_{ijl} = -\int \frac{I_{k_1} dk_1 k_{1i} k_{1l} e^2 / m_e^2}{k_1^2 (\omega_1 - \omega - (k_1 - k)v - i\delta)} \cdot \frac{\partial}{\partial v_j} \cdot \frac{1}{(\omega_1 - k_1 v - i\delta)}; \quad (8.67)$$

$$\langle E_{k_1}^T E_{k_2}^{T(0)} \rangle = -I_{k_1} \delta(k_1 + k_2);$$

$$E_k^T = \frac{k}{k} E_k^T. \quad (8.68)$$

Приближенные выражения для коэффициентов диффузии $D_{ij, 1}$, $D_{ij, 2}$ в области $\omega \ll \omega_{k_1}$ и $k \ll k_1$ имеют вид

$$D_{ij, 1} = i(\omega - kv) \frac{n_k^{(1)}}{n_0} \cdot \frac{\pi e^2}{m_e^2} \int dk_1 \frac{k_{1i} k_{1j}}{k_1^2} \times$$

$$\times \frac{1}{\omega - kv_{g, k_1} + i\delta} \left(k \frac{\partial}{\partial k_1} \right) \frac{W_{k_1}}{\omega_{pe}}; \quad (8.69)$$

$$D_{ij, 2} = \frac{6\pi e^3}{m_e^3 \omega_{pe}^3} (\omega - kv) \int dk_1 \frac{k_{1i} k_{1j} (k_1 E_k^R) W_{k_1}}{k_1^2 (\omega - kv_{gk_1} + i\delta)} +$$

$$+ \frac{\pi e^3}{m_e^3 \omega \omega_{pe}} \int dk_1 \frac{k_{1i} k_{1j}}{k_1^4} k^2 (\omega - kv) \frac{(k_1 E_k^{Rt}) \left(k \frac{\partial}{\partial k_1} \right) \frac{W_{k_1}}{\omega_{pe}}}{\omega - kv_{g, k_1} + i\delta}, \quad (8.70)$$

где

$$E_k^{Rt} = E_k^R - \frac{k (\overline{k E_k^R})}{k^2}.$$

Введем следующие обозначения:

$$D_{ij, 1} = -i(\omega - kv) d_{ij} n_k^{(1)}; \quad (8.71)$$

$$D_{ij, 2} = (\omega - kv) \frac{e}{m_e} d_{ijl} E_{k, l}^R. \quad (8.72)$$

Ограничиваясь здесь учетом $D_{ij, 1}$ и $D_{ij, 2}$, так как остальные коэффициенты дают пренебрежимо малый вклад при $\frac{W}{nT} \ll 1$, получим

$$f_k^{R(1)} = \frac{1}{i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})} \left(\mathbf{F}_k^R \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) \Phi + \frac{1}{i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})} \frac{\partial}{\partial v_i} (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) \times \\ \times \frac{\partial \Phi}{\partial v_j} \left(i d_{ij} n_k^{(1)} - \frac{e}{m_e} d_{ijl} E_{k,l}^R \right). \quad (8.73)$$

Отсюда имеем для $n_k^{(1)}$

$$n_k^{(1)} = \int f_k^{R(1)} d\mathbf{v} = \int \frac{d\mathbf{v}}{i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\delta)} \left\{ \left(\mathbf{F}_k^R \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{v}} \right) - \frac{e}{m_e} E_{k,l}^R d_{ijl} \frac{\partial}{\partial v_i} \times \right. \\ \left. \times (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) \frac{\partial \Phi}{\partial v_j} \right\} \left\{ 1 - d_{ij} \int \frac{d\mathbf{v}}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\delta)} \frac{\partial}{\partial v_i} (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) \frac{\partial \Phi}{\partial v_j} \right\}^{-1}. \quad (8.74)$$

Из (8.74) легко находим ток

$$j_{k,i}^{(1)R} = - \int e v_i f_k^{R(1)} d\mathbf{v} = \frac{(\varepsilon_{ij}^{(e)} - \delta_{ij})\omega}{4\pi i} E_{k,j}^R; \\ F_{kl}^{(R)} = \left[\delta_{ls} \left(1 - \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{\omega} \right) + \frac{k_l v_s}{\omega} \right] E_{k,s}^R. \quad (8.75)$$

И, следовательно, выражение для диэлектрической проницаемости плазмы

$$\varepsilon_{ij}^{(e)} = \delta_{ij} + \frac{4\pi e^2}{\omega m_e} \int \frac{v_i \left[\delta_{lj} \left(1 - \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{\omega} \right) + \frac{k_l v_j}{\omega} \right] \frac{\partial \Phi}{\partial v_l} dv}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\delta} + \\ + \frac{4\pi e^2}{m_e \omega} \int \frac{v_i dv}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\delta} \cdot \frac{\partial}{\partial v_l} (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) \frac{\partial \Phi}{\partial v_s} \left\{ d_{ls} \int \frac{dv'}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}' + i\delta} \times \right. \\ \times \left[\left(\delta_{mj} \left(1 - \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}'}{\omega} \right) + \frac{k_m v'_j}{\omega} \right) \frac{\partial \Phi(\mathbf{v}')}{\partial v'_m} + d_{mnj} \frac{\partial}{\partial v'_m} (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}') \times \right. \\ \left. \left. \times \frac{\partial \Phi(\mathbf{v}')}{\partial v'_n} \right] \left[1 - d_{rp} \int \frac{dv''}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}'' + i\delta} \cdot \frac{\partial}{\partial v''_r} (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}'') \frac{\partial \Phi(\mathbf{v}'')}{\partial v''_p} \right]^{-1} + d_{lsj} \right\}. \quad (8.76)$$

Особенно простое выражение получается для продольной диэлектрической проницаемости $\varepsilon^l = \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon_{ij}$, которая определяет коле-

$$\varepsilon^{l(e)} = 1 + \frac{4\pi e^2}{m_e k^2} \frac{\int \frac{dv}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\delta} (k_j - k_i k_l d_{ijl}) \frac{\partial \Phi}{\partial v_j}}{1 + \int \frac{dv}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\delta} (k_i d_{ij}) \frac{\partial \Phi}{\partial v_j}}. \quad (8.77)$$

Эта диэлектрическая проницаемость описывает потенциальные колебания турбулентной плазмы.

В том случае, когда частицы и турбулентные пульсации распределены изотропно, можно говорить о поперечных возмущениях в турбулентной плазме. Диэлектрическая проницаемость

$\varepsilon^{t(e)} = \frac{\text{Sp } \varepsilon_{ij}^{(e)} - \varepsilon^{l(e)}}{2}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon^{t(e)} = & 1 + \frac{2\pi e^2}{m_e \omega} \int \frac{dv}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\delta} \left\{ \left(\mathbf{v} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{v}} \right) \left(1 - \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{\omega} \right) + \frac{v^2}{\omega} \left(\mathbf{k} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{v}} \right) - \right. \\ & \left. - k_m v_j d_{msj} \frac{\partial \Phi}{\partial v_s} \right\} - \frac{2\pi e^2}{m_e} \left[1 + \int \frac{dv' k_i d_{ij}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}' + i\delta} \cdot \frac{\partial \Phi(\mathbf{v}')}{\partial v'_j} \right]^{-1} \times \\ & \times \left\{ \frac{1}{k^2} \int \frac{dv}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\delta} (k_j - k_i k_l d_{ijl}) + \frac{1}{\omega} \int \frac{dv''}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}'' + i\delta} \times \right. \\ & \times \left[\frac{\partial \Phi(\mathbf{v}'')}{\partial v''} \left(1 - \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}''}{\omega} \right) + \frac{v_j''}{\omega} \left(\mathbf{k} \frac{\partial \Phi(\mathbf{v}'')}{\partial \mathbf{v}''} \right) - k_m d_{mnj} \frac{\partial \Phi(\mathbf{v}'')}{\partial v_n''} \right] \times \\ & \left. \times \int \frac{v_j k_l dv}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\delta} \frac{\partial}{\partial v_l} \Phi \right\}. \quad (8.78) \end{aligned}$$

Предельное выражение для $\varepsilon^{t(e)}$ при $\omega \ll kv_{Te}$, $\varepsilon^{t(e)} \gg 1$ имеет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon^{t(e)} = & i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\omega_{pe}^2}{\omega kv_{Te}} \left\{ 1 - \frac{k_m d_{msj}}{2} \left[\delta_{sj} - \frac{k_s k_j}{k^2} - \left(\delta_{jl} - \frac{k_j k_l}{k^2} \right) \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \frac{k_s k_i d_{il} n_0}{k^2 v_{Te}^2} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{k_i k_j d_{ij} n_0}{k^2 v_{Te}^2} \right)} \right] \right\}. \quad (8.79) \end{aligned}$$

При изотропии в распределении волн коэффициенты d_{ij} и $k_m d_{mij}$ могут быть лишь комбинациями тензоров δ_{ij} и $\frac{k_i k_j}{k^2}$

$$d_{ij} = d^t \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) + d^l \frac{k_i k_j}{k^2}; \quad (8.80)$$

$$k_m d_{mij} = \Delta^t \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) + \Delta^l \frac{k_i k_j}{k^2}. \quad (8.81)$$

Имеем

$$\varepsilon^t(e) \simeq i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega k v_{Te}} (1 - \Delta^t). \quad (8.82)$$

Общие выражения для коэффициентов Δ^t имеют вид

$$\Delta^t = \Delta_1^t + \Delta_2^t;$$

$$\Delta_1^t = \frac{1}{4n_0 m_e v_{Te}^2} \int dk_1 \left(1 - \frac{(kk_1)^2}{k^2 k_1^2} \right) \frac{(kv_{g, k_1})}{\omega - kv_{g, k_1} + i\delta} W_{k_1}; \quad (8.83)$$

$$\Delta_1^t \ll 1; \quad \omega \gg kv_g; \quad \omega \ll kv_g;$$

$$\Delta_2^t = \frac{\omega_{pe}}{24n_0 m_e v_{Te}^2} \int \frac{k^2}{k_1^2} \frac{[kk_1]^2}{k^2 k_1^2} \cdot \frac{dk_1}{(\omega - kv_{g, k_1} + i\delta)} \left(k \frac{\partial}{\partial k_1} \right) W_{k_1} + \Delta_2^{t'}; \quad (8.84)$$

$$\Delta_2^{t'} = - \frac{\omega_{pe}}{24n_0 m_e v_{Te}^2} \int \frac{[kk]^2}{k_1^4 \omega} \left(k \frac{\partial}{\partial k_1} \right) W_{k_1} dk_1;$$

$$\Delta_2^{t'} = 0 \text{ при } W_{k_1} = W_{|k_1|}. \quad (8.85)$$

Учет перенормированных эффектов для изотропной турбулентности производится так же, как в § 8.3.

§ 8.5. ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ИЗОТРОПНОЙ ТУРБУЛЕНТНОЙ ПЛАЗМЫ

Рассмотрим продольные потенциальные возмущения $E_k^R = \frac{k}{k} E_k^R$ в изотропной плазме. Они могут оказаться неустойчивыми. Физическая причина возникновения такой неустойчивости состоит в следующем. Предположим, что в некоей области пространства интенсивность турбулентных пульсаций флуктуационно возросла по сравнению с другими областями. Возникшая неоднородность в распределении турбулентных пульсаций приводит к тому, что на электроны плазмы начинает действовать сила, стремящаяся вытолкнуть их из области с повышенной энергией турбулентных пульсаций (си-

ла Миллера [309]). Вместе с электронами из-за квазинейтральности плазмы будут уходить и ионы. В результате плотность плазмы в этом месте уменьшится. Этому процессу препятствует тепловое движение частиц, стремящееся выравнять плотности. Если сила, выталкивающая плазму, способна преодолеть силу газокинетического давления, то возникает неустойчивость [299, 300]. Критерий неустойчивости проще всего получить из энергетических соображений [300]. Пусть квазинейтральное изменение плотности плазмы имеет вид, изображенный на рис. 8.1,

$$n(x) = \begin{cases} n_0 + \delta n, & x > x_0 \\ n_0 - \delta n, & x < x_0 \end{cases} \quad \delta n \ll n_0. \quad (8.86)$$

При изотермическом создании такой неоднородности на сжатие плазмы затрачивается работа

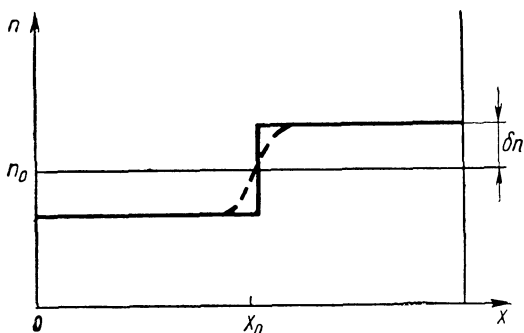


Рис. 8.1. Возникновение неоднородности в турбулентной плазме.

$$\delta W = \frac{n_0}{2} (T_e + T_i) \left(\frac{\delta n}{n_0} \right)^2. \quad (8.87)$$

Изменение же энергии волн составляет [300]

$$\delta W = - \int \frac{\omega_{pe}^3}{24k_1^2 v_{Te}^2} \cdot \frac{N_k dk}{(2\pi)^3} \left(\frac{\delta n}{n_0} \right)^2. \quad (8.88)$$

Таким образом, турбулентной плазме энергетически выгоднее перейти в состояние с неоднородным распределением плотности при

$$\int \frac{\omega_{pe}^3 N_{k_1} dk_1}{k_1^2 v_{Te}^2 (2\pi)^3} > 12n_0 (T_e + T_i). \quad (8.89)$$

Выражение (8.77) для продольных волн описывает любые потенциальные колебания даже неізотропной плазмы. Рассмотрим здесь

изотропную плазму. При $\omega \ll kv_{Te}$ (8.77) дает

$$\varepsilon^l(e) = 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_{Te}^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{n_0}{v_{Te}^2} d^l\right)}; \quad (8.90)$$

$$d^l = -\frac{e^2}{4m_e^2 \omega_{pe} n_0} \int d\mathbf{k}_1 \frac{4\pi}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_{g, \mathbf{k}_1} + i\delta)} \left(\mathbf{k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}_1}\right) W_{\mathbf{k}_1}. \quad (8.91)$$

При $\omega \gg kv_g$

$$d^l = \frac{3}{4} \frac{k^2 v_{Te}^2}{m_e \omega^2 n_0^2} \int W_{\mathbf{k}_1} d\mathbf{k}_1. \quad (8.92)$$

Существенное изменение дисперсионных свойств плазмы происходит при $\frac{\omega}{k} < v_*^l$

$$v_*^l = \sqrt{\frac{3}{4} \cdot \frac{W^l}{n_0 m_e}}. \quad (8.93)$$

При этом, если $\frac{\omega}{k} \ll v_{Ti}$, получаем

$$\varepsilon^l = 1 + \frac{\omega_{pi}^2}{k^2 v_{Ti}^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_{Te}^2} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{k^2 (v_*^l)^2}{\omega^2}\right)}. \quad (8.94)$$

Отсюда ($\varepsilon^l \gg 1$)

$$\omega^2 = -\frac{k^2 (v_*^l)^2}{1 + \frac{T_i}{T_e}}. \quad (8.95)$$

Это показывает, что имеет место аperiodическая раскочка колебания

$$\omega = \pm ik_*^l v_*^l \left(1 + \frac{T_i}{T_e}\right)^{-1/2}. \quad (8.96)$$

Если $kv_{Ti} \ll \omega \ll kv_{Te}$, $\omega \gg kv_g$, то

$$\omega^2 = k^2 \left(\frac{v_s^2}{2} \pm \sqrt{\frac{v_s^4}{4} + v_s^2 (v_*^l)^2}\right). \quad (8.97)$$

Эта неустойчивость аналогична (8.30).

Рассмотрим изотропную турбулентность с достаточно узким спектром, так что $k\Delta v_{gk_1} \ll \omega^*$. В этом случае все плазмоны могут

* Если считать $\Delta k \sim k_0 = \frac{2\pi}{L}$, то записанное условие означает $\frac{\omega}{k} \gg \frac{k_0}{\omega_{pe}} v_{Te}^2$.

находиться как бы в резонансе с одной волной и вместо ω^2 в дисперсионное уравнение войдет $\omega^2 - k^2 v_g^2$, т. е. при $\frac{\omega}{k} \ll v_{Ti}$

$$\varepsilon^l = 1 + \frac{\omega_{pi}^2}{k^2 v_{Ti}^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_{Te}^2 \left(1 + \frac{k^2 (v_*^l)^2}{\omega^2 - k^2 v_g^2} \right)}. \quad (8.98)$$

Отсюда

$$\omega^2 = k^2 \left(v_g^2 - \frac{(v_*^l)^2}{1 + \frac{T_i}{T_e}} \right), \quad (8.99)$$

а условие раскачки колебаний имеет вид

$$\frac{W}{n_0 (T_e + T_i)} > 12 \frac{v_{Te}^2}{v_p^2}. \quad (8.100)$$

В такой форме это условие неустойчивости было получено в работе [299, 300]. При $\frac{\omega}{k} \gg v_{Ti}$ имеем [299]

$$\left(\frac{\omega}{k} \right)^2 = \frac{v_g^2 + v_s^2}{2} \pm \sqrt{\frac{(v_g^2 + v_s^2)^2}{4} + ((v_*^l)^2 - v_g^2) v_s^2}. \quad (8.101)$$

При $\omega \ll kv_g$ получим

$$d^l = - \frac{\omega_{pe}^2}{12 n_0} \int \frac{W_{k_1} dk_1}{k_1^2 n_0 T_e}. \quad (8.102)$$

Это выражение отличается знаком от (8.31), что связано с различием фазового объема в трехмерном и одномерном случаях. Таким образом, турбулентные звуковые колебания в изотропной плазме невозможны. Вместо этого при выполнении неравенства (8.100) возникает неустойчивость, при этом

$$\omega^2 = k^2 v_s^2 \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{12 v_{Te}^2} \int \frac{W_{k_1} dk_1}{k_1^2 n_0 T_e} \right). \quad (8.103)$$

Критерий возникновения неустойчивости (8.97) весьма жесткий и практически совпадает с (8.38), W — есть полная энергия турбулентности лишь в области $v_p \ll \frac{3v_{Te}^2}{v_{Ti}}$, поэтому спектр должен обрываться довольно резко при $v_p \sim \frac{3v_{Te}^2}{v_{Ti}}$, что может быть, например, из-за интенсивного излучения в оптически тонком слое плазмы (см. гл. 6).

Если $v_p \gg \frac{3v_{Te}^2}{v_{Ti}}$, то необходимо учитывать перенормировку.

Для поперечных плазмонов $\omega_k = \omega_{pe} + \frac{k^2 c^2}{2\omega_{pe}}$ ввиду большой разности частот критерий (8.36) значительно легче выполнить.

Выражение для нелинейной проницаемости изотропной плазмы для частот $\omega \ll \omega_{pe}$ при наличии поперечных плазмонов имеет вид [308]

$$\varepsilon^l(e) = 1 + \frac{4\pi e^2}{m_e k^2} \int \frac{dv}{\omega - kv + i\delta} \left(\mathbf{k} \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) \times \\ \times \left[1 - \frac{\omega_{pe}^4}{2n_0^2 m_e} \int \frac{dk_1 \left(\mathbf{k} \frac{\partial}{\partial k_1} \right) \frac{W_{k_1}}{\omega_{k_1}^3}}{(\omega - kv_{g, k_1} + i\delta)} \int \frac{\left(\mathbf{k} \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) dv}{\omega - kv + i\delta} \right]^{-1}. \quad (8.104)$$

Ограничимся здесь несколькими примерами. Если $\omega \ll kv_{Te}$; $\omega \gg kv_{Ti}$; $\omega \gg kv_g$, то

$$\varepsilon^l = 1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_{Te}^2} \cdot \frac{1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\omega}{kv_{Te}}}{1 + \frac{k^2 v_*^2}{\omega^2} \left(1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\omega}{kv_{Te}} \right)}, \quad (8.105)$$

где

$$v_*^2 = \frac{Wc^2}{4n_0 T_e}. \quad (8.106)$$

Пренебрегая мнимыми вкладами, получим $\left(d_e = \frac{v_{Te}}{\omega_{pe}} \right)$

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{1}{2} \left\{ \omega_s^2 - \frac{k^2 v_*^2 k^2 d_e^2}{1 + k^2 d_e^2} \pm \sqrt{\left[\omega_s^2 - \frac{k^2 v_*^2 k^2 d_e^2}{(1 + k^2 d_e^2)} \right]^2 + 4k^2 v_*^2 \omega_s^2} \right\}. \quad (8.107)$$

Если $kv_{Te} \ll \omega_{pe}$, то $\omega_s = kv_s$ и (8.107) соответствует неустойчивому корню при $v_* > v_s$ ω_{pe}/kv_{Te} . Оценка инкрементов ($\gamma = \text{Im } \omega$)

$$\gamma_+ = k^2 d_e v_*; \quad \gamma_- = 0. \quad (8.108)$$

При $v_* \ll v_s \frac{\omega_{pe}}{kv_{Te}}$

$$\gamma_+ = 0; \quad \gamma_- = k \sqrt{\sqrt{v_*^2 v_s^2 + \frac{v_s^4}{4}} - \frac{v_s^2}{2}}. \quad (8.109)$$

Если $kv_{Te}/\omega_{pe} \gg 1$; $\omega_s = \omega_{pi}$, при $v_* \ll \frac{\omega_{pi}}{k}$

$$\gamma_+ = 0; \quad \gamma_- = kv_*; \quad (8.110)$$

при $v_* \gg \frac{\omega_{pi}}{k}$

$$\gamma_- = 0; \quad \gamma_+ = kv_*. \quad (8.111)$$

Как говорилось, эти неустойчивости представляют интерес для проблем взаимодействия интенсивных высокочастотных полей с плазмой [310], а также взаимодействия лазеров и плазмы. Выше везде частота много больше частоты парных соударений частиц*.

§ 8.6. ДРЕЙФОВЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ТУРБУЛЕНТНОЙ ПЛАЗМЫ

Коренное изменение электромагнитных свойств плазмы в области низких частот из-за влияния высокочастотной турбулентности имеет важное значение для дрейфовых неустойчивостей. Действительно, наиболее опасные для удержания плазмы дрейфовые неустойчивости носят аperiodический характер [6]. Малое изменение частоты не может стабилизировать такие неустойчивости. Лишь коренное изменение электромагнитных свойств может дать новые типы дрейфовых мод, которые либо будут стабильны, либо менее неустойчивы. Стабилизация дрейфовых колебаний турбулентностью имеет ряд общих черт со стабилизацией высокочастотными полями [313, 314], тем более что, как было выяснено, условие для изменения электромагнитных свойств плазмы поперечными плазмонами более благоприятно. Вместе с тем существенное отличие, естественно, состоит в том, что рассматриваются реальные высокочастотные моды, которые могут распространяться в плазме, а не ВЧ-колебания типа $\sin \omega t$, которые либо скинируются плазмой, либо требуют ограниченности размеров плазмы (размер меньше $1/k$). В каждом из таких случаев строгая постановка задачи сталкивается с большими трудностями описания структуры переходного слоя на границе плазмы.

В общей постановке проблем турбулентности, изложенной выше, уровень энергии и распределение ее по спектру регулируются внутренними процессами нелинейного взаимодействия при любом способе возбуждения (внешним высокочастотным полем или другим источником). Поскольку изменение электромагнитных свойств плазмы связано именно с наличием турбулентности, можно считать, что при возникновении дрейфовых неустойчивостей обратное их влияние в первую очередь может привести к изменению спектра и пространственного распределения турбулентных пульсаций. Уже из

* Противоположный предел рассмотрен в работе [311, 312].

приведенного в § 8.5 анализа видно, что в отсутствие неоднородности турбулентность стремится стать неоднородной, разбиваясь на области, разделенные промежутками, в которых интенсивность ВЧ-турбулентности более высокая. Обычно дрейфовая неустойчивость, наоборот, стремится ликвидировать градиенты плотности. В противоборстве этих эффектов можно видеть возможности стабилизации дрейфовых неустойчивостей. Рассмотрим дрейфовые неустойчивости замагниченной турбулентной плазмы, т. е. будем базироваться на результатах § 8.2, учтя неоднородности плотности и температуры плазмы (см. [302]). Будем считать справедливым локальный подход, т. е. предполагать, что длины волн намного меньше характерного размера неоднородностей [6].

Мы рассмотрим два приближения.

1. Одномерная ленгмюровская турбулентность $\omega_{k_1} = \omega_{pe} + \frac{3k_1^2 v_{Te}^2}{\omega_{pe}} (\omega_{He} \gg \omega_{pe})$. Однако поскольку результаты зависят лишь от групповых скоростей волн, то качественно этот случай описывает также результаты, возникающие для изотропной турбулентности, но $\omega_{He} \ll \omega_{pe}$.

2. Изотропная турбулентность на частотах $\omega_{k_1} = \omega_{pe} + \frac{k_{1\perp}^2 c^2}{2\omega_{pe}}$.

Для ленгмюровской турбулентности диэлектрическая проницаемость имеет вид (см. (8.26))

$$\varepsilon_k^{l(e)} = 1 + \frac{4\pi e^2}{m_e k^2} \frac{\int \frac{dv_z}{\omega - k_z v_z + i\delta} \left(k_z \frac{\partial \Phi}{\partial v_z} - \frac{k_x}{\omega_{He}} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)}{1 + \frac{k_z v_{Te}^2}{n_0} d \int \frac{dv_z}{\omega - k_z v_z + i\delta} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial v_z}}, \quad (8.112)$$

где $\delta \rightarrow +0$

$$d = - \frac{\pi e^2 k_z}{m_e v_{Te}^2 \omega_{pe}} \int dk_1 \frac{1}{(\omega - k_z v_g + i\delta)} \cdot \frac{\partial}{\partial k_1} W_{k_1}. \quad (8.113)$$

В области частот, определяемой неравенством $\omega \ll k_z v_{Te}$,

$$\varepsilon_k^{l(e)} = 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_{Te}^2} \frac{1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{k_z v_{Te}} \left(\omega - \omega_* + \omega_* \frac{\eta}{2} \right)}{1 + d \left(1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{k_z v_{Te}} \right)}; \quad (8.114)$$

$$\omega_D = \omega_* = - \frac{T_e k_x}{m_i \omega_{Hi}} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \ln n_0; \quad (8.115)$$

$$\eta = \frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln n_0}. \quad (8.116)$$

Из (8.114) видно, что наиболее сильно турбулентность сказывается на электромагнитных свойствах плазмы, если $d \gg 1$. При этом

$$\varepsilon_k^{l(e)} = 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{dk^2 v_{Te}^2} \left(1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_*}{k_z v_{Te}} \left(\frac{\eta}{2} - 1 \right) \right). \quad (8.117)$$

Таким образом, при $\eta > 2$ происходит стабилизация дрейфовых колебаний для той ветви колебаний, которая в линейном приближении соответствует наиболее раскачивающейся быстрой дрейфовой волне [6]. Если d зависит от ω , то могут появиться новые нелинейные ветви колебаний, в том числе и неустойчивые. Однако проявление таких неустойчивостей, вообще говоря, затруднено. Учитывая, что при $\omega \gg k_z v_{Ti}$

$$\varepsilon^{(i)} = \varepsilon_0^{(i)} = -\frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_{Te}^2} \cdot \frac{\omega_*}{\omega} \quad (8.118)$$

и $\omega \gg \frac{k_z^2 v_s^2}{\omega_*}$, можно ограничиться учетом лишь второго члена (8.118). Получим

$$\omega = \frac{\omega_* d}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} d^2 \omega_*^2 + k_z^2 v_s^2} d, \quad (8.119)$$

т. е. при $k_z v_s \ll \omega_* \sqrt{d}$ один из корней равен

$$\omega = \omega_* d. \quad (8.120)$$

При $v_p \ll \frac{3v_{Te}^2}{v_{Ti}}$, например, условие существования спектра (8.120) накладывает ограничения на величины градиента плотности

$$\frac{W}{nT_e} \gg \frac{m_e}{m_i}; \quad \frac{\omega_*}{\omega_{pe}} \gg \frac{m_e}{m_i}. \quad (8.121)$$

Условие $\omega \gg k_z v_{Ti}$ выполняется при $\frac{W}{n_0 T_e} \gg \frac{k_z v_{Ti}}{\omega_*} 12 \frac{v_{Te}^2}{v_p^2}$. Мед-

ленная ветвь в (8.118) при $k_z v_z \ll \omega_* \sqrt{d}$ не зависит от энергии турбулентности.

Рассмотрим теперь $\omega \gg k_z v_g$, когда величина d оказывается равной

$$d = \frac{3}{4} \cdot \frac{k_z^2 v_{Te}^2}{\omega^2} \cdot \frac{W}{n_0 T_e}. \quad (8.122)$$

В этом случае возможно появление новых нелинейно-дрейфовых неустойчивостей. При $\omega \gg k_z v_{Ti}$ и $d \gg 1$ получим

$$\omega = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} k_z v_{Te} \left(\frac{3\omega_*}{4k_z v_{Te}} \right)^{1/3} \left(\frac{W}{n_0 T_e} \right)^{1/3}. \quad (8.123)$$

Условие существования неустойчивости (8.123) имеет вид (из $d \gg 1$)

$$1 \gg \frac{W}{n_0 T_e} \gg \left(\frac{\omega_*}{k_z v_{Te}} \right)^2, \quad (8.124)$$

т. е. неустойчивость может развиваться на малых длинах, удовлетворяющих неравенству $k_z \gg \frac{\omega_*}{v_{Te}}$. Кроме того, совместное выполнение неравенств $k_z v_{Ti}$, $k_z v_g \ll \omega \ll k_z v_{Te}$ приводит к условию

$$1 \gg \frac{W}{n_0 T_e} \gg \frac{k_z v_{Te}}{\omega_*} \max \left\{ \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{3/2}, \left(\frac{3v_{Te}}{v_p} \right)^3 \right\}, \quad (8.125)$$

которое ограничивает длины неустойчивых волн снизу

$$\frac{\omega_*}{v_{Te}} \min \left\{ \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{3/2}, \left(\frac{v_p}{3v_{Te}} \right)^3 \right\} \gg k_z \gg \frac{\omega_*}{v_{Te}}. \quad (8.126)$$

Наконец, условие $\omega \gg (\omega - \omega_{k_1}) \frac{k_1}{k}$ дает при $v_p \ll \frac{3v_{Te}^2}{v_{Ti}}$

$$1 \gg \frac{k^2}{k_1^2} \gg \frac{1}{9} \left(\frac{v_p}{v_{Te}} \right)^3 \left(\frac{W}{n_0 T_e} \right)^{2/3} \frac{m_e}{m_i} \left(\frac{k_z v_{Te}}{\omega_*} \right)^{1/3}. \quad (8.127)$$

Выписанные неравенства дают представления об условиях проявления рассмотренной неустойчивости. Следует подчеркнуть, что результатом развития такой неустойчивости будет в первую очередь изменение пространственного распределения турбулентных пульсаций. Это видно из исходных уравнений, показывающих, что основной вклад в ϵ вносят эффекты изменения спектра турбулентности.

Рассмотрим теперь дрейфовые колебания при наличии в плазме изотропных непотенциальных пульсаций $\omega_{k_1} = \omega_{pe} + \frac{k_{1\perp}^2 c^2}{2\omega_{pe}}$.

Поскольку условия применимости используемых приближенных проницаемостей для этого случая подробно обсуждались выше, мы ограничимся здесь рассмотрением ряда частных дрейфовых спектров.

Если $\omega \ll k_z v_{Te}$; $\omega \gg k_{\perp} v_g$, т. е. $v_g \ll v_{Te}$, то дисперсионное уравнение имеет вид*

$$-\frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} \cdot \frac{k_z^2}{k^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_{Te}^2} \cdot \frac{\omega_*}{\omega} + \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_{Te}^2} \left[1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(\omega - \omega_* + \omega_* \frac{\eta}{2})}{k_z v_{Te}} \right] \times \\ \times \left[1 + \left(1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega/k_z v_{Te}}{\omega} \right) k_{\perp}^2 c^2 W / \omega^2 4n_0 T_e \right]^{-1}. \quad (8.128)$$

Если $W/n_0 T_e \gg k_z^2 v_{Te}^6 m_e^3 / k_{\perp}^2 c^2 \omega_*^4 m_i^3$, то последний член (8.128) мал и в области низких частот

$$\omega = -k_z^2 v_{Te}^2 m_e / \omega_* m_i. \quad (8.129)$$

Эти колебания затухают при $\eta > 2$ с декрементом

$$\gamma = 2 \sqrt{2\pi} \frac{n_0 T_e}{W} \cdot \frac{k_z^7 v_{Te}^7}{\omega_*^4 k_{\perp}^2 c^2} \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^4 \left(\frac{\eta}{2} - 1 \right). \quad (8.130)$$

Если $k_z^2 v_s^2 \ll \omega \omega_*$, то при выполнении ряда неравенств, которые здесь не выписываются,

$$\omega^3 = \omega_* k_{\perp}^2 c^2 \frac{W}{n_0 T_e}. \quad (8.131)$$

Если $\omega \ll k_{\perp} v_g$, но $\omega \gg k_z v_{Te}$, то дисперсионное уравнение приобретает вид

$$-\frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} \cdot \frac{k_z^2}{k^2} - \frac{\omega_{Te}^2}{k^2 v_{Te}^2} \cdot \frac{\omega_*}{\omega} - \left[\frac{\omega_{Te}^2 k_z^2}{\omega^2 k^2} \left(1 - \frac{\omega_*}{\omega} \right) + \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_{Te}^2} \cdot \frac{\omega_*}{\omega} \right] \times \\ \times \left[1 + \frac{k_z^2 v_{Te}^2}{\omega^2} \cdot \frac{\omega_{pe}^2}{4n_0 T_e} \int \frac{W_{k_1} dk_1}{k_1^2} \right]^{-1} + \frac{\omega_{pi}^2 k_{\perp}^2}{\omega_{Hi}^2 k^2} \left(1 + \frac{\omega_*}{\omega} \right) = 0. \quad (8.132)$$

При выполнении условия

$$\frac{m_i}{m_e} \gg \frac{k_z^2 v_{Te}^2}{\omega^2} \frac{\omega_{pe}^2}{4n_0 T_e} \int W_{k_1} \frac{dk_1}{k_1^2 c^2} \gg k_{\perp}^2 \frac{v_{Ti}^2}{\omega_{Hi}^2} \quad (8.133)$$

* Уравнение (8.128) получено для максвелловского распределения частиц. В общем случае следует учитывать влияние поперечных волн на функцию распределения, которое при $k_1 \ll \omega_{pe}/c$ мало.

дисперсионное уравнение приобретает вид $\left(\omega \gg \frac{k_z^2 v_s^2}{\omega_*}\right)$

$$\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \cdot \frac{k_z^2}{k^2} \left(\frac{\omega_*}{\omega} \cdot \frac{\omega_{pe}^2}{4n_0 T_e} \int W_{k_1} \frac{dk_1}{k_1^2 c^2} + 1 - \frac{\omega_*}{\omega} \right) = 0, \quad (8.134)$$

т. е. дрейфовые колебания гидродинамически устойчивы. Согласно работе [302] возможна стабилизация температурно-дрейфовой неустойчивости.

§ 8.7. СПОНТАННОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В ТУРБУЛЕНТНОЙ ПЛАЗМЕ

Известно [304], что в проводящей турбулентной жидкости могут спонтанно возбуждаться магнитные поля, т. е. турбулентная проводящая жидкость неустойчива относительно возникновения возмущений, несущих магнитные поля. Энергия магнитного поля черпается из гидродинамических турбулентных пульсаций жидкости. В турбулентной плазме также могут спонтанно возбуждаться магнитные поля, энергия которых, однако, может черпаться из высокочастотных турбулентных пульсаций плазмы [303].

Рассмотрим пример плазмы, в которой возбуждены интенсивные ленгмюровские турбулентные колебания. Турбулентные пульсации потенциальны, и поэтому магнитные поля отсутствуют. Покажем, что даже при изотропном распределении ленгмюровских пульсаций турбулентная плазма может стать неустойчивой относительно возмущений, основная энергия которых заключена в энергии магнитного поля.

Рассмотрим развитие возмущений в турбулентной плазме с изотропным распределением частиц и турбулентных пульсаций. В силу предполагаемой изотропии распространение возмущений, несущих магнитные поля, описывается уравнением $k^2 c^2 = \omega^2 \epsilon^{t(e)}$, где $\epsilon^{t(e)}$ — поперечная диэлектрическая проницаемость турбулентной плазмы.

Для выявления эффектов неустойчивости достаточно получить решения дисперсионных уравнений в виде ω как функции k .

В пределе $\omega \gg kv_{gk_1}$ из (8.84) и (8.83) получим

$$\Delta_1^t \approx \frac{k^2}{30 n_0 m_e v_{Te}^2 \omega^2} \int v_{gk_1}^2 W_{k_1} dk_1 \ll 1;$$

$$\Delta_2^t = - \frac{k^4 v_{Te}^2}{12 \omega^2} \int \frac{W_{k_1} dk_1}{k_1^2 n_0 T_e}. \quad (8.135)$$

Заметим, что в (8.84) $\omega \ll kv_{Te}$, и поэтому поправка Δ_2^t , имеющая порядок $\frac{k^2}{12k_1^2} \cdot \frac{W}{n_0 T_e} \cdot \frac{k^2 v_{Te}^2}{\omega^2}$, может быть больше единицы.

При $\Delta_2^t \gg 1$ имеем

$$\varepsilon^{t(e)} = i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\omega_{pe}^2 k^3}{\omega^3 v_{Te}} \int \frac{dk_1 W_{k_1}}{12 n_0 m_e k_1^2}. \quad (8.136)$$

Уравнение $k^2 = \omega^2 \varepsilon^{t(e)} c^{-2}$ дает

$$\omega = i k v_*^t; \quad (8.137)$$

$$v_*^t = v_{Te} \int W_{k_1} dk_1 \frac{v_p^2}{v_{Te}^2} \cdot \frac{1}{12} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{n_0 m_e c^2} \approx v_{Te} \frac{\omega_{pe}^2}{k_0^2 c^2} \cdot \frac{W}{n_0 T_e}. \quad (8.138)$$

Последнее равенство (8.138) справедливо для интенсивной турбулентности, когда основная энергия сосредоточена при $k \sim k_0 \ll \ll \frac{3v_{Te}^2}{v_{Ti}}$ (см. гл. 4).

В общем случае в пределе $\omega \gg kv_g$; $\omega \ll kv_{Te}$ получим дисперсионное уравнение

$$k^2 = \omega^2 \varepsilon^{t(e)} c^{-2} = i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{pe}^2 \omega}{kv_{Te} c^2} \left(1 + \frac{k^4}{12\omega^2 n_0 m_e} \int \frac{W_{k_1} dk_1}{k_1^2} \right). \quad (8.139)$$

Его решение всегда содержит неустойчивый корень

$$\omega = i \frac{k^3 v_{Te} c^2}{2\omega_{pe}^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\sqrt{1 + 4 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{v_*^t}{v_{Te}} \cdot \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 c^2}} - 1 \right). \quad (8.140)$$

В пределе $v_*^t \ll v_{Te} \frac{k^2 c^2}{\omega_{pe}^2}$ имеем решения типа аperiодически нарастающего второго звука $\omega = i k v_*^t$, а при $v_*^t \gg v_{Te} \frac{k^2 c^2}{\omega_{pe}^2}$

$$\omega = i \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/4} \frac{k^2 c}{\omega_{pe}} \sqrt{v_{Te} v_*^t}. \quad (8.141)$$

Для того чтобы пояснить физический смысл найденной неустойчивости, заметим, что величина магнитного поля поперечных волн $\mathbf{H} = \left[\frac{k}{\omega} \mathbf{E} \right]$ порядка $\frac{k}{\omega} E = \varepsilon^t E$. Для рассматриваемых неустойчивостей $\varepsilon^t \gg 1$ и, следовательно, их развитие означает спонтанные возрастания магнитных полей в турбулентной плазме. Этот эф-

фekt возникновения спонтанных магнитных полей в турбулентной плазме аналогичен эффекту Батчерола (спонтанное возникновение магнитных полей при турбулентном движении проводящей жидкости).

Обсудим теперь критерий (8.36) для этой неустойчивости.

В случае $v_p \ll \frac{3v_{Te}^2}{v_{Ti}}$ получим

$$k \gg \omega_{pe} \frac{m_e c^{-1}}{9m_i}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{k}{k_1} \gg \frac{v_p}{c} \cdot \frac{m_e}{9m_i}, \quad (8.142)$$

а так как $k \ll k_1$, то $v_p \ll \frac{9m_i}{m_e}$, что заведомо выполняется при $v_p \ll \frac{3v_{Te}^2}{v_{Ti}}$. Если $v_p \gg \frac{3v_{Te}^2}{v_{Ti}}$, то возникающий критерий имеет вид

$$k \gg \omega_{pe} \frac{v_{Te}^2 c^{-1}}{v_p^2}. \quad (8.143)$$

Если при больших потоках турбулентной энергии Q фазовые скорости ленгмюровских колебаний велики, то минимальные k достаточно малы, т. е. могут возбуждаться магнитные поля достаточно крупных масштабов. Это важно для астрономических приложений.

Хотя инкременты возбуждения и уменьшаются с падением k , однако представляет интерес их оценка для минимально возможных k , так как это соответствует максимально большому масштабу. Пусть

$$k^2 \ll \omega_{pe}^2 \frac{v^t c^{-2}}{v_{Te}} \quad (8.144)$$

и имеет место неустойчивость (8.141). Тогда при $v_p \ll \frac{3v_{Te}^2}{v_{Ti}}$

$$k^2 \gg \omega_{pe}^2 \left(\frac{W}{n_0 T_e} \right)^{1/2} \frac{m_e}{9m_i} \cdot \frac{v_p}{v_{Te}} \left(\frac{c}{v_{Te}} \right)^2 c^{-2}. \quad (8.145)$$

Совместно с (8.144) это дает

$$\frac{W}{n_0 T_e} \gg \frac{m_e}{9m_i} \cdot \frac{c}{v_p} \left(\frac{c}{v_{Te}} \right)^3. \quad (8.146)$$

Последнее неравенство предъявляет требования на температуру плазмы, которая должна быть достаточно высокой.

Если $v_p \gg \frac{3v_{Te}^2}{v_{Ti}}$, то условие (8.145) следует заменить

$$k^2 \gg \omega_{pe}^2 \frac{1}{v_{Te} v_p} \left(\frac{W}{n_0 T_e} \right)^{1/2}. \quad (8.147)$$

Совместно с (8.144) это дает

$$\frac{W}{n_0 T_e} \gg \frac{c^2}{v_{Te}^2} \left(\frac{c}{v_p} \right)^6. \quad (8.148)$$

Подчеркнем, что возбуждаться могут достаточно длинноволновые возмущения и условия возбуждения улучшаются с повышением температуры плазмы.

§ 8.8. СКИН-ЭФФЕКТ В ТУРБУЛЕНТНОЙ ПЛАЗМЕ

Рассмотрим проникновения электромагнитных волн низких частот в турбулентную плазму. Если частота волн много меньше ω_{pe} , то проникновение поля в турбулентную плазму связано либо с эффектом парных соударений, либо с диссипацией из-за поглощения Ландау (аномальный скин). В турбулентной плазме скин-эффект существенно изменяется, если частоты падающих электромагнитных волн много меньше характерных турбулентных частот.

Строго говоря, задача о проникновении электромагнитного поля в турбулентную плазму должна решаться с учетом граничных условий. Однако качественный ответ на вопрос может быть получен, если предположить, что на какой-либо мысленно плоской поверхности внутри плазмы задано электромагнитное поле определенной частоты, и рассмотреть, как поле такой частоты будет изменяться при удалении от этой поверхности.

Для E на расстоянии x от этой поверхности имеем

$$E(x, t) = \int E_\omega e^{-i\omega t + i k x} d\omega, \quad (8.149)$$

где E_ω — компонента Фурье поля $E(t)$ на поверхности $x = 0$. Выражение (8.149) дает ответ на поставленный вопрос, если решения дисперсионного уравнения найти в виде $k = k(\omega)$. Тогда глубина «проникновения» поля (толщина скин-слоя) имеет оценку

$$\delta \simeq \frac{1}{\text{Im } k(\omega)}. \quad (8.150)$$

Если поле убывает с ростом x , то это может быть связано либо с тем, что электромагнитное поле не может распространяться в плазме ($\omega \ll \omega_{pe}$, но $\omega \gg kv_{Te}$ в нетурбулентной плазме), либо с диссипативными процессами. В нетурбулентной плазме из $\varepsilon = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}$ ($\omega \gg kv_{Te}$) получим, что при $\omega \ll \omega_{pe}$

$$\delta = \frac{c}{\omega_{pe}}. \quad (8.151)$$

Как известно, в плазме в условиях $\omega \ll kv_{Te}$ в отсутствие турбулентности

$$\delta \simeq 2 \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/6} \left(\frac{v_{Te}}{\omega} \right)^{1/3} \left(\frac{c}{\omega_{pe}} \right)^{2/3}. \quad (8.152)$$

Наконец, в области частых электрон-ионных соударений

$$\varepsilon^t \approx i \frac{\omega_{pe}^2}{\omega v_e}; \quad \delta \simeq \frac{c}{\omega_{pe}} \sqrt{\frac{v_e}{\omega}}. \quad (8.153)$$

Посмотрим, как видоизменяются эти формулы для скин-эффекта при наличии турбулентности. Решая (8.139) относительно k , получаем при выполнении неравенств

$$\int \frac{W_{k_1} dk_1}{12 n_0 T_e} \gg \left(\frac{v_{Te}}{c} \right)^{2/3} \left(\frac{c}{v_p} \right)^2 16 \left(\frac{2}{\pi} \right)^{2/3} \left(\frac{\omega}{\omega_{pe}} \right)^{2/3} \quad (8.154)$$

и $\omega \gg kv_g$ выражения для толщины скин-слоя

$$\delta = \frac{1}{\text{Im } k(\omega)} = \frac{c}{\omega_{pe}} \sqrt{\frac{v_{\text{эфф}}}{\omega}}; \quad v_{\text{эфф}} = \omega_{pe} \sqrt{\int \frac{v_p^2 W_{k_1} dk_1}{12 n_0 T_e}}. \quad (8.155)$$

При выполнении неравенства, обратного (8.154),

$$k(\omega) = -i \sqrt{\frac{2}{\pi}} v_{Te} \frac{12 n_0 m_e \omega}{\int v_p^2 W_{k_1} dk_1} \cdot k^3(\omega) = i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\omega_{pe}^2 \omega}{v_{Te}}. \quad (8.156)$$

Первое решение (8.156) описывает нарастающее в пространстве поле, тогда как второе — обычный аномальный скин. Возможность пространственного усиления поля связана с рассмотренным эффектом возбуждения магнитных полей.

В пределе $\omega \ll kv_g$, когда такое возбуждение невозможно, скин-эффект при

$$\int \frac{v_p^4 W_{k_1} dk_1}{v_{Te}^4 108 n_0 m_e c^2} \gg \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega} \right)^{2/3} \left(\frac{v_{Te}}{c} \right)^{4/3} \quad (8.157)$$

описывается формулой

$$\delta = \frac{c}{\omega_{pe}} \sqrt{\int \frac{v_p^4 W_{k_1} dk_1}{v_{Te}^4 108 n_0 m_e c^2}}. \quad (8.158)$$

Наконец, при выполнении неравенства $\omega \gg kv_{Te}$ и $v_*^t \gg \frac{\omega^2 c}{\omega_{pe}^2}$ скин-эффект описывается (8.155). Подчеркнем, что рассмотренные эф-

фекты связаны с тем, что поле внешней волны смещает не только электроны плазмы, но и ленгмюровские плазмоны, которые благодаря неоднородностям распределения в поле волны начинают взаимодействовать и рассеивать электроны.

Рассмотрим теперь скин-эффект в плазме с ионно-звуковыми турбулентными пульсациями. Ионно-звуковая турбулентность отличается тем, что электроны, являясь резонансными с плазмонами, интенсивно с ними взаимодействуют. Такое взаимодействие в определенной мере эквивалентно электронно-ионным соударениям, так как в ионно-звуковых колебаниях принимают участие ионы плазмы. Нужно ожидать, что в этом случае скин-эффект будет определяться формулой, аналогичной (8.153), в которой эффективная частота соударений характеризует соударения электронов и плазмонов. Необходимо учесть D_0 в уравнении (8.62), сохраняя мнимые составляющие, а остальными коэффициентами диффузии можно пренебречь.

Считая турбулентность стационарной и изотропной, имеем

$$D_{ij}^{(0)\tau} = D^l \frac{P_i P_j}{k \cdot p^2} + D^t \left(\delta_{ij} - \frac{P_i P_j}{p^2} \right). \quad (8.159)$$

Коэффициент D^l описывает нагрев электронного газа ионно-звуковыми пульсациями, а D^t — упругое рассеяние электронов на турбулентных пульсациях, причем $D^l \ll D^t \frac{m_e}{m_i}$.

Считая, что частота поля много меньше частоты рассеяния, но много больше частоты, связанной с нагревом, будем пренебрегать D^l . Тогда уравнение для функции Φ , не возмущенной внешней волной, удовлетворяется произвольной изотропной функцией распределения, зависящей лишь от модуля скорости частиц. Поскольку соударения, приводящие к рассеянию, являются частыми ($v_{\text{эфф}} \gg \omega$), то естественно предположить, что внешнее поле создает лишь слабую анизотропию в распределении частиц, и искать $f_k^{R(1)}(\mathbf{v})$ в виде $f_k^{R(1)}(v) \mathbf{v}/v$. Тогда, умножая уравнение, получающееся при сделанных предположениях из (8.62), на \mathbf{v}/v и интегрируя по углам вектора \mathbf{v} , получаем

$$-i\omega f_k^{R(1)} - \frac{e}{m_e} \mathbf{E}_k^R \frac{\partial \Phi}{\partial v} = -v_{\text{эфф}} f_k^{R(1)}; \quad (8.160)$$

$$v_{\text{эфф}}(v) = \frac{2e^2}{v^3 m_e^2} \int 2\pi^2 W_{k_1} k_1^{-1} dk_1 \frac{\omega_{k_1}^2}{\omega_{pi}^2}. \quad (8.161)$$

Отсюда легко найти выражения для тока

$$\mathbf{j}_k^R = -e \int \frac{\mathbf{v}}{v} (f_k^{R(1)} \mathbf{v}) d\mathbf{v} = \frac{\omega_{pe}^2}{4\pi v_{\text{эфф}}} \mathbf{E}_k^R. \quad (8.162)$$

Последнее неравенство написано из условия $\omega \ll \nu_{эфф}$, причем

$$\nu_{эфф} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\pi^2 e^2}{8m_e^2 \nu_{Te}^3} \int \frac{\omega_{k_1}^2}{\omega_{pi}^2} W_{k_1} k_1^{-1} dk_1. \quad (8.163)$$

По порядку величины получим следующую оценку для скин-слоя:

$$\delta \simeq \frac{c}{\omega_{pe}} \sqrt{\frac{W}{10n_0 T_e}}; \quad \frac{k_1 \nu_{Te}}{\omega_{pe}} \sim 1. \quad (8.164)$$

§ 8.9. ВТОРОЙ ЗВУК В ТУРБУЛЕНТНОЙ ПЛАЗМЕ

Второй звук согласно Л. Д. Ландау [305] есть колебания газа возбуждений. Он хорошо изучен в гелии [315, 305] и твердых телах [316]. Для его возникновения в плазме необходимо существование стационарного равновесного распределения плазмонов, которое как раз реализуется в случае стационарной турбулентности. Малые отклонения и возмущения от этого стационарного состояния и описывают колебания, которые целесообразно назвать вторым звуком в плазме. Заметим, что рассмотренные выше электромагнитные возмущения стационарного турбулентного состояния имели вид $\omega = ikv_*$, т. е. были звуковыми в смысле пропорциональности ω и k . Однако их частоты являются чисто мнимыми, т. е. соответствуют аperiодической неустойчивости.

В первую очередь следует подчеркнуть существенное различие между вторым звуком и этими неустойчивостями. В проводимой выше постановке задачи электромагнитных свойств турбулентной плазмы рассматривался отклик турбулентной плазмы на регулярное поле E^R . Помимо возмущений, пропорциональных E^R , может существовать часть, не зависящая от E^R , т. е. возмущения турбулентного поля. Именно эти возмущения и описывают второй звук.

Все эффекты, связанные со вторым звуком, содержатся в уравнениях, описывающих изменение турбулентного состояния, т. е. содержатся в уравнениях типа (8.4), учитывающего дополнительно слабую нестационарность турбулентных пульсаций (см. гл. 2). Имеется ряд существенных различий таких возмущений и возмущений, описываемых (8.16). Например, в (8.16) содержатся лишь индуцированные распады, тогда как для второго звука также и возмущения спонтанных распадов. Более подробное (с точностью I^2) рассмотрение возмущений, обязанных регулярным полям, показывает, что в них не содержатся процессы типа возмущений четырехплазмонных взаимодействий. Последнее понятно, так как сами представления о четырехплазмонном взаимодействии возникают лишь при рассмотрении взаимодействия четырех случайных полей и учета их взаимной корреляции.

Вопрос о втором звуке в плазме рассматривался в работах [306, 317, 318]. В работе [305] рассмотрены примеры, когда стационар-

ность спектра обеспечена нелинейными распадными процессами и квазилинейными процессами, а в работе [317] — специально для ионно-звуковой турбулентности. Здесь рассмотрим второй звук на примере интенсивной ленгмюровской турбулентности, максимум интенсивности которой, согласно гл. 2, сосредоточен при $v_p \gg \frac{3v_{Te}^2}{v_{Ti}}$.

Пренебрегая рассеянием на ионах и считая основным четырехплазмонное взаимодействие, можно, следуя Ландау [304], составить уравнение баланса для плазмонов. Они следуют из сохранения числа плазмонов, их импульса и энергии при четырехплазмонных взаимодействиях

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{3v_{Te}^2}{\omega_{pe}} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{r}} = 0; \quad \mathbf{P} = \int \frac{\mathbf{k} N_k^l dk}{(2\pi)^3}; \quad N = \int \frac{N_k^l dk}{(2\pi)^3}; \quad (8.165)$$

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \frac{3v_{Te}^2}{\omega_{pe}} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} D_{ij} = 0; \quad D_{ij} = \int k_i k_j \frac{N_k^l dk}{(2\pi)^3}; \quad (8.166)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{3v_{Te}^2}{\omega_{pe}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} Q = 0; \quad W = \int \frac{\omega_k N_k^l dk}{(2\pi)^3}; \quad Q = \int \frac{\mathbf{k} \omega_k N_k^l dk}{(2\pi)^3}. \quad (8.167)$$

Этой системой уравнений можно воспользоваться для нахождения вида линейных возмущений, если их частоты много меньше характерной частоты четырехплазмонных столкновений. В этих условиях в каждый момент времени успевает установиться квазиравновесное состояние. Различие в этих мгновенных распределениях может быть в значении среднего импульса и средней энергии и числа плазмонов.

Задача становится весьма похожей на обычную гидродинамическую задачу. Надо знать формально общий класс решений, удовлетворяющих четырехплазмонному интегралу и слабо отличающихся от начального. Очевидно, что этому интегралу удовлетворяет N_k^{st} , зависящая лишь от k/k_0 . Малое изменение k_0 на δk_0 дает решение $N_k^{st} \frac{\delta k_0}{k_0}$. Если ввести кинетическую энергию плаз-

мона $\omega_k^T = \omega_k - \omega_{pe}$, то можно считать $N_k = N^{st} \left(\frac{\omega_k^T}{\omega_{k_0}^T} - \frac{2\delta k_0}{k_0} \cdot \frac{\omega_k^T}{\omega_{k_0}^T} \right)$.

Четырехплазмонному интегралу удовлетворяет газ плазмонов, движущийся как целое. Так как энергия плазмона изменяется при изменении системы отсчета на \mathbf{kv} , где \mathbf{v} — скорость системы отсчета, то $N_k = N^{st} \left(\frac{\omega_k^T + \mathbf{kv}}{\omega_{k_0}^T} \right)$. Здесь \mathbf{v} — параметр распределения.

Итак,

$$N_k = N_k^{st} + \left(\mathbf{kv} - \omega_k^T \frac{2\delta k_0}{k_0} \right) \frac{\partial N_k^{st}}{\partial \omega_k^T}. \quad (8.168)$$

Разлагая \mathbf{v} и δk_0 в интеграл Фурье

$$\mathbf{v} = \int \mathbf{v}_{\mathbf{k}, \nu} e^{i \mathbf{x} \cdot \mathbf{k} - i \nu t} d\mathbf{k} d\nu \quad (8.169)$$

и подставляя в (8.165) и (8.166), получаем дисперсионное соотношение [318]

$$v^2 = \kappa^2 2 \frac{v_{Te}^2}{\omega_{pe}} \cdot \frac{\int (\omega_k^T)^2 \frac{\partial N_k^{st}}{\partial \omega_k^T} dk}{\int \omega_k^T \frac{\partial N_k^{st}}{\partial \omega_k^T} dk}. \quad (8.170)$$

Если ввести обычным образом спектральную плотность энергии турбулентности W_k^l ($\int W_k^l dk = W$), то (8.170) запишется в виде

$$v^2 = \kappa^2 \frac{10v_{Te}^4}{3\omega_{pe}^2} \int k^2 W_k^l dk \frac{1}{W^l}. \quad (8.171)$$

Аппроксимируя W_k^l выражением $\frac{(v-1)}{k_0} W \left(\frac{k_0}{k}\right)^v$ при $k > k_0$ и 0 при

$k < k_0$, получаем для квадрата скорости второго звука ($v > 3$)

$$\frac{v^2}{\kappa^2} = 10v_{Te}^2 \frac{(v-1)}{v-3} \cdot \frac{v_{Te}^2 k_0^2}{3\omega_{pe}^2}. \quad (8.172)$$

Учет парных соударений и спектральной перекачки при рассеянии на ионах дает затухание второго звука.

Подчеркнем в заключение, во-первых, что различие между регулярными и стохастическими возмущениями возможно невелики, так как при развитии неустойчивости происходит стохастизация возмущений. Во-вторых, учет турбулентного уширения резонансов сужает, если не ликвидирует, область проявления ряда неустойчивостей турбулентной плазмы. Наконец, коренное изменение свойств слаботурбулентной плазмы в области низких частот следует отнести к эффектам сильной турбулентности. Достигнутые здесь определенные успехи в понимании физической природы такого изменения, а также общая теория турбулентного уширения резонансов и корреляции турбулентных пульсаций (гл. 2) могут рассматриваться как шаги к развитию теории сильной турбулентности.

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
2. Яременко Ю. Г. и др. «Атомная энергия», **24**, 213 (1968).
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. М., «Наука», 1963.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1957.
5. P r a n d t l L. Z. Angew. Math. und Mech., **5**, 136 (1925); **22**, No. 5 (1942).
6. Кадомцев Б. Б. В сб. «Вопросы теории плазмы». Под ред. М. А. Леонтовича. Вып. 4. М., Атомиздат, 1964, стр. 188.
7. Завойский Е. К. «Атомная энергия», **14**, 57 (1963).
8. Завойский Е. К., Рудаков Л. И. Физика плазмы (коллективные процессы в плазме и турбулентный нагрев). М., «Знание», 1967.
9. Колмогоров А. Н. «Докл. АН СССР», **30**, 299 (1941).
10. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М., «Наука», 1967.
11. S h e w G. F., G o l d b e r g e r M. L., L o w F. E., Proc. Roy. Soc., A **236**, 1212 (1956).
12. Климонтович Ю. Л., Силин В. П. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **40**, 143 (1961).
13. L a n g m u i r I. Phys. Rev., **26**, 585 (1925); Z. Phys., **46**, 271 (1927).
14. Власов А. А. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **8**, 291 (1938).
15. Ландау Л. Д. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **16**, 574 (1946).
16. Альфвен Х. Космическая электродинамика. Перев. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1952.
17. Халатников И. М. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **27**, 529 (1954).
18. Цытович В. Н. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **44**, 946 (1963).
19. Ахизер А. И. и др. Коллективные колебания в плазме. М., Атомиздат, 1964.
20. Карпман В. И. Препринт ИЯФ СО АН СССР, № 25. Новосибирск, 1968.
21. Сагдеев Р. З. В сб. «Вопросы теории плазмы». Под ред. М. А. Леонтовича. Вып. 4. М., Атомиздат, 1964.
22. L o o p e y D. H., B r o w n S. C. Phys. Rev., **83**, 695 (1954).
23. M e r i l l H. J., W e b b H. W. Phys. Rev., **55**, 1191 (1939).
24. Харченко И. Ф. и др. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **38**, 685 (1960).
25. Березин А. К. и др. «Атомная энергия», **14**, 249 (1963).
26. Бабыкин М. В. и др. «Ядерный синтез». Дополнение, т. 3, 1962, стр. 1073.
27. Бабыкин М. В., Завойский Е. К. и др. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **43**, 411 (1962).
28. Векслер В. И. «Атомная энергия», **2**, 427 (1957).

29. Smulin R., Getti G. Phys. Rev. Lett., 9, 3(1962).
30. Alexeff I., Neidigh R. V. Phys. Rev., 129, 516 (1963).
31. Супруненко В. А. «Атомная энергия», 17, 83 (1964).
32. Демидов Б. А. и др. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 46, 497 (1964).
33. Hamberger S. Phys. Rev. Lett., 21, 674 (1968).
34. Недоспасов А. В. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 34, 1338 (1958).
35. Незлин М. В., Солнцев А. М. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 48, 1237 (1965).
36. Голант В. Е. «Успехи физ. наук», 79, 377 (1963).
37. Bohm D., Vignor E. The Characteristics of Electr. Discharges in Magn. Fields, Guthrie A., Wakerling R. K., N.—Y., 1949.
38. Ахмезер И. А., Дanelия И. Л., Цинцадзе Н. Л. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 46, 300 (1964).
39. Aamodt R. E., Drummond W. E. Nucl. Energy, Part C, 6, 147 (1964).
40. Такака С., Такаюта К. J. Phys. Soc. Japan, 21, 2372 (1966).
41. Данилкин И. М. и др. «Тр. Ин-та физ. АН СССР», 32, 112 (1966).
42. Арцимович Л. А. и др. «Атомная энергия», 1, 84 (1956).
43. Березин А. К. и др. Plasma Physics and Contr. Nucl. Fusion Res. Proc. Conf Culham 1965. England, 1965.
44. Векслер В. И. и др. «Атомная энергия», 18, 14 (1965).
45. Цытович В. Н. «Успехи физ. наук», 89, 89 (1965).
46. Гинзбург В. Л., Сыроватский С. И. Происхождение космических лучей, М., Изд-во АН СССР, 1963.
47. Гинзбург В. Л., Озерной Л. М. «Изв. вузов. Радиофизика», 9, 221 (1966).
48. Каплан С. А. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 29, 406 (1955).
49. Цытович В. Н. «Астрон. ж.», 40, 612 (1963).
50. Киржниц Д. А. Полевые методы теории многих частиц. М., Госатомиздат, 1963.
51. Бонч-Бруевич В. Л., Тябликов С. В. Метод функций Грина в статистической механике. М., Физматгиз, 1961.
52. Абрикосов А. А., Горьков Л. П., Дзялошинский Е. И. Метод квантовой теории в статистической физике. М., Физматгиз, 1962.
53. Михайловский А. Б. «Ядерный синтез», 4, 321 (1964).
54. Цытович В. Н. «Докл. АН СССР», 154, 76 (1964).
55. Романов Ю. Л., Филиппов Г. Ф. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 40, 123 (1961).
56. Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З. «Ядерный синтез», 1, 82 (1961). Дополнение 2, 465, 1962.
57. Drummond W. E., Pines P. Nucl. Fusion Supl. Part, 3, 1049 (1962).
58. Цытович В. Н. «Кинетическое уравнение для элементарных возбуждений и нелинейные взаимодействия волн в плазме». Препринт Физ. ин-та АН СССР, № 12, 1968.
59. Цытович В. Н. Нелинейные эффекты в плазме. М., «Наука», 1967.
60. Гайлитис А. К., Цытович В. Н. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 47, 1463 (1964).
61. Гайлитис А. К., Цытович В. Н. «Изв. вузов. Радиофизика», 7, 1190 (1964).
62. Цытович В. Н. «Успехи физ. наук», 90, 435 (1966).
63. Гинзбург В. Л., Франк И. М. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 16, 15 (1946).
64. Фаинберг Я. Б., Хижняк Н. А. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 32, 883 (1957).
65. Барсуков К. А., Болотовский Б. М. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 45, 303 (1963).

66. Г а й л и т и с А. К., Ц ы т о в и ч В. Н. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **46**, 1726 (1964).
67. Г а й л и т и с А. К. и др. Элементарные процессы нелинейного взаимодействия заряженных частиц с плазмой и уравнения слаботурбулентной плазмы. Доклад на седьмой конференции по явлениям в ионизированных газах. Белград. Югославия, август, 1965.
68. К о в р и ж н ы х Л. М., Ц ы т о в и ч В. Н. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **46**, 2212 (1964).
69. Л и п е р о в с к и й В. А., Ц ы т о в и ч В. Н. «Прикл. мех. и техн. физ.», **5**, 15 (1965).
70. К о в р и ж н ы х Л. М. «Тр. Физ. ин-та АН СССР. Сер. Физика плазмы», **32**, 173 (1966).
71. Ц ы т о в и ч В. Н. «Стохастические процессы в плазме». Материалы 9-й межд. конф. по явл. в ион. газах. Бухарест, 1969. Препринт Физ. ин-та АН, СССР. 1969.
72. К о р н и л о в Е. А. и др. «Письма ЖЭТФ», **3**, 354 (1966).
73. а) Г а м м И. Е., Ф р а н к И. М. «Докл. АН СССР», **14**, 107 (1937).
б) Б о л о т о в с к и й Б. М. «Успехи физ. наук», **62**, 201 (1957).
74. Б а с с Ф. Г., Ф а й н б е р г Я. Б., Ш а п и р о В. Д. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **49**, 329 (1965).
75. Ш а п и р о В. Д. «Письма ЖЭТФ», **2**, 469, вып. 10 (1965).
76. A l e x e f f J., N e i d i g h R. V., P e e d W. F. Phys. Rev., **136**, 689 (1964).
77. D u r g e e T. H. Phys. Fluids, **9**, 1773 (1966).
78. Р у д а к о в Л. И., Ц ы т о в и ч В. Н. «Plasma physics». Препринт Физ. ин-та АН СССР, № 28, 1970.
79. А х и е з е р А. И., Б е р е с т е ц к и й В. Б. Квантовая электродинамика. М., Физматгиз, 1962.
80. а) Л и п е р о в с к и й В. А., Ц ы т о в и ч В. Н. «Изв. вузов. Радиофизика», **9**, 469 (1966).
б) К о в р и ж н ы х Л. М. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **49**, 237, 1376 (1965).
81. Ц ы т о в и ч В. Н., Ш в а р ц б у р г А. Б. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **49**, 797 (1965).
82. Т р у б н и к о в Б. А., Б а ж а н о в а А. Е. В сб. «Физика плазмы и проблемы управляемых термоядерных реакций». Т. 3. М., Изд-во АН СССР, 1958, стр. 121.
83. Т р у б н и к о в Б. А. «Докл. АН СССР», **118**, 913 (1958).
84. Ч и р и к о в Б. В. Препринт № 191 ИЯФ СО АН СССР. Новосибирск, 1966.
85. А р н о л ь д В. И. «Усп. матем. наук», **18**, 91 (1963).
86. З а с л а в с к и й Г. М., Ч и р и к о в Б. В. «Докл. АН СССР», **159**, 306 (1969).
87. W o h n O., G r o s s E. P. Phys. Rev., **75**, 1851 (1949).
88. А х и е з е р А. И., Ф а й н б е р г Я. Б. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **21**, 1262 (1951).
89. С и л и н В. П., Р у х а д з е А. А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. М., Госатомиздат, 1961.
90. С т и к с Т. Теория плазменных волн. М., Атомиздат, 1965.
91. Ш а п и р о В. Д., Ш е в ч е н к о В. И. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **42**, 1515 (1962).
92. N e u f e l d S., D o y l e P. H. Phys. Rev., **127**, 846 (1962).
93. М а х а н ь к о в В. Г., Ш е в ч е н к о В. И. В сб. «Физика плазмы и управляемые термоядерные реакции». Киев, «Наукова думка», Т. 4, 1965. Препринт ОИЯИ Р-1659. Дубна, 1964.
94. М а х а н ь к о в В. Г., Ц ы т о в и ч В. Н. «Ж. техн. физ.», **38**, 809 (1968).
95. M a s c a r p l a n e G. G., N a u N. G. Proc. Phys. Soc., B **63**, 409 (1950).
96. H a r r i s o n E. R. Proc. Phys. Soc., B **82**, 889 (1963).

97. Ловецкий Е. Е., Рухадзе А. А. «Тр. Физ. ин-та АН СССР»,
32, 218 (1966).
98. Корнилов Е. А. и др. В сб. «Взаимодействие пучков заряженных
частиц с плазмой». Киев, «Наукова думка», 1965, стр. 36.
99. Веденов А. А. «Атомная энергия», 13, 5 (1962).
100. Шапиро В. Д. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 44, 613 (1963).
101. Левитский С. М., Шашурин И. П. «Ж. эксперим. и теор.
физ.», 52, 350 (1967).
102. Иванов А. А., Рудаков Л. И. «Ж. эксперим. и теор. физ.»,
51, 1522 (1966).
103. Levitskii S. M., Shashurin I. P. Ninth Int. conf. on
Phenomena in Ionized Gases 1969. Bucharest, 1969, p. 566.
104. Цытович В. Н., Шапиро В. Д. «Ядерный синтез», 5, 228
(1965).
105. Файнберг Я. Б., Шапиро В. Д. «Ж. эксперим. и теор. физ.»,
47, 1389 (1964).
106. Цытович В. Н., Шапиро В. Д. «Ж. техн. физ.», 35,
1925 (1965).
107. Андронов А. А., Трахтенгерц В. Ю. «Ж. эксперим. и
теор. физ.», 45, 1009 (1963).
108. Михайловский А. Б., Юнгвирт К. «Ж. эксперим. и
теор. физ.», 50, 1036 (1966).
109. Роуландс Дж., Шапиро В. Д., Шевченко В. И.
«Ж. эксперим. и теор. физ.», 50, 979 (1966).
110. Березин А. К. и др. В сб. «Взаимодействие пучков заряженных
частиц с плазмой». Киев, «Наукова думка», 1965, стр. 7.
111. Липеровский В. А. «Прикл. мех. и техн. физ.», 2, 23 (1967).
112. Федорченко В. И. и др. «Ж. техн. физ.», 32, 958 (1962).
113. Шафранов В. Д. В сб. «Вопросы теории плазмы». Под ред.
М. А. Леонтовича. Вып. 3. М., Госатомиздат, 1963, стр. 3.
114. Шафранов В. Д., Сагдеев Р. З. «Ж. эксперим. и теор.
физ.», 39, 181 (1960).
115. Степанов К. Н., Толок В. Т. «Ядерный синтез», 3, 251
(1963).
116. Ахиезер А. И., Ахиезер И. А., Половин Р. В., Си-
тенко А. Г., Степанов К. Н. Коллективные колебания в плазме. М.,
Атомиздат, 1964.
117. Haggis E. Phys. Rev., Lett., 2, 234 (1959).
118. Рудаков Л. И., Сагдеев Р. З. В сб. «Физика плазмы и
проблемы управляемых термоядерных реакций». Вып. 3. М., Изд-во АН
СССР, 1958, стр. 278.
119. Drummond W. E., Rosenbluth M. N., Johnson M.
Bull. Amer. Phys. Soc., 6, 185 (1961).
120. Тимофеев А. В., Пистунович В. И. В сб. «Вопросы тео-
рии плазмы». Под ред. М. А. Леонтовича. Вып. 5. М., Атомиздат, 1967,
стр. 351.
121. Красовицкий В. Б., Степанов К. Н. «Ж. техн. физ.»,
34, 1013 (1964).
122. Rosenbluth M. N., Post R. F. Phys. Fluids, 8, 547
(1965).
123. Galeev A. A. International centre for theoretical physics.
Trieste, 1966.
124. Тимофеев А. В., Пистунович В. И. «Вопросы теории
плазмы». Под ред. М. А. Леонтовича. Вып. 5. М., Атомиздат, 1967, стр. 35.
125. Будкер Г. И. В сб. «Физика плазмы и проблемы управляемых
термоядерных реакций». Т. 3. М., Изд-во АН СССР, 1958, стр. 32.
126. Drieser H. Phys. Rev., 117, 329 (1960).
127. Vineman O. Phys. Rev., 115, 503 (1959).
128. Haggison E. R. Plasma Phys., 4, 7 (1962).
129. Шапиро В. Д. «Ж. техн. физ.», 31, 552 (1961).

130. Ловецкий Е. Е., Рухадзе А. А. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **41**, 1845 (1961).
131. Stringer T. E. Nucl. Energy Part C, **6**, 267 (1964).
132. Drummond W. E., Rosenbluth M. N. Phys. Fluids, **5**, 12 (1962).
133. Степанов К. Н., Михайловский А. Б. «Ж. техн. физ.», **35**, 1933 (1965).
134. Баканов С. М., Рухадзе А. А. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **48**, 1656 (1965).
135. Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А. «Ядерный синтез», **6**, 176 (1966).
136. Field E. C., Fried B. D. Phys. Fluids, **7**, 1937 (1964).
137. Рудаков Л. И., Кораблев Л. В. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **50**, 220 (1966).
138. Петвиашвили В. И. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **44**, 1933 (1963).
139. Петвиашвили В. И. «Докл. АН СССР», **153**, 1295 (1963).
140. Коврижных Л. М. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **51**, 915 (1966).
141. Ахиезер И. А. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **47**, 2269 (1964).
142. Цытович В. Н. «Plasma Physics», **13**, 100 (1971).
143. Файнберг Я. Б. Взаимодействие пучков заряженных частиц с плазмой. В сборнике «A Survey of Phenomena in Ionized Gases». J. Inv. papers. IAEA, Vienna, 1968.
144. Smulin L. O. Recent results on the beam-plasma discharges in «A Survey on Phenomena in Ionized Gases». Jnv. papers IAEA, Vienna, 1968.
145. Бабыкин М. В. и др. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **47**, 1631 (1964).
146. Alexeff et al. Phys. Rev., Lett., **18**, 25 (1967).
147. Стефановский А. М. «Ядерный синтез», **5**, 215 (1965).
148. Андрюхина Э. Д., Шпигель И. С. «Ж. техн. физ.», **37**, 894 (1967).
149. Бучельникова Н. С. «Ядерный синтез», **6**, 122 (1966).
150. Jančářík J., Hamberger S. M. Report on 8 Europ. conf. on plasma phys., Rome (1970).
151. Daughney C. C. et al. Report on 8 Europ. conf. on plasma phys., Rome (1970).
152. Кадомцев Б. Б., Погуце О. П. В сб. «Вопросы теории плазмы». Под ред. М. А. Леонтовича. Вып. 5. М., Атомиздат, 1967, стр. 209.
153. Михайловский А. Б. В сб. «Вопросы теории плазмы». Под ред. М. А. Леонтовича. Вып. 3. М., Госатомиздат, 1963, стр. 141.
154. Рудаков Л. И., Сагдеев Р. З. «Докл. АН СССР», **138**, 581 (1961).
155. Галеев А. А., Ораевский В. Н., Сагдеев Р. З. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **44**, 903 (1963).
156. Церковников Ю. А. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **32**, 67 (1957).
157. Кадомцев Б. Б., Тимофеев А. В. «Докл. АН СССР», **146**, 581 (1962).
158. Rosenbluth M. N., Krall N. A., Rostoker N. «Ядерный синтез», Прил. **1**, 143 (1962).
159. Тимофеев А. В. «Докл. АН СССР», **152**, 84 (1963).
160. Михайловский А. Б., Рудаков Л. И. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **44**, 912 (1963).
161. Михайловский А. Б., Тимофеев А. В. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **44**, 919 (1963).
162. Галеев А. А., Рудаков Л. И. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **45**, 647 (1963).
163. Hoh F. G. Phys. Fluids, **8**, 968 (1965).
164. Иванов А. А. Автореферат диссертации. МФТИ, 1967.
165. Рудаков Л. И. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **48**, 1372 (1965).

166. Галеев А. А., Карпман В. И., Сагдеев Р. З. «Ядерный синтез», **5**, 20 (1965).
167. Карпман В. И. «Прикл. мех. и техн. физ.», **6**, 34 (1963).
168. Галеев А. А., Моисеев С. С., Сагдеев Р. З. «Атомная энергия», **15**, 451 (1963).
169. Ахиезер И. А. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **48**, 1159 (1965).
170. Бучельникова Н. «Теплофизика высоких температур», **2**, 309 (1964).
171. Kadomtsev V. B., Nedospasov A. V. J. Nucl. Energy Part C, **1**, 230 (1960).
172. Петвиашвили В. И., Рамазашвили Р. Р., Цинцадзе М. Л. «Ядерный синтез», **5**, 23 (1965).
173. Samas M. et al. Nucl. Fusion, Supl., **2**, 423 (1962).
174. Галеев А. А., Карпман В. И. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **44**, 592 (1963).
175. Moiseev S., Sagdееv R. J. Nucl. Energy Part C, **5**, 43 (1963.)
176. Ахиезер А. И., Файнберг Я. Б., Любарский Г. Я. Ученые записки. Т. 62. «Труды физ.-мат. факультета ХГУ», **6**, 73 (1955).
177. Ахиезер А. И., Любарский Г. Я. «Докл. АН СССР», **80**, 193 (1955).
178. Сагдеев Р. З. «Ж. техн. физ.», **31**, 1185 (1961).
179. Цытович В. Н. «Докл. АН СССР», **142**, 63 (1962).
180. Цытович В. Н. «Ж. техн. физ.», **32**, 1042 (1962).
181. Сыроватский С. И. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **40**, 1788 (1961).
182. Куртмулаев Р. Х. и др. Материалы конференции в КАЛЭМ Англия, 1965. Plasma Phys. and Contr. Therm. Fus. Res. Proc. Conf. Kaltham, England (1965).
183. Алиев Ю., Силин В. П. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **48**, 901 (1965).
184. Алиев Ю. М., Силин В. П., Уотсон Х. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **50**, 943 (1966).
185. Цытович В. Н. «Ж. техн. физ.», **35**, 773 (1965).
186. Липеровский В. А., Цытович В. Н. «Ж. техн. физ.», **36**, 575 (1966).
187. Липеровский В. А., Цытович В. Н. «Прикл. мех. и техн. физ.», **2**, 116 (1966).
188. Цытович В. Н., Шварцбург А. Б. «Ж. техн. физ.», **36**, 1915 (1966).
189. Липеровский В. А., Цытович В. Н. «Доклад на VII конференции по ионизированным явлениям в газах. Белград, август, 1965».
190. Мандельштам С. Л. и др. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **47**, 2003 (1964).
191. Цытович В. Н. «Ж. техн. физ.», **39**, 1756 (1969); Tsyto vich V. N. «Eight Int. Conf. on Phen. in Ionized Gases 1967 Contr. papers.», Vienna, Austria, Printed IAEA, 1967, p. 408.
192. Маханьков В. Г., Цытович В. Н. «Ж. техн. физ.», **40**, 681 (1970).
193. Geker J. R. et al. «Nine Int. Conf. on Phen. in Ionized Gases 1969. Contr. papers». Bucharest, Romania IAEA, 1969, p. 427.
194. Caruso A., Gratton R. Some properties of the plasmas produced by irradiating light solids by lasers. Laboratorio gas ionizzati Frascati, Rome 1968. Caruso A., Guipponi. Ionisation and heating of a solid hydrogen pellet by means of a laser pulse. Laboratorio gas ionizzati, Frascati Rome, 1968.
195. Vasov N. G., Kropkin O. N. Proc. of Conference on Quantum Electronics, Paris, 1963.
196. Озерной Л. М. «Астрон. ж.», **43**, 300 (1966).
197. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. «Успехи физ. наук», **86**, 447 (1965).

198. Каплан С. А. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 27, 699 (1954).
199. Цытович В. Н. «Астрон. ж.», 42, 33 (1965).
200. Пикельнер С. Б., Гинцбург М. А. «Астрон. ж.», 40, 842 (1963).
201. Гинцбург В. Л. «Астрон. ж.», 42, 1129 (1965).
202. Трахтенгерц В. Ю. «Астрон. ж.», 43, 357 (1966).
203. Криворучкий Э. Н., Цытович В. Н. «Астрон. ж.», 46, 1003 (1969).
204. Гордон И. М. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 37, 853 (1959).
205. Ковнер М. С., Чертог И. М. «Геомагнетизм и аэрономия», 3, 1014 (1963).
206. Пикельнер С. Б. «Успехи физ. наук», 88, 505 (1966).
207. Трахтенгерц В. Ю., Гершман Б. Я. «Успехи физ. наук», 89, 201 (1966).
208. Sonett C. J. Geophys. Res., 68, 1265 (1963).
209. Гинцбург В. Л., Озерной Л. М. «Астрон. ж.», 43, 27 (1965).
210. Липеровский В. А., Цытович В. Н. «Изв. вузов. Радиофизика», 12, 823 (1969).
211. Пикельнер С. Б., Цытович В. Н. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 55, 977 (1968).
212. Жидков Е. П., Маханьков В. Г., Цытович В. Н., Чой Зай Хен. Препринт ОИЯИ Р9-4464 Дубна (1969).
213. Липеровский В. А., Цытович В. Н. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 57, 1252 (1969).
214. Захаров В. Е. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 51, 689 (1966).
215. Маханьков В. Г., Цытович В. Н. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 53, 1789 (1967).
216. Климонтович Ю. Л. Статистическая теория неравновесных процессов в плазме. Изд-во МГУ, 1964.
217. Ландау Л. Д. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 7, 203 (1936).
218. Брагинский С. И. В сб. «Вопросы теории плазмы». Под ред. М. А. Леонтовича. Вып. 1. М., Госатомиздат, 1963, стр. 191.
219. Маханьков В. Г., Цытович В. Н. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 56, 1872 (1969).
220. Кадомцев Б. Б., Петвиашвили В. И. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 43, 2234 (1962).
221. Чихачев А. С., Цытович В. Н. «Изв. вузов. Радиофизика», 12, 26 (1969).
222. Калинин Ю. Г. и др. «Докл. АН СССР», 189, 137 (1969).
223. Кингсеп А. С. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 58, 1040 (1970).
224. Лившиц М. А., Цытович В. Н. «Ж. эксперим. и теор. физ.» (1971); Препринт ФИАН СССР, 100, 1970.
225. Кингсеп А. С. Автореферат диссертации Моск. инж.-физ. ин-та, М., 1970.
226. Лившиц М. А., Цытович В. Н. «Ядерный синтез», 10, 241 (1970); Препринт ФИАН СССР, № 160 (1969).
227. Ораевский В. Н., Сагдеев Р. З. «Ж. техн. физ.», 32, 1291 (1962).
228. Ораевский В. Н. «Ядерный синтез», 4, 263 (1964).
229. Цытович В. Н. «Изв. вузов. Радиофизика», 6, 641 (1963); «Изв. АН СССР», Сер. Физика, 33, 1800 (1969).
230. Fermi E. Phys. Rev., 57, 485 (1940).
231. Пикельнер С. Б. Основы космической электродинамики. М., «Наука», 1965.
232. Бурштейн Э. Л., Векслер В. И., Коломенский А. А. Некоторые вопросы теории циклических ускорителей. М., Изд-во АН СССР, 1955, стр. 3.
233. Барбиер М., Келлер Р. В. в кн. «Труды Международной конференции по ускорителям». ЦЕРН, Женева, 1959, стр. 187, 636.

234. Гуревич А. В. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **38**, 1597 (1960).
235. Данилкин И. С., Цытович В. Н. «Ж. техн. физ.», **34**, 1365 (1964).
236. Лукьянов С. Ю., Подгорный И. М. «Атомная энергия», **3**, 97 (1956).
237. Ковальский И. Г., Подгорный И. М. Хвощевский С. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **35**, 940 (1958).
238. Райзер М. Д., Цытович В. Н. «Атомная энергия», **17**, 185 (1964).
239. Alexeff I. et al. Phys. Rev. Lett., **10**, 273 (1963).
240. Незлин М. В., Солнцев А. М. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **45**, 840 (1963).
241. Beregin et al. Nucl. Energy Part C, **7**, 593 (1965).
242. Цытович В. Н. «Астрон. ж.», **42**, 33 (1965).
243. Гайлитис А. К., Цытович В. Н. «Астрон. ж.», **41**, 452 (1964).
244. Цытович В. Н. «Астрон. ж.», **41**, 7 (1964).
245. Цытович В. Н. «Астрон. ж.», **40**, 612 (1963).
246. Цытович В. Н. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **43**, 327 (1962).
247. Ландау Л. Д. Лифшиц Е. М. Теория поля. М.—Л., «Наука», 1968, стр. 170.
248. Цытович В. Н. «Вестн. Моск. ун-та», **11**, 27 (1951).
249. Цытович В. Н., Чихачев А. С. В сб. «Физика плазмы». Вып. 2. Сб. ст. под ред. С. Ю. Лукьянова. М., Атомиздат, 1969, стр. 87.
250. Цытович В. Н. «Изв. вузов. Радиофизика», **6**, 918 (1963).
251. Цытович В. Н., Чихачев А. С. «Астрон. ж.», **46**, 486 (1969).
- 47, 479 (1970).
252. Сазонов В. Н., Цытович В. Н. «Изв. вузов. Радиофизика», 1968.
253. Гайлитис А. К., Цытович В. Н. «Изв. вузов. Радиофизика», **6**, 1103 (1963).
254. Разин В. А. «Изв. вузов. Радиофизика», **3**, 584 (1962).
255. Железняков В. В. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **52**, 1406 (1967).
256. Коврижных Л. М. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **52**, 1406 (1967).
257. Цытович В. Н. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **42**, 803 (1962).
258. Melrose D. B. Preferential Acceleration of Heave Ions from Thermal Velocities, preprint Belfer Graduate School of Science Yeshiva University, N. Y. (1967).
259. Тверской Б. А. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **53**, 1417 (1967).
260. Гинзбург В. Л., Пикельнер, С. Б. Шкловский И. С. «Астрон. ж.», **32**, 503 (1955).
261. Каплан С. А., Цытович В. Н. «Успехи физ. наук», **97**, 77 (1969).
262. Розенберг Г. «Успехи физ. наук», **56**, 77 (1955).
263. Борн М. «Оптика». Харьков—Киев, Гос. науч. техн. изд., 1937.
264. Гинзбург В. Л., Железняков В. В. «Астрон. ж.», **35**, 694 (1958).
265. Ситенко А. Г. Электромагнитные флуктуации в плазме. Изд. ХГУ, 1965.
266. Цытович В. Н. «Астрон. ж.», **45**, 1016 (1958).
267. Галицкий В. М., Мигдал А. Б. В сб. «Физика плазмы и проблемы управляемых термоядерных реакций», Т. 1. М., Изд. АН СССР, 1958, стр. 16.
268. Гинзбург В. Л., Сазонов В. Н., Сыроватский С. И. «Успехи физ. наук», **96**, 63 (1968).
269. Сазонов В. Н. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **56**, 1075 (1969).
270. Каплан С. А., Цытович В. Н. «Астрон. ж.», **45**, 777 (1968).
271. Лившиц М. А., Цытович В. М. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **53**, 1610 (1967).

272. Р ю т о в Д. Д. «Докл. АН СССР», **164**, 1273 (1965).
273. Д а н и л к и н И. С. и др. «Тр. Физ. ин-та АН СССР», **32**, 112 (1966).
274. К о в р и ж н ы х Л. М. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **59**, 1795 (1966).
275. А х и е з е р А. И., А х и е з е р И. А., С и т е н к о А. Г. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **41**, 478 (1966).
276. К р о п о т к и н А. П., П у с т о в а л о в В. В. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **49**, 1345 (1965).
277. Д е м и д о в Б. А., Ф а н ч е н к о С. Д. «Письма ЖЭТФ», **2**, 533 (1965).
278. Д е м и д о в Б. А., Ф а н ч е н к о С. Д. «Атомная энергия», **20**, 516 (1966).
279. C h e n J. G., L e h e n y R. F., M a r s h a l l T. C. Phys. Rev. Lett., **15**, 84 (1965).
280. J a n n u z z i M., M a g i s t r e l l y F. Nuovo Cimento, **40**, 424 (1965).
281. E n r i q u e s L., J a n n u z z i M., R i c h e t t i G. B. Nuovo Cimento, **49**, 66 (1968).
282. D o g h e r t y I. P., F a r l e y D. T. Proc. Roy. Soc., A **259**, 79 (1960).
283. V a n i e k R. W., S w a s o n D. G., G e a n n o n R. T. Phys. Rev. Lett., **15**, 444 (1965).
284. M a s s i a n A., V a n d e n p l a s P. A. «Eight int Conf. on Phen in Ionized Gases. 1967. Contr papers». Vienna, Austria, Printed IAEA, 1967, p. 407.
285. Ц ы т о в и ч В. Н. «Астрон. ж.», **41**, 992 (1964).
286. К а п л а н С. А., Ц ы т о в и ч В. Н. «Астрофизика», **4**, 337 (1968).
287. Г о р д о н И. М. «Астрон. ж.», **44**, 702 (1967).
288. К а п л а н С. А., Ц ы т о в и ч В. Н. «Астрон. ж.», **44**, 1036 (1967).
289. J a m e s J. Astroph. J., **146**, 356 (1966).
290. G o r d o n I. M. Astroph. Lett., **2**, 49 (1968).
291. К а п л а н С. А., Ц ы т о в и ч В. Н. «Астрон. ж.», **46**, 192 (1969).
292. К у л а г и н А. Г., С а х о к и я Д. М., Ц ы т о в и ч В. Н. «Ядерный синтез» (в печати).
293. В и т к е в и ч В. В., А н т о н о в а Т. Ф. «Астрон. ж.», **45**, 991 (1968).
294. С а х о к и я Д. М., Ц ы т о в и ч В. Н. «Ядерный синтез», **8**, 241 (1968).
295. S a l p e t e r E. E. Astrophys., **147**, 433 (1967).
296. Р ы т о в С. М. Теория электрических флюктуаций и теплового излучения. М., Изд-во АН СССР, 1953.
297. К у л а г и н А. Г., С а х о к и я Д. М., Ц ы т о в и ч В. Н. «Изв. вузов. Радиофизика» (в печати).
298. Ч е р н о в Л. А. Распространение волн в среде со случайными неоднородностями. М., Изд-во АН СССР, 1958.
299. В в е д е н о в А. А., Р у д а к о в Л. И. «Докл. АН СССР», **159**, 767 (1954).
300. Г а й л и т и с А. К. Диссертация, ФИ АН СССР, 1964.
301. Ц ы т о в и ч В. Н. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **57**, № 6 (1969).
302. К р и в о р о у ц к и й Э. Н., М а х а н ь к о в В. Г., Ц ы т о в и ч В. Н. «Ядерный синтез», **9**, 97 (1969). Препр. ОИЯИ Р9-3982. Дубна, 1968.
303. Ц ы т о в и ч В. Н. «Докл. АН СССР», **181**, 60 (1968).
304. Б е т ч е р о л Г. В кн. «Проблемы космической электродинамики». М., Изд-во иностр. лит., 1953, стр. 179.
305. Л а н д а у Л. Д. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **11**, 592 (1941).
306. Л и п е р о в с к и й В. А., Ц ы т о в и ч В. Н. «Ж. техн. физ.», **36**, 576 (1966).
307. Р у д а к о в Л. И., С а г д е е в Р. З. «Докл. АН СССР», **138**, 581 (1961).

308. Цытович В. Н. Электромагнитные свойства турбулентной плазмы. Препринт Физ. ин-та АН № 150, 1969.
309. Гапонов А. В., Миллер М. А. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **34**, 242, 751 (1958).
310. Геккер И. Р. и др. Препринт Физ. ин-та АН СССР, № 58, 1969.
311. Машап'сков V. G., Tsyto vich V. N. «Plasma Phys.», **12**, 741 (1970). Препринт ОИЯИ Р9-4854. Дубна, 1969.
312. Маханьков В. Г., Щинов Б. А. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **57**, 877, 2969. Препринт ОИЯИ Р9-4337. Дубна, 1969.
313. Файнберг Я. Б., Шапиро В. Д. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **52**, 293 (1967).
314. Рудаков Л. И. и др. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **53**, 1690 (1967).
315. Пешков В. П. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **16**, 1000 (1946).
316. Пятаевский Л. П. «Успехи физ. наук», **95**, 139 (1968).
317. Ichimaru S. Phys. Rev., **165**, 251 (1968).
318. Канер Э. А., Яковенко В. М. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **8**, 587 (1970).

| | |
|---|-----|
| Предисловие | 3 |
| Глава 1. Общие представления о турбулентном состоянии вещества | |
| § 1.1. Определение турбулентности | 5 |
| § 1.2. Статистическое описание турбулентности | 8 |
| § 1.3. Спектр турбулентных пульсаций несжимаемой жидкости | 14 |
| § 1.4. Линейные коллективные степени свободы плазмы | 18 |
| § 1.5. Нелинейные коллективные движения плазмы. Сильная и слабая турбулентность | 39 |
| § 1.6. Основные проблемы физики турбулентного состояния плазмы | 43 |
| § 1.7. Турбулентная плазма в эксперименте и в природе | 46 |
| Глава 2. Основные положения теории турбулентности плазмы | |
| § 2.1. Метод усреднения по статистическому ансамблю | 52 |
| § 2.2. Линейные эффекты изменения распределения турбулентных пульсаций плазмы | 57 |
| § 2.3. Нелинейное взаимодействие турбулентных пульсаций плазмы | 64 |
| § 2.4. Интерпретация нелинейных взаимодействий турбулентных пульсаций как индуцированного рассеяния плазмонов на плазмонах и на «частицах» плазмы | 68 |
| § 2.5. Корреляция турбулентных пульсаций в плазме | 76 |
| § 2.6. Квазилинейное приближение | 86 |
| § 2.7. Эффекты корреляций турбулентных пульсаций при их взаимодействии с частицами плазмы | 93 |
| § 2.8. Турбулентное уширение резонансов во взаимодействии частиц и плазмонов | 99 |
| § 2.9. Общие уравнения баланса для взаимодействия частиц и турбулентных пульсаций плазмы | 105 |
| § 2.10. Вычисление вероятностей процессов | 114 |
| Глава 3. Коллективная диссипация и коллективное возбуждение турбулентных пульсаций плазмы | |
| § 3.1. Коллективная диссипация турбулентных пульсаций плазмы | 125 |
| § 3.2. Механизмы возбуждения турбулентности | 135 |
| § 3.3. Взаимодействие пучков заряженных частиц с плазмой | 137 |
| § 3.4. Возбуждение турбулентности из-за анизотропной и конусной неустойчивостей | 149 |
| § 3.5. Возбуждение турбулентности постоянным электрическим полем | 155 |
| § 3.6. Возбуждение турбулентности в неоднородной плазме. Дрейфовые неустойчивости плазмы | 162 |

| | |
|--|-----|
| § 3.7. Возбуждение турбулентности электромагнитными волнами и лазерами | 170 |
| § 3.8. Механизмы генерации турбулентности в астрофизических условиях | 176 |

Глава 4. Спектры стационарной турбулентности плазмы

| | |
|---|-----|
| § 4.1. Классификация типов стационарной турбулентности плазмы | 179 |
| § 4.2. Нелинейные взаимодействия и спектральные перекачки энергии ленгмюровских пульсаций в изотропной плазме | 181 |
| § 4.3. Спектры стационарной ленгмюровской турбулентности изотермической плазмы | 185 |
| § 4.4. Спектры низкочастотных пульсаций, возбуждаемых ленгмюровской турбулентностью в изотермической плазме | 198 |
| § 4.5. Спектры ленгмюровских пульсаций неизолированной плазмы | 202 |
| § 4.6. Корреляции и нелинейные сдвиги частот ленгмюровских пульсаций в турбулентной плазме. | 210 |
| § 4.7. Влияние парных соударений частиц на корреляции и спектры ленгмюровской турбулентности | 214 |
| § 4.8. Спектры ионно-звуковой турбулентности | 231 |
| § 4.9. Влияние магнитного поля на взаимодействие и спектры продольных пульсаций плазмы | 238 |
| § 4.10. Спектры турбулентности вистлеров | 242 |
| § 4.11. Спектры магнитогидродинамической турбулентности плазмы | 251 |

Глава 5. Стохастическое ускорение частиц в турбулентной плазме

| | |
|---|-----|
| § 5.1. Общие вопросы теории | 254 |
| § 5.2. Стохастическое ускорение заряженных частиц ленгмюровскими пульсациями | 261 |
| § 5.3. Стохастическое ускорение высокочастотными пульсациями в магнитоактивной плазме | 270 |
| § 5.4. Стохастическое ускорение частиц высокочастотным электромагнитным излучением в магнитоактивной плазме | 276 |
| § 5.5. Стохастическое ускорение частиц низкочастотными ионно-звуковыми пульсациями | 282 |
| § 5.6. Ускорение альфвеновскими и магнитозвуковыми пульсациями | 285 |
| § 5.7. Ускорение заряженных частиц при индуцированном рассеянии на турбулентных пульсациях | 292 |
| § 5.8. Эффективность различных механизмов ускорения и их влияние на спектры турбулентности | 293 |

Глава 6. Излучение турбулентной плазмы

| | |
|---|-----|
| § 6.1. Общая постановка проблемы | 296 |
| § 6.2. Описание процессов излучения и распространения электромагнитных волн в турбулентной плазме с помощью параметров Стокса | 301 |
| § 6.3. Излучение ленгмюровской турбулентностью электромагнитных волн с частотами порядка ω_{pe} | 312 |
| § 6.4. Излучение электромагнитных волн турбулентной плазмой, находящейся во внешнем магнитном поле | 324 |
| § 6.5. Излучение надтепловых и релятивистских частиц турбулентной плазмы | 329 |
| § 6.6. Воздействие излучения турбулентной плазмы на спектры быстрых частиц | 341 |

| | |
|---|------------|
| Глава 7. Прохождение электромагнитных волн через турбулентную плазму | |
| § 7.1. Общая постановка задачи | 346 |
| § 7.2. Общая теория рассеяния | 349 |
| § 7.3. Рассеяние электромагнитных волн в турбулентной плазме | 356 |
| § 7.4. Усиление электромагнитных волн при распространении в турбулентной плазме | 360 |
| § 7.5. Флуктуации интенсивности электромагнитных волн при прохождении через турбулентную плазму | 365 |
| Глава 8. Электромагнитные свойства турбулентной плазмы | |
| § 8.1. Общая постановка задачи | 371 |
| § 8.2. Разложение интегралов соударений частиц и турбулентных пульсаций по энергии турбулентности | 375 |
| § 8.3. Интегральное уравнение для суммирования рядов по энергии турбулентности в интеграле соударений частиц и турбулентных пульсаций | 382 |
| § 8.4. Диэлектрическая проницаемость изотропной турбулентной плазмы | 388 |
| § 8.5. Потенциальные неустойчивости изотропной турбулентной плазмы | 392 |
| § 8.6. Дрейфовые неустойчивости турбулентной плазмы | 397 |
| § 8.7. Спонтанное возбуждение магнитных полей в турбулентной плазме | 402 |
| § 8.8. Скин-эффект в турбулентной плазме | 405 |
| § 8.9. Второй звук в турбулентной плазме | 408 |
| Л и т е р а т у р а | 411 |

Цытович Вадим Николаевич

ТЕОРИЯ ТУРБУЛЕНТНОЙ ПЛАЗМЫ

Редактор *В. Н. Безрукова*

Художественный редактор *А. С. Александров*

Художник *А. И. Шавард*

Технический редактор *А. Л. Гулина*

Корректор *З. А. Авдюшева*

Сдано в набор 13/X 1970 г.

Подписано к печати 28/VI 1971 г. Т—08492.

Формат 60×90/16 Бумага типографская № 2

Усл. печ. л. 26,5 Уч.-изд. л. 25,27

Тираж 2 775 экз. Цена 2 р. 74 к. Зак. изд. 1527.

Зак. тип. 1447

Атомиздат, Москва, К-31, ул. Жданова, 5/7

Московская типография № 4 Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР

Б. Переяславская, 46

В.Н.ЦЫТОВИЧ

**ТЕОРИЯ
ТУРБУЛЕНТНОЙ
ПЛАЗМЫ**

