Н. ДАНФОРД и ДЖ. Т. ШВАРЦ

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ

LINEAR OPERATORS

Part I:

GENERAL THEORY

Nelson DUNFORD and Jacob T. SCHWARTZ

Yale University

With the assistance

of William G. BADE and Robert G. BARTLE

Yale University

1958

INTERSCIENCE PUBLISHERS,

NEW YORK, LONDON

Н. Данфорд и Дж. Шварц
при участии
У. Бейда и Р. Бартла

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ
Общая теория

Перевод с английского
Л. И. Головиной и Б. С. Митягина

Под редакцией
А. Г. Костюченко

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1962

АННОТАЦИЯ

Первый том фундаментальной монографии по теории линейных операторов (второй том — «Спектральная теория» — вышел в США в 1961 г.). Авторы дают как исчерпывающий обзор общей теории линейных операторов (т. I), так и многочисленные ее применения к различным вопросам анализа (т. II). Первый том содержит подготовительный материал: теоретико-множественные, топологические и алгебраические понятия, основные принципы линейного анализа, теорию интегрирования и функций множеств. Далее идут примеры специальных пространств, обзор слабых топологий, теория операторов и общая спектральная теория. Последняя глава первого тома посвящена некоторым приложениям (полугруппы и эргодическая теория). Том снабжен огромной библиографией, доведенной до последних лет.

Книга написана четким языком и снабжена многочисленными упражнениями; она может поэтому служить учебником по теории линейных операторов. Книга доступна студентам старших курсов математических факультетов университетов и пединститутов; студенты и аспиранты, специализирующиеся по теоретической физике найдут в книге много полезного материала, поскольку теория линейных операторов является основным аппаратом современной физики (квантовая механика и квантовая теория поля). Для специалистов книга послужит исчерпывающим справочником.

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Функциональный анализ за последние два десятилетия настолько разросся, настолько широко и глубоко проник почти во все области математики, что сейчас даже трудно определить самый предмет этой дисциплины. Однако в функциональном анализе есть несколько больших «традиционных» направлений, которые и поныне в значительной степени определяют его лицо. К их числу принадлежит и теория линейных операторов, которую иногда называют становым хребтом функционального анализа.

Именно через теорию операторов функциональный анализ сомкнулся с квантовой механикой, дифференциальными уравнениями, теорией вероятностей, целым рядом прикладных дисциплин. В последнее время в этой теории стали намечаться и новые горизонты.

Теории операторов и посвящена настоящая книга двух американских математиков Н. Данфорда и Дж. Т. Шварца (уместно заметить, что первый из них — Н. Данфорд является ветераном функционального анализа). Авторы назвали свою книгу «Теорией операторов», но в ней последовательно излагается такое большое число различных фактов из функционального анализа, что по этой книге можно начать изучать собственно функциональный анализ. Этому весьма способствует и то, что книга открывается главой, в которой приводятся все необходимые в дальнейшем сведения из теории множеств, топологии и алгебры. В последующих главах авторы излагают основные принципы линейного анализа, общую теорию меры и интегрирования. Весьма детально разобраны специальные пространства C и L_p, используемые в теории полугрупп линейных операторов и эргодической теории.

Интересной является глава V, посвященная слабой топологии и выпуклым множествам. Здесь собран обширный материал, часть которого ранее можно было найти только в журнальной литературе. Приятно, что знаменитую теорему Крейна — Мильмана о крайних точках, играющую важную роль в динамических системах, теории представлений и других областях математики, наконец-то можно будет увидеть в широко доступной книге.

На русском языке имеется книга Э. Хилле[1]), посвященная теории полугрупп. Однако книга Э. Хилле слишком обширна и для пер-

[1]) Второе издание книги «Функциональный анализ и полугруппы» написано Э. Хилле совместно с Р. Филлипсом. Его перевод находится в печати.— *Прим. ред.*

вого чтения трудна. Можно поэтому сказать, что до сих пор мы не имели удобного для широкого круга читателей изложения теории полугрупп. Этот пробел ликвидирует первая половина VIII главы, которая содержит весьма четкое и ясное введение в эту теорию. Хотя изложение и краткое, читатель хорошо чувствует красоту и силу применяемых методов. Вторая часть VIII главы содержит начала эргодической теории. Те или иные аспекты этой теории в последнее время не раз уже излагались в нашей литературе, однако читатель найдет в книге много новых сведений. Эргодической теорией заканчивается первый том. Второй том авторы предполагают в основном посвятить так называемым спектральным операторам и их приложениям к теории несамосопряженных дифференциальных операторов. По-видимому, это будет самая интересная часть книги.

Хотелось бы отметить большое число превосходных задач и упражнений, которыми снабжены все главы книги. В конце каждой главы имеются литературные указания и исторические справки, иногда обширные, иногда весьма беглые. К ним читатель должен отнестись критически, так как они не всегда точно отражают историю вопроса. В некоторых местах сделаны соответствующие редакторские примечания, но рекомендуется по таким вопросам обращаться дополнительно к соответствующим обзорам в сборниках «Математика в СССР за 30 лет» и «Математика в СССР за 40 лет». Терминология авторов приближена, как только возможно, к терминологии, принятой в советской литературе. Перевод глав I—VI принадлежит Л. И. Головиной, глав VII и VIII—Б. С. Митягину.

А. Г. Костюченко

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРОВ

В двух частях *«Теории линейных операторов»* мы попытались дать полный обзор общей теории линейных операторов, вместе с приложениями этой теории к различным областям классического анализа. При этом нам хотелось подчеркнуть значение связи между абстрактной теорией и ее приложениями, этим устанавливается общий тон и определяется общая структура книги. Так, здесь весьма подробно исследуется (гл. XIII) спектральная теория обыкновенных самосопряженных дифференциальных операторов, в то время как теория локально-выпуклых пространств рассматривается (гл. V) довольно коротко и притом лишь в ее связи с теорией B-пространств. Приложения общей теории даются в двух планах: и в тексте, и в виде соответствующим образом подобранных серий упражнений. Так, глава VIII посвящена эргодической теории и теории полугрупп, глава XI — различным вопросам, включая теорию интегральных уравнений, гармонический анализ, теоремы о замыкании винеровского типа, сингулярные интегральные операторы и почти периодические функции, а главы XIII, XIV, XIX и XX — различным аспектам спектральной теории дифференциальных операторов. С другой стороны отдельные куски теории суммирования рядов и интегралов даются в виде серий упражнений в главах II и IV, теория ортогональных разложений — в виде упражнений в главе IV, теория неравенств — в главе VI, теория тауберовых теорем типа Харди — Литлвуда — в главе XI и т. д. Упражнения (которых в книге имеется около тысячи) подбирались весьма тщательно. Они представляют собой не обычные шаблонные тренировочные задачи, но предназначаются для того, чтобы развить изложенную в тексте теорию и привлечь внимание читателя к ее интересным и подчас удивительным приложениям. Читателю рекомендуется прочитывать упражнения даже и в том случае, если он не собирается заниматься подробным их решением.

Деление настоящей работы на две части основывается на следующем принципе: в первой части помещен весь материал, связанный с топологической теорией пространств и операторов, и весь материал, имеющий отношение к спектральной теории произвольных операторов, во второй — весь материал, относящийся к теории вполне приводимых операторов. Разумеется, иногда мы находили целесообразным нарушать этот принцип.

Эта книга предназначена как для студентов, так и для зрелых математиков. Большая часть текста выросла непосредственно из лекций, читанных авторами в течение многих лет; обе его части можно использовать при чтении соответствующих лекционных курсов. Так, главы I, II и избранные вопросы из глав III и IV составляют исчерпывающий одногодичный курс по теории функций вещественного переменного. Материал, содержащийся в главах VI, VII, IX и X, с выдержками из глав V, VIII и XI многократно использовался нами в качестве основы для одногодичного цикла лекций по теории операторов. Одногодичный курс по спектральной теории самосопряженных дифференциальных операторов с соответствующими граничными задачами можно основывать на главах IX, X, XII и XIII. Многие другие вопросы, такие, как гармонический анализ, эргодическая теория, теория полугрупп и общая теория вполне приводимых («спектральных») операторов в B-пространстве рассматриваются в главах XV—XX, которые могут быть использованы для изучения в семинаре.

Для чтения настоящего трактата требуется сравнительно немного предварительных сведений, почти все в нем доступно каждому, кто изучал элементарные алгебраические и топологические свойства вещественных и комплексных числовых систем и те основные результаты теории функций комплексного переменного, которые сосредотачиваются вокруг интегральной теоремы Коши. Лишь в небольшом числе отдельных мест требуется знание и несколько менее элементарных результатов алгебры и анализа (например, теории определителей, подготовительной теоремы Вейерштрасса). Большая часть необходимых для понимания книги понятий и результатов из общей топологии и абстрактной алгебры излагается в тексте, хотя характер изложения таков, что он требует от читателя значительной общей математической культуры. Желательно, чтобы читатель был знаком с этими двумя предметами хотя бы в объеме одного семестра изучения абстрактной алгебры и теории функций комплексного переменного.

Для того чтобы облегчить использование большого количества фактов, собранных в настоящем трактате, мы дополнили его справочным материалом. Так, таблица в начале книги графически показывает взаимную зависимость параграфов различных глав. Таблицы свойств нескольких специальных B-пространств и операторов, отображающих эти пространства друг в друга, приводятся в главах IV и VI. Многие главы оканчиваются параграфом, озаглавленным «Примечания и дополнения», имеющим двойную цель. С одной стороны, они содержат ссылки на оригинальные и последующие работы, в которых были получены основные результаты данной главы. Кроме того, они содержат ссылки на большое количество результатов, относящихся к данному вопросу, но не включенных в основной текст. Эти параграфы дополняют, с одной стороны, библиографию, с другой — упражнения, и снабжают математика дополнительной информацией для исследовательской работы. Для облегчения изучения книги приводимые в тексте результаты, особенно важные для дальнейшего, отмечаются черной стрелкой на полях; такие теоремы и леммы, а некоторые из них могли бы показаться несколько неясными, необходимо было разъяснить особенно тщательно. Мы пытались придерживаться стандартной терминологии, за исключением такого небольшого числа мест, где стандартные термины кажутся нам особенно неудачными. Во всяком случае, предметный указатель и указатель обозначений должны помочь разобраться в этом. Теоремы, леммы и определения, составляющие текст, нумеруются серийно, по единой системе, последовательно внутри каждого параграфа. Так, лемма XI. 5.4 есть четвертый пункт в пятом параграфе одиннадцатой главы. На протяжении XI главы эта лемма называется леммой 5.4, а в пятом параграфе одиннадцатой главы просто леммой 4.

Общий характер настоящей работы можно проиллюстрировать путем краткого сравнения ее с рядом хорошо известных книг, имеющих дело с некоторыми из рассматриваемых в ней предметов. Известный трактат Банаха стимулировал написание и послужил прототипом глав IV, V и VI. Книга Стоуна по теории линейных операторов в гильбертовом пространстве содержит, по-существу, весь материал, изложенный в главах X и XII, хотя наше изложение, основанное на идеях различных советских математиков, самые замечательные из которых принадлежат Гельфанду, совершенно отлично от изложения Стоуна. Книга Рисса и Секефальви-Надя близка по духу к нашей работе и должна рассматриваться как превосходное введение к много более обширной теории, изложенной нами в главах III—XII. Недавно вышедшая книга Наймарка по теории линейных дифференциальных операторов очень близка к главе XIII, а также затрагивает некоторые вопросы, изложенные в главе XIX.

В результате ретроспективного обзора изложенного в нижеследующих двадцати главах материала, авторам кажется, что общая теория первых семи глав и теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, изложенная в главах IX, X и XII, в настоящее время уже приняла свой относительно окончательный вид. Теория полугрупп, общий гармонический анализ и особенно теория сингулярных самосопряженных дифференциальных операторов, хотя они и достигли уже значительной степени зрелости, будут еще сильно развиваться. Новая теория спектральных операторов, изложенная в главах XV—XVIII, находится, по сравнению с соответствующей теорией для самосопряженных операторов, в своей начальной и неполной стадии развития. Главы XIX и XX дают основание утверждать, что не самосопряженные и не нормальные спектральные операторы являются достаточно обычным явлением среди интересных объектов математики для того, чтобы оправдать их серьезное изучение. Авторы надеются, что настоящий трактат будет указывать размещение слабых и сильных мест в здании теории, воздвигнутой к настоящему моменту, и тем самым облегчать как изучение уже существующей теории, так и будущие исследования.

Нам посчастливилось иметь помощь двоих наших коллег. Без терпеливой внеурочной работы профессоров Роберта Бартла и Уильяма Г. Бейда, которые проверили и подготовили к печати почти все главы, добавив при этом несколько новых параграфов, вряд ли эта книга могла бы быть закончена в таком ее объеме. В частности, большая часть параграфов «Примечания и дополнения» принадлежит профессору Бартлу.

Мы получали ценные советы и критику и от многих других коллег в Иельском и в Нью-Йоркском университетах. Весьма сильно воспользовались мы, особенно в связи с нашей трактовкой эргодической теории, возможностью частых контактов с профессором Какутани. За многие ценные советы по теории полугрупп мы находимся в долгу перед профессорами Эйнаром Хилле и Ральфом Филлипсом, сделавшими доступными для нас отдельные части своей находящейся в печати книги на эту тему. Бесчисленные контакты в официальных и неофициальных семинарах с профессорами Берковицем, Фридрихсом, Фридманом, Хелсоном, Лаксом, Ниренбергом, Риккартом и Уэрмером и с д-ром Джан Карло Рота имели для нас огромное значение, и мы хотим поблагодарить всех этих коллег за оказанную ими нам помощь, выразившуюся и в разрешении ссылаться на их рукописи, и в исправлении нашей собственной рукописи, и в критике ее. Последние два параграфа главы XIII, в частности, принадлежат д-ру Рота. Д-р Рота и Давид Макгарвей редактировали многие части текста и вместе с д-рами Джоном Берри и Робертом Кристианом проверяли правильность большей части задач в тексте Мы также хотим поблагодарить д-ра Альфреда Уилкокса за его помощь в главе IX, д-ра Марию Лесник за редактирование главы V и Джона Томпсона за проверку проводимых в главе XIII вычислений с гипергеометрическими и присоединенными гипергеометрическими функциями.

В течение почти восьми лет, пока писалась эта книга нашей работе помогала поддержка Службы Морских исследований; особенно мы благодарны администраторам ее Математического отдела за их понимание и одобрение.

Август, 1957

НЕЛЬСОН ДАНФОРД
ДЖЕКОБ ШВАРЦ

ГЛАВА I

Предварительные сведения

Для изучения линейных операторов требуется знакомство с некоторыми основными понятиями из области теории множеств, топологии и алгебры. В гл. I рассматриваются все понятия и результаты этих теорий, необходимые для дальнейшего. Это изложение — полное, но краткое; оно содержит результаты и доказательства и некоторый сопровождающий их иллюстративный или пояснительный материал. Для среднего читателя оно будет служить кратким обзором затронутых вопросов и в то же время удобной для справок сводкой результатов. Читатель, знакомый с теорией множеств, метрическими и хаусдорфовыми пространствами, может начать читать книгу сразу с гл. II, используя гл. I только для справок[1]).

А. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

1. Обозначения и основные понятия

В этом первом разделе мы будем заниматься не столько перечислением неопределяемых понятий теории множеств, связывающих их аксиом и логических постулатов, устанавливающих правила действия с этими аксиомами, сколько чисто интуитивным подходом к предмету. Теоремы и их доказательства будут сформулированы точно, хотя и неформально.

Строчные и прописные латинские и греческие буквы обычно будут использоваться для обозначения *множеств*, *совокупностей*, *семейств* или *классов*, а также для обозначения *функций* или *отображений*. Символ $\in$ указывает на *принадлежность к множеству*; таким образом, $x \in A$ означает, что x является элементом множества A. Если $P(x)$ есть некоторое предложение относительно x, то символом $\{x \mid P(x)\}$ обозначается множество всех тех x, для которых справедливо предложение $P(x)$. Символ $\{x, y, \ldots, z\}$ означает множество, состоящее из элементов $x, y, \ldots, z$. Иногда, если исключена возмож-

[1]) Доказательства всех утверждений этой главы читатель может найти также в книгах П. Александрова [1*], Г. Биркгофа [3], Ф. Р. Гантмахера [1*], А. Г. Куроша [1*,—3*], Л. С. Понтрягина [1], Хаусдорфа [2]. — *Прим. ред.*

ность путаницы, мы пишем x вместо $\{x\}$. В этих обозначениях $\{x\}=\{y \mid y=x\}$. *Пустое множество* — это множество, не содержащее ни одного элемента; оно обозначается символом $\varnothing$. Если каждый элемент множества A является в то же время элементом множества B, то говорят, что множество A *содержится* в B или является *подмножеством* B, а что также B *содержит* A; символически: $A \subseteq B$ или $B \supseteq A$. Два множества тождественны в том и только в том случае, если они состоят из одних и тех же элементов, т. е. $A=B$ тогда и только тогда, когда $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$. Множество A называется *собственным подмножеством* множества B, если $A \subseteq B$ и $A \neq B$. Запись $A \subset B$ или $B \supset A$ означает, что A есть собственное подмножество B. *Дополнение множества* A *в множестве* B состоит из элементов множества B, не принадлежащих A, т. е. представляет собой множество $\{x \mid x \in B,\ x \notin A\}$. Такое множество иногда обозначают через $B-A$. В тех случаях, когда ясно, о каком именно множестве B идет речь, можно говорить просто о дополнении множества A, используя для него обозначение A'; таким образом, $A'=\{x \mid x \notin A\}$. Если A есть множество, элементами которого являются множества a, то совокупность всех таких x, что $x \in a$ для некоторого $a \in A$, называется *объединением* или *суммой* множеств a, принадлежащих A. Эта сумма обозначается через $\bigcup A$ или $\bigcup\limits_{a \in A} a$. *Пересечение*, или *произведение*, множеств a, принадлежащих A, есть совокупность всех таких элементов x из $\bigcup A$, каждый из которых принадлежит всем $a \in A$. Если $A=\{a, b, \ldots, c\}$, то сумму $\bigcup A$ мы иногда будем обозначать через $a \bigcup b \bigcup \ldots \bigcup c$, а пересечение $\bigcap A$ — через $a \bigcap b \bigcap \ldots \bigcap c$ или просто $ab \ldots c$. Операции взятия суммы и пересечения *коммутативны* (т. е. $a \bigcup b=b \bigcup a$, $ab=ba$) и *ассоциативны* [т. е. $a \bigcup (b \bigcup c)=(a \bigcup b) \bigcup c$, $a(bc)=(ab)c$]. Кроме того, пересечение *дистрибутивно* по отношению к сложению, и наоборот. Точнее, имеют место следующие дистрибутивные законы:

$$x \bigcup_{a \in A} a=\bigcup_{a \in A}(xa), \quad x \bigcup\left(\bigcap_{a \in A} a\right)=\bigcap_{a \in A}(x \bigcup a).$$

Кроме того, справедливы тождества, известные под названием *правил двойственности* и связывающие между собой операции взятия дополнения, суммы и пересечения. Эти правила выражаются формулами

$$\left(\bigcup_{a \in A} a\right)'=\bigcap_{a \in A} a', \quad \left(\bigcap_{a \in A} a\right)'=\bigcup_{a \in A} a',$$

в которых имеется в виду, что все дополнения берутся в некотором множестве b, содержащем каждый элемент a множества A.

Два множества *не пересекаются*, если их пересечение есть пустое множество. Множество a *пересекается с* множеством b, если $ab \neq \varnothing$.

Термины *функция*, *отображение*, *преобразование* и *соответствие* будут использоваться как синонимы. Запись $f: A \longrightarrow B$ означает, что

f есть функция с *областью определения* A, *область значений* которой содержится в B, т. е. что для каждого $a \in A$ функция f определяет элемент $f(a) \in B$. Если $f: A \to B$ и $g: B \to C$, то отображение $gf: A \to C$ определяется равенством $(gf)(a) = g(f(a))$ для каждого $a \in A$. Если $f: A \to B$ и $C \subseteq A$, то символом $f(C)$ обозначается множество всех элементов вида $f(c)$, где $c \in C$. Если $f: A \to B$ и $D \subseteq B$, то $f^{-1}(D)$ определяется как $\{x | x \in A, f(x) \in D\}$. Множество $f(C)$ называется *образом* C, а множество $f^{-1}(D)$ — *прообразом* D. Если $f: A \to A$, то множество $C \subseteq A$ называется *инвариантным относительно* f, если $f(C) \subseteq C$. Говорят, что функция f отображает A *на* B, если $f(A) = B$, и *в* B, если $f(A) \subseteq B$. Функция f называется *продолжением* функции g, а g — *сужением* f, если область определения функции f содержит область определения g и $f(x) = g(x)$ для всех x, принадлежащих области определения g. Сужение функции f на подмножество A ее области определения иногда обозначают через $f|A$. Если $f: A \to B$ и для каждого $b \in f(A)$ существует в точности одно $a \in A$, для которого $f(a) = b$, то отображение f называется *обратимым* или *взаимно однозначным*. Соответствующая *обратная функция*, определяемая равенством $a = f^{-1}(b)$, будет иметь $f(A)$ областью определения, а A областью значений. Таким образом, областью определения и областью значений функции f^{-1} являются соответственно область значений и область определения функции f. *Характеристической* функцией χ_E множества E называется вещественная функция, определяемая равенствами $\chi_E(s) = 1$, $s \in E$, и $\chi_E(s) = 0$, $s \notin E$.

В некоторых случаях, когда важно отметить область значений преобразования $f: A \to B$ за счет самой функции и ее области определения, мы будем писать b_a вместо $f(a)$. Если B есть некоторая совокупность множеств, то сумма $\bigcup f(A)$ иногда будет обозначаться через $\bigcup\limits_{a \in A} b_a$, а пересечение $\bigcap f(A)$ — через $\bigcap\limits_{a \in A} b_a$.

В множестве A (или на множестве A) может быть определено некоторое *отношение*, представляющее собой совокупность r упорядоченных пар $[x, y]$ элементов из A. Обычно мы пишем xry, если $[x, y] \in r$. Символами отношений будут также $=$, $\leqslant$, $\subset$, $\subseteq$, $\backsim$ и $\equiv$.

Мы предполагаем знакомство читателя с вещественными и комплексными числами. Под *расширенной областью вещественных чисел* мы понимаем множество всех вещественных чисел с присоединенными к нему символами $+\infty$ и $-\infty$, под *расширенной областью комплексных чисел* — множество всех комплексных чисел с присоединенным к нему одним символом ∞. Если A — некоторое множество вещественных чисел, то *верхней гранью* A называется наименьшее вещественное число b такое, что $a \leqslant b$ для всех a из A; если такого числа не существует, то в качестве верхней грани A принимается $+\infty$. В обоих случаях верхняя грань множества A обозначается через $\sup A$. Аналогичное определение дается и для *нижней грани множества* A, обозначаемой $\inf A$. Если $\varnothing$ — пустое подмножество множества вещественных чисел, то условно принимают, что $\sup \varnothing = -\infty$ и $\inf \varnothing = +\infty$. Если A — бесконечное множество вещественных чисел, то через $\overline{\lim} A$ обозначается нижняя грань всех таких чисел b, что лишь конечное число чисел из A превосходит b; определение $\underline{\lim} A$ аналогично. В частности, если A есть последовательность $\{a_n\}$, то $\overline{\lim} A$ и $\underline{\lim} A$ обычно обозначаются соответственно через

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n \quad \text{и} \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n.$$

Если a и b — элементы расширенной области вещественных чисел, то через (a, b) обозначается *открытый интервал*, определяемый как $\{x \mid a < x < b\}$, через $[a, b]$ — *замкнутый интервал*, т. е. $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$, *полуоткрытые интервалы* $(a, b]$ и $[a, b)$ определяются соответственно как $\{x \mid a < x \leqslant b\}$ и $\{x \mid a \leqslant x < b\}$. Наконец, если z — комплексное число, $z = x + iy$, где x и y — вещественные числа, то x и y называются *действительной* или *вещественной* и *мнимой частями* z и обозначаются соответственно через $\mathrm{Re}(z)$ и $\mathrm{Im}(z)$.

2. Частично упорядоченные множества

1. Определение. *Частично упорядоченным множеством* $(E, \leqslant)$ называется непустое множество E, между некоторыми элементами которого определено отношение $\leqslant$ такое, что

a) Если $a \leqslant b$ и $b \leqslant c$, то $a \leqslant c$,

b) $a \leqslant a$.

Отношение $\leqslant$ называется *отношением порядка* в множестве E. Вместо $x \leqslant y$ иногда пишут $y \geqslant x$.

2. Определение. *Линейно упорядоченным*[1]) подмножеством F частично упорядоченного множества $(E, \leqslant)$ называется такое его подмножество, что для каждой пары x, y элементов из F либо $x \leqslant y$, либо $y \leqslant x$.

3. Определение. Пусть F — подмножество частично упорядоченного множества $(E, \leqslant)$; элемент x из E называется *мажорантой* множества F, если $f \leqslant x$ для всех $f \in F$. Мажоранта x множества F называется его *верхней гранью*, если $x \leqslant g$ для любой мажоранты g множества F. Термины *миноранта* и *нижняя грань* множества определяются аналогично. Как и в случае вещественных чисел, верхнюю грань множества F мы обозначаем через $\sup F$, а его нижнюю грань — через $\inf F$.

[1]) «Totally ordered». Иногда употребляется термин «совершенно упорядоченное множество» (см., например, перевод книги Бурбаки [5]). — *Прим. ред.*

4. Определение. Элемент x из E называется *максимальным*, если из $x \leqslant y$ вытекает, что $y \leqslant x$.

Эти понятия можно проиллюстрировать на примере семейства A всех подмножеств некоторого множества X. Отношение включения $\subseteq$ между содержащимися в X множествами превращает $(A, \subseteq)$ в частично упорядоченное множество. Мажорантой подсемейства $B \subseteq A$ служит любое множество, содержащее $\bigcup B$, а $\bigcup B$ есть единственная верхняя грань B. Аналогично $\bigcap B$ является единственной нижней гранью подсемейства B. Единственным максимальным элементом множества A служит само X. В дальнейшем, имея дело с совокупностью подмножеств данного множества, мы будем предполагать, что эти подмножества упорядочены по включению, если специально не определена какая-нибудь другая упорядоченность.

Центральным пунктом настоящего параграфа является доказательство следующей теоремы:

5. Теорема. *Пусть дано отображение $f: E \to E$ такое, что $f(x) \geqslant x$, причем $(E, \leqslant)$ — непустое частично упорядоченное множество, обладающее следующими свойствами:*

(α) *Если $a \leqslant b$ и $b \leqslant a$, то $a = b$.*

(β) *Каждое линейно упорядоченное подмножество из E имеет верхнюю грань. Тогда в E существует такой элемент w, что $f(w) = w$.*

Доказательство. Пусть a — некоторый элемент множества E, остающийся фиксированным на протяжении всего доказательства. Назовем *допустимым* подмножество B из E, обладающее следующими тремя свойствами:

I. $a \in B$.

II. $f(B) \subseteq B$.

III. Верхняя грань каждого линейно упорядоченного подмножества из B принадлежит B.

Множества, обладающие этими свойствами, существуют, например само E. Пересечение допустимых множеств также допустимо. Следовательно, пересечение A всех допустимых множеств будет *минимальным* допустимым множеством. Множество $\{x \mid x \in E,\ x \geqslant a\}$ является допустимым подмножеством E, поэтому

IV. $a \leqslant x$, $x \in A$.

Рассмотрим теперь множество

$$P = \{x \mid x \in A;\ \text{из}\ \ y \in A\ \text{и}\ y < x\ \text{вытекает, что}\ f(y) \leqslant x\},$$

где $y < x$ означает, что $y \leqslant x$ и $y \neq x$. Мы покажем, что

V. Из $x \in P$ и $z \in A$ вытекает, что либо $z \leqslant x$, либо $z \geqslant f(x)$.

Выберем в P элемент x и обозначим через B множество всех таких z из A, для которых либо $z \leqslant x$, либо $z \geqslant f(x)$. Из условия IV вытекает, что B обладает свойством I. Свойство II также имеет место в B. Действительно, если $z \geqslant f(x)$, то $f(z) \geqslant z \geqslant f(x)$; если $z = x$, то $f(z) = f(x)$; и, наконец, если $z < x$, то $f(z) \leqslant x$, так как $x \in P$. Множество B обладает и свойством III; в самом деле, если u — верхняя грань линейно упорядоченного подмножества F из B, то либо $y \leqslant x$ для каждого $y \in F$ и тогда $u \leqslant x$, либо $y \geqslant f(x)$ для некоторого $y \in F$ и тогда $u \geqslant f(x)$. Таким образом, B является допустимым подмножеством множества A и, следовательно, $B = A$, откуда и вытекает свойство V.

Покажем теперь, что множество P допустимо. Свойство I для P хотя и бессодержательно, но справедливо. Чтобы доказать, что P обладает свойством II, рассмотрим элемент $x \in P$ и покажем, что если $z \in A$ и $z < f(x)$, то $f(z) \leqslant f(x)$. Из свойства V вытекает, что либо $z \geqslant f(x)$, либо $z \leqslant x$, так что если $z < f(x)$, то $z \leqslant x$. Но тогда, так как $x \in P$, из $z < x$ вытекает, что $f(z) \leqslant x \leqslant f(x)$, а из $z = x$ — что $f(z) = f(x)$. Для того чтобы показать, что P обладает свойством III, рассмотрим верхнюю грань v линейно упорядоченного множества $F \subseteq P$. Чтобы показать, что $v \in P$, рассмотрим элемент $z \in A$ и $z < v$. Из свойства V вытекает, что каждое $x \in F$ удовлетворяет одному из двух неравенств: $z \leqslant x$ или $x \leqslant f(x) \leqslant z$. Второе неравенство не может быть справедливым для каждого x из F, так как тогда $v \leqslant z$. Следовательно, для некоторого x из F $z \leqslant x$. Но если $z < x$, то $f(z) \leqslant x \leqslant v$ по определению множества P. Если же $z = x$, то, поскольку $z \neq v$, во множестве F найдется такой элемент y, что $z < y$, в этом случае $f(z) \leqslant y \leqslant v$. Мы нашли, что в обоих случаях $f(z) \leqslant v$, чем и доказано, что $v \in P$, т. е. что P обладает свойством III. Таким образом, P есть допустимое подмножество множества A, и, значит, $P = A$. Ввиду условия V ясно, что для любых двух элементов x, z из A либо $z \leqslant x$, либо $z \geqslant f(x) \geqslant x$, т. е. что A — линейно упорядоченное множество. Если w — верхняя грань множества A, то в силу того, что $f(w) \in A$, имеет место неравенство $w \leqslant f(w) \leqslant w$, и, следовательно, $f(w) = w$, ч. т. д.

6. Теорема (*Хаусдорф*). *Каждое частично упорядоченное множество содержит максимальное линейно упорядоченное подмножество.*

Точнее, теорема утверждает следующее: Пусть семейство $\mathscr{E}$ линейно упорядоченных подмножеств частично упорядоченного множества $(E, \leqslant)$ рассматривается как частично упорядоченное множество $(\mathscr{E}, \subseteq)$ с отношением включения между элементами множества $\mathscr{E}$ (являющимися подмножествами E). Тогда $\mathscr{E}$ имеет максимальный элемент.

Доказательство. Если $\mathscr{E}$ не имеет максимального элемента, то для каждого $A \in \mathscr{E}$ существует соответствующее ему $f(A) \in \mathscr{E}$, в котором A будет собственным подмножеством. Однако существование такого отображения $f: \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ противоречит теореме 5, ч. т. д.

7. Теорема (*лемма Цорна*). *Если каждое линейно упорядоченное подмножество частично упорядоченного множества* $(E, \leqslant)$ *имеет мажоранту, то в* E *существует максимальный элемент.*

Доказательство. Пусть x является мажорантой существующего согласно теореме 6 максимального линейно упорядоченного подмножества E_0 частично упорядоченного множества $(E, \leqslant)$. Допустим, что $x \leqslant y$. Тогда если $y \notin E_0$, то множество $E_0 \cup \{y\}$ будет линейно упорядоченным множеством, содержащим E_0 в качестве собственного подмножества. Следовательно, $y \in E_0$, так что $y \leqslant x$, ч. т. д.

8. Определение. Частичное упорядоченное множество $(E, \leqslant)$ называется *вполне упорядоченным*, если

I. Из $a \leqslant b$ и $b \leqslant a$ вытекает, что $a = b$.

II. Каждое непустое подмножество из E содержит некоторую свою миноранту.

Хорошо известным примером вполне упорядоченного множества является множество натуральных чисел в их естественном расположении.

9. Теорема (*теорема Цермело о полной упорядоченности*). *Каждое множество может быть вполне упорядочено.*

Теорема утверждает, что для каждого множества E существует отношение порядка $\leqslant$, при котором частично упорядоченное множество $(E, \leqslant)$ является вполне упорядоченным.

Доказательство. Рассмотрим семейство $\mathcal{E}$ всех вполне упорядоченных множеств $(E_0, \leqslant_0)$ таких, что $E_0 \subseteq E$. Определим в $\mathcal{E}$ отношение порядка $\prec$, полагая $(E_0, \leqslant_0) \prec (E_1, \leqslant_1)$ в том и только в том случае, если

I. $E_0 \subseteq E_1$,

II. из $x, y \in E_0$ и $x \leqslant_0 y$ вытекает $x \leqslant_1 y$,

III. из $x \in E_0$, $y \notin E_0$, $y \in E_1$ вытекает $x \leqslant_1 y$.

При этом упорядочении каждое линейно упорядоченное подсемейство $\mathcal{E}_0$ из $\mathcal{E}$ имеет мажоранту. Действительно, мы покажем, что эта мажоранта может быть определена как $(\bigcup \mathcal{E}_0, \leqslant')$, где $x \leqslant' y$, если x и y одновременно принадлежат к некоторому подмножеству $E_0 \in \mathcal{E}_0$ и $x \leqslant_0 y$ в упорядоченности $\leqslant_0$ этого E_0. Ясно, что если $(\bigcup \mathcal{E}_0, \leqslant')$ принадлежит $\mathcal{E}$, то она будет мажорантой для $\mathcal{E}_0$. Покажем теперь, что она является вполне упорядоченным множеством и, следовательно, принадлежит к $\mathcal{E}$. Действительно, то, что $x \leqslant' x$ для $x \in \bigcup \mathcal{E}_0$, ясно. Если $x \leqslant' y$ и $y \leqslant' z$, то $x, y \in E_0 \in \mathcal{E}_0$, $y, z \in E_1 \in \mathcal{E}_0$, $x \leqslant_0 y$ и $y \leqslant_1 z$. Так как $\mathcal{E}_0$ — линейно упорядоченное множество, то можно считать, что $(E_0, \leqslant_0) \prec (E_1, \leqslant_1)$, откуда ясно, что $x \leqslant_1 z$

и, следовательно, что $x \leqslant' z$. Если $x \leqslant' y$ и $y \leqslant' x$, то x, $y \in E_0$ и x, $y \in E_1$, причем $x \leqslant_0 y$ и $y \leqslant_1 x$. Отсюда, считая, что $(E_0, \leqslant_0) \prec (E_1, \leqslant_1)$, получаем, что $x = y$.

Пусть теперь множество $F \subseteq \bigcup \mathscr{E}_0$, причем F непусто. Тогда для некоторого $E_0 \in \mathscr{E}_0$ $F \cap E_0 \neq \varnothing$. Частично упорядоченное множество $(E_0, \leqslant_0)$ является вполне упорядоченным. Пусть $x_0 \in F \cap E_0$ будет минорантой множества $F \cap E_0$ в упорядоченности $\leqslant_0$. Тогда если $y \in F$, $y \notin F \cap E_0$, то $x_0, y \in E_1$, где $(E_0, \leqslant_0) \prec (E_1, \leqslant_1)$, так что $x_0 \leqslant_1 y$. Следовательно, x_0 будет минорантой множества F в упорядоченности $\leqslant'$. Мы доказали существование мажоранты для $\mathscr{E}_0$.

По теореме 7, в E существует максимальное вполне упорядоченное подмножество E_0. Но тогда $E_0 = E$, так как если в E найдется элемент x, не принадлежащий E_0, то упорядоченность $\leqslant_0$ множества E_0 можно распространить на множество $E_0 \bigcup \{x\}$, полагая, по определению, что $y \leqslant_0 x$ для всех $y \in E_0$, ч. т. д.

3. Упражнения

1. Если $(E, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество, обладающее тем свойством, что каждое его линейно упорядоченное подмножество имеет миноранту, то в E существует минимальный элемент.

2. Если семейство $\mathscr{E}$ подмножеств некоторого множества обладает тем свойством, что $A \in \mathscr{E}$ в том и только в том случае, если каждое конечное подмножество A принадлежит $\mathscr{E}$, то в $\mathscr{E}$ существует максимальный элемент.

3. Доказать теорему 6, используя утверждение упражнения 2.

4. Доказать эквивалентность утверждений теоремы 6, теоремы 7, теоремы 9 и упражнения 2.

5. Доказать, что если A и B — два множества, то существует либо взаимно однозначное отображение A в B, либо взаимно однозначное отображение B в A. Эта теорема известна под названием *теоремы сравнения мощностей*.

6. Показать, что существует взаимно однозначное соответствие между любым бесконечным множеством A и множеством всех пар (a, n), где $a \in A$, а n — целое число.

7. Пусть R — множество всех вещественных чисел. Подмножество $S \subseteq R$ называется его *базисом Гамеля*, если каждое вещественное число r однозначно представимо в виде $r = \sum\limits_1^n d_i s_i$, где $s_i \in S$ и α_i — рациональные числа. a) Доказать существование базиса Гамеля. b) Показать, что существует разрывная вещественная функция вещественного переменного, удовлетворяющая уравнению $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

8. Будем говорить, что семейство $\mathscr{M}$ подмножеств множества X обладает свойством (α), если

(α) X нельзя представить в виде суммы конечного числа подмножеств из $\mathcal{M}$.

Показать, что если $\mathcal{M}$ обладает свойством (α), то существует максимальное семейство $\mathcal{N}$ подмножеств из X, обладающее свойством (α) и содержащее $\mathcal{M}$. Показать также, что каждое такое максимальное $\mathcal{N}$ обладает следующим свойством:

(β) Если $A_i \subseteq X$, $i=1, 2, \ldots, n$ и $A_1 \cap \ldots \cap A_n \in \mathcal{N}$, то некоторое $A_i \in \mathcal{N}$.

9. Определение. Частично упорядоченное множество $(E, \leqslant)$ называется *полным*, если

I. Из $a \leqslant b$ и $b \leqslant a$ вытекает, что $a=b$.

II. Каждое непустое подмножество E обладает нижней и верхней гранями.

10. (Тарский) Если $(E, \leqslant)$ — полное частично упорядоченное множество, $f\colon E \to E$ и из $x \leqslant y$ вытекает, что $f(x) \leqslant f(y)$, то преобразование f обладает неподвижным элементом x_0 $(f(x_0)=x_0)$, причем множество всех неподвижных элементов содержит свои верхнюю и нижнюю грани.

11. Определение. Пусть для каждого x из множества X определено некоторое подмножество A_x множества A. По определению, *прямое произведение* $\prod_{x \in X} A_x$, или $\prod A_x$, есть совокупность всех функций f, отображающих X в A, для которых

$$f(x) \in A_x, \quad x \in X.$$

Если X состоит из конечного числа элементов, $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, то вместо $\prod_{x \in X} A_x$ иногда пишут $A_{x_1} \times A_{x_2} \times \ldots \times A_{x_n}$.

12. Если $X=[1, 2, \ldots, n]$, то $\prod_{x \in X} A_x$ можно рассматривать как совокупность строк $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ из n элементов, где $a_i \in A_i$. Если X есть множество всех натуральных чисел, то $\prod A_x$ можно рассматривать как множество последовательностей $[a_1, a_2, \ldots]$, где $a_i \in A_i$.

13. Пусть Q_x, N_x и M_x—подмножества множества A_x для $x \in X$. Положим $M=\prod M_x$, $N=\prod N_x$ и $Q=\prod Q_x$. Предположим, что $N \neq \varnothing \neq Q$, $M=N \cup Q$ и $N \cap Q=\varnothing$ Тогда существует однозначно определенный элемент $x_0 \in X$ такой, что

a) $M_{x_0} = N_{x_0} \cup Q_{x_0}$, $\quad N_{x_0} \cap Q_{x_0} = \varnothing$,

b) $M_x = N_x = Q_x$, $\quad$ если $x \neq x_0$, $x \in X$.

14. Определение. Если $Y \subset X$, то отображение, которое переводит каждую функцию f из $\prod_{x \in X} A_x$ в ее сужение $f \mid Y$, называется

проектированием $\prod_{x \in X} A_x$ в $\prod_{x \in Y} A_x$. Это отображение обозначается через pr_Y. Если $Y = \{x\}$, то pr_Y обозначается через pr_x.

15. Пусть $X \neq \varnothing$.

(a) $\prod_{x \in X} M_x$ пусто в том и только в том случае, если пусто некоторое M_x.

(b) Если $M_x \subseteq N_x$ для $x \in X$, то $\prod_{x \in X} M_x \subseteq \prod_{x \in X} N_x$.

(c) Если $\prod_{x \in X} M_x \neq \varnothing$, то справедливо утверждение, обратное утверждению (b), причем равенство в заключении утверждения (b) влечет за собой равенство в условии.

(d) Множество F в том и только в том случае представляется в виде $\prod_{x \in X} B_x$, где $B_x \subseteq A_x$, если $F = \prod_{x \in X} pr_x(F)$.

В. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТОПОЛОГИИ

4. Определения и основные свойства

1. Определение. Семейство τ подмножеств множества X образует его *топологию*, если оно содержит пустое множество $\varnothing$, само X, каждую сумму любого числа и каждое пересечение конечного числа своих подмножеств. Пара (X, τ) называется *топологическим пространством*; иногда же, если известно, какое именно τ имеется в виду, топологическим пространством называется само X. Если τ и τ_1 — две топологии в X, причем $\tau \supseteq \tau_1$, то говорят, что τ *сильнее*, чем τ_1, а τ_1 — *слабее*, чем τ. Множества из τ называются *открытыми* множествами пространства (X, τ). *Окрестностью точки* p называется каждое открытое множество, содержащее p, *окрестностью множества* A — любое открытое множество, содержащее A. Если A — подмножество x, то точка p называется *предельной точкой* или *точкой накопления* множества A, если каждая окрестность точки p содержит по крайней мере одну точку $q \neq p$ и $q \in A$. *Внутренность* множества, принадлежащего X, есть сумма всех открытых подмножеств этого множества; точки, принадлежащие внутренности множества, называются его *внутренними точками*.

2. Лемма. *Для того чтобы множество в топологическом пространстве было открытым, необходимо и достаточно, чтобы оно содержало некоторую окрестность каждой своей точки.*

Эта и несколько следующих лемм непосредственно вытекают из определения, поэтому доказательства этих лемм мы опускаем.

3. Определение. Множество называется *замкнутым*, если его дополнение открыто.

4. Лемма. *Пересечение любого множества замкнутых множеств замкнуто, сумма любого конечного числа замкнутых множеств замкнута, множества* $\varnothing$ *и* X *замкнуты.*

5. Лемма. *Пусть* $\mathcal{F}$ *— семейство подмножеств множества* X, *обладающее свойствами, перечисленными в лемме 4, и* τ *— семейство дополнений этих подмножеств в* X. *Тогда* (X, τ) *есть топологическое пространство, причем* $\mathcal{F}$ *— совокупность замкнутых множеств этой топологии.*

6. Определение. Семейство β подмножеств из X называется *базисом* топологии τ, если $\beta \subseteq \tau$ и если каждое множество из τ есть сумма множеств, принадлежащих β. Семейство β называется *системой образующих* топологии τ, если τ есть слабейшая из топологий, содержащих β. Если β есть совокупность окрестностей множества $A \subseteq X$, причем каждая окрестность множества A содержит некоторое множество из β, то β называется *фундаментальной системой окрестностей* множества A.

Например, обычная *топология прямой линии* есть топология на $(-\infty, +\infty)$, имеющая в качестве базиса все открытые интервалы (a, b), где a и b — произвольные вещественные числа. Другой базис можно получить, беря в качестве a и b рациональные числа. Система образующих этой топологии определяется всеми бесконечными интервалами $(-\infty, a)$, $(b, +\infty)$, где a и b — либо вещественные, либо рациональные числа. *Топология расширенной области вещественных чисел* имеет в качестве базиса множества $[-\infty, a)$, (a, b), $(b, +\infty]$, где a и b — вещественные числа. С комплексными числами и расширенной областью комплексных чисел дело обстоит аналогично.

7. Лемма. *Пусть* β *— семейство подмножеств множества* X *и* τ *— множество сумм элементов из* β; *для того чтобы* τ *было топологией, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие условия:*

I. *Для каждой пары множеств* U, $V \in \beta$ и $X \in U \cap V$ *существует такое* $W \in \beta$, *что* $x \in W \subseteq U \cap V$.

II. $X = \bigcup \beta$.

8. Лемма. *Семейство множеств* β *в том и только в том случае является системой образующих топологии* τ, *если* $\beta \subseteq \tau$, *и каждое открытое множество есть сумма множеств, каждое из которых является пересечением конечного числа элементов из* β.

9. Определение. *Замыкание* $\overline{A}$ множества A есть пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A. Множество точек из $\overline{A}$, не являющихся внутренними для A, образует *границу* множества A.

10. Лемма. *Операция замыкания обладает следующими свойствами*:

$$\text{(a)}\ \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \qquad \text{(b)}\ \overline{A} \supseteq A,$$

$$\text{(c)}\ \overline{\overline{A}} = \overline{A}, \qquad \text{(d)}\ \overline{\varnothing} = \varnothing,$$

(e) $p \in \overline{A}$ *в том и только в том случае, если каждая окрестность* $N(p)$ *точки* p *пересекается с* A.

Доказательство. Утверждение (b) очевидно. Так как $\overline{A}$ замкнуто (лемма 4), то $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$. Множество $\overline{A \cup B}$ содержит A и замкнуто. Следовательно, $\overline{A \cup B} \supseteq \overline{A}$ и аналогично $\overline{A \cup B} \supseteq \overline{B}$. Таким образом, $\overline{A \cup B} \supseteq \overline{A} \cup \overline{B}$. Обратно, $\overline{A} \cup \overline{B}$ замкнуто (лемма 4), так что $\overline{A} \cup \overline{B} \supseteq \overline{A \cup B}$, что и доказывает (a). Утверждение (d) означает просто, что $\varnothing$ замкнуто. Утверждение (e) непосредственно вытекает из определений 3 и 9, ч. т. д.

11. Лемма. *Пусть* $\mathscr{A}$ — *семейство всех подмножеств множества* X *и* $A \to \overline{A}$ — *отображение* $\mathscr{A} \to \mathscr{A}$, *обладающее четырьмя свойствами* (a) — (d) *леммы* 10. *Тогда семейство* $\mathscr{F} = \{A \mid A = \overline{A}\}$ *обладает свойствами, перечисленными в лемме* 5, *так что дополнения элементов множества* $\mathscr{F}$ *образуют топологию. Множество* $\overline{A}$ *является замыканием множества* A *в этой топологии.*

Доказательство. Из свойств 10 (b), (d) вытекает, что $\varnothing$, $X \in \mathscr{F}$, а из 10(a) — что $A \cup B \in \mathscr{F}$, если A, $B \in \mathscr{F}$. Следовательно, сумма конечного числа множеств из $\mathscr{F}$ принадлежит $\mathscr{F}$. Из 10(a) вытекает, что если $A \subset B$, то $\overline{A} \subseteq \overline{B}$, и, следовательно, если $A_\alpha \in \mathscr{F}$, то

$$\overline{\bigcap_\alpha A_\alpha} \subseteq \overline{A}_\alpha = A_\alpha.$$

Таким образом,

$$\bigcap_\alpha A_\alpha \subseteq \overline{\bigcap_\alpha A_\alpha} \subseteq \bigcap_\alpha A_\alpha,$$

т. е. семейство $\mathscr{F}$ обладает всеми свойствами, перечисленными в лемме 5. Из этой леммы следует, что дополнения элементов семейства $\mathscr{F}$ образуют некоторую топологию. Остается только показать, что в этой топологии замыкание множества A есть $\overline{A}$. Действительно, если B есть замкнутое множество, содержащее A, то $B = \overline{B} \supseteq \overline{A}$, откуда ввиду равенства $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ и $\overline{A} \supseteq A$ следует, что $\overline{A}$ является наименьшим замкнутым множеством, содержащим A, ч. т. д.

12. Определение. Если $Y \subseteq X$ и τ — некоторая топология в X, то топология

$$\tau_Y = \{A \mid A = B \cap Y, \ B \in \tau\}$$

называется *топологией подпространства* Y, *индуцируемой* топологией τ пространства X или *относительной топологией* в Y. Подмножество из Y называется *относительно открытым*, если оно открыто в топологии τ_Y, *относительно замкнутым*, если его дополнение в Y относительно открыто. Остальные термины, такие, как *относительное замыкание* множества, определяются аналогично. Топологическое пространство X называется *связным*, если оно не является суммой двух непустых непересекающихся замкнутых множеств.

13. Лемма. *Если $Y \subseteq X$ и (X, τ) — топологическое пространство, то относительное замыкание подмножества A из Y есть пересечение замыкания множества A в X с Y.*

Подмножество топологического пространства всегда будет рассматриваться как топологическое пространство с индуцируемой в нем топологией, за исключением тех случаев, когда в нем явно определена какая-нибудь другая топология.

14. Теорема (*Линделёф*). *Пусть (X, τ) — топологическое пространство, причем τ имеет счетный базис β. Тогда каждое семейство $\sigma \subseteq \tau$ содержит такое счетное подсемейство σ_0, что $\bigcup \sigma = \bigcup \sigma_0$.*

Доказательство. Пусть $B_1, B_2, \ldots$ последовательность элементов базиса β. Рассмотрим семейство β_0 элементов из β, каждый из которых содержится в каком-нибудь из подмножеств σ. Если $B_n \in \beta_0$, обозначим через C_n какое-нибудь множество из σ, содержащее B_n, и пусть σ_0 будет семейство всех таких C_n. Тогда очевидно, что

$$\bigcup \sigma \supseteq \bigcup \sigma_0 \supseteq \bigcup \beta_0.$$

Так как β является базисом, то для любой точки $p \in A \in \sigma$ существует такое $B_n \in \beta$, что $p \in B_n \subseteq A$ и, следовательно, $\bigcup \beta_0 \supseteq \bigcup \sigma$, ч. т. д.

15. Определение. Если (X, τ) и (Y, τ_1) — топологические пространства, то отображение $f: X \to Y$ называется *непрерывным*, если $f^{-1}(A) \in \tau$ для каждого A из τ_1. Это значит, что отображение одного топологического пространства на другое непрерывно, если прообразы открытых множеств открыты. Функция f называется *непрерывной в точке* x, если для каждой окрестности U точки $f(x)$ найдется такая окрестность V точки x, что $f(V) \subseteq U$. Если f — непрерывное взаимно однозначное отображение X на Y и если обратное отображение f^{-1} также непрерывно, то отображение f называется

гомеоморфизмом или *топологическим изоморфизмом*. При этом пространства X и Y называются *гомеоморфными*.

16. Лемма. *Пусть X и Y — топологические пространства, и пусть $f: X \to Y$. Тогда непрерывность функции f эквивалентна каждому из следующих условий:*

(a) *Функция f непрерывна в каждой точке x пространства X.*

(b) *Прообразы замкнутых множеств замкнуты.*

(c) *Если $A \subseteq Y$, то $f^{-1}(\bar{A}) \supseteq \overline{f^{-1}(A)}$.*

(d) *Если $A \subseteq X$, то $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.*

(e) *Для каждого A из некоторой системы образующих топологии пространства Y множество $f^{-1}(A)$ открыто.*

Доказательство. Если f непрерывно и U — окрестность точки $f(x)$, то $V = f^{-1}(U)$ — окрестность точки x, причем $f(V) \subseteq U$. Следовательно, f непрерывна в каждой точке x. Обратно, в силу леммы 2 из (a) вытекает непрерывность f. Так как прообраз дополнения служит дополнением к прообразу, то непрерывность f эквивалентна и условию (b).

Из (b) вытекает (c), так как если $f^{-1}(\bar{A})$ замкнуто, то $\overline{f^{-1}(A)} \subseteq f^{-1}(\bar{A})$. Но из (c) вытекает (b), так как если A замкнуто, то $f^{-1}(A) \supseteq \overline{f^{-1}(A)}$ и, следовательно, $f^{-1}(A)$ замкнуто.

Условия (c) и (d) эквивалентны; действительно, если $f(\bar{A}) \subseteq \subseteq \overline{f(A)}$, то $f(\overline{f^{-1}(B)}) \subseteq \bar{B}$ и, следовательно, $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\bar{B})$. С другой стороны, если $f^{-1}(\bar{A}) \supseteq \overline{f^{-1}(A)}$, то $f^{-1}(\overline{f(B)}) \supseteq \overline{f^{-1}(f(B))} \supseteq \bar{B}$, откуда $\overline{f(B)} \supseteq f(\bar{B})$.

Ясно, что из непрерывности f вытекает (e). Наконец, так как прообраз пересечения (или суммы) есть пересечение (сумма) прообразов, то из (e) вытекает непрерывность f, ч. т. д.

17. Лемма. *Если X, Y, Z — топологические пространства и если функции $f: X \to Y$ и $g: Y \to Z$ непрерывны, то и их суперпозиция fg также непрерывна.*

Скалярами мы будем называть вещественные и комплексные числа, *скалярной функцией* — функцию, принимающую вещественные или комплексные значения. Топология в множестве скаляров всегда будет задаваться базисом, элементами которого являются окрестности вида $\{\beta \mid |\beta - \alpha| < \varepsilon\}$.

18. Лемма. *Пусть f, g — непрерывные скалярные функции, заданные на топологическом пространстве X, и α — скаляр. Тогда функции*

$$|f(x)|, \ \alpha f(x), \ f(x) + g(x)$$

непрерывны. Если f, g — вещественные функции, то функции

$$\max(f(x),\ g(x)),\ \min(f(x),\ g(x))$$

также непрерывны.

5. Нормальные и бикомпактные пространства

Существует ли на заданном топологическом пространстве вещественная непрерывная функция, не являющаяся константой? Если x и y — две различные точки топологического пространства X, то существует ли на X вещественная непрерывная функция f, для которой $f(x) \neq f(y)$? Если второй вопрос имеет утвердительный ответ для любой пары несовпадающих точек, то говорят, что имеется достаточное количество вещественных непрерывных функций для того, чтобы различать между собой точки этого пространства. Из предыдущего не ясно, будут ли в данном топологическом пространстве выполняться только что сформулированные условия. Скоро, однако, будет доказано, что определяемые в настоящем параграфе нормальные и бикомпактные хаусдорфовы пространства имеют достаточное количество непрерывных вещественных функций для того, чтобы различать между собой их точки.

1. Определение. Топологическое пространство X называется *хаусдорфовым*, если оно обладает формулируемыми ниже свойствами (a) и (b), *регулярным*, если в нем выполняются условия (a) и (c), и *нормальным*, если выполняются условия (a) и (d):

(a) Множество, состоящее из единственной точки, замкнуто

(b) У любых двух несовпадающих точек x и y существуют непересекающиеся окрестности.

(c) Для каждого замкнутого множества A и произвольной точки $x \notin A$ существуют непересекающиеся окрестности.

(d) У любых двух непересекающихся замкнутых множеств A и B существуют непересекающиеся окрестности.

2. Теорема. (*Урысон*). *Если A и B — непересекающиеся замкнутые множества нормального топологического пространства X, то существует определенная на X непрерывная вещественная функция f, такая, что $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$, $f(A)=0$, $f(B)=1$.*

Доказательство. Обозначим через $A_{1/2}$ и $B_{1/2}$ непересекающиеся открытые множества, содержащие соответственно A и B. Мы имеем

$$A \subseteq A_{1/2} \subseteq \overline{A}_{1/2} \subseteq B'_{1/2},\quad B_{1/2} \supseteq B;$$

A и $A'_{1/2}$ — непересекающиеся замкнутые множества, $B'_{1/2}$ и B — тоже. Используя снова предположение о нормальности пространства, мы найдем открытые множества $A_{1/4}$ и $A_{3/4}$, такие, что

$$A \subseteq A_{1/4} \subseteq \overline{A}_{1/4} \subseteq A_{1/2} \subseteq \overline{A}_{1/2} \subseteq A_{3/4} \subseteq \overline{A}_{3/4},$$

причем $\overline{A}_{3/4} \cap B = \varnothing$. По индукции для каждого двоично рационального числа r, $0 < r < 1$, можно определить множество A_r так, что

(I) из $r < s$ вытекает, что $\overline{A}_r \subseteq A_s$

и

(II) $A \subseteq A_r$, $B \cap \overline{A}_r = \varnothing$.

Положим $f(x) = 0$, если x принадлежит всем множествам A_r, в остальных случаях пусть

$$f(x) = \sup\{r \mid x \notin A_r\}.$$

Чтобы доказать непрерывность $f(x)$, предположим, что $c = f(x)$ положительно. Тогда для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ и $\eta < \varepsilon$ точка x принадлежит открытому множеству $A_{c+\varepsilon} \cap \overline{A}'_{c-\eta}$. Если y тоже принадлежит этому открытому множеству, то $|f(x) - f(y)| < 2\varepsilon$. В случае $f(x) = 0$ доказательство непрерывности f аналогично, ч. т. д.

3. Теорема[1]) (*теорема о продолжении по непрерывности*). *Если f — ограниченная вещественная непрерывная функция, определенная на замкнутом множестве A нормального пространства X, то существует такая вещественная непрерывная функция F, определенная на всем X, что $F(x) = f(x)$, если $x \in A$ и $\sup\limits_{x \in X} |F(x)| = \sup\limits_{x \in A} |f(x)|$.*

Доказательство. Так как для случая, когда f тождественно равна нулю на множестве A, теорема очевидна, то мы будем предполагать, что это не имеет места. Положим $f_0(x) = f(x)$, $\mu_0 = \sup\limits_{x \in A} |f_0(x)|$, $A_0 = \left\{x \mid x \in A, \ f_0(x) \leqslant -\frac{\mu_0}{3}\right\}$ и $B_0 = \left\{x \mid x \in A, \ f_0(x) \geqslant \frac{\mu_0}{3}\right\}$. Тогда A_0 и B_0 — замкнутые множества, пересечение которых пусто. Используя предыдущую теорему, мы найдем функцию $F_0(x)$, определенную на всем X и такую, что $F_0(A_0) = -\frac{\mu_0}{3}$, $F_0(B_0) = \frac{\mu_0}{3}$, $-\frac{\mu_0}{3} \leqslant F_0(x) \leqslant \frac{\mu_0}{3}$. Положим $f_1(x) = f_0(x) - F_0(x)$, если $x \in A$. Тогда f_1 — непрерывная функция и $\mu_1 = \sup\limits_{x \in A} |f_1(x)| \leqslant \frac{2}{3}\mu_0$.

Применяя к f_1 и μ_1 рассуждение, которое мы провели для f_0 и μ_0, и продолжая его по индукции, мы получим последовательность $F_i, i = 1, 2, \ldots$, вещественных непрерывных функций, опре-

[1]) Эта теорема принадлежит Урысону. — *Прим. ред.*

деленных на X и таких, что

$$\left| f(x) - \sum_{i=0}^{n} F_i(x) \right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \mu_0, \ x \in A,$$

и

$$\sup_{x \in X} | F_n(x) | \leqslant \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n \mu_0.$$

Из этих неравенств вытекает, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} F_n(x)$ сходится и определяет на пространстве X функцию F, совпадающую с f на множестве A. Чтобы убедиться в непрерывности F, возьмем $\varepsilon > 0$ и зафиксируем такое n, что $2\mu_0 \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда

$$| F(x) - F(y) | \leqslant \left| F(x) - \sum_{i=0}^{n} F_i(x) \right| + \left| \sum_{i=0}^{n} F_i(x) - \sum_{i=0}^{n} F_i(y) \right| +$$
$$+ \left| \sum_{i=0}^{n} F_i(y) - F(y) \right| \leqslant 2\mu_0 \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} +$$
$$+ \sum_{i=0}^{n} | F_i(x) - F_i(y) | < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=0}^{n} | F_i(x) - F_i(y) |.$$

Ввиду леммы 4.16(а) непрерывность функции F будет доказана, если мы установим ее непрерывность в каждой точке x. В силу лемм 4.16 и 4.18 существует такая окрестность V точки x, что

$$\sum_{i=0}^{n} | F_i(x) - F_i(y) | < \frac{\varepsilon}{2}, \ y \in V,$$

и, следовательно, $| F(x) - F(y) | < \varepsilon$, если $y \in V$, ч. т. д.

4. Следствие. *Вещественная непрерывная функция, определенная на замкнутом подмножестве нормального пространства, имеет вещественное непрерывное продолжение на все пространство.*

Доказательство. Единственный случай, когда только что доказанная теорема непосредственно не применима, это тот, когда функция f не ограничена. Пусть f — вещественная непрерывная функция, определенная на замкнутом множестве A нормального пространства X, тогда ограниченная функция $\operatorname{arctg} f(x)$ имеет непрерывное продолжение $\alpha(x)$ на все пространство X. Замкнутые множества A и $B = \left\{ x \,\middle|\, |\alpha(x)| = \frac{\pi}{2} \right\}$ не пересекаются, следовательно, существует непрерывная функция β, такая, что $0 \leqslant \beta(x) \leqslant 1$, обращающаяся в нуль на B и равная единице на A. Тогда функция $\operatorname{tg}\beta(x)\alpha(x)$ будет непрерывным продолжением f, ч. т. д.

5. Определение. *Покрытие* множества A в топологическом пространстве X есть семейство открытых множеств, сумма которых содержит A. Пространство X называется *бикомпактным*, если из каждого его покрытия можно извлечь конечное[1]). Топологическое пространство X называется *локально-бикомпактным*, если каждая его точка имеет окрестность, замыкание которой бикомпактно. Семейство множеств называется *центрированным*, если каждое конечное его подсемейство имеет непустое пересечение. Подмножество пространства X называется *относительно бикомпактным*, если его замыкание бикомпактно в индуцируемой на нем топологии. Необходимо отметить, что подмножество $A \subseteq X$ тогда и только тогда бикомпактно в индуцированной топологии, если из каждого покрытия A открытыми множествами из X можно извлечь конечное.

Хорошо известным примером локально бикомпактного пространства может служить замкнутое множество вещественных или комплексных чисел. Такое пространство будет бикомпактным в том и только в том случае, если оно ограничено. Это утверждение составляет содержание теоремы Гейне — Бореля.

6. Лемма. *Для того чтобы топологическое пространство было бикомпактным, необходимо и достаточно, чтобы каждое центрированное семейство его замкнутых подмножеств имело непустое пересечение.*

Эта лемма непосредственно вытекает из правил двойственности, доказательство же следующей леммы легко вытекает из наших определений.

7. Лемма. (a). *Замкнутое подмножество бикомпактного пространства бикомпактно.*

(b) *Образ бикомпактного пространства при непрерывном отображении бикомпактен.*

(c) *Бикомпактное подмножество хаусдорфова пространства замкнуто.*

8. Лемма. *Непрерывное взаимно однозначное отображение бикомпактного пространства в хаусдорфово пространство является гомеоморфизмом.*

---

[1]) Здесь и ниже (см. определение 6.10) автор употребляет термины компактный (compact) и секвенциально компактный (sequentially compact). В переводе приняты более употребительные в советской литературе термины бикомпактный и компактный. — *Прим. ред.*

Доказательство. *Пусть* X — бикомпактное пространство, Y — хаусдорфово пространство и f — взаимно однозначное, непрерывное отображение пространства X в Y. В силу предыдущей леммы замкнутое множество A пространства X бикомпактно, образ его $f(A)$ при непрерывном отображении f бикомпактен, а так как Y есть хаусдорфово пространство, то $f(A)$ замкнуто. В силу леммы 4.16(b) отображение f^{-1} непрерывно, ч. т. д.

9. Теорема. *Бикомпактное хаусдорфово пространство нормально.*

Доказательство. Пусть A — замкнутое подмножество бикомпактного хаусдорфова пространства X и $p \notin A$. Тогда если $q \in A$, то существуют такие окрестности U_q точки q и V_q точки p, что $U_q \cap V_q = \varnothing$. Так как A бикомпактно, то оно покрывается конечным числом окрестностей $U_{q_1}, \ldots, U_{q_n}$, причем

$$(U_{q_1} \cup \ldots \cup U_{q_n}) \cap (V_{q_1} \cap \ldots \cap V_{q_n}) = \varnothing.$$

Мы нашли, что каждое замкнутое множество A и произвольная точка $p \notin A$ имеют непересекающиеся окрестности. Пусть теперь A и B — замкнутые непересекающиеся множества. Тогда если $p \in A$, то существуют такие окрестности U_p точки p и V_p множества B, что $U_p \cap V_p = \varnothing$. Из покрытия множества A окрестностями U_p можно выделить конечное покрытие $U_{p_1}, \ldots, U_{p_m}$. При этом множества $U_{p_1} \cup U_{p_2} \cup \ldots \cup U_{p_m}$ и $V_{p_1} \cap V_{p_2} \cap \ldots \cap V_{p_m}$ будут непересекающимися окрестностями множеств A и B соответственно, ч. т. д.

10. Лемма. *Вещественная непрерывная функция, заданная на бикомпактном пространстве, достигает своих верхней и нижней граней.*

Доказательство. Пусть f — вещественная непрерывная функция, заданная на бикомпактном пространстве X. В силу леммы 7(b) множество $f(X)$ бикомпактно и, следовательно, по лемме 7(c) замкнуто. Таким образом, $f(X)$ есть ограниченное замкнутое множество вещественных чисел, которое содержит, следовательно, свои верхнюю и нижнюю грани, ч. т. д.

6. Метрические пространства

1. Определение. Пусть X — некоторое множество и ϱ — вещественная функция, определенная на $X \times X$ и обладающая следующими свойствами:

I. $\varrho(x, y) \geqslant 0$;

II. $\varrho(x, y) = 0$ в том и только в том случае, если $x = y$;

III. $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$ и

IV. $\varrho(x, y) \leqslant \varrho(x, z) + \varrho(z, y)$.

Функция ϱ называется *метрикой* или *метрической функцией* пространства X. Множества

$$S(x, \varepsilon) = \{y \mid \varrho(x, y) < \varepsilon\}$$

называются *сферами* в пространстве X, точка x называется *центром*, а ε — *радиусом сферы* $S(x, \varepsilon)$. *Метрическая* топология в X — это самая слабая из топологий, содержащих эти сферы. Множество X с определенной на нем метрической топологией называется *метрическим пространством*. Пусть X — топологическое пространство; если существует метрика, определяющая в X исходную топологию, то говорят, что пространство X *метризуемо*.

Если A и B — подмножества метрического пространства, то, по определению, $\varrho(A, B) = \inf_{a \in A, b \in B} \varrho(a, b)$. Если A — подмножество метрического пространства, то ε-*окрестностью* A называется множество $S(A, \varepsilon) = \{x \mid \varrho(A, x) < \varepsilon\}$. *Диаметром* $\delta(A)$ множества A называется $\sup_{a, b \in A} \varrho(a, b)$.

2. Лемма. *В пространстве X с метрикой ϱ сферы образуют базис соответствующей метрической топологии.*

Доказательство. Пусть $u \in S(x, \varepsilon) \cap S(y, \varepsilon')$. Выберем такое $\delta > 0$, что $\varrho(u, x) + \delta < \varepsilon$ и $\varrho(y, u) + \delta < \varepsilon'$. Тогда если $v \in S(u, \delta)$, то

$$\varrho(x, v) \leqslant \varrho(x, u) + \varrho(u, v) < \varrho(x, u) + \delta < \varepsilon$$

и

$$\varrho(y, v) \leqslant \varrho(y, u) + \varrho(u, v) < \varrho(y, u) + \delta < \varepsilon',$$

откуда следует, что $S(u, \delta) \subseteq S(x, \varepsilon) \cap S(y, \varepsilon')$. Наше утверждение вытекает теперь из леммы 4.7, ч. т. д.

3. Теорема. *Метрическое пространство нормально.*

Доказательство. Если $x \neq y$, то сферы $S\left(x, \frac{1}{2}\varrho(x, y)\right)$ и $S\left(y, \frac{1}{2}\varrho(x, y)\right)$ являются непересекающимися окрестностями соответственно точек x и y, т. е. метрическое прсстранство является хаусдорфовым. Если A и B — непересекающиеся замкнутые множества, то множества $A_1 = \{x \mid \varrho(x, A) < \varrho(x, B)\}$ и $B_1 = \{x \mid \varrho(x, B) < \varrho(x, A)\}$ являются непересекающимися окрестностями соответственно множеств A и B, ч. т. д.

4. Лемма. *Каждое подмножество метрического пространства с индуцируемой на нем топологией также является метрическим пространством.*

Доказательство. Сужение метрической функции на подмножество определяет на нем некоторую метрику, топология которой совпадает с топологией, индуцируемой на этом подмножестве, ч. т. д.

5. Определение. Последовательность a_n точек топологического пространства называется *сходящейся* к точке a этого пространства, если каждая окрестность точки a содержит все точки a_n, за исключением конечного их числа. Если последовательность a_n сходится к a, пишут $a_n \to a$ или $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Последовательность $\{a_n\}$ называется *сходящейся*, если $a_n \to a$ для некоторого a. Последовательность $\{a_\iota\}$ точек метрического пространства называется *фундаментальной*, если $\lim\limits_{m,\,n} \varrho(a_m, a_n) = 0$. Если каждая фундаментальная последовательность сходится, то метрическое пространство называется *полным*.

Три следующих леммы непосредственно вытекают из определений.

6. Лемма. *В метрическом пространстве сходящаяся последовательность является фундаментальной. Для сходимости фундаментальной последовательности необходимо и достаточно, чтобы она имела сходящуюся подпоследовательность. В метрическом пространстве точка a в том и только в том случае принадлежит замыканию множества A, если существует последовательность $\{a_n\}$ точек множества A, сходящаяся к a.*

7. Лемма. *Замкнутое подпространство полного метрического пространства полно. Полное подпространство метрического пространства замкнуто.*

8. Лемма. *Для того чтобы отображение $f: X \to Y$ одного метрического пространства в другое было непрерывным в точке x, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к x, подпоследовательность $\{f(x_n)\}$ сходилась к $f(x)$.*

9. Теорема (*теорема Бэра о категориях*). *Если полное метрическое пространство является суммой счетного числа своих замкнутых подмножеств, то по меньшей мере одно из этих подмножеств содержит непустое открытое множество.*

Доказательство. Рассмотрим полное метрическое пространство X с метрикой $\varrho(x, y)$. Пусть $\{A_n\}$ — последовательность замкнутых множеств, сумма которых совпадает с X. Проведем доказательство от противного, т. е. допустим, что ни одно из A_n не содержит непустого открытого множества. Таким образом, $A_1 \neq X$ и A_1' открыто и содержит некоторую сферу $S_1 = S(p_1, \varepsilon_1)$, где $0 < \varepsilon_1 < \frac{1}{2}$. По предположению, множество A_2 не содержит открытого множества $S(p_1, \varepsilon_1/2)$. Следовательно, непустое открытое множество $A_2' \bigcap S(p_1, \varepsilon_1/2)$ содержит некоторую сферу $S_2 = S(p_2, \varepsilon_2)$, где $0 < \varepsilon_2 < \frac{1}{2^2}$. По индукции можно определить последовательность $\{S_n\} = \{S(p_n, \varepsilon_n)\}$ сфер, обладающих следующими свойствами:

$$0 < \varepsilon_n < \frac{1}{2^n}, \quad S_{n+1} \subseteq S\left(p_n, \frac{\varepsilon_n}{2}\right), \quad S_n A_n = \varnothing, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Так как при $n < m$

$$\varrho(p_n, p_m) \leqslant \varrho(p_n, p_{n+1}) + \varrho(p_{n+1}, p_{n+2}) + \ldots + \varrho(p_{m-1}, p_m) <$$
$$< \frac{1}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{2^m} < \frac{1}{2^n},$$

то центры p_m этих сфер образуют фундаментальную последовательность и, следовательно, сходятся к некоторой точке p. Так как

$$\varrho(p_n, p) = \varrho(p_n, p_m) + \varrho(p_m, p) < \frac{\varepsilon_n}{2} + \varrho(p_m, p) \to \frac{\varepsilon_n}{2},$$

то ясно, что $p \in S_n$ для каждого n. Следовательно, точка p не принадлежит ни одному из множеств A_n, а потому не принадлежит и их сумме. Но это противоречит предположению, что $X = \bigcup A_n$, ч. т. д.

10. Определение. Подмножество A топологического пространства X называется *компактным* в X, если каждая последовательность точек из A имеет подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке из X[1]).

11. Определение. Множество $A \subseteq B$ называется *плотным* в B, если $\bar{A} \supseteq B$. Множество, плотное в топологическом пространстве X, называется *всюду плотным*. Множество называется *нигде не плотным*, если его замыкание не содержит никакого открытого множества. Пространство *сепарабельно*, если оно содержит счетное всюду плотное множество.

Теорема. *Топологическое пространство, имеющее счетный базис, сепарабельно. Обратно, сепарабельное метрическое пространство имеет счетный базис. Следовательно, подпространство сепарабельного метрического пространства сепарабельно.*

Доказательство. Пусть $A_1, A_2, \ldots$ — базис топологического пространства X и $p_n \in A_i$. Если V — открытое множество, то найдется элемент базиса A_n, содержащийся в V, и, следовательно, точка

[1]) Ср. сноску на стр. 28.—*Прим. ред.*

$p_n \in V$. Таким образом, $p = \{p_1, p_2, \ldots\}$ есть счетное всюду плотное в X множество. Обратно, пусть $p_1, p_2, \ldots$ — счетное всюду плотное подмножество метрического пространства. Покажем, что счетное множество сфер $S(p_n, r)$ с рациональными r составляет его базис. Если точка p принадлежит открытому множеству V, то при достаточно малом ε $S(p, \varepsilon) \subseteq V$. В сфере $S(p, \varepsilon/4)$ содержится некоторое p_n, и для этого p_n

$$p \in S(p_n, r) \subseteq S(p, \varepsilon) \subseteq V,$$

где r — рациональное число, содержащееся между $\varepsilon/4$ и $\varepsilon/2$. Отсюда легко вытекает и окончательный результат, ч. т. д.

13. Теорема. *Для бикомпактности подмножества метрического пространства необходимо и достаточно, чтобы оно было замкнуто и компактно в X.*

Доказательство. Пусть A — бикомпактное подмножество метрического пространства X. По лемме 5.7(c) A замкнуто. Если A не компактно в X, то некоторая его последовательность $\{a_n\}$ не содержит сходящейся подпоследовательности. Следовательно, для каждой точки множества A найдется окрестность, содержащая самое большее конечное число элементов a_i. Так как из этого покрытия множества A можно выделить конечное, то последовательность $\{a_n\}$ может состоять лишь из конечного числа различных точек множества A и поэтому непременно содержит сходящуюся подпоследовательность. Это противоречие и доказывает, что множество A компактно в X.

Обратно, предположим, что A компактно в X и замкнуто. Сначала мы установим, что A сепарабельно. Пусть p_0 — произвольная точка множества A и $d_0 = \sup\limits_{p \in A} \varrho(p_0, p)$. Число d_0 конечно, ибо если $\varrho(p_0, q_n) \to \infty$, то существует подпоследовательность $\{q_{n_i}\}$, сходящаяся к некоторому q, для которого $\varrho(p_0, q) = \lim \varrho(p_0, q_{n_i}) = \infty$, что невозможно.

Пусть теперь, по индукции, выбрано p_{i+1} так, что $\min\limits_{0 \leqslant n \leqslant i} \varrho(p_n, p_{i+1}) \geqslant \frac{d_i}{2}$, где

$$d_i = \sup_{p \in A} \min_{0 \leqslant n \leqslant i} \varrho(p_n, p).$$

Ясно, что $d_0 \geqslant d_1 \geqslant \ldots$ Если $d_n \geqslant \varepsilon > 0$ для всех n, то никакая подпоследовательность последовательности $p_0, p_1, \ldots$ не будет фундаментальной и по лемме 6 никакая ее подпоследовательность не будет сходящейся. Так как это противоречит нашему предположению, то отсюда следует, что $d_i \to 0$. Но тогда для каждого p из A и каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое p_n, что $\varrho(p_n, p) < \varepsilon$. Мы получили счетное всюду плотное множество $\{p_0, p_1, \ldots\}$.

Теперь, как следует из теорем 12 и 4.14, для того чтобы доказать бикомпактность A, достаточно убедиться в том, что из каждого счетного покрытия A открытыми множествами $g_1, g_2, \ldots$ можно извлечь конечное. Если $\bigcup_{i=1}^{n} g_i \neq A$, то рассмотрим точку $x_n \notin \bigcup_{i=1}^{n} g_i$, $x_n \in A$. Последовательность $\{x_n\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность $x_{n_i} \to x$. Ввиду того, что дополнения к $\bigcup_{i=1}^{n} g_i$ замкнуты, $x \notin \bigcup_{i=1}^{n} g_i$, и, значит, $x \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} g_i$, но это противоречит тому, что $\bigcup_{i=1}^{\infty} g_i = A$, ч. т. д.

14. Определение. Подмножество K метрического пространства называется *вполне ограниченным*, если для каждого $\varepsilon > 0$ оно допускает покрытие конечным числом сфер $S(k_i, \varepsilon)$, $i = 1, \ldots, n$ с центрами, принадлежащими K.

15. Теорема. *Если K — подмножество метрического пространства X, то следующие три утверждения эквивалентны:*

(a) *K компактно в X,*

(b) *$\overline{K}$ бикомпактно,*

(c) *K вполне ограничено и $\overline{K}$ полно.*

Кроме того, бикомпактное метрическое пространство полно и сепарабельно.

Доказательство. В силу предыдущей теоремы (b) будет вытекать из (a), если мы покажем, что $\overline{K}$ компактно в X. Рассмотрим последовательность $\{p_n\}$ точек из $\overline{K}$ и возьмем такие точки $k_n \in K$, что $\varrho(p_n, k_n) < \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$, тогда некоторая подпоследовательность последовательности $\{k_n\}$ будет сходящейся, и легко видеть, что последовательность $\{p_n\}$ будет сходиться к той же точке. Мы доказали, что из (a) вытекает (b).

Предположим теперь, что справедливо (b), и пусть $\varepsilon > 0$. Тогда сферы $S(k, \varepsilon)$, $k \in K$ покрывают $\overline{K}$, так как K плотно в $\overline{K}$. Следовательно, $\overline{K}$, а значит, и K покрываются уже конечным числом этих сфер $S(k_1, \varepsilon), \ldots, S(k_n, \varepsilon)$, т. е. K вполне ограничено. Пусть $\{p_n\}$ — фундаментальная последовательность точек из $\overline{K}$; так как $\overline{K}$ компактно в X (теорема 13), то некоторая подпоследовательность последовательности $\{p_n\}$ сходится к некоторой точке $p_0 \in \overline{K}$. Легко видеть, что и вся последовательность $\{p_n\}$ сходится к p_0, так что $\overline{K}$ полно.

Предположим теперь, что справедливо (c), и рассмотрим последовательность $\{k_n\}$ точек из K. Ввиду полной ограниченнсcти K для каждого $n = 1, 2, \ldots$, существует покрытие K конечным числом сфер с центрами в K и радиусами $1/n$. Таким образом, некоторая подпоследовательность $\{k_{1,n}\}$ последовательности $\{k_n\}$ целиком содержится в сфере радиуса 1; некоторая подпоследовательность $\{k_{2,n}\}$ последовательности $\{k_{1,n}\}$ целиком содержится в сфере радиуса $1/2$ и т. д. Продолжим это рассуждение и положим $\bar{k}_n = k_{n,n}$. Последовательность $\{\bar{k}_n\}$ фундаментальна по построению; так как $\bar{K}$ полно, то она сходится и, следовательно, K компактно в X. Таким образом, эквивалентность утверждений (a), (b) и (c) доказана.

Чтобы доказать последнее утверждение, заметим, что если пространство X бикомпактно, то из эквивалентности (b) и (c) вытекает, что оно полно. Сепарабельность пространства X была уже установлена при доказательстве теоремы 13, ч. т. д.

При доказательстве пункта (c) последней теоремы мы применили метод, называемый *канторовским диагональным процессом.*

16. Определение. Отображение $f: X \to Y$ одного метрического пространства в другое называется *равномерно непрерывным* на X, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что из неравенства $\varrho(x, x') < \delta$ вытекает неравенство $\varrho(f(x), f(x')) < \varepsilon$.

Следующая элементарная теорема будет часто использоваться.

17. Теорема. (*Принцип продолжения по непрерывности*). *Пусть X и Y — метрические пространства, причем Y полно. Если отображение $f: A \to Y$ равномерно непрерывно на некотором всюду плотном в X подмножестве A, то оно имеет единственное непрерывное продолжение $g: X \to Y$. Это продолжение равномерно непрерывно на X.*

Доказательство. Если $x \in X$, то существует последовательность точек $a_n \in A$, сходящаяся к X. Так как последовательность $\{a_n\}$ фундаментальна, а отображение f равномерно непрерывно, то последовательность $\{f(a_n)\}$ также будет фундаментальной. В силу полноты Y существует такая точка $g(x) \in Y$, что $f(a_n) \to g(x)$. Для того чтобы доказать, что $g(x)$ зависит только от x и не зависит от выбора последовательности $a_n \to x$, рассмотрим другую последовательность $\{b_n\}$ из A, тоже сходящуются к x. Тогда $\varrho(a_n, b_n) \to 0$ и, ввиду равномерной непрерывности f, $\varrho(f(a_n), f(b_n)) \to 0$, следовательно, $f(b_n) \to$ $\to g(x)$. Теперь легко видеть, что из неравенства $\varrho(x, x') < \delta$ вытекает, что $\varrho(g(x), g(x')) \leqslant \varepsilon$, что и означает равномерную непрерывность g. Наконец, единственность g очевидна.

Непрерывная функция, вообще говоря, не является равномерно непрерывной, однако на бикомпактном метрическом пространстве эти два понятия совпадают.

18. Теорема. *Непрерывное отображение f бикомпактного метрического пространства X в метрическое пространство Y равномерно непрерывно.*

Доказательство. Если отображение f не является равномерно непрерывным, то найдется такое $\varepsilon > 0$ и такие две последовательности $\{x_n\}$ и $\{z_n\}$, что $\varrho(x_n, z_n) < \frac{1}{n}$, но $\varrho(f(x_n), f(z_n)) > \varepsilon$ для $n=1, 2, \ldots$. Так как X компактно (теорема 13), то существуют подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ и $\{z_{n_k}\}$, которые сходятся и притом, очевидно, к одной и той же точке. Ввиду непрерывности f, для достаточно большого k $\varrho(f(x_{n_k}), f(z_{n_k})) < \varepsilon$, что противоречит предположению. Таким образом, отображение, не являющееся равномерно непрерывным, не может быть непрерывным на X, ч. т. д.

Следующая теорема содержит условия, при которых топологическое пространство может быть метризуемо.

19. Теорема (*метризационная теорема Урысона*). *Регулярное топологическое пространство со счетным базисом метризуемо. В частности, бикомпактное хаусдорфово пространство метризуемо в том и только в том случае, если оно имеет счетный базис.*

Доказательство. Как было показано в теореме 15, бикомпактное метрическое пространство сепарабельно и в силу теоремы 12 имеет счетный базис. С другой стороны, бикомпактное хаусдорфово пространство нормально (5.9) и, следовательно, регулярно (5.1), так что второе утверждение следует из первого.

Пусть X — регулярное пространство со счетным базисом $\{U_n\}$. Мы покажем сперва, что X нормально. Рассмотрим непересекающиеся замкнутые подмножества A и B из X. Так как X регулярно, то для каждой точки x из A существует множество $U \in \{U_n\}$ такое, что $x \in U \subseteq \overline{U} \subseteq B'$. Пусть $\{V_n\}$ — подпоследовательность последовательности $\{U_n\}$, состоящая из всех таких U_n, что $U_n \subseteq B'$, тогда $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$. Аналогично, пусть $\{W_n\}$ состоит из таких U_n, что $\overline{U}_n \subseteq A'$, тогда $B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} W_n$. Положим теперь $Y_1 = V_1$, $Z_1 = W_1 - \overline{Y}_1$ и по индукции определим $Y_n = V_n - \bigcup_{j=1}^{n-1} \overline{Z}_j$ и $Z_n = W_n - \bigcup_{j=1}^{n} \overline{Y}_j$. При этом $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$ и $Z = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n$ — открытые множества. Эти множества не пересекаются, так как $Y_n Z_m = \varnothing$ для всех $n, m \geqslant 1$; действительно, если $n \leqslant m$, то $Z_m \subseteq W_m - \overline{Y}_n \subseteq W_m - Y_n$ и, следовательно, $Y_n Z_m = \varnothing$. Если $n > m$, то $Y_n \subseteq V_n - \overline{Z}_m \subseteq V_n - Z_m$ и, значит,

$Y_n Z_m = \varnothing$. Чтобы убедиться в том, что $A \subseteq Y$, рассмотрим какую-нибудь точку x, принадлежащую A, и выберем такое m, что $x \in V_m$. Тогда так как $\overline{Z}_n \subseteq \overline{W}_n \subseteq A'$ при $n \geqslant 1$ и так как $x \in AV_m$, то $x \in V_m$, откуда и вытекает, что $A \subseteq Y$. Аналогично $B \subseteq Z$; этим доказано что пространство X нормально.

Рассмотрим снова базис открытых множеств $U_1, U_2, \ldots$ пространства X. Если $p \in U_m$, то найдется такое U_n, что $p \in U_n \subseteq \overline{U}_n \subseteq U_m$. Существуют, следовательно, пары множеств (U_n, U_m), принадлежащих базису и обладающих тем свойством, что $\overline{U}_n \subseteq U_m$; но так как базис содержит только счетное число множеств, то мы будем иметь всего счетное множество таких пар. Расположим их в последовательность $(U_{n_1}, U_{m_1}), \ldots, (U_{n_k}, U_{m_k}), \ldots$ По теореме 5.2, для каждого $k=1, 2, \ldots$ существует непрерывная функция f_k такая, что $f_k(\overline{U}_{n_k}) = 0$, $f_k(\overline{U}'_{m_k}) = 1$, $0 \leqslant f_k(x) \leqslant 1$. Определим теперь на $X \times X$ функцию ϱ, полагая

$$\varrho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} |f_k(x) - f_k(y)|, \quad x, y \in X.$$

Ясно, что ϱ удовлетворяет условиям I, III и IV определения 6.1. Допустим, что для некоторой пары точек $x \neq y$, $\varrho(x, y) = 0$; тогда $f_k(x) = f_k(y)$ при $k = 1, 2, \ldots$. С другой стороны, найдется такое множество $U_{m(x)}$ из базиса, что $x \in U_{m(x)}$, $y \notin U_{m(x)}$. Ввиду регулярности пространства X существует другое множество $U_{n(x)}$, принадлежащее базису и такое, что $x \in U_{n(x)} \subseteq \overline{U_{n(x)}} \subseteq U_{m(x)}$, и, значит, $(U_{n(x)}, U_{m(x)})$ есть одна из пар выписанной выше последовательности. Но тогда для некоторого k $f_k(x) \neq f_k(y)$; это противоречие доказывает, что ϱ действительно является метрической функцией на X.

Пусть x — фиксированная точка и $\varepsilon > 0$. Легко видеть, что $\varrho(x, \ldots)$ — непрерывная вещественная функция на X. Следовательно, существует такое множество U_m из базиса, что $x \in U_m$, и если $y \in U_m$, то $\varrho(x, y) < \varepsilon$. Отсюда следует, что тождественное отображение пространства X с заданной на нем топологией на пространство X с метрической топологией, определяемой функцией ϱ, непрерывно. С другой стороны, если $x \in U_m$, то существует такое U_n, что $x \in U_n \subseteq \overline{U}_n \subseteq U_m$. Следовательно, пара (U_n, U_m) встречается в нашей последовательности, скажем, на k-м месте. Тогда если $\varrho(x, y) < 2^{-k}$, то $|f_k(y)| < 1$ и, значит, $y \in U_m$. Таким образом, $S(x, 2^{-k}) \subseteq U_m$, откуда видно, что тождественное отображение пространства X с метрической топологией на пространство X с исходной топологией тоже непрерывно. Таким образом, это тождественное отображение является гомеоморфизмом, т. е. наше пространство метризуемо, ч. т. д.

7. Сходимость и равномерная сходимость обобщенных последовательностей

Понятие сходимости, введенное в определении 6.5, для наших целей является недостаточно общим. Мы хотим указать различные возможные способы его обобщения.

Если X и Y — топологические пространства и $g: X \to Y$, то выражение $\lim\limits_{w \to x} g(w) = y$ означает, что для каждой окрестности N_y точки y существует такая окрестность N_x точки x, что $g(N_x) \subseteq N_y$. Рассмотрим следующее, связанное с предыдущим, но более общее понятие: пусть A — некоторое множество и X и Y — топологические пространства. Пусть $f: A \to X$ и $g: A \to Y$. Тогда запись $\lim\limits_{f(a) \to x} g(a) = y$ означает, что для каждой окрестности N_y точки y существует окрестность N_x точки x такая, что $g(f^{-1}(N_x)) \subseteq N_y$. Например, в каждом метрическом пространстве справедливо утверждение $\lim\limits_{\varrho(x, x_0) \to 0} x = x_0$. Разумеется, если $A = X$ и f есть тождественное отображение, то $\lim\limits_{f(a) \to x} g(a) = y$ в том и только в том случае, если $\lim\limits_{a \to x} g(a) = y$. Следующее определение содержит третий важный и интересный способ обобщения понятия сходимости.

1. Определение. Частично упорядоченное множество $(D, \leqslant)$ называется *направленным*, если каждое конечное подмножество из D имеет мажоранту. Отображение $f: D \to X$ направленного множества D в множество X называется *обобщенной последовательностью* элементов множества X или просто *обобщенной последовательностью в* X. Обобщенная последовательность $f: D \to X$ в топологическом пространстве X называется *сходящейся к точке* p из X, если для каждой окрестности N точки p найдется такое $d_0 \in D$, что из $d \geqslant d_0$ вытекает, что $f(d) \in N$. В этом случае говорят также, что *предел* f *существует и равен* p, и пишут $\lim f(d) = p$ или, если нужно отметить D, $\lim\limits_{D} f(d) = p$.

Каждому понятию сходимости отвечает связанное с ним понятие *равномерной сходимости*. Пусть, например, D является направленным множеством, A — произвольное множество и X — метрическое пространство. Предположим, что функция $f = f(d, a)$ отображает $D \times A$ в X. Тогда утверждение, что $\lim\limits_{D} f(d, a) = g(a)$ *равномерно относительно* A, или равномерно для $a \in A$, означает, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $d_0 \in D$, что $\varrho(f(d, a), g(a)) < \varepsilon$ при $d > d_0$ и произвольном a из A.

Если f и g — две обобщенные последовательности вещественных или комплексных чисел, определенные на одном и том же направленном множестве D, то, по определению,

$$f = O(g)$$

в том случае, если существует такое $A > 0$, что $|f(d)| \leqslant A|g(d)|$, каково бы ни было $d \geqslant d_A$. Аналогично запись

$$f = o(g)$$

означает, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $d_\varepsilon \in D$, что $|f(d)| \leqslant \leqslant \varepsilon|g(d)|$ для любого $d \geqslant d_\varepsilon$.

В последующих главах обобщенную последовательность $f: D \to X$ мы обычно будем обозначать через $\{x_\alpha\}$, выделяя тем самым область значений функции f.

Обобщенные последовательности в общем топологическом пространстве играют ту же роль, что и обычные последовательности в метрическом пространстве. Это можно видеть на примере следующих лемм.

2. Лемма. *Пусть A — подмножество топологического пространства. Для того чтобы точка p принадлежала замыканию множества A, необходимо и достаточно, чтобы некоторая обобщенная последовательность точек из A сходилась к p.*

Доказательство. Если $p = \lim f(d)$, где $f(d) \in A$, то каждая окрестность точки p содержит точку множества A, следовательно, $p \in \overline{A}$. Обратно, пусть каждая окрестность точки p содержит некоторую точку из A. Превратим семейство $\{N\}$ окрестностей точки p в направленное множество, полагая, по определению, что $N_1 \geqslant N_2$ эквивалентно включению $N_1 \subseteq N_2$. Обозначим через f функцию на $\{N\}$, значение $f(N)$ которой есть некоторая точка из NA. Тогда $p = \lim f(N)$, ч. т. д.

3. Лемма. *Для того чтобы топологическое пространство было хаусдорфовым, необходимо и достаточно, чтобы каждая обобщенная последовательность его элементов имела не более одного предела.*

4. Лемма. *Если X и Y — топологические пространства и $f: X \to Y$, то для непрерывности отображения f необходимо и достаточно, чтобы для каждой обобщенной последовательности элементов пространства X из равенства $\lim h(d) = x$ вытекало равенство $\lim f(h(d)) = f(x)$.*

Доказательства этих лемм предоставляются читателю.

Большинство понятий, связанных с основным понятием сходимости, может быть перенесено с последовательностей на обобщенные последовательности. Пусть $f: D \to X$ — обобщенная последовательность элементов метрического пространства X. Мы назовем f *обобщенной фундаментальной последовательностью* в X, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $d_0 \in D$, что $\varrho(f(p), f(q)) < \varepsilon$, если $p \geqslant d_0$, $q \geqslant d_0$.

5. Лемма. *Если f — обобщенная фундаментальная последовательность в полном метрическом пространстве X, то существует такое $p \in X$, что $\lim f(d) = p$.*

Доказательство. Пусть $d_n \in D$ таково, что при $c_1, c_2 \geqslant d_n$ $\varrho(f(c_1), f(c_2)) < 1/n$. Обозначим через b_n мажоранту конечного множества $\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$. Ясно, что последовательность $f(b_n)$ фундаментальна. Следовательно, существует такое $p \in X$, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = p$. Пусть задано $\varepsilon > 0$; выберем такое n_0, что $2n_0^{-1} < \varepsilon$ и $\varrho(f(b_{n_0}), p) < \varepsilon/2$. Тогда если $d \geqslant b_{n_0}$, то ясно, что $\varrho(f(d), p) < \varepsilon$, ч. т. д.

Читатель, просмотревший предыдущий параграф о метрических пространствах, может найти и другие результаты, переносимые с обычных на обобщенные последовательности.

Следующий важный результат о перестановке предельных переходов принадлежит Муру[1]).

6. Лемма. *Пусть D_1 и D_2 — два направленных множества, причем $D_1 \times D_2$ направлено отношением $(d_1, d_2) \leqslant (d_1', d_2')$, по определению, означающим, что $d_1 \leqslant d_1'$ и $d_2 \leqslant d_2'$. Пусть $f: D_1 \times D_2 \to X$ — обобщенная последовательность в полном метрическом пространстве X. Предположим, что*

(a) *для каждого $d_2 \in D_2$ существует предел $g(d_2) = \lim\limits_{D_1} f(d_1, d_2)$* и

(b) *предел $h(d_1) = \lim\limits_{D_2} f(d_1, d_2)$ существует равномерно относительно D_1.*

Тогда три предела

$$\lim_{D_2} g(d_2), \quad \lim_{D_1} h(d_1), \quad \lim_{D_1 \times D_2} f(d_1, d_2)$$

существуют и равны между собой.

Доказательство. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Тогда существует такое $\delta_2 \in D_2$, что из $d_2 \geqslant \delta_2$ вытекает неравенство $\varrho(f(d_1, d_2), h(d_1)) < \varepsilon/8$ для всех $d_1 \in D_1$. Отсюда следует, что

$$\varrho(f(d_1, d_2), f(d_1, \delta_2)) < \frac{\varepsilon}{4},$$

если $d_1 \in D_1$ и $d_2 \geqslant \delta_2$. Таким образом, если $\delta_1 \in D_1$ таково, что из $d_1 \geqslant \delta_1$ вытекает неравенство $\varrho(f(d_1, \delta_2), g(\delta_2)) < \varepsilon/8$, то

$$\varrho(f(d_1, \delta_2), f(\delta_1, \delta_2)) < \frac{\varepsilon}{4},$$

[1]) Эту лемму и много других результатов, связанных с пределами по направленному множеству, по существу, впервые получил С. О. Шатуновский [1*]. — *Прим. ред.*

так что $\varrho(f(d_1, d_2), f(\delta_1, \delta_2)) < \varepsilon/2$. Поэтому если d_1, $d_1' \geqslant \delta_1$ и d_2, $d_2' \geqslant \delta_2$, то $\varrho(f(d_1, d_2), f(d_1', d_2')) < \varepsilon$. Но это значит, что f — обобщенная фундаментальная последовательность. По лемме 5, $\lim\limits_{D_1 \times D_2} f(d_1, d_2) = p$ существует. Мы имеем

$$\varrho(p, f(d_1', d_2')) = \varrho(\lim_{D_1 < D_2} f(d_1, d_2), \quad f(d_1', d_2')) \leqslant \varepsilon,$$

$$d_1' \geqslant \delta_1, \quad d_2' \geqslant \delta_2.$$

Следовательно, $\varrho(p, g(d_2')) = \varrho(p, \lim\limits_{D_1} f(d_1', d_2')) \leqslant \varepsilon$, $d_2' \geqslant \delta_2$, так что $\lim\limits_{D_2} g(d_2) = p$.

Таким же точно образом доказывается, что $\lim\limits_{D_1} h(d_1) = p$, ч. т. д.

7. Следствие. *Пусть D — направленное множество, X и Y — топологические пространства, причем Y — полное метрическое пространство. Пусть $f: D \times X \to Y$, так что $f(d, X)$ есть обобщенная последовательность функций на X со значениями в Y. Предположим что:*

(a) *для каждого $d_0 \in D$ функция $f(d_0, x)$ непрерывна и*

(b) *предел $g(x) = \lim\limits_{D} f(d, x)$ существует равномерно относительно X. Тогда функция $g(x)$ непрерывна.*

Это утверждение легко выводится из лемм 4 и 6.

Часто бывает полезно иметь определение бикомпактности в терминах обобщенных последовательностей. Мы сделаем это, введя понятие обобщенной предельной точки.

8. Определение. Пусть $f: D \to X$ — обобщенная последовательность в топологическом пространстве X. Точка p называется ее *обобщенной предельной точкой* (cluster point), если для каждой окрестности U точки p и $d_0 \in D$ существует $d \geqslant d_0$ такое, что $f(d) \in U$.

9. Лемма. *Для того чтобы пространство X было бикомпактным, необходимо и достаточно, чтобы каждая обобщенная последовательность из X имела обобщенную предельную точку.*

Доказательство. Пусть $f: D \to X$ — обобщенная последовательность точек бикомпактного пространства X; положим для каждого $d \in D$

$$A_d = \{y \mid y = f(d'), \quad d' \in D, \quad d' \geqslant d\}.$$

Семейство $\{A_d\}$, а следовательно, и $\{\overline{A}_d\}$ центрированы. По лемме 5.6, существует точка p, принадлежащая всем этим замыканиям. Так как каждая окрестность точки p пересекается с каждым A_d, то точка p служит для f обобщенной предельной точкой.

Обратно, пусть для каждой обобщенной последовательности из X имеется обобщенная предельная точка. Рассмотрим центрированное семейство $\mathscr{F}_1$ замкнутых множеств, и пусть $\mathscr{F}$ означает совокупность всевозможных конечных пересечений множеств, принадлежащих $\mathscr{F}_1$. Семейство $\mathscr{F}$ также центрировано; кроме того, оно является направленным по включению. Выбирая по точке в каждом из множеств, принадлежащих $\mathscr{F}$, мы получим обобщенную последовательность, которая, по условию, имеет обобщенную предельную точку, содержащуюся, очевидно, в каждом из множеств, принадлежащих $\mathscr{F}$. Следовательно, множества из $\mathscr{F}_1$ имеют общую точку, т. е. рассматриваемое пространство бикомпактно, ч. т. д.

Существует еще одно понятие, которое часто оказывается полезным при исследовании сходимости.

10. Определение. Семейство $\mathscr{E}$ подмножеств некоторого множества называется *фильтром*, если оно обладает следующими свойствами:

I. Пустое множество $\varnothing$ не принадлежит $\mathscr{E}$.

II. Если $A \supseteq B$ и $B \in \mathscr{E}$, то $A \in \mathscr{E}$.

III. Если $A, B \in \mathscr{E}$, то $A \cap B \in \mathscr{E}$.

Если $\mathscr{E}$ и $\mathscr{E}'$ — фильтры подмножеств одного и того же множества и $\mathscr{E} \supseteq \mathscr{E}'$, то мы говорим, что $\mathscr{E}$ *мажорирует* $\mathscr{E}'$. *Ультрафильтром* называется фильтр, не мажорируемый никаким другим фильтром, кроме самого себя. Фильтр $\mathscr{E}$ подмножеств топологического пространства X *сходится к точке* $p \in X$, если каждая окрестность точки p принадлежит $\mathscr{E}$.

Читатель заметит, что совокупность всех подмножеств топологического пространства X, содержащих некоторую окрестность какой-нибудь его точки p, образует фильтр $\mathscr{N}(p)$. Следовательно, фильтр $\mathscr{E}$ в том и только в том случае сходится к точке p, если $\mathscr{E}$ мажорирует каждое $\mathscr{N}(p)$, т. е. если $\mathscr{E} \supseteq \mathscr{N}(p)$. В приложениях теории фильтров весьма важной является следующая лемма Картана.

Лемма. *Каждый фильтр подмножеств множества X мажорируется некоторым ультрафильтром подмножеств из X.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{E}_0$ — фильтр в множестве X; обозначим через $\mathfrak{P}$ совокупность всех фильтров $\mathscr{E}$ в X, мажорирующих $\mathscr{E}_0$. Будем считать, что множество $\mathfrak{P}$ частично упорядочено отношением $\subseteq$. Если $\mathfrak{G} = \{\mathscr{E}\}$ — линейно упорядоченное подмножество из $\mathfrak{P}$, то $\mathscr{E}' = \{E \mid E \in \mathscr{E} \in \mathfrak{G}\}$ будет, как легко видеть, фильтром из $\mathfrak{P}$ и $\mathscr{E} \subseteq \mathscr{E}'$ для всех $\mathscr{E} \in \mathfrak{G}$. По лемме Цорна (2.7), в множестве $\mathfrak{P}$ существует максимальный элемент, который и будет, очевидно, ультрафильтром в X, мажорирующим $\mathscr{E}_0$, ч. т. д.

Ясно, что если $\mathscr{E}$ — ультрафильтр в X и если $E \subseteq X$, то только одно из множеств E, E' принадлежит $\mathscr{E}$.

12. Лемма. *Для того чтобы топологическое пространство X было бикомпактным, необходимо и достаточно, чтобы каждый ультрафильтр подмножеств, принадлежащих X, сходился к некоторой точке из X.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{E}$ — ультрафильтр в бикомпактном пространстве X. Если $\mathscr{E}$ не сходится к точке $p \in X$, то некоторая окрестность N_p точки p не принадлежит $\mathscr{E}$ и, значит, в $\mathscr{E}$ содержится ее дополнение N'_p. Если $\mathscr{E}$ не сходится ни к одной точке пространства X, то X покрывается окрестностями N_p, $p \in X$, и, следовательно, покрывается конечным числом $N_1, \ldots, N_n$ этих окрестностей. Но тогда $\varnothing = N'_1 \bigcap \ldots \bigcap N'_n = (N_1 \bigcup \ldots \bigcup N_n)' = X'$, будучи пересечением конечного числа множеств из $\mathscr{E}$, также принадлежит $\mathscr{E}$, что противоречит определению фильтра.

Предположим, что каждый ультрафильтр подмножеств из X сходится. Пусть $\mathscr{F}$ — центрированное семейство замкнутых подмножеств из X. Обозначим через $\mathscr{E}_1$ класс всех множеств, содержащих всевозможные конечные пересечения $F_1 \bigcap \ldots \bigcap F_n$ множеств $F_i \in \mathscr{F}$. Ясно, что $\mathscr{E}_1$ является фильтром. Пусть $\mathscr{E}$ — ультрафильтр, мажорирующий $\mathscr{E}_1$, и p — точка, к которой сходится $\mathscr{E}$. Тогда каждая окрестность точки p имеет непустое пересечение с каждым множеством из $\mathscr{E}$. Следовательно, p принадлежит замыканию каждого множества из $\mathscr{E}$. В частности, $p \in F$, если $F \in \mathscr{F}$. Следовательно, $p \in \bigcap \mathscr{F}$, так что $\bigcap \mathscr{F} \neq \varnothing$. Доказываемый результат вытекает теперь из леммы 5.6, ч. т. д.

8. Топологическое произведение пространств

Пусть дано прямое произведение (см. определение 3.11) $X = \prod\limits_{\alpha} X_\alpha$ топологических пространств X_α. Естественно попытаться ввести в нем топологию. Так, например, если как X_1, так и X_2 представляют собой пространства вещественных чисел, то их прямое произведение $X_1 \times X_2$ может быть топологизировано, если взять в качестве базиса множества вида $U \times V$, где U и V — открытые множества. В этой топологии $X_1 \times X_2$ представляет собой двумерное евклидово пространство. Абстрагируя самое существенное свойство этого примера, мы в общем случае введем для прямого произведения X топологию τ таким образом, чтобы каждое проектирование $pr_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha$ было непрерывным. Легко видеть, что для непрерывности отображения pr_α необходимо и достаточно, чтобы каждое из множеств вида $U = \Big(\prod\limits_{\alpha \neq \alpha_0} X_\alpha \Big) \times U_{\alpha_0}$, где $U_\alpha \subseteq X_\alpha$ открытое множество, принадлежало τ. Этого свойства, однако, не достаточно для того, чтобы полностью охарактеризовать τ. Среди различных топологий, в которых отображения pr_α непрерывны, имеются по крайней мере три топологии, получающиеся, если принять в качестве базиса множества $U=\prod_\alpha U_\alpha$, где

(a) все U_α открыты,

(b) все U_α открыты, $U_\alpha=X_\alpha$ для всех, кроме, быть может, *счетного* множества значений α,

(c) все U_α открыты, $U_\alpha=X_\alpha$ для всех, кроме, быть может, *конечного* числа значений α.

Имея в виду дальнейшие приложения, мы выберем для изучения топологию (c) — слабейшую из топологий пространства X, гарантирующих непрерывность отображений pr_α. Формальное определение ее таково:

1. Определение. Рассмотрим семейство (X_α, τ_α) топологических пространств. *Тихоновским произведением топологий* τ_α называется топология τ пространства $X=\prod_\alpha X_\alpha$, получаемая, если в качестве базиса взять совокупность всех множеств $U=\prod_\alpha U_\alpha$, где каждое U_α открыто и где $U_\alpha=X_\alpha$, за исключением конечного числа индексов α. *Тихоновское произведение топологических пространств* есть их прямое произведение, топологизированное указанным образом.

Ясно, что для сходимости обобщенной последовательности f в произведении X пространств X_α необходимо и достаточно, чтобы для каждого α обобщенная последовательность $pr_\alpha f$ сходилась в пространстве X_α.

2. Лемма. *Тихоновское произведение хаусдорфовых пространств есть хаусдорфово пространство.*

3. Лемма. *Если $b\subseteq a$, то проектирование pr_b (ср. с 3.14) пространства $\prod_{\alpha\in a} X_\alpha$ на $\prod_{\alpha\in b} X_\alpha$ непрерывно и отображает открытые множества в открытые.*

4. Лемма. *Тихоновское произведение счетного числа метрических пространств X_n, $n=1, 2, \ldots$, является метрическим пространством. Если ϱ_n — метрика пространства X_n, то метрика произведения $X=\prod_n X_n$ может быть определена формулой*

$$\varrho(x, y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{\varrho_n(pr_n x, pr_n y)}{1+\varrho_n(pr_n x, pr_n y)}.$$

Если каждое из пространств X_n полно, то их произведение, так метризованное, тоже полно.

Доказательства этих лемм получаются непосредственно и элементарно; мы предоставляем их читателю.

5. Теорема (*Тихонов*). *Произведение бикомпактных пространств бикомпактно.*

Доказательство. Доказательство этой теоремы основано на лемме 7.12. Пусть X_α бикомпактно; обозначим через $\mathscr{E}$ какой-нибудь ультрафильтр подмножеств пространства $X = \prod_\alpha X_\alpha$. Тогда совокупность $\mathscr{E}_\alpha$ всех множеств вида $pr_\alpha(E)$, где $E \in \mathscr{E}$, будет ультрафильтром в X_α. Это ясно, так как собственная мажоранта $\mathscr{E}'_\alpha$ фильтра $\mathscr{E}_\alpha$ определяет собственную мажоранту

$$\mathscr{E}' = \{E \mid E = pr_\alpha^{-1}(E_\alpha),\ E_\alpha \in \mathscr{E}'_\alpha\}$$

для $\mathscr{E}$. По лемме 7.12, каждое $\mathscr{E}_\alpha$ сходится к некоторой точке $x(\alpha) \in X_\alpha$. Из определения произведения топологий легко вытекает, что $\mathscr{E}$ сходится к точке $x = \prod_\alpha x(\alpha)$ пространства X, ч. т. д.

9. Упражнения

1. Каждый непустой открытый интервал вещественных чисел гомеоморфен множеству всех вещественных чисел, но не гомеоморфен никакому полуоткрытому или замкнутому интервалу. Замкнутый интервал не гомеоморфен множеству комплексных чисел, по модулю равных единице.

2. Пусть R — пространство всех вещественных чисел; положим $R_x = R$ для каждого $x \in R$. Показать, что $Q = \prod_{x \in R} R_x$ содержит счетное подмножество, замыкание которого совпадает с Q, но не имеет счетного базиса.

3. Не каждое нормальное пространство метризуемо.

4. Пусть G_1 и G_2 — открытые подмножества нормального пространства и F — замкнутое множество, причем $F \subseteq G_1 \cup G_2$. Показать, что F есть сумма замкнутых множеств $F_1 \subseteq G_1$ и $F_2 \subseteq G_2$.

5. Пусть S — некоторое абстрактное множество. Показать, что совокупность $B(S)$ всех ограниченных вещественных или комплексных функций на S с метрикой $\varrho(f, g) = \sup_{s \in S} |f(s) - g(s)|$ является полным метрическим пространством. Если S — топологическое пространство, то совокупность $C(S)$ всех ограниченных непрерывных вещественных или комплексных функций на S есть замкнутое подмножество в $B(S)$.

6. Установить существование такой непрерывной вещественной функции вещественного переменного, что

$$\overline{\lim_{h \to 0+}} \left| \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \right| = \infty \text{ для всех } t.$$

Указание. Пусть S — вещественная прямая и $C(S)$ — пространство ограниченных вещественных непрерывных функций, метризуемое, как в упражнении 5. Обозначим через C_m, $m=1, 2, \ldots$, множество всех функций f из $C(S)$, для которых

$$\left|\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\right| \leqslant m$$

для некоторого t и всех $h>0$. Используя теорему Бэра о категориях, показать, что сумма этих множеств C_m не совпадает с $C(S)$.

С. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ АЛГЕБРЫ

Используемые в этой книге алгебраические результаты будут вводиться и доказываться там, где они понадобятся. В этом разделе будет дан краткий обзор основных понятий и введены необходимые определения.

10. Группы

Группой называется множество G вместе с отображением μ: $G\times G \to G$, удовлетворяющим перечисленным ниже условиям I—III. Бинарная операция μ часто записывается в виде $\mu(a, b)=ab$ и в этом обозначении называется *умножением*. Элемент ab называется *произведением* элементов a и b. Произведение ab должно удовлетворять следующим условиям:

I. $(ab)c=a(bc)$; a, b, $c\in G$.

II. В группе G существует такой элемент e, называемый *единицей* группы, что для любого $a\in G$ $ae=ea=a$.

III. Для каждого $a\in G$ существует такой элемент a^{-1}, называемый *обратным* к a, что $aa^{-1}=a^{-1}a=e$.

Подгруппа группы G есть подмножество элементов группы G, само являющееся группой относительно заданной в G бинарной операции. *Собственная подгруппа* есть подгруппа, отличная от $\{e\}$ и от G. *Коммутативная*, или *абелева*, группа — это группа, в которой выполняется коммутативный закон: $ab=ba$. В коммутативном случае бинарная операция μ часто записывается в виде $\mu(a, b)=a+b$ и в этом обозначении называется *сложением*. Элемент $a+b$ называется *суммой* элементов a и b, а сама группа называется в этом случае *аддитивной*. Единица аддитивной группы называется ее *нулевым элементом* и обозначается 0 вместо e. Кроме того, в аддитивной группе пишут $-a$ вместо a^{-1} и $a-b$ вместо $a+(-b)$. Аддитивная запись будет использоваться только в случае коммутативной группы.

Если A и B — подмножества группы G с умножением в качестве групповой операции и если g и h — элементы из G, то через A^{-1} обозначается множество всех элементов вида a^{-1}, где $a\in A$; через

AB — множество элементов вида ab, где $a \in A$, $b \in B$; через gA — множество элементов вида ga, где $a \in A$, и через gAh — множество элементов вида gah, где $a \in A$. Для аддитивной группы соответствующими обозначениями будут $-A$, $A+B$, $g+A$.

Следующие, часто используемые утверждения непосредственно вытекают из наших определений: в группе G есть только одна единица; только один элемент a^{-1}, обратный к a; для каждой пары элементов a и b группы G существуют однозначно определенные элементы x и $y \in G$, для которых $ax=b$, $ya=b$; единица группы G принадлежит каждой ее подгруппе; $(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$.

Отображение $h: A \to B$ группы A в группу B называется *гомоморфизмом*, если $h(ab)=h(a)\,h(b)$. Взаимно однозначный гомоморфизм называется *изоморфизмом*. Если $h: A \to B$ — изоморфизм и если $h(A)=B$, то группы A и B называются *изоморфными*; в этом случае говорят также, что группа A *изоморфна* группе B. Изоморфизм группы G на себя называется ее *автоморфизмом*. Если $a \in G$, то преобразование $h_a: G \to G$, определяемое равенством $h_a(x)=a^{-1}xa$, является автоморфизмом группы G, этот автоморфизм называется *внутренним*; элемент $a^{-1}xa$ называется *сопряженным* к x. Все автоморфизмы группы G, не являющиеся внутренними, называются *внешними*. *Группа автоморфизмов* группы G — это множество всех ее автоморфизмов вместе с соответствующей бинарной операцией: произведение двух автоморфизмов определяется равенством $(hk)(x)=$ $=h(k(x))$. Внутренние автоморфизмы группы образуют, очевидно, подгруппу в группе всех ее автоморфизмов.

Подгруппа A группы G называется ее *инвариантной подгруппой* или *нормальным делителем*, если $x^{-1}Ax=A$ для любого $x \in G$. Если A — подгруппа группы G, то множества вида Ax называются *правыми классами смежности группы* G по подгруппе A, а множества вида xA — *левыми классами смежности по подгруппе* A. Таким образом, если A — нормальный делитель, то правый класс смежности Ax совпадает с левым классом смежности xA. Классы смежности по нормальному делителю A образуют, очевидно, группу относительно умножения $(Ax)(Ay)=A(xy)$. Эта группа классов смежности по A называется *фактор-группой* группы G по нормальному делителю A; она обозначается через G/A. Если группа G абелева, то все ее подгруппы являются нормальными делителями.

11. Линейные пространства

Кольцо есть аддитивная группа R вместе с отображением $r: R \times R \to R$, обладающим перечисленными ниже свойствами I—III. Бинарная операция r записывается в виде $r(a, b)=ab$ и называется *умножением*. Операция умножения должна удовлетворять следующим условиям:

I. $(ab)c=a(bc)$.
II. $a(b+c)=ab+ac$.
III. $(b+c)a=ba+ca$.

Элемент $a+b$ кольца называется *суммой* элементов a и b, а элемент ab — их *произведением*. Кольцо *коммутативно*, если в нем тождественно $ab=ba$. *Поле* есть коммутативное кольцо, ненулевые элементы которого образуют группу по умножению. Единица этой группы в случае поля вместо e будет обозначаться символом 1.

Линейное векторное пространство, *линейное пространство* или *векторное пространство над полем* Φ есть аддитивная группа $\mathfrak{X}$ вместе с операцией $m:\Phi\times\mathfrak{X}\to\mathfrak{X}$, записываемой в виде $m(\alpha, x)=\alpha x$ и удовлетворяющей следующим четырем условиям:

I. $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$, $\alpha\in\Phi$, x, $y\in\mathfrak{X}$;
II. $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$, α, $\beta\in\Phi$, $x\in\mathfrak{X}$;
III. $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$, α, $\beta\in\Phi$, $x\in\mathfrak{X}$;
IV. $1\cdot x=x$, $x\in\mathfrak{X}$.

Элементы векторного пространства называются *векторами*, элементы поля коэффициентов Φ — *скалярами*. Операции $x\to\alpha x$ и $x\to\to a+x$, где $\alpha\in\Phi$ и $a\in\mathfrak{X}$ соответственно называются *умножением на скаляр* α и *переносом* на a. Сумма $\alpha x+\beta y+\ldots+\gamma z$, где α, β, ..., γ — скаляры, называется *линейной комбинацией* векторов x, y, ..., z. *Линейное подпространство*, *подпространство*, или *линейное многообразие* векторного пространства, есть подмножество, содержащее все линейные комбинации входящих в него векторов. Подпространство, *натянутое* на данное множество E, или *порождаемое* множеством E, или *линейная оболочка* множества E — это совокупность всех линейных комбинаций элементов, принадлежащих E. Это множество есть наименьшее линейное подпространство, содержащее E.

Множество A точек линейного пространства над полем Φ называется *линейно независимым*, если из того, что линейная комбинация $\alpha x+\beta y+\ldots+\gamma z$ несовпадающих элементов x, y, ..., z из A обращается в нуль, вытекает, что $\alpha=\beta=\ldots=\gamma=0$. Из теоремы 2.7 легко следует, что в каждом линейном векторном пространстве $\mathfrak{X}$ существует максимальное линейно независимое подмножество B. Подмножество B линейного пространства $\mathfrak{X}$ называется его *базисом Гамеля* (или алгебраическим базисом), если каждый вектор x из $\mathfrak{X}$ имеет единственное представление $x=\alpha_1 b_1+\ldots+\alpha_n b_n$, где $\alpha_i\in\Phi$ и $b_i\in B$. Ясно, что множество B в том и только в том случае является базисом Гамеля, если оно представляет собой максимальное линейно независимое множество. Мощность множества элементов, составляющих базис Гамеля, не зависит от специального выбора базиса и называется *размерностью* соответствующего линейного пространства. Эта независимость особенно легко доказывается в случае существования конечного базиса Гамеля, при этом пространство называется *конечномерным*. В конечномерном пространстве базис Гамеля обычно называется просто *базисом*.

Функция T называется *линейным оператором* или *линейным преобразованием*, если ее областью определения и областью значений являются линейные пространства над одним и тем же полем Φ и если $T(x+y)=T(x)+T(y)$, $T(\alpha x)=\alpha T(x)$ для каждого $\alpha\in\Phi$ и любой пары x, y векторов из области определения оператора T. Таким образом, линейное преобразование линейного пространства $\mathfrak{X}$ есть гомоморфизм его аддитивной группы $\mathfrak{X}$, коммутирующий с операциями умножения на скаляры. Если $T:\mathfrak{X}\to\mathfrak{Y}$ и $U:\mathfrak{Y}\to\mathfrak{Z}$ — линейные преобразования, причем $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ — линейные пространства над одним и тем же полем Φ, то *произведение* UT, определяемое равенством $(UT)x=U(Tx)$, является линейным преобразованием, отображающим $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{Z}$. Если линейный оператор T отображает $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{X}$, то он называется *линейным оператором в пространстве* $\mathfrak{X}$. Для такого оператора преобразование TT обозначается через T^2 и, по индукции, $T^{n-1}T$ — через T^n. Символом I обозначается *единичный оператор*, $Ix=x$, символом 0 — нулевой оператор, $0x=0$. Если $P(\lambda)=\alpha_0+\alpha_1\lambda+\ldots+\alpha_n\lambda^n$ — многочлен, то через $P(T)$ обозначается оператор $\alpha_0 I+\alpha_1 T+\ldots+\alpha_n T^n$. Если T и U — линейные операторы, отображающие $\mathfrak{X}$ в линейное пространство $\mathfrak{Y}$, то их *сумма* $T+U$, определяемая равенством $(T+U)x=Tx+Ux$, также будет линейным оператором, отображающим $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{Y}$. Если T — линейный оператор и α — скаляр, то оператор αT, определяемый равенством $(\alpha T)x=\alpha(Tx)$, тоже линеен. Если $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ — линейные пространства над одним и тем же полем Φ, то совокупность всех линейных операторов, отображающих $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{Y}$, является линейным пространством над Φ с операциями $T+U$ и αT. Если $\mathfrak{X}=\mathfrak{Y}$, то это множество будет кольцом с операциями $T+U$ и TU. Линейный оператор E в пространстве $\mathfrak{X}$ называется оператором *проектирования*, или *проекционным оператором*, или просто *проектором*, если $E^2=E$. Проекционный оператор иногда называют *идемпотентным*. Если $\mathfrak{X}$ — векторное пространство, $A\subseteq\mathfrak{X}$ и α — скаляр, то символом αA обозначается множество всех элементов вида αx, $x\in A$. Если A, $B\subseteq\mathfrak{X}$ и $x\in\mathfrak{X}$, то, так как $\mathfrak{X}$ — аддитивная группа, обозначения $A+B$, $A-B$ и $x+A$ имеют тот же смысл, что и прежде. Векторное пространство $\mathfrak{X}$ называется *прямой суммой* векторных пространств $\mathfrak{M}_i$, $i=1, 2, \ldots, n$, или $\mathfrak{X}=\mathfrak{M}_1\oplus\ldots\oplus\mathfrak{M}_n$, если пространства $\mathfrak{M}_i$ являются подпространствами $\mathfrak{X}$ и каждое $x\in\mathfrak{X}$ единственным образом представляется в виде $x=m_1+\ldots+m_n$, $m_i\in\mathfrak{M}_i$, $i=1, 2, \ldots, n$. Отображение $E_i:\mathfrak{X}\to\mathfrak{M}_i$, определяемое равенством $E_i x=m_i$, есть проектирование $\mathfrak{X}$ на $\mathfrak{M}_i$.

Если $\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_n$ — векторные пространства над полем Φ, то множество $\mathfrak{X}=\mathfrak{X}_1\times\mathfrak{X}_2\times\ldots\times\mathfrak{X}_n$ становится векторным пространством, если операции в нем определить равенствами:

$$[x_1, \ldots, x_n]+[y_1, \ldots, y_n]=[x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n],$$
$$\alpha[x_1, \ldots, x_n]=[\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n].$$

Пространство $\mathfrak{X}$ является прямой суммой подпространств $\mathfrak{M}_i$, где $\mathfrak{M}_i$ есть совокупность таких векторов $[x_1, \ldots, x_n]$ из $\mathfrak{X}$, у которых $x_j=0$ при $j \neq i$. Так как между пространствами $\mathfrak{M}_i$ и $\mathfrak{X}_i$ существует взаимно однозначное линейное соответствие, то пространство $\mathfrak{X}$ часто называют *прямой суммой* пространств $\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_n$.

Если $\mathfrak{M}$ — подпространство векторного пространства $\mathfrak{X}$ над полем Φ, то *фактор-пространством* $\mathfrak{X}/\mathfrak{M}$ называется совокупность классов смежности $\mathfrak{X}$ по $\mathfrak{M}$, т. е. совокупность множеств вида $x+\mathfrak{M}$, $x \in \mathfrak{X}$. Алгебраические операции в $\mathfrak{X}/\mathfrak{M}$ определяются следующими равенствами:

$$(x+\mathfrak{M})+(y+\mathfrak{M})=(x+y)+\mathfrak{M};\ x,\ y \in \mathfrak{X};$$

$$\alpha(x+\mathfrak{M})=\alpha x+\mathfrak{M};\ \alpha \in \Phi;\ x \in \mathfrak{X}.$$

Относительно этих операций фактор-пространство $\mathfrak{X}/\mathfrak{M}$ есть линейное векторное пространство. Отображение $x \to x+\mathfrak{M}$ пространства $\mathfrak{X}$ на $\mathfrak{X}/\mathfrak{M}$ называется *естественным гомоморфизмом* $\mathfrak{X}$ *на* $\mathfrak{X}/\mathfrak{M}$. Оно является линейным преобразованием.

За исключением тех случаев, когда специально оговорено противное, полем коэффициентов линейного пространства $\mathfrak{X}$ будет либо поле вещественных чисел, в этом случае $\mathfrak{X}$ называется *вещественным линейным пространством*, либо поле комплексных чисел, и тогда $\mathfrak{X}$ называется *комплексным линейным пространством*. *Линейным функционалом* называется линейное преобразование, область значений которого совпадает с полем коэффициентов.

12. Алгебры

Пусть R — кольцо; подмножество $R_1 \subseteq R$ называется его *подкольцом*, если элементы из R_1 образуют кольцо относительно операций, определенных в R. Подкольцо I из R называется *правым идеалом* кольца R, если оно дополнительно обладает следующими свойствами:

(a) $Ix \subseteq I$, $x \in R$,

(b) $(0) \neq I \neq R$.

Определение *левого идеала* аналогично. Подкольцо $I \subseteq R$, являющееся одновременно и правым и левым идеалами, называется *двусторонним идеалом*. Подкольца (0) и R обычно называются *тривиальными*, или *несобственными*, *идеалами*, все остальные идеалы называются *собственными*. Из условия (a) вытекает, очевидно, что если R — кольцо с единицей e, то e не принадлежит никакому (собственному) идеалу. Если R — поле, то R не содержит никаких собственных идеалов; в самом деле, если I — идеал и $a \in I$, $a \neq 0$, то I содержит также $a(a^{-1}x)=x$ для каждого $x \in R$. Обратно, коммутативное кольцо R с единицей, не содержащее собственных идеалов, является полем. Чтобы это доказать, рассмотрим элемент $a \in R$, $a \neq 0$. Множество $I_a=\{ax \mid x \in R\}$ является подкольцом, удовлетворяющим условию (а) и не совпадающим с нулевым подкольцом (0); следовательно, $I_a=R$, т. е. существует такой элемент $x \in R$, что $e=ax=xa$. Таким образом, каждый ненулевой элемент из R имеет обратный, и, значит, R является полем.

Правый (левый или двусторонний) идеал кольца R называется *максимальным правым* (*левым* или *двусторонним*) идеалом, если он не содержится в другом идеале того же самого типа. Если R — кольцо с единицей e, то каждый его правый идеал I_0 содержится в максимальном правом идеале. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим семейство $\mathscr{E}$ всех правых идеалов кольца R, содержащих I_0 и не содержащих e. Будем считать, что множество $\mathscr{E}$ упорядочено отношением включения $\subseteq$. Если $\mathscr{F}$ — некоторое линейно упорядоченное подсемейство из $\mathscr{E}$, то, как легко видеть, $\bigcup \mathscr{F}$ есть правый идеал кольца R, не содержащий e. В силу леммы Цорна (2.7) в $\mathscr{E}$ существует максимальный элемент, который и будет, очевидно, его максимальным правым идеалом, содержащим I_0.

Если I — двусторонний идеал кольца R, то, по определению, $x+I=\{x+y \mid y \in I\}$. Если определить операции:

$$(x+I)+(y+I)=(x+y)+I,$$
$$(x+I)(y+I)=xy+I,$$

то множества $x+I$, $x \in R$, образуют кольцо, называемое *фактор-кольцом* кольца R по идеалу I и обозначаемое через R/I. В качестве легкого упражнения, читателю предлагается доказать, что для того, чтобы выписанные выше равенства однозначно определяли операции в R/I, необходимо и достаточно, чтобы I было двусторонним идеалом. Отображение h кольца R_1 в другое кольцо R_2 называется *гомоморфизмом*, если

$$h(x+y)=h(x)+h(y)$$

и

$$h(xy)=h(x)\,h(y).$$

Взаимно однозначный гомоморфизм называется *изоморфизмом*. *Ядро* гомоморфизма — это совокупность элементов, отображающихся в нуль. Отображение $x \to x+I$ есть гомоморфизм R на R/I, называемое *естественным гомоморфизмом*. Читатель заметит, что ядром этого естественного гомоморфизма является I. Отметим, что если J — правый идеал, а I — двусторонний идеал, причем $I \subseteq J$, то образ J при естественном гомоморфизме h кольца R на R/I является (быть может, тривиальным) правым идеалом фактор-кольца R/I, обозначаемым через J/I. Обратно, если A есть правый идеал в R/I, то $J=h^{-1}(A)$ будет, как легко видеть, правым идеалом в R, причем $I \subseteq J$ и $A=J/I$. Далее, J/I в том и только в том случае будет собственным идеалом, если $I \subset J \subset R$. Отсюда следует, что если R — коммутативное кольцо с единицей и I — идеал в R, то

R/I будет полем в том и только в том случае, если I есть максимальный идеал. В самом деле, если I — максимальный идеал, то R/I — коммутативное кольцо с единицей, не имеющее собственных идеалов, а в этом случае, как мы видели, R/I является полем. Обратно, если R/I — поле, то оно не имеет идеалов и, следовательно, R не имеет идеалов, содержащих I строго внутри себя.

Если R — кольцо с единицей e, то элемент x из R называется (*правым, левым*) *регулярным* элементом, если в R для него имеется (правый, левый) обратный элемент y, т. е. такой, что ($xy=e$, $yx=e$) $xy=yx=e$. Если x — регулярный элемент, то его единственный обратный элемент обозначается через x^{-1}. Элемент, не являющийся (правым, левым) регулярным, называется (*правым, левым*) *сингулярным*.

Пусть Φ — поле, множество X называется *алгеброй* над Φ, если X является одновременно и кольцом и векторным пространством над Φ, причем

$$\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y), \quad x, y \in X, \quad \alpha \in \Phi.$$

Правый (*левый, двусторонний*) *идеал* алгебры — это правый (левый, двусторонний) идеал соответствующего кольца, замкнутый относительно умножения на скаляры. Если I — двусторонний идеал алгебры X, то фактор-кольцо X/I является алгеброй (называемой *фактор-алгеброй*) относительно операций, определенных выше для случаев кольца и линейного пространства. Отображение алгебры X в другую алгебру над тем же полем называется *гомоморфизмом*, если оно является одновременно и линейным преобразованием и кольцевым гомоморфизмом. Взаимно однозначный гомоморфизм называется *изоморфизмом*. Если Φ — поле комплексных чисел и если в алгебре X задано однозначное отображение $x \to x^*$ такое, что

$$(x+y)^* = x^* + y^*, \quad (\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*, \quad (x^*)^* = x, \quad (xy)^* = y^* x^*,$$

то X называется *алгеброй с инволюцией*, а элемент x^* — *сопряженным к* x.

Элемент x кольца называется *идемпотентным*, если $x^2 = x$, и *нильпотентным*, если $x^n = 0$ для некоторого целого положительного n. *Булевским кольцом* называется кольцо, каждый элемент которого идемпотентен. В каждом булевском кольце тождественно $x+x=0$, т. е. $x=-x$. Чтобы убедиться в этом, заметим, что $(2x)=(2x)^2=4x^2=4x$, так что $2x=x+x=0$. Булевское кольцо коммутативно: в самом деле, $x+y=(x+y)^2=x+xy+yx+y$, откуда $xy=-yx$, и, следовательно, $xy=yx$.

Наименьшее булевское кольцо с единицей состоит из классов вычетов кольца целых чисел по модулю два, т. е. из двух чисел 0 и 1. Это булевское кольцо, которое мы обозначим через Φ_2, фактически является полем. Обратно, каждое булевское кольцо с единицей, являющееся полем, изоморфно Φ_2. Действительно, пусть 1 будет единицей кольца и x — его регулярный элемент. Тогда

$$1 = xx^{-1} = x^2x^{-1} = x(xx^{-1}) = x \cdot 1 = x.$$

Каждое булевское кольцо может рассматриваться как коммутативная алгебра над полем Φ_2; заметим, что при этом множество в том и только в том случае будет идеалом кольца, если оно является идеалом соответствующей алгебры. Если I — идеал булевского кольца R, то R/I — булевское кольцо. Из предыдущих рассмотрений ясно, что если M — максимальный идеал булевского кольца R с единицей, то R/M изоморфно полю Φ_2.

Важным примером булевского кольца с единицей может служить кольцо подмножеств данного множества. Точнее, пусть дано множество S; умножение и сложение произвольных подмножеств E и F множества S определим равенствами

$$EF = E \cap F, \quad E + F = (E \cap F') \cup (E' \cap F) = (E \cup F) \cap (E \cap F)'.$$

Читатель может проверить, что совокупность всех подмножеств множества S образует булевское кольцо, в котором S служит единичным элементом, а пустое множество — нулем. (Определенное выше множество $E+F$ называется *симметрической разностью* множеств E и F; в дальнейшем мы будем обозначать ее символом $E\Delta F$.) Впоследствии будут даны и другие примеры булевских колец; необходимо отметить, однако, что каждое булевское кольцо с единицей может быть представлено как булевское кольцо подмножеств некоторого множества. Этот важный результат принадлежит Стоуну.

Топологическое пространство называется *вполне разрывным*, если базис его топологии состоит из множеств, одновременно замкнутых и открытых.

1. Теорема (*Стоун*). *Каждое булевское кольцо с единицей изоморфно булевскому кольцу всех одновременно открытых и замкнутых подмножеств некоторого вполне разрывного бикомпактного хаусдорфова пространства.*

Доказательство. Если булевское кольцо B содержит только один элемент, так что $e=0$, то теорема тривиальна. Мы предположим поэтому, что $e \neq 0$. Обозначим через H множество всех ненулевых гомоморфизмов B в булевское кольцо Φ_2. Для каждого $x \in B$ положим $H(x) = \{h \mid h \in H, \ h(x) = 1\}$. В этом доказательстве мы будем пользоваться обозначением $x' = e + x$, если $x \in B$; тогда $H(x') = H(x)'$, где второй штрих означает дополнение множества $H(x)$ в H. Из равенств

$$H(xy) = H(x) \cap H(y)$$

и

$$H(x+y) = (H(x) \cap H(y)') \cup (H(x)' \cap H(y))$$

вытекает, что отображение $x \longrightarrow H(x)$ есть гомоморфизм булевского кольца B в совокупность подмножеств множества H.

Докажем теперь следующее вспомогательное утверждение. Пусть подмножество $B_1 \subseteq B$ удовлетворяет условиям:

(a) если $x, y \in B_1$, то $xy \in B_1$;

(b) если $x \in B_1$, то $x \neq 0$.

Тогда существует такой гомоморфизм $h_1 : B \longrightarrow \Phi_2$, что $h_1(x) = 1$ при $x \in B_1$. Для доказательства обозначим через I_1 совокупность всех элементов вида ax', где $a \in B$, $x \in B_1$. Чтобы убедиться в том, что I_1 — идеал, заметим, что

$$(ax'+by')(xy)' = (ax'+by')(e+xy) = (ax'+by')+ \\ +(ax'+by')xy = (ax'+by')+(a+ax+b+by)xy = \\ = (ax'+by')+axy+axy+bxy+bxy = ax'+by',$$

так что сумма двух элементов из I_1 принадлежит I_1. Так как ясно, что I_1 инвариантно при умножении на элементы из B, то I_1 является идеалом. Этот идеал — собственный, потому что если $ax'=e$, то

$$e = ax' = ax'x' = ex' = x',$$

откуда следует, что $x=0$ вопреки условию (b). Так как B — кольцо с единицей, то I_1 содержится в некотором максимальном идеале M_1. Обозначим через h_1 естественный гомоморфизм $h_1 : B \longrightarrow B/M_1 = \Phi_2$. Теперь если $x \in B_1$, то $x' = e + x \in I_1 \subseteq M_1$ и, следовательно,

$$h(e)+h(x) = h(e+x) = 0,$$

откуда $h(x) = h(e) = 1$. Это и доказывает наше вспомогательное утверждение.

Мы видели, что отображение $x \longrightarrow H(x)$ является гомоморфизмом. Для того чтобы убедиться в том, что оно есть изоморфизм, предположим, что $x_0 \neq y_0$, и докажем, что существует такое $h_0 \in H$, что $h_0(x_0) \neq h_0(y_0)$. Если $x_0 \neq y_0$, то либо $x_0 \neq x_0y_0$, либо $y_0 \neq x_0y_0$; предположим, что справедливо первое. Пусть $z_0 = x_0 + x_0y_0 = x_0y_0'$, так что $z_0 \neq 0$. Если $B_1 = \{z_0\}$, то, как мы видели в предыдущем абзаце, существует такое $h_0 \in H$, что $h_0(z_0) = 1$. Далее, $z_0y_0 = 0$, так что $h_0(y_0) = h_0(z_0)\ h_0(y_0) = h_0(z_0y_0) = h_0(0) = 0$, и $1 = h_0(z_0) = h_0(x_0+x_0y_0) = h_0(x_0)$. Этим доказано, что B изоморфно булевскому кольцу подмножеств множества H.

Остается доказать, что H может быть топологизировано таким образом, что оно становится вполне разрывным бикомпактным хаусдорфовым пространством, в котором множества $H(x)$, $x \in B$, это те и только те подмножества из H, которые являются одновременно открытыми и замкнутыми. Как мы видели выше, $H(x) \cap H(y) = H(xy)$ и $H = H(e)$, так что по лемме 4.7 совокупность $\{H(x) \mid x \in B\}$ представляет собой базис некоторой топологии. Так как $H(x)' = H(e+x)$, то каждое множество базиса одновременно открыто и замкнуто, т. е. H вполне разрывно. Чтобы доказать бикомпактность H в этой топологии, воспользуемся леммой 5.6. Так как каждое замкнутое подмножество из H является пересечением множеств из $\{H(x) \mid x \in B\}$, то достаточно показать, что если A_1 есть подмножество B такое, что для каждого конечного множества $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq A_1$, $\bigcap_{i=1}^{n} H(x_i) \neq \varnothing$, то $\bigcap_{x \in A_1} H(x) \neq \varnothing$. Пусть B_1 — множество всех конечных произведений элементов из A_1, тогда B_1 удовлетворяет, очевидно, введенным выше условиям (a) и (b). Следовательно, существует такое $h_1 \in H$, что $h_1(x) = 1$, $x \in A_1$, и, значит, h_1 принадлежит каждому $H(x)$, $x \in A_1$, т. е. пространство H бикомпактно.

Наконец, пусть G — произвольное подмножество в H, которое в H одновременно открыто и замкнуто; так как G открыто, то $G = \bigcup_{\alpha} H(x_\alpha)$, а так как G бикомпактно, то из этого покрытия G можно выделить конечное: $G = H(x_1) \bigcup \ldots \bigcup H(x_n) = H((x_1' \ldots x_n')')$, таким образом, каждое множество из H, одновременно открытое и замкнутое, имеет вид $H(x)$ для некоторого $x \in B$. Это дополняет доказательство теоремы, ч. т. д.

Имеет смысл привести и другую формулировку этой теоремы — через отношение порядка и структурные свойства. Частично упорядоченное множество L называется *структурой*, если для каждой пары элементов из L имеется как верхняя грань (2.3), так и нижняя грань, обозначаемые соответственно через $x \vee y$ и $x \wedge y$. Структура L имеет *единицу*, если существует такой элемент 1, что $x \leqslant 1$, $x \in L$, и *нуль*, если имеется такой элемент 0, что $0 \leqslant x$, $x \in L$. Структура L называется *дистрибутивной*, если

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z), \quad x, y, z \in L,$$

и *структурой с дополнениями*, если для каждого $x \in L$ существует такой элемент $x' \in L$, что

$$x \vee x' = 1, \quad x \wedge x' = 0.$$

Структура L называется *полной*, если в ней каждое подмножество, ограниченное сверху, имеет верхнюю грань или, что эквивалентно этому, каждое подмножество, ограниченное снизу, имеет нижнюю грань. Структура называется *σ-полной*, если это условие выполняется для всех счетных подмножеств из L. Дистрибутивная структура с дополнениями называется *булевской алгеброй*.

Пусть B — булевская алгебра, определим в ней умножение и сложение, полагая

$$xy = x \wedge y, \quad x + y = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y).$$

Можно доказать, что относительно этих операций B есть булевское кольцо, в котором 1 является единицей. С другой стороны, пусть B будет булевское кольцо с единицей, обозначаемой 1, положим $x \leqslant y$, если $x = xy$ и $x' = 1 + x$, при этом B становится булевской алгеброй и

$$x \vee y = x + y + xy, \quad x \wedge y = xy.$$

Таким образом, понятия булевской алгебры и булевского кольца с единицей эквивалентны.

Если B и C — булевские алгебры и $h: B \to C$, то h называется *гомоморфизмом*, если

$$h(x \wedge y) = h(x) \wedge h(y), \qquad h(x \vee y) = h(x) \vee h(y), \qquad h(x') = h(x)'.$$

Если отображение h взаимно однозначно, то оно называется *изоморфизмом*. Если h — изоморфизм и $h(B) = C$, то говорят, что *B изоморфна C* или что *B и C изоморфны*. Из предыдущего ясно, что если h — гомоморфизм булевской алгебры B и если B рассматривается как булевское кольцо с единицей, то h будет гомоморфизмом и в смысле, определенном для колец. Обратное утверждение также справедливо.

Примером булевской алгебры может служить кольцо $\Phi_2 = \{0, 1\}$; другим примером является структура всех подмножеств данного множества, где $\leqslant$ есть теоретико-множественное включение, а $\wedge$ и $\vee$ означают соответственно пересечение и объединение.

В этих терминах можно дать следующую формулировку теоремы Стоуна: *Каждая булевская алгебра изоморфна булевской алгебре всех одновременно открытых и замкнутых подмножеств некоторого вполне разрывного бикомпактного хаусдорфова пространства.*

13. Определители

Пусть $\mathfrak{X}$ — конечномерное пространство с базисом $x_1, \ldots, x_n$. Рассмотрим линейное преобразование T пространства $\mathfrak{X}$ в себя. Коэффициенты (a_{ij}) в формуле

$$Tx_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = 1, \ldots, n,$$

вполне определяют линейный оператор T и в совокупности образуют *матрицу преобразования T относительно базиса* $x_1, \ldots, x_n$ или, если определенный базис подразумевается, просто *матрицу преобразования T*. Пусть i_k — целое число, $1 \leqslant i_k \leqslant n$, $k = 1, 2, \ldots, n$; положим $\delta_{i_1 \ldots i_n}$ равным нулю, если $i_j = i_k$ для некоторой пары индексов $j \neq k$, равным $+1$, если перестановка $i_1, \ldots, i_n$ переходит в $1, \ldots, n$ при помощи четного числа инверсий соседних индексов, и равным -1, если для этого требуется нечетное число таких инверсий. Число, выражаемое суммой

$$\sum_{i_1=1}^{n} \ldots \sum_{i_n=1}^{n} \delta_{i_1 \ldots i_n} a_{i_1 1} \ldots a_{i_n n},$$

называется *определителем матрицы* (a_{ik}). Можно показать, что если T — линейный оператор, то определители матриц преобразования T относительно любых двух базисов равны между собой, так что мы можем и будем называть их общее значение *определителем преобразования* T и обозначать через $\det(T)$. Определитель обладает важным мультипликативным свойством: $\det(T_1 \cdot T_2) = \det(T_1)\det(T_2)$. Линейное преобразование T пространства $\mathfrak{X}$, для которого существует взаимнооднозначное обратное преобразование, называется *невырожденным*. Одна из важных теорем теории определителей гласит:

Для того чтобы линейное преобразование конечномерного пространства было невырожденным, необходимо и достаточно, чтобы его определитель был отличен от нуля.

Пусть (a_{ij}) — квадратная матрица n-го порядка; *алгебраическим дополнением* элемента a_{ij} называется произведение $(-1)^{i+j}$ на определитель $(n-1)$-го порядка, получающийся из матрицы (a_{ij}) вычеркиванием i-й строки и j-го столбца. Иными словами, алгебраическое дополнение элемента a_{ij} получается, если заменить a_{ij} единицей, а все остальные элементы i-й строки и j-го столбца нулями и вычислить полученный определитель. Если обозначить алгебраическое дополнение элемента a_{ij} через A_{ij}, то нетрудно убедиться, что имеет место следующее равенство:

$$[*] \qquad \det(a_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}.$$

Первая сумма есть разложение определителя $\det(a_{ij})$ по элементам j-го столбца, а вторая — по элементам i-й строки. Аналогично если $j \neq k$, то

$$0 = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik} = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}a_{ki}.$$

Правило Крамера состоит в том, что если T — невырожденный линейный оператор с матрицей (a_{ij}), то матрица (b_{ij}) преобразования T^{-1} относительно того же самого базиса получается по формуле $b_{ij} = A_{ji}/\det(a_{ij})$.

Во втором томе нам понадобится теорема Лапласа о разложении для определителя. Пусть (a_{ij}) — квадратная матрица n-го порядка; p — целое число, $1 \leqslant p < n$; $i_1, \ldots, i_p$ и $j_1, \ldots, j_p$ — два множества индексов, причем $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leqslant n$ и $1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_p \leqslant n$. Обозначим через $B(i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_p)$ минор p-го порядка, получающийся, если из (a_{ij}) выбрать только элементы

$i_1, \ldots, i_p$-й строк и $j_1, \ldots, j_p$-го столбцов. *Алгебраическим дополнением* этого минора называется произведение $(-1)^{i_1+\ldots+i_p+j_1+\ldots+j_p}$ на определитель матрицы $(n-p)$-го порядка, получающейся вычеркиванием из (a_{ij}) $i_1, \ldots, i_p$-й строк и $(j_1, \ldots, j_p)$-го столбцов. Обозначим через $C(i_1, \ldots, i_p;\ j_1, \ \ldots, \ j_p)$ это алгебраическое дополнение, тогда разложением определителя $\det(a_{ij})$ по $i_1, \ldots, i_p$-й строкам называется следующая формула:

$$\det(a_{ij}) = \sum_{j_1, \ldots, j_p} B(i_1, \ldots, i_p;\ j_1, \ldots, j_p) \times \times C(i_1, \ldots, i_p;\ j_1, \ldots, j_p),$$

где суммирование распространяется на все сочетания p индексов $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_p \leqslant n$. Определитель $\det(a_{ij})$ точно также можно разложить и по $j_1, \ \ldots, \ j_p$-му столбцам, суммируя по всем сочетаниям из p индексов $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n$. При $p=1$ разложение Лапласа превращается в приведенное выше разложение [*] по строке или столбцу.

14. Упражнения

1. Показать, что существует соответствие между ненулевыми линейными функционалами f, определенными на векторном пространстве $\mathfrak{X}$, и подпространствами $\mathfrak{M}$ такими, что фактор-пространства $\mathfrak{X}/\mathfrak{M}$ одномерны. Это соответствие определяется следующим образом: $\mathfrak{M} = \{x \mid f(x) = 0\}$. Как можно определить f через $\mathfrak{M}$? Какой класс функционалов f соответствует одному и тому же $\mathfrak{M}$?

2. Провести подробно доказательство теоремы о существовании базиса Гамеля в любом векторном пространстве. Доказать, что любые два базиса имеют одинаковую мощность (случаи конечной и бесконечной размерностей рассмотреть отдельно. Для пространства бесконечной размерности воспользоваться теоремой Бернштейна о том, что если A и B — произвольные множества, причем мощность множества A больше или равна мощности множества B, а мощность B больше или равна мощности A, то эти два множества равномощны).

3. Пусть $\mathfrak{X}$ — векторное пространство над полем Φ и Φ' — подполе Φ; показать, что $\mathfrak{X}$ можно рассматривать как векторное пространство над полем Φ'. Каково соотношение между соответствующими значениями размерности пространства $\mathfrak{X}$?

4. Для того чтобы линейное пространство $\mathfrak{X}$ было прямой суммой подпространств $\mathfrak{M}_i$, $i = 1, \ldots, n$, необходимо и достаточно, чтобы в пространстве $\mathfrak{X}$ существовали такие проекционные операторы E_i, что $E_iE_j = 0$, $i \neq j$, $I = E_1 + E_2 + \ldots + E_n$ и $E_i\mathfrak{X} = \mathfrak{M}_i$.

5. Обозначим через T линейный оператор в комплексном линейном векторном пространстве, и пусть P, Q, R — многочлены с комплексными коэффициентами, причем для всех комплексных чисел λ

имеет место равенство $P(\lambda)\,Q(\lambda)=R(\lambda)$. Показать, что $P(T)\,Q(T)=$ $=R(T)$.

6. Семейство $\mathscr{E}$ проекционных операторов в линейном пространстве можно частично упорядочить, полагая $A \leqslant B$, если $AB=BA=A$. Показать, что $(\mathscr{E}, \leqslant)$ есть частично упорядоченное множество. Для коммутирующих проекционных операторов A и B положим $A \wedge B=AB$ и $A \vee B=A+B-AB$. Показать, что $A \wedge B$ есть проекционный оператор, являющийся нижней гранью A и B, и что его область значений является пересечением областей значений операторов A и B. Показать, что $A \vee B$ есть проекционный оператор, являющийся верхней гранью для A и B, причем его область значений является линейным многообразием, натянутым на области значений операторов A и B.

7. Пусть булевское кольцо $\Phi_2=\{0,\ 1\}$ топологизировано тем условием, что все его подмножества являются открытыми. Для каждого x из булевского кольца B с единицей положим $\Phi_2(x)=\Phi_2$ и $P=\prod\limits_{x \in B} \Phi_2(x)$. Обозначим через H семейство всех ненулевых гомоморфизмов B в Φ_2 и рассмотрим H как подпространство P. Показать, что P — вполне разрывное бикомпактное хаусдорфово пространство и что H — замкнутое подмножество P.

15. Библиографическая справка

Так как рассмотрение многих вопросов, которых мы коснулись в этой главе, было неполным, то мы укажем здесь некоторую литературу, в которой читатель при желании сможет найти необходимую справку.

Теория множеств и логика, Александров [1*], Гёдель [1], Камке [1], Розенблюм [1], Россер [1], Уайлдер Р. [1], Хаусдорф [1, 2].

Топология, Александров [1*], Александров и Хопф [1, гл. 1], Бурбаки [5], Келли [5], Лефшец [1, гл. 1], Понтрягин [1, гл. 2], Хаусдорф [1, 2].

Вещественное переменное, Грейвс Л. [2], Каратеодори [1], Натансон [1*], Хан [4], Хаусдорф [1, 2].

Комплексное переменное, Альфорс [1], Бибербах [1], Кнопп [1], Маркушевич [4*], Титчмарш [1].

Алгебра, Биркгоф и Мак-Лейн [1], Ван-дер-Варден [1], Джекобсон [1], Курош [1*—3*], Халмош [7].

Теория структур и булевских алгебр. Биркгоф Г. [3], Стоун [1, 9].

Определители. Биркгоф и Мак-Лейн [1, гл. IX], Веблен [1, гл. 1], Ф. Р. Гантмахер [1*], Ф. Р. Гантмахер и М. Г. Крейн [1]. Дрезден [1, гл. 1], Ковалевский [1].

Изложение теории множеств в параграфах 1, 2 находится на интуитивном уровне; читатель, интересующийся аксиоматическим подходом, может обратиться к Гёделю [1]. Мы не упомянули явно «аксиому выбора» Цермело (см. Цермело [1, 2]), как мы не упомянули и многих других аксиом логики и теории множеств. Читатель заметит, однако, что мы использовали эту аксиому в доказательстве хаусдорфова принципа максимальности (теорема 2.6), который в дальнейшем чаще всего используется через лемму Цорна (теорема 2.7). Доказательство теоремы 2.5 восходит к Цермело [2] (второе доказательство теоремы о полной упорядоченности). Эта работа интересна также из-за той полемики, которая развернулась вокруг ее аксиомы. Впервые принцип максимума, эквивалентный принципу полной упорядоченности (как в теореме 2.6), встречается у Хаусдорфа [1, стр. 140]. Цорн [1] дает теорему, по существу эквивалентную теореме 2.7. Аналогичная теорема имеется у Р. Мура [1, стр. 84]. Доказательства эквивалентности теоремы о полной упорядоченности и других теорем см. у Тейхмюллера [1] и Россера [1]. Келли [3] доказал, что теорема о полной упорядоченности эквивалентна теореме Тихонова о произведении пространств (теорема 8,5).

В заключение заметим, что несмотря на то, что Гёдель [2] доказал, что, если система логики адэкватна современной математике, мы не можем быть уверены в отсутствие в ней противоречия, он доказал также (Гёдель [1]), что если остальные аксиомы теории множеств совместны, то они остаются совместными и при добавлении к ним аксиомы выбора[1]).

---

[1]) Отметим еще, что понятие предела по направленному множеству (предел по спектру), которое легло в основу построения § 7, принадлежит С. О. Шатуновскому [1*] и Э. Муру [2]. Ими же доказаны и многие свойства, связанные с этим понятием. —*Прим. ред.*

ГЛАВА II

Три основных принципа линейного анализа

В теории линейных пространств, соответствующим образом топологизированных, мы встречаемся с тремя весьма плодотворными принципами, касающимися непрерывных линейных преобразований. Эти принципы и их следствия неоднократно будут применяться в последующих главах нашей книги. Они являются фундаментом многих современных результатов в таких областях линейного анализа, как теория суммирования, проблема моментов, эргодическая теория, вопросы существования инвариантных мер и теория интегрирования. Первый из этих принципов известен как *принцип равномерной ограниченности*. Он устанавливает, в частности, что предел последовательности непрерывных линейных операторов непрерывен. Второй называется *принципом открытости отображения*; он утверждает, что непрерывное линейное отображение между пространствами некоторых типов отображает открытые множества на открытые. Третий — *теорема Хана—Банаха*, устанавливает возможность продолжения линейного функционала. Из теоремы Хана—Банаха вытекает несколько теорем существования, часто используемых в последующих главах книги.

1. Принцип равномерной ограниченности

В дальнейшем *все линейные векторные пространства будут рассматриваться либо над полем вещественных чисел, либо над полем комплексных чисел. Вещественное векторное пространство*—это пространство над полем Φ вещественных чисел; *комплексное векторное пространство*—это пространство над полем Φ комплексных чисел. Если предложение о векторном пространстве формулируется без упоминания его поля коэффициентов, то это будет означать, что оно справедливо и для вещественного, и для комплексного случаев.

1. Определение. Группа G называется *топологической группой*, если:

(I) G есть хаусдорфово пространство;

(II) Отображение $(x, y) \longrightarrow xy^{-1}$ произведения $G \times G$ в G непрерывно.

Линейное пространство $\mathfrak{X}$ называется *линейным топологическим пространством*, если по сложению оно является коммутативной топологической группой, причем отображение $(\alpha, x) \longrightarrow \alpha x$ произведения $\Phi \times \mathfrak{X}$ в $\mathfrak{X}$ непрерывно.

2. Лемма. (a) *В топологической группе G каждая алгебраическая комбинация любого числа переменных $x_1, \ldots, x_n$, рассматриваемая как отображение $G \times \ldots \times G$ в G, непрерывна.*

(b) *В линейном топологическом пространстве $\mathfrak{X}$ всевозможные линейные комбинации любого числа скаляров $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ и векторов $x_1, \ldots, x_n$ являются непрерывными отображениями $\Phi \times \ldots \times \Phi \times \times \mathfrak{X} \times \ldots \times \mathfrak{X}$ в $\mathfrak{X}$.*

(c) *В линейном топологическом пространстве $\mathfrak{X}$ (группе G) отображение (я) $x \longrightarrow \alpha x$ ($x \longrightarrow x^{-1}$, $x \longrightarrow ax$ или $x \longrightarrow xa$), где α — любой отличный от нуля скаляр, является гомеоморфным отображением пространства $\mathfrak{X}$ (группы G) на себя.*

Доказательство. Утверждения (a) и (b) легко доказать по индукции, используя основные определения. Утверждение (c) просто выражает тот факт, что для отображения $x \longrightarrow \alpha x$ ($x \longrightarrow x^{-1}$, $x \longrightarrow ax$ или $x \longrightarrow xa$) существует обратное отображение $x \longrightarrow \frac{1}{\alpha} x$ ($x \longrightarrow x^{-1}$, $x \longrightarrow a^{-1}x$ или $x \longrightarrow xa^{-1}$), ч. т. д.

3. Лемма. *Замыкание линейного многообразия в линейном топологическом пространстве является линейным многообразием.*

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{Z}$ замыкание линейного многообразия $\mathfrak{Y}$ в линейном топологическом пространстве $\mathfrak{X}$; α и β — фиксированные скаляры. Рассмотрим отображение

$$\xi : (u, v) \longrightarrow \alpha u + \beta v$$

произведения $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ в $\mathfrak{X}$. Так как $\mathfrak{Y}$ — линейное многообразие, то

$$\mathfrak{Y} \times \mathfrak{Y} \subseteq \xi^{-1}(\mathfrak{Y}) \subseteq \xi^{-1}(\mathfrak{Z}).$$

По лемме 2 ξ непрерывно, и, значит, $\xi^{-1}(\mathfrak{Z})$ замкнуто. Следовательно,

$$\mathfrak{Z} \times \mathfrak{Z} \subseteq \xi^{-1}(\mathfrak{Z}),$$

т. е. $\mathfrak{Z}$ есть линейное многообразие, ч. т. д.

4. Определение. Подпространство, порожденное множеством B точек линейного пространства $\mathfrak{X}$, будет обозначаться через $\operatorname{sp}(B)$.

Если $\mathfrak{X}$ — линейное топологическое пространство, то замыкание множества $\operatorname{sp}(B)$, обозначаемое через $\overline{\operatorname{sp}}(B)$, называется *замкнутым линейным многообразием, порождаемым множеством* B, или *натянутым на множество* B, или *замкнутой линейной оболочкой множества* B. В силу леммы 3 $\overline{\operatorname{sp}}(B)$ является линейным пространством. Если $\overline{\operatorname{sp}}(B)=\mathfrak{X}$, то множество B называется *фундаментальным*.

5. Лемма. *Замкнутое линейное многообразие, порождаемое счетным подмножеством точек линейного топологического пространства, сепарабельно.*

Доказательство. Пусть Φ_0 — счетное всюду плотное подмножество скалярного поля Φ и B — счетное множество точек линейного топологического пространства. Тогда счетное множество векторов вида $\alpha x+\ldots+\beta y$, где $\alpha, \ldots, \beta \in \Phi_0$, а $x, \ldots, y \in B$, всюду плотно в $\overline{\operatorname{sp}}(B)$, ч. т. д.

6. Лемма. *Гомоморфное отображение одной топологической группы в другую, непрерывное в одной точке, непрерывно всюду.*

Доказательство. Пусть гомоморфное отображение $f: G \rightarrow H$ непрерывно в точке x, и $y \in G$. Если V — окрестность точки $f(y)$, то, по лемме 2(c), $Vf(y^{-1}x)$ будет окрестностью точки $f(x)$. Если U — такая окрестность точки x, что $f(U) \subseteq Vf(y^{-1}x)$, то $Ux^{-1}y$ будет такой окрестностью точки y, что $f(Ux^{-1}y)=f(U)f(x^{-1}y) \subseteq \subseteq Vf(y^{-1}x)f(x^{-1}y)=V$. Следовательно, f непрерывна в каждой точке, ч. т. д.

7. Определение. Множество B точек линейного топологического пространства $\mathfrak{X}$ называется *ограниченным*, если для любой окрестности V нуля в пространстве $\mathfrak{X}$ найдется такое вещественное положительное число ε, что $\alpha B \subseteq V$ при $|\alpha| \leqslant \varepsilon$.

8. Лемма. *Бикомпактное подмножество линейного топологического пространства ограничено.*

Доказательство. Рассмотрим бикомпактное подмножество B линейного топологического пространства $\mathfrak{X}$, и пусть V — произвольная окрестность нуля в этом пространстве. Так как αx непрерывно по обоим переменным, то существует такое $\delta>0$ и такая окрестность U нуля пространства $\mathfrak{X}$, что $\beta U \subseteq V$ при $|\beta|<\delta$. В силу того что $x/n \rightarrow 0$, $\mathfrak{X} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} nU$, и так как B бикомпактно, то

$B \subset \bigcup_{n=1}^{m} nU$ для некоторого m. Положим $\varepsilon = \delta/m$. Если $|\alpha| < \varepsilon$, то $|\alpha n| < \delta$ при $n = 1, \ldots, m$ и $\alpha B \subset \bigcup_{n=1}^{m} \alpha n U \subset V$, ч. т. д.

9. Следствие. *Сходящаяся последовательность точек линейного топологического пространства ограничена.*

Доказательство. Сходящаяся последовательность вместе с ее предельной точкой бикомпактна, ч. т. д.

10. Определение. *F-пространством* (или пространством *типа F*) называется линейное метрическое пространство $\mathfrak{X}$, обладающее следующими свойствами:

(I) Метрика ϱ пространства $\mathfrak{X}$ *инвариантна*, т. е.

$$\varrho(x, y) = \varrho(x - y, 0).$$

(II) Отображение $(\alpha, x) \to \alpha x$ произведения $\Phi \times \mathfrak{X}$ в $\mathfrak{X}$ непрерывно по α для каждого x и непрерывно по x для каждого α.

(III) Метрическое пространство $\mathfrak{X}$ полно.

Символом $|x|$ обозначается число $\varrho(x, 0)$, называемое *нормой* элемента x. Ввиду свойства инвариантности, постулируемого в пункте (I), легко видеть, что свойства: $\varrho(x, y) \leqslant \varrho(x, z) + \varrho(z, y)$, $\varrho(x, y) = 0$ в том и только в том случае, если $x = y$, и $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$, соответственно эквивалентны следующим свойствам нормы: $|x + y| \leqslant \leqslant |x| + |y|$, $|x| = 0$ в том и только в том случае, если $x = 0$, и $|-x| = |x|$. Таким образом, F-пространство можно также определить как линейное пространство, на котором задана неотрицательная функция $|x|$, обладающая тремя последними свойствами, и где для метрической функции ϱ, определяемой равенством $\varrho(x, y) = |x - y|$, дополнительно выполняются условия (II) и (III).

В этом определении не предполагается, что операция умножения на скаляр: $(\alpha, x) \to \alpha x$ непрерывна на произведении $\Phi \times \mathfrak{X}$. Следовательно, сразу не ясно, является ли F-пространство линейным топологическим пространством. Этот факт устанавливается теоремой 12. Для F-пространства нам тоже понадобится понятие ограниченного множества. Оно определяется здесь точно так же, как и для случая линейного топологического пространства (см. определение 7).

Следующая теорема, *принцип равностепенной непрерывности*,— центральное место настоящего параграфа. Из-за той формы, которую она принимает в случае B-пространств (см. § 3), она известна в литературе как *принцип равномерной ограниченности*.

→ 11. Теорема. *Пусть для каждого элемента a множества A T_a является непрерывным линейным отображением F-пространства*

$\mathfrak{X}$ в F-пространство $\mathfrak{Y}$. Если для каждого $x \in \mathfrak{X}$ множество $\{T_a x \mid a \in A\}$ ограничено, то $\lim\limits_{x \to 0} T_a x = 0$ равномерно относительно $a \in A$.

Значение теоремы 11 состоит в том, что она дает возможность переходить от двух утверждений, в каждом из которых один из параметров a или x фиксирован, к одному такому, в котором оба они переменны. В качестве применения этой теоремы рассмотрим следующий пример. Обозначим через A множество скаляров, по модулю меньших единицы. Соответствующим отображением T_α пусть будет $x \to \alpha x$. В соответствии с определением 10 (II), каждое из этих отображений линейно и непрерывно. Кроме того, для каждого фиксированного x_0 множество всех αx_0 ограничено. Действительно, если β – достаточно малый по модулю скаляр и если $|\alpha| < 1$, то $\beta\alpha$ тоже будет сколь угодно малым по модулю числом, и ограниченность αx_0 вытекает из условия (II) определения 10. Согласно теореме 11, существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, зависящее от ε, что $|\alpha x| < \varepsilon$, если $|\alpha| < 1$ и $|x| < \delta(\varepsilon)$. Легко видеть, что отсюда вытекает непрерывность отображения $(\alpha, x) \to \alpha x$. Мы получили следующий результат:

12. Теорема. *Каждое F-пространство является линейным топологическим пространством.*

Вернемся теперь к доказательству теоремы 11. Заметим, что она является простым следствием следующей леммы, в которой речь идет о функциях, не обязательно линейных, и которая может рассматриваться как усиление теоремы 11. Теорема 11 достаточна для целей настоящей главы, но в дальнейшем нам придется прибегать и к этой, более общей лемме.

13. Лемма. *Пусть для каждого элемента a множества A определено непрерывное отображение V_a F-пространства $\mathfrak{X}$ в F-пространство $\mathfrak{Y}$. Предположим, что V_a удовлетворяет следующим условиям:*

(I) $|V_a(x+y)| \leqslant |V_a(x)| + |V_a(y)|$, $x, y \in \mathfrak{X}$;

(II) $|\alpha V_a(x)| = |V_a(\alpha x)|$, $\alpha \in \Phi$, $\alpha \geqslant 0$, $x \in \mathfrak{X}$.

Тогда, если для каждого $x \in \mathfrak{X}$ множество $\{V_a x \mid a \in A\}$ ограничено, то $\lim\limits_{x \to 0} V_a(x) = 0$ равномерно относительно $a \in A$.

Доказательство. Для заданного $\varepsilon > 0$ и для каждого натурального k рассмотрим множество

$$X_k = \left\{ x \,\middle|\, \left|\frac{1}{k} V_a(x)\right| + \left|\frac{1}{k} V_a(-x)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2},\ a \in A \right\}.$$

Так как отображение V_a непрерывно, то каждое X_k замкнуто. Кроме того, из нашего предположения об ограниченности вытекает, что $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} X_k = \mathfrak{X}$. Следовательно, по теореме Бэра о категориях [1.6.9], некоторое X_{k_0} содержит сферу $S(x_0, \delta)$. Это означает, что если $|x| < \delta$, то

$$\left|\frac{1}{k_0} V_a(x_0 + x)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ввиду условий (I) и (II)

$$\left|\frac{1}{k_0} V_a(x)\right| \leqslant \left|\frac{1}{k_0} V_a(x_0 + x)\right| + \left|\frac{1}{k_0} V_a(-x_0)\right|.$$

Таким образом, для любого $a \in A$

$$\left|V_a\left(\frac{1}{k_0} x\right)\right| = \left|\frac{1}{k_0} V_a(x)\right| \leqslant \varepsilon, \text{ если } |x| < \delta.$$

Так как, согласно 10(II), отображение $x \to x/k_0$ является гомеоморфным отображением пространства $\mathfrak{X}$ на себя, то наше утверждение доказано.

Теперь мы в состоянии доказать несколько основных результатов относительно F-пространств.

14. Теорема. *Для того чтобы линейное отображение одного F-пространства в другое было непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы образ каждого ограниченного множества был ограничен.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ — F-пространства, $T: \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ — линейное непрерывное отображение и множество $B \subseteq \mathfrak{X}$ ограничено. Для каждой окрестности V нуля в пространстве $\mathfrak{Y}$ существует такая окрестность U нуля в пространстве $\mathfrak{X}$, что $T(U) \subseteq V$. Если α — достаточно малый скаляр, то $\alpha B \subseteq U$ и, следовательно, $\alpha T(B) = T(\alpha B) \subseteq V$.

Обратно, пусть T отображает каждое ограниченное множество в ограниченное. Ввиду леммы 6, для того чтобы доказать непрерывность T, достаточно доказать его непрерывность при $x=0$. Предположим, что $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = 0$, тогда $\lim\limits_{i\to\infty} |x_i| = 0$ и существует такая последовательнссть целых чисел k_i, что $\lim\limits_{i\to\infty} k_i = \infty$ и $\lim\limits_{i\to\infty} k_i |x_i| = 0$. Далее, $|k_i x_i| = |x_i + \ldots + x_i| \leqslant k_i |x_i|$, поэтому и $\lim\limits_{i\to\infty} k_i x_i = 0$. Сходящаяся последовательность $\{k_i x_i\}$ ограничена (9 и 12), а значит, по предположению, последовательность $\{T(k_i x_i)\} = \{k_i T x_i\}$ тоже ограничена. Следовательно,

$$\lim_{i\to\infty} T(x_i) = \lim_{i\to\infty} \frac{1}{k_i} \cdot T(k_i x_i) = 0, \qquad \text{ч. т. д.}$$

Первое из нижеследующих следствий вытекает из первой части доказательства теоремы 14, второе — из второй его части.

15. Следствие. *При каждом непрерывном линейном отображении одного линейного топологического пространства в другое образы ограниченных множеств ограничены.*

16. Следствие. *Каждое линейное отображение одного F-пространства в другое, переводящее любую сходящуюся к нулю последовательность в ограниченное множество, непрерывно.*

Две следующие теоремы о сходимости имеют важные применения и в дальнейшем часто будут использоваться.

17. Теорема. *Пусть $\{T_n\}$ — последовательность непрерывных линейных отображений F-пространства $\mathfrak{X}$ в F-пространство $\mathfrak{Y}$, причем $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$ существует для каждого $x \in \mathfrak{X}$. Тогда $\lim_{x\to 0} T_n x = 0$ равномерно относительно $n = 1, 2, ..$ и T есть непрерывное линейное отображение $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{Y}$.*

Доказательство. Линейность T непосредственно вытекает из линейности операторов T_n. Для каждого x последовательность $\{T_n x\}$ сходится и, следовательно, ограничена (9 и 12). По теореме 11, для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $|T_n x| < \varepsilon$ при $|x| < \delta$ и $n = 1, 2, \ldots$. Следовательно, $|Tx| \leqslant \varepsilon$ при $|x| < \delta$, и непрерывность T вытекает из леммы 6, ч. т. д.

18. Теорема. *Пусть $T_\alpha : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ — обобщенная последовательность непрерывных линейных отображений F-пространства $\mathfrak{X}$ в F-пространство $\mathfrak{Y}$. Если $\lim_\alpha T_\alpha x$ существует для каждого x из некоторого фундаментального множества и если для каждого $x \in \mathfrak{X}$ множество $\{T_\alpha x\}$ ограничено, то предел $Tx = \lim_\alpha T_\alpha x$ существует для каждого $x \in \mathfrak{X}$ и является непрерывным линейным отображением.*

Доказательство. Так как отображение T_α линейно и $T_\alpha x$ сходится для каждого x из некоторого фундаментального множества, то $T_\alpha x$ сходится также и для всех x из некоторого всюду плотного множества D. По теореме 11, для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех α и $|z| < \delta$ выполняется неравенство $|T_\alpha z| < \varepsilon$. Далее, для произвольного $x \in \mathfrak{X}$ существует такое $y \in D$, что $|x - y| < \delta$, и такое $\alpha(\varepsilon)$, что $|T_\alpha y - T_\beta y| < \varepsilon$ при $\alpha, \beta \geqslant \alpha(\varepsilon)$. Следовательно, если $\alpha, \beta \geqslant \alpha(\varepsilon)$, то

$$|T_\alpha x - T_\beta x| \leqslant |T_\alpha (x - y)| + |T_\beta (y - x)| + |T_\alpha y - T_\beta y| < 3\varepsilon.$$

Так как пространство $\mathfrak{Y}$ полно, то, по лемме 1.7.5, $\lim_\alpha T_\alpha x$ существует для каждого $x \in \mathfrak{X}$. Ясно, что отображение T линейно. Из теоремы 11 и леммы 1.7.6 вытекает, что

$$\lim_{x\to 0} Tx = \lim_{x\to 0}\lim_{\alpha} T_\alpha x = \lim_{\alpha}\lim_{x\to 0} T_\alpha x = 0.$$

По лемме 6, отображение T непрерывно, ч. т. д.

2. Принцип открытости отображения

Этот принцип состоит в следующем:

1. Теорема. *При непрерывном линейном отображении одного F-пространства на любое другое образ каждого открытого множества является открытым множеством.*

Доказательство. Рассмотрим F-пространства $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ и линейное непрерывное отображение $T: \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, при котором $T\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}$. Мы докажем, прежде всего, что замыкание $\overline{TG}$ образа произвольной окрестности G нуля пространства $\mathfrak{Y}$ содержит некоторую окрестность нуля пространства $\mathfrak{Y}$. Так как $a-b$ является непрерывной функцией a и b, то существует такая окрестность M нуля, что $M - M \subseteq G$. Для каждого $x \in \mathfrak{X}$, $x/n \to 0$, и, следовательно, $x \in nM$ при достаточно больших n. Таким образом,

$$\mathfrak{X} = \bigcup_{n=1}^{\infty} nM, \quad \mathfrak{Y} = T\mathfrak{X} = \bigcup_{n=1}^{\infty} nTM,$$

и, по теореме Бэра о категориях (I.6.9), одно из множеств $\overline{nTM}$ содержит непустое открытое множество. Так как отображение $y \to ny$ является гомеоморфным отображением пространства $\mathfrak{Y}$ на себя, то и $\overline{TM}$ содержит некоторое непустое открытое множество V. Таким образом,

$$\overline{TG} \supseteq \overline{TM - TM} \supseteq \overline{TM} - \overline{TM} \supseteq V - V.$$

Множество $a - V$ открыто, так как отображение вида $y \to a - y$ является гомеоморфизмом. Множество $V - V = \bigcup_{a \in V} (a - V)$, будучи суммой открытых множеств, само открыто; оно содержит 0 и, следовательно, является окрестностью нуля. Таким образом, замыкание образа окрестности нуля содержит некоторую окрестность нуля.

Для каждого $\varepsilon > 0$ обозначим через X_ε и Y_ε сферы в пространствах $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$, соответственно, с центрами в нулевых точках и радиусами ε. Возьмем произвольное $\varepsilon_0 > 0$, и пусть $\varepsilon_i > 0$, причем $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i < \varepsilon_0$. Тогда, как мы видели в предыдущем абзаце, существует такая последовательность $\{\eta_i, i=0, 1, \ldots\}$, что $\eta_i > 0$, $\eta_i \to 0$, и

$$\text{(a)} \quad \overline{TX_{\varepsilon_i}} \supset Y_{\eta_i}, \quad i = 0, 1, \ldots .$$

Пусть $y \in Y_{\eta_0}$. Мы покажем, что существует такое $x \in X_{2\varepsilon_0}$, что $Tx=y$. Из (a) при $i=0$ вытекает, что существует такое $x_0 \in X_{\varepsilon_0}$, что $|y-Tx_0|<\eta_1$. Так как $y-Tx_0 \in Y_{\eta_1}$, то из условия (a) при $i=1$ вытекает существование такого $x_1 \in X_{\varepsilon_1}$, что $|y-Tx_0-Tx_1|<\eta_2$. Продолжая это рассуждение, можно определить такую последовательность $\{x_n\}$, что $x_n \in X_{\varepsilon_n}$ и

$$\text{(b)}\quad |y-T(\sum_{i=0}^{n} x_i)|<\eta_{n+1}, \quad n=0, 1, \ldots .$$

Положим $z_m=x_0+\ldots+x_m$, тогда при $m>n$ $|z_m-z_n|=|x_{n+1}+\ldots+x_m|<\varepsilon_{n+1}+\ldots+\varepsilon_m$. Следовательно, $\{z_n\}$ есть фундаментальная последовательность и ряд $x_0+x_1+\ldots$ сходится к некоторой точке x, для которой

$$|x|=\lim_{n\to\infty}|z_n|\leqslant\lim_{n\to\infty}(\varepsilon_0+\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_n)<2\varepsilon_0.$$

Так как T непрерывно, то из (b) вытекает, что $y=Tx$. Этим доказано, что произвольная сфера $X_{2\varepsilon_0}$ с центром в начале координат пространства $\mathfrak{X}$ отображается на множество $TX_{2\varepsilon_0}$, содержащее некоторую сферу Y_{η_0} с центром в начале координат пространства $\mathfrak{Y}$. Следовательно, при отображении T образ окрестности нуля пространства $\mathfrak{X}$ содержит некоторую окрестность нуля пространства $\mathfrak{Y}$.

Пусть теперь $G \subseteq \mathfrak{X}$ — непустое открытое множество, $x \in G$ и N — такая окрестность нуля в пространстве $\mathfrak{X}$, что $x+N \subseteq G$. Обозначим через M такую окрестность нуля в пространстве $\mathfrak{Y}$, что $TN \supseteq M$, тогда

$$TG \supseteq T(x+N)=Tx+TN \supseteq Tx+M,$$

откуда следует, что TG содержит некоторую окрестность каждой из своих точек, ч. т. д.

2. Теорема. *Если T — непрерывное линейное взаимно однозначное отображение одного F-пространства на другое, то обратное отображение тоже линейно и непрерывно.*

Доказательство. Рассмотрим F-пространства $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ и непрерывное линейное взаимно однозначное отображение T такое, что $T\mathfrak{X}=\mathfrak{Y}$. Так как отображение $(T^{-1})^{-1}=T$ переводит открытые множества в открытые (теорема 1), то оператор T^{-1} непрерывен (I.4.15). Пусть $y_1, y_2 \in \mathfrak{Y}$, $x_1, x_2 \in \mathfrak{X}$, $Tx_1=y_1$, $Tx_2=y_2$ и $\alpha \in \Phi$. Тогда

$$T(x_1+x_2)=Tx_1+Tx_2=y_1+y_2, \quad T\alpha x_1=\alpha Tx_1=\alpha y_1,$$

так что

$$T^{-1}(y_1+y_2)=x_1+x_2=T^{-1}y_1+T^{-1}y_2$$

и $T^{-1}(\alpha y_1)=\alpha x_1=\alpha T^{-1}y_1$. Из этих равенств видно, что преобразование T^{-1} линейно, ч. т. д.

3. Определение. Обозначим через T линейное преобразование, определенное на линейном многообразии $\mathfrak{D}(T)$ F-пространства $\mathfrak{X}$, область значений которого лежит в F-пространстве $\mathfrak{Y}$. *Графиком* преобразования T называется множество всех точек топологического произведения $\mathfrak{X}\times\mathfrak{Y}$, имеющих вид $[x, Tx]$, где $x\in\mathfrak{D}(T)$. Оператор T называется *замкнутым*, если его график замкнут в топологическом произведении $\mathfrak{X}\times\mathfrak{Y}$. Это определение эквивалентно следующему: оператор T замкнут, если из $x_n\in\mathfrak{D}(T)$, $x_n\to x$, $Tx_n\to y$ вытекает, что $x\in\mathfrak{D}(T)$ и $Tx=y$.

→ 4. Теорема (*о замкнутом графике*). *Замкнутое линейное преобразование одного F-пространства на другое непрерывно.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что топологическое произведение $\mathfrak{X}\times\mathfrak{Y}$ двух F-пространств является F-пространством, в котором расстояние между двумя точками $[x, y]$ и $[x', y']$, по определению, равно $|x-x'|+|y-y'|$. График $\mathfrak{G}$ преобразования T является замкнутым линейным многообразием в этом топологическом произведении, а значит, это — полное метрическое пространство (I.6.7). Следовательно, $\mathfrak{G}$ есть F-пространство. Отображение $pr_{\mathfrak{X}}: [x, Tx]\to x$, графика $\mathfrak{G}$ на $\mathfrak{X}$ взаимно однозначно линейно и непрерывно (I.8.3). Следовательно, по теореме 2, обратное отображение $pr_{\mathfrak{X}}^{-1}$ также непрерывно, а это значит, что непрерывно и отображение $T=pr_{\mathfrak{Y}}|pr_{\mathfrak{X}}^{-1}$ (I.4.17), ч. т. д.

5. Теорема. *Если линейное пространство является F-пространством относительно каждой из двух метрик и если одна из соответствующих топологий содержит другую, то эти топологии тождественны.*

Доказательство. Пусть τ_1, τ_2 — метрические топологии линейного пространства $\mathfrak{X}$, относительно которых пространства $\mathfrak{X}_1=(\mathfrak{X}, \tau_1)$ и $\mathfrak{X}_2=(\mathfrak{X}, \tau_2)$ являются F-пространствами. Если $\tau_1\subseteq\tau_2$, то взаимно однозначное линейное отображение $x\to x$ пространства $\mathfrak{X}_2$ на $\mathfrak{X}_1$ непрерывно. По теореме 2, оно является гомеоморфизмом, и, следовательно, $\tau_1=\tau_2$, ч. т. д.

6. Определение. Семейство F функций, отображающих одно векторное пространство $\mathfrak{X}$ в другое векторное пространство $\mathfrak{Y}$, называется тотальным, если единственным вектором пространства $\mathfrak{X}$, для которого $f(x)=0$ при всех $f\in F$, является вектор $x=0$.

7. Теорема. *Пусть $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{M}$ — F-пространства и F-тотальное семейство непрерывных линейных отображений пространства $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{Y}$. Тогда линейное отображение T пространства $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{X}$ такое, что fT непрерывно для каждого $f\in F$, само непрерывно*

Доказательство. Мы покажем, что T замкнуто, и применим теорему 4. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = w$ и $\lim\limits_{n\to\infty} Tw_n = x$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} f(Tw_n) = f(x)$ для каждого $f \in F$, так как каждое $f \in F$ непрерывно. С другой стороны, $\lim\limits_{n\to\infty} f(Tw_n) = f(Tw)$, так как каждая из функций fT непрерывна. Следовательно,

$$f(Tw) = f(x) \text{ при } f \in F,$$

и так как семейство F тотально, то $Tw = x$. Отсюда следует, что T замкнуто, и из теоремы 4 вытекает желаемый результат, ч. т. д.

3. Теорема Хана — Банаха

В начале IV гл. приводится несколько важных примеров F-пространств. Этот перечень содержит пространство непрерывных функций, функций с ограниченной вариацией, почти периодических функций, интегрируемых функций и т. д. Большинство из этих пространств обладает следующим свойством, которое может и не иметь места в произвольном F-пространстве, а именно в них для каждого скаляра α и каждого вектора x имеет место тождество $|\alpha x| = |\alpha||x|$. Основной целью настоящего параграфа является изучение тех следствий, которые можно получить из этого тождества.

1. Определение. Линейное пространство $\mathfrak{X}$ называется *линейным нормированным пространством* или просто *нормированным пространством*, если каждому $x \in \mathfrak{X}$ соответствует вещественное число $|x|$, называемое *нормой* x и обладающее следующими свойствами:

(I) $|0| = 0$; $|x| > 0$ при $x \neq 0$;

(II) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$, $x, y \in \mathfrak{X}$;

(III) $|\alpha x| = |\alpha||x|$, $\alpha \in \Phi$, $x \in \mathfrak{X}$.

Нулевой элемент называется *началом координат* пространства $\mathfrak{X}$; *замкнутой единичной сферой* называется множество $\{x \mid |x| \leqslant 1\}$.

Из свойств (I) — (III) вытекает, что функция ϱ, определяемая равенством $\varrho(x, y) = |x - y|$, является инвариантной метрикой пространства $\mathfrak{X}$. Метрическая топология линейного нормированного пространства иногда называется его *сильной* топологией.

2. Определение. *Полное линейное нормированное пространство*, или пространство *типа B*, или *B-пространство*, или *банахово пространство*, есть линейное нормированное пространство, полное в сильной топологии.

Следующее определение, очевидно, эквивалентно определению 2: *B-пространство есть F-пространство, в котором выполняется тождество* $|\alpha x| = |\alpha||x|$.

3. Лемма. *Множество B в линейном нормированном пространстве ограничено в том и только в том случае, если* $\sup_{x \in B} |x| < \infty$.

Доказательство. Произвольная окрестность нуля V содержит некоторую η-окрестность нуля $S_\eta = \{x \mid |x| < \eta\}$. Если $a = \sup_{x \in B} |x|$ конечно и $\varepsilon = \eta / 2a$, то $\alpha B \subseteq V$ при $|\alpha| \leqslant \varepsilon$, откуда вытекает, что B ограничено (ср. 1.7). Обратно, если B ограничено, то существует такое $\varepsilon > 0$, что αB содержится в единичной сфере $S_1 = \{x \mid |x| < 1\}$ для всех $|\alpha| \leqslant \varepsilon$. Таким образом, если $x \in B$, то $\varepsilon |x| = |\varepsilon x| < 1$ и, следовательно, $|x| < 1/\varepsilon$, ч. т. д.

$\to$4. Лемма. *Если T — линейное отображение одного линейного нормированного пространства на другое, то следующие четыре условия:*

(I) T *непрерывно*;

(II) T *непрерывно в некоторой точке*;

(III) $\sup_{|x| \leqslant 1} |Tx|$ *конечно*;

(IV) *для некоторого скаляра M и при всех x* $|Tx| \leqslant M|x|$ *эквивалентны.*

Доказательство. Эквивалентность условий (I) и (II) была доказана в лемме 1.6 Если T непрерывно в нуле, то существует такое $\varepsilon > 0$, что $|Tx| < 1$ при $|x| < \varepsilon$. Для произвольного $x \neq 0$ вектор $y = \frac{\varepsilon x}{2|x|}$ имеет норму $|y| < \varepsilon$, следовательно,

$$\frac{\varepsilon}{2|x|}|Tx| = |Ty| < 1, \quad |Tx| < \frac{2}{\varepsilon}|x|.$$

Этим доказано, что из (I) вытекает (IV). Из условия (IV) следует, очевидно, непрерывность T в нуле; следовательно из (IV) вытекает (II). Мы показали, что условия (I), (II) и (IV) эквивалентны. Если $M = \sup_{|x| \leqslant 1} |Tx|$ конечно, то для произвольного $x \neq 0$.

$$|Tx| = |x| \left| T\left(\frac{x}{|x|}\right) \right| \leqslant M|x|.$$

Это означает, что из (III) вытекает (IV). Ясно, что из (IV) вытекает (III), ч. т. д.

5. Определение. *Нормой* $|T|$ линейного отображения T одного линейного нормированного пространства в другое называется $\sup_{|x| \leqslant 1} |Tx|$. Отображение T называется *ограниченным*, если $|T| < \infty$.

Согласно лемме 4, *линейное отображение одного линейного нормированного пространства в другое непрерывно в том и только в том случае, когда оно ограничено.* Этим обстоятельством нам часто придется пользоваться, причем термины «ограниченный» и «непрерывный» в применении к линейным операторам будут использоваться как эквивалентные и без ссылок на лемму 4. Другим часто используемым следствием определения 5 является неравенство $|AB| \leqslant |A|\,|B|$, которому удовлетворяют нормы двух линейных преобразований нормированных пространств, если, конечно, область определения преобразования A содержит область значений преобразования B.

→6. Теорема. *Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ — B-пространства, а $\{T_n\}$ — последовательность ограниченных линейных отображений $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{Y}$. Для того чтобы при любом $x \in \mathfrak{X}$ существовал предел $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие условия:*

(I) *Предел Tx существует для каждого x из некоторого фундаментального множества.*

(II) *Для каждого $x \in \mathfrak{X}$ $\sup_n |T_n x| < \infty$. Если предел Tx существует для всех $x \in \mathfrak{X}$, то оператор T ограничен и*

$$|T| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} |T_n| \leqslant \sup_n |T_n| < \infty.$$

Доказательство. Если Tx существует для каждого x, то условие (II) вытекает из леммы 3, так как сходящаяся последовательность ограничена (1.9). Обратно, если выполняются условия (I) и (II), то ввиду леммы 3 выполняются условия теоремы 1.18. Согласно этой теореме, Tx существует для каждого x, и T непрерывно. По лемме 4, T ограничено. Далее, если Tx существует, то

$$|Tx| = \lim_{n\to\infty} |T_n x| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} |T_n|\,|x|$$

и, следовательно,

$$|T| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} |T_n|.$$

Наконец, чтобы доказать, что $\sup_n |T_n| < \infty$, если T всюду определено, воспользуемся теоремой 1.11. Согласно этой теореме, существует такое $\delta > 0$, что для всех $n = 1, 2, \ldots$, $|T_n x| < 1$, если $|x| < \delta$. Следовательно, $|T_n| \leqslant 1/\delta$ при $n = 1, 2, \ldots$, ч. т. д.

7. Определение. Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ — линейные топологические пространства. Линейное пространство всех линейных непрерывных отображений $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{Y}$ будем обозначать символом $B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$. Через $B(\mathfrak{X})$ будем обозначать $B(\mathfrak{X}, \mathfrak{X})$, а через $\mathfrak{X}^*$ — $B(\mathfrak{X}, \Phi)$. Линейное пространство $\mathfrak{X}^*$ называется *сопряженным* к $\mathfrak{X}$. Таким образом, элементами пространства $\mathfrak{X}^*$ являются непрерывные линейные функционалы, определенные на $\mathfrak{X}$.

8. Лемма. *Если $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ — линейные нормированные пространства, причем $\mathfrak{Y}$ полно, то линейное пространство $B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ с нормой, вводимой определением 5, является B-пространством.*

Доказательство. Ясно, что $|T|=0$ в том и только в том случае, если $T=0$, и что $|\alpha T|=|\alpha||T|$. Из неравенства

$$|(T+U)x| \leqslant |Tx|+|Ux| \leqslant (|T|+|U|)|x|$$

вытекает, что

$$|T+U| \leqslant |T|+|U|.$$

Чтобы доказать полноту $B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, предположим, что $|T_n - T_m| < \varepsilon$ при $n, m \geqslant n(\varepsilon)$. Тогда $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$ существует для каждого x и

$$|Tx - T_n x| \leqslant |Tx - T_m x| + |T_m - T_n||x| < |Tx - T_m x| + \varepsilon |x|.$$

Так как левая часть этого неравенства не зависит от m, то, полагая $m \to \infty$, получаем, что $|T - T_n| \leqslant \varepsilon$ при $n \geqslant n(\varepsilon)$. Отсюда следует, что $|T| < \infty$ и что $|T - T_n| \to 0$, ч. т. д.

Так как поле Φ является B-пространством, то отсюда вытекает такое следствие.

9. Следствие. *Пространство, сопряженное к линейному нормированному пространству, является B-пространством.*

Этим следствием подсказывается следующий вопрос: а имеются ли вообще в пространстве $\mathfrak{X}^*$, сопряженном к B-пространству $\mathfrak{X}$, какие-нибудь функционалы, отличные от нуля? На этот вопрос будет получен утвердительный ответ; более того, в $\mathfrak{X}^*$ имеется даже достаточное количество функционалов для того, чтобы различать между собой точки пространства $\mathfrak{X}$. В случае произвольных F-пространств это не всегда так; однако существуют классы линейных топологических пространств, не являющихся B-пространствами, но все же обладающих этим свойством. Такие пространства рассматриваются в гл. V. Следующая теорема является весьма важной при исследовании вопроса о существовании непрерывных линейных функционалов.

10. Теорема (*Хан — Банах*). *Пусть вещественная функция p, заданная на вещественном линейном пространстве $\mathfrak{X}$, удовлетворяет условиям:*

$$p(x+y) \leqslant p(x)+p(y); \quad p(\alpha x) = \alpha p(x); \quad \alpha \geqslant 0,\ x,\ y \in \mathfrak{X};$$

и пусть f — вещественный линейный функционал, определенный на подпространстве $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}$ и такой, что

$$f(x) \leqslant p(x), \quad x \in \mathfrak{Y}.$$

Тогда существует вещественный линейный функционал F, определенный на всем $\mathfrak{X}$ и такой, что

$$F(x) = f(x),\ x \in \mathfrak{Y};\ F(x) \leqslant p(x),\ x \in \mathfrak{X}.$$

Доказательство. Рассмотрим семейство всех вещественных линейных продолжений g функционала f, для которых при всех x из области определения g выполняется неравенство $g(x) \leqslant p(x)$. Отношение $h > g$, по определению означающее, что h есть продолжение g, превращает это семейство в частично упорядоченное множество. По лемме Цорна (I.2.7), существует максимальное линейное продолжение g функционала f, удовлетворяющее неравенству $g(x) \leqslant p(x)$ при всех x из области определения g. Остается показать, что область определения $\mathfrak{Y}_0$ функционала g совпадает с $\mathfrak{X}$.

Для доказательства от противного предположим, что в $\mathfrak{X}$ существует вектор y_1, не принадлежащий $\mathfrak{Y}_0$. Каждый вектор из многообразия $\mathfrak{Y}_1$, натянутого на $\mathfrak{Y}_0$ и y_1, имеет *единственное* представление вида $y + \alpha y_1$, $y \in \mathfrak{Y}_0$. Для каждой константы c функция g_1, определяемая на $\mathfrak{Y}_1$ равенством $g_1(y+\alpha y_1) = g(y) + \alpha c$, является собственным продолжением g. Желаемое противоречие будет получено и доказательство завершено, если мы покажем, что c можно выбрать таким образом, что $g_1(x) \leqslant p(x)$ для всех $x \in \mathfrak{Y}_1$. Пусть x, y — произвольные точки из $\mathfrak{Y}_0$; тогда из неравенства

$$g(y) - g(x) = g(y-x) \leqslant p(y-x) \leqslant p(y+y_1) + p(-y_1 - x)$$

вытекает, что

$$-p(-y_1 - x) - g(x) \leqslant p(y+y_1) - g(y).$$

Так как левая часть этого неравенства не зависит от y, а правая не зависит от x, то существует такая константа c, для которой

(I) $c \leqslant p(y+y_1) - g(y), \quad y \in \mathfrak{Y}_0;$

(II) $-p(-y_1 - y) - g(y) \leqslant c, \quad y \in \mathfrak{Y}_0.$

Для элемента $x = y + \alpha y_1 \in \mathfrak{Y}_1$ неравенство

$$g_1(x) = g(y) + \alpha c \leqslant p(y + \alpha y_1) = p(x)$$

при $\alpha = 0$ справедливо по предположению, при $\alpha > 0$ получается заменой в неравенстве (I) y на y/α, а при $\alpha < 0$ — заменой y на y/α в неравенстве (II), ч. т. д.

11. Теорема. *Пусть $\mathfrak{Y}$ — подпространство линейного нормированного пространства $\mathfrak{X}$. Тогда каждому $y^* \in \mathfrak{Y}^*$ соответствует такое $x^* \in \mathfrak{X}^*$, что $|x^*| = |y^*|$ и $x^* y = y^* y$, $y \in \mathfrak{Y}$.*

Доказательство. Если $\mathfrak{X}$ — вещественное пространство, то доказываемое утверждение непосредственно вытекает из теоремы 10, если положить $p(x) = |y^*||x|$ и $f = y^*$ (ср. с леммой 4 и определением 5). Рассмотрим теперь нормированное пространство $\mathfrak{X}$ над полем комплексных чисел. Для каждого $y \in \mathfrak{Y}$ обозначим через $f_1(y)$ и $f_2(y)$ вещественные числа, определяемые равенством

$$y^* y = f_1(y) + i f_2(y), \quad y \in \mathfrak{Y}.$$

Тогда для вещественных чисел α и β и $x, y \in \mathfrak{Y}$

$$f_1(\alpha x + \beta y) = \alpha f_1(x) + \beta f_1(y),$$
$$|f_1(y)| \leqslant |y^* y| \leqslant |y^*| |y|.$$

Рассматривая $\mathfrak{X}$ как вещественное линейное пространство и применяя теорему 10, мы получим вещественную линейную функцию F_1, определенную на $\mathfrak{X}$ и такую, что

$$|F_1| \leqslant |y^*|; \quad F_1(y) = f_1(y), \quad y \in \mathfrak{Y}.$$

Функцию x^* на комплексном линейном пространстве $\mathfrak{X}$ определим равенством

$$x^* x = F_1(x) - iF_1(ix).$$

Сначала докажем линейность x^*. Ясно, что x^* аддитивно и что $x^*(\alpha x) = \alpha x^* x$ для вещественного α. Далее, имеем $x^*(ix) = F_1(ix) - iF_1(-x) = ix^* x$, т. е. функционал x^* линеен. Теперь мы покажем, что x^* служит продолжением y^*. Если $y \in \mathfrak{Y}$, то

$$f_1(iy) + if_2(iy) = y^*(iy) = iy^* y = if_1(y) - f_2(y),$$

откуда вытекает, что $f_2(y) = -f_1(iy)$ и, следовательно,

$$y^* y = f_1(y) - if_1(iy), \quad y \in \mathfrak{Y}.$$

Таким образом, x^* является продолжением y^*. Наконец, пусть $x^* x = re^{i\theta}$, где $r > 0$ и θ вещественно; тогда

$$|x^* x| = x^*(e^{-i\theta} x) = F_1(e^{-i\theta} x) \leqslant |y^*| |e^{-i\theta} x| = |y^*| |x|,$$

откуда вытекает, что $|x^*| \leqslant |y^*|$. С другой стороны, так как x^* является продолжением y^*, то $|x^*| \geqslant |y^*|$. Следовательно, $|x^*| = |y^*|$, ч. т. д.

12. Лемма. *Пусть $\mathfrak{Y}$ — подпространство линейного нормированного пространства $\mathfrak{X}$ и $x \in \mathfrak{X}$, причем*

$$\inf_{y \in \mathfrak{Y}} |y - x| = d > 0.$$

Тогда существует такая точка $x^* \in \mathfrak{X}^*$, что

$$x^* x = 1, \quad |x^*| = \frac{1}{d}, \quad x^* y = 0, \quad y \in \mathfrak{Y}.$$

Доказательство. Так как $x \notin \mathfrak{Y}$, то каждая точка z из линейного многообразия $\mathfrak{Z}$, натянутого на $\mathfrak{Y}$ и x, однозначно представляется в виде $z = y + \alpha x$, $\alpha \in \Phi$, $y \in \mathfrak{Y}$. Для такого z положим $z^* z = \alpha$. Ясно, что функция z^* линейна на $\mathfrak{Z}$. Для $\alpha \neq 0$

$$|z| = |y + \alpha x| = |\alpha| \left| \frac{y}{\alpha} + x \right| \geqslant |\alpha| d$$

и, следовательно, $|z^*z| \leqslant \frac{1}{d}|z|$, $|z^*| \leqslant \frac{1}{d}$. Пусть $y_n \in \mathfrak{Y}$ и $|x-y_n| \to d$. Тогда

$$1 = z^*(x-y_n) \leqslant |z^*||x-y_n| \to |z^*|d$$

и $1/d \leqslant |z^*|$. Таким образом, $|z^*| = 1/d$. Остается, применив теорему 11, получить искомое продолжение x^* функционала z^*, ч. т. д.

$\to$ 13. Следствие. *Пусть x — вектор, не принадлежащий замкнутому подпространству $\mathfrak{Y}$ линейного нормированного пространства $\mathfrak{X}$. Тогда существует такой функционал $x^* \in \mathfrak{X}^*$, что*

$$x^*x = 1, \quad x^*y = 0, \quad y \in \mathfrak{Y}.$$

14. Следствие. *Для каждой точки $x \neq 0$ линейного нормированного пространства $\mathfrak{X}$ существует такое $x^* \in \mathfrak{X}^*$,* что $|x^*| = 1$ и $x^*x = |x|$.

Доказательство. Применим лемму 12 при $\mathfrak{Y} = 0$. Тогда функционал x^*, существование которого мы хотим установить, может быть определен как произведение функционала x^*, существование которого устанавливается леммой 12, на $|x|$, ч. т. д.

Следствие 14 показывает, что *в пространстве $\mathfrak{X}^*$, сопряженном к нормированному пространству $\mathfrak{X}$, существует достаточное количество функционалов для того, чтобы различать между собой точки пространства $\mathfrak{X}$*. Из следствия 14 непосредственно вытекает следующий результат:

15. Следствие. *Для каждой точки x линейного нормированного пространства $\mathfrak{X}$*

$$|x| = \sup_{x^* \in S^*} |x^*x|,$$

где S^* — замкнутая единичная сфера в пространстве $\mathfrak{X}^*$, сопряженном к $\mathfrak{X}$.

Если $x^*x = x^*y$ для всех $x^* \in \mathfrak{X}^*$, то $x = y$.

16. Лемма. *Если пространство $\mathfrak{X}^*$, сопряженное к линейному нормированному пространству $\mathfrak{X}$, сепарабельно, то сепарабельно также и $\mathfrak{X}$.*

Доказательство. Пусть $\{x_n^*\}$ — счетное множество, всюду плотное в пространстве $\mathfrak{X}^*$, и точка $x_n \in \mathfrak{X}$ такова, что $|x_n| \leqslant 1$ и $|x_n^*x_n| \geqslant \frac{1}{2}|x_n^*|$. Множество L конечных линейных комбинаций элементов x_n с рациональными коэффициентами счетно. Если оно не плотно в $\mathfrak{X}$, то по лемме 12 существует $x^* \neq 0$ такое, что $x^*L = 0$. Пусть $x^*_{n_i} \to x^*$. Из неравенства

$$|x^* - x^*_{n_i}| \geqslant |(x^* - x^*_{n_i})x_{n_i}| = |x^*_{n_i}x_{n_i}| \geqslant \frac{1}{2}|x^*_{n_i}|$$

вытекает, что $x^*_{n_i} \to 0$, $x^* = 0$. Это противоречие и доказывает лемму.

Существует важная интерпретация следствия 15. Для каждого x из линейного нормированного пространства $\mathfrak{X}$ скаляр x^*x линейно и непрерывно зависит от x^* и определяет, следовательно, непрерывный линейный функционал на $\mathfrak{X}^*$, т. е. каждое $x \in \mathfrak{X}$ определяет единственную точку $\hat{x}$ в $(\mathfrak{X}^*)^*$, такую, что $\hat{x}x^* = x^*x$, $x \in \mathfrak{X}$. По определению, $|\hat{x}| = \sup\limits_{|x^*| \leqslant 1} |\hat{x}x^*|$ и, ввиду следствия 15, $|\hat{x}| = |x|$. Этим подсказывается следующее определение:

17. Определение. *Изоморфизм двух* линейных нормированных пространств $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ есть взаимно однозначное непрерывное линейное отображение $T: \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, при котором $T\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}$. Если такой изоморфизм существует, то пространства $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ называются *изоморфными*. *Изометрический изоморфизм* двух линейных нормированных пространств $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ — это такой изоморфизм T между $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$, при котором $|Tx| = |x|$. Если такое T существует, то пространства $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ называются *изометрически изоморфными*.

18. Определение. Пусть $\mathfrak{X}$ — линейное нормированное пространство и $\mathfrak{X}^{**}$ — пространство, сопряженное к B-пространству $\mathfrak{X}^*$. Отображение $\varkappa: x \to \hat{x}$ пространства $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{X}^{**}$, определяемое равенством $\hat{x}x^* = x^*x$ для $x^* \in \mathfrak{X}^*$, называется *естественным вложением* $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{X}^{**}$. Область значений отображения $\varkappa$ будет обозначаться через $\hat{\mathfrak{X}}$.

Таким образом, ввиду замечаний, предшествующих определению 17, из следствия 15 вытекает следующая теорема:

19. Теорема. *Естественное вложение линейного нормированного пространства $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{X}^{**}$ является изометрическим изоморфизмом между $\mathfrak{X}$ и $\hat{\mathfrak{X}}$.*

Ввиду свойства естественного вложения, устанавливаемого теоремой 19, отображение $\varkappa$ иногда называется *естественным изометрическим изоморфизмом* $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{X}^{**}$.

20. Теорема. *Пусть x_α, $\alpha \in A$ — подмножество элементов линейного нормированного пространства $\mathfrak{X}$. Если*

$$\sup_{\alpha \in A} |x^*x_\alpha| < \infty, \quad x^* \in \mathfrak{X}^*,$$

то и

$$\sup_{\alpha \in A} |x_\alpha| < \infty,$$

Доказательство. Функции x_α, $\alpha \in A$ удовлетворяют условиям теоремы 1.11, применяемой к сопряженному пространству $\mathfrak{X}^*$. По теореме 1.11, существует такое $\delta > 0$, что $|\hat{x}_\alpha x^*| < 1$, если $|x^*| < \delta$. Следовательно, $|\hat{x}_\alpha| \leqslant \frac{1}{\delta}$, $\alpha \in A$ и, по теореме 19, $|x_\alpha| \leqslant \frac{1}{\delta}$, $\alpha \in A$, ч. т. д.

21. Следствие. *Если $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ — B-пространства и T_α, $\alpha \in A$, — ограниченные линейные отображения $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{Y}$, то следующие три условия:*

(I) $\sup\limits_{\alpha \in A} |T_\alpha| < \infty$;

(II) $\sup\limits_{\alpha \in A} |T_\alpha x| < \infty$ *для всех* $x \in \mathfrak{X}$;

(III) $\sup\limits_{\alpha \in A} |y^* T_\alpha x| < \infty$ *для всех* $x \in \mathfrak{X}$, $y^* \in \mathfrak{Y}^*$

эквивалентны.

Доказательство. По теореме 20, из (III) вытекает (II). Предположим теперь, что справедливо (II). По лемме 3, для каждого x множество $\{T_\alpha x \mid \alpha \in A\}$ ограничено, и, по теореме 1.11, существует такое $\delta > 0$, что $|T_\alpha x| < 1$ при $|x| < \delta$. Следовательно, $|T_\alpha| \leqslant \frac{1}{\delta}$, $\alpha \in A$, ч. т. д.

22. Определение. B-пространство $\mathfrak{X}$ называется *рефлексивным*, если естественное вложение $\varkappa$ (см. определение 18) отображает $\mathfrak{X}$ на все $\mathfrak{X}^{**}$.

23. Теорема. *Замкнутое линейное многообразие рефлексивного B-пространства рефлексивно.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{Y}$ — замкнутое линейное многообразие в рефлексивном пространстве $\mathfrak{X}$. Рассмотрим отображение $\xi : x^* \to y^*$, определяемое равенством $\xi(x^*) y = x^* y$, $y \in \mathfrak{Y}$. Ясно, что $|\xi(x^*)| \leqslant |x^*|$ и что $\xi : \mathfrak{X}^* \to \mathfrak{Y}^*$. Преобразование $\eta : y^{**} \to x^{**}$ определим равенством $\eta(y^{**}) x^* = y^{**}(\xi(x^*))$, $x^* \in \mathfrak{X}^*$. Ясно, что $|\eta(y^{**}) x^*| \leqslant |y^{**}| |\xi(x^*)| \leqslant |y^{**}| |x^*|$ и что $\eta : \mathfrak{Y}^{**} \to \mathfrak{X}^{**}$. Пусть $\varkappa : x \to \hat{x}$ — естественный изометрический изоморфизм $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{X}^{**}$. Так как $\mathfrak{X}$ рефлексивно, то каждое $x^{**} = \hat{x}$ для некоторого $x \in \mathfrak{X}$. Мы покажем, что $\varkappa^{-1}\eta(\mathfrak{Y}^{**}) \subseteq \mathfrak{Y}$. Если $x = \varkappa^{-1}\eta(y^{**}) \notin \mathfrak{Y}$, то ввиду следствия 13 существует такое $x^* \in \mathfrak{X}^*$, что $x^* x \neq 0$, $x^* \mathfrak{Y} = 0$. Так как $x^* \mathfrak{Y} = 0$, то $\xi(x^*) = 0$. Таким образом,

$$0 = y^{**}\xi(x^*) = \eta(y^{**}) x^* = \hat{x} x^* = x^* x.$$

Это противоречие и доказывает, что $\varkappa^{-1}\eta(y^{**}) \subseteq \mathfrak{Y}$. Пусть теперь $y_0^{**} \in \mathfrak{Y}^{**}$ и $x_0^{**} = \eta(y_0^{**})$. Рассмотрим $y^* \in \mathfrak{Y}^*$, и пусть $x^* \in \mathfrak{X}^*$ — любое продолжение y^*. Тогда $y^* = \xi(x^*)$ и

$$y_0^{**}y^* = \eta(y_0^{**})\, x^* = x_0^{**}x^* = \hat{x}_0 x^* = x^*x_0 = y^*x_0,\quad y^* \in \mathfrak{Y}^*,$$

так как $x_0 = \varkappa^{-1}\eta(y_0^{**}) \in \mathfrak{Y}$. Отсюда вытекает, что $\mathfrak{Y}$ рефлексивно, ч. т. д.

24. Следствие. *В-пространство рефлексивно в том и только в том случае, если сопряженное к нему пространство рефлексивно.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{X}$ рефлексивно и $\varkappa$ — естественный изометрический изоморфизм $\mathfrak{X}$ на $\mathfrak{X}^{**}$. Для произвольной точки $x^{***} \in (\mathfrak{X}^*)^{**} = (\mathfrak{X}^{**})^*$ функционал $x^* = x^{***}\varkappa$ принадлежит $\mathfrak{X}^*$ и

$$x^{**}x^* = \hat{x}x^* = x^*x = x^{***}\varkappa x = x^{***}\hat{x} = x^{***}x^{**},\quad x^{**} \in \mathfrak{X}^{**},$$

откуда следует, что $\mathfrak{X}^*$ рефлексивно. Обратно, пусть $\mathfrak{X}^*$ рефлексивно. Тогда $\mathfrak{X}^{**}$ рефлексивно и, следовательно, по теореме 23, замкнутое линейное многообразие $\hat{\mathfrak{X}}$ в $\mathfrak{X}^{**}$ рефлексивно. Отсюда вытекает, что и $\mathfrak{X}$, изометрически эквивалентное $\hat{\mathfrak{X}}$, рефлексивно, ч. т. д.

25. Определение. Пусть $\mathfrak{X}$ — линейное топологическое пространство. Обобщенная последовательность $\{x_\alpha\}$ точек из $\mathfrak{X}$ называется *слабо сходящейся*, если существует такое $x \in \mathfrak{X}$, что $x^*x = \lim_\alpha x^*x_\alpha$ для каждого $x^* \in \mathfrak{X}^*$. Точка x называется *слабым пределом* этой обобщенной последовательности; обобщенная последовательность $\{x_\alpha\}$ называется *слабо сходящейся* к x. Множество $A \subseteq \mathfrak{X}$ называется *слабо компактным*, если каждая последовательность $\{x_n\}$ точек из A содержит подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторой точке из $\mathfrak{X}$. Каждая последовательность $\{x_n\}$ такая, что $\{x^*x_n\}$ для каждого $x^* \in \mathfrak{X}^*$ является фундаментальной последовательностью скаляров, называется *слабо фундаментальной последовательностью*. Пространство $\mathfrak{X}$ называется *слабо полным*, если в нем каждая слабо фундаментальная последовательность имеет слабый предел.

В гл. V в некоторые линейные пространства вводится топология таким образом, что они становятся хаусдорфовыми пространствами, в которых понятие сходимости обобщенных последовательностей совпадает с понятием слабой сходимости в только что определенном смысле.

26. Лемма. *В линейном нормированном пространстве слабо сходящаяся обобщенная последовательность имеет единственный предел.*

Доказательство. Если x и y — два слабых предела обобщенной последовательности, то для каждого $x^* \in \mathfrak{X}^*$ имеет место равенство $x^*x = x^*y$ и $x = y$ по следствию 15, ч. т. д.

27. Лемма. *Слабо сходящаяся последовательность $\{x_n\}$ точек линейного нормированного пространства ограничена. Ее предел x принадлежит замкнутому линейному многообразию, порождаемому множеством $\{x_n\}$, и $|x| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} |x_n|$.*

Доказательство. Если в теореме 6 заменить $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, T_n на $\mathfrak{X}^*$, Φ, $\hat{x}_n$, то мы получим, что $|\hat{x}| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} |\hat{x}_n|$. Теорема 19 дает неравенство $|x| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} |x_n|$, а теорема 20 — неравенство $\sup_n |x_n| < \infty$. Наконец, из следствия 13 вытекает, что x принадлежит замкнутому линейному многообразию, порождаемому множеством $\{x_n\}$, ч. т. д.

28. Теорема. *Для того чтобы множество в рефлексивном пространстве было слабо компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограниченным.*

Доказательство. Пусть $\{y_n\}$ — ограниченная последовательность точек рефлексивного пространства $\mathfrak{X}$, $|y_n| \leqslant K$, $n = 1, 2, \ldots$. Обозначим через $\mathfrak{Y}$ замкнутое линейное многообразие, порождаемое множеством $\{y_n\}$. Тогда $\mathfrak{Y}$ сепарабельно и, по теореме 23, рефлексивно. Следовательно, $\mathfrak{Y}^{**} = \mathfrak{Y}$ сепарабельно, и, по лемме 16, $\mathfrak{Y}^*$ также сепарабельно. Пусть $\{y_n^*\}$ — счетное множество, плотное в $\mathfrak{Y}^*$. Поскольку последовательность $\{y_1^* y_p\}$ ограничена, она содержит сходящуюся подпоследовательность $\{y_1^* y_{p_{1,i}}\}$. Так как последовательность $\{y_2^* y_{p_{1,i}}\}$ также ограничена, то она содержит сходящуюся подпоследовательность $\{y_2^* y_{p_{2,i}}\}$. Продолжая это рассуждение по индукции, получим такую подпоследовательность $\{p_{n,i}\}$ последовательности $\{p_{n-1,i}\}$, для которой последовательность $\{y_n^* p_{n,i}\}$ сходится. Таким образом, последовательность $\{x_i\}$, где $x_i = y_{p_{i,i}}$, обладает тем свойством, что предел $\lim_{i\to\infty} y_n^* x_i = \lim_{i\to\infty} \hat{x}_i y_n^*$ существует для каждого $n = 1, 2, \ldots$. Так как множество $\{y_n^*\}$ всюду плотно в $\mathfrak{Y}^*$ и $|\hat{x}_i| \leqslant K$, то, по теореме 6, существует такое $y^{**} \in \mathfrak{Y}^{**}$, что

$$\lim_i y^* x_i = y^{**} y^*, \quad y^* \in \mathfrak{Y}^*.$$

Ввиду рефлексивности $\mathfrak{Y}$ существует такая точка $y \in \mathfrak{Y}$, что $y^* x_i \to y^* y$ для каждого $y^* \in \mathfrak{Y}^*$. Далее, каждое $x^* \in \mathfrak{X}^*$ определяет такое $y^* \in \mathfrak{Y}^*$, что $x^*y - y^*y$ при $y \in \mathfrak{Y}$. Но $x_n \in \mathfrak{Y}$, и поэтому $x^*x_i \to x^*y$ для всех $x^* \in \mathfrak{X}^*$. Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ слабо сходится к y. Следовательно, ограниченные множества слабо компактны. Обратное утверждение вытекает из предшествующей леммы, ч. т. д.

29. Следствие. *Рефлексивное пространство слабо полно.*

Доказательство. Последовательность $\{x_n\}$ точек рефлексивного пространства $\mathfrak{X}$, для которой $\lim_{n\to\infty} x^*x_n$ существует при любом $x^* \in \mathfrak{X}^*$, по теореме 20, ограничена. По теореме 28, она имеет подпоследовательность $\{x_{n_i}\}$, слабо сходящуюся к некоторой точке $x \in \mathfrak{X}$. Таким образом,

$$\lim_n x^*x_n = \lim_i x^*x_{n_i} = x^*x, \quad x^* \in \mathfrak{X}^*,$$

откуда и следует, что $\mathfrak{X}$ слабо полно, ч. т. д.

Дальнейшие сведения о рефлексивных пространствах и слабой сходимости читатель может получить в гл. V. В заключение этого параграфа мы докажем лемму о слабой компактности, имеющую важные применения в эргодической теории.

30. Лемма. *Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ — B-пространства, а $\{T_n\}$ — ограниченная последовательность в пространстве $B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$. Тогда совокупность $\mathfrak{M}$ всех тех $x \in \mathfrak{X}$, для которых множество $\{T_nx \mid n = 1, 2, \ldots\}$ слабо компактно, является замкнутым линейным подпространством в $\mathfrak{X}$.*

Доказательство. Легко проверить, что $\mathfrak{M}$ является линейным пространством. Докажем, что $\mathfrak{M}$ замкнуто. Пусть $|T_n| \leqslant K$, $n = 1, 2, \ldots$. Рассмотрим $x_n \in \mathfrak{M}$, $x_n \to x$. Произвольная последовательность $\{n_i\}$ натуральных чисел содержит подпоследовательность $\{n_{1,i}\}$, для которой $T_{n_{1,i}} x_1$ слабо сходится к некоторой точке, которую мы обозначим через y_1. Аналогично найдется точка y_2 и такая подпоследовательность $\{n_{2,i}\}$ последовательности $\{n_{1,i}\}$, что последовательность $T_{n_{2,i}} x_2$ слабо сходится к y_2. Продолжая это рассуждение по индукции, мы получим точку y_m и последовательность $\{n_{m,i}\}$, для которой последовательность $T_{n_{m,i}} x_n$ слабо сходится к y_m. Последовательность $\{m_i\}$, где $m_i = n_{i,i}$, является такой подпоследовательностью последовательности $\{n_i\}$, для которой $T_{m_i} x_k$ слабо сходится к y_k при $k = 1, 2, \ldots$; неравенство

$$|y_i - y_j| \leqslant K|x_i - x_j|, \quad i, j = 1, 2, \ldots$$

вытекает из леммы 27. Так как последовательность $\{x_j\}$ фундаментальная, то и $\{y_j\}$ — тоже. Пусть $y = \lim_{n\to\infty} y_n$. Если $x^* \in \mathfrak{X}^*$ и

$p = 1, 2, \ldots,$ то

$$|x^*T_{m_i}x - x^*y| \leqslant |x^*T_{m_i}x - x^*T_{m_i}x_p| + \\ + |x^*T_{m_i}x_p - x^*y_p| + |x^*y_p - x^*y|$$

и, следовательно,

$$\overline{\lim_{i\to\infty}} |x^*T_{m_i}x - x^*y| \leqslant K|x^*||x - x_p| + |x^*||y - y_p|.$$

Устремив p к ∞, получаем, что $T_{m_i}x$ слабо сходится к y. Таким образом, каждая последовательность $\{n_i\}$ натуральных чисел содержит такую подпоследовательность $\{m_i\}$, для которой $T_{m_i}x$ слабо сходится к y. Отсюда вытекает, что $T_n x$ слабо сходится к y, ч. т. д.

4. Упражнения

1. Множество C точек линейного пространства называется *выпуклым*, если, каковы бы ни были x, $y \in C$ и $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, точка $\alpha x + (1-\alpha)y \in C$. Показать, что в B-пространстве сферы выпуклы. Показать, что *замкнутая сфера* $\{x \,\|\, x - y| \leqslant \varepsilon\}$ является замыканием открытой сферы $\{x \,\|\, x - y| < \varepsilon\}$. Показать, что в B-пространстве пересечение любой убывающей последовательности замкнутых сфер непусто.

2. Найти убывающую последовательность непустых, ограниченных, замкнутых, выпуклых подмножеств некоторого B-пространства, имеющих пустое пересечение.

3. Пусть $\mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{Z}$ — замкнутые линейные многообразия в B-пространстве $\mathfrak{X}$. Предположим, что каждое $x \in \mathfrak{X}$ имеет единственное представление вида $x = y + z$ где $y \in \mathfrak{Y}$, $z \in \mathfrak{Z}$. Показать, что существует такая константа K, что $|y| \leqslant K|x|$ и $|z| \leqslant K|x|$ для всех $x \in \mathfrak{X}$.

4. Пусть $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{Z}$ — B-пространства, а $z = (x, y)$ — функция, определенная на $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$, со значениями в $\mathfrak{Z}$, линейная по x для каждого y и линейная по y для каждого x. Такая функция называется *билинейной*. Предположим, далее, что для каждого $z^* \in \mathfrak{Z}^*$ функция $z^*(x, y)$ непрерывна по y при каждом x и непрерывна по x при каждом y. Доказать, что существует такая константа K, что

$$|(x, y)| \leqslant K|x||y|.$$

5. Пусть $\mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{Z}$ — B-пространства, и пусть дано отображение $f: \mathfrak{Y} \longrightarrow \mathfrak{Z}$ такое, что $z^*f(y) \in \mathfrak{Y}^*$ для каждого $z^* \in \mathfrak{Z}^*$. Показать, что $f \in B(\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$.

6. Пусть $\mathfrak{X}$ — комплексное B-пространство, G — открытое подмножество комплексной плоскости. Предположим, что отображение $f: G \longrightarrow \mathfrak{X}$ таково, что для каждого $x^* \in \mathfrak{X}^*$ функция $x^*f(\xi)$ анали-

тична в G. Показать, что

$$\lim_{\mu\to\xi}\frac{f(\mu)-f(\xi)}{\mu-\xi}$$

существует для каждого $\xi\in G$.

7. Определение. Последовательность $\{x_n\}$ точек F-пространства $\mathfrak{X}$ называется его *базисом*, если каждому $x\in\mathfrak{X}$ отвечает единственная последовательность $\{\alpha_i\}$ скаляров, такая, что

$$\lim_{n\to\infty}\left|x-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right|=0.$$

8. Пусть $\{x_n\}$ — базис F-пространства $\mathfrak{X}$, а $\mathfrak{Y}$ — векторное пространство всех таких последовательностей $y=\{\alpha_i\}$, для которых ряд $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i x_i$ сходится. Показать, что если в $\mathfrak{Y}$ определить метрику

$$|y|=\sup_n\left|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right|,$$

то $\mathfrak{Y}$ становится F-пространством, которое будет даже B-пространством, если таковым является $\mathfrak{X}$.

9. Если $\{x_n\}$ — базис F-пространства $\mathfrak{X}$ и для элемента $x=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i x_i$ положим $x_i^*(x)=\alpha_i$, $i=1, 2, \ldots$, то линейный функционал x_i^* будет непрерывен. (Указание: использовать естественное соответствие между пространствами $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$, определяемое в упражнении 8.)

10. Показать, что ни один из элементов базиса F-пространства не принадлежит замыканию линейной оболочки остальных элементов этого базиса.

11. Определение. Пара последовательностей $\{x_i\}$, $x_i\in\mathfrak{X}$, и $\{x_i^*\}$, $x_i^*\in\mathfrak{X}^*$, называется *биортогональной системой* банахова пространства $\mathfrak{X}$, если $x_i^*(x_j)=\delta_{ij}$.

12. Пусть $\{x_i\}$, $\{x_i^*\}$ — биортогональная система B-пространства $\mathfrak{X}$.

(a) Если $\sup_n\left|\sum_{i=1}^{n}x^*(x_i)\,x_i^*\right|<\infty$ для каждого $x^*\in\mathfrak{X}^*$, то для каждого элемента x из замкнутой линейной оболочки последовательности $\{x_i\}$ имеет место равенство

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}x_i^*(x)\,x_i.$$

(b) Если $\sup_n\left|\sum_{i=1}^{n}x_i^*(x)\,x_i)\right|<\infty$ для каждого $x\in\mathfrak{X}$, то для каждого x^* из замкнутой линейной оболочки последовательности $\{x_i^*\}$

имеет место равенство

$$x^* = \sum_{i=1}^{\infty} x^*(x_i)\, x_i^*.$$

13. Пусть $\mathfrak{X}$ — B-пространство (или F-пространство), а $\mathfrak{Z}$ — *замкнутое* линейное многообразие в $\mathfrak{X}$. Тогда фактор-пространство $\mathfrak{X}/\mathfrak{Z}$ (см. 1.11) с метрикой

$$|x+\mathfrak{Z}| = \inf_{z \in \mathfrak{Z}} |x+z|$$

является B-пространством (соответственно F-пространством). (Указание: для фундаментальной последовательности, заданной в $\mathfrak{X}/\mathfrak{Z}$, определить подпоследовательность, для которой $|x_k - x_{k+1} + \mathfrak{Z}| < 2^{-k}$, $k = 1, 2, \ldots$, и показать, что в $\mathfrak{X}$ можно найти фундаментальную последовательность, отображающуюся на $\{x_k + \mathfrak{Z}\}$.)

14. (a) Естественный гомоморфизм $f: \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}/\mathfrak{Z}$, определяемый равенством $f(x) = x + \mathfrak{Z}$, непрерывен, отображает открытые множества на открытые и имеет норму $|f| \leqslant 1$.

(b) Если в фактор-пространстве $\mathfrak{X}/\mathfrak{Z}$ задана топология, более сильная, чем топология, определенная введенной выше метрикой, то функция f уже не будет непрерывной.

(c) Если $\mathfrak{X}$ является B-пространством, то f отображает открытую единичную сферу пространства $\mathfrak{X}$ на открытую единичную сферу фактор-пространства $\mathfrak{X}/\mathfrak{Z}$.

15. Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ — B-пространства, а T — непрерывное линейное отображение $\mathfrak{X}$ на все $\mathfrak{Y}$. Показать, что если $y_n \to y_0$, то существует такое число $N > 0$ и такая последовательность $\{x_n\} \subset \mathfrak{X}$, что $|x_n| \leqslant N|y_n|$, $Tx_n = y_n$, $n = 0, 1, \ldots$, и $x_n \to x_0$.

16. Пусть $\mathfrak{X}$ — линейное нормированное пространство, не предполагаемое полным, и $\mathfrak{Z}$ — замкнутое подпространство $\mathfrak{X}$. Показать, что если $\mathfrak{Z}$ и $\mathfrak{X}/\mathfrak{Z}$ полны, то и $\mathfrak{X}$ также полно.

17. Определение. Если $\mathfrak{X}$ — линейное нормированное пространство и $Z \subseteq \mathfrak{X}$, то множество $Z^\perp = \{x^* \mid x^* \in \mathfrak{X}, \ x^*(Z) = 0\}$ называется *аннулятором*, или *ортогональным дополнением* Z.

18. (a) Если $\mathfrak{X}$ — линейное нормированное пространство, а $\mathfrak{Z}$ — линейное многообразие в $\mathfrak{X}$, то отображение $x^* + \mathfrak{Z}^\perp \to z^*$, где z^* определяется равенством $z^*z = x^*z$, $z \in \mathfrak{Z}$, является изометрическим изоморфизмом $\mathfrak{X}^*/\mathfrak{Z}^\perp$ в $\mathfrak{Z}^*$.

(b) Если $\mathfrak{Z}$ — замкнутое подпространство B-пространства $\mathfrak{X}$, то отображение $x^* \to \bar{x}^*$, где $\bar{x}^*$ определяется равенством $\bar{x}^*(x+\mathfrak{Z}) = x^*(x)$, является изометрическим изоморфизмом $\mathfrak{Z}^\perp$ на все $(\mathfrak{X}/\mathfrak{Z})^*$.

(c) Показать, что если $\mathfrak{X}$ — рефлексивное B-пространство и $\mathfrak{Z}$ — замкнутое подпространство $\mathfrak{X}$, то $\mathfrak{Z}^{\perp\perp} = \mathfrak{Z}$. Справедливо ли это, если пространство $\mathfrak{X}$ не является рефлексивным?

19. Пусть $\mathfrak{X}$ — рефлексивное B-пространство, а $\mathfrak{Z}$ — его замкнутое подпространство; пользуясь результатом упражнения 18, показать, что $\mathfrak{Z}$ и $\mathfrak{X}/\mathfrak{Z}$ рефлексивны.

20. Если $\mathfrak{X}$ — B-пространство и $\mathfrak{Z} \subseteq \mathfrak{X}$, причем как $\mathfrak{Z}$, так и $\mathfrak{X}/\mathfrak{Z}$ рефлексивны, то и $\mathfrak{X}$ рефлексивно. (Указание: показать, что для произвольно заданного $x_0^{**} \in \mathfrak{X}^{**}$ существует такое $y_0 \in \mathfrak{X}$, что $x_0^{**}(y^*) = y^*(y_0)$ при всех $y^* \in \mathfrak{Z}^{\perp}$.)

21. Обозначим через m пространство всех ограниченных последовательностей $s = [s_1, s_2, \ldots]$. Показать, что если определить норму элемента s равенством

$$|s| = \sup_{1 \leqslant i < \infty} |s_i|,$$

то m становится B-пространством.

22. (Банаховы пределы). Рассмотрим наименьшее замкнутое подпространство m_0 пространства m (см. упр. 21), содержащее все последовательности вида $t = [s_1, s_2 - s_1, s_3 - s_2, \ldots]$, где $s = [s_1, s_2, \ldots] \in m$. Показать, что последовательность $e = [1, 1, \ldots]$ не содержится в m_0 и что существует такой непрерывный функционал x^*, определенный на m, что $|x^*| = 1$, $x^*(e) = 1$ и $x^*(x) = 0$, если $x \in m_0$. Полагая, $\operatorname*{LIM}_{n\to\infty} s_n = x^*(s)$, показать, что:

(a) $\operatorname*{LIM}_{n\to\infty} s_n = \operatorname*{LIM}_{n\to\infty} s_{n+1}$;

(b) $\operatorname*{LIM}_{n\to\infty} (\alpha s_n + \beta t_n) = \alpha \operatorname*{LIM}_{n\to\infty} s_n + \beta \operatorname*{LIM}_{n\to\infty} t_n$;

(c) $\operatorname*{LIM}_{n\to\infty} s_n \geqslant 0$, если $[s_n]$ — неотрицательная последовательность;

(d) $\varliminf_{n\to\infty} s_n \leqslant \operatorname*{LIM}_{n\to\infty} s_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} s_n$, если $[s_n]$ — вещественная последовательность;

(e) если s_n — сходящаяся последовательность, то

$$\operatorname*{LIM}_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s_n.$$

23. Показать, что для каждой ограниченной комплексной функции f вещественной переменной s можно определить «обобщенный предел» $\operatorname*{LIM}_{s\to\infty}$ таким образом, что:

(a) $\operatorname*{LIM}_{s\to\infty} f(s) = \operatorname*{LIM}_{s\to\infty} f(s+t)$ для каждого t;

(b) $\operatorname*{LIM}_{s\to\infty} \{\alpha f(s) + \beta g(s)\} = \alpha \operatorname*{LIM}_{s\to\infty} f(s) + \beta \operatorname*{LIM}_{s\to\infty} g(s)$;

(c) $\operatorname*{LIM}_{s\to\infty} f(s) \geqslant 0$, если f — неотрицательная функция;

(d) $\varliminf_{s\to\infty} f(s) \leqslant \operatorname*{LIM}_{s\to\infty} f(s) \leqslant \varlimsup_{s\to\infty} f(s)$, если f — вещественная функция;

(e) $\operatorname*{LIM}_{s\to\infty} f(s) = \lim_{s\to\infty} f(s)$, если предел в правой части существует.

24. Показать, что если $\mathfrak{Y}$ — линейное многообразие, всюду плотное в B-пространстве $\mathfrak{X}$, то существует естественный изометрический изоморфизм между $\mathfrak{X}^*$ и $\mathfrak{Y}^*$.

25. Пусть $\mathfrak{P}$ — сепарабельное линейное многообразие в $\mathfrak{X}^*$. Показать, что существует такое сепарабельное подпространство $\mathfrak{Z} \subseteq \mathfrak{X}$, что $\mathfrak{P}$ изометрически изоморфно некоторому подпространству $\mathfrak{Z}^*$.

26. Пусть $\mathfrak{X}$ — линейное топологическое пространство; для того чтобы линейный функционал, определенный на $\mathfrak{X}$, был непрерывен, необходимо и достаточно, чтобы он был ограничен в некоторой окрестности начала.

27. Определение. B-пространство $\mathfrak{X}$ называется *равномерно выпуклым*, если из $|x_n| = |y_n| = 1$, $|x_n + y_n| \to 2$ вытекает, что $|x_n - y_n| \to 0$.

28. Если пространство $\mathfrak{X}$ равномерно выпукло, последовательность $\{x_n\}$ слабо сходится к x_0 и $|x_n| \to |x_0|$, то $x_n \to x_0$ в метрической топологии.

29. Пусть K — замкнутое выпуклое множество в равномерно выпуклом B-пространстве. Тогда функция $f(x) = |x|$ в точности один раз достигает своего минимума на K.

30. Бесконечномерное F-пространство никогда не имеет счетного базиса Гамеля.

Нижеследующие упражнения образуют связное целое, относящееся к теории суммирования расходящихся рядов.

31. Обозначим через c пространство всех сходящихся последовательностей $s = [s_1, s_2, \ldots]$ скаляров. Показать, что если норму элемента s определить равенством

$$|s| = \sup_{1 \leq i < \infty} |s_i|,$$

то c становится B-пространством.

32. Обозначим через l_1 пространство всех таких последовательностей $s = [s_0, s_1, s_2, \ldots]$, что $\sum_{i=0}^{\infty} |s_i| < \infty$. Показать, что если норму элемента s определить равенством

$$|s| = \sum_{i=0}^{\infty} |s_i|,$$

то l_1 становится B-пространством.

33. Для каждого $s = [s_0, s_1, s_2, \ldots] \in l_1$ и $t = [t_1, t_2, \ldots] \in c$ положим

$$(gs)(t) = s_0 \lim_{n \to \infty} t_n + \sum_{n=1}^{\infty} s_n t_n.$$

Показать, что g есть изометрический изоморфизм l_1 на все c^*.

34. Обозначим через T ограниченное линейное отображение c в себя. Показать, что существует такая двойная последовательность $\{a_{ij}\}$, $i=1, 2, \ldots, j=0,1,2\ldots$, что

(a) $t_i = a_{i0} \lim\limits_{j\to\infty} s_j + \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{ij}s_j$, где $T[s_1, s_2, \ldots] = [t_1, t_2, \ldots]$;

(b) $\sup\limits_{1\leqslant i<\infty} \sum\limits_{j=0}^{\infty} |a_{ij}| = M < \infty$;

(c) $\lim\limits_{i\to\infty} a_{ij}$ существует для $j=1, 2, \ldots$;

(d) $\lim\limits_{i\to\infty} \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_{ij}$ существует;

(e) $|T| = M$.

Обратно, если $\{a_{ij}\}$ — двойная последовательность, удовлетворяющая условиям (b), (c) и (d), то равенство (a) определяет ограниченное линейное отображение T пространства c в себя, норма которого $|T| = M$.

35. Определение. Предположим, что матрица (a_{ij}) определяет линейное преобразование T пространства c в себя посредством формулы

$$T[s_1, s_2, \ldots] = [t_1, t_2, \ldots] = \left[\sum_{j=1}^{\infty} a_{1j}s_j, \ \sum_{j=1}^{\infty} a_{2j}s_j, \ \ldots\right].$$

Если T сохраняет пределы последовательностей (т. е. если $\lim\limits_{i\to\infty} t_i = \lim\limits_{i\to\infty} s_i$ для каждого $[s_i] \in c$), то говорят, что матрица (a_{ij}) определяет *регулярный метод суммирования*.

36. (Сильвермен — Теплиц.) Показать, что для того, чтобы матрица (a_{ij}) определяла регулярный метод суммирования, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие условия:

(a) $\sup\limits_{1\leqslant i<\infty} \sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| = M < \infty$,

(b) $\lim\limits_{i\to\infty} a_{ij} = 0$ при $1 \leqslant j < \infty$,

(c) $\lim\limits_{i\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{ij} = 1$.

37. Рассмотрим последовательность $[p_k]$ положительных чисел, и пусть $P_i = \sum\limits_{k=1}^{i} p_k$. Показать, что формулой

$$t_i = P_i^{-1} \sum_{j=1}^{i} p_j s_j = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} s_j$$

в том и только в том случае определяется регулярный метод суммирования, если ряд $\sum_{k=1}^{\infty}' p_k$ расходится. [Если все $p_j = 1$, то это называется $(C,\ 1)$-*суммированием по Чезаро*; см. ниже, упражнение 39.]

38. (Суммирование по Нёрлунду.) Пусть $[p_k]$ — последовательность положительных чисел и $P_i = \sum_{k=1}^{i} p_k$. Показать, что формулой $t_i = P_i^{-1} \sum_{j=1}^{i} p_{i-j+1} s_j$ в том и только в том случае определяется регулярный метод суммирования, если

$$\lim_{k \to \infty} P_k^{-1} p_k = 0.$$

39. ($(C,\ \alpha)$-суммирование по Чезаро). Показать, что формулой

$$t_n = (C_n^{\alpha+1})^{-1} \sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^{\alpha} s_k$$

определяется регулярный метод суммирования для каждого комплексного числа α, у которого $\mathrm{Re}(\alpha) \geqslant 0$. Здесь $C_0^{\beta} = 1$ и $C_m^{\beta} = \frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+m-1)}{m!}$ при $m > 0$.

40. Пусть $\sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n$ — разложение в степенной ряд некоторой целой функции. Предположим, что $p_n > 0$ для каждого n. Показать, что

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{x\to\infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty}' p_n s_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n}$$

при условии, что предел в левой части равенства существует.

41. Пусть $\sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n$ — разложение в степенной ряд некоторой функции, аналитической в круге $|z| < r$. Предположим, что $p_n \geqslant 0$ для каждого n и что $\lim_{x\to r} \sum_{n=0}^{\infty}' p_n x^n = \infty$, где $0 < x < r$. Показать, что если $\lim_{n\to\infty} s_n$ существует, то

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{x\to r} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} p_n s_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty}' p_n x^n},$$

где предел берется по вещественным значениям x.

42. (Суммирование по Абелю.) Показать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ существует, то $(1-z)\sum\limits_{n=0}^{\infty} s_n z^n$ стремится к s при стремлении z к единице вдоль любого пути, лежащего внутри круга $C\{z \mid |z|=1\}$ и не касающегося C.

43. (Абель). Если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится к a, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ сходится к b, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ сходится к c и если $c_n = \sum\limits_{j=0}^{n} a_{n-j} b_j$, то $c = ab$. (Указание: воспользоваться результатом упражнения 42.)

44. Отображение $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \to \sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda_n a_n$, определяемое последовательностью $\{\lambda_n\}$, в том и только в том случае переводит сходящиеся ряды в сходящиеся, если $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |\lambda_n - \lambda_{n+1}| < \infty$.

45. Матрица $\{\lambda_{mn}\}$, $m, n = 0, 1, 2, \ldots$, определяет преобразование $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \to \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\sum\limits_{m=0}^{\infty} \lambda_{mn} a_n\right)$, которое в том и только в том случае переводит сходящиеся ряды в сходящиеся, если

(1) $\sum\limits_{m} \lambda_{mn}$ сходится при любом n;

(2) $\sum\limits_{n} |\lambda_{mn} - \lambda_{m,\,n+1}|$ сходится при любом m;

(3) $\sup\limits_{M} \sum\limits_{n} \left|\sum\limits_{m=0}^{M} (\lambda_{mn} - \lambda_{m,\,n+1})\right| < \infty$.

Это преобразование тогда и только тогда сохраняет суммы рядов $\left[\text{т. е. } \sum\limits_{m=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda_{mn} a_n\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\right]$, если, кроме условий (2) и (3), для каждого n имеет место равенство

(1′) $\sum\limits_{m} \lambda_{mn} = 1$.

46. Матрица (λ_{mn}), $m, n = 0, 1, 2, \ldots$, определяет преобразование $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \to \sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda_{mn} a_n = t_m$, которое сходящиеся ряды в том и только в том случае переводит в сходящиеся же последовательности, если

(1) $\lim\limits_{m} \lambda_{mn}$ существует для каждого n;

(2) $\sup\limits_{m} \sum\limits_{n=0}^{\infty} |\lambda_{mn} - \lambda_{m,\,n+1}| < \infty$.

Далее, $\lim\limits_m t_m = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ в том и только в том случае, если для каждого n, кроме условия (2), имеет место равенство

(1') $\lim\limits_m \lambda_{mn} = 1$.

47. Показать, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{m\to\infty}\left\{a_0 + \frac{m}{m+1}a_1 + \frac{m(m-1)}{(m+1)(m+2)}a_2 + \ldots\right\},$$

если только ряд, стоящий в левой части равенства, сходится.

48. Показать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{h\to 0}\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^k$$

для любого $k > 1$ и любого сходящегося ряда в левой части.

49. (Шур — Мертенс.) Пусть $a = \{a_n\}$ и $b = \{b_n\}$ — две последовательности комплексных чисел и $c_m = \sum\limits_{n=0}^{m} a_{m-n}b_n$. Если ряд $\sum |a_n|$ сходится, то для любого сходящегося ряда $\sum b_n$ ряд $\sum c_n$ тоже сходится. Обратно, если $\sum c_n$ сходится для любого сходящегося ряда $\sum b_n$, то и ряд $\sum |a_n|$ сходится. (Сравнить этот результат с упражнением 43).

50. (a) Если $\sum a_n$ сходится, а $\{\beta_n\}$ — невозрастающая последовательность положительных чисел, то и ряд $\sum a_n\beta_n$ сходится.

(b) Если $\{\beta_{mn}\}$ — такая последовательность, что

(1) $0 \leqslant \beta_{mn} \leqslant \beta_{m,\, n-1}$;

(2) $\beta_{mn} \leqslant M$ для некоторого фиксированного $M < \infty$;

(3) $\lim\limits_{m\to\infty} \beta_{mn} = 1$ для каждого n,

то

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_n\beta_{m,\,n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

для любого сходящегося ряда в правой части.

51. (Харди — Литтлвуд). Предположим, что ряд $a(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится при $z = 1$. Показать, что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{(k)}(x)(1-x)^k}{k!}$$

при $0 < x < 1$ сходится. (Указание: воспользоваться результатом упражнения 50.)

52. Пусть u_n и v_n — элементы пространства l_1 (см. упражнение 32), определяемые формулами

$$u_n = \left[1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots\right],$$
$$v_n = \left[\left(1-\frac{1}{n}\right), \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)^2, \ldots\right].$$

Показать, что последовательность $\{u_n - v_n\}$ ограничена, но не сходится к нулю.

53. Рассмотрим последовательность $\{a_n\}$ комплексных чисел, для которой последовательность $\{na_n\}$ ограничена, и пусть $a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Доказать следующие утверждения:

(a) Функция $a(x)$ в том и только в том случае равномерно ограничена при $0 < x < 1$, если последовательность $\left\{\sum_{k=0}^{n} a_k\right\}$ частных сумм ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ограничена.

(b) Функция $a(z)$ в том и только в том случае равномерно ограничена в круге $|z| < 1$, если последовательность частных сумм ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ равномерно ограничена при $|z| = 1$.

54. Рассмотрим такую последовательность $\{a_k\}$, что $\{ka_k\}$ сходится к нулю, и пусть $a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$; показать, что

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=0}^{n} a_k - a\left(1-\frac{1}{n}\right)\right] = 0.$$

Надо показать, следовательно, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ сходится в том и только в том случае, если $a(x)$ имеет предел при $x \to 1$. (Этот известный результат, принадлежащий Тауберу, является прототипом всех теорем «тауберовского типа». Этими теоремами устанавливаются условия, при которых «сильное» суммирование (в этом случае по Абелю) превращается в обычное суммирование. (Сравнить этот результат с упражнением 42).

5. Примечания и дополнения

Замечания общего характера и библиографические справки. Дифференцирование и интегрирование могут рассматриваться как операции, определенные на некотором классе функций, однако до конца прошлого столетия эта точка зрения служила немногим более, чем для удобства обозначений. Лишь к началу нашего века в работах Вольтерра и Фредгольма в области интегральных уравнений было обнаружено все преимущество этой «операторной» техники. Когда Гильбертом, Шмидтом, Ф. Риссом и другими учеными была развита теория интегральных уравнений и смежные с ней вопросы и выяснилась аналогия всего этого с соответствующими алгебраическими вопросами, стало ясно, что функцию надо рассматривать как вектор или как точку в «пространстве» функций. Это было отчетливо понято, например, Шмидтом [1], который ввел геометрический язык и терминологию гильбертова пространства, в основном используемые и в настоящее время. Приблизительно в то же самое время Фреше [1], Хаусдорфом [1] и Ф. Риссом [1] были заложены основы современной теоретико-множественной топологии, и совершенно естественно, что эти топологические понятия нашли себе применения как в алгебре, так и в анализе. Так, Кюршак [1] ввел топологию в теорию полей, определив в них понятие нормы, а конкретное гильбертово пространство и пространства L_p вскоре привели к общим понятиям нормированного и линейного топологического пространств.

Зная, до какой степени С. Ли и его последователи довели исследование «непрерывных групп», порой удивляешься тому, как медленно выкристаллизовывалась идея общей топологической группы. Только в 1926 г. О. Шрейер [1] определил абстрактную топологическую группу и установил некоторые ее свойства (см. также Лейя [1]). Систематическое изучение топологизаций абстрактных групп, колец и полей было проведено Данцигом [1]. Понятие нормированной алгебры первоначально было использовано Майкалом и Мартином [1], Нагумо [1] и Гельфандом [1][1]). Понятие F-пространства берет свое начало в работах Фреше [2, 3].

Библиографические справки. Тем, кто собирается заняться подробным изучением общих топологических групп, можно рекомендовать трактаты Люмиса [1], Понтрягина [1] и А. Вейля [1]. Книги Шевалле [1—3*] относятся к более специальному случаю — теории групп Ли.

Мы особенно рекомендуем статью Хеллингера и Теплица в «Энциклопедии математической науки» [3, в частности § 24] как замечательно написанный и достаточно полный библиографический обзор по теории интегральных уравнений, являющейся отправной точкой для общей теории линейных пространств. Много более, чем чисто исторический интерес, представляют собой также фундаментальные работы Гильберта [1] по интегральным уравнениям и книга Ф. Рисса [6] об уравнениях с бесконечным числом неизвестных.

---

[1]) Теория нормированных колец (алгебр) была построена И. М. Гельфандом. Она изложена в гл. IX. —*Прим. ред.*

Более ранняя статья Пинкерле [1] в «Энциклопедии», труды Э. Мура [1, 2] и работа Вольтерра [1] также имеют отношение к большинству из рассматриваемых вопросов. Наконец, в книге Дейвиса [1] упоминаются различные операторные методы, такие, как операторное исчисление Хейвисайда, дифференцирование и интегрирование дробного порядка и т. д.

Наиболее близкими к данной книге являются классический трактат Банаха [1] и недавно вышедшие книги Ф. Рисса и Секефальви-Надя [1] и Заанена [5]. Более специальные вопросы, относящиеся к гильбертовому пространству, рассматриваются в трудах Стоуна [3], Секефальви-Надя [3], Халмоша [6] и Кука [1]. Книга Хилле [1] также имеет прямое отношение к рассматриваемым вопросам. Труды Накано [1, 2] и Бурбаки [2] с более общим кругозором относятся в основном к теории локально выпуклых линейных топологических пространств. Все эти книги полезны для справок.

Ограниченные множества. Определение 1.7, по-существу, дано Дж. Нейманом [1][1]. Можно дать эквивалентное определение: множество B *ограничено*, если для каждой последовательности $\{x_n\} \subseteq B$ и каждой последовательности скаляров $\{\alpha_n\}$, где $\alpha_n \to 0$, также и $\alpha_n x_n \to 0$. Это последнее условие использовалось Мазуром и Орличем [1]. В случае B-пространств из леммы (3.3) вытекает, что для того, чтобы множество было ограниченным, необходимо и достаточно, чтобы оно содержалось в некоторой сфере. В F-пространстве, однако, все сферы могут быть неограниченными.

Принцип равномерной ограниченности. (Нижеследующие пояснения относятся к теоремам 1.11, 1.13, 1.17, 1.18 и их приложениям к теоремам 3.6, 3.20 и 3.21. См. также Гал [3].) В анализе есть много результатов, имеющих отношение к этим теоремам, хотя из-за их часто специального характера они не всегда воспринимаются как таковые и не всегда оказываются сравнимыми по силе. Некоторые результаты такого рода были получены Лебегом [1] при изучении сингулярных интегралов, другие — Ханом [1, стр. 678], Штейнгаузом [1] и Саксом и Тамаркиным [1]. Некоторые следствия теоремы 1.11, тесно связанные с вопросами отыскания общего вида линейных функционалов и операторов, были получены для пространства l_2 Хеллингером и Теплицем [1, 2], для l_p при $p > 1$ — Ландау [1], для c — Теплицем [2], для C [0, 1] — Хелли [1] и для L_p при $p > 1$ — Ф. Риссом [2, стр. 457].

Теоремы 1.11, 1.17 и 1.18 для линейных функционалов в общем B-пространстве были доказаны Ханом [2], применившим эти результаты ко многим специальным пространствам. Первые действительно общие доказательства теорем 1.11 и 1.13 для случая B-пространств были получены Гильдебрандтом [2]. Банах и Штейнгауз [1, стр. 53]

---

[1]) Это определение независимо предложено также и А. Н. Колмогоровым [1]. —*Прим. ред.*

заметили, что в случае B-пространства теорема 1.11 остается справедливой и в том случае, когда $\{T_a x \mid a \in A\}$ ограничено для всех x из некоторого множества второй категории. Банах и Штейнгауз [1, стр. 54] доказали следующую теорему, часто называемую *теоремой о сгущении особенностей.*

Теорема. *Если $\{U_{pq}\}$ — двойная последовательность ограниченных линейных операторов, отображающих B-пространство $\mathfrak{X}$ в B-пространство $\mathfrak{Y}$, и такая, что*

$$\overline{\lim_{q\to\infty}} |U_{pq}| = \infty, \quad p = 1,2, \ldots,$$

то в $\mathfrak{X}$ существует такое множество S второй категории, что для каждого $x \in S$

$$\overline{\lim_{q\to\infty}} | U_{pq}(x) | = \infty, \quad p = 1, 2, \ldots .$$

Банах [3] доказал теоремы 1.17 и 1.18 для B-пространств и получил в [7] для полных метрических групп результаты, связанные с этими теоремами и только что упомянутой теоремой о сгущении особенностей (см. также Банах [1, гл. 1]). Мазуром и Орличем [1] теоремы 1.11 и 1.13 были обобщены на F-пространства.

Петтисом [5, стр. 300] было дано весьма широкое обобщение теоремы 1.13 на линейные топологические пространства. Им была доказана также справедливость некоторого обобщения теоремы 1.17 для последовательности непрерывных гомоморфизмов между двумя топологическими группами.

Теоремы 3.20 и 3.21 были обобщены Сарджентом [1,2] так, что они могут быть применены к пространству функций, интегрируемых по Данжуа на [0, 1], являющемуся множеством первой категории.

«Теорема о равномерной ограниченности» для множества вещественных функций, заданных на метрическом пространстве, была доказана Голдстайном [2]. Алексевич [1] занимался систематическим изучением условий, при которых справедливы теоремы, аналогичные теоремам 1.17 и 1.18, и теорема о сгущении особенностей для классов непрерывных отображений между метрическими пространствами. Его условия таковы, что из них могут быть получены как эти теоремы, так и некоторые обобщения теорем Сакса [2, 3] о последовательностях мер. Алексевич [1, II] рассматривал также эти результаты в пространствах, в которых установлены некоторые абстрактные понятия предела. Мазур и Орлич [2] (см. также Алексевич [1, I]) обобщили эти три теоремы на полиномы операторов в F-пространствах. Алексевич [1, III] также рассматривал полиномы операторов в линейном пространстве, в котором установлены различные понятия предела. Орлич [7] доказал некоторую теорему типа теоремы о сгущении особенностей, где двойная последовательность операторов зависит от некоторого параметра из полного метрического пространства, и обобщающую следующую теорему:

Теорема. *Пусть* U_n — *непрерывная функция, отображающая* $\mathfrak{X}\times[0, 1]$ *в* $\mathfrak{Y}$, *и такая, что для каждого* $t\in[0, 1]$ *оператор* $U_n(\ldots, t)\in B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$. *Если для каждого* $t\in[0, 1]$ *существует такое* x_t, *что* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|U_n(x_t, t)|=\infty$, *то найдется такое* x, *что* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|U_n(x, t)|=\infty$ *для всех* t *из некоторого несчетного совершенного множества, принадлежащего* $[0, 1]$.

Гал [1, 2] обобщил теорему о равномерной ограниченности и теорему о сгущении особенностей на некоторый класс нелинейных однородных отображений между B-пространствами при некоторых предположениях, компенсирующих отсутствие линейности.

Пусть $\{T_\alpha|\alpha\in A\}$ — обобщенная последовательность ограниченных линейных операторов, отображающих одно B-пространство $\mathfrak{X}$ в другое B-пространство $\mathfrak{Y}$. Дэй [9] рассматривал вопрос о том, при каких условиях из неравенства $\overline{\lim\limits_{\alpha\in A}}|T_\alpha x|<\infty$, $x\in\mathfrak{X}$, вытекает, что $\overline{\lim\limits_{\alpha\in A}}|T_\alpha|<\infty$. Среди других результатов он доказал, что это в том и только в том случае справедливо для любого направленного множества A, если пространство $\mathfrak{X}$ конечномерно.

Несколько теорем типа теоремы о равномерной ограниченности и некоторые их приложения получены Данфордом [1, гл. I]. Установлено (Данфорд [1, стр. 308]), что, используя теорему о замкнутом графике (II, 2.4) вместе с теоремой Хана—Банаха, можно получить очень простое доказательство теоремы о равномерной ограниченности для B-пространств.

Бурбаки [3] доказали, что теорема 1.17 остается справедливой и для некоторого класса локально выпуклых линейных топологических пространств. (См. также Дьёдонне и Шварц [1, стр. 73].)

Непрерывность линейных операторов. (Эти замечания относятся к теоремам 1.14 —1.16 и 3.4.) Хотя частный случай теоремы 1.14 использовался раньше, для общего B-пространства она впервые была доказана Банахом [3, стр. 151]. Мазур и Орлич [1, стр. 153] обобщили эту теорему и теорему 1.16 на F-пространства.

Вехаузен [1, стр. 161] заметил, что теорема 1.16 остается справедливой и в том случае, когда областью значений служит произвольное линейное топологическое пространство. Он получил также необходимые и достаточные условия непрерывнсcти линейных операторов для того случая, когда областью определения является локально выпуклое пространство. Как можно предположить по аналогии с вещественным случаем, из аддитивности функции вместе с ее «измеримостью» должна вытекать ее непрерывность. То, что это действительно имеет место в метрических группах, было показано Банахом [7] (см. также Банах [1, гл. I]) и Куратовским [1]. Условия такого типа Мазуром и Орличем [2] были обобщены на полиномы операторов.

Иногда полезно считать «непрерывным» такое линейное отображение T между линейными пространствами $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$, которое отображает последовательность из $\mathfrak{X}$, сходящуюся в некотором смысле, в сходящуюся же последовательность из $\mathfrak{Y}$. Это определение годится, например, в том случае, когда $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ — конкретные линейные пространства, в которых определены одно или несколько естественных понятий предела, или если в $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ задано некоторое отношение порядка. Читатель найдет такие случаи в упоминаемых нами работах о частично упорядоченных множествах. Он может также сравнить работы Алексевича [1; II, III], Фихтенгольца [1, 2] и Орлича [5, 6].

Принцип открытости отображения. Этот результат и теорема о замкнутом графике тесно связаны с понятием категории. Теорема 2.2 для случая B-пространств впервые была доказана Банахом [4, стр. 238], доказательство которого отлично от приводимого нами. Шаудер [7], тоже для случая B-пространств, дал доказательство, приближающееся к тому, которое дано в тексте. Им доказана также и теорема 2.1. Справедливость теорем параграфа 2 для F-пространств была установлена в работе Банаха по существу теми же методами.

Интересным и важным фактом является то обстоятельство, что теоремы 2.1—2.5 остаются справедливыми для гомоморфных отображений сепарабельных полных метрических групп с лево-инвариантными метриками. Этот результат был получен Банахом [7]. Предположение сепарабельности в случае групп существенно, как показывает пример тождественного отображения аддитивной группы вещественных чисел с дискретной топологией на эту же группу с ее обычной топологией.

Петтис [5] нашел несколько необходимых и достаточных условий, при которых гомоморфизм h между двумя топологическими группами X и Y является непрерывным или внутренним, т. е. таким, при котором открытые множества переходят в множества, содержащие внутреннюю точку. Мы упомянем следующий результат:

Теорема. *Если топологическая группа X полна относительно некоторой право-инвариантной (возможно, и недефинитной) метрики, то гомоморфизм $h : X \to Y$ в том и только в том случае является внутренним отображением в Y и имеет замкнутое ядро $h^{-1}(0)$, если его график замкнут и если он отображает каждое непустое открытое множество на множество, замыкание которого содержит некоторое открытое множество.*

Петтис [5] доказал теоремы, обобщающие некоторые из результатов Банаха [7], Фрейденталя [2] и Лоренца [3]; в применении к линейным пространствам они содержат большую часть результатов этого параграфа.

Полем скаляров может быть произвольное поле с недискретным абсолютным значением (подробнее см. Бурбаки [2, стр. 34]). Дальнейшие обобщения были сделаны Дьёдонне и Шварцем [1, стр. 72] и другими (см. Дьёдонне [13, стр. 504]) для случая, когда область определения — пространство $\mathfrak{X}$ — представляет собой объединение возрастающей последовательности вложенных друг в друга F-пространств $\mathfrak{X}_1 \subseteq \mathfrak{X}_2 \subseteq \ldots$, причем топология в $\mathfrak{X}$ определяется естественным образом, а область значений — пространство $\mathfrak{Y}$ — в некотором смысле полно и обладает некоторыми свойствами, формулируемыми в терминах окрестностей. См. также Кёте [7, 10] и Птак [1].

Аналогичные теоремы можно доказать и для более общих топологических пространств, не обязательно имеющих групповую структуру. Так, например, Данфорд [5] обобщил понятие категории для того, чтобы получить условия, достаточные для того, чтобы взаимно однозначное и непрерывное отображение переводило непустое открытое множество в множество, содержащее внутреннюю точку. Мак-Шейн [4] установил условия, при которых множество второй категории в топологическом пространстве содержит некоторую внутреннюю точку. Его результаты были усилены Петтисом [3, 5].

Для систематического изучения внутренних (или открытых) отображений топологических пространств читатель отсылается к работам Дж. Уайберна [1, 2].

Шаудер [4, 5] (см. также Лере [1, 3] для других справок) доказал аналогичную теореме 2.1, теорему об инвариантности области для некоторого класса нелинейных отображений B-пространства, тесно связанную также с некоторыми теоремами о неподвижной точке (см. гл. V, параграф 10).

Теорема. *Пусть f — непрерывное отображение, определенное на замыкании некоторого ограниченного открытого подмножества B-пространства $\mathfrak{X}$ со значениями в бикомпактном подмножестве пространства $\mathfrak{X}$. Тогда если отображение $x \to x+f(x)$ взаимно однозначно, то образ открытого множества является открытым множеством.*

За доказательством читатель отсылается к Нагумо [2]. Л. Грейвс [5] показал, что непрерывное нелинейное отображение $F : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ между B-пространствами, при котором $F(x_0)=y_0$, отображает некоторую окрестность точки x_0 на множество, содержащее некоторую окрестность точки y_0, если только вблизи от точки x_0 F можно аппроксимировать непрерывным линейным оператором, отображающим $\mathfrak{X}$ на $\mathfrak{Y}$. Эта аппроксимация понимается в смысле обобщенного дифференцирования. Последний результат обобщает теоремы Гильдебрандта и Грейвса [1], где аппроксимирующие линейные операторы предполагаются обратимыми. В этом случае, однако, могут быть получены значительно более тонкие результаты.

Следующая теорема, будучи частным случаем теоремы Бартла и Грейвса [1], обобщает теорему 2.1.

Теорема. *Пусть $K(t)$ при $t \in [0, 1]$ является непрерывным линейным отображением B-пространства $\mathfrak{X}$ на B-пространство $\mathfrak{Y}$, и пусть отображение $t \to K(t)$ отрезка $[0, 1]$ в пространство $B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ непрерывно в равномерной*[1] *топологии операторов. Тогда существует такая константа $N > 0$, что для каждого непрерывного отображения ψ отрезка $[0, 1]$ в $\mathfrak{Y}$ существует такое непрерывное отображение $\varphi : [0, 1] \to \mathfrak{X}$, что*

$$K(t)\varphi(t) = \psi(t), \quad |\varphi(t)| \leqslant N|\psi(t)|, \quad t \in [0, 1].$$

Важным частным случаем теоремы 2.4 является тот случай, когда T — симметричное линейное преобразование гильбертова пространства на себя, т. е. такое, что $(Tx, y) = (x, Ty)$ при всех x, y. Легко видеть, что преобразование T замкнуто и, следовательно, непрерывно. В терминах билинейных форм от бесконечного числа переменных это было доказано Хеллингером и Теплицем [1, стр. 321—327], а в абстрактной постановке вопроса — Дж. Нейманом [7, стр. 107]. См. также книгу Стоуна [3, стр. 59].

Исторические сведения. Аксиомы, тесно связанные с аксиомами линейного нормированного пространства, были введены в 1916 г. Беннетом [1] при обобщении им метода Ньютона для вычисления корней. Ф. Рисс [4] обобщил многое из построенной Фредгольмом теории интегральных уравнений, используя аксиомы полного линейного нормированного пространства, а Ламсон [1] доказал для таких пространств теорему о неявной функции. В 1922 г. Банах [3], Хан [2] и Винер [1] опубликовали работы, использующие те же или аналогичные системы аксиом. Хотя Банах и не положил начало изучению таких пространств, его вклад был настолько значительным, что многие авторы называют полное линейное нормированное пространство *банаховым пространством.* В нашей книге мы повсюду придерживаемся терминологии, очень близкой к терминологии самого Банаха, и называем эти пространства B-пространствами.

Теорема Хана — Банаха. Обе теоремы 3.10 и 3.11 называются теоремами Хана — Банаха, но читатель должен был заметить, что первая из них применима к любому линейному пространству (топологизированному или нет), а вторая представляет собой ее прило-

---

[1]) См. ниже, гл. VI, определение 1.1 — *Прим. ред.*

жение к нормированным пространствам и приводит к существованию *непрерывных* линейных функционалов. В гл. V мы увидим, что теорема 3.10 приводит к существованию большого числа непрерывных линейных функционалов в каждом пространстве, в котором топология может быть определена семейством *выпуклых* окрестностей начала. Это изобилие непрерывных линейных функционалов будет весьма важным в дальнейшем. С другой стороны, теорема 3.10 имеет приложения и к обобщению понятий меры, интеграла и т. д.— см. ссылки, приводимые ниже.

Хотя некоторые исследования Хелли [1, 2] и Ф. Рисса [2, 6], относящиеся к вопросу о решении бесконечной системы линейных уравнений, очень тесно связаны с этой теоремой, но обобщение, даваемое теоремой 3.11, впервые было получено Ханом [3, стр. 217] для вещественных B-пространств. Банах [4, стр. 212, 226] (см. также Банах [1, стр. 24, 46[1])]) доказал обе теоремы 3.11 и 3.10 и систематически применял их к вещественным B-пространствам. Искусственный прием для случая комплексного пространства был предложен Боненблустом и Собчиком [1] и независимо от них Сухомлиновым [1], который рассматривал также и тот случай, когда скалярами служат кватернионы.

Нижеследующая теорема принадлежит Хану [3, стр. 216] и является одним из полезных следствий теоремы Хана — Банаха. Этот результат содержит соответствующие теоремы, доказанные Ф. Риссом [2, стр. 470], [6, стр. 61] для L_p и l_p, и теорему Хелли [1, стр. 271] для C [0, 1].

Теорема. *Пусть* $\{c_n\}$ — *счетное множество скаляров, а* $\{x_n\}$ — *счетное множество элементов B-пространства $\mathfrak{X}$. Тогда для существования такого* $x^* \in \mathfrak{X}^*$, *что* $x^*(x_n)=c_n$ *для всех n и при том* $|x^*| \leqslant M$, *необходимо и достаточно, чтобы для каждого конечного набора скаляров* $\{\alpha_i\}$ *выполнялось неравенство*

$$|\Sigma \alpha_i c_i| \leqslant M |\Sigma \alpha_i x_i|.$$

Аналогичная теорема, относящаяся к вопросу о решении $x \in \mathfrak{X}$ бесконечной системы уравнений

$$x_n^*(x) = c_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

справедлива при условии, что пространство $\mathfrak{X}$ рефлексивно, но не справедлива в общем случае. Следующая теорема, принадлежащая Хелли [2, стр. 73], справедлива и для общего случая. Элементарное ее доказательство приведено в статье Какутани [2].

Теорема. *Пусть* $\mathfrak{X}$ — *линейное нормированное пространство,* $\{c_1, \ldots, c_n\}$ — *произвольные скаляры,* $\{x_1^*, \ldots, x_n^*\}$ — *конечное множество элементов пространства* $\mathfrak{X}^*$, *и пусть* $M > 0$. *Тогда для того,*

[1]) Здесь и ниже указаны страницы украинского издания.—*Прим. ред.*

чтобы при любом $\varepsilon > 0$ *существовало такое* $x \in \mathfrak{X}$, *что*

$$x_i^*(x) = c_i, \quad i = 1, \ldots, n, \quad \text{и} \quad |x| < M + \varepsilon,$$

необходимо и достаточно, чтобы для каждого конечного множества скаляров $\{\alpha_i\}$ *выполнялось неравенство*

$$|\Sigma \alpha_i c_i| \leqslant M \, |\Sigma \alpha_i x_i^*|.$$

Приведем еще относящуюся сюда теорему Ямабэ [1].

Теорема. *Пусть* K — *выпуклое множество, всюду плотное в линейном нормированном пространстве* $\mathfrak{X}$, $x \in \mathfrak{X}$, $\varepsilon > 0$ *и* $x_1^*, \ldots, x_n^*$ — *произвольные элементы из* $\mathfrak{X}^*$. *Тогда существует такое* $y \in K$, *что*

$$|y - x| < \varepsilon, \quad x_i^*(y) = x_i^*(x), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Теоремы такого типа часто оказываются полезными в теории моментов или в теории аппроксимации.

Теорема Хана — Банаха может быть еще уточнена для получения доказательства существования некоторых инвариантных линейных функционалов. Так, например, один частный случай теоремы Эгнью и Морса [1] читается так:

Теорема. *Дополнительно к условиям теоремы* 3.10 *предположим, что* G *является абелевой (или разрешимой) группой линейных преобразований пространства* $\mathfrak{X}$, *отображающих* $\mathfrak{Y}$ *в себя и таких, что*

$$p(g(x)) = p(x), \quad g \in G, \quad x \in \mathfrak{X},$$

$$f(g(x)) = f(x), \quad g \in G, \quad x \in \mathfrak{Y}.$$

Тогда на пространстве $\mathfrak{X}$ *существует вещественный линейный функционал* F, *являющийся продолжением* f *и такой, что*

$$F(x) \leqslant p(x); \quad F(g(x)) = F(x), \quad g \in G, \quad x \in \mathfrak{X}.$$

Дальнейшие обобщения такого рода, а также применения этих результатов к обобщению понятия меры и т. д. читатель может найти в работах Эгнью [1], Эгнью и Морса [1] и Кли [5].

Пусть, как и в теореме 3.10, p является положительной функцией; тогда представляет интерес выяснить, существует ли такой определенный на $\mathfrak{X}$ вещественный линейный функционал f, что

$$f(x) < p(x), \quad x \neq 0.$$

Необходимое для этого условие состоит в том, что $p(x) + p(-x) \neq 0$ при $x \neq 0$. Аронштайн [5] показал, что если пространство $\mathfrak{X}$ сепарабельно относительно нормы, определяемой равенством

$$|x| = p(x) + p(-x),$$

то это условие и достаточно. Бонсол [1] показал, что условие сепарабельности не может быть опущено.

Инглтон [1] нашел условия, при которых теорема Хана — Банаха справедлива и для случая неархимедова поля скаляров (см. также работы Флейшера [1] и Оно [1]).

Теорема Хана — Банаха может быть использована для получения простого доказательства существования функции Грина для уравнения Лапласа и других задач с краевыми условиями. За подробностями мы отсылаем читателя к работам Гарабедяна [1], Гарабедяна и Шифмана [1], П. Лакса [1] и Миранды [2].

Рефлексивность. То обстоятельство, что естественное изоморфное вложение B-пространства $\mathfrak{X}$ в его второе сопряженное пространство является изометрией, было установлено Ханом [3, стр. 219], впервые сформулировавшим понятие сопряженного пространства. Он называл *регулярностью* то, что, следуя Лорху [2], мы назвали *рефлексивностью*. Примеры рефлексивных B-пространств имеются в гл. IV, а необходимое и достаточное условие рефлексивности содержится в теореме V.4.7. Из теоремы V.6.1 вытекает, что необходимым и достаточным условием рефлексивности пространства является слабая компактность его сфер. Этот установленный Эберлейном [1] факт является сильнейшим из известных критериев.

Теоремы 3.23 и 3.24 получены Петтисом [1]. Теорема 3.28 была доказана Шмидтом [1] для L_2 и Ф. Риссом [2, стр. 467] для L_p; в случае этих пространств ее иногда называют «теоремой выбора». Для абстрактного гильбертова пространства теорема 3.28 была доказана Дж. Нейманом [2, стр. 381], для общих рефлексивных B-пространств она была установлена Петтисом [1].

Необходимо подчеркнуть, что рефлексивность предполагает изометрический изоморфизм пространств $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}^{**}$ при естественном отображении $\varkappa$, определенном в 3.18. Джеймсом [4, 5] была доказана следующая поразительная теорема:

Теорема. *Существует сепарабельное B-пространство, изоморфное и изометричное со своим вторым сопряженным пространством и не являющееся, однако, рефлексивным.*

Фактор-пространства. Пусть $\mathfrak{X}$ — F-пространство, а $\mathfrak{M}$ — замкнутое подпространство в $\mathfrak{X}$. Рассмотрим фактор-пространство $\mathfrak{X}/\mathfrak{M}$, определенное в § I.11. Как указано в упражнении II.4.13, $\mathfrak{X}/\mathfrak{M}$ является F-пространством относительно метрики

$$|x+\mathfrak{M}| = \inf\{|x+m| \mid m \in \mathfrak{M}\}.$$

Это полезное свойство, установленное Банахом [6, стр. 47—49] и Хаусдорфом [3], будет играть важную роль при изучении B-алгебр.

Пополнение пространств. В определении F- и B-пространств входит требование полноты этих пространств в их метрической топологии. Иногда приходится рассматривать и такие метрические линейные пространства, которые не являются полными. В таких случаях часто бывает полезной следующая теорема:

Теорема. *Пусть $\mathfrak{X}$ является линейным пространством, удовлетворяющим условиям* I *и* II *определения* 1.10. *Тогда $\mathfrak{X}$ изоморфно и изометрично всюду плотному линейному подпространству некоторого F-пространства $\widetilde{\mathfrak{X}}$. Пространство $\widetilde{\mathfrak{X}}$ определено однозначно с точностью до изометрического изоморфизма. Если $\mathfrak{X}$ — линейное нормированное пространство, то $\widetilde{\mathfrak{X}}$ является B-пространством.*

Доказательство этой теоремы следует методу Кантора пополнения множества рациональных чисел до множества вещественных чисел. Пусть $\mathfrak{Y}$ будет линейным пространством всех фундаментальных последовательностей из $\mathfrak{X}$, причем сложение векторов и скалярное умножение в $\mathfrak{Y}$ определяется покоординатно; если $y = \{x_n\} \in \mathfrak{Y}$, положим $|y| = \sup_n |x_n|$. Тогда $\mathfrak{Y}$ является F- (или B-)пространством. Обозначим через $\mathfrak{Z}$ замкнутое подпространство $\mathfrak{Y}$, состоящее из всех фундаментальных последовательностей пространства $\mathfrak{X}$, сходящихся к нулю, и положим $\widetilde{\mathfrak{X}} = \mathfrak{Y}/\mathfrak{Z}$. Читатель может доказать, что пространство $\widetilde{\mathfrak{X}}$ обладает нужными свойствами.

Прямые суммы и произведения. Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ — два линейных топологических пространства над одним и тем же полем скаляров. Обозначим через $\mathfrak{X} \oplus \mathfrak{Y}$ прямую сумму линейных пространств $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ в смысле § I.11 с топологией, являющейся произведением топологий пространств $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ в смысле § I.8. Тогда $\mathfrak{X} \oplus \mathfrak{Y}$ будет, как легко видеть, линейным топологическим пространством. Если $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ являются B- (или F-)пространствами, то и $\mathfrak{X} \oplus \mathfrak{Y}$ будет B- (или F-)пространством относительно каждой из норм:

$$|[x, y]| = \max(|x|, |y|),$$
$$|[x, y]| = \{|x|^p + |y|^p\}^{1/p}, \quad 1 \leqslant p < \infty,$$

причем эти нормы эквивалентны в произведении топологий. Это пространство $\mathfrak{X} \oplus \mathfrak{Y}$ называется *прямой суммой* пространств $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ (хотя некоторые авторы называют его *прямым произведением*). Обобщение этого понятия на любое конечное число слагаемых не представляет затруднений. По лемме I.8.4, прямая сумма счетного числа B- (или F-)пространств может быть превращена в F-пространство, но, вообще говоря, не в B-пространство. Наконец, можно определить прямую сумму любого множества линейных топологических пространств, однако она, как правило, не будет метрическим пространством, даже если все слагаемые являются таковыми. Нетрудно убедиться в том, что в случае B-пространств при соответственно выбранных нормах имеет место равенство

$$\mathfrak{X}^* \oplus \mathfrak{Y}^* = (\mathfrak{X} \oplus \mathfrak{Y})^*.$$

Нам будет удобнее пару $[x, y] \in \mathfrak{X} \oplus \mathfrak{Y}$ обозначать через $x \oplus y$. При этом имеют место следующие линейные соотношения:

$$x_1 \oplus y_1 + x_2 \oplus y_2 = (x_1 + x_2) \oplus (y_1 + y_2),$$
$$\alpha (x \oplus y) = \alpha x \oplus \alpha y.$$

Поставим теперь вопрос о возможности построить из $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ такое линейное пространство, для которого выполнялись бы следующие билинейные соотношения:

$$x \otimes (y_1 + y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_2,$$
$$(x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y,$$
$$\alpha\beta (x \otimes y) = \alpha x \otimes \beta y.$$

Этого можно достигнуть, взяв в качестве $\mathfrak{X} \otimes \mathfrak{Y}$ множество всех конечных формальных сумм $\sum x_i \otimes y_i$ при соответствующих идентификациях. Такое пространство называется *прямым произведением* (хотя для него используются также термины *тензорное*, *скрещенное* или *кронекерово произведение*). Если $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ являются B-пространствами, то желательно топологию пространства $\mathfrak{X} \otimes \mathfrak{Y}$ определить таким образом, чтобы оно стало B-пространством и чтобы имело место равенство

$$\mathfrak{X}^* \otimes \mathfrak{Y}^* = (\mathfrak{X} \otimes \mathfrak{Y})^*.$$

Однако в этом, как и в смежных вопросах, мы наталкиваемся на неожиданные трудности. Эти вопросы рассматривались различными авторами; читатель может найти теорию и дальнейшие библиографические указания у Шаттена [1] для случая B-пространств и у Гротендика [3] для общих линейных топологических пространств.

Инвариантные метрики на группах. Метрика ϱ (мультипликативной) группы G называется *лево-инвариантной*, если $\varrho(gx, gy) = \varrho(x, y)$ для всех $g \in G$. Она называется *инвариантной*, если $\varrho(gx, gy) = \varrho(x, y) = \varrho(xg, yg)$ для всех $g \in G$. Мы говорим, что топологическая группа G *метризуема*, если на ней существует такая метрика, топология которой эквивалентна исходной топологии.

Г. Биркгоф [5] и Какутани [12] доказали, что топологическая группа G в том и только в том случае допускает лево-инвариантную метрику, если семейство окрестностей единицы этой группы можно определить посредством счетного множества (т. е. если группа G удовлетворяет первой аксиоме счетности).

Кли [6] показал, что если G — абелева топологическая группа, допускающая эквивалентную метрику, относительно которой она полна, то G допускает и инвариантную метрику, причем она полна в каждой инвариантной метрике. Таким образом, каждое полное линейное метрическое пространство заданием эквивалентной метрики может быть превращено в F-пространство. Далее, линейное нормированное пространство является B-пространством, если оно полно в некоторой эквивалентной метрике. См. также работы Данцига [1, 2].

Нормы в линейных пространствах. Мы видели, что в линейном нормированном пространстве существует много непрерывных линейных функционалов. Ласаль [1] (см. также теорему V.2.8) показал, что ненулевой непрерывный линейный функционал существует в том и только в том случае, если пространство содержит открытую выпуклую окрестность нуля, не совпадающую со всем пространством. Колмогоровым [1] было доказано, что линейное топологическое пространство в том и только в том случае гомеоморфно линейному нормированному пространству, если существует *ограниченная* выпуклая окрестность нуля.

Вехаузен [1] показал, что если линейное топологическое пространство имеет *ограниченную* окрестность нуля (не обязательно выпуклую), то оно имеет эквивалентную инвариантную метрику, но что F-пространство может и не иметь ограниченной сферы.

Эйдельгайт и Мазур [1] доказали, что каждое F-пространство может быть снабжено инвариантной метрикой, эквивалентной исходной метрике и такой, что если $x \neq 0$, то функция $|\alpha x|$ является монотонно возрастающей функцией вещественного переменного α.

Изометрия и линейная размерность. Мазур и Улам [1] (см. также книгу Банаха [1, стр. 142] и статью Ароншайна [1]) получили следующий интересный результат:

Теорема. *Каждое изометрическое отображение F одного линейного нормированного пространства в другое, т. е. такое, что $|F(x)| = |x|$ и $F(0) = 0$, является линейным отображением.*

Доказательство этой теоремы для случая конечномерного F-пространства было дано Хажинским [1].

В теореме V.8.8 будет установлен вид наиболее общего изометрического изоморфизма между двумя пространствами непрерывных функций. Банах [1, стр. 147—153] исследовал такие отображения в других специальных B-пространствах.

К. Борсук (см. Банах [1, стр. 155—157]) доказал существование некоторого алгебраического изоморфизма, являющегося также гомеоморфизмом между каждым из пространств L_p, l_p, $p \geqslant 1$, c, c_0, $C[0, 1]$ и прямой суммой каждого из этих пространств с самим собой. Мазур [4] показал, что пространства L_{p_1} и L_{p_2} гомеоморфны при $1 \leqslant p_1 \leqslant p_2$.

Банах [1, гл. 12] сформулировал такое определение: линейная размерность пространства $\mathfrak{X}$ не больше, чем линейная размерность пространства $\mathfrak{Y}$, символически $\dim_l \mathfrak{X} \leqslant \dim_l \mathfrak{Y}$, если существует взаимно однозначное непрерывное линейное отображение пространства $\mathfrak{X}$ на некоторое замкнутое линейное многообразие в $\mathfrak{Y}$. Было получено несколько результатов относительно сравнения пространств L_p в смысле линейной размерности. Банах и Мазур [1] показали, что два сепарабельных B-пространства могут иметь одинаковые линейные размерности, не будучи топологически изоморфными [1]).

Дифференциальное исчисление в B-пространствах. В гл. III будет показано, что для функций, определенных на пространстве, с мерой, область значений которых лежит в некотором B-пространстве, может быть построена удовлетворительная теория интегрирования и что, кроме того, возможно построить теорию аналитических функций комплексного переменного со значениями в некотором комплексном B-пространстве. Здесь уместно отметить, что по крайней мере основания теории дифференцирования существуют даже для функций, у которых как область определения, так и область значений являются B-пространствами. В случае комплексного B-пространства эта теория является сравнительно полной и напоминает теорию аналитических функций. Читатель, интересующийся этими вопросами, может обратиться к Хилле [1, гл. IV]; вещественный случай является до некоторой степени более трудным. В обоих случаях центральным понятием является понятие *дифференциала Фреше* (*или полного дифференциала*).

Определение. Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ — B-пространства, D — открытое подмножество в $\mathfrak{X}$ и $F: D \to \mathfrak{Y}$. Говорят, что функция F в точке $a \in D$ имеет *дифференциал Фреше*, если существует такой линейный оператор $dF(a, \cdot) \in B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, что

$$\lim_{|h| \to 0} |h|^{-1} |F(a+h) - F(a) - dF(a, h)| = 0.$$

Л. Грейвс [3] доказал справедливость некоторого обобщения формулы Тейлора с остаточным членом. Кернер [1, 2] обобщил теорему Стокса и построил некоторый аналог дифференциальной геометрии; подробнее об этом см. работу Майкала [1]. Дифференциальные уравнения рассматривались Майкалом и Элкониным [1]. Теорема о неявной функции была доказана Гильдебрандтом и Грейвсом [1]; другие результаты в этом круге вопросов были получены в работах Майкала и Клиффорда [1], Кронина [1, 2] и Бартла [1].

Дополнительные ссылки читатель может найти у Хилле [1], а также в статьях Л. Грейвса [1], Хайерса [3], Майкала [1], Роте [4] и Тейлора [10].

Сходимость. Ряд $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ называется *безусловно сходящимся*, если при любой перестановке его членов он сходится к одному и тому

[1]) См. также недавнюю работу А. Н. Колмогорова [3*].—*Прим. ред.*

же элементу. Ясно, что достаточным условием безусловной сходимости ряда является его *абсолютная сходимость*, т. е. сходимость ряда $\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|$. Дворецкий и Роджерс [1] показали, что абсолютная сходимость в том и только в том случае эквивалентна безусловной сходимости, если B-пространство конечномерно. Теорема Орлича — Банаха гласит: *для безусловной сходимости ряда необходимо и достаточно, чтобы каждая подпоследовательность последовательности его частных сумм слабо сходилась к некоторому элементу этого пространства* (см. Банах [1, стр. 209], Данфорд [1, стр. 322]). В том случае, когда пространство является слабо полным, для безусловной сходимости ряда необходимо и достаточно, чтобы ряд $\sum_{i=1}^{\infty}|x^*x_i|$ сходился для любого $x^* \in \mathfrak{X}^*$.

По поводу сходимости см. работы Дворецкого и Роджерса [1], Гильдебрандта [1], Карлина [1], Мак-Фейла [1], Манроу [1], Никодима [1], Орлича [1, 2], Гельфанда [2].

Относительно специальных типов сходимости в абстрактных линейных пространствах см. работы Гагаева [1], Меддауса [1], Нахбина [1], Титова [1, 2], Вулиха [3].

Ортогональность. Существует по крайней мере четыре определения ортогональности элементов вещественного линейного нормированного пространства. Наиболее плодотворным является, возможно, определение, предложенное Биркгофом и значительно развитое Джеймсом [2]: элемент x в том и только в том случае считается *ортогональным* элементу y, если $|x| \leqslant |x+ky|$ для любого вещественного k. Это понятие связано с понятиями строгой выпуклости, слабой бикомпактности, дифференцируемости нормы и различными свойствами линейных функционалов. В терминах этого понятия Джеймсом [2, 3] были даны некоторые необходимые и достаточные условия, при которых может быть определено некоторое внутреннее произведение.

Относительно ортогональности см. работы Г. Биркгофа [1], Форте [1, 2], Джеймса [1—3], Робертса [1].

Базис. Последовательность $\{x_i\}$ элементов B-пространства $\mathfrak{X}$ называется его *базой* (или *базисом*), если для каждого $x \in \mathfrak{X}$ существует такое однозначно определенное множество (a_i) скаляров, что

$$\lim_{n\to\infty}\left|x-\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\right|=0.$$

Это понятие было введено Шаудером [1], оно удобно при обобщении результатов, относящихся к конечномерным пространствам, на бесконечномерные пространства, обладающие базисом. Различными авторами использовались также некоторые базисы иного типа.

Можно заметить, что это понятие тесно связано с проблемой (биортогонального) разложения произвольного элемента.

Ясно, что B-пространство, обладающее базисом в только что определенном смысле, должно быть сепарабельным. Обратный вопрос, будет ли каждое сепарабельное B-пространство обладать базисом, до сих пор не решен. В пространствах c_0 или l_p, $1 \leqslant p < \infty$, векторы $\{x_i\}$, где $x_i = [\delta_{i1}, \delta_{i2}, \ldots]$, образуют базис. В пространстве c базис образуют эти векторы вместе с вектором $x_0 = [1, 1, 1, \ldots]$. Шаудер [1] построил некоторый базис в пространстве C [0, 1] и доказал (Шаудер [3]), что ортогональная система Хаара служит базисом в пространстве L_p, $1 \leqslant p < \infty$. В пространстве $L_2(0, 1)$ можно так нормализовать тригонометрические многочлены, или многочлены Лежандра, что они будут образовывать базис; в $L_2(0, \infty)$ иногда используются функции Лагерра, а в $L_2(-\infty, \infty)$ — функции Эрмита.

Дополнительные сведения о базисах и биортогональных системах можно найти в работах следующих авторов: Альтман [1, 2], Бабенко [1], Бари [1], Банах [1, гл. 7], Боас Р. [2], Боненблуст [3], Винокуров [1], Виланский [1], Гельбаум [1, 2], Гельфанд [6], Гринблюм [1—4], Гуревич Л. [1], Дьёдонне [16], Диксмье [7], Джеймс [4], Качмаж и Штейнгауз [1], Карлин [1, 2], Костюченко и Скороход [1], Козлов [1, 2], Крейн, Мильман и Рутман [1], Лорх [1], Маркушевич [1—3], Никольский В. [1], Орлич [8], Фринк [1], Цзен [1], Шефке [1, 2], Шаудер [1, 3].

Дополнительная литература[1]).

Гротендик [6*], Дэй [12*], Колмогоров и Фомин [1*], Наймарк [13*], Птак [4*, 5*], Растон [7*], Робертсон А. и Робертсон У. [1*], Шилов [6*].

---

[1]) Добавлена редакцией.

ГЛАВА III

Интегрирование и функции множества

1. Конечно аддитивные функции множества

В противоположность терминам «вещественная функция», «комплексная функция» и т. д., где прилагательные *«вещественная»* и *«комплексная»* относятся к области значений функции, понятие *функции множества* обычно используется в математике для обозначения функции, областью определения которой служит некоторое семейство множеств. Излагаемая в этой главе теория интеграла

$$\nu(E) = \int\limits_E f(s)\,\mu(ds)$$

основана на использовании некоторой функции множества μ. Иногда встречаются случаи, в которых функция μ принимает и не скалярные значения, но обычно в тех местах нашей книги, где используется интегрирование, μ предполагается скалярной, а f — векторной (или скалярной) функциями. Таким образом, даже если процесс интегрирования определен по отношению к скалярной функции множества μ, получающийся при этом интеграл ν может быть векторной функцией. Целесообразно поэтому некоторые основные элементарные понятия сформулировать таким образом, чтобы, пользуясь, ими, можно было изучать не только скалярные, но и векторные функции множества. Исследование некоторых более глубоких свойств векторных функций приводится в § 10 гл. IV. Желательно, кроме того, рассматривать функции множества μ со значениями из расширенной области вещественных чисел (не являющейся векторным пространством), но так как сумма $\infty + (-\infty)$ не определена, а нам придется складывать различные значения функции μ, то мы условимся присоединять к области значений вещественной функции самое большее одно из несобственных значений: $+\infty$ или $-\infty$.

1. Определение. *Функцией множества* называется функция, определенная на некотором семействе множеств и принимающая значения либо из некоторого B-пространства, которое может быть множеством вещественных или комплексных чисел, либо из расширенной области вещественных чисел; в последнем случае ее об-

ласть значений содержит самое большее одно из несобственных значений: $+\infty$ и $-\infty$. *Положительная функция множества* — это функция множества, принимающая значения из (расширенной) области вещественных чисел и не имеющая отрицательных значений.

2. Определение. Функция множества μ, определенная на некотором семействе τ множеств, называется *аддитивной* или *конечно аддитивной*, если $\mu(\varnothing)=0$ и

$$\mu(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \mu(A_1) + \mu(A_2) + \ldots + \mu(A_n)$$

для каждой конечной системы $\{A_1, \ldots, A_n\}$ попарно непересекающихся множеств из τ, сумма которых принадлежит τ.

В качестве примера конечно аддитивной функции множества рассмотрим совокупность τ полуинтервалов $I=[a, b)$, $0 \leqslant a < b < 1$, и функцию $\mu(I)=b-a$.

Обычно мы будем предполагать, что область определения аддитивной функции множества замкнута относительно конечного числа операций сложения, пересечения и перехода к дополнению. Если A и B — подмножества множества S, то множество $A \cap B'$ удобно обозначать через $A-B$. Однако в случае, когда S — группа, мы будем избегать этого обозначения, чтобы не путать его с обозначением групповой операции. Через $A \Delta B$ мы будем обозначать *симметрическую разность* $(A-B) \cup (B-A)$.

3. Определение. Пусть S — некоторое множество. *Алгеброй подмножеств*[1] (или *булевской алгеброй подмножеств*) множества S называется непустое семейство подмножеств из S, содержащее пустое множество, дополнение (относительно S) каждого из своих элементов и сумму любого конечного числа своих элементов.

Ясно, что алгебра множеств содержит как разность, так и симметрическую разность любых двух своих элементов. Из правил двойственности вытекает, что

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = S - \{(S-A_1) \cup (S-A_2) \cup \ldots \cup (S-A_n)\}.$$

Таким образом, алгебра множеств содержит и пересечение любого конечного числа своих элементов.

В рассмотренном выше примере $S=[0, 1)$; обозначим через Σ совокупность всех конечных сумм интервалов $I=[a, b)$, принадлежащих τ. Тогда Σ будет алгеброй. Если $A \in \Sigma$, то $A=\bigcup_{i=1}^{n} I_i$, где I_i —

[1]) В оригинале автор употребляет термин *поле* [field] *подмножеств*, однако в современной советской литературе термин алгебра более употребителен. Умножением в алгебре множеств является пересечение, суммой — симметрическая разность. — *Прим. ред.*

попарно непересекающиеся интервалы. Положим $\mu(A)=\sum_{i=1}^{n}\mu(I_i)$; легко видеть, что $\mu(A)$ зависит только от множества A и не зависит от способа его разложения на интервалы, а также, что μ является конечно аддитивной функцией множества, определенной на алгебре Σ.

В качестве следующего шага нашего исследования мы покажем, как по произвольно заданной функции множества μ можно определить некоторую неотрицательную функцию множества $v(\mu)$, называемую *полной вариацией* μ. Из определения функции множества $v(\mu)$ вытекает, что она равна μ, если сама μ неотрицательна и аддитивна, аддитивна, если аддитивна μ, и ограничена, если ограничена μ. Полная вариация $v(\mu)$ важна тем, что она мажорирует μ в том смысле, что $v(\mu, E)\geqslant|\mu(E)|$ для $E\in\Sigma$. Читатель может проверить свое понимание определения 4, доказав, что $v(\mu)$ является наименьшей из неотрицательных аддитивных функций множества λ, удовлетворяющих неравенству $\lambda(E)\geqslant|\mu(E)|$ для всех $E\in\Sigma$.

4. Определение. Пусть μ будет функцией множества, определенной на алгебре Σ подмножеств множества S. Тогда для каждого $E\in\Sigma$ *полная вариация* μ *на* E, обозначаемая через $v(\mu, E)$, по определению, равна

$$v(\mu, E)=\sup\sum_{i=1}^{n}|\mu(E_i)|,$$

где верхняя грань берется по всем конечным системам $\{E_i\}$ попарно непересекающихся множеств из Σ таких, что $E_i\subseteq E$. Функция множества μ называется *функцией ограниченной вариации*, если $v(\mu, S)<\infty$, *и ограниченной вариации на множестве* $E\in\Sigma$, если $v(\mu, E)<\infty$.

5. Лемма. *Если вещественная или комплексная аддитивная функция множества, определенная на алгебре Σ подмножеств множества S, ограничена, то она является функцией ограниченной вариации, причем* $v(\mu, S)\leqslant 4\sup_{E\in\Sigma}|\mu(E)|$.

Доказательство. Рассмотрим определенную на Σ аддитивную функцию множества μ, и пусть $|\mu(E)|\leqslant M$ для каждого $E\in\Sigma$. Если μ — вещественная функция, то для каждой конечной системы $\{E_1, \ldots, E_n\}$ попарно непересекающихся множеств из Σ

$$\sum_{i=1}^{n}|\mu(E_i)|=\sum{}^{+}\mu(E_i)-\sum{}^{-}\mu(E_i)=\mu(\bigcup{}^{+}E_i)-\mu(\bigcup{}^{-}E_i),$$

где $\sum^+$ и $\bigcup^+$ ($\sum^-$ и $\bigcup^-$) относятся к тем i, для которых $\mu(E_i) \geqslant 0$ ($\mu(E_i) \leqslant 0$). Таким образом,

$$v(\mu, S) = \sup_{A, B \in \Sigma} \{\mu(A) - \mu(B)\} \leqslant 2M.$$

Если μ — комплексная функция, то ее вещественная и мнимая части являются вещественными аддитивными функциями множества на Σ, абсолютные значения которых не превосходят M. Поэтому в этом случае $v(\mu, S) \leqslant 4M$, ч. т. д.

Если имеется в виду вполне определенное μ, то мы будем писать $v(E)$, вместо $v(\mu, E)$. Если μ — неотрицательная аддитивная функция, то $v(\mu, E) = \mu(E)$. Часто бывает полезно представлять себе $v(E)$ как предел некоторой обобщенной последовательности. Для этого совокупность всех конечных систем $\{E_i\}$ попарно непересекающихся множеств из Σ, где $E_i \subseteq E$, упорядочим, считая, что $\{E_i\} \subseteq \{F_j\}$, если каждое E_i является суммой некоторых из множеств F_j. Тогда $\sum |\mu(E_i)| \leqslant \sum |\mu(F_j)|$ и $v(E) = \lim_{\{E_i\}} \sum |\mu(E_i)|$.

6. Лемма. *Полная вариация аддитивной функции множества, определенной на алгебре Σ подмножеств множества S, также аддитивна на Σ.*

Доказательство. Рассмотрим такую конечную систему $\{A_i\}$ непересекающихся множеств из Σ, что $A_i \subseteq E \bigcup F$, где E, $F \in \Sigma$ и $EF = \varnothing$. Положим $E_i = EA_i$, $F_i = FA_i$, тогда

$$\sum |\mu(A_i)| \leqslant \sum |\mu(E_i)| + \sum |\mu(F_i)| \leqslant v(\mu, E) + v(\mu, F)$$

и, следовательно,

$$\text{(I)} \qquad v(\mu, E \bigcup F) \leqslant v(\mu, E) + v(\mu, F).$$

Отсюда ясно, что если $v(\mu, E \bigcup F) = \infty$, то $v(\mu, E \bigcup F) = v(\mu, E) + v(\mu, F)$. Если же $v(\mu, E \bigcup F) < \infty$, то существуют такие конечные системы $\{E_j\}$, $\{F_j\}$ непересекающихся множеств из Σ, что $E_j \subseteq E$, $F_j \subseteq F$ и

$$v(\mu, E) \leqslant \sum |\mu(E_j)| + \varepsilon, \quad v(\mu, F) \leqslant \sum |\mu(F_j)| + \varepsilon,$$

$$v(\mu, E) + v(\mu, F) \leqslant \sum |\mu(E_j)| + \sum |\mu(F_j)| + 2\varepsilon \leqslant v(\mu, E \bigcup F) + 2\varepsilon.$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ $v(\mu, E) + v(\mu, F) \leqslant v(\mu, E \bigcup F)$, откуда ввиду неравенства (I) вытекает аддитивность относительно $E \in \Sigma$ функции $v(\mu, E)$, ч. т. д.

В нижеследующих определении и теореме мы покажем, как с помощью полной вариации ограниченной аддитивной вещественной функции множества μ можно разложить ее на «положительную» и «отрицательную» части. Это разложение аналогично представлению функции $f(\cdot)$ в виде разности двух неотрицательных функций: если $f^+(\cdot)=\frac{1}{2}(|f(\cdot)|+f(\cdot))$ и $f^-(\cdot)=\frac{1}{2}(|f(\cdot)|-f(\cdot))$, то f^+ и f^- — неотрицательны и $f=f^+-f^-$.

7. Определение. Пусть μ — ограниченная аддитивная вещественная функция множества, определенная на алгебре Σ подмножеств множества S. *Верхней*, или *положительной*, *вариацией* μ^+ и *нижней*, или *отрицательной*, *вариацией* μ^- функции μ называются функции множества, определяемые на Σ равенствами

$$\mu^+(E)=\frac{1}{2}\{v(\mu, E)+\mu(E)\}, \quad \mu^-(E)=\frac{1}{2}\{v(\mu, E)-\mu(E)\}.$$

8. Теорема (*о разложении в смысле Жордана*). *Если μ — ограниченная аддитивная вещественная функция множества, определенная на некоторой алгебре Σ, то для каждого $E\in\Sigma$*

$$\mu^+(E)=\sup_{F\subseteq E}\mu(F), \quad \mu^-(E)=-\inf_{F\subseteq E}\mu(F), \quad F\in\Sigma.$$

Функции множества μ^+ и μ^- аддитивны, неотрицательны и для каждого $E\in\Sigma$

$$\mu(E)=\mu^+(E)-\mu^-(E), \quad v(\mu, E)=\mu^+(E)+\mu^-(E).$$

Доказательство. Если $F\subseteq E$, $E, F\in\Sigma$, то

$$2\mu(F)=\mu(F)+\mu(E)-\mu(E-F)\leqslant$$
$$\leqslant\mu(E)+|\mu(F)|+|\mu(E-F)|\leqslant\mu(E)+v(\mu, E)=2\mu^+(E).$$

Таким образом,

$$\text{(I)} \qquad \sup_{F\subseteq E}\mu(F)\leqslant\mu^+(E).$$

С другой стороны, возьмем $\varepsilon>0$, и пусть $E_1, \dots, E_n$ — попарно непересекающиеся множества из Σ, такие, что $\bigcup E_i=E$ и $\Sigma|\mu(E_i)|>$ $>v(\mu, E)-\varepsilon$. Тогда в обозначениях леммы 5

$$2\mu^+(E)-\varepsilon=v(\mu, E)+\mu(E)-\varepsilon\leqslant\Sigma|\mu(E_i)|+\mu(E)=$$
$$=\mu(\textstyle\bigcup^+E_i)-\mu(\bigcup^-E_i)+\{\mu(\bigcup^+E_i)+\mu(\bigcup^-E_i)\}=$$
$$=2\mu(\textstyle\bigcup^+E_i)\leqslant 2\sup_{F\subseteq E}\mu(F).$$

Так как $\varepsilon>0$ произвольно, то $\mu^+(E)\leqslant\sup_{F\subseteq E}\mu(F)$, откуда ввиду неравенства (I) получаем, что $\mu^+(E)=\sup_{F\subseteq E}\mu(F)$. Так как $\mu^-=$ $=\{-\mu\}^+$, то $\mu^-(E)=-\inf_{F\subseteq E}\mu(F)$. Остальные утверждения теоремы легко вытекают из определений, ч. т. д.

8 Заказ 1324

При изучении аддитивной функции множества μ могут встретиться некоторые непустые множества, которыми во многих вопросах, постольку поскольку это касается μ, можно пренебречь. Это так называемые нуль-множества, вводимые ниже, в определении 11. Их, быть может, лучше ввести, рассмотрев сперва некоторое (не обязательно аддитивное) продолжение μ^* положительной функции множества μ, определяемое следующим образом:

9. Определение. Пусть μ — положительная аддитивная функция множества со значениями из расширенной области вещественных чисел, определенная на алгебре Σ подмножеств множества S. Для произвольного подмножества $E \in S$ число $\mu^*(E)$, по определению, полагается равным

$$\mu^*(E) = \inf_{F \supseteq E} \mu(F), \quad F \in \Sigma.$$

10. Лемма. *Пусть μ — положительная аддитивная функция множества, определенная на алгебре Σ подмножеств множества S и принимающая значения из расширенной области вещественных чисел. Тогда*

(a) $\mu^*(E) = \mu(E), \quad E \in \Sigma$;
(b) $\mu^*(A \cup B) \leqslant \mu^*(A) + \mu^*(B), \quad A, B \subseteq S$;
(c) $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B), \quad A \subseteq B \subseteq S$.

Доказательство. Если $E \in \Sigma$, $F \in \Sigma$ и $F \supseteq E$, то $\mu(F) = \mu(E) + \mu(F - E)$, так что $\mu(F) \geqslant \mu(E)$. Следовательно, $\mu^*(E) \geqslant \mu(E)$. С другой стороны, так как $E \supseteq E$, то $\mu(E) \geqslant \mu^*(E)$, откуда вытекает (a). Чтобы доказать (b), возьмем $\varepsilon > 0$, и пусть $A_1, B_1 \in \Sigma$, причем $A_1 \supseteq A$, $B_1 \supseteq B$ и

$$\mu(A_1) \leqslant \mu^*(A) + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \mu(B_1) \leqslant \mu^*(B) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда $A_1 \cup B_1 \supseteq A \cup B$ и

$$\mu^*(A \cup B) \leqslant \mu(A_1 \cup B_1) = \mu(A_1) + \mu(B_1 - A_1) \leqslant$$
$$\leqslant \mu(A_1) + \mu(B_1) \leqslant \mu^*(A) + \mu^*(B) + \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то отсюда вытекает (b). Утверждение (c) непосредственно следует из определения μ^*, ч. т. д.

Определения 4 и 9 дают возможность ввести одно из наиболее часто встречающихся понятий теории меры, а именно понятие нуль-множества. Оно содержится в следующем определении:

11. Определение. Пусть μ — аддитивная функция множества, определенная на некоторой алгебре подмножеств множества S. Подмножество N множества S называется *нуль-множеством* отно-

сительно функции μ[1]), если $v^*(\mu, N)=0$, где v^* — вводимое в определении 9 продолжение полной вариации v функции μ. Из леммы 10 непосредственно вытекает, что каждое подмножество нуль-множества и каждая конечная сумма нуль-множеств есть нуль-множество. Говорят, что некоторое утверждение относительно точек из S выполняется *почти всюду относительно* μ, или, если определенное μ подразумевается, просто *почти всюду*, или *для почти всех* $s \in S$, если оно справедливо для всех s, за исключением лишь точек, принадлежащих некоторому нуль-множеству. Таким образом, если $\lim\limits_n f_n(s)=f(s)$, $s \in S-N$, где N — нуль-множество, то мы говорим, что последовательность $\{f_n\}$ сходится к f *почти всюду* на S. Кроме выражения «почти всюду относительно μ», существуют другие выражения, связанные с понятием нуль-множества и используемые для функций f, определенных на S и таких, для которых особый интерес представляет их область значений. Именно, если существует нуль-множество N такое, что сужение функции f на множество $S—N$ ограничено, то f называется *существенно ограниченной* относительно μ или, просто, *существенно ограниченной*. Величина

$$\inf_N \sup_{s \in S-N} |f(s)|,$$

где N пробегает совокупность нуль-множеств из S, называется *существенной верхней гранью* для $|f(\cdot)|$ относительно μ и обозначается $\operatorname{vrai\,sup}\limits_{\mu} |f(s)|$. Если для некоторого нуль-множества N область значений сужения f на множество $S—N$ сепарабельна, то функция f называется почти сепарабельнозначной. Понятие бикомпактной с точностью до нуль-множества функции определяется аналогично.

В приводимом выше примере, где Σ порождается интервалами $I=[a, b)$, $0 \leqslant a < b < 1$, и $\mu(I)=b—a$, мы видим, что каждое конечное множество точек, а также каждая сходящаяся последовательность точек, принадлежащих $[0, 1]$, являются нуль-множествами.

2. Интегрирование

В этом параграфе и в следующем, посвященном лебеговым пространствам, мы введем определение и изучим основные свойства интеграла $\int f(s)\,\mu(ds)$. В этих параграфах f будет векторной функцией, определенной на некотором множестве S, а μ — конечно адди-

---

[1]) μ-null set; следует заметить, что множество, на котором μ равно нулю, не обязательно является нуль-множеством, так как μ не обязана быть неотрицательной. С другой стороны, μ только конечно аддитивна, следовательно, она не обязательно есть мера. В тех случаях, когда $\mu \geqslant 0$ и счетно-аддитивна, в переводе наряду с термином «нуль-множество» будет употребляться также термин «множество нулевой меры».

тивной функцией множества, определенной на некоторой алгебре подмножеств множества S; ограниченность μ при этом не будет предполагаться. Таким образом, основу теории составляют: фиксированное множество S, некоторая алгебра Σ его подмножеств и определенная на Σ конечно аддитивная функция μ, принимающая значения либо комплексные, либо из расширенной области вещественных чисел. Интегрируемые функции будут принимать значения из некоторого вещественного или комплексного B-пространства $\mathfrak{X}$.

Прежде всего мы введем топологию в множество всех функций, определенных на S и принимающих значения из B-пространства $\mathfrak{X}$. Эта топология будет определена посредством некоторой метрической функции, выбираемой таким образом, что две функции f и g окажутся близкими друг к другу в этой метрике, если $f(s)$ близка к $g(s)$ всюду, за исключением точек s, образующих такое множество $E \in \Sigma$, для которого $v(\mu, E)$ мала.

1. Определение. Для каждого $E \subseteq S$, каждого $\alpha \geqslant 0$ и каждой функции f, отображающей S в $\mathfrak{X}$, подмножество $E(|f|>\alpha)$ множества E определим равенством

$$E(|f|>\alpha)=\{s \mid s \in E, \quad |f(s)|>\alpha\},$$

а норму $|f|$ функции f положим равной

$$|f|=\inf_{\alpha>0} \operatorname{arctg}\{\alpha+v^*(\mu, S(|f|>\alpha))\}.$$

Необходимо отметить, что мы имеем в виду главное значение арктангенса, т. е. значение его, заключенное между 0 и $\pi/2$. Арктангенс в определении 1 берется для того, чтобы $|f|$ была $<\infty$, даже если $v^*(S)=\infty$. Конечно, можно заменить арктангенс любой непрерывной возрастающей функцией φ такой, что $\varphi(0)=0$, $\varphi(x_1+x_2) \leqslant \leqslant \varphi(x_1)+\varphi(x_2)$ при $x_1, x_2 \geqslant 0$ и $\varphi(\infty)=\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x)$ существует, например, $\varphi(x)=x(1+x)^{-1}$. Если же $v^*(S)<\infty$, можно просто положить

$$|f|=\inf_{\alpha>0}[\alpha+v^*(\mu, S(|f|>\alpha))].$$

Читатель не должен путать норму f с нормой $|f(s)|$ значения $f(s)$ функции f. Если нам приходится рассматривать функцию $g(s)= =|f(s)|$, то мы можем в случае необходимости обозначать ее символом $|f(\cdot)|$, но не символом $|f|$. Если читатель будет иметь в виду все эти условные обозначения, он сможет избежать слишком большой путаницы.

Заметим также, что относительно только что введенной нормы множество всех функций, отображающих S в $\mathfrak{X}$, не будет, вообще говоря, линейным топологическим пространством, так как ηf не обязательно стремится к нулю вместе с η (см. упражнение 9.7).

2. Лемма. *Пусть f и g — функции, отображающие S в $\mathfrak{X}$. Тогда* $|f+g| \leqslant |f|+|g|$.

Доказательство. Пусть α, $\beta > 0$. Тогда $S(|f+g| > \alpha+\beta) \subseteq S(|f| > \alpha) \cup S(|g| > \beta)$ и

$$|f+g| = \inf_{\alpha, \beta > 0} \operatorname{arctg}\{\alpha+\beta+v^*(\mu, S(|f+g| > \alpha+\beta))\} \leqslant$$
$$\leqslant \inf_{\alpha, \beta > 0} \operatorname{arctg}\{\alpha+v^*(\mu, S(|f| > \alpha))+\beta+v^*(\mu, S(|g| > \beta))\} \leqslant$$
$$\leqslant \inf_{\alpha > 0} \operatorname{arctg}\{\alpha+v^*(\mu, S(|f| > \alpha))\}+$$
$$+ \inf_{\beta>0} \operatorname{arctg}\{\beta+v^*(\mu, S(|g| > \beta))\} = |f|+|g|, \quad \text{ч. т. д.}$$

Если бы равенство $|f|=0$ влекло за собой $f=0$, то предыдущая лемма показывала бы, что функция $\varrho(f, g)=|f-g|$ является метрикой в пространстве всех функций, отображающих S в $\mathfrak{X}$ (см. I.6.1). Но, к сожалению, это бывает редко, и поэтому нам придется пойти несколько окольным путем.

3. Определение. Функция f, отображающая S в $\mathfrak{X}$, *эквивалентна нулю относительно* μ или, если определенное μ подразумевается, просто *эквивалентна нулю*, если для каждого $\alpha > 0$ множество $S(|f| > \alpha)$ является нуль-множеством.

Важно отметить, что функция, эквивалентная нулю относительно некоторой конечно аддитивной функции множества, не обязательно почти всюду обращается в нуль. Рассмотрим, например, такую функцию: пусть $S=[0, 1)$, Σ — алгебра конечных сумм интервалов $I=[a, b)$, $0 \leqslant a < b < 1$, и $\mu(I)=b-a$, как в § 1. Обозначим через R совокупность рациональных точек множества S. Для несократимой дроби $r=p/q \in R$ положим $f(p/q)=1/q$, а при $s \in S-R$ пусть $f(s)=0$. Так как для каждого $\alpha > 0$ множество $S(|f| > \alpha)$ конечно, то f эквивалентна нулю. Однако $\mu^*(R)=1$.

4. Лемма. *Функция f, отображающая S в $\mathfrak{X}$, в том и только в том случае эквивалентна нулю, если* $|f|=0$.

Доказательство. Если $|f|=0$, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\alpha > 0$, что $\alpha+v^*(\mu, S(|f| > \alpha)) < \varepsilon$. Следовательно, $\alpha < \varepsilon$, так что $S(|f| > \alpha) \supseteq S(|f| > \varepsilon)$ и $v^*(\mu, S(|f| > \varepsilon)) < \varepsilon$. Так как $S(|f| > \delta) \subseteq S(|f| > \varepsilon)$ при $\delta > \varepsilon$, то $v^*(\mu, S(|f| > \delta)) < \varepsilon$, если $\delta > \varepsilon$, откуда вытекает, что $v^*(\mu, S(|f| > \delta)) = 0$ для каждого $\delta > 0$. Обратно, ясно, что если $v^*(\mu, S(|f| > \alpha))=0$ для любого $\alpha > 0$, то $|f|=0$, ч. т. д.

5. Следствие. *Функции, эквивалентные нулю, образуют линейное подпространство в пространстве всех функций, отображаю-*

щих S в $\mathfrak{X}$. Если f эквивалентна нулю и почти всюду на S $|g(s)| \leqslant |f(s)|$, то и g эквивалентна нулю.

Из лемм 2 и 4 вытекает, что отношение между двумя функциями f и g, отображающими S в $\mathfrak{X}$, состоящее в том, что разность $f-g$ эквивалентна нулю, является рефлексивным, симметричным и транзитивным. Следовательно, линейное множество всех функций, отображающих S в $\mathfrak{X}$, можно разбить на взаимно непересекающиеся классы эквивалентных между собой функций. Для произвольной функции f, отображающей S в $\mathfrak{X}$, обозначим через $[f]$ класс функций, эквивалентных f (т. е. совокупность всех таких функций g, что $f-g$ эквивалентно нулю); через $F(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$ обозначим совокупность всех таких классов $[f]$. Если положить, по определению,

$$[f]+[g]=[f+g],$$
$$\alpha[f]=[\alpha f],$$
$$|[f]|=|f|,$$

то ввиду лемм 2 и 4 $F(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$ становится линейным векторным пространством и в то же время метрическим пространством с метрикой $\varrho([f], [g])=|[f]-[g]|$. Так как $|g|=|f|$, если $[g]=[f]$, то ясно, что норма $|[f]|$ определена однозначно. Точно так же, как и в общем случае фактор-пространства (см. § I.11), корректно и определение сложения и умножения на скаляр классов эквивалентности.

Принято говорить об элементах из $F(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$ как о функциях, а не как о классах эквивалентных функций. Обычно мы тоже будем придерживаться этой терминологии. Таким образом, мы будем писать f вместо $[f]$ и представлять себе $F(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$ как множество всех функций, отображающих S в $\mathfrak{X}$. Никакого недоразумения не возникнет, если мы будем помнить, что две функции, отличающиеся только на нулевую функцию, следует считать совпадающими. Таким образом, функция ψ может рассматриваться как функция, определенная на пространстве $F(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$, лишь в том случае, если $\psi(f)=\psi(g)$, когда разность $f-g$ эквивалентна нулю. Точно так же, если функция f, отображающая S в $\mathfrak{X}$, рассматривается как точка пространства $F(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$, то под этим необходимо подразумевается класс всех функций g, отображающих S в $\mathfrak{X}$ и эквивалентных f. Если векторное пространство $\mathfrak{X}$ зафиксировано в данном рассуждении, то иногда вместо $F(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$ мы будем писать $F(S, \Sigma, \mu)$. Аналогично, если ясно, о каких Σ и μ идет речь, то вместо $F(S, \Sigma, \mu)$ можно писать просто $F(S)$.

6. Определение. Сходимость в метрическом пространстве $F(S)$ называется *сходимостью по мере* μ или просто *сходимостью по мере*. Последовательность $\{f_n\}$ функций, отображающих S в $\mathfrak{X}$, в том и только в том случае *сходится по мере* μ *к функции* f, отобра-

жающей S в $\mathfrak{X}$, если

$$\lim_{n\to\infty} |f_n - f| = 0.$$

7. Лемма. *Последовательность $\{f_n\}$ функций, отображающих S в $\mathfrak{X}$, в том и только в том случае сходится по мере к функции f, отображающей S в $\mathfrak{X}$, если для каждого $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} v^*(\mu, S(|f_n - f| > \varepsilon)) = 0.$$

Доказательство. Доказательство этой леммы вытекает из следующих элементарных неравенств:

(a) Если $|f_n - f| > \delta > 0$ и $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\operatorname{tg}\delta$, то $v^*(\mu, S(|f_n - f| > \varepsilon)) > \frac{1}{2}\operatorname{tg}\delta$.

(b) Если $v^*(\mu, S(|f_n - f| > \varepsilon)) > \delta > 0$, то $|f_n - f| > \min[\operatorname{arctg}\delta, \operatorname{arctg}\varepsilon]$, ч. т. д.

8. Лемма. *Пусть f и g — функции, отображающие S в $\mathfrak{X}$.*

(a) *Отображение $f, g \to f+g$ является непрерывным отображением $F(S)$ в $F(S)$.*

(b) *При фиксированном скаляре α отображение $f \to \alpha f$ является непрерывным отображением $F(S)$ в себя.*

(c) *Если f_n сходится к f по мере, то и $|f_n(\cdot)|$ сходится к $|f(\cdot)|$ по мере.*

Доказательство. Если $f_n \to f$ и $g_n \to g$, то, по лемме 2, $|f_n + g_n - (f+g)| \leqslant |f_n - f| + |g_n - g| \to 0$, так что $f+g$ является непрерывной функцией от f и g. Далее, так как при $\alpha=0$ утверждение (b) тривиально, мы можем считать, что $\alpha \neq 0$; в этом случае

$$S(|\alpha f_n - \alpha f| > \varepsilon) = S\left(|f_n - f| > \frac{\varepsilon}{|\alpha|}\right),$$

откуда следует, что если $f_n \to f$, то $\alpha f_n \to \alpha f$. Последнее утверждение вытекает из неравенства

$$||f_n(s)| - |f(s)|| \leqslant |f_n(s) - f(s)|, \text{ ч. т. д.}$$

При построении теории интеграла важную роль будут играть различные линейные подпространства пространства $F(S)$. Сначала мы определим интеграл для функций весьма простого вида, описанных ниже. В дальнейшем область определения интеграла посредством использования его свойств непрерывности будет распространена на много более широкий класс функций.

9. Определение. Рассмотрим функцию f, отображающую S в $\mathfrak{X}$, принимающую лишь конечное число значений $x_1, \ldots, x_n$ и такую, что

$$f^{-1}(x_i) = \{s \mid s \in S,\ f(s) = x_i\} \in \Sigma,\ i = 1, \ldots, n.$$

Каждая функция g, отображающая S в $\mathfrak{X}$ и эквивалентная такой функции f, называется *μ-простой функцией.*

Поскольку мы условились говорить «функция» вместо «класс эквивалентных функций», мы часто будем обращаться с μ-простой функцией так, как если бы она просто была функцией, принимающей только конечное число значений и притом принимающей их на множествах из Σ. Если читатель вспомнит, что мы обычно не различаем между собой две эквивалентные функции, это не доставит ему затруднений.

Отметим, что в силу следствия 5 μ-простые функции образуют в $F(S)$линейное многообразие.

10. Определение. Функциями, *вполне μ-измеримыми на S* или, если μ подразумевается, просто *вполне измеримыми на S*, называются функции, принадлежащие замыканию $TM(S)$ множества μ-простых функций в пространстве $F(S)$. Если для каждого E из Σ, для которого $v(\mu, E) < \infty$, произведение $\chi_E f$ функции f на характеристическую функцию χ_E множества E вполне измеримо, то функция f называется *μ-измеримой*, или, если μ подразумевается, просто *измеримой. Множество A измеримо*, если функция χ_A измерима. Для множества измеримых функций используются обозначения $M(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$, $M(S, \Sigma, \mu)$, $M(S)$, а для множества вполне измеримых функций одновременно с $TM(S)$ также $TM(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$ и $TM(S, \Sigma, \mu)$.

11. Лемма. *Вполне измеримые функции, так же как и измеримые функции, образуют в $F(S)$ замкнутое линейное многообразие.*

Доказательство. Множество μ-простых функций образует в $F(S)$ линейное многообразие и, следовательно, по лемме 8, таковым является и его замыкание $TM(S)$. Далее, поскольку из сходимости по мере последовательности $\{f_n\}$ вытекает сходимость $\{f_n\chi_E\}$ для любого множества E из Σ, то $M(S)$ тоже является замкнутым линейным многообразием в $F(S)$, ч. т. д.

12. Лемма. *Пусть f и β — вполне μ-измеримые (μ-измеримые) функции, определенные на S, причем β — скалярная функция, и пусть g — непрерывная функция, определенная на поле скаляров. Тогда функции βf, $|f(\cdot)|$ и $g(\beta(\cdot))$ вполне μ-измеримы (μ-измеримы). Если одна из функций β или f эквивалентна нулю относительно μ, в то время как другая вполне μ-измерима, то и βf эквивалентно нулю.*

Кроме того, отображение $\beta \to g(\beta(\cdot))$ является непрерывным отображением $TM(S)$ в себя.

Доказательство. Ввиду тождеств

$$\chi_E(s)\beta(s)f(s) = (\chi_E(s)\beta(s))(\chi_E(s)f(s)), \quad \chi_E(s)|f(s)| = \\ = |\chi_E(s)f(s)|, \quad \chi_E(s)g(\beta(s)) = g(\chi_E(s)\beta(s)) - g(0)\chi_{E'}(s),$$

утверждения леммы относительно μ-измеримых функций будут вытекать из соответствующих утверждений относительно вполне μ-измеримых функций.

Теперь мы покажем, что если β и f — вполне μ-измеримые функции, то вполне μ-измеримо и их произведение. Пусть $\{f_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — последовательности принимающих лишь конечное число значений μ-простых функций, сходящиеся по мере к f и β соответственно, и пусть ε — произвольное положительное число. Для достаточно большого n функция β равномерно аппроксимируется с точностью до ε на множестве, дополнение которого имеет меру меньше ε, ограниченными функциями β_n из рассматриваемой последовательности, и аналогичное замечание можно сделать и относительно f. Таким образом, найдется такая константа M и такое множество A_0, что $|\beta(s)| \leqslant M$, $|f(s)| \leqslant M$, $s \in A_0$, причем $v^*(\mu, A_0') < \varepsilon$. Далее, существует такое натуральное число N_ε, что при $n \geqslant N_\varepsilon$

$$|f_n(s) - f(s)| < \frac{\varepsilon}{M}, \quad |\beta_n(s) - \beta(s)| < \frac{\varepsilon}{M},$$

при всех s из некоторого множества A_n, для которого $v^*(\mu, A_n') < \varepsilon$. Таким образом,

$$|f_n(s)\beta_n(s) - f(s)\beta(s)| \leqslant |f_n(s) - f(s)|\,|\beta_n(s)| + \\ + |\beta_n(s) - \beta(s)|\,|f(s)| \leqslant \frac{\varepsilon}{M}(\varepsilon + M) + \frac{\varepsilon}{M}M = 2\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{M},$$

если $s \in A_0 \cap A_n$, где $v^*(\mu, (A_0 \cap A_n)') < 2\varepsilon$. Отсюда вытекает, что последовательность $\{\beta_n f_n\}$ μ-простых функций сходится по мере μ к βf. То обстоятельство, что функция $|f(\cdot)|$ вполне μ-измерима, вытекает из леммы 8.

Пусть теперь g является непрерывной функцией, определенной на поле скаляров, а β — вполне μ-измеримая функция. Предположим, что $\{\beta_n\}$ — последовательность принимающих конечное число значений μ-простых функций, сходящаяся к β по мере μ. Для заданного $\varepsilon > 0$ по-прежнему найдется такая константа M и такое множество A_0, что $v^*(\mu, A_0') < \varepsilon$ и $|\beta(s)| \leqslant M$, если $s \in A_0$. Пусть δ — такое положительное число, что при $|\alpha - \gamma| < \delta$ и $|\alpha|$, $|\gamma| \leqslant M$ выполняется неравенство $|g(\alpha) - g(\gamma)| < \varepsilon$. Существует такая последовательность множеств $\{A_n\}$ и такое натуральное число N_ε, что при $n \geqslant N_\varepsilon$

$$|\beta_n(s) - \beta(s)| < \delta, \quad s \in A_n,$$

и $v^*(\mu, A_n') < \varepsilon$. Таким образом, при $n > N_\varepsilon$

$$|g(\beta_n(s)) - g(\beta(s))| < \varepsilon, \quad s \in A_n \cap A_0$$

и $v^*(\mu, (A_n \cap A_0)') < 2\varepsilon$. Следовательно, $g(\beta_n(\cdot)) \to g(\beta(\cdot))$ по мере μ и, значит, функция $g(\beta(\cdot))$ вполне измерима. Аналогичное рассуждение можно провести и для доказательства последнего утверждения леммы.

Пусть, наконец, функция f вполне измерима, а β — скалярная эквивалентная нулю функция. Для заданного $\varepsilon > 0$ мы можем, согласно нашему предыдущему замечанию, найти такую константу M и такое множество A_0, что $|f(s)| \leqslant M$, $s \in A_0$, $v^*(\mu, A_0') < \varepsilon$. Пусть $\delta > 0$, положим $B_0 = \{s \mid |\beta(s) f(s)| > \delta\}$. Множество $A_0 B_0$ является нуль-множеством, так как оно содержится в множестве таких s, для которых $|\beta(s)| > \delta/M$ и $v^*(A_0' B_0) < \varepsilon$. Следовательно, $v^*(B_0) < \varepsilon$ и βf эквивалентно нулю. Случай, когда β — вполне μ-измеримая, а f эквивалентна нулю, может быть рассмотрен в точности таким же способом, ч. т. д.

Из леммы 11 видно, что вполне измеримые функции образуют линейное пространство. Из леммы 12 получаем, кроме того, что *классы эквивалентных между собой скалярных вполне измеримых функций образуют алгебру.*

13. Определение. μ-простая функция h называется *μ-интегрируемой*, если она эквивалентна функции вида

$$f = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{E_i},$$

где $E_i = f^{-1}(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$, — попарно непересекающиеся множества из Σ, сумма которых равна S, и где $x_i = 0$, если $v(\mu, E_i) = \infty$. Выражения «μ-интегрируемая μ-простая функция» и «μ-интегрируемая простая функция» будут использоваться как эквивалентные. Если $E \in \Sigma$, то *интеграл по E* от μ-интегрируемой простой функции h определяется равенством

$$\int_E h(s)\,\mu(ds) = \int_E f(s)\,\mu(ds) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mu(EE_i).$$

В этом равенстве слагаемое $x_i \mu(EE_i)$ вида $0 \cdot \infty$, по определению, считается равным нулю.

Чтобы убедиться в том, что такой интеграл определен однозначно, рассмотрим другую функцию

$$g = \sum_{j=1}^{m} y_j \chi_{A_j},$$

где $A_j = g^{-1}(y_j)$, $j = 1, \ldots, m$, — попарно непересекающиеся множества из Σ, сумма которых равна S, причем $y_j = 0$, если $v(\mu, A_j) = \infty$, и предположим, что g также отличается от h на эквивалентную нулю функцию. Тогда функция

$$f - g = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_i - y_j) \chi_{E_i A_j}$$

эквивалентна нулю и, значит, $x_i - y_j = 0$, если $v(\mu, E_i A_j) \neq 0$. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \mu(EE_i) - \sum_{j=1}^{m} y_j \mu(EA_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_i - y_j) \mu(EE_i A_j) = 0,$$

откуда и следует, что наше определение интеграла $\int\limits_E h(s)\, \mu(ds)$ действительно не зависит от выбора функции f, эквивалентной h. Вместо $\int\limits_E h(s)\, \mu(ds)$ мы будем иногда писать $\int\limits_E h\, d\mu$. Проведенное нами рассуждение показывает также, что если h и k μ-интегрируемые простые функции, причем $|h - k| = 0$, то $\int\limits_E h\, d\mu = \int\limits_E k\, d\mu$ (см. лемму 4). Таким образом, интеграл можно считать определенным на некотором подмножестве метрического пространства $F(S)$.

14. Лемма. *μ-интегрируемые простые функции образуют линейное многообразие в $F(S)$, а интеграл $\int\limits_E f\, d\mu$ является линейным отображением этого многообразия в $\mathfrak{X}$. Если обе функции f и μ неотрицательны, то таким же будет и $\int\limits_E f\, d\mu$.*

Доказательство. Предположим, что f и g — μ-интегрируемые простые функции такого вида, как и выше. Тогда значения $z_1, \ldots, z_p$ функции $f + g$ находятся среди элементов $x_i + y_j$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$ и

$$f + g = \sum_{k=1}^{p} z_k \chi_{B_k},$$

где B_k есть сумма всех таких множеств $E_i A_j$, для которых $x_i + y_j = z_k$. Если $z_k \neq 0$ и если $x_i + y_j = z_k$, то x_i и y_j не могут равняться нулю одновременно, и, следовательно, $v(\mu, B_k) < \infty$. Таким образом, $f + g$ является μ-интегрируемой простой функцией. Если P_k есть множество всех пар (i, j), таких, что $x_i + y_j = z_k$, то E_iA_j пусто, если (i, j) не принадлежит ни одному из множеств P_k, $k=1, \ldots, p$ и, следовательно,

$$\int_E (f+g)\,d\mu = \sum_{k=1}^{p} z_k\mu(EB_k) = \sum_{k=1}^{p} z_k \sum_{(i, j)\in P_k} \mu(EE_iA_j) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i+y_j)\mu(EE_iA_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i\mu(EE_iA_j) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_j\mu(EE_iA_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i\mu(EE_i) + \sum_{j=1}^{m} y_j\mu(EA_j) = \int_E f\,d\mu + \int_E g\,d\mu.$$

Остальные утверждения леммы доказываются непосредственно, ч. т. д.

15. Лемма. *Если f — μ-интегрируемая простая функция, то*

$$\left|\int_E f(s)\,\mu(ds)\right| \leqslant \int_E |f(s)|\,v(\mu, ds).$$

Функция множества $\lambda(E) = \int_E f(s)\,\mu(ds)$ является аддитивной функцией множества на Σ, полная вариация которой равна

$$v(\lambda, E) = \int_E |f(s)|\,v(\mu, ds), \quad E\in\Sigma.$$

Кроме того,

$$\lim_{v(\mu, E)\to 0} \int_E f(s)\,\mu(ds) = 0.$$

Доказательство. Так как $|\lambda(E)| \leqslant v(\lambda, E)$ при $E\in\Sigma$, то из второго утверждения вытекает первое. Чтобы доказать это второе утверждение, предположим, что функция f принимает различные значения $x_1, \ldots, x_n$, и пусть $E_i = f^{-1}(x_i)$. Так как функция множества $x_i\mu(EE_i)$ аддитивна относительно $E\in\Sigma$, то аддитивен также и интеграл $\lambda(E) = \sum_{i=1}^{n} x_i\mu(EE_i)$. Пусть, далее, $E\in\Sigma$ и A_j, $j=1, \ldots, m$, — попарно непересекающиеся множества из Σ такие, что $A = \bigcup A_j \subseteq E$. Тогда так как полная вариация $v(\mu, E)$ аддитивна относительно E (см. 1.6), то

$$\sum_{j=1}^{m} |\lambda(A_j)| = \sum_{j=1}^{m}\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\mu(A_jE_i)\right| \leqslant \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} |x_i|\,v(\mu, A_jE_i) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} |x_i|\,v(\mu, AE_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i|\,v(\mu, EE_i) = \int_E |f(s)|\,v(\mu, ds),$$

откуда вытекает, что $v(\lambda, E) \leqslant \int_E |f(s)| \, v(\mu, ds)$. Пусть, далее, $E_j^m \in \Sigma$, $m=1, \ldots, m_j$, — такие подмножества из E_j, что

$$\sum_{m=1}^{m_j} |\mu(EE_j^m)| > v(\mu, EE_j) - \frac{\varepsilon}{M},$$

где ε — наперед заданное положительное число и $M = \sum_{j=1}^{n} |x_j|$. Тогда $|\lambda(EE_j^m)| = |x_j| \, |\mu(EE_j^m)|$ и

$$v(\lambda, E) \geqslant \sum_{j=1}^{n} \sum_{m=1}^{m_j} |\lambda(EE_j^m)| = \sum_{j=1}^{n} |x_j| \sum_{m=1}^{m_j} |\mu(EE_j^m)| >$$

$$> \sum_{j=1}^{n} |x_j| \, v(\mu, EE_j) - \varepsilon = \int_E |f(s)| \, v(\mu, ds) - \varepsilon,$$

откуда вытекает, что $v(\lambda, E) \geqslant \int_E |f(s)| \, v(\mu, ds)$; этим завершается вывод формулы для $v(\lambda, E)$. Последнее утверждение леммы вытекает из неравенства

$$\left| \int_E f(s) \, \mu(ds) \right| \leqslant \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| \, v(\mu, E), \qquad \text{ч. т. д.}$$

Следующая лемма дает нам ключ к доказательству «теоремы единственности», необходимой для обобщения понятия интеграла на класс функций, более широкий, чем класс простых интегрируемых функций.

16. Лемма. *Если $\{f_n^1\}$ и $\{f_n^2\}$ — две последовательности μ-интегрируемых простых функций, сходящиеся на S по мере μ к одному и тому же пределу и если*

$$\lim_{m, n} \int_S |f_n^i(s) - f_m^i(s)| \, v(\mu, ds) = 0, \quad i = 1, 2,$$

то пределы $\lim_n \int_E f_n^i(s) \, \mu(ds)$, $i = 1, 2$, существуют равномерно относительно E из Σ и равны между собой.

Доказательство. На основании леммы 15

$$\left| \int_E f_n^i \, d\mu - \int_E f_m^i \, d\mu \right| \leqslant \int_S |f_n^i(s) - f_m^i(s)| \, v(\mu, ds) \to 0, \quad i = 1, 2.$$

Таким образом, рассматриваемые пределы существуют равномерно относительно $E \in \Sigma$, и остается только доказать, что они равны между собой. Для краткости воспользуемся следующими обозначениями:

$$v(E) = v(\mu, E), \quad p_n(s) = |f_n^1(s) - f_n^2(s)|, \quad P_n(E) = \int_E p_n\, dv.$$

Из неравенства

$$|p_n(s) - p_m(s)| \leqslant |f_n^1(s) - f_m^1(s)| + |f_n^2(s) - f_m^2(s)|$$

вытекает, что $\lim\limits_{n, m} \int\limits_S |p_n(s) - p_m(s)|\, v(ds) = 0$, и, следовательно, из проведенного выше рассуждения следует, что предел $P(E) = \lim\limits_n P_n(E)$ существует равномерно относительно $E \in \Sigma$. Мы покажем, что $P(E) = 0$ для каждого $E \in \Sigma$ и, следовательно, согласно лемме 15, что

(I) $\left| \int\limits_E f_n^1\, d\mu - f_n^2\, d\mu \right| \leqslant P_n(E) \to 0, \quad E \in \Sigma.$

Так как $\lim\limits_{v(E) \to 0} P_n(E) = 0$ для каждого $n = 1, 2, \ldots$ (лемма 15), то в силу леммы I.7.6 $\lim\limits_{v(E) \to 0} P(E) = 0$. Таким образом, для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$ и такое натуральное число n_0, что

(II) $P(E) < \varepsilon$, если $v(E) < \delta$, и

(III) $|P(E) - P_n(E)| < \varepsilon$ при $n \geqslant n_0$, $E \in \Sigma$.

Так как $p_{n_0}(s) = 0$, если s принадлежит дополнению A' некоторого множества $A \in \Sigma$, для которого $v(A) < \infty$, то $P_{n_0}(A') = 0$, и из (III) вытекает

(IV) $P(A') < \varepsilon$.

Далее, ввиду леммы 8, $p_n \to 0$ по мере на множестве S и, следовательно, существует такое натуральное число $n_1 \geqslant n_0$ и такое множество $B \in \Sigma$, что $v(B') < \delta$ и

(V) $p_{n_1}(s) < \dfrac{\varepsilon}{v(A)}, \quad s \in B.$

Из (III) и (V) вытекает

(VI) $P(AB) \leqslant \int\limits_{AB} p_{n_1}\, dv + \varepsilon \leqslant 2\varepsilon.$

Так как $v(AB') \leqslant v(B') < \delta$, то из (II), (IV) и (VI) следует, что

$$P(S) = P(AB) + P(AB') + P(A') < 4\varepsilon,$$

и ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ и неравенства $0 \leqslant P(E) \leqslant P(S)$ отсюда вытекает, что $P(E) = 0$ для каждого $E \in \Sigma$, т. е. что утверждение (I) справедливо. Этим и завершается доказательство леммы, ч. т. д.

17. Определение. Функция f, отображающая S в $\mathfrak{X}$, называется *μ-интегрируемой на S*, если существует последовательность $\{f_n\}$ μ-интегрируемых простых функций, сходящаяся на S к функции f по мере μ и удовлетворяющая, кроме того, условию

$$\lim_{n, m} \int_S |f_m(s) - f_n(s)| v(\mu, ds) = 0.$$

Про такую последовательность μ-интегрируемых простых функций мы будем говорить, что она *определяет* f. Для каждого $E \in \Sigma$ *интеграл по E*, $\int_E f\,d\mu$, от μ-интегрируемой функции f определяется с помощью соответствующей последовательности $\{f_n\}$ μ-интегрируемых простых функций следующим образом:

$$\int_E f(s)\,\mu(ds) = \lim_n \int_E f_n(s)\,\mu(ds), \quad E \in \Sigma.$$

В силу предыдущей леммы этот предел существует и не зависит от специального выбора последовательности $\{f_n\}$ μ-интегрируемых простых функций. Множество всех μ-интегрируемых функций f, отображающих S в $\mathfrak{X}$, будет обозначаться одним из символов: $L(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$, $L(S, \Sigma, \mu)$, $L(S, \mu)$, $L(S)$.

Остальные теоремы этого параграфа касаются некоторых основных свойств интеграла.

18. Лемма. *Для того чтобы функция f, определенная на множестве S, была μ-интегрируемой, необходимо и достаточно, чтобы она была $v(\mu)$-интегрируемой. Если f μ-интегрируема, то такой же будет и $|f(\cdot)|$. Если $\{f_n\}$ — последовательность μ-интегрируемых простых функций, определяющая f в соответствии с п.* 17, *то последовательность $\{|f_n(\cdot)|\}$ определяет $|f(\cdot)|$ и, кроме того,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_S |f_n(s) - f(s)| v(\mu, ds) = 0.$$

Доказательство. Если $\{f_n(\cdot)\}$ определяет f, то ясно, что $\{|f_n(\cdot)|\}$ определяет $|f(\cdot)|$ и $\{|f_n(\cdot) - f(\cdot)|\}$ определяет нуль. Так как сходимость по мере μ является в то же время сходимостью по мере $v(\mu)$, то справедливость леммы непосредственно вытекает из леммы 8 и определения 17, ч. т. д.

→ 19. Теорема. *Пусть μ — конечно аддитивная функция, определенная на алгебре Σ подмножеств множества S. Тогда*

(a) *Множество $L(S)$ μ-интегрируемых функций, определенных на S, является линейным пространством; для каждого $E \in \Sigma$ интеграл $\int_E f\,d\mu$ линеен на $L(S)$.*

(b) *Если χ_A — характеристическая функция множества $A \in \Sigma$ и функция f μ-интегрируема, то и $f\chi_A$ тоже μ-интегрируема и*

$$\int_E f(s)\chi_A(s)\mu(ds) = \int_{EA} f(s)\mu(ds), \quad E \in \Sigma.$$

(c) *Если T—ограниченный линейный оператор, отображающий $\mathfrak{X}$ в другое B-пространство, и функция f μ-интегрируема, то и $Tf(\cdot)$ μ-интегрируема, причем*

$$\int_E Tf(s)\mu(ds) = T\int_E f(s)\mu(ds), \quad E \in \Sigma.$$

Доказательство. Чтобы доказать утверждение (a), рассмотрим последовательности $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$ μ-интегрируемых простых функций, определяющие в соответствии с п. 17 элементы f и $g \in L(S)$. В силу леммы 8, $\alpha f_n + \beta g_n \to \alpha f + \beta g$ по мере на множестве S, и если $h_n = \alpha f_n + \beta g_n$, то

$$\int_S |h_n(s) - h_m(s)| v(\mu, ds) \leqslant |\alpha| \int_S |f_n(s) - f_m(s)| v(\mu, ds) + \\ + |\beta| \int_S |g_n(s) - g_m(s)| v(\mu, ds) \to 0,$$

откуда следует, что $L(S)$ является линейным пространством. По лемме 14,

$$\alpha\int_E f\,d\mu + \beta\int_E g\,d\mu = \lim_n\left(\alpha\int_E f_n\,d\mu + \beta\int_E g_n\,d\mu\right) = \lim_n\int_E h_n\,d\mu = \\ = \int_E(\alpha f + \beta g)\,d\mu,$$

чем и доказана линейность интеграла на $L(S)$.

Утверждение (b) вытекает из определений.

Утверждение (c) для μ-интегрируемых простых функций очевидно; чтобы доказать его в общем случае, рассмотрим определяющую g последовательность μ-простых функций f_n, принимающих конечное число значений. Тогда функции $Tf_n(\cdot)$ будут μ-интегрируемыми простыми функциями. Так как, кроме того, для каждого $\varepsilon > 0$

$$v^*(\mu, S(|Tf - Tf_n| > \varepsilon)) \leqslant v^*\left(\mu, S\left(|f - f_n| > \frac{\varepsilon}{|T|}\right)\right),$$

то $Tf_n(\cdot) \to Tf(\cdot)$ по мере μ. Из неравенства

$$\int_S |Tf_n(s) - Tf_m(s)| v(\mu, ds) \leqslant |T| \int_S |f_n(s) - f_m(s)| v(\mu, ds)$$

вытекает, что последовательность $\{Tf_n\}$ определяет Tf. Из этих замечаний и вытекает справедливость утверждения (с), ч. т. д.

Следующая теорема обобщает результаты леммы 15 на произвольные интегрируемые функции.

→ 20. Теорема. *Пусть g — μ-интегрируемая функция и для $E \in \Sigma$, $G(E) = \int_E g(s)\mu(ds)$. Тогда*

(a) *$G(E)$ аддитивна на Σ и имеет полную вариацию*

$$v(G, E) = \int_E |g(s)|\, v(\mu, ds), \quad E \in \Sigma;$$

в частности, если g и μ неотрицательны, то интеграл $G(E)$ неотрицателен;

(b) $\lim\limits_{v(\mu, E) \to 0} v(G, E) = 0;$

(c) *для каждого $\varepsilon > 0$ существуют взаимно дополнительные множества A и A' из Σ, такие, что $v(\mu, A) < \infty$, $v(G, A') < \varepsilon$;*

(d) $\int_S |g(s)|\, v(\mu, ds) = 0$ *в том и только в том случае, если g эквивалентна нулю относительно μ.*

Доказательство. Пусть $\{g_n\}$ — последовательность μ-интегрируемых простых функций, определяющая g в соответствии с п. 17. Так как, по лемме 15, функции множества $G_n(E) = \int_E g_n(s)\mu(ds)$ аддитивны, то и $G(E)$ аддитивна. Пусть множество $E \in \Sigma$ является суммой непересекающихся подмножеств $E_1, \ldots, E_k \in \Sigma$. По теореме 18, для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такое N_ε, что при $n > N_\varepsilon$

$$\left| \sum_{i=1}^{k} \left| \int_{E_i} g(s)\mu(ds) \right| - \sum_{i=1}^{k} \left| \int_{E_i} g_n(s)\mu(ds) \right| \right| \leqslant \sum_{i=1}^{k} \left| \int_{E_i} [g(s) - g_n(s)]\mu(ds) \right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_E |g(s) - g_n(s)|\, v(\mu, ds) < \varepsilon$$

независимо от выбора подмножеств $E_1, \ldots, E_k$. Зафиксируем временно $n > N_\varepsilon$ и выберем такие $A_1, \ldots, A_m$, что

$$v(G, E) - \sum_{i=1}^{m} \left| \int_{A_i} g(s)\mu(ds) \right| < \varepsilon,$$

и такие $B_1, \ldots, B_p$, что

$$v(G_n, E) - \sum_{i=1}^{p} \left| \int_{B_i} g_n(s)\mu(ds) \right| < \varepsilon.$$

Рассмотрим семейство $E_1, \ldots, E_k$ всевозможных пересечений множеств A_i и B_j; тогда

$$v(G, E) - \sum_{i=1}^{k} \left| \int_{E_i} g(s)\,\mu(ds) \right| < \varepsilon,$$

$$v(G_n, E) - \sum_{i=1}^{k} \left| \int_{E_i} g_n(s)\,\mu(ds) \right| < \varepsilon.$$

Отсюда $|v(G, E) - v(G_n, E)| < 3\varepsilon$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} v(G_n, E) = v(G, E), \quad E \in \Sigma.$$

Так как, по лемме 15 и теореме 18,

$$v(G_n, E) = \int_E |g_n(s)|\, v(\mu, ds) \to \int_E |g(s)|\, v(\mu, ds),$$

то

$$v(G, E) = \int_E |g(s)|\, v(\mu, ds), \quad E \in \Sigma.$$

Этим доказано утверждение (a).

Чтобы доказать (b), возьмем произвольное ε и выберем принимающую конечное число значений μ-простую функцию g_ε, такую, что

$$\int_S |g(s) - g_\varepsilon(s)|\, v(\mu, ds) < \varepsilon.$$

Тогда найдется такое множество $A \in \Sigma$, для которого $v(\mu, A) < \infty$, и такая константа M, что $|g_\varepsilon(s)| < M$ при всех $s \in S$ и $g_\varepsilon(s) = 0$ при $s \notin A$. Таким образом, если $v(\mu, E) < \varepsilon/M$, $E \in \Sigma$, то

$$v(G, E) = \int_E |g(s)|\, v(\mu, ds) \leqslant \int_E |g(s) - g_\varepsilon(s)|\, v(\mu, ds) +$$

$$+ \int_{AE} |g_\varepsilon(s)|\, v(\mu, ds) < \varepsilon + M v(\mu, AE) < 2\varepsilon,$$

чем и доказано (b). Так как

$$v(G, A') \leqslant \int_{A'} |g(s) - g_\varepsilon(s)|\, v(\mu, ds) < \varepsilon,$$

то мы доказали и утверждение (c).

Наконец, чтобы доказать (d), предположим, что $\int_S |g(s)|\, v(\mu, ds) = 0$ и что $\{g_n\}$ есть последовательность функций (каждая из которых на множествах из Σ принимает лишь конечное число значений), определяющая g в соответствии с п. 17. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \int_S |g_n(s)|\, v(\mu, ds) = 0.$$

Для $\delta > 0$ определим

$$E_n(\delta) = \{s \mid |g_n(s)| > \delta\}, \quad F_n(\delta) = \{s \mid |g(s) - g_n(s)| > \delta\}.$$

Тогда $E_n(\delta) \in \Sigma$ и

$$\int_S |g_n(s)|\, v(\mu, ds) \geqslant \int_{E_n(\delta)} |g_n(s)|\, v(\mu, ds) > \delta v(\mu, E_n(\delta)).$$

Следовательно, $\lim_{n\to\infty} v(\mu, E_n(\delta)) = 0$. Так как $g_n \to g$ по мере μ, то $\lim_{n\to\infty} v^*(\mu, F_n(\delta)) = 0$. Но

$$|g(s)| \leqslant |g(s) - g_n(s)| + |g_n(s)| \leqslant 2\delta, \quad s \notin E_n(\delta) \cup F_n(\delta).$$

Так как $\lim_{n\to\infty} v^*(\mu, E_n(\delta) \cup F_n(\delta)) = 0$ и δ произвольно, то g эквивалентно нулю, ч. т. д.

21. Лемма. *Пусть f — μ-измеримая функция, а g — μ-интегрируемая функция; предположим, что почти всюду $|f(s)| \leqslant |g(s)|$. Тогда f вполне μ-измерима.*

Доказательство. Так как g μ-интегрируема, то для каждого натурального m существует μ-интегрируемая простая функция g_m, принимающая на множествах из Σ конечное число значений и такая, что $|g(s) - g_m(s)| < 1/m$ за исключением точек из множества E_m, для которого $v(\mu, E_m) < 1/m$. Так как g_m обращается в нуль вне некоторого множества $F_m \in \Sigma$, для которого $v(\mu, F_m) < \infty$, то

$$|g(s)| \leqslant |g(s) - g_m(s)| + |g_m(s)| < 1/m,$$

если $s \notin A_m = E_m \cup F_m$, $v(\mu, A_m) < \infty$. Следовательно, если мы положим $f_m(s) = f(s)$ при $s \in A_m$ и $f_m(s) = 0$ при $s \notin A_m$, то последовательность $\{f_m\}$ будет сходиться по мере к f. Ввиду леммы 11, f вполне μ-измерима, ч. т. д.

22. Теорема. *Пусть μ конечно аддитивна на алгебре Σ подмножеств множества S. Тогда*

(a) *μ-измеримая функция f интегрируема в том и только в том случае, если интегрируема $|f(\cdot)|$.*

(b) *Если g — μ-интегрируемая функция, отображающая S в B-пространство $\mathfrak{Y}$, и f — μ-измеримая функция, отображающая S*

в В-пространство $\mathfrak{X}$, причем почти всюду на S $|f(s)| \leqslant |g(s)|$, то f μ-интегрируема.

Доказательство. Прямое утверждение (a) вытекает из теоремы 18. Так как обратное, очевидно, вытекает из (b), то достаточно доказать (b).

По лемме 21, из предположения, содержащегося в (b), вытекает, что f вполне μ-измерима. Пусть $\{g_n\}$ — последовательность μ-простых функций, сходящихся к f по мере μ. Прежде всего мы покажем, что можно определить такую последовательность $\{f_n\}$ μ-простых функций, которая сходилась бы к f по мере μ и для которой $|f_n(s)| \leqslant 2|f(s)|$ при всех $s \in S$. Существуют такие множества $A_n \in \Sigma$, $n = 1, 2, \ldots$, для которых $v(\mu, A_n) \to 0$, и такая последовательность констант $\varepsilon_n \to 0$, что

$$|g_n(s) - f(s)| < \varepsilon_n, \quad s \notin A_n.$$

Теперь мы определим функции f_n, полагая

$$f_n(s) = \begin{cases} g_n(s), & \text{если } s \notin A_n \text{ и } |g_n(s)| > 2\varepsilon_n, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $s \notin A_n$ и $|g_n(s)| > 2\varepsilon_n$, то $|f_n(s) - f(s)| < \varepsilon_n$, а если $s \notin A_n$ и $|g_n(s)| \leqslant 2\varepsilon_n$, то

$$|f(s)| \leqslant |f(s) - g_n(s)| + |g_n(s)| < 3\varepsilon_n.$$

Таким образом,

$$|f_n(s) - f(s)| < 3\varepsilon_n, \quad s \notin A_n.$$

Следовательно, f_n сходится к f по мере μ. Далее, если $s \in A_n$ или если $|g_n(s)| \leqslant 2\varepsilon_n$, то $f_n(s) = 0$ и, следовательно, $|f_n(s)| \leqslant 2|f(s)|$, если же $s \notin A_n$ и $|g_n(s)| > 2\varepsilon_n$, то

$$|f(s)| > |g_n(s)| - |g_n(s) - f(s)| > |g_n(s)| - \varepsilon_n > \frac{1}{2}|g_n(s)| = \frac{1}{2}|f_n(s)|.$$

Таким образом, для всех s из S имеет место неравенство $|f_n(s)| \leqslant \leqslant 2|f(s)|$.

Мы покажем сейчас что f_n μ-интегрируема. Пусть x — ненулевое значение функции f_n и E — множество всех таких s и S, для которых $f_n(s) = x$. Тогда в силу μ-интегрируемости функции g

$$|x|\, v(\mu, E) = \int_E |f_n(s)|\, v(\mu, ds) \leqslant 2 \int_E |g(s)|\, v(\mu, ds) < \infty,$$

откуда вытекает, что $v(\mu, E) < \infty$. Отсюда ясно, что f_n — μ-интегрируемая простая функция. Так как $|f_n(s)| \leqslant 2|g(s)|$, то

$$\int |f_n(s) - f_m(s)|\, v(\mu, ds) \leqslant 4 \int_E |g(s)|\, v(\mu, ds), \quad E \in \Sigma.$$

Пусть дано $\varepsilon > 0$. По теореме 20 (с), существует такое множество $F \in \Sigma$, что $v(\mu, F) < \infty$ и

$$\int\limits_{S-F} |f_n(s) - f_m(s)| v(\mu, ds) < \varepsilon, \quad n, m \geqslant 1.$$

По теореме 20 (b), существует такое $\delta > 0$, что если $E \in \Sigma$ и $v(\mu, E) < \delta$, то

$$\int\limits_{E} |f_n(s) - f_m(s)| v(\mu, ds) < \varepsilon, \quad n, m \geqslant 1.$$

Так как $f_n \to f$ по мере μ, то существует такое натуральное число N и такое множество $E_{n, m} \in \Sigma$, что $v(\mu, E_{n, m}) < \delta$ и что $|f_n(s) - f_m(s)| < \frac{\varepsilon}{v(\mu, F)}$ при $s \notin E_{n, m}$ и $n, m \geqslant N$. Следовательно, если $n, m \geqslant N$, то

$$\int\limits_{S} |f_n(s) - f_m(s)| v(\mu, ds) = \int\limits_{S-F} + \int\limits_{F-E_{n, m}} + \int\limits_{FE_{n, m}} \leqslant 3\varepsilon.$$

Таким образом, последовательность $\{f_n\}$ определяет f в смысле п. 17, и, значит, f интегрируема, ч. т. д.

Для некоторых целей полезно следующим образом обобщить определения измеримости и интегрируемости.

Предположим сперва, что f — функция, принимающая значения из расширенной области вещественных чисел. Положим $S^+ = f^{-1}(+\infty)$ и $S^- = f^{-1}(-\infty)$. Тогда f называется μ-измеримой, если

(a) существуют нуль-множества N^+ и N^- относительно μ такие, что $S^+ \Delta N^+$ и $S^- \Delta N^-$ принадлежат Σ, и

(b) функция g, определяемая равенством $g(s) = f(s)$, если $s \notin S^+ \cup S^-$, и $g(s) = 0$, если $s \in S^+ \cup S^-$, является μ-измеримой.

Предположим, далее, что мы рассматриваем функцию f (векторную или принимающую значения из расширенной области вещественных чисел), определенную только на дополнении некоторого нуль-множества $N \subseteq S$. Мы будем говорить, что функция f μ-измерима, если функция g, определяемая условиями $g(s) = f(s)$, если $s \notin N$, и $g(s) = 0$, если $s \in N$, μ-измерима. Рассуждение, аналогичное тому, которое предшествует определению 6, показывает, что при рассмотрении этого несколько более широкого класса функций мы не изменяем $F(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$, а также не нарушаем справедливости ни одной из теорем или лемм этого параграфа.

Предположим, наконец, что f — неотрицательная μ-измеримая функция, принимающая значения из расширенной области вещественных чисел. Если f не является μ-интегрируемой, то мы пишем $\int\limits_S f(s) v(\mu, ds) = +\infty$. Из теоремы 22 (b) вытекает, что если

$0 \leqslant f_1(s) \leqslant f_2(s)$ для почти всех s и если f_1 и f_2 — μ-измеримы, мы все же имеем неравенство

$$\int_S f_1(s)\, v(\mu, ds) \leqslant \int_S f_2(s)\, v(\mu, ds),$$

даже если один или оба из этих интегралов бесконечны.

3. Лебеговы пространства

Основой для построений этого параграфа является конечно аддитивная функция множества μ, принимающая значения либо из области комплексных чисел, либо из расширенной области вещественных чисел и определенная на некоторой алгебре Σ подмножеств множества S. Функции, интегрируемые относительно μ, будут принимать значения из вещественного или комплексного B-пространства $\mathfrak{X}$. Мы определим и изучим свойства различных линейных пространств μ-измеримых функций.

1. Определение. Пусть $1 \leqslant p < \infty$. Через $L_p^0(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$ (или, если $\mathfrak{X}$ подразумевается, просто через $L_p^0(S, \Sigma, \mu)$) мы будем обозначать множество всех μ-измеримых функций f, отображающих S в $\mathfrak{X}$, и таких, что функция $|f(\cdot)|^p$ μ-интегрируема. *Нормой* $|f|$ элемента $f \in L_p^0(S, \Sigma, \mu)$ назовем величину

$$|f| = \left[\int_S |f|(s)|^p v(\mu, ds)\right]^{\frac{1}{p}}.$$

В тех случаях, когда нужна бо́льшая ясность, норму элемента из $L_p^0(S, \Sigma, \mu)$ мы будем обозначать через $|f|_p$.

→ 2. Лемма (*Гёльдер*). *Пусть f — скалярная, а g — векторная функции, причем $f \in L_q^0(S, \Sigma, \mu)$, $g \in L_q^0(S, \Sigma, \mu)$, где $p > 1$, $q > 1$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда функция fg μ-интегрируема и*

$$\left|\int_S f(s)\, g(s)\, \mu(ds)\right| \leqslant |f|_p\, |g|_q.$$

Доказательство. Производная функции $\varphi(t) = \frac{t^p}{p} + \frac{t^{-q}}{q}$, положительна при $t > 1$ и отрицательна при $0 < t < 1$. Следовательно, ее минимальное значение при $t > 0$ — это $\varphi(1) = 1$. Положив $t = a^{\frac{1}{q}} b^{-\frac{1}{p}}$, мы получим неравенство $ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$, справедливое при $a, b > 0$; следовательно, неравенство $|ab| \leqslant \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}$ выполняется для всех скаляров a, b. Полагая $a=\frac{f(s)}{|f|_p}$, $b=\frac{g(s)}{|g|_q}$, мы получим неравенство

$$|f(s)g(s)|\leqslant\frac{1}{p}|f(s)|^p|f|_p^{1-p}|g|_q+\frac{1}{q}|g(s)|^q|g|_q^{1-q}|f|_p.$$

Из леммы 2.12, теорем 2.19 (a), 2.20 (a) и теоремы 2.22 (b) вытекает, что fg интегрируема и что

$$\left|\int_S f(s)g(s)\mu(ds)\right|\leqslant\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)|f|_p|g|_q,$$

ч. т. д.

→ 3. Лемма. *Пусть* $1\leqslant p<\infty$, f_1, $f_2\in L_p^0(S,\Sigma,\mu)$ *и* α — *скаляр. Тогда*

(a) *функция* αf_1 *принадлежит* $L_p^0(S,\Sigma,\mu)$ *и* $|\alpha f_1|_p=|\alpha||f_1|_p$;

(b) *сумма функций* f_1 *и* f_2 *принадлежит* $L_p^0(S,\Sigma,\mu)$, *причем* $|f_1+f_2|_p\leqslant|f_1|_p+|f_2|_p$;

(c) $|f_1-f_2|_p=0$ *в том и только в том случае, если* f_1-f_2 *эквивалентна нулю.*

Неравенство (b) известно под названием *неравенства Минковского.*

Доказательство. Утверждение (a) очевидно. Утверждение (b) очевидно при $p=1$; чтобы доказать его при $p>1$, будем рассуждать следующим образом. Функция $(1+x)^p/(1+x^p)$ стремится к единице, если $x\to 0$ или $x\to\infty$, следовательно, она ограничена некоторой константой c во всей области $0\leqslant x<\infty$. Полагая $x=a/b$, получим, что $(a+b)^p\leqslant c(a^p+b^p)$ при всех $0\leqslant a$, $b<\infty$. Так как отсюда вытекает, что

$$|f_1(s)+f_2(s)|^p\leqslant\{|f_1(s)|+|f_2(s)|\}^p\leqslant c\{|f_1(s)|^p+|f_2(s)|^p\},$$

то, по теореме 2.22 (b),

$$f_1+f_2\in L_p^0(S,\Sigma,\mu).$$

Далее, по лемме 2,

$$|f_1+f_2|_p^p=\int_S|f_1(s)+f_2(s)|^p v(\mu,ds)\leqslant\int_S\{|f_1(s)|+|f_2(s)|\}^p v(\mu,ds)=$$

$$=\int_S|f_1(s)|\{|f_1(s)|+|f_2(s)|\}^{p-1}v(\mu,ds)+$$

$$+\int_S|f_2(s)|\{|f_1(s)|+|f_2(s)|\}^{p-1}v(\mu,ds)\leqslant$$

$$\leqslant\{|f_1|_p+|f_2|_p\}\left\{\int_S\{|f_1(s)|+|f_2(s)|\}^{q(p-1)}v(\mu,ds)\right\}^{\frac{1}{q}},$$

причем $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Так как $q(p-1)=p$, то

$$\{|f_1+f_2|_p\}^p \leqslant \{|f_1|_p+|f_2|_p\}\{|f_1+f_2|_p\}^{\frac{p}{q}}.$$

Таким образом,

$$|f_1+f_2|_p=\{|f_1+f_2|_p\}^{p-p/q} \leqslant |f_1|_p+|f_2|_p,$$

чем и доказано утверждение (b).

Утверждение (c) вытекает из теоремы 2.20 (d), ч. т. д.

Ввиду леммы 3(c) естественно разбить $L_p^0(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$ на классы функций, эквивалентных в следующем смысле: f эквивалентна g в том и только в том случае, если $f-g$ эквивалентна нулю. Обозначим класс функций, эквивалентных функции $f \in L_p^0(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$, через $[f]$; из следствия 2.5 и леммы 3(c) вытекает, что классы эквивалентных между собой функций образуют линейное пространство, в котором $|[f]|=|f|_p$ является нормой. Мы отсылаем читателя к аналогичному рассуждению, приведенному после следствия 2.5 и относящемуся к пространству $F(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$.

4. Определение. Символом $L_p(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$ будем обозначать множество классов $[f]$ эквивалентных между собой функций $f \in L_p^0(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$.

Ввиду сделанного выше замечания справедлива следующая теорема:

5. Теорема. *Пространство $L_p(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$ является линейным нормированным пространством.*

Как и в случае пространства $F(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$, с элементами из $L_p(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$ обычно обращаются так, как если бы они были просто функциями, а не классами эквивалентных между собой функций. Таким образом, там, где это не может вызвать недоразумений, мы будем говорить просто о «функции из L_p». В дальнейшем элементы из L_p мы обычно будем обозначать просто f, а не $[f]$. Заметим, что неравенство Минковского и (в случае скалярных функций) неравенство Гёльдера можно рассматривать и в применении к пространству L_p. В случае неравенства Минковского это замечание очевидно. Чтобы убедиться в его справедливости и в случае неравенства Гёльдера, заметим, что из неравенства Гёльдера вытекает, что $|fg|_1 \leqslant |f|_p |g|_q$, если $f \in L_p^0$, $g \in L_q^0$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ и по крайней мере одна из функций f или g является скалярной. Таким образом, если одна из функций f или g эквивалентна нулю, то такой же будет и fg. Следовательно, если $f_1, f_2 \in L_p^0$, $g_1, g_2 \in L_p^0$ и f_1-f_2 и g_1-g_2 эквивалентны нулю, то и $f_1g_1-f_2g_2$ эквивалентна нулю.

Читателю легче будет понять значение несколько сложных условий (II) и (III) следующей теоремы, если он прочтет формулировку и доказательство теоремы 7 после формулировки теоремы 6, но прежде ее доказательства.

6. Теорема. *Пусть* $1 \leqslant p < \infty$, $\{f_n\}$ — *последовательность функций из* $L_p(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$ *и* f — *функция, отображающая* S *в* $\mathfrak{X}$. *Тогда, для того чтобы* f *принадлежала* L_p, *а* $|f_n - f|_p$ *сходилось к нулю, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие три условия*:

(I) f_n *сходится к* f *по мере*;

(II) $\lim\limits_{v(\mu, E)\to 0} \int\limits_E |f_n(s)|^p v(\mu, ds) = 0$ *равномерно относительно* n;

(III) *для каждого* $\varepsilon > 0$ *существует такое множество* $E_\varepsilon \in \Sigma$, *что* $v(\mu, E_\varepsilon) < \infty$, *и*

$$\int\limits_{S-E_\varepsilon} |f_n(s)|^p v(\mu, ds) < \varepsilon, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Доказательство. Предполагая, что условия (I), II) и (III) выполнены, положим $g_n = |f_n(\cdot)|^p$, $g = |f(\cdot)|^p$. Мы покажем сперва, что $\{g_n\}$ есть фундаментальная последовательность в $L_1(S)$. В силу условия (III) для заданного $\varepsilon > 0$ существует такое множество E_ε, что $v(\mu, E_\varepsilon) < \infty$ и

$$|g_n - g_m|_1 \leqslant 2\varepsilon + \int\limits_{E_\varepsilon} |g_n(s) - g_m(s)|\, v(\mu, ds), \; n, \; m \geqslant 1.$$

Таким образом, для того чтобы убедиться в том, что последовательность $\{g_n\}$ является фундаментальной в $L_1(S)$, достаточно доказать, что она является таковой в $L_1(E_\varepsilon)$. Следовательно, мы можем и будем предполагать, что $v(\mu, S) < \infty$. Ввиду условия (II) существует такое $\delta > 0$, что

$$\int\limits_E g_n(s)\, v(\mu, ds) < \varepsilon, \quad n \geqslant 1,$$

если только $v(\mu, ds) < \delta$. Согласно лемме 2.12, $g_n \to g$ по мере, т. е. существуют такие множества $E_{nm} \in \Sigma$, что $v(\mu, E_{nm}) < \delta$ при всех достаточно больших значениях n и m и $|g_n(s) - g_m(s)| < \varepsilon$ для каждого $s \in S - E_{nm}$. Следовательно, для достаточно больших значений n и m

$$|g_n - g_m|_1 \leqslant 2\varepsilon + \int\limits_{S-E_{nm}} |g_n(s) - g_m(s)|\, v(\mu, ds) \leqslant \varepsilon(2 + v(\mu, S)),$$

т. е. $\{g_n\}$ есть фундаментальная последовательность в $L_1(S)$. Для того чтобы убедиться в интегрируемости g, рассмотрим такие интегрируемые простые функции h_n, $n \geqslant 1$, что

$$\int_S |h_n(s) - g_n(s)|\, v(\mu, ds) < \frac{1}{n}$$

и $|h_n - g_n|_F < 1/n$, где норма берется в пространстве $F(S, \Sigma, \mu)$. Так как последовательность $\{g_n\}$ фундаментальна в $L_1(S)$ и $g_n \to g$ по мере, то и последовательность $\{h_n\}$ будет фундаментальной в $L_1(S)$ и тоже сходящейся к g по мере. По определению 2.17, g интегрируема, а значит f принадлежит L_p.

Для удобства условимся писать $f_\infty = f$. Ввиду теоремы 2.20 условия (II) и (III) выполняются равномерно при $1 \leqslant n \leqslant \infty$. Для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое множество F_n, что $|f_n(s) - f_\infty(s)| < \varepsilon$ при $s \notin F_n$, причем $v(\mu, F_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно,

$$|f_n - f|_p = \left\{\int_S |f_n(s) - f(s)|^p v(\mu, ds)\right\}^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\int_{S-(E_\delta \cup F_n)} |f_n(s)|^p v(\mu, ds)\right\}^{1/p} + \left\{\int_{S-(E_\delta \cup F_n)} |f_\infty(s)|^p v(\mu, ds)\right\}^{1/p} +$$

$$+ \left\{\int_{E_\delta - F_n} |f_n(s) - f_\infty(s)|^p v(\mu, ds)\right\}^{1/p} +$$

$$+ \left\{\int_{F_n} |f_n(s) - f_\infty(s)|^p v(\mu, ds)\right\}^{1/p} < 2\delta^{1/p} + \varepsilon [v(\mu, E_\delta)]^{1/p} +$$

$$+ \left\{\int_{F_n} \{|f_n(s)|^p v(\mu, ds)\}^{1/p} + \left\{\int_{F_n} |f_\infty(s)|^p v(\mu, ds)\right\}^{1/p}.$$

Пусть теперь $\gamma > 0$. Если мы выберем δ так, что $2\delta^{1/p} < \gamma$, а затем выберем ε так, что $\varepsilon [v(\mu, E_\delta)]^{1/p} < \gamma$ и $\left\{\int_F |f_n(s)|^p v(\mu, ds)\right\}^{1/p} < \gamma$, $1 \leqslant n \leqslant \infty$, как только $v(\mu, F) < \varepsilon$, то получим, что $|f_n - f|_p < 4\gamma$ при $n > n_0$, откуда следует, что $|f_n - f|_p \to 0$. Доказательство достаточности окончено.

Докажем теперь необходимость условия (I). Если $f \in L_p$ и $|f_n - f|_p \to 0$, то для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число n_0, что при $n \geqslant n_0$, $\int_S g_n(s)\, v(\mu, ds) < \varepsilon$, где $g_n(\cdot) = |f_n(\cdot) - f(\cdot)|^p$. Далее, каждое g_n является пределом по мере μ последовательности $\{h_n^k\}$ вещественных простых функций, каждая из которых на множествах из Σ принимает лишь конечное число значений, так что

$$\lim_{k\to\infty} \int_S h_n^k(s)\, v(\mu, ds) = \int_S g_n(s)\, v(\mu, ds)$$

(см. лемму 2.18). Так как мы можем заменить $h_n^k(\cdot)$ на $|h_n^k(\cdot)|$, то можно предположить, что $h_n^k(s) \geqslant 0$. Следовательно, $\int\limits_S h_n^k(s)v(\mu, ds) < 2\varepsilon$ при всех достаточно больших k, и, не ограничивая общности, мы можем предположить, что $\int\limits_S h_n^k(s)v(\mu, ds) < 2\varepsilon$ при всех k. Так как функции h_n^k простые, то множество

$$E_n^k = \{s \mid h_n^k(s) > \gamma\}$$

для каждого $\gamma > 0$ принадлежит Σ. Кроме того,

$$\gamma v(\mu, E_n^k) \leqslant \int\limits_S h_n^k v(\mu, ds) < 2\varepsilon.$$

Следовательно, $v(\mu, E_n^k) < \frac{2\varepsilon}{\gamma}$. Поскольку последовательность $\{h_n^k\}$ сходится по мере μ, к g_n, то для каждого достаточно большого k можно найти такое множество $F_n^k \in \Sigma$, что $v(\mu, F_n^k) < \frac{\varepsilon}{\gamma}$ и $|h_n^k(s) - g_n(s)| < \gamma$, если $s \notin F_n^k$. Таким образом, $|f_n(s) - f(s)| < (2\gamma)^{\frac{1}{p}}$, если $s \notin F_n^k \bigcup E_n^k$. Для заданных $\delta_1, \delta_2 > 0$ выберем столь малое γ, чтобы $(2\gamma)^{\frac{1}{p}} < \delta_1$, и столь малое ε, что $\frac{3\varepsilon}{\gamma} < \delta_2$. Тогда при $n \geqslant n_0$ $|f_n(s) - f(s)| < \delta_1$, для всех точек s, кроме принадлежащих такому множеству G_n, что $v(\mu, G_n) < \delta_2$. Таким образом, $f_n \to f$ по мере, и условие (I) доказано.

Теперь мы докажем необходимость условия (II). По теореме 2.20, для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta_1 > 0$, что из $v(\mu, E) < \delta_1$ вытекает неравенство $\left\{\int\limits_E |f(s)|^p v(\mu, ds)\right\}^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$. Пусть n_0 таково, что при $n \geqslant n_0$, $|f_n - f|_p < \varepsilon$ и пусть $\delta_2 < \delta_1$ — такое положительное число, что из $v(\mu, E) < \delta_2$ вытекает неравенство

$$\left\{\int\limits_E |f_n(s)|^p v(\mu, ds)\right\}^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \quad \text{при} \quad 1 \leqslant n \leqslant n_0.$$

Тогда

$$\left\{\int\limits_E |f_n(s)|^p v(\mu, ds)\right\}^{\frac{1}{p}} < 2\varepsilon \quad \text{при} \quad 1 \leqslant n \leqslant \infty,$$

и условие (II) доказано.

Чтобы завершить доказательство теоремы, остается доказать справедливость утверждения (III), что можно сделать точно таким же способом, ч. т. д.

7. Теорема. *Пусть* $1 \leqslant p < \infty$, $g \in L_p(S, \Sigma, \mu)$ *и* $\{f_\alpha\}$ — *обобщенная последовательность элементов из* $L_p(S, \Sigma, \mu)$ *такая, что для каждого* α *почти всюду* $|f_\alpha(s)| \leqslant |g(s)|$. *Тогда для сходимости* f_α *к* f *по мере* μ, *необходимо и достаточно, чтобы* f *принадлежало* L_p *и нормы* $|f_\alpha - f|_p$ *стремились к нулю.*

Доказательство. Рассмотрим прежде всего случай, когда обобщенная последовательность является обычной последовательностью $\{f_n\}$. Так как $|f_n(s)| \leqslant |g(s)|$ почти всюду, то условия (II) и (III) теоремы 6 выполняются автоматически. Следовательно, утверждения, что $f_n \to f$ по мере и $f_n \to f$ в L_p, по теореме 6, эквивалентны.

Теперь мы покажем, что справедливость теоремы для обобщенной последовательности вытекает из доказанной ее справедливости для обычной последовательности. Вспомним, что топологии пространств $F(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$ и $L_p(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$ являются метрическими. Пусть $f_\alpha \to f$ по мере, но, тем не менее, f_α не сходится к f в L_p. Тогда найдется такое $\varepsilon > 0$ и для каждого α такое $\beta_\alpha \geqslant \alpha$, что $|f_{\beta_\alpha} - f|_p > \varepsilon$. Обобщенная последовательность $\{f_\gamma\}$, $\gamma = \beta_\alpha$, очевидно, сходится к f по мере. Далее, из каждой сферы радиуса $1/n$ с центром f в F выберем по элементу f_{γ_n}. Так как $f_{\gamma_n} \to f$ по мере, то $f_{\gamma_n} \to f$ и в L_p, вопреки вышеприведенному неравенству. Доказательство обратного утверждения очевидно, ч. т. д.

8. Следствие. *Пусть* $1 \leqslant p < \infty$. *Множество* μ-*простых* μ-*интегрируемых функций всюду плотно в* $L_p(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$.

Доказательство. Пусть $f \in L_p = L_p(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$ и $\varepsilon > 0$. По теореме 2.20, можно найти такое $E \in \Sigma$, что $v(\mu, E) < \infty$ и что

$$\int\limits_{S-E} |f(s)|^p v(\mu, ds) < \varepsilon^p.$$

Таким образом, если χ_E — характеристическая функция множества E, то $\chi_E f$ является элементом L_p и $|f - \chi_E f|_p < \varepsilon$. Согласно определению 2.10, $\chi_E f$ является пределом по мере μ последовательности $\{f_n\}$ μ-простых функций. Используя рассуждение, проведенное в доказательстве теоремы 2.22, мы можем и будем предполагать, что $|f_n(s)| \leqslant 2|\chi_E(s)||f(s)|$, $s \in S$. Поскольку $f_n(s)$ обращается в нуль, если $s \notin E$, то функция f_n является μ-интегрируемой и μ-простой. По теореме 7, $|f_n - \chi_E f|_p < \varepsilon$ при достаточно больших n: Следовательно, $|f - f_n|_p < 2\varepsilon$ при достаточно больших n, и доказательство закончено, ч. т. д.

4. Счетно аддитивные функции множества

Основным понятием, рассматриваемым в настоящем параграфе, является счетно аддитивная функция множества, определенная на σ-алгебре подмножеств некоторого множества. Для этого случая результаты предшествующих параграфов могут быть существенно усилены.

1. Определение. Пусть μ — аддитивная функция множества, определенная на алгебре Σ подмножеств множества S, векторная, комплексная или со значениями из расширенной области вещественных чисел. Тогда μ называется *счетно аддитивной*, если

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

для любых попарно непересекающихся множеств $E_1, E_2, \ldots$ из Σ, сумма которых также принадлежит Σ.

2. Определение. *σ-алгеброй* называется алгебра Σ подмножеств множества S, обладающая тем свойством, что $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \Sigma$ для любых $E_n \in \Sigma, n = 1, 2, \ldots$. Иными словами, σ-алгеброй называется алгебра, замкнутая относительно операции образования счетных сумм.

3. Определение. *Мерой* называется счетно-аддитивная функция множества, комплексная или со значениями из расширенной области вещественных чисел[1]), определенная на некоторой σ-алгебре. Тройка (S, Σ, μ), состоящая из множества S, некоторой σ-алгебры Σ его подмножеств и меры μ, определенной на Σ, называется *пространством с мерой*. Иногда и само S называется пространством с мерой. Множества, принадлежащие Σ, называются *измеримыми*. (S, Σ, μ) называется *пространством с конечной мерой*, если μ не принимает значений $+\infty$ или $-\infty$, и пространством с *положительной* мерой, если μ не принимает отрицательных значений.

В этом параграфе предполагается, что (S, Σ, μ) является пространством с мерой.

Пусть $\{E_n\}$ — последовательность множеств. *Нижним пределом*, и *верхним пределом* этой последовательности соответственно называются множества

$$\varliminf_n \{E_n\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} E_m \quad \text{и} \quad \varlimsup_n E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} E_m.$$

---

[1]) Часто называют мерой только положительную меру в смысле, определенном в тексте, говоря о неположительной мере как об *обобщенной* мере. — *Прим. ред*

Если $\underline{\lim}_n E_n = \overline{\lim}_n E_n$, то последовательность $\{E_n\}$ называется *сходящейся* и общее значение ее нижнего и верхнего пределов обозначается через $\lim_n E_n$. *Неубывающей* называется такая последовательность $\{E_n\}$, для которой $E_n \subseteq E_{n+1}$, $n=1, 2, \ldots$. Ясно, что такая последовательность имеет пределом $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. *Невозрастающей* называется последовательность $\{E_n\}$, для которой $E_n \supseteq E_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$. Пределом такой последовательности будет $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$. Монотонной называется последовательность либо невозрастающая, либо неубывающая. Заметим, что пересечение, сумма, а также нижний и верхний пределы любой последовательности измеримых множеств тоже измеримы.

4. Лемма. *Множество значений меры, принимающей значения из расширенной области вещественных чисел, но не обращающейся в* $+\infty$, *имеет конечную верхнюю грань.*

Доказательство. Предположим, что функция μ не ограничена сверху. Множество $E_1 \in \Sigma$ назовем неограниченным, если $\sup_{E \in \Sigma} \mu(EE_1) = +\infty$, и ограниченным — в противном случае. Тогда либо

(a) каждое неограниченное множество содержит неограниченное подмножество сколь угодно большой меры, либо

(b) существует такое неограниченное множество $F \in \Sigma$ и такое натуральное число N, что F не содержит неограниченного подмножества, мера которого превосходит N.

Ясно, что в случае (a), применив индукцию, мы можем найти убывающую последовательность неограниченных множеств, для которых $\mu(E_n) \geqslant n$. Тогда

$$\mu\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\Big) + \sum_{i=n}^{\infty} \mu(E_i - E_{i+1}) = \mu(E_n).$$

Поскольку $\mu(E_n) \neq +\infty$, то ряд в левой части имеет конечную сумму и

$$\mu\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = +\infty,$$

что противоречит предположению.

В случае (b) обозначим через F_1 измеримое подмножество F, мера которого $\mu(F_1) > N$. Множество F_1 уже не будет неограниченным, а так как само F не ограничено, то неограниченным будет и $F - F_1$. Обозначим через A_1 измеримое подмножество множества $F - F_1$, мера которого $\mu(A_1) \geqslant 1$. Тогда так как F не содержит неограниченных подмножеств меры, большей чем N, то $F_2 = F_1 \cup A_1$ — ограниченное множество, а, значит, $F - F_2$ — неограниченное множество. Пользуясь индукцией, построим такую последовательность попарно непересекающихся измеримых множеств $A_1, A_2, \ldots$, что $\mu(A_k) \geqslant 1$ при всех k. Но тогда $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = +\infty$, что противоречит предположению, ч. т. д.

5. Следствие. *Множество значений векторной счетно аддитивной функции множества, определенной на некоторой σ-алгебре множеств, ограничено.*

Доказательство. Пусть μ будет мерой, определенной на σ-алгебре Σ и принимающей значения из B-пространства $\mathfrak{X}$. По лемме 4, $\operatorname{Re} x^*\mu(\Sigma)$ и $\operatorname{Im} x^*\mu(\Sigma)$ ограничены для каждого $x^* \in X^*$, так что ввиду теоремы II.3.20 $\mu(\Sigma)$ ограничена, ч. т. д.

6. Следствие. *Если (S, Σ, μ) — пространство с конечной мерой, то μ ограничена.*

7. Лемма. *Если (S, Σ, μ) — пространство с конечной мерой, то полная вариация $v(\mu)$ счетно аддитивна и ограничена. Если μ — вещественная функция, то ее верхняя и нижняя вариации μ^+ и μ^- тоже счетно аддитивны и ограничены.*

Доказательство. Ограниченность вытекает из следствия 6 и леммы 1.5; доказательства требует лишь счетная аддитивность. Так как $\mu^+ = \frac{1}{2}(v(\mu) + \mu)$ и $\mu^- = \frac{1}{2}(v(\mu) - \mu)$, то достаточно доказать счетную аддитивность $v(\mu)$. Пусть E_n — непересекающиеся множества из Σ и $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_n = E$. Тогда так как $v(\mu)$ неотрицательна и аддитивна, то

$$v(\mu, E) \geqslant v\left(\mu, \bigcup_{n=1}^{m} E_n\right) = \sum_{n=1}^{m} v(\mu, E_n),$$

$$v(\mu, E) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} v(\mu, E_n).$$

Пусть, с другой стороны, $\{F_i\}$ — конечная последовательность попарно непересекающихся измеримых множеств, содержащихся в E. Тогда

$$\sum_{i=1}^{k} |\mu(F_i)| = \sum_{i=1}^{k} \left|\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_i E_n\right)\right| = \sum_{i=1}^{k} \left|\sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_i E_n)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} |\mu(F_i E_n)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} v(\mu, E_n),$$

так что
$$v(\mu, E) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} v(\mu, E_n), \quad \text{ч. т. д.}$$

8. Лемма. *Если (S, Σ, μ) — пространство с конечной положительной мерой и $\{E_n\}$ — последовательность измеримых множеств, то*
$$\mu(\underline{\lim_n} E_n) \leqslant \underline{\lim_n} \mu(E_n) \leqslant \overline{\lim_n} \mu(E_n) \leqslant \mu(\overline{\lim_n} E_n).$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что если $\{E_n\}$ — неубывающая последовательность с пределом E, то
$$E = E_1 \bigcup (E_2 - E_1) \bigcup \ldots \text{ и } \mu(E) = \lim \mu(E_n).$$

Перейдя к дополнениям, получаем, что это соотношение остается справедливым также и для невозрастающих последовательностей. Таким образом, если μ неотрицательна и $\{E_n\}$ — произвольная последовательность из Σ, то
$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} E_m) = \lim_n \mu(\bigcap_{m=n}^{\infty} E_m) \leqslant \underline{\lim_n} \mu(E_n),$$
$$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} E_m) = \lim_n \mu(\bigcup_{m=n}^{\infty} E_m) \geqslant \overline{\lim_n} \mu(E_n), \text{ ч. т. д.}$$

9. Следствие. *Если (S, Σ, μ) — пространство с конечной мерой и $\{E_n\}$ — сходящаяся последовательность измеримых множеств, то $\lim_n \mu(E_n) = \mu(\lim_n E_n)$.*

Доказательство. Для положительной μ это вытекает из леммы 8. В общем случае можно получить доказательство, разложив μ на вещественную и мнимую части и представив затем каждую из них с помощью теоремы (1.8) о разложении в смысле Жордана в виде разности двух положительных мер. После этого ввиду леммы 7 все сводится к положительному случаю, ч. т. д.

10. Теорема (*о разложении в смысле Хана*). *Для каждой меры μ, принимающей значения из расширенной области вещественных чисел, найдется такое измеримое множество E_0, что μ неотрицательна на измеримых подмножествах из E_0 и неположительна на измеримых подмножествах из E_0'.*

Доказательство. Либо μ, либо $-\mu$ не принимают значения $+\infty$. Можно, следовательно, предположить, что $\mu(E) < \infty$ для всякого E из σ-алгебры Σ, на которой определена μ.

Пусть P состоит из всех таких множеств $E \in \Sigma$, для которых $\mu(AE) \geqslant 0$ при всех $A \in \Sigma$ и $E_n \in P$ — такая последовательность множеств, что

$$\mu(E_n) \to \sup_{E \in P} \mu(E).$$

Так как μ счетно аддитивна, то множество $E_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ принадлежит P и

$$\mu(E_0) = \sup_{E \in P} \mu(E).$$

Теперь мы методом от противного докажем, что $\mu(E_0'A) \leqslant 0$ для каждого $A \in \Sigma$. Предположим, что $A_0 \in \Sigma$, $A_0 \subseteq E_0'$ и $\mu(A_0) > 0$. Семейство множеств

$$Q = \{E \mid E \in \Sigma,\ E \subseteq A_0,\ \mu(E) \geqslant \mu(A_0)\}$$

превратим в частично упорядоченное, считая, что $E_1 \leqslant E_2$, если либо $E_1 \supseteq E_2$ и $\mu(E_1) < \mu(E_2)$, либо $E_1 = E_2$. Применим лемму Цорна (I.2.7), чтобы доказать, что Q содержит максимальный элемент. Пусть Q_0 — линейно упорядоченное подмножество Q. Если найдется такое $B_0 \in Q_0$, что $\mu(B_0) = \sup_{E \in Q_0} \mu(E)$, то ясно, что B_0 и будет мажорантой для Q_0. С другой стороны, если для всех $E \in Q_0$

$$\mu(E) < \delta = \sup_{E \in Q_0} \mu(E),$$

то существует такая последовательность множеств $\{B_n\} \subseteq Q_0$, что $\mu(B_n) < \mu(B_{n+1}) \to \delta$. Так как Q_0 линейно упорядочено, то $B_n \supseteq B_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$. Так как $\mu(B_n) < \mu(B_{n+1}) < \infty$, то все $\mu(B_n)$, $n \geqslant 2$, конечны. Если $C_n = B_n - B_{n+1}$, то $B_n = B_0 \cup \bigcup_{k=n}^{\infty} C_k$, где $B_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$, так что

$$\mu(B_n) = \mu(B_0) + \sum_{k=n}^{\infty} \mu(C_k), \quad n \geqslant 2.$$

Таким образом, $\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu(B_0)$, и множество $B_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ содержится в Q, причем $\delta = \mu(B_0)$. Пусть $E \in Q_0$; тогда $\mu(E) < \delta = \mu(B_0)$ и найдется такое n, что $\mu(E) < \mu(B_n)$. Но Q_0 линейно упорядочено, поэтому $E \supseteq B_n \supseteq B_0$. Таким образом, B_0 является мажорантой для Q_0. Так как каждое линейно упорядоченное подмножество из Q имеет мажоранту, то в Q существует максимальный элемент M. Он принадлежит P, потому что в противном случае существовало бы такое множество $A \in \Sigma$, $A \subseteq M$, что $\mu(A) < 0$, $M - A \subseteq A_0$, $\mu(M - A) = \mu(M) - \mu(A) > \mu(M) \geqslant \mu(A_0)$ и, следовательно, $M - A \geqslant M$.

Так как $M \subseteq E_0'$ и $M \in P$, то

$$\mu(M \cup E_0) = \mu(M) + \mu(E_0) > \sup_{E \in P} \mu(E);$$

это противоречие и доказывает, что $\mu(E_0'A)\leqslant 0$ для каждого $A\in\Sigma$, ч. т. д.

Теорема о разложении в смысле Хана приводит нас к обобщению понятия положительной и отрицательной вариаций для мер, принимающих значения из расширенной области вещественных чисел.

11. Следствие. *Пусть (S, Σ, μ) — пространство с мерой, причем μ принимает значения из расширенной области вещественных чисел. Тогда существуют такие однозначно определенные неотрицательные меры μ^+ и μ^-, одна из которых конечна, и такие, что*

$$\mu=\mu^+-\mu^-, \quad v(\mu)=\mu^++\mu^-.$$

Доказательство. Если E_0 — множество, существование которого доказывалось в предыдущей теореме, то функции μ^+ и μ^-, определяемые следующим образом:

$$\mu^+(A)=\mu(E_0A), \quad \mu^-(A)=-\mu(E_0'A), \quad A\in\Sigma,$$

обладают, очевидно, требуемыми свойствами, ч. т. д.

Ясно, что если μ — ограниченная функция, то функции множества μ^+ и μ^- совпадают с соответствующими компонентами разложения в смысле Жордана. Мы будем продолжать называть их, даже если μ принимает и бесконечное значение, как в следствии 11, *положительной* и *отрицательной вариациями* μ.

12. Определение. Пусть λ, μ — конечно аддитивные функции множества, определенные на алгебре Σ. Тогда λ называется *абсолютно непрерывной относительно* μ, если

$$\lim_{v(\mu, E)\to 0}\lambda(E)=0.$$

Функция λ называется *сингулярной относительно* μ, если существует такое множество $E_0\in\Sigma$, что

$$v(\mu, E_0)=0, \quad \lambda(E)=\lambda(EE_0), \quad E\in\Sigma.$$

Ясно, что функция множества, одновременно сингулярная и абсолютно непрерывная, тождественно равна нулю.

Если λ, μ — скалярные аддитивные функции множества, определенные на алгебре Σ, причем λ абсолютно непрерывна относительно μ, то из неравенства (III.1.5)

$$v(\lambda, E)\leqslant 4\sup_{A\subseteq E}|\lambda(A)|$$

вытекает, что *полная вариация λ также абсолютно непрерывна*. Таким образом, *положительная и отрицательная вариации вещественной абсолютно непрерывной относительно μ функции множества* *тоже абсолютно непрерывны.* Ясно также, что абсолютно непрерывные относительно μ функции множества, как и сингулярные функции множества, образуют линейное векторное пространство при естественном определении сложения и умножения на скаляр.

13. Лемма. *Пусть λ и μ — счетно аддитивные функции множества, комплексные или со значениями из расширенной области вещественных чисел, и определенные на σ-алгебре Σ, причем λ предполагается конечной. Тогда, для того чтобы λ была абсолютно непрерывной относительно μ, необходимо и достаточно, чтобы из равенства $v(\mu, E)=0$ вытекало равенство $\lambda(E)=0$.*

Доказательство. Необходимость этого условия очевидна. Чтобы доказать его достаточность, заметим сперва, что функция множества λ в том и только в том случае удовлетворяет этому условию, если положительная и отрицательная вариации ее вещественной и мнимой частей также ему удовлетворяют. Можно, следовательно, предполагать, что λ неотрицательна. Если λ не абсолютно непрерывна относительно μ, то существует такое $\varepsilon>0$ и такие множества $E_n \in \Sigma$, $n=1, 2, \ldots$, что $\lambda(E_n) \geqslant \varepsilon$, в то время как $v(\mu, E_n) < \frac{1}{2^n}$. Положим $E_0 = \overline{\lim_n} E_n$. Тогда для каждого $n=1, 2, \ldots$

$$v(\mu, E_0) \leqslant v(\mu, \bigcup_{m=n}^{\infty} E_m) \leqslant \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{2^m},$$

откуда следует, что $v(\mu, E_0)=0$ и, значит, $\lambda(E_0)=0$. С другой стороны, по лемме 8,

$$\lambda(E_0) \geqslant \overline{\lim}\, \lambda(E_n) \geqslant \varepsilon,$$

это противоречие и доказывает лемму, ч. т. д.

Из доказанной леммы вытекает, что если каждый член обобщенной последовательности $\{\lambda_\alpha\}$ конечных счетно аддитивных мер абсолютно непрерывен относительно μ и если $\lim_\alpha \lambda_\alpha(E) = \lambda(E)$, $E \in \Sigma$, где λ тоже конечная счетно аддитивная мера, то и λ абсолютно непрерывна.

Из определения 12 непосредственно вытекает, что если λ, λ_n, $n=1, 2, \ldots$, — конечные счетно аддитивные меры и $\lambda_n(E) \to \lambda(E)$, $E \in \Sigma$, причем λ_n, $n=1, 2, \ldots$ сингулярны относительно μ, то и λ тоже сингулярна.

14. Теорема (*о разложении в смысле Лебега*). *Пусть (S, Σ, μ) — пространство с мерой. Тогда каждая определенная на Σ конечная*

счетно аддитивная мера λ *однозначно представима в виде суммы* $\lambda=\alpha+\beta$, *где* α — *абсолютно непрерывна, а* β *сингулярна относительно* μ.

Доказательство. Единственность α и β очевидна. Ввиду того что к вещественной и мнимой частям комплексной функции λ можно применить разложение в смысле Жордана, мы можем и будем предполагать, что λ неотрицательна. Совокупность N всех множеств $E\in\Sigma$, для которых $v(\mu, E)=0$ частично упорядочим, считая, что $A\leqslant B$, если $A\subseteq B$ и $\lambda(A)\leqslant\lambda(B)$. Если N_0 — линейно упорядоченное подмножество из N и $\delta=\sup_{L\in N_0}\lambda(E)$, то либо в самом множестве N_0 существует мажоранта E_0 для N_0, либо в N_0 найдется такая последовательность $\{E_n\}$, для которой $\lambda(E_n)<\lambda(E_{n+1})\to\delta$. В последнем случае $E_n\subset E_{n+1}$, и $E=\bigcup E_n$, как легко видеть, будет мажорантой для N_0. Из леммы Цорна вытекает, что N содержит максимальный элемент E_0. Функция β, определенная на Σ равенством $\beta(E)=\lambda(EE_0)$, сингулярна относительно μ. Чтобы показать, что функция α, определенная на Σ равенством $\alpha(E)=\lambda(E)-\beta(E)=\lambda(EE_0')$, абсолютно непрерывна относительно μ, предположим, что $E\in N$ и $\alpha(E)=\lambda(EE_0')>0$. Тогда $E_0\subseteq E_0\bigcup EE_0'\in N$, что противоречит максимальности E_0 и доказывает, что α абсолютно непрерывна относительно μ, ч. т. д.

5. Продолжения функций множества

Заданную счетно аддитивную функцию множества, определенную на некоторой алгебре, можно продолжить до счетно аддитивной функции множества, определенной на некоторой σ-алгебре, содержащей данную алгебру. Эта теорема Хана о продолжении, а также аналогичные ей другие теоремы о продолжении, важные для дальнейших приложений, и будут доказываться в настоящем параграфе. В заключение будет показано, как эти теоремы о продолжении можно использовать для построения классических мер Бореля, Лебега и Стильтьеса.

1. Определение. Пусть λ — функция множества, векторная или принимающая значения из расширенной области вещественных чисел, определенная на некоторой алгебре Σ подмножеств множества S и такая, что $\lambda(\varnothing)=0$. Множество E называется λ-*множеством*, если $E\in\Sigma$ и если

$$\lambda(M)=\lambda(ME)+\lambda(ME'),\quad M\in\Sigma.$$

2. Лемма. *Пусть* λ — *произвольная функция множества, векторная или со значениями из расширенной области вещественных чисел,*

определенная на алгебре Σ подмножеств множества S и такая, что $\lambda(\varnothing)=0$. Тогда семейство λ-множеств является подалгеброй в Σ, причем такой, на которой λ аддитивна. Если, кроме того, E есть сумма конечного числа непересекающихся λ-множеств $\{E_n\}$, то для всех $M \in \Sigma$

$$\lambda(ME)=\sum_n \lambda(ME_n).$$

Доказательство. Ясно, что пустое множество, все пространство и дополнение любого λ-множества тоже являются λ-множествами. Покажем теперь, что пересечение двух λ-множеств A, B тоже будет λ-множеством. Пусть $M \in \Sigma$. Так как A является λ-множеством, то

$$\text{(I)} \qquad \lambda(MB)=\lambda(MBA)+\lambda(MBA'),$$

а так как B тоже есть λ-множество, то

$$\text{(II)} \qquad \lambda(M)=\lambda(MB)+\lambda(MB'),$$

$$\lambda(M(AB)')=\lambda(M(AB)'B)+\lambda(M(AB)'B'),$$

$$\text{(III)} \qquad \lambda(M(AB)')=\lambda(MBA')+\lambda(MB').$$

Из (I) и (II) вытекает, что

$$\lambda(M)=\lambda(MBA)+\lambda(MBA')+\lambda(MB'),$$

а из (III) — что

$$\lambda(M)=\lambda(MBA)+\lambda(M(AB)').$$

Следовательно, и AB является λ-множеством. Поскольку $\bigcup A_n = (\bigcap A_n')'$, мы доказали, что λ-множества образуют алгебру. Пусть теперь E_1 и E_2 — непересекающиеся λ-множества. Заменяя в определении 1 M на $M(E_1 \cup E_2)$, находим, что

$$\lambda(M(E_1 \cup E_2))=\lambda(ME_1)+\lambda(ME_2).$$

Последнее утверждение леммы следует отсюда по индукции, ч. т. д.

3. Определение. *Внешней мерой* на множестве S называется неотрицательная функция множества λ, принимающая значения из расширенной области вещественных чисел, определенная на σ-алгебре Σ подмножеств множества S и удовлетворяющая следующим условиям:

(I) $\lambda(\varnothing)=0$;

(II) $\lambda(A) \leqslant \lambda(B)$, если $A \subseteq B$, A, $B \in \Sigma$;

(III) $\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n)$, $\{E_n\} \subseteq \Sigma$.

4. Теорема (*Каратеодори*). *Если λ есть внешняя мера, то семейство λ-множеств является σ-алгеброй, на которой λ счетно аддитивна.*

Доказательство. Так как λ-множества образуют алгебру (лемма 2), то, для того чтобы убедиться в том, что она будет σ-алгеброй, достаточно показать, что сумма E каждой последовательности $\{E_n\}$ попарно непересекающихся λ-множеств сама является λ-множеством. Из леммы 2 вытекает, что если $M \in \Sigma$, то

$$\lambda(M) = \lambda(M \bigcup_{n=1}^{k} E_n) + \lambda(M(\bigcup_{n=1}^{k} E_n)') =$$
$$= \sum_{n=1}^{k} \lambda(ME_n) + \lambda(M(\bigcup_{n=1}^{k} E_n)') \geqslant \sum_{n=1}^{k} \lambda(ME_n) + \lambda(ME').$$

Следовательно,

$$\lambda(ME) + \lambda(ME') \geqslant \lambda(M) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(ME_n) + \lambda(ME') \geqslant$$
$$\geqslant \lambda(ME) + \lambda(ME'),$$

откуда вытекает, что E является λ-множеством; заменяя M на ME, получаем равенство

$$\lambda(ME) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(ME_n), \qquad \text{ч. т. д.}$$

5. Лемма. *Пусть μ — неотрицательная счетно аддитивная функция множества, определенная на алгебре Σ подмножеств множества S и принимающая значения из расширенной области вещественных чисел. Для каждого $A \subseteq S$ положим*

$$\hat{\mu}(A) = \inf \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n),$$

где нижняя грань берется по всем таким последовательностям $\{E_n\}$ множеств из Σ, сумма которых содержит A. Тогда $\hat{\mu}$ будет внешней мерой, а каждое множество из Σ — $\hat{\mu}$-множеством. Кроме того, если $E \in \Sigma$, то $\hat{\mu}(E) = \mu(E)$.

Доказательство. Свойства (I) и (II) определения 3 очевидны. Пусть E является суммой произвольной последовательности $\{E_n\}$ множеств из S. Возьмем $\varepsilon > 0$ и для каждого $n = 1, 2, \ldots$ выберем последовательность $\{E_{m,n}\}$, обладающую следующими свойствами:

$$E_{m,n} \in \Sigma, \quad E_n \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} E_{m,n}, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \mu(E_{m,n}) \leqslant \hat{\mu}(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Тогда $\bigcup\limits_{m, n=1}^{\infty} E_{m,n} \supseteq E$ и, следовательно,

$$\hat{\mu}(E) \leqslant \sum_{n, m=1}^{\infty} \mu(E_{m,n}) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\mu}(E_n) + \varepsilon.$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ этим доказано, что $\hat{\mu}$ обладает и свойством (III) определения 3. Таким образом, $\hat{\mu}$ является внешней мерой, определенной на σ-алгебре всех подмножеств множества S.

Пусть теперь $E \in \Sigma$. Так как $E \subseteq E$, то $\mu(E) \geqslant \hat{\mu}(E)$. Если $E_n \in \Sigma$, $n = 1, 2, \ldots$, и $E \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, то множества $A_1 = E_1$, $A_n = E_n(\bigcup\limits_{j<n} E_j)'$, $n > 1$, являются попарно непересекающимися множествами, принадлежащими Σ, причем $\bigcup A_n = \bigcup E_n$. Таким образом,

$$\mu(E) = \mu(E \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} EA_n) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(EA_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n),$$

откуда вытекает, что $\mu(E) \leqslant \hat{\mu}(E)$. Мы получили, что если $E \in \Sigma$, то $\mu(E) = \hat{\mu}(E)$.

Наконец, чтобы показать, что каждое множество E из Σ является $\hat{\mu}$-множеством, рассмотрим произвольное подмножество M из S. Так как $\hat{\mu}$ — внешняя мера, то $\hat{\mu}(ME) + \hat{\mu}(ME') \geqslant \hat{\mu}(M)$. Для того чтобы доказать, что E есть $\hat{\mu}$-множество, достаточно убедиться в том, что

$$\hat{\mu}(M) \geqslant \hat{\mu}(ME) + \hat{\mu}(ME').$$

Для наперед заданного $\varepsilon > 0$ найдутся такие множества $E_n \in \Sigma$, $n = 1, 2, \ldots$, что $M \subseteq \bigcup E_n$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \leqslant \hat{\mu}(M) + \varepsilon.$$

Далее, так как $ME \subseteq \bigcup EE_n$ и $ME' \subseteq \bigcup E'E_n$, то

$$\varepsilon + \hat{\mu}(M) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \{\mu(E_n E) + \mu(E_n E')\} \geqslant \hat{\mu}(ME) + \hat{\mu}(ME'), \quad \text{ч. т. д.}$$

6. Лемма. *Существуют однозначно определенная минимальная алгебра и однозначно определенная минимальная σ-алгебра, содержащие заданное семейство множеств.*

Доказательство. Существует, по меньшей мере, одна алгебра, содержащая заданное семейство τ, а именно алгебра всех подмножеств множества S. Пересечение всех алгебр, содержащих τ, является, как легко видеть, алгеброй и будет, следовательно, наименьшей из алгебр, содержащих τ. Точно таким же способом можно убедиться в существовании наименьшей σ-алгебры, содержащего τ, ч. т. д.

Минимальная алгебра, содержащая заданное семейство множеств, иногда называется *алгеброй, определяемой* или *порождаемой* этим семейством множеств. Точно так же минимальная σ-алгебра, содержащая заданное семейство множеств, называется *σ-алгеброй, определяемой* или *порождаемой* этим семейством.

7. Определение. Пусть Σ — некоторая алгебра подмножеств множества S, а μ — определенная на Σ функция, принимающая значения из расширенной области вещественных чисел. Тогда μ называется *σ-конечной на* Σ, если S есть сумма последовательности $\{E_n\}$ таких множеств из Σ, что $v(\mu, E_n) < \infty$, $n = 1, 2, \ldots$. Пространство (S, Σ, μ) называется *пространством с σ-конечной мерой*, если μ σ-конечна на Σ.

8. Теорема (*теорема Хана о продолжении меры*). *Каждая определенная на алгебре Σ счетно аддитивная неотрицательная функция множества μ, принимающая значения из расширенной области вещественных чисел, имеет счетно аддитивное неотрицательное продолжение на σ-алгебру, порожденную алгеброй Σ. Если μ σ-конечна на Σ, то это продолжение единственно.*

Доказательство. В силу теоремы 4 и леммы 5 внешняя мера $\hat{\mu}$ является неотрицательным счетно аддитивным продолжением μ на σ-алгебру Σ_0, порожденную алгеброй Σ. Пусть μ_1 — другое такое же продолжение. Если μ σ-конечна на Σ, то, для того чтобы доказать единственность этого продолжения, достаточно показать, что $\hat{\mu}(E) = \mu_1(E)$ для каждого множества E из Σ_0, содержащегося в таком множестве F из Σ, для которого $\mu(F) < \infty$. Пусть $E_n \in \Sigma$ и $E \subseteq \bigcup E_n$. Так как $\mu_1(E) \leqslant \sum_n \mu_1(E_n) = \sum_n \mu(E_n)$, то $\mu_1(E) \leqslant \hat{\mu}(E)$. Аналогично $\mu_1(F - E) \leqslant \hat{\mu}(F - E)$. Так как

$$\mu_1(E) + \mu_1(F - E) = \mu_1(F) = \hat{\mu}(F) = \hat{\mu}(E) + \hat{\mu}(F - E),$$

то ввиду предшествующих неравенств $\mu_1(E) = \hat{\mu}(E)$, ч. т. д.

9. Следствие. *Каждая ограниченная комплексная счетно аддитивная функция множества, определенная на алгебре Σ, имеет единственное счетно аддитивное продолжение на σ-алгебру, порожденную алгеброй Σ.*

Доказательство. Если μ — определенная на алгебре Σ ограниченная счетно аддитивная функция множества, то ввиду теоремы 1.8 о разложении в смысле Жордана и леммы 4.7 ее вещественная и мнимая части могут быть представлены в виде разностей двух определенных на Σ неотрицательных счетно аддитивных функций множества. Доказываемый результат вытекает теперь из теоремы 8, ч. т. д.

Приводимые ниже теоремы о продолжении мер используют интересные соотношения между топологией пространства и некоторыми мерами, которые можно на нем определить.

10. Определение. Наименьшая σ-алгебра $\mathfrak{B}$, содержащая все замкнутые подмножества данного топологического пространства S, называется *борелевской алгеброй* пространства S, а множества из $\mathfrak{B}$ — его *борелевскими множествами*.

11. Определение. Аддитивная функция множества μ, определенная на некоторой алгебре Σ подмножеств топологического пространства S, называется *регулярной*, если для каждого $E \in \Sigma$ и $\varepsilon > 0$ существуют такое множество $F \in \Sigma$, замыкание которого содержится в E, и такое множество $G \in \Sigma$, внутренность которого содержит E, что для каждого множества $C \in \Sigma$, содержащегося в $G - F$, $|\mu(C)| < \varepsilon$.

Для аддитивной функции множества μ, значения которой либо комплексны, либо принадлежат расширенной области вещественных чисел, лемма 1.5 утверждает, что

$$\sup |\mu(C)| \leqslant v(\mu, G - F) \leqslant 4 \sup |\mu(C)|.$$

Таким образом, для таких функций требование $\sup |\mu(C)| < \varepsilon$ в определении регулярности можно заменить эквивалентным ему условием: $v(\mu, G - F) < \varepsilon$.

12. Лемма. *Полная вариация регулярной аддитивной функции множества, определенной на некоторой алгебре, значения которой либо комплексны, либо принадлежат расширенной области вещественных чисел, регулярна. Положительная и отрицательная вариации ограниченной регулярной вещественной аддитивной функции множества также регулярны.*

Доказательство. Если μ — регулярная аддитивная функция множества, определенная на некоторой алгебре Σ подмножеств множества S, комплексная или со значениями из расширенной области вещественных чисел, то регулярность $v(\mu)$ непосредственно вытекает из определения 11. Пусть значения μ принадлежат расширенной области вещественных чисел, и пусть $E \in \Sigma$, $\varepsilon > 0$, а F и G — такие множества из Σ, что замыкание F :

содержится в E, E содержится во внутренности G, причем $v(\mu, G-F)<\varepsilon$. Тогда так как

$$v(\mu, G-F)=\mu^+(G-F)+\mu^-(G-F),$$

то и $\mu^+(G-F)$ и $\mu^-(G-F)$ оба меньше ε, а, следовательно, μ^+ и μ^- регулярны, ч. т. д.

13. Теорема (*А. Д. Александров*). *Ограниченная регулярная комплексная аддитивная функция множества μ, определенная на некоторой алгебре Σ подмножеств бикомпактного топологического пространства S, счетно аддитивна.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon>0$. Рассмотрим последовательность $\{E_n\}$ попарно непересекающихся множеств из Σ, сумма которых $E\in\Sigma$. Тогда найдется такое множество $F\in\Sigma$, что $\bar{F}\subseteq E$ и $v(\mu, E-F)<\varepsilon$. Кроме того, найдется такое множество $G_n\in\Sigma$, что E_n содержится во внутренности G_n^0 множества G_n, причем $v(\mu, G_n-E_n)<\frac{\varepsilon}{2^n}$. Так как $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n^0\supseteq\bar{F}$, то существует такое натуральное число m, что $\bigcup_{n=1}^{m} G_n^0\supseteq F$. Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} v(\mu, E_n)\geqslant\sum_{n=1}^{\infty} v(\mu, G_n)-\varepsilon\geqslant\sum_{n=1}^{m} v(\mu, G_n)-\varepsilon\geqslant$$
$$\geqslant v(\mu, F)-\varepsilon\geqslant v(\mu, E)-2\varepsilon.$$

Отсюда следует, что $\sum_{n=1}^{\infty} v(\mu, E_n)\geqslant v(\mu, E)$. Так как

$$v(\mu, E)\geqslant v(\mu, \bigcup_{i=1}^{n} E_i)=\sum_{i=1}^{n} v(\mu, E_i), \quad n=1, 2, \ldots,$$

то $v(\mu, E)\geqslant\sum_{i=1}^{\infty} v(\mu, E_i)$ и, следовательно, $v(\mu)$ счетно аддитивна.

Ввиду ограниченности μ и $v(\mu, E)<\infty$, по лемме 1.5. Следовательно, $\sum_{i=1}^{\infty} v(\mu, E_i)<\infty$ и

$$v(\mu, \bigcup_{i=n}^{\infty} E_i)=\sum_{i=n}^{\infty} v(\mu, E_i)\to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Таким образом,

$$\left|\mu(E)-\sum_{i=1}^{n-1}\mu(E_i)\right|=\left|\mu(\bigcup_{i=n}^{\infty} E_i)\right|\leqslant v(\mu\bigcup_{i=n}^{\infty} E_i)\to 0,$$

и, значит, $\mu(E)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)$, ч. т. д.

14. Теорема. *Пусть μ — ограниченная регулярная комплексная аддитивная функция множества, определенная на некоторой алгебре Σ подмножеств бикомпактного топологического пространства S. Тогда μ имеет единственное регулярное счетно аддитивное продолжение на σ-алгебру, порожденную алгеброй Σ.*

Доказательство. Так как μ регулярна в том и только в том случае, если регулярны положительная и отрицательная вариации ее действительной и мнимой частей, то мы можем и будем предполагать, что μ неотрицательна. По теореме 13, μ счетно аддитивна на Σ. Поэтому внешняя мера $\hat{\mu}$, определенная в лемме 5, является, согласно теореме 4 и лемме 5, счетно аддитивным продолжением μ на σ-алгебру Σ_1, порожденную алгеброй Σ. Таким образом, если $E \in \Sigma_1$ и $\varepsilon > 0$, то найдутся такие множества $E_n \in \Sigma$, что $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \supseteq E$ и

$$\hat{\mu}(\bigcup E_n - E) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Согласно определению 11, существуют такое открытое множество G_n и такое множество $A_n \in \Sigma$, что $E_n \subseteq G_n \subseteq A_n$ и

$$\mu(A_n - E_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Если $G = \bigcup G_n$ и $A = \bigcup A_n$, то множество G открыто, $A \in \Sigma_1$ и

$$E \subseteq G \subseteq A, \quad A - \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n - E_n),$$

$$\hat{\mu}(A - E) = \hat{\mu}(A - \bigcup E_n) + \hat{\mu}(\bigcup E_n - E)$$

$$< \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n - E_n) + \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Рассуждая так же относительно E', мы построим множество $B \in \Sigma_1$, замыкание которого содержится в E, и такое, что $\hat{\mu}(E - B) < \varepsilon$. Этим доказана регулярность $\hat{\mu}$ на Σ, ч. т. д.

Пользуясь теоремой 14, можно построить много интересных примеров регулярных счетно аддитивных мер. Одним из наиболее известных примеров такого рода является мера *Бореля — Лебега*, или *мера Бореля*. Чтобы построить меру Бореля — Лебега на бикомпактном интервале $S = [a, b]$ вещественных чисел, рассмотрим интервалы I одного из двух видов: $[a, d]$ или $(c, d]$, где $a < c < d \leqslant b$. Для таких интервалов положим $\mu([a, d]) = d - a$, $\mu((c, d]) = d - c$. Пусть Σ состоит из всех конечных сумм таких интервалов. Ясно, что Σ является алгеброй и что если множество $E \in \Sigma$ имеет вид

$$E = I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_n,$$

где I_j, $j=1, \ldots, n$ — попарно непересекающиеся интервалы определенного выше вида, то $\mu(I_1)+\ldots+\mu(I_n)$ не зависит от выбора семейства непересекающихся интервалов $I_1, \ldots, I_n$, сумма которых равна E. Таким образом, $\mu(E)$ можно определить равенством

$$\mu(E)=\mu(I_1)+\ \ldots\ +\mu(I_n).$$

Легко проверить, что условия теоремы 14 здесь выполняются, так что, по этой теореме, существует единственное регулярное счетно аддитивное продолжение меры μ на σ-алгебру борелевских подмножеств множества S. Это продолжение известно под названием *меры Бореля* на $[a, b]$.

Предложенную конструкцию можно обобщить на пространства большего числа измерений. Ее можно, кроме того, использовать, иначе определяя меру на основном поле Σ. Мы проиллюстрируем последнее замечание, описав здесь построение меры Радона на интервале.

15. Определение. *Интервалом* называется совокупность точек из расширенного множества вещественных чисел одного из следующих видов:

$$[a, b]=\{s \mid a \leqslant s \leqslant b\}, \quad [a, b)=\{s \mid a \leqslant s < b\},$$
$$(a, b]=\{s \mid a < s \leqslant b\} \quad (a, b)=\{s \mid a < s < b\}.$$

Число a называется *левым концом*, а b — *правым концом* каждого из этих интервалов. Интервал называется *конечным*, если оба его конца конечны, и *бесконечным* — в противном случае. Если f — комплексная функция, определенная на интервале I, то *полной вариацией* f на I называется

$$v(f, I)=\sup \sum_{i=1}^{n} |f(b_i)-f(a_i)|,$$

где верхняя грань берется по всем конечным множествам точек a_i, $b_i \in I$, таким, что $a_1 \leqslant b_1 \leqslant a_2 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant b_n$. Если $v(f, I) < \infty$, то f называется *функцией ограниченной вариации* на I.

16. Лемма. *Пусть f — функция ограниченной вариации на интервале I и c — произвольная точка из I, не совпадающая с его правым концом. Тогда*

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} v(f, (c, c+\varepsilon])=0.$$

Доказательство. Если b — правый конец интервала I, то функция $v(f, (c, c+\varepsilon])$ на интервале $0 < \varepsilon < b-c$ является неубывающей функцией ε. Мы можем поэтому провести доказательство от противного, предположив, что для некоторого положительного δ

$$v(f, (c, c+\varepsilon]) > \delta, \quad 0 < \varepsilon < b - c.$$

Таким образом, если $0 < \varepsilon_1 < b - c$, то на интервале $(c, c+\varepsilon_1]$ найдутся n_1 точек a_i, b_i таких, что $c < a_{n_1} \leqslant b_{n_1} \leqslant \ldots \leqslant a_1 \leqslant b_1 \leqslant \leqslant c + \varepsilon_1$ и что

$$\sum_{i=1}^{n_1} |f(b_i) - f(a_i)| > \delta.$$

Положим $\varepsilon_2 = a_{n_1} - c$. Так как $v(f, (c, c+\varepsilon_2]) > \delta$, то на интервале $(c, c+\varepsilon_2] = (c, a_{n_1}]$ найдутся такие точки a_j, b_j, $j = n_1 + 1, \ldots, n_2$ что $c < a_{n_2} \leqslant b_{n_2} \leqslant \ldots \leqslant a_{n_1+1} \leqslant b_{n_1+1} \leqslant c + \varepsilon_2 = a_{n_1}$ и что

$$\sum_{i=n_1+1}^{n_2} |f(b_i) - f(a_i)| > \delta.$$

Это рассуждение можно продолжить, полагая $\varepsilon_3 = a_{n_2} - c$ и выбирая соответствующим образом точки в интервале $(c, c+\varepsilon_3]$. По индукции, ясно, что для каждого натурального $k = 1\ 2, \ldots$ найдутся такие точки a_i, b_i, что $c < a_{n_k} \leqslant b_{n_k} \leqslant \ldots \leqslant a_1 \leqslant b_1 \leqslant \leqslant c + \varepsilon_1$ и

$$\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} |f(b_i) - f(a_i)| > \delta, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Однако это противоречит тому, что f является функцией ограниченной вариации на I, ч. т. д.

Пусть теперь f будет функцией ограниченной вариации на открытом интервале $I = (a, b)$, который может быть как конечным, так и бесконечным. Будем предполагать, что

(I) $f(s) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} f(s + |\varepsilon|)$, $s \in I$,

т. е. что f непрерывна справа в каждой точке открытого интервала I. Замкнутый интервал $\bar{I} = [a, b]$ является бикомпактным подмножеством расширенной области вещественных чисел. Мы расширим область определения функции f до $\bar{I}$, полагая $f(a) = f(b) = 0$. Точно так же, как в приведенном выше построении меры Бореля, предположим, что Σ есть алгебра всех конечных сумм

(II) $E = I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_n$ интервалов I_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, где каждое I_j имеет один из двух видов $[a, d]$ или $(c, d]$, причем $a < c < d \leqslant b$. Если интервалы I_j, $j = 1, \ldots, n$, в (II) не пересекаются, то, по определению, для $E \in \Sigma$

(III) $\mu(E) = \sum\limits_{j=1}^{n} \mu(I_j)$, где $\mu([a, d]) = f(d) - f(a)$ и $\mu((c, d]) = f(d) - f(c)$ при $a < c < d \leqslant b$. Легко видеть, что $\mu(E)$ не зависит от выбора конечного множества интервалов $\{I_j\}$, используемых для представления E, и что μ аддитивна на Σ. Ввиду того, что f — функция ограниченной вариации на I, μ ограничена. Кроме того, если E состоит из единственного интервала, то из равенства (I) легко следует, что $v(\mu, E) = v(f, E)$. Из этого равенства и предшествующей леммы следующим образом можно получить регулярность μ на Σ: пусть E определяется равенством (II), где $I_j = (a_j, b_j]$, $a \leqslant a_1 < b_1 \leqslant a_2 < b_2 \leqslant \ldots \ldots \leqslant a_n < b_n \leqslant b$, и пусть

$$E(\varepsilon) = \bigcup_{j=1}^{n} (a_j + \varepsilon, b_j], \quad 0 < \varepsilon < \inf(b_j - a_j).$$

Тогда, по лемме 16, $v(\mu, E - E(\varepsilon)) = \sum_{j=1}^{n} v(f, (a_j, a_j + \varepsilon]) \to 0$, откуда и следует регулярность μ на Σ. (Если $a_1 = a$, то в выписанном выше выражении $(a_1, b_1]$ и $(a_1; a_1 + \varepsilon]$ соответственно заменяются на $[a, b]$ и $[a, a + \varepsilon]$.)

Из теоремы 14 вытекает, что μ имеет регулярное счетно аддитивное продолжение на σ-алгебру всех борелевских множеств из $[a, b]$. Сужение этого продолжения на σ-алгебру борелевских подмножеств интервала (a, b) называется *мерой Радона* или *мерой Бореля — Стильтьеса* на (a, b), определяемой функцией f.

Следующая теорема о продолжении носит элементарный характер и не зависит от предшествующих теорем подобного рода. Ею устанавливается общий вид соотношения между только что определенными мерами Бореля — Стильтьеса и мерами Лебега — Стильтьеса, которые будут определены ниже.

17. Теорема. *Пусть μ — счетно аддитивная функция множества, определенная на σ-алгебре Σ, векторная или со значениями из расширенной области вещественных чисел. Обозначим через Σ^* совокупность всех множеств вида $E \bigcup N$, где $E \in \Sigma$, а N является подмножеством такого множества $M \in \Sigma$, для которого $v(\mu, M) = 0$. Тогда Σ^* будет σ-алгеброй, причем если область определения μ расширить до Σ^*, полагая $\mu(E \bigcup N) = \mu(E)$, то продолженная функция будет счетно аддитивной на Σ^*.*

Доказательство. Прежде всего мы покажем, что семейство Σ^* является σ-алгеброй. На протяжении этого доказательства буквой E, с индексом или без него, будет обозначаться множество из Σ, буквой M, с индексом или без него, будет обозначаться множество из Σ, для которого $v(\mu, M) = 0$, и буквой N, с индексом или без него, — подмножество множества M. Для того чтобы убедиться, что дополнение множества $E \cup N$ в Σ^* также принадлежит Σ^*, рассмотрим M, содержащее N, так что

$$(E \cup N)' = E'N' \supseteq E'M', \quad E'N' - E'M' = E'(N' - M') \subseteq M.$$

Таким образом, если $N_1 = E'N' - E'M'$, то $N_1 \subseteq M$ и $(E \cup N)' = (E'M') \cup N_1$. Следовательно, Σ^* содержит дополнение каждого из своих элементов. Далее, пусть $\{E_n \cup N_n\} \subseteq \Sigma^*$ и $N_n \subseteq M_n$. Тогда так как

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n \cup N_n) - \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n = M,$$

то ясно, что

$$\text{(I)} \qquad \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n \cup N_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n) \cup N,$$

где

$$N = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n \cup N_n) - \bigcup_{n=1}^{n} E_n.$$

Таким образом, Σ^* является σ-алгеброй. Далее, пусть $E_1 \cup N_1 = E_2 \cup N_2$ и $N_1 \subseteq M_1$, $N_2 \subseteq M_2$; положим $M = M_1 \cup M_2$, так что $E_1 \cup M = E_2 \cup M$ и, значит, $\mu(E_1) = \mu(E_1 \cup M) = \mu(E_2)$. Отсюда следует, что μ однозначно определена на Σ^*, а из равенства (I) — что μ счетно аддитивна на Σ^*, ч. т. д.

18. Определение. Пусть μ — функция, определенная на σ-алгебре Σ, векторная или со значениями из расширенной области вещественных чисел, и Σ^* определено как в предыдущей теореме. Тогда функция μ, продолженная на Σ^*, известна под названием *лебеговского продолжения* функции μ.

σ-алгебра Σ^* известна как *лебеговское расширение* (*относительно* μ) σ-алгебры Σ, а пространство с мерой (S, Σ^*, μ) — как *лебеговское расширение* пространства с мерой (S, Σ, μ).

Такие понятия, как μ-простая функция, вполне μ-измеримая функция, μ-измеримая функция, μ-интегрируемая функция и т. д., не меняют своего значения, когда функция μ рассматривается как определенная на Σ^*. Это происходит потому, что перечисленные понятия относятся не столько к самим функциям, сколько к классам эквивалентных между собой функций. Таким образом, обозначение через μ как меры на Σ, так и ее продолжения на Σ^* не может вызвать никакой путаницы.

Меру Лебега на интервале $[a, b]$ вещественных чисел можно определить как лебеговское продолжение меры Бореля на $[a, b]$. *Множества, измеримые по Лебегу* на $[a, b]$, это множества из лебеговского расширения (относительно меры Бореля) σ-алгебры борелевских множеств из $[a, b]$. Аналогично *мера Лебега — Стильтьеса*, определяемая посредством функции f ограниченной вариации на конечном или бесконечном интервале, является лебеговским продолжением меры Бореля — Стильтьеса, определенной посредством f.

Если μ есть мера Бореля — Стильтьеса или Лебега — Стильтьеса, определенная посредством функции f ограниченной вариации на интервале $I=(a, b)$, а функция g μ-интегрируема, то интеграл $\int\limits_I g(s)\,\mu(ds)$ часто записывается в виде $\int\limits_a^b g(s)\,df(s)$. В случае, когда $f(s)=s$, т. е. если μ есть мера Бореля или мера Лебега, этот интеграл иногда записывается как $\int\limits_a^b g(s)\,ds$.

Приведенная нами конструкция может быть обобщена для монотонных функций (определенных на открытом интервале) и не являющихся функциями ограниченной вариации. Предположим, что f — монотонно возрастающая функция, принимающая конечные вещественные значения, непрерывная справа на интервале $(-\infty, +\infty)$. В предыдущей нашей конструкции каждому ограниченному борелевскому множеству B мы уже приписали некоторую неотрицательную меру μ. Положим $I_n=\{s \mid -n<s<+n\}$, и пусть для каждого борелевского множества $\mu(B)=\lim\limits_{n\to\infty}\mu(I_nB)$ (так как $\{\mu(I_nB)\}$ — возрастающая последовательность, то этот предел существует и является положительным числом из расширенной области вещественных чисел). Чтобы убедиться, что μ счетно аддитивна, заметим, что если B представлено в виде суммы последовательности попарно непересекающихся борелевских множеств B_j, то

$$\mu(B)\geqslant\mu(BI_n)=\sum_{j=1}^{\infty}\mu(B_jI_n)\geqslant\sum_{j=1}^{k}\mu(B_jI_n)\longrightarrow\sum_{j=1}^{k}\mu(B_j),$$

так что

$$\mu(B)\geqslant\sum_{j=1}^{\infty}\mu(B_j);$$

в то же время

$$\mu(BI_n)=\sum_{j=1}^{\infty}\mu(B_jI_n)\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\mu(B_j),$$

так что

$$\mu(B)\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\mu(B_j).$$

В этом случае также принято обозначение

$$\int\limits_R g(s)\,\mu(ds)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}g(s)\,df(s),$$

причем говорят, что μ есть *мера, определяемая функцией* f.

Читатель без труда может убедиться в том, что та же самая конструкция пригодна и для произвольного открытого интервала I при условии, что f принимает лишь конечные вещественные значения, монотонно возрастает и непрерывна справа в каждой точке интервала I.

6. Интегрирование по счетно аддитивной мере

Основным понятием этого параграфа является пространство с мерой (S, Σ, μ), т. е. счетно аддитивная функция множества μ, определенная на некоторой σ-алгебре Σ подмножеств множества S, значения которой либо комплексны, либо принадлежат расширенной области вещественных чисел. Пространство с мерой (S, Σ^*, μ) является лебеговским расширением (S, Σ, μ). Функции f, интегрируемые относительно μ, будут принимать значения либо из расширенной области вещественных чисел, либо из некоторого B-пространства $\mathfrak{X}$. В этом параграфе мы покажем, что если (S, Σ, μ) — пространство с мерой, то различные линейные векторные пространства измеримых и интегрируемых функций, с которыми нам придется встречаться, являются *полными* метрическими пространствами. Кроме того, здесь будут даны критерии μ-измеримости и рассмотрена сходимость почти всюду.

1. Определение. Последовательность функций $\{f_n\}$, отображающих S в $\mathfrak{X}$, *сходится почти равномерно* относительно μ, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое множество $E \in \Sigma$, что $v(\mu, E) < \varepsilon$, причем последовательность $\{f_n\}$ на $S - E$ сходится равномерно. Последовательность $\{f_n\}$ *сходится почти равномерно к функции* f, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое множество $E \in \Sigma$, для которого $v(\mu, E) < \varepsilon$, причем последовательность $\{f_n\}$ на множестве $S - E$ равномерно сходится к f.

Ясно, что из почти равномерной сходимости f_n к f вытекает сходимость f_n к f по мере μ. Следующая лемма является до некоторой степени обратной к этому утверждению.

2. Лемма. *Пусть (S, Σ, μ) — пространство с мерой, а $\{f_n\}$ — последовательность функций, определенных на S; предположим, что $\lim\limits_{m, n\to\infty} (f_n - f_m) = 0$ в смысле сходимости по мере μ. Тогда существует такая подпоследовательность $\{f_{n_i}\}$ последовательности $\{f_n\}$ и такая функция f, что $\{f_{n_i}\}$ почти равномерно сходится к f.*

Доказательство. Так как $\lim\limits_{m, n\to\infty} (f_n - f_m) = 0$ в смысле сходимости по мере μ, то можно найти такую подпоследовательность $\{f_{n_i}\}$ и такие множества $E_i \in \Sigma$, что $v(\mu, E_i) < \frac{1}{2^i}$ и $|f_{n_i}(s) - f_{n_{i+1}}(s)| <$

$< \frac{1}{2^i}$, если $s \notin E_i$. Положим $F_k = \bigcup_{i=k}^{\infty} E_i$, тогда $v(\mu, F_k) < \frac{1}{2^{k-1}}$, и при $s \notin F_k$

$$|f_{n_i}(s) - f_{n_j}(s)| \leqslant \sum_{m=k}^{\infty} |f_{n_m}(s) - f_{n_{m+1}}(s)| < \frac{1}{2^{k-1}},$$

где $j > i \geqslant k$. Таким образом, если $s \notin \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$, то $\{f_{n_i}(s)\}$ есть фундаментальная последовательность, на каждом из множеств $S - F_k$ равномерно сходящаяся к функции f. Отсюда следует, что $f_{n_i} \to f$ почти равномерно, ч. т. д.

3. Следствие. *Пусть (S, Σ, μ) — пространство с мерой. Рассмотрим последовательность $\{f_n\}$ функций, определенных на S, и предположим, что f_n сходится к f по мере μ. Тогда некоторая подпоследовательность этой последовательности сходится к f почти равномерно относительно μ.*

4. Следствие. *Если (S, Σ, μ) — пространство с мерой, то пространство $F(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$ полно.*

Доказательство. Рассмотрим фундаментальную последовательность $\{f_n\}$ в пространстве $F(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$. В силу леммы 2 некоторая подпоследовательность $\{f_{n_i}\}$ этой последовательности сходится по мере к некоторой функции f. Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Тогда найдется такое N, что $|f_n - f_m| < \varepsilon/2$, если $n, m \geqslant N$, и такое $n_i \geqslant N$, что $|f_{n_i} - f| < \varepsilon/2$. Следовательно, $|f_n - f| \leqslant |f_n - f_{n_i}| + |f_{n_i} - f| < \varepsilon$ при $n \geqslant N$, так что $f_n \to f$ по мере, ч. т. д.

5. Следствие. *Если (S, Σ, μ) — пространство с мерой, то пространства $TM(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$ и $M(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$ вполне измеримых и измеримых функций полны.*

Доказательство. Согласно лемме 2.11, TM и M являются замкнутыми подпространствами F. В силу леммы I.6.7 эти пространства полны, ч. т. д.

→ 6. Теорема. *Если (S, Σ, μ) — пространство с мерой и $p \geqslant 1$, то пространство $L_p(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$ полно и, следовательно, является B-пространством.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что последовательность $\{f_n\}$ точек метрического пространства в том и только в том случае является фундаментальной, если для каждой подпоследовательности $\{n_i\}$

$$\lim_{i\to\infty}(f_{n_i}-f_{n_{i+1}})=0.$$

Таким образом, если $\lim\limits_{m,\,n\to\infty}|f_n-f_m|_p=0$, то, по теореме 3.6, $\lim\limits_{m,\,n\to\infty}(f_m-f_n)=0$ в смысле сходимости *по мере*. Ввиду следствия 4 существует такая функция f, что $f_n\to f$ *по мере*. Пусть $\varepsilon>0$ и N настолько велико, что $|f_n-f_m|_p<\varepsilon$ при $n, m\geqslant N$, а δ настолько мало, что

$$\left\{\int_E |f_n(s)|^p v(\mu,\ ds)\right\}^{1/p}<\varepsilon,$$

если $v(\mu, E)<\delta$ и $1\leqslant n\leqslant N$. Тогда

$$\left\{\int_E |f_n(s)|^p v(\mu,\ ds)\right\}^{1/p}<2\varepsilon,$$

если $v(\mu, E)<\delta$ и $1\leqslant n<\infty$, т. е.

$$\lim_{v(\mu,\,E)\to 0}\int_E |f_n(s)|^p v(\mu,\ ds)=0$$

равномерно относительно n. Точно так же можно показать, что для каждого $\varepsilon>0$ существует такое множество $E\in\Sigma$, что $v(\mu, E)<\infty$ и

$$\int_{S-E}|f_n(s)|^p v(\mu,\ ds)<\varepsilon,\quad n=1, 2, \ldots .$$

Поэтому, согласно теореме 3.6, $f\in L_p$ и $\lim\limits_{n\to\infty}|f_n-f|_p=0$, ч. т. д.

7. Лемма. *Для того чтобы множество было нуль-множеством, необходимо и достаточно, чтобы оно являлось подмножеством некоторого измеримого множества F, такого, что $v(\mu,\ F)=0$.*

Доказательство. Если E — нуль-множество, то $v^*(\mu,\ E)=0$ и существует измеримое множество E_n, содержащее E, для которого $v(\mu, E_n)<1/n$. Но тогда множество $F=\bigcap E_n$ измеримо, содержит E и $v(\mu,\ E)=0$, ч. т. д.

8. Лемма. *Если $(S,\ \Sigma, \mu)$ — пространство с мерой, то функция f, отображающая S в $\mathfrak{X}$, в том и только в том случае эквивалентна нулю, если она равна нулю почти всюду. Если f μ-интегрируема, то для того, чтобы $\int_E f(s)\,\mu(ds)=0$ для каждого $E\in\Sigma$, необходимо и достаточно, чтобы f почти всюду обращалась в нуль.*

Доказательство. Ясно, что функция, почти всюду обращающаяся в нуль, эквивалентна нулю. Обратно, если f эквивалентна нулю, то для каждого $n=1, 2, \ldots$ множество $E_n = \left\{ s \,\|\, f(s) | > \frac{1}{n} \right\}$ является нуль-множеством и в силу предыдущей леммы множество $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n = \{s \,|\, f(s) \neq 0\}$ содержится в некотором множестве меры нуль. Последнее утверждение леммы вытекает из пунктов (a) и (d) теоремы 2.20, ч. т. д.

Два следующих результата представляют собой полезный критерий измеримости.

9. Лемма. *Пусть (S, Σ^*, μ) — лебеговское расширение пространства с конечной мерой (S, Σ, μ). Тогда для того, чтобы определенная на S функция f, векторная или со значениями из расширенной области вещественных чисел, была μ-измеримой, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие условия:*

(I) *функция f почти сепарабельнозначна и*

(II) *$f^{-1}(G)$ принадлежит Σ^* для каждого открытого множества G, или, что эквивалентно этому,*

(II′) *$f^{-1}(B)$ принадлежит Σ^* для каждого борелевского множества B.*

Доказательство. Предположим сначала, что f μ-измерима, и пусть $\{f_n\}$ — последовательность простых функций, сходящихся к f по мере. По лемме 2, мы можем предполагать, что $\{f_n\}$ сходится к f почти равномерно. Пусть $E_n \in \Sigma$ таково, что $v(\mu, E_n) < 1/n$ и $f_n(s) \to f(s)$ равномерно на $S - E_n$, и пусть $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n = E$. Тогда E является нуль-множеством и $f_n(s) \to f(s)$ при $s \notin E$. Множество $f_n(S-E)$ конечно, и, следовательно, замыкание суммы $\bigcup f_n(S-E)$ является сепарабельным множеством, содержащим $f(S-E)$, откуда в силу I.6.12 вытекает сепарабельность $f(S-E)$.

Предположим теперь, что G — открытое множество и G_n — совокупность таких x, что $S(x, 1/n) \subseteq G$. Пусть $s \notin E$. Тогда $f(s) \in G$ в том и только в том случае, если для всех достаточно больших k $f_k(s)$ принадлежит некоторому G_n, т. е.

$$f^{-1}(G) - E = \bigcup_{m,\, n=1}^{\infty} \bigcap_{k=m}^{\infty} f_k^{-1}(G_n) - E.$$

Так как f_k — простая функция, то можно считать, что множества $f_k^{-1}(G_n)$ принадлежат Σ. Таким образом, $f^{-1}(G) - E$ и, следовательно, $f^{-1}(G)$ принадлежат Σ^*.

Так как $f^{-1}\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n)$, то семейство множеств B, для которых $f^{-1}(B) \in \Sigma^*$, образует σ-алгебру. Отсюда эквивалентность условий (II) и (II′) очевидна.

Обратно, предположим, что выполнены условия (I) и (II′). Пусть E — множество меры нуль и $\{x_n\}$ — счетное всюду плотное подмножество в $f(S-E)$. Пусть дано $\varepsilon > 0$; обозначим через A_n множество таких s, не принадлежащих E, для которых $|f(s)-x_n| < \varepsilon$, в то время как $|f(s)-x_i| \geqslant \varepsilon$, $1 \leqslant i < n$. Тогда $A_n \in \Sigma^*$ и $E \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} A_n = S$. Следовательно, мы можем найти столь большое N, что $v(\mu, \bigcup_{n=N}^{\infty} A_n) < \varepsilon$. Положим $f_\varepsilon(s) = x_n$, если $s \in A_n$ и $n < N$, и $f_\varepsilon(s) = 0$ в противном случае. Тогда f_ε будет μ-простой функцией. Ясно, что при $\varepsilon \to 0$ $f_\varepsilon \to f$ по мере μ. Следовательно, функция f μ-измерима, ч. т. д.

10. Теорема. *Пусть (S, Σ^*, μ) лебеговское расширение пространства с мерой (S, Σ, μ). Тогда для того, чтобы определенная на S функция f, векторная или со значениями из расширенной области вещественных чисел, была μ-измеримой, необходимо и достаточно, чтобы для каждого измеримого множества F, для которого $v(\mu, F) < \infty$, были выполнены следующие условия:*

(I) *функция f почти сепарабельнозначна на F;*

(II) *$F \cap f^{-1}(G)$ принадлежит Σ^* для каждого открытого множества G или, что эквивалентно этому,*

(II′) *$F \cap f^{-1}(B)$ принадлежит Σ^* для каждого борелевского множества B.*

Доказательство. Это утверждение непосредственно вытекает из леммы 9 и определения 2.10, ч. т. д.

В качестве следствия теоремы 10 отметим тот полезный факт, что функция f, принимающая значения из расширенной области вещественных чисел, измерима, если для каждого множества $F \in \Sigma$, для которого $v(\mu, F) < \infty$, и любого вещественного числа c множество $F \cap \{s \mid f(s) > c\}$ принадлежит Σ^*. Эквивалентное этому условие получится, если множество $\{s \mid f(s) > c\}$ заменить на $\{s \mid f(s) \geqslant c\}$, $\{s \mid f(s) < c\}$ или $\{s \mid f(s) \leqslant c\}$. Каждое из этих семейств множеств порождает борелевские множества. Если $\{f_n\}$ — последовательность измеримых функций, принимающих значения из расширенной области вещественных чисел, и $g = \sup_n f_n$, то

$$\{s \mid g(s) > c\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{s \mid f_n(s) > c\}.$$

Таким образом, функция $\sup f_n$ измерима. Аналогично $\inf f_n$ измерима и, следовательно, $\overline{\lim_{n\to\infty}} f_n$, $\underline{\lim_{n\to\infty}} f_n$ и $\lim_{n\to\infty} f_n$ измеримы.

Следующая теорема применима специально к векторным функциям и представляет собой способ сведения изучения измеримости таких функций к скалярному случаю. Эту теорему иногда удобно применять вместо теоремы 10.

11. Теорема. *Если* (S, Σ, μ) — *пространство с мерой, то для того, чтобы функция* f, *отображающая* S *в* B-*пространстве* $\mathfrak{X}$, *была* μ-*измеримой, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие условия*:

(I) *для каждого измеримого множества* F, *для которого* $v(\mu, F) < \infty$, *функция* f *почти сепарабельнозначна на* F *и*

(II) *для каждого линейного функционала* x^* *из* $\mathfrak{X}^*$ *определенная на* S *скалярная функция* x^*f μ-*измерима*.

Доказательство. Необходимость условия (I) вытекает из теоремы 10. Пусть f измерима и $x^* \in \mathfrak{X}^*$; положим $r(\cdot) = x^*f(\cdot)$. Если H — открытое множество скаляров, то множество $G = x^{*-1}(H)$ открыто в $\mathfrak{X}$ и $r^{-1}(H) = f^{-1}(G) \in \Sigma^*$, чем доказана необходимость условия (II). Для доказательства достаточности можно без ограничения общности предположить, что (S, Σ, μ) — пространство с конечной мерой. Пусть $\{x_n\}$ — счетное всюду плотное подмножество в $f(S - E)$, где E — нуль-множество. Рассмотрим последовательность $\{x_n^*\}$ линейных функционалов, удовлетворяющих условиям $|x_n^*| = 1$ и $x_n^*(x_n) = |x_n|$ (см. II. 3. 14). Так как $|f(s)| = \sup_n |x_n^* f(s)|$, $s \in S - E$, то функция $|f(\cdot)|$ измерима. Точно так же измерима и функция $g_n(\cdot) = |f(\cdot) - x_n|$. Пусть G — открытое множество в $\mathfrak{X}$, а ε_n — радиус наибольшей открытой сферы $S(x_n, \varepsilon) \subseteq G$. Если $G_n = S(x_n, \varepsilon_n)$, то $f^{-1}(G_n) = g_n^{-1}([0, \varepsilon_n)) \in \Sigma^*$, что вытекает из теоремы 10, примененной к g_n. Из того, что $G = \bigcup_{m=1}^{\infty} G_n$, следует, что $f^{-1}(G) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(G_n) \in \Sigma^*$, откуда ввиду теоремы 10 вытекает, что f измерима, ч. т. д.

12. Теорема (*Егоров*). *Если* (S, Σ, μ) — *пространство с конечной мерой, то, для того чтобы последовательность* $\{f_n\}$ *измеримых функций, отображающих* S *в* $\mathfrak{X}$, *почти равномерно сходилась к некоторой функции* f, *необходимо и достаточно, чтобы последовательность* $f_n(s)$ *сходилась к* $f(s)$ *почти всюду*.

Доказательство. Предположим, что $f_n \to f$ почти равномерно. Пусть $E_n \in \Sigma$ таково, что $v(\mu, E_n) < 1/n$ и $f_n(s) \to f(s)$ равномерно для $s \notin E_n$. Тогда $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ является нуль-множеством и $f_n(s) \to f(s)$, если $s \notin E$.

Обратно, предположим, что E — нуль-множество и что $f_n(s) \to f(s)$ при $s \notin E$. Положим

$$E_{k, m} = \left\{ s \mid s \notin E,\ |f_r(s) - f(s)| < \frac{1}{m},\ \text{если } r \geqslant k \right\}.$$

Тогда $E_{k+1, m} \supseteq E_{k,m}$, а так как $f_r(s) \to f(s)$ для каждого $s \in S - E$, то $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_{k, m} = S - E$ при всех m. Следовательно, для любых $\varepsilon > 0$ и m можно найти такое натуральное k_m, что $v(\mu, S - E_{k_m, m}) < \varepsilon/2^m$. Если положить $A_\varepsilon = \bigcap_{m=1}^{\infty} E_{k_m, m}$, то $v(\mu, S - A_\varepsilon) < \varepsilon$ и $|f_k(s) - f(s)| < 1/m$ при $k > k_m$ и $s \in A_\varepsilon$, т. е. $f_k(s) \to f(s)$ равномерно на A_ε, ч. т. д.

Необходимо отметить, что в прямой части доказательства не используется конечность (S, Σ, μ), и, следовательно, мы доказали, что если (S, Σ, μ) — пространство с мерой, то из почти равномерной сходимости вытекает сходимость почти всюду.

13. Следствие (a). *Если (S, Σ, μ) — пространство с мерой, то сходящаяся по мере последовательность измеримых функций содержит подпоследовательность, сходящуюся почти всюду.*

(b). *Если (S, Σ, μ) — пространство с конечной мерой, то почти всюду сходящаяся последовательность измеримых функций сходится по мере.*

14. Следствие. *Если (S, Σ, μ) — пространство с мерой и $\{f_n\}$ — последовательность определенных на S измеримых векторных функций, сходящаяся почти всюду к определенной на S функции f, то и функция f тоже измерима.*

Доказательство. Это утверждение вытекает из теоремы 12 и определения 2.10, ч. т. д.

15. Теорема (*теорема Витали о сходимости*). *Пусть $1 \leqslant p < \infty$, (S, Σ, μ) — пространство с мерой и $\{f_n\}$ — последовательность функций из $L_p(S, \Sigma, \mu)$, сходящаяся почти всюду к функции f. Тогда для того, чтобы f принадлежала $L_p(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$ и норма разности $|f_n - f|_p$ стремилась к нулю, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие условия:*

(I) $\lim\limits_{v(\mu, E) \to 0} \int_E |f_n(s)|^p v(\mu, ds) = 0$ *равномерно относительно n;*

(II) *для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое множество $E_\varepsilon \in \Sigma$, что $v(\mu, E_\varepsilon) < \infty$ и*

$$\int_{S - E_\varepsilon} |f_n(s)|^p v(\mu, ds) < \varepsilon, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Доказательство. Необходимость условий (I) и (II) непосредственно вытекает из теоремы 3.6. Обратно, предположим, что условия (I) и (II) выполнены. Если E — множество, для которого $v(\mu, E) < \infty$.

то

$$\int_E |f(s)|^p v(\mu, ds) < \infty \text{ и } \lim_{n\to\infty} \int_E |f_n(s) - f(s)|^p v(\mu, ds) = 0,$$

что легко вытекает из следствия 13 (b) и теоремы 3.6. Следовательно,

$$\overline{\lim_{m, n\to\infty}} |f_n - f_m|_p \leqslant \overline{\lim_{m, n\to\infty}} \left\{ \int_{E_\varepsilon} |f_n(s) - f_m(s)|^p v(\mu, ds) \right\}^{\frac{1}{p}} + 2\varepsilon^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{m, n\to\infty}} \left[\left\{ \int_{E_\varepsilon} |f_n(s) - f(s)|^p v(\mu, ds) \right\}^{\frac{1}{p}} + \right.$$

$$\left. + \left\{ \int_{E_\varepsilon} |f_m(s) - f(s)|^p v(\mu, ds) \right\}^{\frac{1}{p}} \right] + 2\varepsilon^{\frac{1}{p}} = 2\varepsilon^{\frac{1}{p}},$$

так что $\lim_{m, n\to\infty} |f_n - f_m|_p = 0$. Ввиду полноты $L_p(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$, существует такое $g \in L_p$, что $\lim_{n\to\infty} |f_n - g|_p = 0$. Тогда, по теореме 3.6 и следствию 13(a), некоторая подпоследовательность последовательности $\{f_n\}$ сходится к g почти всюду. Следовательно, $g = f$ почти всюду, $f \in L_p$ и $|f_n - f|_p \to 0$, ч. т. д.

→ 16. Следствие (*теорема Лебега*). *Пусть* $1 \leqslant p < \infty$, (S, Σ, μ) — *пространство с мерой и* $\{f_n\}$ — *последовательность функций из* $L_p(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$, *сходящаяся почти всюду к функции* f. *Предположим, что в* $L_p(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$ *найдется такая функция* g, *что* $|f_n(s)| \leqslant |g(s)|$ *почти всюду. Тогда* $f \in L_p(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$ *и* $|f_n - f|_p$ *стремится к нулю.*

Доказательство. Это утверждение непосредственно вытекает из теоремы 15, ибо последовательность $\{f_n\}$ удовлетворяет условиям (I) и (II) этой теоремы, ч. т. д.

17. Следствие. *Пусть* (S, Σ, μ) — *пространство с положительной мерой,* $\{f_n\}$ — *монотонно возрастающая последовательность неотрицательных вещественных измеримых, но не обязательно интегрируемых функций, сходящаяся почти всюду к некоторой функции* f. *Тогда*

$$\lim_n \int_S f_n(s) \mu(ds) = \int_S f(s) \mu(ds).$$

Доказательство. Так как $0 \leqslant f_n(s) \leqslant f(s)$, то в случае $\int_S f(s) \mu(ds) < \infty$ наше утверждение непосредственно вытекает из следствия 16. Таким образом, мы должны только показать, что если $\int_S f_n(s)\,\mu(ds) \leqslant M < \infty$, то и $\int_S f(s)\,\mu(ds) < \infty$. Но если последовательность интегралов от $\{f_n\}$ имеет конечную верхнюю грань, то для каждого $\varepsilon > 0$ можно найти такое N, что

$$\int_S f_n(s)\,\mu(ds) \leqslant \int_S f_N(s)\,\mu(ds) + \varepsilon \quad \text{при } n \geqslant N.$$

Следовательно,

$$\varlimsup_{\mu(E)\to 0} \int_E f_n(s)\,\mu(ds) \leqslant \varlimsup_{\mu(E)\to 0} \int_E f_N(s)\,\mu(ds) + \varepsilon = \varepsilon$$

равномерно относительно $n \geqslant N$. Отсюда, разумеется, вытекает, что

$$\lim_{\mu(E)\to 0} \int_E f_n(s)\,\mu(ds) = 0 \quad \text{равномерно при } n \geqslant 1.$$

Точно таким же образом можно установить существование такого множества E конечной меры, что

$$\int_{S-E} f_n(s)\,\mu(ds) < \varepsilon, \quad n \geqslant 1.$$

Таким образом, по теореме 15, $f \in L_1$, ч. т. д.

Следствия 16 и 17 имеют исторический интерес и вместе с теоремой 6 представляют собой важные результаты классической теории сходимости интегралов Лебега.

18. Следствие. *Если (S, Σ, μ) — пространство с положительной мерой, а f — неотрицательная измеримая функция, то функция G, определяемая равенством*

$$G(E) = \int_E f(s)\,\mu(ds), \qquad E \in \Sigma,$$

является счетно аддитивной функцией множества со значениями из расширенной области вещественных чисел.

Доказательство. Пусть $E \in \Sigma$ — сумма возрастающей последовательности измеримых множеств E_n, и пусть $f_n = \chi_{E_n} f$. Тогда ввиду следствия 17

$$G(E) = \int_E f(s)\,\mu(ds) = \lim_n \int_E f_n(s)\,\mu(ds) = \lim_n G(E_n),$$

ч. т. д.

19. Теорема (*лемма Фату*). *Пусть* (S, Σ, μ) — *пространство с положительной мерой, а* $\{f_n\}$ — *последовательность неотрицательных, измеримых, но не обязательно интегрируемых функций. Тогда*

$$\int_S \underline{\lim} f_n(s)\mu(ds) \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_S f_n(s)\mu(ds).$$

Доказательство. Пусть $g_n(s) = \inf_{k \geqslant n} f_k(s)$. Тогда g_n является возрастающей последовательностью функций, предел которой равен $\underline{\lim}_{n\to\infty} f_n(s)$. Поэтому ввиду следствия 17

$$\int_S \underline{\lim} f_n(s)\mu(ds) = \lim_{n\to\infty} \int_S g_n(s)\mu(ds).$$

Так как $g_n(s) \leqslant f_n(s)$, то

$$\lim_{n\to\infty} \int_S g_n(s)\mu(ds) \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_S f_n(s)\mu(ds), \text{ ч. т. д.}$$

Теперь мы покажем, что произвольный замкнутый оператор в некотором смысле коммутирует с оператором интегрирования. Это дополняет аналогичный результат, установленный теоремой 2.19 для ограниченных операторов.

20. Теорема. *Пусть* $\mathfrak{X}$ *и* $\mathfrak{Y}$ — *B-пространства, а* T — *замкнутый линейный оператор с областью определения* $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{X}$ *и областью значений, принадлежащей* $\mathfrak{Y}$. *Пусть, далее,* (S, Σ, μ) — *пространство с мерой, а* f *является* μ-*интегрируемой функцией со значениями в* $\mathfrak{D}$. *Если* Tf *также* μ-*интегрируема, то* $\int_S f(s)\mu(ds)$ *принадлежит* $\mathfrak{D}$ *и*

$$T\int_S f(s)\mu(ds) = \int_S Tf(s)\mu(ds).$$

Доказательство. Рассмотрим топологическое произведение $\mathfrak{Z} = \mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ с нормой $|[x, y]| = |x| + |y|$. По предположению, график $\mathfrak{G}$ оператора T является замкнутым линейным многообразием в $\mathfrak{Z}$ (см. II.2.3). Прежде всего с помощью теоремы 11 мы покажем, что функция g, отображающая S в $\mathfrak{G}$ и определяемая равенством

$$g(s) = [f(s), Tf(s)], \quad s \in S,$$

μ-измерима. Пусть F — измеримое множество, для которого $v(\mu, F) < \infty$. Так как μ-измеримы и f, и Tf, то существует такое нуль-множество E, что $f(F-E)$ и $Tf(F-E)$ сепарабельны. Так как

$$g(F-E) \subseteq f(F-E) \times Tf(F-E),$$

то g почти сепарабельнозначна относительно μ на F. Чтобы доказать, что g μ-измерима, достаточно ввиду теоремы 11 показать, что g^*g μ-измерима для каждого g^* из $\mathfrak{G}^*$. Пусть $z^* \in \mathfrak{Z}^*$ является продолжением (см. теорему II.3.11) функции g^* на $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$, и пусть $x^* \in \mathfrak{X}^*$, $y^* \in \mathfrak{Y}^*$ определяются равенствами

$$x^*x = z^*[x, 0], \quad y^*y = z^*[0, y].$$

Тогда

$$g^*g(s) = z^*[f(s), Tf(s)] = x^*f(s) + y^*Tf(s),$$

откуда видно, что g^*g μ-измерима, а следовательно, и g μ-измерима. Так как

$$|g(s)| = |f(s)| + |Tf(s)|,$$

то из теоремы 2.22 вытекает, что g μ-интегрируема. Так как $g(s)$ для каждого s из S принадлежит $\mathfrak{G}$, то интеграл

$$\int_S g(s)\mu(ds) = \left[\int_S f(s)\mu(ds), \int_S Tf(s)\mu(ds)\right]$$

также принадлежит $\mathfrak{G}$. Следовательно, $\int_S f(s)\mu(ds)$ принадлежит $\mathfrak{D}$ и

$$T\int_S f(s)\mu(ds) = \int_S Tf(s)\mu(ds), \text{ ч. т. д.}$$

Теория сходимости, изложенная в этом параграфе, может быть использована для доказательства полезного соотношения между интегралами Стильтьеса по отношению к двум различным функциям ограниченной вариации, представляющего собой известную формулу интегрирования по частям. Прежде чем сформулировать ее, мы предварительно докажем следующую лемму.

21. Лемма. *Пусть f — функция ограниченной вариации в интервале (a, b). Тогда $f(a+)$ и $f(b-)$ существуют.*

Доказательство. Так как ясно, что, для того чтобы функция f имела ограниченную вариацию в интервале (a, b), необходимо и достаточно, чтобы ее вещественная и мнимая части имели ограниченную вариацию на (a, b), то мы можем и будем предполагать функцию f вещественной. Если

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} f(a+|\varepsilon|) > \underline{\lim_{\varepsilon\to 0}} f(a+|\varepsilon|) + \delta,$$

где $\delta > 0$, то существует такая убывающая последовательность a_i, b_i $(a_n > b_n > a_{n+1}, \ n = 1, 2, \ldots)$, сходящаяся к a, что

$f(a_n) - f(b_n) > \delta_1$, а это противоречит, очевидно, тому факту, что f есть функция ограниченной вариации на (a, b). Таким образом,

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} f(a+|\varepsilon|) = \underline{\lim_{\varepsilon\to 0}} f(a+|\varepsilon|) = \lim_{\varepsilon\to 0} f(a+|\varepsilon|) = f(a+).$$

Точно так же можно убедиться и в существовании $f(b-)$, ч. т. д.

22. Теорема. *Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — две функции ограниченной вариации на интервале (a, b). Предположим, что одна из них непрерывна на (a, b), а другая непрерывна справа. Тогда*

$$\int_a^b \alpha(x)\,d\beta(x) + \int_a^b \beta(x)\,d\alpha(x) = \alpha(b-)\beta(b-) - \alpha(a+)\beta(a+).$$

Доказательство. Ясно, что достаточно доказать это утверждение для каждого конечного подинтервала, принадлежащего (a, b). Для простоты (и без ограничения общности) мы можем предположить, что $(a, b) = (0, 1)$. Положим

$$\alpha_n(x) = \begin{cases} \alpha\left(\frac{k+1}{n}\right), \text{ если } \frac{k}{n} \leqslant x < \frac{k+1}{n}, & 1 \leqslant k \leqslant n-2; \\ 0, \quad \text{если} \quad 0 < x < \frac{1}{n} \text{ или } \frac{n-1}{n} \leqslant x < 1. \end{cases}$$

$$\beta_n(x) = \begin{cases} \beta\left(\frac{k}{n}\right), \text{ если } \frac{k}{n} \leqslant x \leqslant \frac{k+1}{n}, & 1 \leqslant k \leqslant n-2; \\ 0, \quad \text{если } 0 < x < \frac{1}{n} \text{ или } \frac{n-1}{n} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Тогда ясно, что $\alpha_n(x) \to \alpha(x)$, $\beta_n(x) \to \beta(x)$ и

$$|\alpha_n(x)| \leqslant \sup_{0<x<1} |\alpha(x)|,$$

$$|\beta_n(x)| \leqslant \sup_{0<x<1} |\beta(x)|.$$

Ввиду следствия 16 оба интеграла определены и

$$\int_a^b \alpha(x)\,d\beta(x) + \int_a^b \beta(x)\,d\alpha(x) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-2} \alpha\left(\frac{k+1}{n}\right)\left\{\beta\left(\frac{k+1}{n}\right) - \beta\left(\frac{k}{n}\right)\right\} +$$

$$+ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-2} \beta\left(\frac{k}{n}\right)\left\{\alpha\left(\frac{k+1}{n}\right) - \alpha\left(\frac{k}{n}\right)\right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-2} \left\{ \alpha\left(\frac{k+1}{n}\right)\beta\left(\frac{k+1}{n}\right) - \alpha\left(\frac{k}{n}\right)\beta\left(\frac{k}{n}\right) \right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{ \alpha\left(1-\frac{1}{n}\right)\beta\left(1-\frac{1}{n}\right) - \alpha\left(\frac{1}{n}\right)\beta\left(\frac{1}{n}\right) \right\} =$$

$$= \alpha(1-)\beta(1-) - \alpha(0+)\beta(0+), \text{ ч. т. д.}$$

7. Теорема Витали—Хана—Сакса и пространства мер

В этом параграфе в σ-алгебре Σ пространства с мерой (S, Σ, μ) будет введена некоторая метрика таким образом, что соответствующее метрическое пространство $\Sigma(\mu)$ будет полным. Аддитивными функциями, определенными на Σ и непрерывными на $\Sigma(\mu)$, будут абсолютно непрерывные относительно μ аддитивные функции на Σ и только они. Основной результат, относящийся к последовательности $\{\nu_n\}$ таких функций, это теорема Витали—Хана—Сакса. Она утверждает, что если $\{\nu_n(E)\}$ сходится для каждого $E \in \Sigma$, то непрерывность ν_n на метрическом пространстве $\Sigma(\mu)$ равномерна относительно $n=1,2,\ldots$. Читатель уже хорошо знаком с замечательным аналогом теоремы Витали—Хана—Сакса, теоремой (II.1.17), утверждающей, что непрерывность элементов поточечно сходящейся последовательности $\{T_n\}$, заданных на F-пространстве непрерывных линейных операторов, равномерна относительно $n=1,2,\ldots$. Поучительно сравнить приводимое здесь (и принадлежащее Саксу) доказательство теоремы Витали—Хана—Сакса с доказательством принципа равномерной ограниченности для F-пространств (см. II.1.13); такое сравнение обнаруживает полезную аналогию между σ-алгебрами и линейными метрическими пространствами. Более глубокие связи между функциями множества и некоторыми B-пространствами подробно рассматриваются в следующей главе, где, в частности, показано, что пространства, сопряженные к некоторым из хорошо знакомых нам B-пространств, можно определить в терминах функций множества. В настоящем параграфе будет показано, что пространства ограниченных аддитивных функций множества, а также регулярных счетно аддитивных функций множества являются B-пространствами.

Метрическое пространство $\Sigma(\mu)$

Пусть (S, Σ, μ) — пространство с мерой, и пусть для каждой пары A, E множеств из Σ определено отношение эквивалентности $A \sim E$ условием $v(\mu, A\Delta E)=0$, где $A\Delta E$ есть симметрическая разность $(A \cup E)—AE$ множеств A и E. Отношение $\sim$ действительно является отношением эквивалентности; это легко вытекает из коммутативности и ассоциативности операции взятия симметричной разности и равенства $A\Delta A=\varnothing$. Множество $\Sigma(\mu)$ всех классов эквивалентности $E(\mu)=\{A \mid A \sim E\}$ является метрическим пространством с расстоянием

(I) $\varrho(E_\varepsilon(\mu), F(\mu)) = \operatorname{arctg} v(\mu, E\Delta F)$.

Для простоты и удобства мы будем говорить о множествах $E \in \Sigma$ как об элементах из $\Sigma(\mu)$, точно так же, как мы говорим об элементах пространства $M(S, \Sigma, \mu)$ измеримых функций как о функциях, определенных на S, а не как о классах таких функций. Таким образом, вместо (I) мы иногда будем писать

(II) $\varrho(E, F) = \operatorname{arctg} v(\mu, E\Delta F)$.

Необходимо отметить, однако, что определенная на Σ функция λ может рассматриваться как функция, определенная на $\Sigma(\mu)$, лишь в том случае, если $\lambda(E) = \lambda(F)$ при $v(\mu, E\Delta F) = 0$. Заметим, что $A \sim B$ в том и только в том случае, если характеристические функции χ_A и χ_B эквивалентны как элементы $M(S, \Sigma, \mu)$, т. е. в том и только в том случае, если χ_A и χ_B отличаются на функцию, эквивалентную нулю. Таким образом, отображение $E \to \chi_E$ можно рассматривать как гомеоморфное отображение $\Sigma(\mu)$ на некоторое подмножество $M(S, \Sigma, \mu)$. Ясно, что при этом гомеоморфизме фундаментальные последовательности переходят в фундаментальные же последовательности. Таким образом, если $\varrho(E_n, E_m) \to 0$, то ввиду следствия 6.5 в $M(S, \Sigma, \mu)$ найдется такая функция χ, что $\chi_{E_n} \to \chi$. По следствию 6.13, некоторая подпоследовательность последовательности $\{\chi_{E_n}\}$ сходится к χ почти всюду, и, значит, для почти всех $s \in S$ $\chi(s)$ равно либо 0, либо 1. Таким образом, $\chi = \chi_E$ для некоторого $E \in \Sigma$. Так как $\chi_{E_n} \to \chi_E$ в $M(S, \Sigma, \mu)$, то из равенства (II) следует, что $E_n \to E$ в $\Sigma(\mu)$. Поэтому *$\Sigma(\mu)$ есть полное метрическое пространство.*

Если λ — аддитивная векторная или скалярная абсолютно непрерывная относительно μ функция на Σ, то λ определена и непрерывна и на метрическом пространстве $\Sigma(\mu)$. Чтобы убедиться в этом, заметим прежде всего, что из тождеств

$$v(\mu, E\Delta F) = v(\mu, E - EF) + v(\mu, F - EF),$$
$$\lambda(E) - \lambda(F) = \lambda(E - EF) - \lambda(F - EF),$$

вытекает, что $\lambda(E) = \lambda(F)$, как только $v(\mu, E\Delta F) = 0$, и, следовательно, определенная на Σ абсолютно непрерывная аддитивная функция λ определена и на метрическом пространстве $\Sigma(\mu)$. Те же самые тождества показывают, что λ непрерывна на $\Sigma(\mu)$. Действительно, если $E_m \to E$ в $\Sigma(\mu)$, то $v(\mu, E - EE_m) \to 0$ и $v(\mu, E_m - EE_m) \to 0$. Но тогда $\lambda(E - EE_m) \to 0$ и $\lambda(E_m - EE_m) \to 0$ и, следовательно, $\lambda(E_m) \to \lambda(E)$. Таким образом, абсолютно непрерывная относительно μ аддитивная функция λ непрерывна на метрическом пространстве $\Sigma(\mu)$. Обратно, аддитивная функция на Σ, определенная и непрерывная на $\Sigma(\mu)$, абсолютно непрерывна. Это утверждение непосредственно вытекает из определений.

Необходимо также отметить, что бинарные операции $A \cup B$, AB, $A \Delta B$ являются непрерывными отображениями $\Sigma(\mu) \times \Sigma(\mu)$ в $\Sigma(\mu)$ и что операция перехода к дополнению $A \to A'$ является непрерывным отображением $\Sigma(\mu)$ в $\Sigma(\mu)$. Эти элементарные, но важные факты легко доказать, применяя неравенство

$$v(\mu, E \Delta F) \leqslant v(\mu, E) + v(\mu, F)$$

к тождествам

$$\begin{aligned}
(A \cup B) \Delta (A_1 \cup B_1) &= (A \Delta A_1) \Delta (B \Delta B_1) \Delta A (B \Delta B_1) \Delta B_1 (A \Delta A_1), \\
(AB) \Delta (A_1 B_1) &= A (B \Delta B_1) \Delta B_1 (A \Delta A_1), \\
A' \Delta A_1' &= A \Delta A_1, \\
(A \Delta B) \Delta (A_1 \Delta B_1) &= (A \Delta A_1) \Delta (B \Delta B_1).
\end{aligned}$$

Если $v(\mu, S) < \infty$ и если последовательность $\{E_n\}$ множеств из Σ сходится к E в том смысле, что

$$\text{(III)} \quad E = \varliminf_n E_n = \varlimsup_n E_n,$$

то $\varrho(E_n, E) \to 0$, т. е. $E_n \to E$ в метрическом пространстве $\Sigma(\mu)$. В самом деле, из условия (III) вытекает, что $\chi_{E_n}(s) \to \chi_E(s)$ для каждого $s \in S$, и, следовательно, ввиду теоремы Лебега (6.16) и равенства (II)

$$\varrho(E_n, E) = \operatorname{arctg} \int_S |\chi_{E_n}(s) - \chi_E(s)| \, v(\mu, ds) \to 0.$$

Из всех этих соотношений, связывающих обычные операции над точечными множествами с метрикой в $\Sigma(\mu)$, непосредственно видно, что если $v(\mu, S) < \infty$, то замыкание в $\Sigma(\mu)$ подалгебры Σ_1 алгебры Σ само является σ-алгеброй.

Все эти замечания можно резюмировать в виде следующей леммы.

1. Лемма. *Если (S, Σ, μ) — пространство с мерой, то σ-алгебра Σ (или, точнее, фактор-множество $\Sigma/\mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — идеал всех нуль-множеств из Σ) является полным метрическим пространством относительно метрики*

$$\varrho(A, B) = \operatorname{arctg} v(\mu, A \Delta B).$$

Аддитивная векторная или скалярная функция, определенная на Σ, в том и только в том случае определена и непрерывна на $\Sigma(\mu)$, если она абсолютно непрерывна относительно μ. Операции $A \cup B$, AB, $A \Delta B$, A' непрерывны относительно A и B. Если $v(\mu, S) < \infty$, то замыкание в $\Sigma(\mu)$ подалгебры алгебры Σ является σ-алгеброй.

Следующая теорема представляет собой один из важнейших результатов в теории функций множества. Доказательство, приводимое здесь, принадлежит Саксу и состоит в применении теоремы Бэра о категориях к пространству $\Sigma(\mu)$ почти точно так же, как она применялась к F-пространству в доказательстве принципа равномерной ограниченности (см. II.1.13).

→ 2. Теорема (*Витали—Хана—Сакса*). *Пусть* (S, Σ, μ) — *пространство с мерой, а* $\{\lambda_n\}$ — *последовательность определенных на* Σ *абсолютно непрерывных относительно* μ *векторных или скалярных аддитивных функций множества. Если предел* $\lim_n \lambda_n(E)$ *существует для каждого* $E \in \Sigma$, *то*

$$\lim_{v(\mu, E)\to 0} \lambda_n(E) = 0$$

равномерно относительно $n = 1, 2 \dots$.

Доказательство. По лемме 1, λ_n непрерывна на $\Sigma(\mu)$, и, следовательно, для каждого $\varepsilon > 0$ множества

$$\Sigma_{n,m} = \{E \mid E \in \Sigma, \ |\lambda_n(E) - \lambda_m(E)| \leqslant \varepsilon\}, \quad n, m = 1, 2, \dots,$$
$$\Sigma_p = \bigcap_{n, m \geqslant p} \Sigma_{n,m}, \quad p = 1, 2, \dots,$$

замкнуты в полном метрическом пространстве $\Sigma(\mu)$. Так как предел $\lim_n \lambda_n(E)$ существует для каждого $E \in \Sigma$, то $\Sigma(\mu) = \bigcup_{p=1}^{\infty} \Sigma_p$. По теореме Бэра о категориях (I.6.9), одно из множеств Σ_p имеет внутреннюю точку. Это значит, что существуют такое натуральное число q, положительное число r и такое множество $A \in \Sigma$, что

$$|\lambda_n(E) - \lambda_m(E)| \leqslant \varepsilon, \quad n, m \geqslant q,$$

для каждого множества E, принадлежащего сфере

$$K = \{E \mid E \in \Sigma, \ v(\mu, A \Delta E) < r\}.$$

Пусть $0 < \delta < r$ выбрано так, что

$$|\lambda_n(B)| < \varepsilon, \quad n = 1, 2, \dots, q,$$

для каждого $B \in \Sigma$, для которого $v(\mu, B) < \delta$. Пусть теперь $v(\mu, B) < \delta$, так что оба множества $A \cup B$, $A - B$ принадлежат K. Из тождества

$$\lambda_n(B) = \lambda_q(B) + \{\lambda_n(B) - \lambda_q(B)\} = \lambda_q(B) + \{\lambda_n(A \cup B) - \lambda_q(A \cup B)\} - \{\lambda_n(A - B) - \lambda_q(A - B)\}$$

вытекает, что $|\lambda_n(B)| < 3\varepsilon$ при всех $n = 1, 2, \dots$, ч. т. д.

3. Следствие. *В предположениях теоремы 2 и при дополнительном условии* $v(\mu, S) < \infty$ *функция* $\lambda(E) = \lim_n \lambda_n(E)$ *счетно аддитивна на* Σ.

Доказательство. Аддитивность λ вытекает из аддитивности λ_n, и поэтому для доказательства ее счетной аддитивности достаточно показать, что $\lambda(E_m) \to 0$ для каждой убывающей последовательности $\{E_m\} \subseteq \Sigma$ с пустым пересечением. Так как $v(\mu, E_m) = \sum_{k=m}^{\infty} v(\mu, E_k - E_{k+1})$, то для такой последовательности $v(\mu, E_m) \to 0$ и, таким образом, по теореме 2, для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число m_ε, что

$$|\lambda_n(E_m)| < \varepsilon, \quad m \geqslant m_\varepsilon, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Следовательно,

$$|\lambda(E_m)| < \varepsilon, \quad m \geqslant m_\varepsilon, \quad \text{ч. т. д.}$$

Последний результат усиливается в следующем следствии, формулируемом здесь только для скалярных функций. На самом деле следствие 4 имеет место и для векторных функций; доказательство этого утверждения откладывается до § IV.10, в котором проводится более глубокое исследование свойств векторных функций множества.

4. Следствие (*Никодим*). *Пусть* $\{\mu_n\}$ — *последовательность счетно аддитивных скалярных функций, определенных на* σ-*алгебре* Σ. *Если* $\mu(E) = \lim_n \mu_n(E)$ *существует для каждого* $E \in \Sigma$, *то* μ *счетно аддитивна на* Σ, *и счетная аддитивность* μ_n *равномерна относительно* $n = 1, 2, \ldots$.

Доказательство. Последнее утверждение означает, что если $\{E_m\}$ есть убывающая последовательность множеств из Σ, имеющая пустое пересечение, то $\lim_m \mu_n(E_m) = 0$ равномерно относительно $n = 1, 2, \ldots$. Для того чтобы доказать это, мы заметим прежде всего, что в силу конечности функции μ_n на Σ конечна и ее полная вариация $v(\mu_n, S)$ (лемма 4.7). Пусть, далее,

$$\lambda_n(E) = \frac{v(\mu_n, E)}{v(\mu_n, S)}, \quad \lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{2^n}.$$

Тогда λ счетно аддитивна на Σ и $\lambda(E_m) \to 0$. Так как каждое μ_n абсолютно непрерывно относительно λ, то справедливость нашего утверждения вытекает из теоремы 2 и следствия 3, ч. т. д.

Пространства $ba(S, \Sigma, \mathfrak{X})$, $rba(S, \Sigma, \mathfrak{X})$, $ca(S, \Sigma, \mathfrak{X})$, $rca(S, \Sigma, \mathfrak{X})$.

Теперь мы покажем, что некоторые хорошо известные пространства функций множества являются B-пространствами.

Пусть Σ — некоторая алгебра подмножеств множества S, а $\mathfrak{X}$ — B-пространство. Через $ba(S, \Sigma, \mathfrak{X})$ будем обозначать совокупность всех ограниченных конечно аддитивных функций множества с областью определения Σ и областью значений, содержащейся в $\mathfrak{X}$. Ясно, что сумма двух функций из $ba(S, \Sigma, \mathfrak{X})$ также принадлежит $ba(S, \Sigma, \mathfrak{X})$ и что если μ принадлежит $ba\,(=ba(S, \Sigma, \mathfrak{X}))$ и α — скаляр, то и $\alpha\mu$ содержится в ba. Следовательно, ba есть линейное векторное пространство. Если норму элемента μ определить равенством

$$|\mu| = \sup_{E \in \Sigma} |\mu(E)|,$$

то ba становится линейным нормированным пространством. Для того чтобы убедиться в его полноте, предположим, что $\{\mu_n\}$ есть фундаментальная последовательность в ba. Ясно, что для каждого $E \in \Sigma$ последовательность $\{\mu_n(E)\}$ фундаментальна в $\mathfrak{X}$, так что равенством $\mu(E) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(E)$ определяется некоторый элемент $\mu \in ba$. Для данного $\varepsilon > 0$ выберем n_ε так, что $|\mu_n - \mu_m| \leqslant \varepsilon$ при $m, n \geqslant n_\varepsilon$. Тогда $\mu(E) - \mu_n(E) = \lim\limits_{m\to\infty}(\mu_m(E) - \mu_n(E))$, откуда следует, что $|\mu - \mu_n| \leqslant \varepsilon$ при $n \geqslant n_\varepsilon$. Таким образом, $\mu_n \to \mu$, откуда и вытекает полнота пространства $ba(S, \Sigma, \mathfrak{X})$. Мы доказали, что $ba(S, \Sigma, \mathfrak{X})$ является B-пространством.

Если $\mathfrak{X}$ есть множество вещественных или комплексных чисел, то, согласно лемме 1.5,

$$\sup_{E \in \Sigma} |\mu(E)| \leqslant v(\mu, S) \leqslant 4 \sup_{E \in \Sigma} |\mu(E)|.$$

Отсюда следует, что $v(\mu, S)$ является нормой в пространстве $ba(S, \Sigma, \mathfrak{X})$, эквивалентной норме $\sup\limits_{E \in \Sigma} |\mu(E)|$.

Ясно, что совокупность $ca(S, \Sigma, \mathfrak{X})$ всех счетно аддитивных функций множества, принадлежащих $ba(S, \Sigma, \mathfrak{X})$, является линейным многообразием в $ba(S, \Sigma, \mathfrak{X})$. Для того чтобы убедиться в его замкнутости, предположим, что $\mu \in ba$ и $\{\mu_n\}$ — последовательность элементов из $ca(S, \Sigma, \mathfrak{X})$, сходящаяся к μ. Пусть $\{E_m\}$ — последовательность попарно непересекающихся множеств из Σ, сумма которых E также принадлежит Σ. Тогда при $n \to \infty$

$$\mu_n(E) - \sum_{j=1}^{m} \mu_n(E_j) = \mu_n\Big(\bigcup_{j=m+1}^{\infty} E_j\Big) \to \mu\Big(\bigcup_{j=m+1}^{\infty} E_j\Big) = \mu(E) - \sum_{j=1}^{m} \mu(E_j)$$

равномерно относительно $m = 1, 2, \ldots$. С другой стороны, при $m \to \infty$ $\mu_n(E) - \sum\limits_{j=1}^{m} \mu_n(E_j) \to 0$ для каждого $n = 1, 2, \ldots$. Но тогда в силу леммы I.7.6

$$\mu(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j),$$

что и означает счетную аддитивность μ на Σ. Таким образом, $ca(S, \Sigma, \mathfrak{X})$ есть замкнутое линейное многообразие в $ba(S, \Sigma, \mathfrak{X})$, оно является, следовательно, B-пространством.

Если S — топологическое пространство, то через $rba(S, \Sigma, \mathfrak{X})$ будет обозначаться совокупность всех регулярных функций множества, принадлежащих $ba(S, \Sigma, \mathfrak{X})$. Легко видеть, что $rba(S,\Sigma, \mathfrak{X})$ является линейным подпространством в $ba(S, \Sigma, \mathfrak{X})$. Предположим, что $\mu \in ba(S, \Sigma, \mathfrak{X})$, и пусть $\{\mu_n\}$ — последовательность элементов пространства $rba(S, \Sigma, \mathfrak{X})$, сходящаяся к μ. Пусть даны $\varepsilon > 0$ и $E \in \Sigma$, выберем столь большое n, что $|\mu-\mu_n| \leqslant \varepsilon$. Пусть $F, G \in \Sigma$ таковы, что $\overline{F} \subseteq E$, а E содержится во внутренности множества G и $|\mu_n(A)| \leqslant \varepsilon$ для каждого $A \in \Sigma$ такого, что $A \subseteq G-F$. Тогда для такого A мы имеем, что $|\mu(A)| \leqslant 2\varepsilon$, откуда следует, что $\mu \in rba(S, \Sigma, \mathfrak{X})$. Таким образом, $rba(S, \Sigma, \mathfrak{X})$ есть замкнутое линейное многообразие в $ba(S, \Sigma, \mathfrak{X})$. Оно является, следовательно, B-пространством.

Совокупность $rca(S, \Sigma, \mathfrak{X})$ всех регулярных счетно аддитивных мер из $ba(S, \Sigma, \mathfrak{X})$ является пересечением $ca(S, \Sigma, \mathfrak{X})$ и $rba(S, \Sigma, \mathfrak{X})$. Следовательно, $rca(S, \Sigma, \mathfrak{X})$ также есть замкнутое линейное подпространство в $ba(S, \Sigma, \mathfrak{X})$, а значит, и оно является B-пространством.

Условимся, что если $\mathfrak{X}$ — пространство скаляров (вещественных или комплексных), то буква $\mathfrak{X}$ будет, как правило, опускаться в обозначениях типа $ca(S, \Sigma, \mathfrak{X})$. Таким образом, $ca(S, \Sigma)$ есть пространство всех определенных на Σ вещественных или комплексных счетно аддитивных функций множества.

Как мы только что видели, пространства $ba(S, \Sigma)$ и $ca(S, \Sigma)$ являются B-пространствами. В некоторых случаях бывает полезно знать, что они, кроме того, представляют собой полные структуры. В заключение этого параграфа мы сделаем некоторые замечания относительно свойств отношения порядка в этих пространствах и докажем еще одну теорему о разложении.

Пусть Σ — некоторая алгебра подмножеств множества S; если μ есть аддитивная функция множества, такая, что $\mu(E) \geqslant 0$, $E \in \Sigma$, то мы говорим, что μ *положительна* и пишем $\mu \geqslant 0$. Если $\mu_1 - \mu_2 \geqslant 0$, мы пишем $\mu_1 \geqslant \mu_2$ или $\mu_2 \leqslant \mu_1$. Легко видеть, что это отношение превращает в частично упорядоченное (I.2.1) множество всех определенных на Σ вещественных или комплексных аддитивных функций множества. Термины «мажоранта» и «верхняя грань» и т. д. здесь имеют тот же смысл, что и в определении I.2.3.

5. Теорема. *Каждое обладающее мажорантой (минорантой) подмножество частично упорядоченного множества определенных на некоторой алгебре аддитивных скалярных функций множества имеет верхнюю (нижнюю) грань.*

Доказательство. Для доказательства этой теоремы достаточно, очевидно, показать, что произвольное множество $\{\mu_\alpha\}$ положительных элементов имеет нижнюю грань μ. Положим, по определению,

$$\mu(E)=\inf\{\mu_{\alpha_1}(E_1)+\ldots+\mu_{\alpha_n}(E_n)\}, \quad E\in\Sigma,$$

где нижняя грань берется по всем конечным подмножествам $\{\alpha_i\}$ индексов и всем конечным семействам попарно непересекающихся множеств $\{E_i\}$ из Σ, сумма которых равна E. Прежде всего мы покажем, что μ аддитивна на Σ. Предположим, что E и F — непересекающиеся множества из Σ и $\varepsilon>0$ произвольно. Пусть множество $E\bigcup F$ разбито на попарно непересекающиеся подмножества $A_1, \ldots, A_m$, принадлежащие Σ и такие, что

$$\mu_{\alpha_1}(A_1)+\ldots+\mu_{\alpha_m}(A_m)\leqslant\mu(E\bigcup F)+\varepsilon$$

при надлежащем выборе индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$. Если $E_i=A_iE$ и $F_i=$ $=A_iF$, то

$$\mu(E)+\mu(F)\leqslant\Sigma\mu_{\alpha_i}(E_i)+\Sigma\mu_{\alpha_i}(F_i)=\Sigma\mu_{\alpha_i}(A_i)\leqslant\mu(E\bigcup F)+\varepsilon,$$

откуда ввиду произвольности $\varepsilon>0$ вытекает, что

$$\mu(E)+\mu(F)\leqslant\mu(E\bigcup F).$$

Пусть, далее, $\{B_i\}$, $\{C_i\}$ — конечные разбиения множеств E и F на попарно непересекающиеся подмножества, принадлежащие Σ и такие, что

$$\Sigma\mu_{\alpha_i}(B_i)<\mu(E)+\varepsilon, \quad \Sigma\mu_{\beta_j}(C_j)<\mu(F)+\varepsilon.$$

Тогда

$$\mu(E\bigcup F)\leqslant\Sigma\mu_{\alpha_i}(B_i)+\Sigma\mu_{\beta_j}(C_j)<\mu(E)+\mu(F)+2\varepsilon$$

и, следовательно,

$$\mu(E\bigcup F)\leqslant\mu(E)+\mu(F),$$

чем и доказана аддитивность μ. Для того чтобы убедиться в том, что μ — нижняя грань множества $\{\mu_\alpha\}$, предположим, что ν есть аддитивная функция множества такая, что $\nu\leqslant\mu_\alpha$ для каждого α. Тогда для любого конечного разбиения $E_1, \ldots, E_n$ множества E и любого выбора $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ индексов мы имеем $\nu(E_i)\leqslant\mu_{\alpha_i}(E_i)$ и, следовательно,

$$\nu(E)=\Sigma\nu(E_i)\leqslant\Sigma\mu_{\alpha_i}(E_i),$$

откуда и вытекает, что $\nu(E)\leqslant\mu(E)$, ч. т. д.

Отметим еще, что предыдущая теорема не предполагает ограниченности функций множества.

6. Следствие. *Структуры $ba(S, \Sigma)$ и $ca(S, \Sigma)$ полны.*

Доказательство. Достаточно показать, что если $\mu_\alpha\geqslant0$, то нижняя грань μ подмножества $\{\mu_\alpha\}$ ограничена или счетно аддитивна соответственно. Если каждое μ_α принадлежит $ba(S, \Sigma)$, то из неравенства $0 \leqslant \mu(E) \leqslant \mu_\alpha(E)$, $E \in \Sigma$, вытекает, что $\mu \in ba(S, \Sigma)$. Если $\mu_\alpha \in ca(S, \Sigma)$ и если $\{E_n\} \subseteq \Sigma$, $E_{n+1} \subseteq E_n$, $\bigcap E_n = \varnothing$, то $\lim_n \mu_\alpha(E_n) = 0$. Так как $0 \leqslant \mu(E_n) \leqslant \mu_\alpha(E_n)$, то $\lim_n \mu(E_n) = 0$ и, следовательно, $\mu \in ca(S, \Sigma)$, ч. т. д.

Теперь мы покажем, что если $\lambda \in ba(S, \Sigma)$, то λ можно единственным способом представить в виде суммы счетно аддитивной функции множества и функции, конечно аддитивной в некотором максимальном смысле.

7. Определение. Если λ принадлежит $ba(S, \Sigma)$, причем $\lambda \geqslant 0$, то мы говорим, что λ является *вполне конечно аддитивной*, если из $0 \leqslant \mu \leqslant \lambda$ и $\mu \in ca(S, \Sigma)$ вытекает, что $\mu = 0$.

8. Теорема. *Если λ принадлежит $ba(S, \Sigma)$ и $\lambda \geqslant 0$, то λ можно единственным способом представить в виде $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$, $\lambda_i \geqslant 0$, где λ_1 счетно аддитивная, а λ_2 вполне конечно аддитивная функции множества, принадлежащие $ba(S, \Sigma)$.*

Доказательство. Обозначим через C множество всех μ из $ca(S, \Sigma)$, таких, что $0 \leqslant \mu \leqslant \lambda$. Пусть μ_n, $n = 1, 2, \ldots$, выбраны из C таким образом, что $\lim_n \mu_n(S) = \sup_{\mu \in C} \mu(S) < \infty$. Так как $\mu_i \leqslant \sum_{j=1}^{n} \mu_j$, $i = 1, \ldots, n$, то ввиду следствия 6 множество $\{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$ имеет верхнюю грань $\overline{\mu}_n \in ca(S, \Sigma)$. Ясно, что $\overline{\mu}_1 \leqslant \overline{\mu}_2 \leqslant \ldots \leqslant \overline{\mu}_n \leqslant \ldots$. Пусть Σ_1 обозначает σ-алгебру, порождаемую алгеброй Σ; обозначим однозначно определенные продолжения (5.8) мер $\{\overline{\mu}_n\}$ на Σ_1 теми же самыми символами. Так как продолжение на Σ_1 заданной на Σ неотрицательной функции множества неотрицательно, то $\{\overline{\mu}_n(E)\}$ для каждого $E \in \Sigma_1$ есть ограниченное неубывающее множество вещественных чисел. Положим $\lambda_1(E) = \lim_n \overline{\mu}_n(E)$, $E \in \Sigma_1$. Ввиду следствия 4 λ_1 счетно аддитивна на Σ_1, и, следовательно, ее сужение на Σ принадлежит $ca(S, \Sigma)$. Положим $\lambda_2(E) = \lambda(E) - \lambda_1(E)$, $E \in \Sigma$; ясно, что $\lambda_2 \geqslant 0$. Если λ_2 не является вполне конечно аддитивной, то существует такое отличное от нуля $\lambda' \in ca(S, \Sigma)$, что $\lambda' \leqslant \lambda - \lambda_1$; но тогда $\lambda_1 \leqslant \lambda_1 + \lambda' \leqslant \lambda$ и $\sup_{\mu \in C} \mu(S) = \lambda_1(S) < \lambda_1(S) + \lambda'(S)$. Мы пришли к противоречию. Для доказательства единственности разложения предположим, что $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = \nu_1 + \nu_2$, где $\lambda_1, \nu_1 \in ca(S, \Sigma)$, а λ_2, ν_2 — вполне конечно аддитивные неотрицательные функции множества. Тогда $\lambda_1 - \nu_1 = \nu_2 - \lambda_2$ и, следовательно, $\sup(\lambda_1 - \nu_1, 0) = \sup(\nu_2 - \lambda_2, 0)$. Ввиду следствия 6 $\sup(\lambda_1 - \nu_1, 0) \in ca(S, \Sigma)$ и, ясно, что $0 \leqslant \sup(\lambda_1 - \nu_1, 0) \leqslant \nu_2$, так что $\sup(\lambda_1 - \nu_1, 0) = 0$, т. е. $\lambda_1(E) \leqslant \nu_1(E)$, $E \in \Sigma$. Аналогично

$\sup(\nu_1-\lambda_1, 0)=0$ и, следовательно, $\nu_1(E) \leqslant \lambda_1(E)$, $E \in \Sigma$. Таким образом, $\lambda_i=\nu_i$, ч. т. д.

Этот результат можно распространить и на комплексные функции множества, разлагая их на вещественную и мнимую, положительную и отрицательную части с помощью теоремы о разложении в смысле Жордана (1.8). Мы предоставляем сделать это читателю.

8. Взаимосвязь функций множества

В этом параграфе через Σ обозначается некоторая алгебра подмножеств некоторого множества S и через μ — конечно аддитивная функция множества, определенная для $E \in \Sigma$. Алгебра Σ_1 является подалгеброй алгебры Σ, а μ_1 есть сужение μ с Σ на Σ_1. Существует несколько элементарных, но полезных соотношений между μ- и μ_1-измеримостями, μ- и μ_1-интегрируемостями и т. д., эти соотношения и рассматриваются в настоящем параграфе.

Прежде всего, если μ неотрицательна, то ясно, что $v^*(\mu, E) \leqslant v^*(\mu_1, E)$ для $E \subseteq S$. Таким образом, из сходимости по мере μ_1 вытекает сходимость по мере μ; функция, эквивалентная нулю, и нуль-множество относительно μ_1 будут также функцией, эквивалентной нулю, и нуль-множеством и относительно μ. Так как μ_1-простая функция является, очевидно, и μ-простой, то отсюда непосредственно вытекает, то μ_1-измеримая функция будет и μ-измеримой.

Если f есть μ_1-интегрируемая простая функция, то ясно, что f будет также и μ-интегрируемой простой функцией и что $\int_E f(s)\mu_1(ds) = \int_E f(s)\mu(ds)$ для каждого $E \in \Sigma_1$. Пусть f — μ_1-интегрируемая функция, а $\{f_n\}$ — последовательность μ_1-интегрируемых простых функций, сходящихся к f по мере μ_1 и таких, что

$$\lim_{m, n \to \infty} \int_S |f_n(s) - f_m(s)| \mu_1(ds) = 0.$$

Тогда $f_n \to f$ и по мере μ и

$$\lim_{m, n \to \infty} \int_S |f_n(s) - f_m(s)| \mu(ds) = 0.$$

Следовательно, для каждого $E \in \Sigma_1$

$$\int_E f(s)\mu_1(ds) = \lim_{n \to \infty} \int_E f_n(s)\mu_1(ds) = \int_E f(s)\mu(ds).$$

Эти замечания мы сформулируем в виде следующей леммы.

1. Лемма. *Рассмотрим некоторое множество S, некоторую алгебру Σ его подмножеств и определенную на Σ неотрицательную*

конечно аддитивную функцию множества μ. *Пусть* Σ_1 — *подалгебра алгебры* Σ, *а* μ_1 — *сужение* μ *с* Σ *на* Σ_1. *Тогда*

(a) *из сходимости по мере* μ_1 *вытекает сходимость по мере* μ;

(b) *функция, эквивалентная нулю относительно* μ_1, *эквивалентна нулю и относительна* μ;

(c) *нуль-множество относительно* μ_1 *является нуль-множеством относительно* μ;

(d) μ_1-*измеримая функция является и* μ-*измеримой*;

(e) μ_1-*интегрируемая функция* f *является и* μ-*интегрируемой, причем*

$$\int_E f(s)\,\mu_1(ds) = \int_E f(s)\,\mu(ds),\ E \in \Sigma_1.$$

Пусть $\mathfrak{X}$ — произвольное B-пространство. Из пунктов (d) и (e) вытекает, что функция $f \in L_p(S, \Sigma_1, \mu_1, \mathfrak{X})$ принадлежит также и $L_p(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$ и что ее норма в обоих пространствах одна и та же. Таким образом, $L_p(S, \Sigma_1, \mu_1, \mathfrak{X})$ допускает естественное изометрическое вложение в $L_p(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$ и может поэтому рассматриваться как подпространство пространства $L_p(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$.

2. Лемма. *В предположениях леммы 1 вполне* μ_1-*измеримая функция из* $L_p(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$ *принадлежит* $L_p(S, \Sigma_1, \mu_1, \mathfrak{X})$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{f_n\}$ μ_1-простых функций, сходящуюся по мере μ_1 к функции $f \in L_p(\mu) = L_p(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$. Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 2.22, мы можем и будем предполагать, что $|f_n(s)| \leqslant 2|f(s)|$ для всех $s \in S$. По теореме Лебега (6.16) $f_n \to f$ в $L_p(\mu)$ и, следовательно, $\{f_n\}$ есть фундаментальная последовательность в $L_p(\mu)$, а $\{|f_n(\cdot)|^p\}$ — фундаментальная последовательность в $L_1(\mu)$. Так как $|f_n(\cdot)|^p$ есть μ_1-простая функция, то ее μ_1-интеграл совпадает с ее μ-интегралом и, таким образом, $\{|f_n(\cdot)|^p\}$ есть фундаментальная последовательность в $L_1(\mu_1)$. Так как $|f_n(\cdot)|^p$ сходится к $|f(\cdot)|^p$ по мере μ_1, то из определения 2.17 вытекает, что функция $|f(\cdot)|^p$ μ_1-интегрируема и, следовательно, $f \in L_p(\mu_1)$, ч. т. д.

Кроме сужения μ на некоторую подалгебру алгебры Σ, в теории интегрирования часто встречается и сужение другого типа. В нижеследующем его определении функция μ не предполагается неотрицательной.

Предположим, что E есть некоторое множество из Σ. Если мы определим $\Sigma(E) = \{F \in \Sigma \mid F \subseteq E\}$, то ясно, что $\Sigma(E)$ будет алгеброй подмножеств множества E, что $\Sigma(E)$ будет семейством всех множеств AE, $A \in \Sigma$, и что если Σ является σ-алгеброй, то и $\Sigma(E)$ будет σ-алгеброй. $\Sigma(E)$ называется *сужением* Σ *на* E. Если Σ_1 является алгеброй, $E \in \Sigma_1$, и Σ — σ-алгебра, порожденная Σ_1, то легко показать, что $\Sigma(E)$ будет σ-алгеброй, порождаемой $\Sigma_1(E)$. Действительно, $\Sigma(E)$ есть σ-алгебра, содержащая $\Sigma_1(E)$, и обратно, если Σ_2 есть σ-алгебра подмножеств множества E, содержащая $\Sigma_1(E)$, то ясно, что совокупность сумм множества из Σ_2 с множеством из $\Sigma(S-E)$ является σ-алгеброй, содержащей Σ_1, так что $\Sigma_2 \supseteq \Sigma(E)$.

Сужение λ функции μ на $\Sigma(E)$ иногда называется *сужением* μ на E. Ясно, что $(E, \Sigma(E), \lambda)$ будет пространством с мерой, если таковым является (S, Σ, μ). Читатель без труда сможет доказать, что если $F \subseteq E$, то $v(\lambda, F) = v(\mu, F)$. Совокупность определенных на E функций, векторных или со значениями из расширенной области вещественных чисел, находится, очевидно, во взаимно однозначном соответствии с множеством функций, определенных на S и обращающихся в нуль вне E; мы должны только естественным образом продолжить область определения функции f, определенной только на E, на все S, полагая $f(s) = 0$, если $s \notin E$. Тогда последовательность функций, определенных на E, в том и только в том случае будет сходиться по мере λ, если последовательность их продолжений сходится по мере μ. В этом случае исходная последовательность функций, определенных на E, называется *сходящейся на E по мере* μ. Аналогично если области определения двух функций f и g обе содержат множество E, то утверждение, что $f(s) = g(s)$ *почти всюду относительно* μ *на* E означает, что существует такое множество $A \subseteq E$, что $v^*(\mu, A) = 0$ и что $f(s) = g(s)$ для каждого $s \in E - A$. Функция, определенная на E, является λ-простой или λ-измеримой в том и только в том случае, если ее естественное продолжение на S является соответственно μ-простой или μ-измеримой функцией. Понятия λ-интегрируемости и μ-интегрируемости связаны между собой точно таким же образом. Следовательно, пространство $L_p(E, \Sigma(E), \lambda, \mathfrak{X})$ изометрически эквивалентно множеству всех функций из $L_p(S\ \Sigma\ \mu, \mathfrak{X})$, обращающихся в нуль вне E, так что первое пространство может рассматриваться как подпространство второго.

3. Лемма. *Пусть (S, Σ, μ) — пространство с положительной мерой, а μ_1 — сужение μ на подалгебру Σ_1 алгебры Σ. Если Σ является σ-алгеброй, порождаемой Σ_1, и если μ_1 σ-конечна на Σ_1, то множество μ_1-интегрируемых простых функций всюду плотно в $L_p(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$ при $1 \leqslant p < \infty$.*

Доказательство. Так как множество μ-интегрируемых простых функций всюду плотно в $L_p(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$ (ввиду следствия 3.8), то достаточно доказать, что характеристическая функция χ_E множества E из Σ, для которого $\mu(E) < \infty$, является пределом в $L_p(S, \Sigma, \mu)$ последовательности χ_{E_n}, где $E_n \in \Sigma_1$. Пусть A_m — возрастающая последовательность таких множеств из Σ_1, для которых $\mu_1(A_m) < \infty$

и $\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m = S$. Так как $\mu(E) < \infty$, то $|\chi_{EA_m} - \chi_E|_p = \{\mu(E - A_m)\}^{1/p} \to 0$ и, следовательно, достаточно доказать, что χ_{EA_m} является пределом в $L_p(S, \Sigma, \mu)$ последовательности χ_{E_n}, где $E_n \in \Sigma_1$ при $m = 1, 2, \ldots$. Так как $\Sigma(A_m)$ порождается $\Sigma_1(A_m)$, то все наши рассуждения можно ограничить множеством A_m. Таким образом, мы можем и будем предполагать, не ограничивая этим общности наших выводов, что $\mu(S) < \infty$. По лемме 7.1, замыкание Σ_1 в метрическом пространстве $\Sigma(\mu)$ является σ-алгеброй, содержащей Σ_1, и, следовательно, каждое множество E из Σ является пределом последовательности $\{E_n\}$ множеств из Σ_1. Так как $\mu(S) < \infty$, то функция, тождественно равная единице, принадлежит $L_p(S, \Sigma\mu)$, и мажорирует $\chi_{E_n}(s)$. По теореме 3.7, $\chi_{E_n} \to \chi_E$ в $L_p(S, \Sigma, \mu)$, ч. т. д.

4. Лемма. *Алгебра, порожденная счетным семейством множеств, сама счетна.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{C} = \{E_n, n = 1, 2, \ldots\}$ — счетная система подмножеств множества S. Обозначим через $\mathscr{C}_1$ совокупность всех конечных сумм множеств из $\mathscr{C}$, через $\mathscr{B}_1$ совокупность всех дополнений A' в S множеств A из $\mathscr{C}_1$, через $\mathscr{C}_2$ совокупность конечных сумм множеств из $\mathscr{B}_1$, через $\mathscr{B}_2$ совокупность всех дополнений A' множеств A из $\mathscr{C}_2$ и т. д. Ясно, что если A и $B \in \mathscr{C}_n$, то

$$A \cup B \in \mathscr{C}_n, \quad A' \in \mathscr{C}_{n+1}, \quad AB = (A' \cup B')' \in \mathscr{C}_{n+2}.$$

Таким образом, семейство $\Sigma = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{C}_n$ является алгеброй и, очевидно, минимальной из алгебр, содержащих $\mathscr{C}$. Элементарная индукция показывает, что C_n, $n = 1, 2, \ldots$, счетно и, следовательно, Σ есть счетная алгебра, ч. т. д.

5. Лемма. *Пусть (S, Σ, μ) — пространство с положительной мерой, а G — сепарабельное подмножество в $L_p(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$, где $1 \leqslant p < \infty$. Тогда существуют множество $S_1 \in \Sigma$, σ-алгебра Σ_1, содержащаяся в $\Sigma(S_1)$, и замкнутое сепарабельное подпространство $\mathfrak{X}_1$ пространства $\mathfrak{X}$ такие, что сужение μ_1 функции μ на Σ_1, обладает следующими свойствами:*

(I) *пространство с мерой $(S_1, \Sigma_1, \mu_1,)$ σ-конечно;*

(II) *B-пространство $L_p(S_1, \Sigma_1, \mu_1, \mathfrak{X}_1)$ сепарабельно;*

(III) $G \subseteq L_p(S_1, \Sigma_1, \mu_1, \mathfrak{X}_1)$.

Доказательство. Пусть последовательность $\{f_n\}$ всюду плотна в G и $f_n^{(m)}$, $m, n = 1, 2, \ldots$, — μ-интегрируемые простые функции, для которых $\lim\limits_{m\to\infty} |f_n^{(m)} - f_n|_p = 0$. Обозначим через X_0 счетное множество ненулевых значений функций $f_n^{(m)}$ и через $\mathfrak{X}_1$ замкнутое линейное многообразие в $\mathfrak{X}$, порожденное X_0. По лемме II.1.5, $\mathfrak{X}_1$ сепарабельно. Обозначим через $\mathscr{C}$ счетную совокупность множеств $E \in \Sigma$, имеющих вид $E = \{s \mid s \in S, f_n^{(m)}(s) = x_0\}$, где m, n — произвольные натуральные числа, а $x_0 \in X_0$. Пусть $S_1 = \bigcup \mathscr{C}$, Σ_0 — алгебра подмножеств множества S_1, порожденная $\mathscr{C}$, и Σ_1 — σ-алгебра подмножеств множества S_1, порожденная Σ_0. Так как для каждого E из $\mathscr{C}$ $\mu(E) < \infty$ и все функции $f_n^{(m)}$ обращаются в нуль на дополнении к S_1, то справедливость утверждений (I) и (III) получается непосредственно. Если μ_0 является сужением μ на Σ_0, то, по лемме 3, множество μ_1-интегрируемых μ_0-простых функций всюду плотно в $L_p(S_1, \Sigma_1, \mu_1, \mathfrak{X}_1)$. Так как Σ_0 счетно (по лемме 4), а $\mathfrak{X}_1$ сепарабельно, то это множество функций является сепарабельным и, значит, его замыкание, т. е. $L_p(S_1, \Sigma_1, \mu_1, \mathfrak{X}_1)$, тоже сепарабельно, ч. т. д.

9. Упражнения

Во всех приводимых ниже упражнениях, кроме тех случаев, когда явно оговорено противное, S есть некоторое множество, Σ — некоторая алгебра его подмножеств и μ—определенная на Σ конечно аддитивная (комплексная или со значениями из расширенной области вещественных чисел) функция множества. Буквой f обозначается функция, отображающая S в B-пространство $\mathfrak{X}$.

1. Показать, что, для того чтобы функция f принадлежала $TM(S, \Sigma, \mu)$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\varepsilon > 0$ существовало такое множество $E_\varepsilon \in \Sigma$ и конечное число таких попарно непересекающихся множеств $A_1, \ldots, A_n \in \Sigma$, что $A_1 \cup \ldots \cup A_n = E'_\varepsilon$, $v(\mu, E_\varepsilon) < \varepsilon$ и $\sup\limits_{s, t \in A_j} |f(s) - f(t)| < \varepsilon$, $j = 1, \ldots, n$.

2. Пусть $A \subseteq S$ — нуль-множество относительно μ. Показать, что в Σ не обязательно имеется такое содержащее A множество E, что $v(\mu, E) = 0$.

3. Обозначим через S интервал $(-\infty, +\infty]$, через Σ—алгебру конечных сумм полуоткрытых слева интервалов и через μ—сужение меры Лебега на Σ. Показать, что, для того чтобы вещественная функция f была μ-измеримой, необходимо и достаточно, чтобы она была непрерывна в каждой точке, не принадлежащей некоторому множеству E, мера Лебега которого равна нулю, а для того, чтобы она была μ-интегрируемой, необходимо и достаточно, чтобы она была μ-измеримой и интегрируемой по Лебегу.

4. Показать, что, даже если μ ограничена, равномерно ограниченная последовательность $\{f_n\}$ определенных на S μ-измеримых вещественных функций может сходиться к нулю всюду, не будучи сходящейся к нулю по мере μ.

5. Показать, что из условий (I), (II), (III) теоремы 3.6 вытекает, что f принадлежит $L_p(S, \Sigma, \mu)$ и что $|f_n - f|_p$ сходится к нулю, даже если $\{f_n\}$ есть обобщенная последовательность.

6. Пусть μ ограничена. Предположим, что алгебра Σ сепарабельна относительно метрики $\varrho(E, F) = v(\mu, E\Delta F)$. Показать, что если B-пространство $\mathfrak{X}$ сепарабельно, то и $L_p(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$ сепарабельно.

7. Показать, что если μ не ограничена или ограничена, но не является счетно аддитивной, то $F(S)$ не обязательно будет линейным топологическим пространством.

8. Показать, что S может быть суммой возрастающей последовательности нуль-множеств, даже если $\mu \not\equiv 0$.

9. Показать, что если определенная на S функция f принимает значения из бикомпактного подмножества $\mathfrak{X}$, и если для каждого открытого подмножества $G \subseteq \mathfrak{X}$, $f^{-1}(G) \in \Sigma$, то f вполне μ-измерима.

10. Построить пример неполного пространства $L_1(S, \Sigma, \mu)$. Показать, что если $TM(S, \Sigma, \mu)$ полно, то и $L_1(S, \Sigma, \mu)$ полно.

11. Показать, что если для некоторого p, $1 \leqslant p < \infty$, функция $f \in L_p(S, \Sigma, \mu)$, то $f \in TM(S, \Sigma, \mu)$.

12. Пусть Σ порождает σ-алгебру Σ_1, а μ положительна и счетно аддитивна на Σ. Показать, что если мера в пространстве (S, Σ, μ) не σ-конечна, то μ может иметь два различных счетно аддитивных продолжения на Σ_1.

13. Показать, что отображение $TM(S, \Sigma, \mu) \times TM(S, \Sigma, \mu)$ в $TM(S, \Sigma, \mu)$, при котором $[f, g] \to h$, где $h(s) = f(s)g(s)$, непрерывно. Показать, что это неверно, если TM заменить на M.

14. Пусть Σ_1 — подалгебра алгебры Σ, а μ_1 — сужение μ на Σ_1. Показать, что для каждого E из Σ_1 $v(\mu_1 E) \leqslant v(\mu, E)$, но что неравенства $v^*(\mu_1, E) \leqslant v^*(\mu, E)$ и $v^*(\mu, E) \leqslant v^*(\mu_1, E)$ не обязаны выполняться для каждого $E \subseteq S$.

15. Показать, что лемма 8.2 не остается справедливой, если вместо «вполне μ-измеримая» писать просто «μ-измеримая».

16. Показать, что если положить $AB = A \cap B$, $A + B = A\Delta B$, то Σ будет алгеброй, в которой $A^2 = A$ и в которой нуль-множества относительно μ образуют идеал.

17. Предположим, что S является нормальным топологическим пространством, а μ — регулярная функция, определенная на поле Σ борелевских множеств из S. Показать, что если $\mathfrak{X}$ сепарабельно, то множество непрерывных функций из $TM(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$ всюду плотно в $TM(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$. Показать, что если $1 \leqslant p < \infty$, то множество непрерывных функций пространства $L_p(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X}$ всюду плотно в нем.

18. Пусть μ — конечная регулярная мера на борелевских подмножествах бикомпактного пространства S. Показать, что, для того чтобы функция f была μ-измеримой, необходимо и достаточно, чтобы для каждого ε существовало такое открытое множество E_ε, что $v^*(\mu, E_\varepsilon) < \varepsilon$ и что f непрерывна на $S - E_\varepsilon$.

19. Построить пример, в котором S является метрическим пространством, а μ — регулярна, но не счетно аддитивна.

20. Построить пример, в котором S является бикомпактным топологическим пространством, а μ — регулярна, но не ограничена и не счетно аддитивна.

21. Пусть S и S_1 — бикомпактные топологические пространства. Рассмотрим непрерывное отображение $\varphi : S \to S_1$. Пусть μ — регулярная ограниченная аддитивная функция множества, определенная на некоторой алгебре Σ множеств из S. Функцию множества ν определим равенством

$$\nu(E_1) = \mu(\varphi^{-1}(E_1))$$

для каждого $E_1 \subseteq S_1$ такого, что $\varphi^{-1}(E_1) \in \Sigma$. Показать, что ν является регулярной аддитивной функцией множества, определенной на алгебре $\{E_1 \mid \varphi^{-1}(E_1) \in \Sigma\}$.

22. Пусть S является топологическим пространством, а μ — ограниченная счетно аддитивная мера. Назовем множество $E \in \Sigma$ регулярным, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся такие множества F_1 и $F_2 \in \Sigma$, что $\overline{F}_1 \subseteq E$, $\overline{F}_2 \subseteq S—E$, $v(\mu, S—F_1—F_2) < \varepsilon$. Показать, что регулярные множества образуют σ-алгебру. Вывести отсюда, что если S — метрическое пространство и μ — ограниченная мера, определенная на σ-алгебре борелевских подмножеств S, то μ регулярна.

23. Предположим, что S — метрическое пространство, Σ — σ-алгебра, мера μ счетно аддитивна и ограничена, и пусть каждая непрерывная функция μ-измерима. Показать, что Σ^* содержит все борелевские множества.

24. Пусть S — бикомпактное топологическое пространство, обладающее тем свойством, что для каждого покрытия S конечным числом открытых множеств $G_1, \ldots, G_n$ существует такое покрытие $E_1, \ldots, E_m$ пространства S множествами из Σ, что каждое E_j содержится в некотором G_i. Показать, что если функция f непрерывна, то она μ-измерима.

25. Пусть (S, Σ, μ) — пространство с конечной мерой, Σ_1 — подалгебра σ-алгебры Σ, порождающая Σ, и μ_1 — сужение μ на Σ_1. Показать, что если $E \in \Sigma_1$, то $v(\mu_1, E) = v(\mu, E)$.

26. Пусть выполнены предположения упражнения 25, пусть ν — определенная на Σ комплексная счетно аддитивная функция множества и пусть ν_1 — сужение ν на Σ_1. Показать, что, для того чтобы ν была абсолютно непрерывной относительно μ, необходимо и достаточно, чтобы ν_1 была абсолютно непрерывной относительно μ_1.

27. В предположениях упражнения 26, $TM(S, \Sigma, \mu_1, \mathfrak{X})$ всюду плотно в $TM(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$.

28. Если (S, Σ, μ) — пространство с мерой, то $TM(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$ является F-пространством, а $M(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$ хотя и будет полным метрическим пространством, но не обязательно F-пространством.

29. При $0<p<1$ обозначим через $L_p(S, \Sigma, \mu)$ множество всех функций, для которых

$$|f|=\int_S |f(s)|^p \mu(ds)<\infty.$$

Показать, что

$$|f_1+f_2|\leqslant|f_1|+|f_2|,$$

несмотря на то, что для положительных f_1 и f_2

$$|f_1+f_2|^{1/p}\geqslant|f_1|^{1/p}+|f_2|^{1/p}.$$

30. Пусть (S, Σ, μ) — пространство с мерой и $0<p<1$. Показать, что пространство $L_p(S, \Sigma, \mu)$ упражнения 29 является F-пространством.

31. Пусть $1\leqslant p<\infty$ и f_1 и f_2 — положительные функции из L_p. Показать, что $|f_1+f_2|^p\geqslant|f_1|^p+|f_2|^p$.

32. Построить пример счетно аддитивной, ограниченной векторной функции μ, определенной на σ-алгебре Σ подмножеств множества S, для которого $v(\mu, S)=+\infty$.

33. Показать, что если (S, Σ, μ) — пространство с конечной положительной мерой, то определенная на S равномерно ограниченная обобщенная последовательность неотрицательных μ-простых функций $\{f_\alpha\}$ может сходиться к нулю для каждого $s\in S$, но не сходиться к нулю по мере μ.

34. Пусть (S, Σ, μ) — пространство с σ-конечной положительной мерой, а Σ_1 — подалгебра σ-алгебры Σ, порождающая Σ. Показать, что если $E\in\Sigma$, то

$$\mu(E)=\inf\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i),$$

где нижняя грань берется по совокупности всех последовательностей $\{E_i\}$ множеств из Σ_1, таких, что $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\supseteq E$.

35. Пусть (S, Σ, μ) — пространство с положительной мерой. Если $f\in L_1(S, \Sigma, \mu)$, $\{f_n\}$ — последовательность вещественных функций из $L_1(S, \Sigma, \mu)$ и $|f_n(s)|\leqslant f(s)$ при $s\in S$, то

$$\int_S \varliminf_{n\to\infty} f_n(s)\mu(ds)\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\int_S f_n(s)\mu(ds)\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\int_S f_n(s)\mu(ds)\leqslant$$
$$\leqslant\int_S \varlimsup_{n\to\infty} f_n(s)\mu(ds).$$

То же самое справедливо и в том случае, когда $f_n(s)\geqslant 0$ при $n=1, 2, \ldots$ и $s\in S$, однако если последовательность вещественных функций $\{f_n\}$

подчинена только тому условию, что $f_n \in L_1(S, \Sigma, \mu)$, $n=1, \ldots$, то эти неравенства уже не обязательно будут все выполняться.

36. Пусть S — вещественная ось, Σ — алгебра измеримых по Лебегу подмножеств S и μ — мера Лебега. Показать, что если $E \in \Sigma$, а a и b — вещественные числа, то $aE+b \in \Sigma$ и $\mu(aE+b)=|a|\mu(E)$. Показать, что если f μ-интегрируема, то функция g, определяемая равенством $g(s)=f(as+b)$, μ-интегрируема и

$$|a| \int_{-\infty}^{+\infty} f(as+b)\, ds = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\, ds.$$

37. Пусть S — вещественная ось, Σ — алгебра борелевских подмножеств S и μ — произвольная мера Бореля — Стильтьеса на Σ. Показать, что если вещественная функция f ограниченной вариации либо непрерывна слева, либо непрерывна справа, то она μ-измерима.

38. Пусть S — замкнутый единичный интервал, Σ — поле борелевских множеств из S и μ-мера Лебега. Найти сингулярную относительно μ неотрицательную меру, определенную для $E \in \Sigma$ и такую, чтобы каждая точка $p \in S$ имела меру нуль. (Указание: использовать канторово совершенное множество.)

39. Пусть (S, Σ, μ) определено как в упражнении 38. Найти определенную на S непрерывную монотонно возрастающую вещественную функцию f, такую, которая не может быть представлена в виде

$$f(s) = \int_0^s g(t)\, dt, \text{ где } g \in L_1(S, \Sigma, \mu).$$

40. Сохраняя предположения упражнения 36, возьмем $0 < \alpha < 1$, и пусть функция G определена на $S \times S$, непрерывна при всех (s, t) таких, что $s \neq t$, и

$$|G(s, t)| \leqslant |s-t|^{-1-\alpha} |\sin(s-t)|.$$

Показать, что если h — определенная на S ограниченная μ-измеримая функция, то функция $G(s, \cdot)\, h(\cdot)$ μ-интегрируема для каждого S и интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(s, t)\, h(t)\, dt$$

является непрерывной функцией s.

41. Построить лебеговское расширение меры Бореля, непосредственно используя теорему 5.4.

42. Пусть $1 \leqslant p < \infty$ и (S, Σ, μ) — пространство с мерой. Предположим, что $f \in L_p(S, \Sigma, \mu)$, $g \in L_q(S, \Sigma, \mu)$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ и $h(s) =$

$= f(s) g(s)$. Показать, что если $\left| \int\limits_S h(s) \mu(ds) \right| = |f|_p |g|_q$, то $g(s) = \overline{\operatorname{sgn}(f(s))} \, |f(s)|^{p-1}$ почти всюду, причем функция $\operatorname{sgn}(re^{i\theta})$ комплексного переменного $z = re^{i\theta}$, по определению, равна $e^{i\theta}$, если $r \neq 0$, и нулю, если $r = 0$. (Указание: рассмотреть случаи равенства на различных этапах доказательства 3.2.)

43. Пусть $1 \leqslant p < \infty$ и (S, Σ, μ) — пространство с мерой. Предположим, что $f, g \in L_p(S, \Sigma, \mu)$, и пусть $|f+g|_p = |f|_p + |g|_p$. Показать, что если $g \neq 0$, то $f = \alpha g$ для некоторого скаляра α.

44. Пусть (S, Σ, μ) — пространство с мерой. Предположим, что $\{f_n\}$ — последовательность μ-измеримых функций, отображающих S в $\mathfrak{X}$, и пусть f — функция, определенная на S и со значениями в $\mathfrak{X}$. Пусть, далее, для каждого $x^* \in \mathfrak{X}^*$ $x^* f_n(s) \to x^* f(s)$ при любом $s \in S$. Показать, что f μ-измерима.

45. Пусть (S, Σ, μ) — пространство с мерой. Показать, что условия (I) и (II) теоремы 6.15 можно заменить одним условием

$$\lim_{m \to \infty} \int\limits_{E_m} |f_n(s)|^p v(\mu, ds) = 0$$

равномерно относительно n, здесь $\{E_m\}$ есть произвольная убывающая последовательность множеств с пустым пересечением.

46. Показать, что лемма 8.3 не остается справедливой, если опустить предположение о σ-конечности μ_1 на Σ_1.

47. Пусть M — метрическое пространство, $A \subseteq M$ и $\alpha, \varepsilon > 0$. Положим $\Lambda_\varepsilon(A, \alpha) = \inf \sum\limits_{i=1}^{\infty} (\delta(A_i))^\alpha$, где $\{A_i\}$ есть произвольная последовательность множеств, покрывающих A и имеющих диаметр $\delta(A_i)$ меньше ε. Показать, что $\Lambda_\varepsilon(A, \alpha)$ есть внешняя мера, возрастающая вместе с ε, и что $\Lambda(A, \alpha) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \Lambda_\varepsilon(A, \alpha)$ тоже является внешней мерой. Можно показать, что каждое борелевское множество будет $\Lambda(A, \alpha)$-измеримым; мера Бореля, получаемая из $\Lambda(A, \alpha)$, известна как *α-мера Хаусдорфа*.

48. Пусть $\{A_n\}$ и $\{B_n\}$ — две последовательности подмножеств множества S, и пусть $A_n \to A$, $B_n \to B$ в том смысле, как это определено в п. 4.3. Показать, что $A_n B_n \to AB$, $A_n \cup B_n \to A \cup B$, $S - A_n \to S - A$.

10. Теорема Радона — Никодима

Мы уже видели, что интеграл $\int\limits_E f(s) \mu(ds)$ от μ-интегрируемой функции является абсолютно непрерывной функцией множества. До некоторой степени обратной к этому утверждению является важная теорема Радона — Никодима, утверждающая, что если

(S, Σ, μ) есть пространство с мерой, то каждая конечная скалярная аддитивная абсолютно непрерывная относительно μ функция множества λ имеет вид $\lambda(E) = \int_E f(s)\,\mu(ds)$, где f — некоторая μ-интегрируемая функция. Эта теорема (теорема 2) сначала будет доказана в предположении, что μ неотрицательна, а комплексный случай (теорема 7) будет рассмотрен после того, как будут установлены некоторые общие результаты о замене меры.

1. Лемма. *Пусть (S, Σ, μ) — пространство с конечной положительной мерой и λ — определенная на Σ конечная положительная абсолютно непрерывная относительно μ мера. Тогда существует и притом только одна такая функция f из $L_1(S, \Sigma, \mu)$, что*

$$\lambda(E) = \int_E f(s)\,\mu(ds), \quad E \in \Sigma.$$

Кроме того, $v(\lambda, S) = |f|_1$.

Доказательство. Обозначим через P множество неотрицательных интегрируемых функций h, для которых

$$\int_E h(s)\,\mu(ds) \leqslant \lambda(E), \quad E \in \Sigma.$$

Множество P можно частично упорядочить, полагая $h \leqslant g$, если $h(s) \leqslant g(s)$ почти всюду. Пользуясь леммой Цорна, мы покажем, что P содержит максимальный элемент. В самом деле, пусть Q — линейно упорядоченное подмножество множества P и $\alpha = \sup\limits_{h \in Q} \int_S h(s)\,\mu(ds)$.

Тогда $0 \leqslant \alpha \leqslant \lambda(S)$. Рассмотрим такую последовательность h_n элементов из Q, что

$$\int_S h_n(s)\,\mu(ds) \leqslant \int_S h_{n+1}(s)\,\mu(ds) \to \alpha.$$

Так как Q линейно упорядочено, то $h_n(s) \leqslant h_{n+1}(s)$ почти всюду, и, значит, без ограничения общности мы можем предположить, что $h_n(s) \leqslant h_{n+1}(S)$ всюду. Ввиду следствия 6.17 функция $h(s) = \lim\limits_n h_n(s)$ интегрируема, $\int_S h(s)\,\mu(ds) = \alpha$ и $h_n \leqslant h$, $n = 1, 2, \ldots$.

Для того чтобы убедиться, что h служит мажорантой для Q, возьмем произвольный элемент g из Q. Тогда либо $g \leqslant h_n$ для некоторого n и, значит $g \leqslant h$, либо $g \geqslant h_n$ при всех n, и тогда $g \geqslant h$ и

$$0 \geqslant \int_S g(s)\,\mu(ds) - \alpha = \int_S [g(s) - h(s)]\,\mu(ds) \geqslant 0,$$

откуда вытекает, что $g(s)=h(s)$ почти всюду. Таким образом, h является мажорантой для Q, и, по лемме Цорна, в P существует максимальный элемент f.

Положим

$$\lambda_1(E)=\lambda(E)-\int_E f(s)\mu(ds),\quad E\in\Sigma.$$

Тогда λ_1 будет абсолютно непрерывной относительно μ конечной неотрицательной мерой на Σ. Чтобы завершить доказательство, мы покажем, что $\lambda_1(E)=0$ для любого $E\in\Sigma$. Если это не так, то $\lambda_1(S)>0$ и найдется такое положительное число k, что

$$\text{(I)}\qquad \mu(S)-k\lambda_1(S)<0.$$

По теореме 4.10 о разложении в смысле Хана в Σ найдется такое множество A, что

$$\mu(EA)-k\lambda_1(EA)\leqslant 0,\quad \mu(EA')-k\lambda_1(EA')\geqslant 0,\quad E\in\Sigma,$$

а тогда, тем более,

$$\text{(II)}\quad \mu(EA)-k\lambda_1(E)\leqslant 0,\quad \mu(EA')-k\lambda_1(EA')\geqslant 0,\quad E\in\Sigma.$$

Следовательно,

$$\text{(III)}\qquad \frac{1}{k}\mu(EA)-\lambda_1(E)\leqslant 0,\quad E\in\Sigma.$$

Если $\mu(A)=0$, то $\lambda_1(A)=0$ и $\mu(S)=\mu(A'), \lambda_1(S)=\lambda_1(A')$, но тогда из неравенств (I) и (II) мы имеем

$$0\leqslant\mu(A')-k\lambda_1(A')=\mu(S)-k\lambda_1(S)<0.$$

Это противоречие доказывает, что $\mu(A)>0$.

Рассмотрим функцию g, определяемую следующим образом:

$$g(s)=\begin{cases}\dfrac{1}{k}, & s\in A;\\ 0, & s\notin A.\end{cases}$$

Тогда неравенство (III) можно переписать так:

$$\int_E g(s)\mu(ds)\leqslant\lambda_1(E)=\lambda(E)-\int_E f(s)\mu(ds),\quad E\in\Sigma,$$

откуда вытекает, что

$$\int_E[f(s)+g(s)]\mu(ds)\leqslant\lambda(E),\quad E\in\Sigma.$$

Но, так как $f+g>f$, это противоречит максимальности f в P. Следовательно, $\lambda_1(E)=0$ для каждого E из Σ.

Равенство $v(\lambda, S) = |f|_1$ — это просто теорема 2.20 (а). С другой стороны, если f и g — две такие μ-интегрируемые функции, что

$$\lambda(E) = \int_E f(s)\,\mu(ds) = \int_E g(s)\,\mu(ds),$$

то по лемме 6.8 f и g эквивалентны. Этим устанавливается единственность f и завершается доказательство леммы.

→ 2. Теорема (*Радон — Никодим*). *Пусть* (S, Σ, μ) — *пространство с* σ-*конечной положительной мерой и* λ — *определенная на* Σ *конечная абсолютно непрерывная относительно* μ *мера. Тогда существует и притом только одна такая функция* $f \in L_1(S, \Sigma, \mu)$, *что*

$$\lambda(E) = \int_E f(s)\,\mu(ds), \quad E \in \Sigma.$$

Кроме того, $v(\lambda, S) = |f|_1$.

Доказательство. Если существование f уже установлено, то равенство $v(\lambda, S) = |f|_1$ вытекает из теоремы 2.20. Следовательно, равенства $\lambda(E) = 0$ и $|f|_1 = 0$ эквивалентны и имеют место тогда и только тогда, когда f равна нулю почти всюду. Отсюда непосредственно вытекает единственность f. Таким образом, все, что мы должны доказать, это существование f.

Так как λ можно разложить на вещественную и мнимую части, то мы можем предположить, что λ вещественна. Вещественную же функцию множества можно представить, в силу 4.11, в виде разности ее положительной и отрицательной вариаций, и, следовательно, мы можем также предположить, что f положительна. Пусть, далее, $\{E_n\}$ — последовательность измеримых множеств, таких, что $v(\mu, E_n) < \infty$, $E_n \subseteq E_{n+1}$ и $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = S$. По лемме 1, для каждого $n = 1, 2, \ldots$ существует неотрицательная интегрируемая функция f_n, обращающаяся в нуль на E_n', для которой

$$\int_E f_n(s)\,\mu(ds) = \lambda(E), \quad E \subseteq E_n.$$

Ввиду единственности f_n почти всюду в E_n $f_n(s) = f_{n+1}(s)$, и без ограничения общности можно предполагать, что $f_n(s) = f_{n+1}(s)$ всюду в E_n. Тогда $f_n \in L_1(S, \Sigma, \mu)$, $f_n(s) \leqslant f_{n+1}(s)$ и $\int_S f_n(s)\,\mu(ds) = \lambda(E_n) \leqslant \lambda(S)$. Положим $f(s) = \lim_{n\to\infty} f_n(s)$. Тогда ввиду 6.17

$$\lambda(E) = \lim_{n\to\infty} \lambda(E_n E) = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n(s)\,\mu(ds) = \int_E f(s)\,\mu(ds)$$

для каждого $E \in \Sigma$, ч. т. д.

Нижеследующие результаты представляют собой полезные дополнения к теореме Радона — Никодима и могут быть использованы для усиления этой теоремы. Основные среди них — теорема 4 и следствие 6, являющиеся важными предложениями о «замене меры».

3. Лемма. *Пусть* (S, Σ, μ) — *пространство с мерой, а* f — *определенная на* S μ-*измеримая функция. Предположим, что либо*

(a) (S, Σ, μ) — *пространство с положительной мерой и* f *неотрицательна, либо*

(b) f — *комплексная интегрируемая функция. Положим*

$$\lambda(E) = \int_E f(s)\,\mu(ds), \quad E \in \Sigma,$$

и пусть g — *функция, отображающая* S *в* B-*пространство* $\mathfrak{X}$. *Тогда, для того чтобы* g *была* λ-*измеримой, необходимо и достаточно, чтобы произведение* fg *было* μ-*измеримым.*

Доказательство. Пусть g λ-измерима. Для того чтобы доказать, что fg μ-измерима, мы должны доказать, что произведение $\chi_F fg$, где χ_F есть характеристическая функция произвольного множества F из Σ, для которого $v(\mu, F) < \infty$, вполне μ-измеримо. Заметим, прежде всего, что можно предполагать, что $v(\lambda, F) < \infty$. Действительно, если f интегрируема, то $v(\lambda, F) < \infty$ для всех $F \in \Sigma$; если же f предполагается только положительной и измеримой, положим $F_n = \{s \mid s \in F,\ f(s) \leqslant n\}$. Тогда $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ и для каждого n $v(\lambda, F_n) < \infty$. Так как

$$\chi_F(s) f(s) g(s) = \lim_n \chi_{F_n}(s) f(s) g(s), \quad s \in S,$$

и предел сходящейся в каждой точке последовательности измеримых функций является измеримой же функцией, то достаточно доказать измеримость функции $\chi_{F_n} fg$. Таким образом, мы можем и будем предполагать, что $v(\mu, F) < \infty$ и $v(\lambda, F) < \infty$.

Так как g λ-измерима, то существует последовательность $\{g_n\}$ простых функций, сходящаяся к $g(s)$ в каждой точке $s \in F$, за исключением точек некоторого множества $E \subseteq F$, для которого $v(\lambda, E) = 0$ [по следствию 6.13 (a)]. Но

$$v(\lambda, E) = \int_E |f(s)|\, v(\mu, ds),$$

так что $f(s) = 0$ для всех $s \in E$, за исключением точек некоторого множества A, для которого $v(\mu, A) = 0$. Таким образом,

$$g_n(s) f(s) \to g(s) f(s), \quad s \in F - A,$$

и из следствия 6.14 вытекает μ-измеримость функции $\chi_F fg$.

Обратно, пусть fg μ-измерима, и пусть (S, Σ^*, μ) и (S, Σ_0^*, λ) являются лебеговскими расширениями пространств (S, Σ, μ) и (S, Σ, λ) соответственно. Тогда $\Sigma_0^* \supseteq \Sigma^*$. Прежде всего мы заметим, что, для того чтобы функция была измеримой по отношению к заданной мере, необходимо и достаточно, чтобы она была измеримой по отношению к лебеговскому продолжению этой меры. Пусть, далее, $N = \{s \mid s \in S, \ f(s) = 0\}$; тогда $\lambda(E) = 0$ для каждого множества $E \in \Sigma^*$, содержащегося в N. Следовательно, функция $g\chi_N$ λ-измерима, и остается только доказать, что $g\chi_{N'}$ тоже λ-измерима. Поэтому мы можем и будем предполагать, что $f(s)$ не обращается в нуль на множестве S. Так как

$$\left\{s \,\middle|\, \frac{1}{f(s)} \in G\right\} = \left\{s \,\middle|\, f(s) = \frac{1}{z}, \ z \in G\right\},$$

то, по теореме 6.10, функция $1/f$ μ-измерима, а тогда по лемме 2.12, g тоже μ-измерима. По теореме 6.10 функция g почти сепарабельнозначна относительно μ и, значит, почти сепарабельнозначна относительно λ. В силу той же теоремы 6.10 $g^{-1}(G) \in \Sigma$ для любого открытого множества G из $\mathfrak{X}$. Так как $\Sigma_0^* \supseteq \Sigma^*$, из теоремы 6.10 вытекает, что функция g λ-измерима. В нашем рассуждении мы неявно использовали то обстоятельство, что каждое множество $F \in \Sigma$, для которого

$$v(\lambda, F) = \int_F |f(s)| \, v(\mu, ds) < \infty,$$

может быть представлено в виде счетной суммы множеств

$$F_n = \left\{s \mid s \in F, \ |f(s)| > \frac{1}{n}\right\},$$

для которых $v(\mu, F_n) < \infty$, ч. т. д.

4. Теорема. *Пусть (S, Σ, μ) — пространство с положительной мерой, f — определенная на S неотрицательная μ-измеримая функция и*

$$\lambda(E) = \int_E f(s) \, \mu(ds), \quad E \in \Sigma.$$

Пусть g — определенная на S неотрицательная λ-измеримая функция, тогда fg μ-измерима и

$$\int_E g(s) \, \lambda(ds) = \int_E f(s) g(s) \, \mu(ds), \quad E \in \Sigma.$$

Доказательство. μ-измеримость fg вытекает из леммы 3. Обозначим через H совокупность всех неотрицательных λ-измеримых функций h, для которых имеет место равенство

$$\int_E h(s)\lambda(ds) = \int_E f(s)h(s)\mu(ds), \quad E \in \Sigma;$$

ясно, что H содержит все неотрицательные λ-простые функции. Ввиду следствия 6.17 H замкнуто относительно операции взятия предела возрастающей последовательности. Таким образом, для того чтобы доказать теорему, достаточно доказать, что неотрицательная λ-измеримая фукция g является для почти всех s пределом возрастающей последовательности $\{g_n\}$ простых функций.

Для того чтобы определить такую последовательность, разложим множество $E_n = \{s \mid g(s) < n\}$ на n^2 попарно непересекающихся частей:

$$E(j, n) = \left\{ s \,\middle|\, \frac{j-1}{n} \leqslant g(s) < \frac{j}{n} \right\}, \quad j = 1, \ldots, n^2.$$

Положим

$$g_n(s) = \begin{cases} n, & s \notin E_n, \\ j/n, & s \in E(j, n), \end{cases}$$

ак что $g_n(s)$, возрастая, стремится к $g(s)$ для каждого $s \in S$. По теореме 6.10, каждое g_n является простой функцией относительно лебеговского продолжения λ, и, таким образом, доказательство завершено.

5. Следствие. *Пусть (S, Σ, μ) — пространство с положительной мерой, f — определенная на S неотрицательная измеримая функция и*

$$\lambda(E) = \int_E f(s)\mu(ds), \quad E \in \Sigma.$$

Тогда функция g, отображающая S в B-пространство $\mathfrak{X}$ в том и только в том случае λ-интегрируема, если fg μ-интегрируема; при этом

$$\int_E g(s)\lambda(ds) = \int_E f(s)g(s)\mu(ds), \quad E \in \Sigma.$$

Доказательство. Предположим, что функция g λ-интегрируема. По лемме 3, fg измерима. μ-интегрируемость fg вытекает из теоремы 2.22, если заметить, что (ввиду теоремы 4) $|f(\cdot)g(\cdot)|$ μ-интегрируема. Пользуясь теоремой 4, можно точно так же доказать и λ-интегрируемость g в предположении μ-интегрируемости fg.

Так как каждая вещественная измеримая функция представляется в виде разности двух неотрицательных измеримых функций, то из теоремы 4 вытекает, что

$$[*] \qquad \int_E g(s)\,\lambda(ds) = \int_E f(s)\,g(s)\,\mu(ds), \quad E \in \Sigma,$$

где g — вещественная измеримая функция. Так как вещественная и мнимая части комплексной измеримой функции сами измеримы, то равенство [*] справедливо и для комплексных функций g. Если значения g принадлежат B-пространству $\mathfrak{X}$, рассмотрим определенный на $\mathfrak{X}$ линейный функционал x^*. Ввиду теоремы 2.19 (c) и равенства [*]

$$x^* \int_E g(s)\,\lambda(ds) = \int_E x^* g(s)\,\lambda(ds) = \int_E x^* f(s)\,g(s)\,\mu(ds) =$$

$$= x^* \int_E f(s)\,g(s)\,\mu(ds),$$

таким образом, ввиду следствия II.3.15 равенство [*] доказано в полной общности.

6. Следствие. *Пусть (S, Σ, μ) — пространство с мерой, f — комплексная μ-интегрируемая функция и*

$$\lambda(E) = \int_E f(s)\,\mu(ds), \quad E \in \Sigma.$$

Тогда функция g, отображающая S в B-пространство $\mathfrak{X}$, будет λ-интегрируемой в том и только в том случае, если произведение fg μ-интегрируемо, при этом

$$[*] \qquad \int_E g(s)\,\lambda(ds) = \int_E f(s)\,g(s)\,\mu(ds), \quad E \in \Sigma.$$

Доказательство. Пусть g λ-интегрируема, тогда, по лемме 3, fg измерима. Для того чтобы доказать, что fg μ-интегрируема, достаточно ввиду теорем 2.22 и 2.18 показать, что функция $|f(\cdot)\,g(\cdot)|$ $v(\mu)$-интегрируема. Но так как $|g(\cdot)|$ $v(\mu)$-интегрируема и $v(\lambda, E) = \int_E |f(s)|\, v(\mu, ds)$, то это вытекает из теоремы 4.

Обратно, предположим, что fg μ-интегрируема. Тогда, по лемме 3, g измерима и , следовательно, g будет λ-интегрируемой в том и только в том случае, если $|g(\cdot)|$ является $v(\mu)$-интегрируемой. Однако $v(\mu)$-интегрируемость $|g(\cdot)|$ вытекает из теоремы 4 точно так же, как в предшествующем рассуждении. Таким образом, нам остается доказать лишь формулу [*]. Как и при доказательстве следствия 5, ее достаточно доказать для случая положительной вещественной функции g. Ясно, что для λ-интегрируемых простых функций формула [*] справедлива. Как и в доказательстве теоремы 4, найдется возрастающая последовательность $\{g_n\}$ неотрицательных простых функций, сходящаяся к g в каждой точке. Так как $g_n(s) \leqslant g(s)$, то $|g_n(s) f(s)| \leqslant |g(s) f(s)|$ для каждого $s \in S$. Из теоремы Лебега (6.16) вытекает, что

$$\int_E |f(s) g_n(s) - f(s) g(s)| \, v(\mu, ds) \to 0$$

и

$$\int_E |g_n(s) - g(s)| \, v(\lambda, ds) \to 0.$$

Так как равенство [*] справедливо при $g = g_n$, то оно справедливо и для g, ч. т. д.

Нижеследующий результат дополняет теорему 2, распространяя ее на комплексные меры μ.

→7. Теорема. *Пусть (S, Σ, μ) — пространство с конечной мерой, а λ — абсолютно непрерывная относительно μ комплексная мера, определенная на Σ. Тогда существует и притом только одна такая μ-интегрируемая функция f, что*

$$\lambda(E) = \int_E f(s) \mu(ds), \quad E \in \Sigma.$$

Доказательство. Пользуясь теоремой Радона — Никодима (теорема 2), найдем такие $v(\mu)$-интегрируемые функции g и h, что

$$\lambda(E) = \int_E g(s) \, v(\mu, ds), \quad E \in \Sigma,$$

$$\mu(E) = \int_E h(s) \, v(\mu, ds), \quad E \in \Sigma.$$

Так как

$$v(\mu, E) = \int_E |h(s)| \, v(\mu, ds),$$

то

$$\int_E \{1 - |h(s)|\} \, v(\mu, ds) = 0, \quad E \in \Sigma,$$

откуда видно, что $|h(s)| = 1$ всюду, за исключением точек некоторого множества, на котором $v(\mu)$ обращается в нуль. Следовательно, функция $f = g/h$ μ-интегрируема и, по следствию 6,

$$\int_E f(s) \mu(ds) = \int_E g(s) \, v(\mu, ds) = \lambda(E), \quad \text{ч. т. д.}$$

Замечание. Однозначно определенная μ-интегрируемая функция f, фигурирующая в теоремах 2 и 7, называется *производной Радона — Никодима* функции λ по μ и часто обозначается через $d\lambda/d\mu$. Таким образом, $d\lambda/d\mu$ определена почти всюду относительно μ формулой

$$\lambda(E)=\int_E\left\{\frac{d\lambda}{d\mu}(s)\right\}\mu(ds),\quad E\in\Sigma.$$

В заключение этого параграфа мы докажем лемму, обобщающую многие теоремы о «замене переменной».

8. Лемма. *Пусть S_1 и S_2 — два множества, а φ — отображение S_1 в S_2. Если Σ_2 является алгеброй (соответственно σ-алгеброй) множеств из S_2, то $\Sigma_1=\{\varphi^{-1}(E)\mid E\in\Sigma_2\}$ будет алгеброй (соответственно σ-алгеброй) множеств из S_1. Если μ_2 — определенная на Σ_2 аддитивная функция множества, то функция μ_1, определяемая равенством $\mu_1(\varphi^{-1}(E))=\mu_2(E)$, будет аддитивной функцией множества, заданной на Σ_1. Кроме того,*

(a) *если μ_2 счетно аддитивна, то и μ_1 счетно аддитивна;*

(b) *если μ_2 ограничена, то и μ_1 ограничена;*

(c) $v(\mu_1,\ \varphi^{-1}(E))=v(\mu_2,\ E),\ E\in\Sigma_2$;

(d) *если функция f, определенная на S_2, μ_2-измерима, то $f(\varphi(\cdot))$ μ_1-измерима;*

(e) *если μ_2 неотрицательна и счетно аддитивна, а определенная на S_2 функция f μ_2-измерима и неотрицательна, то*

$$\int_E f(s_2)\,\mu_2(ds_2)=\int_{\varphi^{-1}(E)} f(\varphi(s_1))\,\mu_1(ds_1);$$

(f) *если определенная на S_2 функция f μ_2-интегрируема, то $f(\varphi(\cdot))$ μ_1-интегрируема и*

$$\int_E f(s_2)\,\mu_2(ds_2)=\int_{\varphi^{-1}(E)} f(\varphi(s_1))\,\mu_1(ds_1).$$

Доказательство. Так как $\varphi(\varphi^{-1}(E))=E$, то ясно, что определение μ_1 как функции на Σ_1 корректно. Так как

$$\varphi^{-1}(EF)=\varphi^{-1}(E)\,\varphi^{-1}(F),$$

$$\varphi^{-1}(E')=\{\varphi^{-1}(E)\}'\quad\text{и}\quad \varphi^{-1}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\Big)=\bigcup_{i=1}^{\infty}\varphi^{-1}(E_i),$$

то ясно, что Σ_1 является алгеброй, причем μ_1 аддитивна на Σ_1. Эти равенства показывают, кроме того, что Σ_1 будет σ-алгеброй, если таковой является Σ_2, и что μ_1 счетно аддитивна, если счетно аддитивна μ_2. Утверждение (b) очевидно. Так как $v(\mu_1,\ \varphi^{-1}(E))$ —

неотрицательная функция множества, определенная для $E \in \Sigma_2$ и

$$v(\mu_1, \varphi^{-1}(E)) \geqslant |\mu_1(\varphi^{-1}(E))| = |\mu_2(E)|,$$

то из определения $v(\mu_2)$ легко вытекает, что $v(\mu_1, \varphi^{-1}(E)) \geqslant v(\mu_2, E)$. Обратно, так как $\varphi(E_1 \cup E_2) = \varphi(E_1) \cup \varphi(E_2)$ и $\varphi(E_1 E_2) = \varphi(E_1)\varphi(E_2)$, если E_1, E_2 принадлежат Σ_1, то $v(\mu_2, \varphi(E))$ является неотрицательной аддитивной функцией множества, определенной для $E \in \Sigma_1$. Так как

$$v(\mu_2, \varphi(E)) \geqslant |\mu_2(\varphi(E))| = |\mu_1(E)|,$$

то из определения $v(\mu_1)$ легко вытекает, что $v(\mu_2, \varphi(E)) \geqslant v(\mu_1, E)$. Так как уже было доказано, что $v(\mu_2, \varphi(E)) \leqslant v(\mu_1, E)$, то $v(\mu_2, \varphi(E)) = v(\mu_1, E)$, если $E \in \Sigma_1$, и, следовательно, $v(\mu_2, E) = v(\mu_1, \varphi^{-1}(E))$, если $E \in \Sigma_2$. Этим доказано (c).

Из равенства (c) получаем, что если $\{f_n\}$ есть последовательность определенных на S функций, сходящихся к функции f по мере μ_2, то $\{f_n(\varphi(\cdot))\}$ сходится к $f\{\varphi(\cdot))$ по мере μ_1. Так как $g(\varphi(\cdot))$ является μ_1-простой функцией, если g μ_2-простая, то отсюда непосредственно вытекает утверждение (d).

Ясно, что $g(\varphi(\cdot))$ будет μ_1-интегрируемой простой функцией, если g есть μ_2-интегрируемая простая функция. Из определения μ_1 следует, что для такой функции g мы имеем равенство

$$\int_E g(s_2)\,\mu_2(ds_2) = \int_{\varphi^{-1}(E)} g(\varphi(s_1))\,\mu_1(ds_1), \quad E \in \Sigma_2.$$

Поэтому утверждение (f) вытекает из определения интегрируемости точно так же, как (d) — из определения измеримости. Наконец, (e) следует из теоремы 6.17, если применить равенство (f) к каждому члену некоторой возрастающей последовательности μ_2-интегрируемых простых функций, сходящейся к функции f в каждой точке, ч. т. д.

11. Произведение пространств с мерой

В этом параграфе нашей главной целью будет построение из заданного семейства (S_i, Σ_i, μ_i), $i = 1, \ldots, n$, пространств с мерой некоторой меры, определенной на прямом произведении $S_1 \times \ldots \times S_n$, и исследование связей между интегрированием в произведении и интегрированием в пространствах-множителях. Наиболее известным примером является, разумеется, евклидова плоскость — произведение вещественной прямой на себя. Для прямоугольника E со сторонами, параллельными осям координат, двумерная мера E определяется как произведение длин (одномерных мер) двух его смежных сторон. Эта мера продолжается затем на σ-алгебру, порождаемую в плоскости такими прямоугольниками.

Во второй половине параграфа теория произведения пространств с мерой и интегрирования в нем обобщаются на такие произведения пространств с мерами, в которых число сомножителей бесконечно.

Введем обозначение, удобное для формулирования теорем настоящего параграфа. Пусть Σ_i $(i=1, \ldots, n)$ — некоторая алгебра подмножеств множества S_i. Через $\mathscr{E}$ мы будем обозначать совокупность всех множеств прямого произведения $S = S_1 \times \ldots \times S_n$, имеющих вид $E = E_1 \times \ldots \times E_n$, где $E_i \in \Sigma_i$.

1. Лемма. *Пусть* μ_1 $(i=1, \ldots, n)$ — *конечно аддитивная комплексная функция множества, определенная на алгебре* Σ_i *подмножеств множества* S_i. *Тогда существует и притом только одна аддитивная функция множества* μ, *определенная на алгебре* Σ, *порожденной в* $S = S_1 \times \ldots \times S_n$ *множеством* $\mathscr{E}$ *и такая, что* $\mu(E) = \prod_{i=1}^{n} \mu_i(E_i)$, *где* $E \in \mathscr{E}$.

Замечание. Читатель может подумать, что эту лемму лучше всего доказывать непосредственным построением функции μ. Такое доказательство дать можно, но оно будет удивительно громоздким. Поэтому мы дадим доказательство, основанное на теории интегрирования.

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{A}_0$ семейство определенных на S ограниченных комплексных функций f, обладающих следующим свойством: для каждого фиксированного $[s_2, \ldots, s_n]$ функция $f(s_1, \ldots, s_n)$ μ_1-интегрируема по s_1; для каждых фиксированных $[s_3, \ldots, s_n]$ и E_1 из Σ_1 функция

$$\int_{E_1} f(s_1, \ldots, s_n)\,\mu_1(ds_1)$$

μ_2-интегрируема по s_2; для каждых фиксированных $[s_4, \ldots, s_n]$, $E_1 \in \Sigma_1$ и $E_2 \in \Sigma_2$ функция

$$\int_{E_2} \left[\int_{E_1} f(s_1, \ldots, s_n)\,\mu_1(ds_1) \right] \mu_2(ds_2)$$

μ_3-интегрируема по s_3 и т. д. Обозначим через $\mathfrak{A}_1$ совокупность всех таких $g \in \mathfrak{A}_0$, что произведение fg принадлежит $\mathfrak{A}_0$ для каждого $f \in \mathfrak{A}_0$. Тогда $\mathfrak{A}_1$ будет линейным семейством функций, содержащим произведение любых двух своих элементов. Через Φ обозначим совокупность множеств $F \subseteq S$, характеристические функции χ_F которых принадлежат $\mathfrak{A}_1$. Ясно, что Φ замкнуто относительно образования пересечения и взятия дополнения и что Φ содержит S. Таким образом, Φ есть алгебра множеств. Кроме того, каждое множество из $\mathscr{E}$ принадлежит Φ, и, значит, $\Phi \supseteq \Sigma$. Если функцию множества μ определить для $F \in \Phi$ формулой

$$\mu(F) = \int_{S_n} \left[\ldots \left[\int_{S_1} \chi_F(s_1, \ldots, s_n) \mu_1(ds_1) \right] \ldots \right] \mu_n(ds_n),$$

то сужение μ на Σ будет аддитивной функцией множества, обладающей нужными свойствами.

Чтобы доказать единственность μ, предположим, что λ есть определенная на Σ аддитивная функция множества, совпадающая с μ на каждом из множеств, принадлежащих $\mathscr{E}$. Обозначим через $\mathfrak{B}_0$ совокупность λ-интегрируемых функций f из $\mathfrak{A}_0$, для которых при любых $E_i \in \Sigma_i$ $i = 1, \ldots, n$ и $E = E_1 \times \ldots \times E_n$ имеет место равенство

$$\int_E f(s) \lambda(ds) = \int_{E_n} \left[\ldots \left[\int_{E_1} f(s_1, \ldots, s_n) \mu_1(ds_1) \right] \ldots \right] \mu_n(ds_n).$$

Через $\mathfrak{B}_1$ обозначим множество всех $g \in \mathfrak{B}_0$, для которых $fg \in \mathfrak{B}_0$ при всех $f \in \mathfrak{B}_0$. Тогда $\mathfrak{B}_1$ будет линейным множеством, замкнутым относительно умножения и содержащим характеристическую функцию каждого множества из $\mathscr{E}$. Так же как выше, отсюда вытекает, что

$$\lambda(F) = \int_S \chi_F(s) \lambda(ds) =$$
$$= \int_{S_n} \left[\ldots \left[\int_{S_1} \chi_F(s_1, \ldots, s_n) \mu_1(ds_1) \right] \ldots \right] \mu_n(ds_n)$$

для всех $F \in \Sigma$, ч. т. д.

Замечание. Алгебра Σ состоит из всех конечных сумм попарно непересекающихся множеств из $\mathscr{E}$. Действительно, если Σ_0 есть совокупность всех конечных сумм попарно непересекающихся множеств, то Σ_0, очевидно, замкнуто относительно образования конечных пересечений. Для того чтобы доказать, что Σ_0 является алгеброй, достаточно показать, что оно замкнуто относительно перехода к дополнению. Если $n = 3$, то это вытекает из тождества

$$(E_1 \times E_2 \times E_3)' = (E_1' \times S_2 \times S_3) \cup (E_1 \times E_2' \times S_3) \cup (E_1 \times E_2 \times E_3');$$

в общем случае доказательство аналогично.

2. Теорема. *Пусть (S_i, Σ_i, μ_i), $i = 1, \ldots, n$,—пространства с конечной мерой. Тогда существует и притом только одна счетно аддитивная мера μ, определенная на σ-алгебре, порожденной в $S = S_1 \times \ldots \times S_n$ множеством $\mathscr{E}$ и такая, что*

$$\mu(E_1 \times \ldots \times E_n) = \prod_{i=1}^{n} \mu(E_i)$$

для каждого множества $E_1 \times \ldots \times E_n$ из $\mathscr{E}$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}_1$ определено, как в лемме 1. Из счетной аддитивности мер μ_i и теоремы 6.16 вытекает, что если $\{f_k\}$ есть равномерно ограниченная последовательность из $\mathfrak{A}_1$, сходящаяся в каждой точке к функции f, то $f \in \mathfrak{A}_1$ и

$$\lim_{k\to\infty} \int_{S_n} \left[\dots \left[\int_{S_1} f_k(s_1, \dots, s_n)\, \mu_1(ds_1) \right] \dots \right] \mu_n(ds_n) = \\ = \int_{S_n} \left[\dots \left[\int_{S_1} f(s_1, \dots, s_n)\, \mu_1(ds_1) \right] \dots \right] \mu_n(ds_n).$$

Таким образом, алгебра Φ леммы 1 является σ-алгеброй, а мера μ леммы 1 счетно аддитивна на Φ. Следовательно, сужение μ на σ-алгебру Σ, порожденную множеством $\mathscr{E}$, будет мерой, обладающей нужными свойствами.

Для того чтобы доказать единственность μ, заметим, что точно таким же образом можно получить, что множество $\mathfrak{B}_1$ леммы 1 содержит предел каждой сходящейся равномерно ограниченной последовательности своих элементов и, следовательно, содержит характеристическую функцию каждого множества $F \in \Sigma$. Таким образом, рассуждение, проведенное при доказательстве единственности в лемме 1, без изменений проходит и в этом случае, ч. т. д.

3. Определение. Пространство с мерой (S, Σ, μ), построенное в теореме 2, называется *произведением* пространств с мерами (S_n, Σ_n, μ_n). Мы пишем

$$\Sigma = \Sigma_1 \times \dots \times \Sigma_n, \quad \mu = \mu_1 \times \dots \times \mu_n,$$
$$(S, \Sigma, \mu) = (S_1, \Sigma_1, \mu_1) \times \dots \times (S_n, \Sigma_n, \mu_n)$$

и

$$(S, \Sigma, \mu) = \prod_{i=1}^{n} (S_i, \Sigma_i, \mu_i).$$

При доказательстве теоремы 2 было показано, что характеристическая функция каждого множества $E \in \Sigma = \Sigma_1 \times \dots \times \Sigma_n$ содержится в $\mathfrak{A}_1$. Таким образом, мы доказали следующее следствие, которое в то же время является первой среди доказываемых в этом параграфе теорем о связи между «кратными» и «повторными» интегралами.

4. Следствие. *Пусть* (S, Σ, μ) — *произведение пространств с конечными положительными мерами* (S_1, Σ_1, μ_1) и (S_2, Σ_2, μ_2). *Для каждого* E *из* Σ *и* $s_2 \in S_2$ *множество* $E(s_2) = \{s_1 \mid [s_1, s_2] \in E\}$ μ_1-*измеримо. Функция* $\mu_1(E(s_2))$ μ_2-*интегрируема и*

$$\mu(E) = \int_{S_2} \mu_1(E(s_2))\, \mu_2(ds_2).$$

5. Следствие. *Произведение пространств с конечными положительными мерами есть пространство с конечной положительной мерой.*

Доказательство. Это утверждение непосредственно вытекает из формулы для $\mu(E)$, приведенной в следствии 4, ч. т. д.

Нетрудно обобщить определение произведения пространств на тот случай, когда меры в пространствах (S_i, Σ_i, μ_i), $i=1, \ldots, n$, положительны, но не конечны, а только σ-конечны.

6. Следствие. *Если меры в пространствах (S_i, Σ_i, μ_i), $i=1, \ldots, n$, положительны и σ-конечны, то существует и притом только одна мера μ, определенная на σ-алгебре, порожденной множеством $\mathscr{E}$, и такая, что $\mu(E)=\prod_{i=1}^{n} \mu_i(E_i)$ для $E=\prod_{i=1}^{n} E_i$, $E_i \in \Sigma_i$.*

Замечание. Предполагается, что $\prod_{i=1}^{n} \mu_i(E_i)=+\infty$, если для некоторого i $\mu_i(E_i)=+\infty$, и ни одно из $\mu_i(E_i)$ не равно нулю; если же какой-то множитель в произведении обращается в нуль, мы считаем произведение равным нулю.

Доказательство. Пусть S_k для каждого $k=1, \ldots, n$ является объединением возрастающей последовательности $\{E_k^{(j)}\}$, $j=1, \ldots$, μ_k-измеримых множеств конечной μ_k-меры. Если $E^{(j)}=\prod_{k=1}^{n} E_k^{(j)}$, то $\{E^{(j)}\}$ будет возрастающей последовательностью множеств из S, сумма которых совпадает с S. Для каждого k обозначим через $\Sigma_k^{(j)}$ алгебру μ_k-измеримых подмножеств $E_k^{(j)}$ и через $\mu_k^{(j)}$ сужение μ_k на $E_k^{(j)}$. Мы уже умеем строить пространства с конечной мерой

$$(E^{(j)}, \Sigma^{(j)}, \mu^{(j)})=\prod_{k=1}^{n}(E_k^{(j)}, \Sigma_k^{(j)}, \mu_k^{(j)}).$$

Из доказанной в теореме 2 единственности вытекает, что $\mu^{(j)}(F)=\mu^{(j+1)}(F)$, если $F \subseteq E^{(j)}$. Обозначим через Σ_0 совокупность всех подмножеств E из S, таких, что

$$E \cap E^{(j)} \in \Sigma^{(j)}$$

для каждого j. Так как каждое $\Sigma^{(j)}$ является σ-алгеброй, то и Σ_0 есть σ-алгебра. Обозначим через Σ σ-алгебру, порожденную множеством $\mathscr{E}$. Тогда $\Sigma \supseteq \Sigma^{(j)}$ для каждого j и, значит, $\Sigma \supseteq \Sigma_0$. Кроме того, ясно, что $\Sigma \subseteq \Sigma_0$ и, следовательно, $\Sigma=\Sigma_0$.

Пусть $F \in \Sigma$, положим $\mu(F) = \lim\limits_{j\to\infty} \mu^{(j)}(F \cap E^{(j)})$. Так как эта последовательность возрастающая, то она имеет предел, который может быть равен и $+\infty$. Для того чтобы убедиться, что μ счетно аддитивна на Σ, предположим, что $F \in \Sigma$ есть сумма последовательности $\{F_n\}$ попарно непересекающихся множеств из Σ. Тогда для любых j и k

$$\mu(F) \geqslant \mu^{(j)}(F \cap E^{(j)}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^{(j)}(F_n \cap E^{(j)}) \geqslant$$
$$\geqslant \sum_{n=1}^{k} \mu^{(j)}(F_n \cap E^{(j)}).$$

Таким образом, $\mu(F) \geqslant \sum\limits_{n=1}^{k} \mu(F_n)$ и, следовательно, $\mu(F) \geqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(F_n)$. С другой стороны, для каждого j

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^{(j)}(F_n \cap E^{(j)}) = \mu^{(j)}(F \cap E^{(j)}),$$

так что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(F_n) \geqslant \mu(F)$. Ясно, что для этой меры

$$\mu\left(\prod_{i=1}^{n} E_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mu_i(E_i), \quad E_i \in \Sigma_i,$$

и из доказанной в теореме 2 единственности для каждого из пространств $(E^{(j)}, \Sigma^{(j)}, \mu^{(j)})$ вытекает, что μ есть единственная счетно аддитивная мера на Σ, обладающая этим свойством, ч. т. д.

Как и в случае пространств с конечной мерой, пространство с мерой (S, Σ, μ), построенное в следствии 6 из пространств с σ-конечными мерами (S_i, Σ_i, μ_i), мы будем называть их *произведением* и обозначать $(S, \Sigma, \mu) = \prod\limits_{i=1}^{n} (S_i, \Sigma_i, \mu_i)$.

Наиболее известный пример к теореме 2 и следствию 6 получится, если взять в качестве (S_i, Σ_i, μ_i), $i = 1, \ldots, n$, меру Бореля — Лебега на вещественной прямой. Тогда $S = \prod\limits_{i=1}^{n} S_i$ будет n-мерным евклидсвым пространством и $\mu = \mu_1 \times \ldots \times \mu_n$ известно под названием *n-мерной меры Бореля — Лебега.* Лебеговское продолжение меры μ называется *n-мерной мерой Лебега.* Характеристическое свойство этой меры состоит в том, что мера произвольного «прямоугольника»

$$R = \{[s_1, \ldots, s_n] \mid a_1 \leqslant s_1 \leqslant b_1, \ldots, a_n \leqslant s_n \leqslant b_n\}$$

равна произведению $(b_1 - a_1) \ldots (b_n - a_n)$.

Нижеследующее утверждение является σ-конечным аналогом следствия 4.

7. Следствие. *Пусть* (S, Σ, μ) *является произведением двух пространств с положительными σ-конечными мерами* (S_1, Σ_1, μ_1) *и* (S_2, Σ_2, μ_2). *Для каждого E из Σ и $s_2 \in S_2$ множество* $E(s_2) = \{s_1 \mid [s_1, s_2] \in E\}$ μ_1-*измеримо. Функция* $\mu_2(E(s_2))$ μ_2-*измерима и*

$$[*] \qquad \mu(E) = \int_{S_2} \mu_1(E(s_2))\, \mu_2(ds_2).$$

Доказательство. Воспользуемся обозначениями, введенными при доказательстве следствия 6. Как видно из этого доказательства, $EE^{(j)}$ содержится в $\Sigma^{(j)}$ для каждого j, так что если $EE^{(j)}(s_2) = \{s_1 \mid [s_1, s_2] \in EE^{(j)}\}$, то функция $\mu_1(EE^{(j)}(s_2))$ μ_2-измерима на $E_2^{(j)}$. Так как $\mu_1(EE^{(j)}(s_2)) = 0$, если $s_2 \notin E_2^{(j)}$, то $\mu_1(EE^{(j)}(s_2))$ является μ_2-измеримой функцией s_2. Так как $\{EE^{(j)}(s_2)\}$ есть возрастающая последовательность множеств с суммой $E(s_2)$, то $\mu_1(E(s_2)) = \lim_{j\to\infty} \mu_1(EE^{(j)}(s_2))$ для каждого $s_2 \in S_2$. Таким образом, ввиду следствия 6.14 $\mu_1(E(s_2))$ является μ_2-измеримой функцией s_2. В силу следствия 4

$$\mu^{(j)}(EE^{(j)}) = \int_{E_2^{(j)}} \mu_1(EE^{(j)}(s_2))\, \mu_2(ds_2).$$

Так как $\mu(E) = \lim_{j\to\infty} \mu^{(j)}(EE^{(j)})$ и

$$\int_{E_2^{(j)}} \mu_1(EE^{(j)}(s_2)\, \mu_2(ds_2) = \int_{S_2} \mu_1(EE^{(j)}(s_2))\, \mu_2(ds_2),$$

то формула [*] непосредственно вытекает из следствия 6.17, ч. т. д.

При доказательстве основной теоремы 9 нам придется использовать следующее предложение, легко вытекающее из следствия 7.

8. Следствие. *Пусть* (S, Σ, μ) *является произведением двух пространств с положительными σ-конечными мерами* (S_1, Σ_1, μ_1) *и* (S_2, Σ_2, μ_2). *Пусть мера μ множества $N \in \Sigma$ равна нулю. Тогда для почти всех относительно μ_1 точек $s_1 \in S_1$ мера μ_2 множества* $N(s_1) = \{s_2 \mid [s_1, s_2] \in N\}$ *равна нулю.*

Доказательство. Это утверждение непосредственно вытекает из формулы [*] следствия 7 и леммы 6.8, ч. т. д.

Теперь мы сделаем несколько замечаний, которые будут очень упрощать нам дальнейшее изложение. Пусть (S_1, Σ_1, μ_1), (S_2, Σ_2, μ_2)

и (S_3, Σ_3, μ_3) — пространства с мерами и $(S, \Sigma, \mu) = \prod_{i=1}^{3} (S_i, \Sigma_i, \mu_i)$. Таким образом, S есть совокупность точек вида $[s_1, s_2, s_3]$, $s_i \in S_i$, и, строго говоря, S не нужно путать с пространством $S_0 = (S_1 \times S_2) \times S_3$, элементы которого имеют вид $[[s_1, s_2]\, s_3]$. Целесообразно, однако, рассматривать эти пространства как идентичные, поскольку между их точками существует, очевидно, естественное взаимно однозначное соответствие. Кроме того, как легко может проверить читатель, это соответствие индуцирует сохраняющее меру взаимно однозначное соответствие между σ-алгебрами Σ и Σ_0. Таким образом, пространства с мерами (S, Σ, μ) и (S_0, Σ_0, μ_0) можно считать идентичными. Это означает, что операция образования произведения пространств с мерами *ассоциативна*. Легко видеть, что она и *коммутативна*. Ясно, что эти замечания распространяются и на произведение любого конечного числа пространств с мерами. Таким образом, если (S_i, Σ_i, μ_i), $i = 1, \ldots, n$, — пространства с мерами, которые либо все конечны, либо все положительны и σ-конечны, а α — произвольное подмножество из $\{1, \ldots, n\}$, то пространства с мерой $\prod_{i=1}^{n} (S_i, \Sigma_i, \mu_i)$ и $(S_\alpha, \Sigma_\alpha, \mu_\alpha) \times (S_{\alpha'}, \Sigma_{\alpha'}, \mu_{\alpha'})$, где

$$(S_\alpha, \Sigma_\alpha, \mu_\alpha) = \prod_{i \in \alpha} (S_i, \Sigma_i, \mu_i)$$

и

$$(S_{\alpha'}, \Sigma_{\alpha'}, \mu_{\alpha'}) = \prod_{i \in \alpha'} (S_i, \Sigma_i, \mu_i),$$

можно считать идентичными.

Следующая теорема выясняет соотношение между интегрированием в произведении пространств с мерами и интегрированием в компонентах этого произведения. Ввиду ассоциативности умножения мер при этом без потери общности можно ограничиться рассмотрением произведения (R, Σ_R, ϱ) двух пространств с мерой (S, Σ_S, μ) и (T, Σ_T, λ).

→ 9. Теорема (*Фубини*). *Пусть (S, Σ_S, μ) и (T, Σ_T, λ) — два пространства с положительными σ-конечными мерами. Пусть $(R, \Sigma_R, \varrho) = (S, \Sigma_S, \mu) \times (T, \Sigma_T, \lambda)$ и $f \in L_1(R, \Sigma_R, \varrho, \mathfrak{X})$. Тогда для почти всех относительно μ точек s из S $f(s, \cdot) \in L_1(T, \Sigma_T, \lambda, \mathfrak{X})$. Кроме того, $\int_T f(\cdot, t)\, \lambda(dt) \in L_1(S, \Sigma_S, \mu, \mathfrak{X})$ и*

$$\int_S \left\{ \int_T f(s, t)\, \lambda(dt) \right\} \mu(ds) = \int_R f(r)\, \varrho(dr).$$

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{A}_0$ подпространство ϱ-простых функций $g \in L_1(R, \Sigma_R, \varrho, \mathfrak{X})$. По следствию 7, для каждого

$g \in \mathfrak{A}_0$ теорема справедлива. По лемме 2.18 можно найти последовательность $\{g_n\}$ элементов из $\mathfrak{A}_0$, сходящуюся к f в топологии $L_1(R, \Sigma_R, \varrho, \mathfrak{X})$. При этом

$$\lim_{m, n\to\infty} \int_S \left\{ \int_T |g_n(s, t) - g_m(s, t)| \lambda(dt) \right\} \mu(ds) =$$

$$= \lim_{m, n\to\infty} \int_R |g_n(r) - g_m(r)| \varrho(dr) = 0.$$

Следовательно, если функцию G_n из пространства

$$\widetilde{L}_1 = L_1(S, \Sigma_S, \mu, L_1(T, \Sigma_T, \lambda, \mathfrak{X}))$$

мы определим равенством $G_n(s) = g_n(s, \cdot)$, то

$$\lim_{m, n\to\infty} \int_S |G_n(s) - G_m(s)| \mu(ds) =$$

$$= \lim_{m, n\to\infty} \int_S \left\{ \int_T |g_n(s, t) - g_m(s, t)| \lambda(dt) \right\} \mu(ds) = 0.$$

По теореме 6.6 найдется такое $G \in \widetilde{L}_1$, что $G_n \to G$ по норме пространства $\widetilde{L}_1$. По теореме 3.6 (I) и следствию 6.13 (а) (и переходя без ограничения общности к подпоследовательности) мы можем найти такое множество $N \in \Sigma_S$ нулевой меры μ, что $G_n(s) \to G(s)$ для $s \notin N$.

Переход к подпоследовательности позволяет нам в то же время сделать вывод, что $g_i(r) \to f(r)$ для всех r, не принадлежащих к некоторому множеству M нулевой меры ϱ. Ввиду следствия 8 это означает, что существует такое множество N_1 нулевой меры μ, что если $s \notin N_1$, то $g_n(s, t) \to f(s, t)$ для почти всех относительно λ точек t.

По теореме 3.6 (I) и следствию 6.13 (а) для заданного $s_0 \notin N$ можно найти такую возрастающую последовательность натуральных чисел n_i, что $G_{n_i}(s_0)(t) \to G(s_0)(t)$ для почти всех относительно λ точек t, т. е. такую, что

$$g_{n_i}(s_0, t) \to G(s_0)(t)$$

для почти всех относительно λ точек t. Следовательно, если $s_0 \notin N \cup N_1$, то $f(s_0, t) = G(s_0)(t)$, так что $f(s_0, \cdot) \in L_1(T, \Sigma_T, \lambda, \mathfrak{X})$.

Ясно, что равенством $Uh = \int_T h(t) \lambda(dt)$ определяется непрерывное линейное отображение U пространства $L_1(T, \Sigma_T, \lambda, \mathfrak{X})$ в $\mathfrak{X}$. В терминах этого отображения U мы имеем

$$\int_T f(s_0, t) \lambda(dt) = \int_T G(s_0)(t) \lambda(dt) = UG(s_0), \quad s_0 \notin N \cup N_1.$$

Следовательно, по теореме 2.19 (с), $\int_T f(\cdot, t)\lambda(dt)=UG$ принадлежит $L_1(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$ и

$$[*] \quad \int_S \left\{ \int_T f(s, t)\,\lambda(dt) \right\} \mu(ds) = \int_S UG(s)\,\mu(ds) =$$

$$= U \int_S G(s)\,\mu(ds) = \lim_{n\to\infty} U \int_S G_n(s)\,\mu(ds) = \lim_{n\to\infty} \int_S UG_n(s)\,\mu(ds) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_S \left\{ \int_T g_n(s, t)\,\lambda(dt) \right\} \mu(ds).$$

Как мы уже отметили, для ϱ-простых функций g_n

$$\int_S \left\{ \int_T g_n(s, t)\,\lambda(dt) \right\} \mu(ds) = \int_R g_n(r)\,\varrho(dr),$$

и так как $g_n \to f$ по норме пространства $L_1(R, \Sigma_R, \varrho, \mathfrak{X})$, то предел правой части равен $\int_R f(r)\,\varrho(dr)$, и теорема доказана.

Теорема 9 легко может быть обобщена на произведение двух произвольных пространств с конечной мерой. Для этого нам будут полезны следующие три леммы.

10. Лемма. *Пусть (R, Σ_R, ϱ) является произведением двух пространств с σ-конечными положительными мерами (S, Σ_S, μ) и (T, Σ_T, λ), и пусть f — μ-измеримая на S функция со значениями в B-пространстве $\mathfrak{X}$. Тогда функция g, отображающая R в $\mathfrak{X}$ и определяемая формулой $g(s, t) = f(s)$, ϱ-измерима.*

Доказательство. Пусть f — произвольная μ-измеримая функция, а E_n — возрастающая последовательность множеств из Σ_S, для которых $\bigcup E_n = S$ и $\mu(E_n) < \infty$. Положим $f_n(s) = f(s)$, если $s \in E_n$, и $f_n(s) = 0$ в противном случае, и пусть $g_n(s, t) = f_n(s)$. Тогда $g_n(r) \to g(r)$ для каждого r, и поэтому ввиду следствия 6.14 достаточно показать, что каждая из функций g_n ϱ-измерима. Таким образом, не ограничивая этим общности, мы можем доказать лемму лишь для случая вполне μ-измеримых функций f_n.

Итак, предположим, что f — произвольная вполне μ измеримая функция. Пользуясь следствием 6.13(а), предположим, что $\{f_n\}$ — последовательность μ-простых функций, почти всюду относительно μ сходящаяся к f. Если $g_n(s, t) = f_n(s)$, то $g_n(r) \to g(r)$ почти всюду относительно ϱ. Таким образом, по следствию 6.14, g ϱ-измерима, ч. т. д.

11 Лемма. *Пусть* (R, Σ_R, ϱ) *является произведением двух пространств с конечной мерой* (S, Σ_S, μ) *и* (T, Σ_T, λ). *Тогда* $v(\varrho) = v(\mu) \times v(\lambda)$.

Доказательство. По теореме Радона — Никодима (10.2), существует μ-интегрируемая функция g, для которой

$$\mu(A) = \int_A g(s)\, v(\mu, ds), \quad A \in \Sigma_S.$$

По теореме 2.20, $v(\mu, A) = \int_A |g(s)|\, v(\mu, ds)$ и, следовательно, $|g(s)| = 1$ для почти всех относительно μ точек s. Без ограничения общности мы можем и будем предполагать, что $|g(s)| = 1$ для всех s. Точно так же найдется такая λ-интегрируемая функция h, что $|h(t)| = 1$ для всех t и

$$\lambda(B) = \int_B h(t)\, v(\lambda, dt), \quad B \in \Sigma_T.$$

Если $r = [s, t]$, положим $f(r) = g(s)\, h(t)$, тогда $|f(r)| = 1$ для всех r из R. Положим $v = v(\mu) \times v(\lambda)$, тогда для $A \in \Sigma_S$, $B \in \Sigma_T$ и $E = A \times B$ мы имеем, по теореме 9,

$$\int_E f(r)\, v(dr) = \int_A \left\{ \int_B g(s)\, h(t)\, v(\lambda, dt) \right\} v(\mu, ds) =$$

$$= \left\{ \int_A g(s)\, v(\mu, ds) \right\} \left\{ \int_B h(t)\, v(\lambda, dt) \right\} = \mu(A)\, \mu(B).$$

Ввиду доказанной в теореме 2 единственности f, $\varrho(E) = \int_E f(r)\, v(dr)$.

Так как $|f(r)| = 1$ для всех r, то, по теореме 2.20,

$$v(\varrho, E) = \int_E |f(r)|\, v(dr) = v(E), \text{ ч. т. д.}$$

12. Лемма. *Пусть* (R, Σ_R, ϱ) *является произведением двух пространств с конечными мерами* (S, Σ_S, μ) *и* (T, Σ_T, λ), *и пусть мера* ϱ *множества* $E \subseteq R$ *равна нулю. Тогда для почти всех относительно* λ *точек* t *мера* μ *множества* $E(t) = \{s \mid [s, t] \in E\}$ *равна нулю.*

Доказательство. Ввиду леммы 11 можно предположить, что меры в рассматриваемых пространствах положительны, однако для этого случая утверждение леммы было уже установлено в следствии 8, ч. т. д.

13. Теорема. *Пусть* (S, Σ_S, μ) *и* (T, Σ_T, λ) — *пространства с конечной мерой, а* (R, Σ_R, ϱ) — *их произведение. Пусть, далее,* $\mathfrak{X}$ *будет*

B-пространством, а F — ϱ-интегрируемой функцией, отображающей R в $\mathfrak{X}$. Тогда для почти всех относительно μ точек s из S функция $F(s, \cdot)$ λ-интегрируема на T, а функция $\int_T F(\cdot, t)\lambda(dt)$ μ-интегрируема на S. Кроме того,

$$\int_S \left\{ \int_T F(s, t)\,\lambda(dt) \right\} \mu(ds) = \int_R F(r)\,\varrho(dr).$$

Доказательство. По лемме 2.18, функция F $v(\varrho)$-интегрируема, и, значит, по теореме 9, функция $F(s, \cdot)$ $v(\lambda)$-интегрируема для почти всех относительно $v(\mu)$ точек s из S. Отсюда и из леммы 2.18 вытекает, что $F(s, \cdot)$ λ-интегрируема для почти всех относительно μ точек s из S. Пусть, далее, функции f, g и h определены, как в доказательстве леммы 11. Тогда, по следствию 10.6,

$$\int_T F(s, t)\,\lambda(dt) = \int_T F(s, t)\,h(t)\,v(\lambda, dt).$$

Пользуясь этим равенством, теоремой 9, леммой 10, леммой 2.18 и теоремой 2.22(a), можно видеть, что функция $\int_T F(\cdot, t)\,\lambda(dt)$ μ-интегрируема на S. Ввиду следствия 10.6, теоремы 9 и леммы 11 мы имеем

$$\int_S \left\{ \int_T F(s, t)\,\lambda(dt) \right\} \mu(ds) = \int_S \left\{ \int_T F(s, t)\,g(s)\,h(t)\,v(\lambda, dt) \right\} v(\mu, ds) = \int_R F(r)\,f(r)\,v(\varrho, dr).$$

Из доказательства леммы 11 видно, что

$$\varrho(E) = \int_E f(r)\,v(\varrho, dr), \quad E \in \Sigma_R,$$

поэтому ввиду следствия 10.6

$$\int_R F(r)\,f(r)\,v(\varrho, dr) = \int_R F(r)\,\varrho(dr).$$

Таким образом,

$$\int_S \left\{ \int_T F(s, t)\,\lambda(dt) \right\} \mu(ds) = \int_R F(r)\,\varrho(dr), \quad \text{ч. т. д.}$$

Следующий результат служит полезным дополнением к теореме Фубини (теорема 9).

→ 14. Теорема (*Тонелли*). *Пусть* $(R, \Sigma_R, \varrho)=(S, \Sigma_S, \mu)\times(T, \Sigma_T, \lambda)$ — *произведение двух пространств с положительными σ-конечными мерами, а f — положительная ϱ-измеримая функция. Тогда для почти всех относительно μ точек s из S функция $f(s, \cdot)$ λ-измерима. Кроме того, функция* $\int_T f(\cdot, t)\,\lambda(dt)$ *(принимающая значения из расширенной области вещественных чисел) μ-измерима и*

$$[*]\qquad \int_S \left\{\int_T f(s, t)\,\lambda(dt)\right\}\mu(ds)=\int_R f(r)\,\varrho(dr)$$

независимо от того, конечные или бесконечные значения имеют эти интегралы.

Доказательство. Пусть $\{E_n\}$ — возрастающая последовательность множеств из Σ_R, такая, что $R=\bigcup E_n$ и $\varrho(E_n)<\infty$. Положим $f_n(r)=f(r)$, если $f(r)\leqslant n$ и $r\in E_n$, и $f_n(r)=0$ в противном случае. По теореме 6.10, функция f_n ϱ-измерима, а по теореме 2.22(b), она ϱ-интегрируема. Если $\int_R f(r)\,\varrho(dr)<\infty$, то наше утверждение просто совпадает с теоремой 9. Таким образом, мы должны только показать, что из того, что $\int_R f(r)\,\varrho(dr)=\infty$, вытекает, что и повторный интеграл в левой части равенства [*] бесконечен. Но это очевидно, так как, по теореме 9 и следствию 6.17,

$$\int_S \left\{\int_T f(s, t)\,\lambda(dt)\right\}\mu(ds)\geqslant\int_S \left\{\int_T f_n(s, t)\,\lambda(dt)\right\}\mu(ds)=$$
$$=\int_R f_n(r)\,\varrho(dr)\longrightarrow\int_R f(r)\,\varrho(dr),\quad \text{ч. т. д.}$$

15. Следствие. *В предположениях теоремы 14 ϱ-измеримая векторная функция g, для которой*

$$\int_S \left\{\int_T |g(s, t)|\,\lambda(dt)\right\}\mu(ds)<\infty,$$

ϱ-интегрируема на R и

$$\int_R g(r)\,\varrho(dr)=\int_S \left\{\int_T g(s, t)\,\lambda(dt)\right\}\mu(ds).$$

Доказательство. Это утверждение непосредственно вытекает из теорем Тонелли и Фубини и того факта, что ϱ-измеримая функция g является ϱ-интегрируемой, если функция $|g(\cdot)|$ ϱ-интегрируема (2.22), ч. т. д.

Из теоремы Тонелли вытекает важное следствие, что в случае неотрицательной функции, измеримой на произведении двух пространств с положительными σ-конечными мерами, безразлично, интегрировать ли сначала по первому переменному, а потом по второму или наоборот. В самом деле, согласно теореме Тонелли, оба эти интеграла равны интегралу от f по произведению пространств с мерой (а мы уже видели, что такое произведение коммутативно). Обобщая это утверждение и пользуясь коммутативностью и ассоциативностью произведения пространств с мерой, можно сказать, что интеграл от неотрицательной функции, измеримой на произведении конечного числа пространств с положительными σ-конечными мерами, можно вычислить путем «повторного» интегрирования по различным пространствам-множителям в каком угодно порядке. Если либо функция f, либо мера в одном из пространств-сомножителей не является положительной, то мы не можем уже утверждать этого, предполагая только, что f измерима на произведении пространств. Однако, согласно теоремам 9 и 14, предположив, что f *интегрируема* на произведении пространств, мы снова сможем вычислять этот интеграл путем «повторного» интегрирования по различным пространствам-множителям в любом порядке. Таким образом, из теорем Фубини и Тонелли вытекают весьма общие результаты об «изменении порядка интегрирования».

Отсюда следует, что если f есть функция, определенная на n-мерном евклидовом пространстве E и интегрируемая по n-мерной мере Лебега λ, то «кратный» интеграл $\int_E f(s)\lambda(ds)$ равен «повторному» интегралу $\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\ldots\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} f(s_1, \ldots, s_n)\,ds_1\right\}\ldots\right\}ds_n$.

При этом порядок интегрирования в повторном интеграле несуществен. Поэтому как кратный, так и повторный интегралы Лебега обычно записываются с помощью такого несколько неполного обозначения

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int_{-\infty}^{+\infty} f(s_1, \ldots, s_n)\,ds_1\ldots ds_n.$$

Соответственно этому, если R является «прямоугольником»

$$R=\{[s_1, \ldots, s_n]\,|\,a_1\leqslant s_1\leqslant b_1, \ldots, a_n\leqslant s_n\leqslant b_n\},$$

то интеграл $\int_E f(s)\,\lambda(ds)$ часто записывается в виде

$$\int_{a_1}^{b_1}\ldots\int_{a_n}^{b_n} f(s_1, \ldots, s_n)\,ds_1\ldots ds_n.$$

Необходимо отметить еще, что точно так же, как и в одномерном случае, специфическое обозначение n-мерной меры Лебега часто опускается в обозначении n-мерного интеграла Лебега. Таким образом, часто там, где это не может вызвать недоразумения, $\int\limits_E f(s)\lambda(ds)$ обозначается через $\int\limits_E f(s)\,ds$, а $\int\limits_R f(s)\lambda(ds)$ — через $\int\limits_R f(s)\,ds$.

Рассмотрим теперь, какая связь существует между теорией произведения мер и теорией интегрирования векторных функций. В приложении теории интегралов от векторных функций к конкретным вопросам, таким, как отыскание общего вида операторов, отображающих одно лебегово пространство в другое (см. гл. VI, § 8), приходиться сталкиваться со следующей ситуацией. Предположим, что (S, Σ, μ) — пространство с мерой, а F — μ-измеримая функция, значения которой принадлежат $L_p(T, \Sigma_T, \lambda)$, $1 \leqslant p < \infty$. Для каждого $s \in S$ обозначим через $F(s)$ класс эквивалентных между собой функций, любые два элемента которого совпадают почти всюду относительно λ. Если для каждого s выбрать конкретную *функцию* $f(s, \cdot) \in F(s)$, то полученная функция $f(s, t)$, определенная на пространстве

$$(R, \Sigma_R, \varrho) = (S, \Sigma_S, \mu) \times (T, \Sigma_T, \lambda),$$

будет называться *представителем* функции F. Важно знать, имеет ли F ϱ-измеримых представителей и, в том случае, когда F μ-интегрируема, справедливо ли равенство $\int\limits_S F(s)\,\mu\,(ds) = \int\limits_S f(s, \cdot)\,\mu\,(ds)$. На эти вопросы отвечает доказываемая ниже теорема 17.

16. Лемма *Пусть (S, Σ_S, μ) и (T, Σ_T, λ) — два пространства с мерами λ и μ, которые либо обе конечны, либо обе положительны и σ-конечны; (R, Σ_R, ϱ) — их произведение, а $\mathfrak{X}$ — B-пространство.*

(a) *Если F есть функция, отображающая S в $L_1(T, \Sigma_T, \lambda, \mathfrak{X})$ и μ-интегрируемая на S, то найдется такая ϱ-интегрируемая функция f, отображающая R в $\mathfrak{X}$, что $f(s, \cdot) = F(s)$ для почти всех относительно μ точек s из S. Кроме того, $\int\limits_S f(s, t)\,\mu\,(ds)$ существует для почти всех относительно λ точек t из T, и, как функция t, он равен элементу $\int\limits_S F(s)\,\mu\,(ds)$ пространства $L_1(T, \Sigma_T, \lambda, \mathfrak{X})$.*

(b) *Пусть $1 \leqslant p < \infty$, а f — ϱ-измеримая функция, отображающая (R, Σ_R, ϱ) в $\mathfrak{X}$ и такая, что $F(s) = f(s, \cdot)$, принадлежит $L_p(T, \Sigma_T, \lambda, \mathfrak{X})$ для почти всех относительно μ точек $s \in S$. Тогда функция F, отображающая (S, Σ_S, μ) в $L_p(T, \Sigma_T, \lambda, \mathfrak{X})$, μ-измерима.*

Доказательство. Для краткости обозначим пространство $L_1(S, \Sigma_S, \mu, L_1(T, \Sigma_T, \lambda, \mathfrak{X}))$ через $\tilde{L}_1$. По лемме 2.18, существует такая последовательность $\{F_n\}$ μ-простых функций из $\tilde{L}_1$, что $F_n \to F$ по дорме пространства $\tilde{L}_1$. Каждая из функций F_n постоянна на каждом из попарно непересекающихся множеств $E_n^{(1)}, \ldots, E_n^{(m_n)}$ из Σ, образующих вместе конечное разбиение множества S. Обозначим через $g_n^{(j)}$ значение функции F_n на множестве $E_n^{(j)}$, и пусть функции f_n, $n=1, 2, \ldots$, определены на множестве R равенствами

$$f_n(s, t) = g_n^{(j)}(t), \quad s \in E_n^{(j)}.$$

Из леммы 10 следует, что f_n ϱ-измерима. Кроме того, ясно, что $f_n(s, \cdot) = F_n(s)$ для $s \in S$. Далее, по теореме 14,

$$\int_R |f_n(r)| v(\varrho, dr) = \int_S \left\{ \int_T |f_n(s, t)| v(\lambda, dt) \right\} v(\mu, ds) =$$

$$= \int_S |f_n(s)| v(\mu, ds) < \infty,$$

и в силу 2.18 f_n ϱ-интегрируема на R. Так как $f_n(s, \cdot) = F_n(s)$ для $s \in S$, то, по теореме 9 и лемме 11, мы имеем

$$\lim_{m, n \to \infty} \int_R |f_n(r) - f_m(r)| v(\varrho, dr) =$$

$$= \lim_{m, n \to \infty} \int_S \left\{ \int_T |f_n(s, t) - f_m(s, t)| v(\lambda, dt) \right\} v(\mu, ds) =$$

$$= \lim_{m, n \to \infty} \int_S |F_n(s) - F_m(s)| v(\mu, ds) = \lim_{m, n \to \infty} |F_m - F_n| = 0.$$

Таким образом, ввиду теоремы 6.6 существует такая ϱ-интегрируемая функция f, отображающая R в $\mathfrak{X}$, что

$$\lim_{n \to \infty} \int_R |f_n(r) - f(r)| v(\varrho, dr) = 0.$$

Пользуясь теоремой 9, леммой 11 и леммой 2.18, убеждаемся, что функция $G(s) = f(s, \cdot)$ принадлежит $\tilde{L}_1$ и что

$$|F_n - G| = \int_S |F_n(s) - G(s)| v(\mu, ds) =$$

$$= \int_S \left\{ \int_T |f_n(s, t) - f(s, t)| v(\lambda, dt) \right\} v(\mu, ds) =$$

$$= \int_S |f_n(r) - f(r)| v(\varrho, dr) \to 0.$$

Так как $F_n \to F$ в $\tilde{L}_1$, то $|F-G|=0$, следовательно, в силу (6.8) $F(s)= = G(s)=f(s, \cdot)$ для почти всех относительно μ точек s из S. Тем самым первое утверждение пункта (a) доказано.

Так как функция f ϱ-интегрируема на R, то, согласно теоремам 9 и 13, для почти всех t из T функция $f(\cdot, t)$ μ-интегрируема на S, а функция $\int_S f(s, t)\mu(ds)$ λ-интегрируема на T, что доказывает второе утверждение пункта (a).

Чтобы доказать последнее утверждение в (a), мы определим для каждого E из Σ_T ограниченный линейный оператор U_E, отображающий $L_1(T, \Sigma_T, \lambda, \mathfrak{X})$ в $\mathfrak{X}$, равенством

$$U_E g = \int_E g(t)\lambda(dt), \quad g \in L_1(T, \Sigma_T, \lambda, \mathfrak{X}).$$

Из теорем 9, 13 и 2.19 (c) вытекает, что

$$\begin{aligned} U_E \int_S f(s, \cdot)\mu(ds) &= \int_E \left\{\int_S f(s, t)\mu(ds)\right\}\lambda(dt) = \\ &= \int_{S\times E} f(r)\varrho(dr) = \int_S \left\{\int_E f(s, t)\lambda(dt)\right\}\mu(ds) = \\ &= \int_S U_E F(s)\mu(ds) = U_E \int_S F(s)\mu(ds). \end{aligned}$$

Последнее утверждение пункта (a) вытекает тем самым из леммы 6.8.

Утверждение (b) достаточно доказать при дополнительном предположении, что $v(\mu, S)$ и $v(\lambda, T)$ конечны. Так как функция f ϱ-измерима, то существует последовательность $\{f_n\}$ ϱ-измеримых простых функций, сходящаяся к f по мере ϱ. В силу леммы 8.3 и замечания перед теоремой 2 можно предположить, что каждое f_n является конечной линейной комбинацией характеристических функций множеств вида $A \times B$, где $A \in \Sigma_S$, $B \in \Sigma_T$. Кроме того, можно считать, что $|f_n(s, t)| \leqslant |f(s, t)|$ почти всюду относительно ϱ, и ввиду 6.13(a) можно предполагать, что $\{f_n\}$ сходится к f почти всюду относительно ϱ. Положим $F_n(s)=f(s, \cdot)$, $s \in S$, так что каждое F_n будет простой функцией, отображающей (S, Σ_S, μ) в $L_p(T, \Sigma_T, \lambda, \mathfrak{X})$. По следствию 8 или лемме 12 мы заключаем, что последовательность $\{f_n(s, t)\}$ для почти всех относительно μ точек $s \in S$ сходится к $f(s, t)$ почти всюду относительно λ на T. Из теоремы Лебега (6.16) вытекает, что последовательность $\{F_n(s)\}$ для почти всех $s \in S$ сходится к $F(s)$ по норме пространства $L_p(T, \Sigma_T, \lambda, \mathfrak{X})$; μ-измеримость F вытекает теперь из следствия 6.14, ч. т. д.

В следующей теореме через $L_\infty(T, \Sigma_T, \lambda, \mathfrak{X})$ обозначено пространство всех λ-измеримых, существенно ограниченных функций, отображающих T в $\mathfrak{X}$. Нормой такой функции является ее существенная верхняя грань (см. определение 1.11).

17. Теорема. *Пусть* (S, Σ_S, μ) *и* (T, Σ_T, λ) — *два пространства с мерами* λ *и* μ, *которые либо обе конечны, либо обе положительны и* σ-*конечны, и пусть* (R, Σ_R, ϱ) — *их произведение. Предположим, что* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *и пусть* μ-*интегрируемая функция* F *отображает* S *в* $L_p(T, \Sigma_T, \lambda, \mathfrak{X})$, *где* $\mathfrak{X}$ *есть вещественное или комплексное* B-*пространство. Тогда существует такая* ϱ-*измеримая функция* f, *отображающая* R *в* $\mathfrak{X}$ *и однозначно определенная всюду, кроме точек некоторого нуль-множества относительно* ϱ, *что* $f(s, \cdot) = F(s)$ *для почти всех относительно* μ *точек* $s \in S$. *Кроме того, функция* $f(\cdot, t)$ μ-*интегрируема на* S *для почти всех относительно* λ *точек* t *и интеграл* $\int_S f(s, t)\mu(ds)$, как функция от t, равен элементу $\int_S F(s)\mu(ds)$ *пространства* $L_p(T, \Sigma_T, \lambda, \mathfrak{X})$.

Доказательство. Пусть T разбито на последовательность $\{E_n\}$ попарно непересекающихся множеств конечной меры-λ. Для $1 \leqslant p \leqslant \infty$ положим $L_p = L_p(T, \Sigma_T, \lambda, \mathfrak{X})$ и определим отображения U_n, $n = 1, 2, \ldots$ пространства L_p в L_1 равенствами $(U_n g)(t) = g(t)\chi_{E_n}(t)$, где χ_{E_n} — характеристическая функция множества E_n. В силу неравенства Гёльдера (3.2)

$$|U_n g|_1 \leqslant v(\lambda, E_n)^{1/q} |g|_p,$$

где $1/p + 1/q = 1$ и, значит, U_n есть непрерывное линейное отображение L_p в L_1. По теореме 2.19(c), функция $F_n(\cdot) = U_n F(\cdot)$ является μ- интегрируемой функцией, отображающей S в L_1. Применив лемму 16 (a) к F_n, мы получим ϱ-интегрируемую функцию f_n, отображающую R в $\mathfrak{X}$ и такую, что $f_n(s, \cdot) = F_n(s)$ для каждого s из $S - N_n$, где N_n — некоторое нуль-множество относительно μ. Кроме того, для почти всех относительно λ точек t функция $f_n(\cdot, t)$ μ-интегрируема на S и $\int_S f_n(s, t)\mu(ds)$ как функция t определяет тот же элемент из L_1, что и $\int_S F_n(s)\mu(ds)$. Функцию f, отображающую R в $\mathfrak{X}$, определим теперь равенством $f(s, t) = f_n(s, t)$, если $t \in E_n$. По теореме 6.10, f есть ϱ-измеримая функция, отображающая R в $\mathfrak{X}$. Так как $F_n(s)(t) = F(s)(t)$, если $t \in E_n$, то ясно, что для каждого s, не принадлежащего нуль-множеству $\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$, равенство $f(s, t) = F(s)(t)$ имеет место для почти всех относительно λ точек t из T. Таким образом, $f(s, \cdot) = F(s)$ для почти всех относительно μ точек $s \in S$. Так как функция $f_n(\cdot, t)$ μ-интегрируема на S для почти всех относительно λ точек t, то это же самое справедливо и для $f(\cdot, t)$. Интеграл $\int\limits_S f_n(s, t)\,\mu(ds)$ как функция t определяет в L_1 тот же элемент, что и

$$\int\limits_S F_n(s)\,\mu(ds) = \int\limits_S U_n F(s)\,\mu(ds) = U_n \int\limits_S F(s)\,\mu(ds).$$

Так как

$$\left\{U_n \int\limits_S F(s)\,\mu(ds)\right\}(t) = \left\{\int\limits_S \{F(s)\,\mu(ds)\}(t), \quad t \in E_n,\right.$$

то

$$\int\limits_S f_n(s, t)\,\mu(ds) = \left\{\int\limits_S F(s)\,\mu(ds)\right\}(t), \quad t \in E_n,$$

и, таким образом,

$$\int\limits_S f(s, t)\,\mu(ds) = \left\{\int\limits_S F(s)\,\mu(ds)\right\}(t)$$

для почти всех относительно λ точек t из T.

Для того чтобы завершить доказательство теоремы, остается только показать, что функция f однозначно определена с точностью до некоторого нуль-множества относительно ϱ. Для того чтобы доказать эту единственность, достаточно, очевидно, показать, что ϱ-измеримая функция h, отображающая R в $\mathfrak{X}$, для которой $h(s, \cdot)$ эквивалентно нулю относительно λ для почти всех относительно μ точек s, должна быть эквивалентной нулю относительно ϱ. Если h есть такая функция, то, по теореме Тонелли (14),

$$\int\limits_R |h(r)|\,v(\varrho, dr) = \int\limits_S \left\{\int\limits_T |h(s, t)|\,v(\lambda, dt)\right\} v(\mu, ds) = 0,$$

так что ввиду леммы 6.8 $h(r)=0$ для почти всех относительно ϱ точек $r \in R$, ч. т. д.

Произведения с бесконечным числом множителей. Теперь мы обобщим теорию меры в произведении пространств на произведение бесконечного множества $(S_\alpha, \Sigma_\alpha, \mu_\alpha)$, $\alpha \in A$, пространств с мерами. Мы построим пространство с мерой (S, Σ, μ), называемое *произведением пространств с мерами* $(S_\alpha, \Sigma_\alpha, \mu_\alpha)$, обозначаемое через

$$(S, \Sigma, \mu) = \prod_{\alpha \in A} (S_\alpha, \Sigma_\alpha, \mu_\alpha)$$

и обладающее следующими свойствами: S есть прямое произведение $\prod\limits_{\alpha \in A} S_\alpha$; Σ является σ-алгеброй, порождаемой всеми подмножествами S, имеющими вид $E = \prod\limits_{\alpha \in A} E_\alpha$, где $E_\alpha \in \Sigma_\alpha$ и $E_\alpha = S_\alpha$, за исключением конечного числа α, а μ есть мера на Σ, такая, что

$$\mu(E)=\prod_{\alpha\in A}\mu_\alpha(E_\alpha),$$

где множество E имеет только что указанный вид.

Для того чтобы избежать трудностей, которые могут возникнуть из-за наличия бесконечных произведений, таких, как $\prod_{\alpha\in A}\mu_\alpha(E_\alpha)$, полезно сделать предположение, что для всех α, кроме конечного их числа, μ_α неотрицательна и $\mu_\alpha(S_\alpha)=1$. При этом произведение $\prod_{\alpha\in A}\mu_\alpha(E_\alpha)$ для введенных выше множеств типа $\prod_{\alpha\in A}E_\alpha$ будет иметь смысл, так как $E_\alpha=S_\alpha$ и, следовательно, $\mu_\alpha(S_\alpha)=1$ для всех α, кроме конечного числа. Мы ограничимся даже случаем, когда для всех α μ_α неотрицательна и $\mu_\alpha(S\ )=1$. При этом из-за отказа от возможности включения конечного числа множителей, для которых μ_α не обязательно положительна, а $\mu_\alpha(S_\alpha)$ не обязательно равно единице, не произойдет никакой потери общности. В самом деле, мы можем применить теорию, изложенную в первой части этого параграфа, к конечному числу «иррегулярных» множителей и теорию, излагаемую ниже,— для бесконечного числа регулярных множителей, а затем, используя только теорию, изложенную в первой части этого параграфа, образовать произведение двух полученных пространств.

В оставшейся части этого параграфа через A будет обозначаться произвольное множество индексов α, через S — произведение $\prod_{\alpha\in A}S_\alpha$. Если $B\subseteq A$, то через S_B будет обозначаться произведение $\prod_{\alpha\in B}S_\alpha$, так что $S=S_A$. Через π будет обозначаться произвольное конечное подмножество множества A, а через π' — дополнение $A-\pi$ множества π в A. Обозначение $\mathscr{E}_\pi$ будет использоваться для совокупности множеств из S_π, имеющих вид $\prod_{\alpha\in\pi}E_\alpha$, где $E_\alpha\in\Sigma_\alpha$, а Σ_π — для алгебры множеств, порожденной в S_π совокупностью $\mathscr{E}_\pi$. Заметим, что если множество π состоит из единственного элемента α, то алгебра Σ_π совпадает с σ-алгеброй Σ_α. *Элементарным множеством* из S называется множество, имеющее вид $\prod_{\alpha\in A}E_\alpha$, где $E_\alpha\in\Sigma_\alpha$, причем для всех α, кроме конечного числа, $E_\alpha=S_\alpha$. Можно сказать еще, что элементарное множество в S — это множество, имеющее вид $S_{\pi'}\times E_\pi$ для некоторого π и некоторого E_π из $\mathscr{E}_\pi$. Совокупность всех элементарных множеств из S будет обозначаться через $\mathscr{E}$, а алгебра множеств, порожденная в S совокупностью $\mathscr{E}$, — через Σ_1. Буквой Σ будет обозначаться σ-алгебра множеств из S, порожденная алгеброй Σ_1. Совокупность всех множеств из S, имеющих вид $S_{\pi'}\times E_\pi$, где $E_\pi\in\Sigma_\pi$, будет обозначаться через Σ^π.

18. Лемма *Для каждого* π Σ^π *является алгеброй подмножеств из* S *и* $\Sigma_1 = \bigcup_\pi \Sigma^\pi$.

Доказательство. Из тождеств

$$(S_{\pi'} \times E_\pi) \cup (S_{\pi'} \times F_\pi) = S_{\pi'} \times (E_\pi \cup F_\pi)$$

и

$$(S_{\pi'} \times E_\pi)' = S_{\pi'} \times E'_\pi$$

вытекает, что Σ^π является алгеброй. Из определения алгебры Σ_1 ясно, что Σ_1 содержит все алгебры Σ^π. С другой стороны, так как $\Sigma^{\pi_1} \subseteq \Sigma^{\pi_2}$, если $\pi_1 \subseteq \pi_2$, то сумма $\bigcup_\pi \Sigma^\pi$ является алгеброй. Следовательно, $\Sigma_1 = \bigcup_\pi \Sigma^\pi$, ч. т. д.

19. Лемма. *Пусть* $(S_\alpha, \Sigma_\alpha, \mu_\alpha)$ *для каждого* $\alpha \in A$ *является пространством с положительной мерой и* $\mu_\alpha(S_\alpha) = 1$. *Тогда существует и притом только одна аддитивная функция множества* μ, *определенная на* Σ_1 *и такая, что*

$$\mu\left(\prod_{\alpha \in A} E_\alpha\right) = \prod_{\alpha \in A} \mu_\alpha(E_\alpha)$$

для каждого элементарного множества $\prod_{\alpha \in A} E_\alpha$ *из* S.

Доказательство. Сначала мы докажем единственность μ. Пусть λ — другая аддитивная функция множества, определенная на Σ_1 и имеющая те же самые значения на элементарных множествах. Для каждого π обозначим через μ_π и λ_π функции множества, определенные на Σ_π формулами

$$\mu_\pi(E_\pi) = \mu(E_\pi \times S_{\pi'}), \quad \lambda_\pi(E_\pi) = \lambda(E_\pi \times S_{\pi'}), \quad E_\pi \in \Sigma_\pi.$$

Тогда

$$\mu_\pi\left(\prod_{\alpha \in \pi} E_\alpha\right) = \prod_{\alpha \in \pi} \mu_\alpha(E_\alpha) = \lambda_\pi\left(\prod_{\alpha \in \pi} E_\alpha\right),$$

и, значит, по лемме 1, $\lambda(E) = \mu(E)$ для каждого E из Σ_π. Это означает, что $\lambda(E) = \mu(E)$ для каждого E из Σ^π. Таким образом, по лемме 18, $\lambda(E) = \mu(E)$ для каждого E из Σ_1, т. е. μ единственна. Это доказательство единственности подсказывает, как можно доказать и существование μ. Для каждого конечного множества π из A существует, по лемме 1, единственная аддитивная функция множества μ_π, определенная на Σ_π и такая, что

$$\mu_\pi\left(\prod_{\alpha \in \pi} E_\alpha\right) = \prod_{\alpha \in \pi} \mu_\alpha(E_\alpha), \quad E_\alpha \in \Sigma_\alpha.$$

Функцию μ^π определим на Σ^π равенством

$$\mu^\pi(E_\pi \times S_{\pi'}) = \mu_\pi(E_\pi), \quad E_\pi \in \Sigma_\pi.$$

Заметим, что если $\pi_1 \subseteq \pi$, то

$$\mu^\pi\Big(\prod_{\alpha\in\pi_1} E_\alpha \times S_{\pi_1'}\Big) = \mu_\pi\Big(\prod_{\alpha\in\pi_1} E_\alpha \times \prod_{\alpha\in\pi-\pi_1} S_\alpha\Big) =$$
$$= \Big\{\prod_{\alpha\in\pi_1} \mu_\alpha(E_\alpha)\Big\}\Big\{\prod_{\alpha\in\pi-\pi_1} \mu_\alpha(S_\alpha)\Big\} = \prod_{\alpha\in\pi_1} \mu_\alpha(E_\alpha) = \mu^{\pi_1}\Big(\prod_{\alpha\in\pi_1} E_\alpha \times S_{\pi_1'}\Big),$$

откуда видно, что $\mu^{\pi_1}(E) = \mu^\pi(E)$ для каждого множества E, имеющего вид $E \times S_{\pi_1'}$, где $E \in \mathscr{E}_{\pi_1}$. Из приведенного выше доказательства единственности вытекает, что $\mu^{\pi_1}(E) = \mu^\pi(E)$ для каждого E из Σ^π. Таким образом, если π_1 и π_2 — произвольные конечные множества из A и $E \in \Sigma^{\pi_1} \cap \Sigma^{\pi_2}$, то

$$\mu^{\pi_1}(E) = \mu^{\pi_1 \cup \pi_2}(E) = \mu^{\pi_2}(E),$$

откуда ввиду леммы 18 получаем, что функция

$$\mu(E) = \mu^\pi(E), \quad E \in \Sigma^\pi,$$

однозначно определена на алгебре Σ_1. Для того чтобы убедиться, что μ аддитивна на Σ_1, предположим, что E_1 и E_2 — непересекающиеся множества из Σ_1. По лемме 18, в A найдутся такие конечные множества π_1, π_2, что $E_1 \in \Sigma^{\pi_1}$, $E_2 \in \Sigma^{\pi_2}$. Таким образом, если $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$, то E_1, $E_2 \in \Sigma^\pi$ и, значит, в Σ_π найдутся такие непересекающиеся множества A_1, A_2, что

$$E_1 = A_1 \times S_{\pi'}, \quad E_2 = A_2 \times S_{\pi'}$$

и

$$\mu(E_1 \cup E_2) = \mu((A_1 \cup A_2) \times S_{\pi'}) = \mu_\pi(A_1 \cup A_2) =$$
$$= \mu_\pi(A_1) + \mu_\pi(A_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2),$$

чем и доказана аддитивность μ на Σ_1, ч. т. д.

20. Теорема. *Пусть $(S_\alpha, \Sigma_\alpha, \mu_\alpha)$ для каждого α из A является пространством с положительной конечной мерой и $\mu_\alpha(S_\alpha) = 1$. Тогда существует и притом только одна счетно аддитивная функция множества μ, определенная на σ-алгебре, порожденной в S элементарными множествами, и обладающая тем свойством, что*

$$\mu\Big(\prod_{\alpha\in A} E_\alpha\Big) = \prod_{\alpha\in A} \mu_\alpha(E_\alpha)$$

для каждого элементарного множества $\prod_{\alpha\in A} E_\alpha$ из S.

Доказательство. Обозначим через μ определенную на Σ_1 функцию множества, существование которой доказано в лемме 19. Если нам удастся показать, что μ счетно аддитивна на Σ_1, то следствие 5.9 будет гарантировать нам существование единственного продолжения μ на Σ, обладающего требуемыми свойствами. Рассмотрим последовательность $\{E_i\}$ попарно непересекающихся множеств из Σ_1, сумма которых также принадлежит Σ_1. Пусть $F_n = \bigcup_{i=n+1}^{\infty} E_i$; тогда $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ пусто, и надо показать, что $\lim_{n\to\infty} \mu(F_n) = 0$. По лемме 18, существует последовательность $\{\pi_n\}$ конечных подмножеств множества A, для которых $F_n \in \Sigma^{\pi_n}$, $n \geqslant 1$. Так как $\Sigma^{\pi} \subseteq \Sigma^{\tilde{\pi}}$, если $\pi \subseteq \tilde{\pi}$, то можно предположить, что $\pi_n \subseteq \pi_{n+1}$. Таким образом, в A имеется такая последовательность $\{\alpha_i\}$, что $\pi_n = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{k_n}\}$. Для каждого n обозначим через μ_{π_n} функцию множества, определенную на Σ_{π_n} формулой

$$\mu_{\pi_n}(E_n) = \mu(E_n \times S_{\pi_n'}), \quad E_n \in \Sigma_{\pi_n}.$$

Так как $F_n \in \Sigma^{\pi_n}$, то в Σ_{π_n} найдется такое множество E_n, что $F_n = E_n \times S_{\pi_n'}$. Но тогда, по теореме Фубини,

$$\mu(F_n) = \mu_{\pi_n}(E_n) = \tag{1}$$

$$= \int_{S_{\alpha_1}} \left\{ \cdots \left\{ \int_{S_{\alpha_{k_n}}} \chi_{E_n}(s_{\alpha_1}, \ldots, s_{\alpha_{k_n}}) \, \mu_{\alpha_{k_n}}(ds_{\alpha_{k_n}}) \right\} \cdots \right\} \mu_{\alpha_1}(ds_{\alpha_1}).$$

Так как $\{F_n\}$ — убывающая последовательность, то такой же будет и $\{\mu(F_n)\}$. Мы применим способ доказательства от противного, предположив, что $\mu(F_n) \geqslant \delta > 0$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. По теореме Фубини, повторный интеграл

$$f_n(s_{\alpha_1}) = \int_{S_{\alpha_2}} \left\{ \cdots \left\{ \int_{S_{\alpha_{k_n}}} \chi_{E_n}(s_{\alpha_1}, \ldots, s_{\alpha_{k_n}}) \, \mu_{\alpha_{k_n}}(ds_{\alpha_{k_n}}) \right\} \cdots \right\} \mu_{\alpha_2}(ds_{\alpha_2})$$

определен для почти всех относительно μ_{α_1} точек s_{α_1} из S_{α_1}. Так как $\mu(F_n) = \int_{S_{\alpha_1}} f_n(s_{\alpha_1}) \, \mu_{\alpha_1}(ds_{\alpha_1})$ не сходится к нулю и так как $0 \leqslant f_n(s_{\alpha_1}) \leqslant 1$, то, по теореме Лебега (6.16), в S_{α_1} существует такая точка $s^0_{\alpha_1}$, в которой $f_n(s^0_{\alpha_1})$ определено для всех n и для которой последовательность $\{f_n(s^0_{\alpha_1})\}$ не сходится к нулю. Таким образом, последовательность

$$\int_{S_{\alpha_2}} \left\{ \cdots \left\{ \int_{S_{\alpha_{k_n}}} \chi_{E_n}(s^0_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, \ldots, s_{\alpha_{k_n}}) \, \mu_{\alpha_{k_n}}(ds_{\alpha_{k_n}}) \right\} \cdots \right\} \mu_{\alpha_2}(ds_{\alpha_2}) \tag{2}$$

определена, но не сходится к нулю. Если теперь к последовательности (2) применить те же соображения, которые мы применили только что к последовательности (1), то мы докажем существование в множестве S_{α_2} такой точки $s^0_{\alpha_2}$, для которой интеграл

$$\int_{S_{\alpha_3}} \left\{ \dots \left\{ \int_{S_{\alpha_{k_n}}} \chi_{E_n}(s^0_{\alpha_1}, s^0_{\alpha_2}, s_{\alpha_3}, \dots, s_{\alpha_{k_n}})\, \mu_{\alpha_{k_n}}(ds_{\alpha_{k_n}}) \right\} \dots \right\} \mu_{\alpha_3}(ds_{\alpha_3})$$

определен при всех n, но не стремится к нулю, если n стремится к бесконечности. Продолжая это рассуждение по индукции, мы найдем такую последовательность $\{s^0_{\alpha_i}\}$, $s^0_{\alpha_i} \in S_{\alpha_i}$, $i = 1, 2, \dots$, что для каждого n и каждого $m < k_n$ интеграл

(3)
$$\int_{S_{\alpha_m}} \left\{ \dots \left\{ \int_{S_{\alpha_{k_n}}} \chi_{E_n}(s^0_{\alpha_1}, \dots, s^0_{\alpha_{m-1}}, s_{\alpha_m}, \dots, s_{\alpha_{k_n}})\, \mu_{\alpha_{k_n}}(ds_{\alpha_{k_n}}) \right\} \dots \right\} \mu_{\alpha_m}(ds_{\alpha_m})$$

существует и не стремится к нулю при $n \to \infty$. Если применить это утверждение при $m = k_j + 1$, то, как видно из (3), для некоторого $n > j$ число

$$\chi_{E_n}(s^0_{\alpha_1}, \dots, s^0_{\alpha_{k_j}}, s_{\alpha_{k_j+1}}, \dots, s_{\alpha_{k_n}})$$

отлично от нуля при некотором выборе $s_{\alpha_{k_j+1}}, \dots, s_{\alpha_{k_n}}$. Таким образом, для некоторого $t_j \in S_{\pi'_j}$ точка $s^0_{\alpha_1} \times \dots \times s^0_{\alpha_{k_j}} \times t_j$ принадлежит F_n. Так как $F_n \subseteq F_j$, то мы имеем

$$s^0_{\alpha_1} \times \dots \times s^0_{\alpha_{k_j}} \times t_j \in F_j. \tag{4}$$

Так как $F_j \in \Sigma^{\pi_j}$, то оно имеет вид $F_j = E_j \times S_{\pi_j}$ и поэтому включение (4) справедливо для всех t_j из $S_{\pi'_j}$. Положим теперь $\pi_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} \pi_n$, и пусть s^0_α при $\alpha \notin \pi_\infty$ выбрано из S_α произвольно. Тогда

$$\prod_{\alpha \in A} s^0_\alpha \in E_j, \quad j = 1, 2, \dots,$$

но это противоречит тому, что пересечение всех множеств F_j, $j = 1, 2, \dots$, пусто, ч. т. д.

21. Определение. Пространство с мерой, построенное в теореме 20, называется *произведением пространств с мерами* $(S_\alpha, \Sigma_\alpha, \mu_\alpha)$ и обозначается

$$(S, \Sigma, \mu) = \prod_{\alpha \in A} (S_\alpha, \Sigma_\alpha, \mu_\alpha).$$

Точно так же, как и в случае конечных произведений, операция образования произведения бесконечного множества пространств с мерами ассоциативна. Точная формулировка этого свойства содержится в следующей лемме.

22. Лемма. *Пусть* $(S_\alpha, \Sigma_\alpha, \mu_\alpha)$ *для каждого* α *из множества* A *является пространством с положительной мерой, для которого* $\mu_\alpha(S_\alpha)=1$. *Пусть* A *разбито на попарно непересекающиеся подмножества* A_β, где β *принадлежит некоторому множеству* B. *Тогда*

$$\prod_{\alpha\in A}(S_\alpha, \Sigma_\alpha, \mu_\alpha)=\prod_{\beta\in B}\prod_{\alpha\in A_\beta}(S_\alpha, \Sigma_\alpha, \mu_\alpha).$$

Доказательство. Предположив, что множества B и A не пересекаются, мы можем определить пространства с мерой

$$(S_\beta, \Sigma_\beta, \mu_\beta)=\prod_{\alpha\in A_\beta}(S_\alpha, \Sigma_\alpha, \mu_\alpha),\quad \beta\in B,$$

$$(S_1, \Sigma_1, \mu_1)=\prod_{\beta\in B}(S_\beta, \Sigma_\beta, \mu_\beta),$$

$$(S, \Sigma, \mu)=\prod_{\alpha\in A}(S_\alpha, \Sigma_\alpha, \mu_\alpha).$$

В этих обозначениях мы должны показать, что $(S, \Sigma, \mu)=$ $=(S_1, \Sigma_1, \mu_1)$. Ясно, что $S=S_1$. Если $\beta_0\in B$, то совокупность Σ^{β_0} всех множеств вида $E_{\beta_0}\times\prod_{\beta\neq\beta_2}S_\beta$, где $E_{\beta_0}\in\Sigma_{\beta_0}$, будет, как легко видеть, σ-алгеброй, порожденной множествами вида $\prod_{\alpha\in A}E_\alpha$, где $E_\alpha\in\Sigma_\alpha$ и $E_\alpha=S_\alpha$, за исключением конечного числа элементов из A_{β_0}. Следовательно, $\Sigma^{\beta_0}\subseteq\Sigma$ для каждого $\beta_0\in B$. Так как Σ_1 есть, очевидно, σ-алгебра, порожденная всеми семействами Σ^{β_0}, где $\beta_0\in B$, то $\Sigma_1\subseteq\Sigma$. С другой стороны, если α_0 — произвольный элемент из A, то α_0 принадлежит некоторому множеству A_{β_0}. Тогда каждое множество вида $E_{\alpha_0}\times\prod_{\alpha\neq\alpha_0}S_\alpha$, где $E_{\alpha_0}\in\Sigma_{\alpha_0}$, принадлежит Σ^{β_0} и, следовательно, принадлежит Σ_1. Так как совокупность всех этих множеств порождает σ-алгебру Σ, то $\Sigma\subseteq\Sigma_1$ и, следовательно, $\Sigma=\Sigma_1$.

Пусть, далее, π будет конечным подмножеством A, а τ — конечное подмножество B, такое, что $\bigcup_{\beta\in\tau}A_\beta\supseteq\pi$. Тогда

$$\mu_1\Big(\prod_{\alpha\in\pi}E_\alpha\times\prod_{\alpha\in\pi'}S_\alpha\Big)=\mu_1\Big(\prod_{\beta\in\tau}\Big(\prod_{\alpha\in A_\beta\pi}E_\alpha\times\prod_{\alpha\in A_\beta-\pi}S_\alpha\Big)\times\prod_{\beta\in\tau'}S_\beta\Big)=$$

$$=\prod_{\beta\in\tau}\mu_1\Big(\prod_{\alpha\in A_\beta\pi}E_\alpha\times\prod_{\alpha\in A_\beta-\pi}S_\alpha\Big)=\prod_{\beta\in\tau}\prod_{\alpha\in A_\beta\pi}\mu_\alpha(E_\alpha)=\prod_{\alpha\in\pi}\mu_\alpha(E_\alpha).$$

Таким образом, из доказанной в теореме 20 единственности μ вытекает, что $\mu = \mu_1$, ч. т. д.

23. Лемма. *Пусть* (S_1, Σ_1, μ_1) *и* (S_2, Σ_2, μ_2) — *два пространства с положительной мерой, причем* $\mu_1(S_1) = \mu_2(S_2) = 1$, *а* (S, Σ, μ) — *их произведение. Пусть для каждого* f *из* $L_1(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$, *где* $\mathfrak{X}$ *есть некоторое* B-*пространство,* Tf *означает функцию, определенную на* S *формулой*

$$(Tf)(s_1, s_2) = \int_{S_2} f(s_1, t_2)\,\mu_2(dt_2).$$

Тогда если $f \in L_p(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$, *где* $1 \leqslant p < \infty$, *то функция* Tf *также принадлежит* $L_p(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$ *и*

$$|Tf|_p \leqslant |f|_p.$$

Доказательство. Из неравенства Гёльдера (3.2) вытекает, что $L_p(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$ содержится в $L_1(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$, и, следовательно, ввиду теоремы Фубини (9) и леммы 10 функция Tf определена почти всюду относительно μ и μ-измерима. Применяя теорему 14 и еще раз используя неравенство Гёльдера, мы будем иметь

$$|Tf|_p^p = \int_{S_2} \left\{ \int_{S_1} \left| \int_{S_2} f(s_1, t_2)\,\mu_2(dt_2) \right|^p \mu_1(ds_1) \right\} \mu_2(ds_2) \leqslant$$

$$\leqslant \int_{S_2} \left\{ \int_{S_1} \left\{ \int_{S_2} |f(s_1, t_2)|^p \mu_2(dt_2) \right\} \mu_1(ds_1) \right\} \mu_2(ds_2) =$$

$$= \int_{S_2} \left\{ \int_{S} |f(s)|^p \mu(ds) \right\} \mu_2(ds_2) = \int_{S_2} |f|_p^p \mu_2(ds_2) = |f|_p^p.$$

24. Теорема (*теорема Фубини — Йессена о сходимости по норме*). *Пусть* (S, Σ, μ) *является произведением пространств* $(S_\alpha, \Sigma_\alpha, \mu_\alpha)$, $\alpha \in A$, *с положительной мерой, таких, что* $\mu_\alpha(S_\alpha) = 1$. *Пусть конечные множества* π *из* A *упорядочены по включению. Тогда для произвольной функции* f *из* $L_p(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$, *где* $1 \leqslant p < \infty$, *функции* $f_{\pi'}$, *отображающие* S *в* B-*пространство* $\mathfrak{X}$ *и определяемые равенством*

$$f_{\pi'}(s_\pi \times s_{\pi'}) = \int_{S_\pi} f(s_\pi \times s_{\pi'})\,\mu_\pi(ds_\pi),$$

сходятся в смысле § 1.7 *по норме пространства* $L_p(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$ *к постоянной, значение которой в каждой точке множества* S *равно интегралу*

$$\int_S f(s)\,\mu(ds),$$

а функции f_π, определенные на S формулой

$$f_\pi(s_\pi \times s_{\pi'}) = \int\limits_{S_{\pi'}} f(s_\pi \times s_{\pi'})\, \mu_{\pi'}(ds_{\pi'}),$$

сходятся по норме пространства $L_p(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$ к функции f.

Доказательство. Согласно лемме 23 и теореме II.1.18, достаточно ограничиться рассмотрением функций f, принадлежащих некоторому фундаментальному множеству пространства $L_p(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$. Так как Σ является σ-алгеброй, порожденной множествами $E_{\alpha_0} \times \prod\limits_{\alpha \neq \alpha_0} S_\alpha$, где $E_{\alpha_0} \in \Sigma_{\alpha_0}$, то, по лемме 8.3, в $L_p(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$ всюду плотно $L_p(S, \Sigma_1, \mu, \mathfrak{X})$, где Σ_1 — алгебра, порожденная этими множествами. Таким образом, достаточно ограничиться рассмотрением характеристической функции некоторого множества из Σ_1. По лемме 18, $\Sigma_1 = \bigcup\limits_\pi \Sigma^\pi$, так что каждое множество E из Σ_1 имеет вид $E = F \times S_{\pi_0'}$ для некоторого конечного множества π_0 и некоторого F из Σ_{π_0}. Пусть $f = \chi_E$ и $\pi \supseteq \pi_0$. Тогда, так как $f(s) = f(s_\pi \times s_{\pi'})$ не зависит от $s_{\pi'}$, мы имеем

$$f_{\pi'}(s) = \int\limits_{S_\pi} \chi_E(s_\pi \times s_{\pi'})\, \mu_\pi(ds_\pi) = \int\limits_S f(s)\, \mu(ds)$$

и

$$f_\pi(s) = \int\limits_{S_{\pi'}} \chi_E(s_\pi \times s_{\pi'})\, \mu_{\pi'}(ds_{\pi'}) = f(s), \quad \text{ч. т. д.}$$

25. Следствие. *В предположениях теоремы 24 для каждой функции f из некоторого всюду плотного подмножества $L_1(S, \Sigma, \mu)$ существует такое конечное множество $\pi_0 \in A$, что*

$$f_{\pi'} = \int\limits_S f(s)\, \mu(ds), \quad f_\pi = f, \quad \pi \supseteq \pi_0.$$

Теперь мы докажем теорему, аналогичную предыдущей, заменив используемую в этой теореме сходимость по норме сходимостью почти всюду. Для этого нам понадобится следующая лемма.

26. Лемма. *Пусть (S, Σ, μ) является произведением пространств с положительными мерами (S_n, Σ_n, μ_n), $n = 1, 2, \ldots$, таких, что $\mu_n(S_n) = 1$. Положим $\pi_n = \{1, \ldots, n\}$, и пусть для $f \in L_1(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$ и $s \in S$ функция $g_n(s)$ будет равна либо*

$$\left| \int\limits_{S_{\pi_n'}} f(s_{\pi_n} \times s_{\pi_n'})\, \mu_{\pi_n'}(ds_{\pi_n'}) \right|,$$

либо

$$\left| \int\limits_{S_{\pi_n}} f(s_{\pi_n} \times s_{\pi'_n})\, \mu_{\pi_n}(ds_{\pi_n}) \right|.$$

Для $\delta > 0$ *положим*

$$A_\delta = \{s \mid \sup_{1 \leqslant n < \infty} g_n(s) > \delta\}.$$

Тогда

$$\delta\mu(A_\delta) \leqslant \int\limits_{A_\delta} |f(s)|\, \mu(ds).$$

Доказательство. Так как все меры положительны, то норма интеграла не превосходит интеграла от нормы. Поэтому если f заменить на $|f(\cdot)|$, то множество A_δ не уменьшится, и мы можем и будем предполагать, что функция f вещественная и положительная. Пусть B_0 — пустое множество, а

$$B_k = \{s \mid \sup_{1 \leqslant n \leqslant k} g_n(s) > \delta\}, \quad C_k = B_k - \bigcup_{n=1}^{k-1} B_n, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Тогда последовательность $\{C_k\}$ будет состоять из попарно непересекающихся множеств с суммой A_δ. Предположим теперь для определенности, что $g_n(s)$ имеет первое из двух возможных значений, упомянутых в формулировке леммы. Тогда функция $g_n(s)$ не зависит от $s_{\pi'_n}$ и это же, следовательно, верно и для характеристической функции множества C_n. Таким образом, по теореме Фубини,

$$\int\limits_{C_k} f(s)\, \mu(ds) = \int\limits_{S_{\pi_k}} \left\{ \int\limits_{S_{\pi'_k}} \chi_{C_{\pi_k}}(s_{\pi_k} \times s_{\pi'_k})\, f(s_{\pi_k} \times s_{\pi'_k})\, \mu_{\pi'_k}(ds_{\pi'_k}) \right\} \mu_{\pi_k}(ds_{\pi_k}) =$$

$$= \int\limits_{S_{\pi_k}} \chi_{C_k}(s_{\pi_k} \times s_{\pi'_k}) \left\{ \int\limits_{S_{\pi'_k}} f(s_{\pi_k} \times s_{\pi'_k})\, \mu_{\pi'_k}(ds_{\pi'_k}) \right\} \mu_{\pi_k}(ds_{\pi_k}) =$$

$$= \int\limits_{S_{\pi_k}} \chi_{C_k}(s_{\pi_k} \times s_{\pi'_k})\, g_k(s_{\pi_k} \times s_{\pi'_k})\, \mu_{\pi_k}(ds_{\pi_k}),$$

и так как это выражение не зависит от $s_{\pi'_k}$, то

$$\int\limits_{C_k} f(s)\, \mu(ds) = \int\limits_{S_{\pi'_k}} \left\{ \int\limits_{S_{\pi_k}} \chi_{C_k}(s_{\pi_k} \times s_{\pi'_k})\, g_k(s_{\pi_k} \times s_{\pi'_k})\, \mu_{\pi_k}(ds_{\pi_k}) \right\} \times$$

$$\times\, \mu_{\pi'_k}(ds_{\pi'_k}) = \int\limits_{C_k} g_k(s)\, \mu(ds) \geqslant \delta\mu(C_k).$$

Суммируя по k, получим

$$\int\limits_{A_\delta} f(s)\, \mu(ds) \geqslant \delta\mu(A_\delta).$$

Аналогичное доказательство можно провести и при другом выборе $g_n(s)$, ч. т. д.

27. Теорема (*теорема Фубини — Йессена о поточечной сходимости*). *Пусть* (S, Σ, μ) *является произведением пространств с положительной мерой* (S_n, Σ_n, μ_n), $n=1, 2, \ldots$, *таких, что* $\mu_n(S_n)=1$. *Пусть* $\pi_n=\{1, \ldots, n\}$; *для* $f \in L_1(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$ *и* $s \in S$ *положим*

$$f_{\pi'_n}(s)=f_{\pi'_n}(s_{\pi_n} \times s_{\pi'_n})=\int_{S_{\pi_n}} f(s_{\pi_n} \times s_{\pi'_n})\,\mu_{\pi_n}(ds_{\pi_n})$$

и

$$f_{\pi_n}(s)=f_{\pi_n}(s_{\pi_n} \times s_{\pi'_n})=\int_{S_{\pi'_n}} f(s_{\pi_n} \times s_{\pi'_n})\,\mu_{\pi'_n}(ds_{\pi'_n}).$$

Тогда

$$\lim_n f_{\pi'_n}(s)=\int_S f(s)\,\mu(ds)$$

и

$$\lim_n f_{\pi_n}(s)=f(s)$$

для почти всех s *из* S.

Доказательство. Для заданного $\varepsilon>0$ мы можем ввиду следствия 25 написать $f=g+h$, где $|h|<\varepsilon$ и где $g_{\pi_n}=g$ для всех достаточно больших n. Если $r(s)$ определено равенством

$$r(s)=\lim_{q\to\infty}\sup_{m,n>q}|f_{\pi n}(s)-f_{\pi m}(s)|,$$

то

$$r(s)=\lim_{q\to\infty}\sup_{m,n>q}|h_{\pi_n}(s)-h_{\pi_m}(s)| \leqslant 2\sup_{1\leqslant n<\infty}|h_{\pi_n}(s)|.$$

Таким образом, по лемме 26,

$$\mu(\{s \mid r(s)>2\delta\}) \leqslant |h|/\delta \leqslant \varepsilon/\delta.$$

Ввиду произвольности $\varepsilon>0$ мы имеем $\mu(\{s \mid r(s)>2\delta\})=0$, а ввиду произвольности $\delta>0$ отсюда вытекает, что $r(s)=0$ почти всюду на S. Это означает, что предел $f^*(s)=\lim_n f_{\pi_n}(s)$ существует почти всюду на S. По теореме Фату (6.19) и теореме Фубини — Йессена о сходимости по норме (24) получаем

$$\int_S |f^*(s)-f(s)|\,\mu(ds)=\lim_n \int_S |f_{\pi_n}(s)-f(s)|\,\mu(ds)=0,$$

и, следовательно, (6.8) $f^*(s)=f(s)$ почти всюду. Другое утверждение теоремы может быть доказано аналогично, ч. т. д.

12. Дифференцирование

В этом параграфе мы докажем несколько основных теорем из лебеговской теории дифференцирования функций множества в евклидовых пространствах и несколько классических теорем типа

$$f(s)=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} K_n(s,\ t)\,f(t)\,dt,$$

где $\{K_n\}$ есть соответствующая последовательность ядер, а сходимость понимается как сходимость почти всюду. Первая из этих теорем, теорема Витали о покрытии, является основным инструментом для построения теории дифференцирования.

1. Лемма. *Пусть S — бикомпактное метрическое пространство и A — произвольное подмножество S. Предположим, что семейство $\mathcal{F}$ замкнутых подмножеств S обладает тем свойством, что для каждой точки $s\in S$ в $\mathcal{F}$ найдется содержащее s множество F произвольно малого положительного диаметра $\delta(F)$. Тогда в $\mathcal{F}$ имеется такое конечное или счетное семейство $\{F_n\}$ непересекающихся множеств, что $A\subseteq\bigcup F_n$, если это семейство конечно, и*

$$[*]\qquad A\subseteq F_1\cup\ldots\cup F_n\cup\bigcup_{k=n+1}^{\infty} S(F_k,\ 3\delta(F_k))$$

для каждого n, если оно счетно.

Доказательство. Прежде всего мы определим семейство $\{F_n\}$. Пусть F_1 выбрано произвольно. Предположим, что множества $F_1, \ldots, F_k$ уже выбраны. Если $A\subseteq F_1\cup\ldots\cup F_k$, то лемма доказана. В противном случае, пусть $\varepsilon_k=\sup\delta(F)$, где F пробегает все множества F из $\mathcal{F}$, удовлетворяющие условию

$$S(F,\ \delta(F))\,F_i=\varnothing,\qquad i=1,\ \ldots,\ k.$$

Так как S — метрическое пространство и $\bigcup_{i=1}^{k} F_i$ замкнуто, то ясно, что это семейство непусто и что $\varepsilon_k>0$. Обозначим через F_{k+1} произвольное множество из $\mathcal{F}$, для которого $S(F_{k+1},\ \delta(F_{k+1}))\,F_i=\varnothing$, $i=1, \ldots, k$, и $\delta(F_{k+1})>\frac{2\varepsilon_k}{3}$. Таким образом, семейство $\{F_n\}$ мы определили по индукции.

Предположим, что включение [*] не выполняется для некоторого натурального $n>1$. Пусть

$$p\in A-[F_1\cup\ldots\cup F_n\cup\bigcup_{k=n+1}^{\infty} S(F_k,\ 3\delta(F_k))];$$

рассмотрим такое содержащее p фиксированное множество $F \in \mathcal{F}$, для которого

$$\delta(F) > 0 \text{ и } S(F, \delta(F)) F_i = \varnothing, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Если нам удастся показать, что $S(F, \delta(F)) F_k \neq \varnothing$ для некоторого $k > n$, то это приведет нас к желаемому противоречию. Действительно, пусть k_0 будет наименьшим из тех $k > n$, для которых $S(F, \delta(F)) F_k \neq \varnothing$. Тогда $\delta(F) \leqslant \varepsilon_{k_0-1}$, так что $\delta(F_{k_0}) > \frac{2\delta(F)}{3}$. Так как $k_0 > n$ по предположению, то $p \notin S(F_{k_0}, 3\delta(F_{k_0}))$. Если $q \in S(F, \delta(F)) F_{k_0}$, то

$$\varrho(p, q) < 2\delta(F) < 3\delta(F_{k_0}).$$

Отсюда вытекает, что $p \in S(q, 3\delta(F_{k_0})) \subseteq S(F_{k_0}, 3\delta(F_{k_0}))$, и мы пришли к противоречию.

Таким образом, для того чтобы доказать, что включение [*] справедливо для каждого $n > 1$, остается доказать, что при сделанных выше предположениях $S(F, \delta(F)) F_k \neq \varnothing$ для некоторого $k > n$. Если это не так, то рассматриваемое пересечение пусто для каждого k и по построению последовательности $\{F_n\}$ $\delta(F) \leqslant \varepsilon_k$ для каждого k. Отсюда вытекает, что $\delta(F_k) > 2\delta(F)/3 > 0$ для всех $k > 1$. Рассмотрим произвольную последовательность $\{p_k\}$ точек из S таких, что $p_k \in F_k$. При $i < j$ $S(F_j, \delta(F_j)) F_i = \varnothing$. Так как

$$S(p_j, 2\delta(F))/3) \subseteq S(F_j, \delta(F_j)),$$

то $\varrho(p_i, p_j) > 2\delta(F)/3$. Поэтому ясно, что последовательность $\{p_k\}$ не содержит сходящейся подпоследовательности. Это противоречит бикомпактности S. Следовательно, для некоторого $k > n$ $S(F, \delta(F)) F_k \neq \varnothing$, и включение [*] справедливо для каждого $n > 1$.

Наконец, так как

$$F_1 \cup \ldots \cup F_n \cup \bigcup_{k=n+1}^{\infty} S(F_k, 3\delta(F_k)) \subseteq F_1 \cup \bigcup_{k=2}^{\infty} S(F_k, 3\delta(F_k))$$

для каждого n, то включение [*] справедливо для всех n, ч. т. д.

2. Определение. Пусть μ — конечная положительная мера, определенная на σ-алгебре борелевских множеств бикомпактного метрического пространства S. Говорят, что множество $A \subseteq S$ *покрыто в смысле Витали* семейством $\mathcal{F}$ замкнутых множеств, если каждое $F \in \mathcal{F}$ имеет положительную меру μ и существует такое положительное число α, что каждая точка множества A содержится в множествах $F \in \mathcal{F}$ произвольно малого положительного диаметра, для которых $\frac{\mu(S(F, 3\delta(F)))}{\mu(F)} \leqslant \alpha$.

3. Теорема (*теорема Витали о покрытии*). *Пусть μ — конечная положительная мера, определенная на борелевских множествах бикомпактного метрического пространства S. Если семейство $\mathcal{F}$ замкнутых множеств покрывает множество $A \subseteq S$ в смысле Витали, то найдется такая последовательность непересекающихся множеств $\{F_n\} \subseteq \mathcal{F}$, что $A - \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ имеет меру нуль.*

Доказательство. По лемме 1, существует такая последовательность $\{F_n\}$ непересекающихся множеств из $\mathcal{F}$, что для каждого n $A - \bigcup_{k=1}^{n} F_k \subseteq \bigcup_{k=n+1}^{\infty} S(F_k,\ 3\delta(F_k))$. Далее,

$$\mu\left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} S(F_k,\ 3\delta(F_k))\right) \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu(S(F_k,\ 3\delta(F_k)) \leqslant$$
$$\leqslant \alpha \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu(F_k) \to 0$$

при $n \to \infty$, так как $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(F_k) \leqslant \mu(S) < \infty$. Поэтому для каждого ε найдется такое n_ε, что

$$A - \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \subseteq A - \bigcup_{k=1}^{n_\varepsilon} F_k \subseteq \bigcup_{k=n_\varepsilon+1}^{\infty} S(F_k,\ 3\delta(F_k))$$

и $\mu\left(\bigcup_{k=n_\varepsilon+1}^{\infty} S(F_k,\ 3\delta(F_k))\right) < \varepsilon$. Следовательно, $A - \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ имеет меру нуль, ч. т. д.

4. Определение. Пусть λ — векторная функция множества, определенная на всех замкнутых кубах, содержащихся в некотором открытом множестве G вещественного n-мерного евклидова пространства E^n, и пусть μ — лебеговская мера в E^n. Функция λ называется *дифференцируемой* в точке p множества G, если существует предел

$$\frac{d\lambda}{d\mu}(p) = \lim_{\mu(C)\to 0} \frac{\lambda(C)}{\mu(C)},$$

где C есть замкнутый куб, содержащий точку p. Функция $\frac{d\lambda}{d\mu}$ называется *производной* функции λ.

Ниже, в теореме 6, показано, что терминология и обозначение, введенные в последнем определении, совпадают с теми, что были введены в замечании, следующем за теоремой 10.7.

5. Лемма. *Пусть λ — конечная положительная мера, определенная на борелевских подмножествах замыкания ограниченного откры-*

того множества G вещественного евклидова n-мерного пространства E^n, и $0 < r < \infty$.

(a). *Если для каждого p из множества $A \subseteq G$*

$$\varliminf_{\mu(C)\to 0} \frac{\lambda(C)}{\mu(C)} < r,$$

где C — замкнутый куб, содержащий p, то каждая окрестность множества A содержит такое открытое множество Q, что $A - Q$ есть нуль-множество и $\lambda(Q) < r\mu(Q)$.

(b) *Если для каждого p из множества $A \subseteq G$*

$$\varlimsup_{\mu(C)\to 0} \frac{\lambda(C)}{\mu(C)} > r,$$

то каждая окрестность множества A содержит такое борелевское множество B, что $A - B$ есть нуль-множество и $\lambda(B) > r\mu(B)$.

Доказательство. Чтобы доказать утверждение (a), рассмотрим произвольное открытое множество U, такое, что $A \subseteq U \subseteq G$, и пусть $\mathcal{F}$ — семейство всех замкнутых кубов C, содержащихся в U и удовлетворяющих условию $\lambda(C) < r\mu(C)$. Так как для каждого куба C $\mu(S(C, 3\delta(C))) \leqslant (6\sqrt{n}+1)^n \mu(C)$, то семейство $\mathcal{F}$ покрывает A в смысле Витали. Поэтому ввиду теоремы 3 существует такая последовательность замкнутых кубов $\{C_k\} \subseteq \mathcal{F}$, что $A - \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$ является нуль-множеством. Для каждого k обозначим через D_k внутренность C_k. Так как поверхность куба имеет нулевую меру, то $A - \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$ есть нуль-множество и $\lambda(D_k) < r\mu(D_k)$. Если $Q = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$, то Q открыто, $Q \subseteq U$, $A - Q$ есть нуль-множество и

$$\lambda(Q) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(D_j) < r \sum_{j=1}^{\infty} \mu(D_j) = r\mu(Q),$$

чем и доказано утверждение (a).

Для того чтобы доказать (b), предположим, что U есть произвольное открытое множество, такое, что по-прежнему $A \subseteq U \subseteq G$. Семейство $\mathcal{F}_1$ замкнутых кубов $C \subseteq U$, таких, что $\lambda(C) > r\mu(C)$, покрывает A в смысле Витали. Пусть $\{C_k\} \subseteq \mathcal{F}_1$ — последовательность попарно непересекающихся кубов, для которых $A - \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$ является нуль-множеством; положим $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$. Так как

$$\lambda(B) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(C_j) > r \sum_{j=1}^{\infty} \mu(C_j) = r\mu(B),$$

то множество B удовлетворяет требованиям, сформулированным в (b), ч. т. д.

6. Теорема. *Пусть λ — конечная мера, определенная на борелевских подмножествах некоторого открытого множества G вещественного евклидова n-мерного пространства E^n, и пусть μ — лебеговская мера в E^n. Тогда для почти всех относительно μ точек p из G существует*

$$[*] \qquad \frac{d\lambda}{d\mu}(p) = \lim_{\mu(C)\to 0} \frac{\lambda(C)}{\mu(C)},$$

где C — произвольный замкнутый куб из G, содержащий точку p. Кроме того,

(I) $\frac{d\lambda}{d\mu}$ *μ-интегрируема;*

(II) $\lambda(B) = \int_B \frac{d\lambda}{d\mu}(p)\,\mu(dp)$ *для каждого борелевского подмножества B из G в том и только в том случае, если функция λ абсолютно непрерывна относительно μ.*

(III) $\frac{d\lambda}{d\mu}(p) = 0$ *почти всюду относительно μ в том и только в том случае, если функция λ относительно μ сингулярна.*

Доказательство. Так как G есть сумма счетного числа открытых кубов, замыкание которых содержится в G, то ясно, что мы можем ограничиться рассмотрением подмножеств внутренности K_0 некоторого фиксированного куба K. Если разложить λ на ее вещественную и мнимую части, а затем, пользуясь теоремой Хана о разложении (4.10), разложить каждую из этих частей в сумму положительной и отрицательной мер, то ясно также, что достаточно рассмотреть только случай положительной λ. *Мы будем*, следовательно, *впредь предполагать, что λ положительна.*

Прежде всего мы докажем существование предела. Пусть A — множество точек p из K_0, для которых

$$\overline{\lim_{\mu(C)\to 0}} \frac{\lambda(C)}{\mu(C)} > \underline{\lim_{\mu(C)\to 0}} \frac{\lambda(C)}{\mu(C)},$$

где C — замкнутый куб, содержащий точку p. Положим

$$A_{mn} = \left\{ p \,\middle|\, \overline{\lim_{\mu(C)\to 0}} \frac{\lambda(C)}{\mu(C)} > \frac{m+1}{n} > \frac{m}{n} > \underline{\lim_{\mu(C)\to 0}} \frac{\lambda(C)}{\mu(C)} \right\}.$$

для каждого целого неотрицательного m и натурального n. Допустим, что множество A имеет ненулевую меру. Поскольку $A = \bigcup_{m,\,n=1}^{\infty} A_{mn}$, мера некоторого из множеств A_{ij} тоже не равна нулю. Если $\beta = \inf_{B \supseteq A_{ij}} \mu(B)$, где B—борелевское множество, то $\beta > 0$. Пусть теперь задано $\varepsilon > 0$; используя регулярность μ, можно найти такое открытое множество U, что $A_{ij} \subseteq U \subseteq K_0$ и $\mu(U) < \beta + \varepsilon$. По лемме 5(a), существует такое открытое множество $Q \subseteq U$, что $A_{ij} - Q$ есть нуль-множество и

$$\lambda(Q) \leqslant \frac{i}{j}\mu(Q) < \frac{i}{j}(\beta + \varepsilon).$$

Применяя лемму 5 (b) к множеству $A_{ij}Q$, мы видим, что существует такое борелевское множество $B \subseteq Q$, что мера μ множества $A_{ij}Q—B$ равна нулю, и

$$\lambda(B) \geqslant \frac{i+1}{j}\mu(B).$$

Так как $A_{ij} \subseteq B \cup (A_{ij} - Q) \cup (A_{ij}Q - B)$, то $\mu(B) \geqslant \beta$. Таким образом,

$$\frac{i}{j}(\beta + \varepsilon) > \lambda(Q) \geqslant \lambda(B) > \frac{i+1}{j}\beta,$$

что неверно при достаточно малом ε. Таким образом, мы показали, что мера μ множества A равна нулю, откуда вытекает, что предел [*] существует в K почти всюду относительно μ.

Теперь мы покажем, что функция $\frac{d\lambda}{d\mu}$ μ-измерима. Пусть $C^0(p, \alpha)$ и $C(p, \alpha)$ — соответственно открытый и замкнутый кубы с центром в p и стороной длины α. Тогда для каждого $\alpha > 0$ $\frac{\lambda(C^0(p, \alpha))}{\mu(C^0(p, \alpha))}$ есть непрерывная функция p и, значит, функция

$$\frac{\lambda(C(p, \alpha))}{\mu(C(p, \alpha))} = \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda\left(C^0\left(p, \alpha + \frac{1}{n}\right)\right)}{\mu\left(C^0\left(p, \alpha + \frac{1}{n}\right)\right)}$$

μ-измерима. Следовательно, и

$$\frac{d\lambda}{d\mu}(p) = \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda\left(C\left(p, \frac{1}{n}\right)\right)}{\mu\left(C\left(p, \frac{1}{n}\right)\right)}$$

μ-измерима.

Теперь удобно доказать обратное утверждение (III): если λ относительно μ сингулярна, то $\frac{d\lambda}{d\mu}(p) = 0$ почти всюду относительно μ. В самом деле, если λ сингулярна, то найдется такое борелевское множество N нулевой меры μ, что $\lambda(G - N) = 0$. Предположим, что мера μ множества $D = \left\{p \,\middle|\, \frac{d\lambda}{d\mu}(p) > 0\right\}$ не равна нулю.

Тогда ввиду измеримости функции $\frac{d\lambda}{d\mu}$ существует такое $\varepsilon > 0$ и такое борелевское подмножество E множества $D - N$, что $\mu(E) > 0$ и $\frac{d\lambda}{d\mu}(p) > \varepsilon$ для $p \in E$. Так как μ регулярна, то можно предположить, что множество E замкнуто. По лемме 5 (b), мера λ каждой окрестности множества E больше $\varepsilon\mu(E)$. Так как множество E совпадает с пересечением некоторой последовательности его окрестностей, то $\lambda(D) \geqslant \varepsilon\mu(D) > 0$ вопреки тому факту, что E содержится в множестве $D - N$ нулевой меры λ. Мы показали, таким образом, что $\mu\left(\left\{p \,\middle|\, \frac{d\lambda}{d\mu}(p) > 0\right\}\right) = 0$. Так как λ неотрицательна, то $\frac{d\lambda}{d\mu} \geqslant 0$ и, следовательно, $\frac{d\lambda}{d\mu}(p) = 0$ почти всюду относительно μ.

Теперь мы докажем утверждения (I) и (II). Пользуясь результатом последнего абзаца и разложением λ, по теореме 4.14, в сумму абсолютно непрерывной и сингулярной относительно μ мер, мы можем, очевидно, не ограничивая этим общности, предположить, что λ абсолютно непрерывна. Тогда, по теореме Радона — Никодима (10.2), существует такая μ-интегрируемая функция f, что $\lambda(B) = \int_B f(p)\,\mu(dp)$ для почти всех относительно μ точек p. Если $\mu\left(\left\{p \,\middle|\, f(p) > \frac{d\lambda}{d\mu}(p)\right\}\right) \neq 0$, то найдутся такие положительные числа c и ε, что мера μ множества

$$A = \left\{p \,\middle|\, f(p) > c + \varepsilon > c > \frac{d\lambda}{d\mu}(p)\right\}$$

не равна нулю, а ввиду регулярности μ найдется такое замкнутое множество $D \subseteq A$, для которого $\mu(D) \neq 0$. Но тогда $\lambda(D) = \int_D f(p)\,\mu(dp) > (c+\varepsilon)\,\mu(D)$. Однако, по лемме 5(a), в каждой окрестности множества D найдется такое множество Q, что $\lambda(D) \leqslant \lambda(Q) < c\mu(Q)$. Так как множество D является пересечением некоторой последовательности своих окрестностей, то $\lambda(D) \leqslant c\mu(D)$, т. е. $c\mu(D) > (c+\varepsilon)\,\mu(D)$, и мы пришли к противоречию. Таким образом, пользуясь леммой 5(a), мы показали, что $\mu\left(\left\{p \,\middle|\, f(p) > \frac{d\lambda}{d\mu}(p)\right\}\right) = 0$. Аналогично, пользуясь леммой 5(b), можно получить, что и

$$\mu\left(\left\{p \,\middle|\, f(p) < \frac{d\lambda}{d\mu}(p)\right\}\right) = 0.$$

Остается доказать прямое утверждение (III), т. е. что если $\frac{d\lambda}{d\mu}(p) = 0$ почти всюду относительно μ, то λ сингулярна. Мы можем представить λ в виде суммы сингулярной относительно μ положительной меры λ_1 и абсолютно непрерывной меры λ_2. Из определения производной ясно, что $\frac{d\lambda}{d\mu}=\frac{d\lambda_1}{d\mu}+\frac{d\lambda_2}{d\mu}$ почти всюду относительно μ. По уже доказанной части утверждения (III), $\frac{d\lambda_1}{d\mu}=0$ почти всюду. Таким образом, и $\frac{d\lambda_2}{d\mu}=0$ почти всюду. Применяя утверждение (II) к абсолютно непрерывной относительно μ мере λ_2, мы видим, что

$$\lambda_2(B)=\int_B \frac{d\lambda_2}{d\mu}(p)\,\mu(dp)=0$$

для каждого борелевского множества B, ч. т. д.

7. Следствие. *Если f есть интегрируемая по Лебегу функция, определенная на некотором открытом множестве G вещественного n-мерного евклидова пространства, то*

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^n}\int_{t_1}^{t_1+h}\ldots\int_{t_n}^{t_n+h} f(s_1, \ldots, s_n)\,ds_1\ldots ds_n=f(t_1, \ldots, t_n)$$

почти всюду в G.

Заметим, что в теореме 6 можно использовать не только семейства кубов. Для той же цели пригодны и многие другие семейства замкнутых множеств (например, сфер), покрывающие G в смысле Витали.

В нижеследующей теореме наши результаты обобщаются на векторные функции.

8. Теорема. *Пусть f — векторная функция, определенная на некотором открытом множестве G вещественного n-мерного евклидова пространства и интегрируемая по Лебегу; положим $\alpha(E)=\int_E f(p)\,\mu(dp)$. Тогда*

$$\lim_{\mu(C)\to 0}\frac{1}{\mu(C)}\int_C |f(q)-f(p)|\,\mu(dq)=0$$

для почти всех p из G, где C — замкнутый куб, содержащий точку p. В частности,

$$\frac{d\alpha}{d\mu}(p)=\lim_{\mu(C)\to 0}\frac{1}{\mu(C)}\int_C f(q)\,\mu(dq)=f(p)$$

для почти всех p из G.

Доказательство. По лемме 8.5, существует такое нуль-множество N_0 и такое сепарабельное подпространство $\mathfrak{Z}$ пространства $\mathfrak{X}$, что $f(G - N_0) \subseteq \mathfrak{Z}$. Пусть $\{z_n\}$ — счетное всюду плотное подмножество $\mathfrak{Z}$. По теореме 6, для каждого $n=1, 2, \ldots$

$$\lim_{\mu(C)\to 0} \frac{1}{\mu(C)} \int_C |f(q) - z_n| \mu(dq) = |f(p) - z_n|,$$

где точка p принадлежит дополнению некоторого нуль-множества N_n. Множество $N = \bigcup_{i=0}^{\infty} N_i$ имеет меру нуль. Пусть $p \in G - N$ и $\varepsilon > 0$. Выберем z_k так, чтобы $|f(p) - z_k| < \varepsilon$. Тогда

$$\overline{\lim_{\mu(C)\to 0}} \frac{1}{\mu(C)} \int_C |f(q) - f(p)| \mu(dq) \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{\mu(C)\to 0}} \frac{1}{\mu(C)} \int_C \{|f(q) - z_k| + |z_k - f(p)|\} \mu(dq) =$$

$$= |z_k - f(p)| + \overline{\lim_{\mu(C)\to 0}} \frac{1}{\mu(C)} \int_C |f(q) - z_k| \mu(dq) = 2|z_k - f(p)| < 2\varepsilon.$$

Ввиду произвольности ε

$$\left| f(p) - \frac{1}{\mu(C)} \int_C f(q) \mu(dq) \right| < \frac{1}{\mu(C)} \int_C |f(q) - f(p)| \mu(dq) \to 0,$$

если $\mu(C) \to 0$ и p — произвольная точка из $G - N$, ч. т. д.

9. Определение. Пусть f — векторная функция, определенная на некотором открытом подмножестве n-мерного евклидова пространства и интегрируемая по Лебегу. Множество всех точек p, для которых

$$\lim_{\mu(C)\to 0} \frac{1}{\mu(C)} \int_C |f(q) - f(p)| \mu(dq) = 0,$$

называется *лебеговским множеством* функции f.

Ясно, что лебеговское множество функции f содержит все ее точки непрерывности.

Предположим, что f есть интегрируемая по Лебегу векторная функция одного вещественного переменного t, $-\infty < t < +\infty$. Положим

$$Q_n(t) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & |t| \leqslant n^{-1}, \\ 0, & |t| > n^{-1}. \end{cases}$$

В силу теоремы 8 (при несколько иных обозначениях)

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q_n(t-s) f(s)\, ds = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s) Q_n(s)\, ds = f(t)$$

для каждого t из лебеговского множества функции f. Ясно, что выписанные выше интегралы дают среднее значение функции f в окрестности $\left[t-\frac{1}{n},\ t+\frac{1}{n}\right]$ точки t. Эта интерпретация теоремы 8 как теоремы о «среднем значении» допускает значительное обобщение. Рассмотрим функции $Q_n^*(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}(ne^{-n^2t^2})$. Тогда $\int\limits_{-\infty}^{\infty} Q_n^*(t)\,dt=1$, $n=1, 2, \ldots$. Функции Q_n^* имеют хорошо известный график гауссовой функции плотности вероятности. При возрастании n «горб» в точке $t=0$ становится выше и уже, так что для каждого $\varepsilon>0$ $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} Q_n^*(t)\,dt=1$. Таким образом, в смысле локального поведения функции Q_n^* сильно напоминают функции Q_n. Естественно поэтому поставить вопрос, будет ли это «взвешенное среднее», образованное из «функций плотности вероятности» Q_n^*, вести себя так же, как обычное среднее, образованное с помощью функций Q_n, т. е. будет ли справедливо аналогичное равенство

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-n^2(t-s)^2}f(s)\,ds=f(t)$$

для точек из лебеговского множества функции f. То, что это действительно так, вытекает из сформулированной ниже теоремы 10. Другими следствиями теоремы 10 являются следующие предельные соотношения:

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2 n(t-s)}{n(t-s)}f(s)\,ds=f(t)$$

и

$$\lim_{n\to\infty} n\int\limits_{t}^{\infty} e^{-n(t-s)}f(s)\,ds=f(t),$$

каждое из которых справедливо для точек из лебеговского множества функции f.

Вместо того чтобы непосредственно доказывать теорему 10, мы рассмотрим ниже, в теореме 11, много более общий вопрос о том, в каких случаях

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_n(s,\ t)\,f(s)\,ds=f(t)$$

для лебеговского множества функции f; при этом ядра $K_n(s,\ t)$ не обязательно положительны или даже вещественны. Теорема 10 следует из теоремы 11, если положить

$$K_n(s, t) = Q_n(t-s).$$

10. Теорема. *Пусть $\{Q_n\}$ — последовательность неотрицательных вещественных функций вещественного переменного t, удовлетворяющих следующим условиям:*

(a) *функции $Q_n(t)$ непрерывны справа, возрастают при $t \leqslant 0$ и убывают при $t \geqslant 0$;*

(b) $\lim\limits_{|t| \to \infty} Q_n(t) = 0$;

(c) $\lim\limits_{n \to \infty} Q_n(t) = 0$, *если* $t \neq 0$;

(d) $\lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_{-1}^{1} Q_n(t)\, dt = 1$.

Тогда если $f(t)$ есть интегрируемая по Лебегу функция со значениями в B-пространстве $\mathfrak{X}$, то функции $Q_n(t-s) f(s)$ интегрируемы по s при всех n и t и

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Q_n(t-s) f(s)\, ds = f(t)$$

для каждого t из лебеговского множества функции f.

11. Теорема. *Пусть $\{K_n\}$ и $\{R_n\}$ — две последовательности определенных на плоскости скалярных функций, причем R_n вещественны и $|K_n(s, t)| \leqslant R_n(s, t)$. Предположим, что для каждого фиксированного s выполнены условия:*

(a) *$R_n(s, t)$ есть убывающая функция t при $t \geqslant s$ и возрастающая функция t* при *$t \leqslant s$, кроме того, она непрерывна справа;*

(b) $\lim\limits_{|t| \to \infty} R_n(s, t) = 0$;

(c) *существует такая константа $M(s)$, что*

$$\int\limits_{s-1}^{s+1} R_n(s, t)\, dt \leqslant M(s), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

(d) $\lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_{s-1}^{s+1} K_n(s, t)\, dt = 1$;

(e) $\lim\limits_{n \to \infty} R_n(s, t) = 0$ *для каждой пары (s, t) при $s \neq t$. Тогда если функция f, определенная при $-\infty < s < \infty$ и принимающая значения из B-пространства $\mathfrak{X}$, интегрируема по Лебегу, то*

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_n(s, t) f(t)\, dt = f(s)$$

для каждого s из лебеговского множества функции f.

Доказательство. Так как $|K_n(s, t)| \leqslant R_n(s, t) \leqslant R_n(s, s)$, то, по теореме 2.22, функция $K_n(s, t) f(t)$ интегрируема по Лебегу при любых n и s. Зафиксируем некоторую точку s_0 из лебеговского множества функции f, и пусть $g(t) = f(t) - \chi_I(t) f(s_0)$, где $I = [s_0 - 1, s_0 + 1]$. Ввиду условия (d), теорема 11 эквивалентна равенству

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_n(s_0, t) g(t)\, dt = 0.$$

Достаточно, очевидно, доказать, что

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_n(s_0, t) |g(t)|\, dt = 0.$$

Мы докажем, что

$$[*] \qquad \lim_{n \to \infty} \int_{s_0}^{\infty} R_n(s_0, t) |g(t)|\, dt = 0.$$

Равенство

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{s_0} R_n(s_0, t) |g(t)|\, dt = 0$$

может быть доказано в точности таким же образом. Идея доказательства состоит в интегрировании по частям, т. е. в выражении предела [*] через некоторый интеграл Лебега — Стильтьеса (соответствующие *определения и обозначения* см. в *§ 5*).

Полагая $G(t) = \int_{s_0}^{t} |g(r)|\, dr$, мы будем иметь, согласно теоремам 10.4 и 6.22,

$$[**] \qquad \int_{s_0}^{w} R_n(s_0, t) |g(t)|\, dt = G(w) R_n(s_0, w-) - \int_{s_0}^{w} G(t)\, dR_n(s_0, t).$$

Ввиду условия (b) $R_n(s_0, w-) \to 0$, при $w \to \infty$ в то время как

$$G(w) \to \int_{s_0}^{\infty} |g(t)|\, dt < \infty.$$

Следовательно, переходя в равенстве [**] к пределу при $w \to \infty$, мы получим, что

$$\lim_{w \to \infty} \int_{s_0}^{w} G(t)\, dR_n(s_0, t) = -\int_{s_0}^{\infty} R_n(s_0, t) |g(t)|\, dt.$$

Так как функция G неотрицательна и $R_n(s_0, \cdot)$ убывает, так что $-R_n(s_0, \cdot)$ определяет некоторую неотрицательную меру, то, применяя лемму Фату (6.19) к пределу в левой части равенства, мы найдем, что $\int_{s_0}^{\infty} G(t)\,dR_n(s_0, t)$ существует и

$$\int_{s_0}^{\infty} G(t)\,dR_n(s_0, t) = -\int_{s_0}^{\infty} R_n(s_0, t)\,|g(t)|\,dt.$$

Таким образом, для того чтобы доказать [*], осталось только проверить, что

$$[***] \qquad \lim_{n\to\infty} \int_{s_0}^{\infty} G(t)\,dR_n(s_0, t) = 0.$$

Так как точка s_0 принадлежит лебеговскому множеству функции f, то

$$0 = \lim_{h\to 0} h^{-1} \int_{s_0}^{s_0+h} |f(t) - f(s_0)|\,dt = \lim_{h\to 0} h^{-1} \int_{s_0}^{s_0+h} |g(t)|\,dt = \lim_{h\to 0} h^{-1} G(s_0+h).$$

Таким образом, для заданного $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что $G(s_0+h) < \varepsilon h$, если $0 \leqslant h \leqslant \delta$. Тогда, интегрируя по частям (теорема 6.22), мы получим

$$\int_{s_0}^{s_0+h} G(t)\,dR_n(s_0, t) \leqslant \varepsilon \int_{s_0}^{s_0+\delta} (t-s_0)\,dR_n(s_0, t) = \varepsilon\delta R_n(s_0, (s_0+\delta)-) - \varepsilon \int_{s_0}^{s_0+\delta} R_n(s_0, t)\,dt.$$

Используя условия (c) и (e), получим, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{s_0}^{s_0+\delta} G(t)\,dR_n(s_0, t) \leqslant \varepsilon M(s_0).$$

С другой стороны, так как $\lim_{t\to\infty} G(t) < \infty$, функция $G(t)$ ограничена некоторой константой L. Таким образом, в силу условия (e)

$$\int_{s_0+\delta}^{\infty} G(t)\,dR_n(s_0, t) \leqslant L \int_{s_0+\delta}^{\infty} dR_n(s_0, t) = LR_n(s_0, s_0+\delta) \to 0$$

при $n \to \infty$. Следовательно,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{s_0}^{\infty} G(t)\, dR_n(s_0,\ t) < \varepsilon M(s_0).$$

Ввиду произвольности ε, формула [***] доказана.

Часто используется следующий частный случай двух предыдущих теорем.

12. Следствие. *Пусть Q — неотрицательная функция вещественного переменного t, $-\infty < t < \infty$, обладающая следующими свойствами:*

(a) *Q возрастает при $t \leqslant 0$, убывает при $t \geqslant 0$ и непрерывна справа;*

(b) $\lim\limits_{|t|\to\infty} tQ(t) = 0;$

(c) $\lim\limits_{|t|\to\infty} \int\limits_{-t}^{+t} Q(s)\, ds = 1.$

Если f — функция, определенная при $-\infty < t < \infty$ и принимающая значения из B-пространства $\mathfrak{X}$, — интегрируема по Лебегу, то функция

$$Q(n(t-s))\, f(s)$$

интегрируема при любых n и t и

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q(n(t-s))\, f(s)\, ds = f(t)$$

для каждого t из лебеговского множества функции f.

Доказательство. Это утверждение непосредственно вытекает из теоремы 10, если положить $Q_n(t) = nQ(nt)$, ч. т. д.

13. Упражнения

1. Пусть $(S,\ \Sigma,\ \mu)$ — пространство с конечной мерой; α и β — определенные на Σ ограниченные счетно аддитивные функции. Предположим, что α абсолютно непрерывна относительно μ, а β абсолютно непрерывна относительно α. Показать, что β абсолютно непрерывна относительно μ и что $\frac{d\beta}{d\mu}(s) = \frac{d\beta}{d\alpha}(s)\frac{d\alpha}{d\mu}(s)$ почти всюду.

2. Показать, что теорема 10.2 теряет силу без предположения о σ-конечности $(S,\ \Sigma,\ \mu)$.

3. Построить ограниченную измеримую по Лебегу функцию f, для которой $\int\limits_0^t f(s)\,ds$ не дифференцируем на заданном множестве меры нуль.

4. Функция f, производная которой ограничена на конечном интервале (a, b), является функцией ограниченной вариации, и

$$\int\limits_a^b g(s)\,df(s) = \int\limits_a^b g(s)\,f'(s)\,ds,$$

причем интеграл в левой части равенства существует, и формула справедлива всякий раз, когда функция gf' интегрируема по Лебегу.

5. Пусть h — непрерывная справа функция ограниченной вариации на интервале (a, b). Пусть g — определенная на (a, b) функция, для которой интеграл Лебега—Стильтьеса $I = \int\limits_a^b g(s)\,dh(s)$ существует. Наконец, пусть f непрерывная возрастающая функция, определенная на открытом интервале (c, d), и $f(c) = a$ и $f(d) = b$. Показать, что интеграл Лебега — Стильтьеса

$$\int\limits_c^d g(f(s))\,dh(f(s))$$

существует и равен I.

6. Показать, что определенная на интервале монотонно возрастающая функция f дифференцируема почти всюду по мере Лебега и что f' может быть почти всюду равна нулю, хотя функция f и не является константой.

7. Пусть (S, Σ, μ) — произведение регулярных пространств с мерами $(S_\alpha, \Sigma_\alpha, \mu_\alpha)$, $\alpha \in A$, и пусть на S задана топология, являющаяся произведением топологий в S_α; показать, что (S, Σ, μ) также регулярно.

8. Пусть для каждого натурального n (S_n, Σ_n, μ_n) — такое пространство с мерой, у которого S_n есть множество, состоящее из двух точек 0 и 1, каждая из которых имеет меру $\frac{1}{2}$, а Σ_n — совокупность всех подмножеств множества S_n. Положим $(S, \Sigma, \mu) = \prod\limits_n (S_n, \Sigma_n, \mu_n)$ и обозначим через I интервал $[0, 1)$. Определим отображение $I \to S$ следующим образом: пусть

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2^n}, \quad \varepsilon_n = 0, \text{ или } 1,$$

— двоичное разложение числа $s \in [0, 1)$, однозначно определенное требованием, чтобы $\varepsilon_n = 0$ для бесчисленного множества значений n; положим $\varphi(s) = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots]$. Показать, что σ-алгебра $\{\varphi^{-1}(E) \mid E \in \Sigma\}$ является σ-алгеброй борелевских подмножеств I и что если положить

$$\lambda(\varphi^{-1}(E)) = \mu(E),$$

то λ будет мерой Бореля — Лебега.

9. Пусть f — интегрируемая по Лебегу функция, определенная на единичном интервале $[0, 1)$. Положим $f_n(s) = 2^n \int\limits_{j/2^n}^{(j+1)/2^n} f(s)\,ds$, если $\frac{j}{2^n} \leqslant s \leqslant \frac{j+1}{2^n}$ и $0 \leqslant j \leqslant 2^n - 1$. Показать, что $f_n(s) \to f(s)$ почти всюду (Лебег).

10. Пусть f — интегрируемая по Лебегу функция, определенная на единичном интервале $[0, 1)$. Положим $f_n(s) = 2^{-n} \sum\limits_{j=0}^{2^n-1} f\left(\frac{j}{2^n} + s\right)$ (где $s + t$ при $s + t \geqslant 1$ понимается как $s + t - 1$). Показать, что $f_n(s) \to \int\limits_0^1 f(s)\,ds$ для почти всех s (Лебег).

11. Пусть (S, Σ, μ) — пространство с σ-конечной положительной мерой, а $(R, \mathscr{B}, \lambda)$ — пространство с мерой Бореля — Лебега на вещественной прямой R. Положим $(S_1, \Sigma_1, \mu_1) = (S, \Sigma, \mu) \times \times (R, \mathscr{B}, \lambda)$. Если f — определенная на S вещественная функция, то ее график $P(f) = \{[s, f(s)] \mid s \in S\}$ является подмножеством множества S_1. Показать, что, для того чтобы функция f была μ-измеримой, необходимо и достаточно, чтобы мера μ_1 ее графика равнялась нулю.

12. Пусть в предположениях упражнения 11, функция f будет μ-измеримой и неотрицательной. Показать, что

$$\int\limits_S f(s)\,\mu(ds) = \mu_1\{[s, t] \in S_1 \mid 0 < t < f(s)\}.$$

13. Пусть $\{(S_\alpha, \Sigma_\alpha, \mu_\alpha)\}$ — семейство пространств с конечными положительными мерами, для каждого из которых $\mu_\alpha(S_\alpha) = 1$. Положим $(S, \Sigma, \mu) = \prod\limits_\alpha (S_\alpha, \Sigma_\alpha, \mu_\alpha)$; пусть, далее, $E_\alpha \in \Sigma_\alpha$ и $E = \prod\limits_\alpha E_\alpha$. Показать, что $E \in \Sigma$ в том и только в том случае, если $E_\alpha = S_\alpha$ для всех, кроме счетного множества индексов α, и что в этом случае $\mu(E)$ может быть представлено как абсолютно сходящееся бесконечное произведение $\prod \mu_\alpha(E_\alpha)$.

14. Функции комплексного переменного

В некоторых последующих главах, и особенно в главе VII, нам понадобятся обобщения некоторых хорошо известных результатов теории аналитических функций комплексного переменного на случай функций, принимающих векторные значения. При этом будет предполагаться, что читатель хорошо знаком с элементарной теорией комплексных аналитических функций одного комплексного переменного; пользуясь этой теорией, мы и получим сейчас те ее обобщения, которые нам понадобятся в дальнейшем.

На протяжении этого параграфа через $\mathfrak{X}$ будет обозначаться *комплексное B*-пространство.

Определение. Пусть G — открытое множество в пространстве n комплексных переменных $z_1, .., z_n$. (Такое множество часто называют *областью*.) Определенная на G функция f со значениями в $\mathfrak{X}$, называется *аналитической* на G, если она непрерывна и ее первые частные производные $\frac{\partial f}{\partial z_i}$, $i = s, .., n$, существуют в каждой точке области G.

Ясно, что если f есть векторная аналитическая функция комплексных переменных $z_1, .., z_n$, то x^*f для каждого $x^* \in \mathfrak{X}^*$ будет комплексной аналитической функцией от $z_1, .., z_n$.

Для построения теории векторных аналитических функций, так же как для построения теории комплексных аналитических функций, можно весьма эффективно использовать криволинейные интегралы, определяемые следующим образом:

Пусть $I = \{t \mid a \leqslant t \leqslant b\}$ — интервал вещественной оси и α — определенная на I комплексная непрерывная функция ограниченной вариации, тогда α называется параметризацией *непрерывной спрямляемой кривой* $C = \alpha(I)$ в комплексной плоскости. Если $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$, кроме тех случаев, когда $t_1 = t_2$ или когда t_1 и t_2 совпадают с a и b, то C называется *жордановой кривой*. Жорданова кривая C, для которой $\alpha(a) = \alpha(b)$, называется *замкнутой жордановой кривой*, а жорданова кривая, для которой $\alpha(a) \neq \alpha(b)$, называется *простой дугой*.

Если f есть векторная функция комплексного переменного такая, что $f(\alpha(t))$ определена при всех $a \leqslant t \leqslant b$ и что интеграл Радона — Стильтьеса $\int_a^b f(\alpha(t))\, d\alpha(t)$ определен, то мы пишем

$$\int_a^b f(\alpha(t))\, d\alpha(t) = \int_C f(\alpha)\, d\alpha$$

и называем $\int\limits_C f(\alpha)\,d\alpha$ *криволинейным интегралом* функции f по (или вдоль) кривой C. Легко видеть, что если сделать непрерывную и монотонную замену параметра $t=t(s)$ так, чтобы при возрастании s от a_1 до b_1 t возрастало от a до b, то мы будем иметь (полагая $\alpha_1(s)=\alpha(t(s))$, что

$$\int\limits_{a_1}^{b_1} f(\alpha_1(s))\,d\alpha_1(s)=\int\limits_a^b f(\alpha(t))\,d\alpha(t)$$

(см. лемму 10.8). В частности, если C есть пробегаемая в определенном направлении замкнутая жорданова кривая, то $\int\limits_C f(\alpha)\,d\alpha$ не зависит от выбора параметризации на кривой C и, таким образом, как это и указывает его обозначение, зависит только от множества точек кривой C.

Основной теоремой в теории комплексных криволинейных интегралов является *интегральная теорема Коши*. Мы можем сформулировать ее следующим образом. Пусть U — ограниченное открытое множество в комплексной плоскости, а B — его граница. Предположим, что B состоит из конечного числа попарно непересекающихся замкнутых спрямляемых жордановых кривых, точнее, мы предположим, что B можно представить в виде суммы $B=B_1\cup B_2\cup\ldots\cup B_k$ попарно непересекающихся замкнутых множеств B_j, каждое из которых есть замкнутая спрямляемая жорданова кривая:

$$B_j=\alpha_j(I_j),\quad I_j=\{t\,|\,a_j\leqslant t\leqslant b_j\}.$$

Мы предположим, кроме того, что различные кривые B_j ориентированы *положительно в смысле теории функций комплексного переменного*, т. е. что если точки области U, близкие к B_j, лежат внутри B_j, то мы будем считать, что B_j пробегается в направлении против часовой стрелки при изменении t от a_j до b_j, если же точки области U, близкие к B_j, лежат вне B_j, то мы будем считать, что B_j пробегается в направлении по часовой стрелке в то время как t изменяется от a_j до b_j. Пусть f — функция, аналитическая в некоторой окрестности множества $U\cup B$. По определению, полагаем, что $\int\limits_B f(\alpha)\,d\alpha=$ $=\sum\limits_{j=1}^{k}\int\limits_{B_j} f(\alpha)\,d\alpha$. Тогда интегральная теорема Коши утверждает, что

$$\int\limits_B f(\alpha)\,d\alpha=0.$$

Справедливость этой теоремы для векторных функций вытекает из ее справедливости для комплексных функций: по теореме 2.19 (c),

$$x^* \int_B f(\alpha)\,d\alpha = \int_B x^* f(\alpha)\,d\alpha = 0, \quad x^* \in \mathfrak{X}^*,$$

и, таким образом, ввиду следствия II.3.15 $\int_B f(\alpha)\,d\alpha = 0$.

Точно так же, как в хорошо известном классическом случае комплексных функций, интегральная теорема Коши может быть переформулирована в несколько более общей форме. Для этого рассмотрим компактное множество A в комплексной плоскости, и пусть V — некоторая его окрестность. Тогда V содержит некоторую окрестность U множества A, ограниченную множеством B, состоящим из конечного числа замкнутых жордановых кривых. Для того чтобы убедиться в этом, мы можем разбить комплексную плоскость на достаточно мелкие квадратные ячейки и обозначить через U сумму всех открытых квадратов полученной сетки, замыкание которых пересекается с A, вместе со всеми открытыми сегментами этой сетки, разделяющими два таких квадрата, и всеми вершинами сетки, принадлежащими четырем таким квадратам. Пусть функция f аналитична в $V - A$. Тогда вторая форма интегральной теоремы Коши гласит:

Если жордановы кривые, составляющие B, ориентированы положительно в смысле теории функций комплексного переменного, то интеграл $\int_B f(\alpha)\,d\alpha$ зависит только от функции f и множества A и не зависит от выбора окрестности U множества A.

Иными словами, интегралы $\int_B$ и $\int_{B_1}$ равны при условии, что кривые B и B_1 ограничивают области U и U_1, содержащие одно и то же множество особых точек функции f. При этом мы называем особой точкой каждую точку, в которой функция f или не определена или не аналитична. Это утверждение может быть доказано с помощью линейных функционалов в точности таким же образом, как оно доказывается в первой формулировке.

Точно так же, с помощью функционалов доказывается и *интегральная формула Коши*:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_B \frac{f(\alpha)}{\alpha - z}\,d\alpha,$$

где z есть точка открытого ограниченного множества U, граница B которого состоит из конечного числа замкнутых спрямляемых жордановых кривых, ориентированных положительно в смысле теории функций комплексного переменного, а f есть векторная функция, аналитическая в некоторой окрестности множества $U \bigcup B$. Интегральная формула Коши может быть также доказана и непосредственно с помощью интегральной теоремы Коши точно так же, как это делается в случае комплексных аналитических функций.

Пусть $U_1, \ldots, U_n$ — конечное семейство ограниченных открытых множеств, причем граница B_j множества U_j такая, как описано выше, а f — векторная функция комплексных переменных $z_1, \ldots, z_n$, аналитическая в некоторой окрестности множества $(U_1 \bigcup B_1) \times \ldots \times (U_n \bigcup B_n)$. Тогда, применяя интегральную формулу Коши последовательно к каждому из переменных $z_1, \ldots, z_n$, мы без труда получим интегральную формулу Коши для нескольких переменных:

$$f(z_1, \ldots, z_n) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int\limits_{B_1} \ldots \int\limits_{B_n} \frac{f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}{(\alpha_1 - z_1) \ldots (\alpha_n - z_n)} d\alpha_1 \ldots d\alpha_n,$$

справедливую для любой точки $[z_s, \ldots, z_n]$ из $U_1 \times \ldots \times U_n$.

Из этой формулы, как и в классическом случае одного переменного, легко вытекает, что функция f имеет в $U_1 \times \ldots \times U_n$ непрерывные частные производные любого порядка. Точно так же, как и в классическом случае одного переменного, пользуясь этой интегральной формулой Коши для нескольких переменных, мы можем доказать и следующую теорему Вейерштрасса о сходимости:

Пусть f_n — равномерно ограниченная последовательность векторных функций, каждая из которых определена и аналитична на некотором открытом множестве U в пространстве комплексных переменных $z_1, \ldots, z_n$. Пусть V есть некоторое ограниченное открытое подмножество U, замыкание которого содержится в U. Если функции f_n в каждой точке множества U сходятся к некоторой определенной на U функции f, то эта функция f аналитична на U, а частные производные функции f_n произвольно большого порядка сходятся к соответствующим частным производным функциям f равномерно на V.

Из этой теоремы можно легко получить такое полезное следствие: если функция f аналитична на прямом произведении $U_1 \times \ldots \times U_n$ некоторого семейства открытых множеств комплексной плоскости, и C — непрерывная спрямляемая кривая, целиком лежащая в U_n, то функция g, определяемая формулой

$$g(z_1, \ldots, z_{n-1}) = \int\limits_C f(z_1, \ldots, z_n) \, dz_n,$$

аналитична в $U_1 \times \ldots \times U_{n-1}$.

Если функция f аналитична в некоторой окрестности замыкания ограниченного открытого множества U, граница которого B состоит из конечного числа замкнутых попарно непересекающихся спрямляемых жордановых кривых, ориентированных, как обычно, в положительном смысле, то из интегральной формулы Коши путем

p-кратного дифференцирования можно получить, что

$$f^{(p)}(z)=\frac{p!}{2\pi i}\int\limits_{B}\frac{f(\alpha)}{(\alpha-z)^{p+1}}\,d\alpha,\quad z\in U.$$

Для такой функции f имеет место *разложение Тейлора*

$$f(z)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{f^{(p)}(z_0)}{p!}(z-z_0)^p,\quad z_0\in U,$$

причем этот ряд сходится абсолютно и равномерно относительно z на любом замкнутом множестве вида $\{z\,|\,|z-z_0|\leqslant r\}$, содержащемся в U. Это разложение может быть получено из формулы для $f^{(p)}(z)$ точно таким же методом, который применяется в случае комплексных функций.

Обратно, каждый степенной ряд

$$f(z)=\sum_{p=0}^{\infty}a_p(z-a_0)^p$$

определяет некоторую аналитическую функцию на открытом множестве $|z-z_0|<r$, где r определяется по формуле

$$r=(\overline{\lim_{p\to\infty}}\,|a_p|^{1/p})^{-1}$$

Этот ряд сходится абсолютно и равномерно на каждом множестве $|z-z_0|\leqslant\alpha$, где $\alpha<r$. Кроме того, этот ряд однозначно определяется функцией f, так как

$$a_p=\frac{f^{(p)}(z_0)}{p!},\quad p=0,\ 1,\ 2,\ \ldots.$$

Все эти утверждения (так же как и нижеследующие замечания относительно рядов Лорана) могут быть доказаны обычными методами теории функций комплексного переменного.

Функция f, аналитическая в кольце $\alpha<|z-z_0|<\beta$, имеет единственное *разложение Лорана*

$$f(z)=\sum_{p=-\infty}^{\infty}a_p(z-z_0)^p,$$

сходящееся абсолютно и равномерно в каждом кольце $\alpha+\varepsilon\leqslant\leqslant|z-z_0|\leqslant\beta-\varepsilon$, где $\varepsilon>0$. Коэффициенты a_p определяются по формулам

$$a_p=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}\frac{f(\alpha)}{(\alpha-z_0)^{p+1}}\,d\alpha,\quad p=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots,$$

где C — произвольная замкнутая спрямляемая кривая Жордана, лежащая в кольце $\alpha<|z-z_0|<\beta$, разделяющая окружности

$|z-z_0|=\alpha$ и $|z-z_0|=\beta$ и пробегаемая против часовой стрелки. Обратно, произвольный ряд $\sum\limits_{p=-\infty}^{\infty} a_p (z-z_0)^p$ сходится в кольце $\alpha < |z-z_0| < \beta$, где

$$\alpha = \overline{\lim_{p\to-\infty}} |a_p|^{1/p}, \quad \beta^{-1} = \overline{\lim_{p\to\infty}} |a_p|^{1/p}.$$

Его сумма f аналитична в этом кольце, и сам этот ряд служит разложением Лорана для его суммы. Это кольцо является наибольшим из колец с центром z_0, в которых функция с заданным разложением Лорана может быть аналитической.

Если функция f аналитична в (вырожденном) кольце $0 < |z-z_0| < r$, но не аналитична в круге $|z-z_0| < r$, то z_0 называется ее *изолированной особой точкой*. Разложение Лорана функции $f(z) = \sum\limits_{p=-\infty}^{+\infty} a_p (z-z_0)^p$, сходящееся в кольце $0 < |z-z_0| < r$, называется разложением Лорана функции f с центром в точке z_0. Если бесчисленное множество коэффициентов a_p при $p < 0$ отлично от нуля, то точка z_0 называется *существенно особой точкой функции* f. Если конечное, но не равное нулю число коэффициентов a_p при $p < 0$ отлично от нуля, то точка z_0 называется *полюсом* функции f Наибольшее число n, для которого $a_{-|n|} \neq 0$, называется *порядком* полюса z_0. Если все a_p при $p < 0$ равны нулю, то положив $f(z_0) = a_0$, мы получим функцию f, аналитическую в круге $|z-z_0| < r$, так что особенность ее при $z=z_0$ оказывается *устранимой*. Если $a_p=0$ при $p \leqslant 0$, то точка z_0 называется *нулем* функции f, таким образом, z_0 является нулем функции f, если $f(z_0)=0$. Если при этом $a_p=0$ при $p < n$, но $a_n \neq 0$, то число n называется *порядком* нуля z_0.

Множество U точек топологического пространства называется *связным*, если оно не является суммой двух непустых непересекающихся множеств, открытых в относительной топологии множества U. Другой полезный критерий связности, пригодный для пространства Z n комплексных переменных, состоит в том, что *для связности области U из Z необходимо и достаточно, чтобы каждая пара ее точек лежала на некоторой простой дуге, принадлежащей множеству U.*

Пусть f — функция, аналитическая в некоторой области U пространства n комплексных переменных, а g — аналитическая функция, определенная в некоторой области V того же пространства. Тогда функция g называется *аналитическим продолжением* функции f, если область U является собственным подмножеством V, $g(z_1, \ldots, z_n) = f(z_1, \ldots, z_n)$ для каждой точки $z_1, \ldots, z_n$ из U и каждая точка из V может быть соединена с некоторой точкой из U непрерывной кривой, лежащей в V. Если функция f не допускает никаких аналитических продолжений, то U называется *естественной областью существования функции* f.

Хорошо известный принцип максимума модуля остается справедливым и для векторных функций. В частности, в дальнейшем будут использоваться следующие две его формулировки.

Принцип максимума модуля. Пусть f — аналитическая функция, определенная в некоторой связной области D комплексной плоскости и принимающая значения из комплексного B-пространства $\mathfrak{X}$. Тогда если функция $|f(z)|$ не является константой, то она не может достигать максимума ни в одной точке области D.

Докажем эту теорему от противного; предположим, что для некоторой точки z_0 области D $|f(z_0)| \geqslant |f(z)|$ для каждого z из D. Если C_r есть круг достаточно малого радиуса r с центром z_0, то

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_r} \frac{f(z)\,dz}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^{2\pi} f(re^{i\theta} + z_0)\,d\theta.$$

Следовательно,

$$|f(z_0)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(re^{i\theta} + z_0)|\,d\theta,$$

так что

$$\int\limits_0^{2\pi} \{|f(z_0)| - |f(re^{i\theta} + z_0)|\}\,d\theta \leqslant 0.$$

С другой стороны, так как

$$|f(z_0)| - |f(re^{i\theta} + z_0)| \geqslant 0,$$

то $|f(z_0)| = |f(re^{i\theta} + z_0)|$ для почти всех θ. Ввиду непрерывности функции f это справедливо для всех θ, откуда следует, что $|f(z)| = |f(z_0)|$ для всех z, достаточно близких к z_0. Из доказанного пока вытекает, что множество

$$\{z \mid |f(z)| = |f(z_0)|\}$$

открыто. Но так как это множество, очевидно и замкнуто, а область D связна, то $|f(z)| = |f(z_0)|$ для всех точек z из области D.

Принцип максимума модуля для полосы. Пусть $f(x+iy) = f(z)$ — аналитическая функция со значениями в комплексном B-пространстве $\mathfrak{X}$, определенная и равномерно ограниченная на полосе $x_0 \leqslant x < x_1$, $-\infty < y < +\infty$. Предположим, что

$$|f(x_0 + iy)| \leqslant M, \quad |f(x_1 + iy)| \leqslant M.$$

Тогда $|f(x+iy)| \leqslant M$ при $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$.

Для доказательства можно без ограничения общности предположить, что $x_0 \geqslant 1$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ функция $z^{-\varepsilon} f(z)$ будет в этой полосе аналитической и равномерно ограниченной, стремящейся к нулю при $y \to \pm\infty$ и ограниченной константой M на границе полосы. Поэтому функция $|z^{-\varepsilon}f(z)|$ где-то в полосе достигает своего максимального значения. По принципу максимума модуля этот максимум должен лежать на одной из границ полосы, и, следовательно, $|z^{-\varepsilon}f(z)| \leqslant M$ во всей полосе. При ε, стремящемся к нулю, получаем, что $|f(z)| \leqslant M$ всюду на полосе.

Если f — аналитическая функция, определенная на связном открытом множестве U комплексной плоскости и не равная нулю тождественно, то U не содержит точек, предельных для нулей функции f. Это утверждение можно следующим образом вывести из соответствующего предложения, относящегося к комплексным функциям: если z_1 есть предельная точка для нулей функции f, то для каждого $x^* \in \mathfrak{X}^*$ z_1 будет предельной точкой и для нулей функции x^*f. Следовательно $x^*f=0$ для каждого x^* и, по следствию II.3.15, $f=0$.

Функция f, аналитическая на всей комплексной плоскости, называется *целой*. Теорема Лиувилля утверждает, что *ограниченная целая функция является константой*. Для доказательства рассмотрим ограниченную целую функцию f и определим функцию g, полагая $g(z)=f(z)-f(0)$. Функция g будет ограниченной и целой, причем $g(0)=0$. Для каждого $x^* \in \mathfrak{X}^*$ функция x^*g является ограниченной и целой и $x^*g(0)=0$. Следовательно, по теореме Лиувилля для случая комплексных функций, $x^*g=0$ и, по следствию II.3.15, $g=0$. Таким образом, $f(z)=f(0)$, т. е. функция f является константой.

Наконец, нам понадобится следующая теорема, известная под названием *подготовительной теоремы Вейерштрасса*, которую мы для удобства читателя приведем здесь в той форме, в которой мы ее будем использовать [1]).

Теорема. *Пусть $f(z, w)$ — комплексная аналитическая функция двух комплексных переменных z, w, причем z принадлежит некоторому открытому множеству U, а w — некоторой окрестности $|w|<\delta_1$ начала. Предположим, что функция $f(z, 0)$ не равна тождественно нулю и в некоторой точке z_0 области U имеет нуль порядка m. Тогда найдутся окрестность V точки z_0, положительное число $\delta<\delta_1$, натуральное число $k \leqslant m$ и натуральное n, такие, что для каждого $|w|<\delta$, $w \neq 0$, функция $f(z, w)$ имеет в точности k различных нулей $z_1(w), \ldots, z_k(w)$, принадлежащих V и определяемых рядами по дробным степеням w*

$$z_j(w) = \sum_{p=0}^{\infty} a_{jp} w^{p/n}, \quad j = 1, \ldots, k,$$

т. е. степенными рядами относительно $w' = w^{1/n}$.

---

1) См. например, Маркушевич [4*, стр. 352]. — *Прим. ред.*

15. Примечания и дополнения

Существует несколько изложений лебеговской теории интегрирования скалярных функций относительно скалярной меры. Труды Лебега [2] и Каратеодори [1, 2] являются классическими; более современный подход можно найти в книгах по теории функций вещественного переменного, в частности в монографиях Бурбаки [4], Хана и Розенталя [1], Халмоша [5], Мак-Шейна [2, 3], Манроу [2], Сакса [1], Колмогорова и Фомина [1*] и Шилова [6*]. Так как в книгах Хана и Розенталя [1] и Сакса [1] содержатся превосходные исторические комментарии, а также и библиографические указания, то мы ограничимся здесь лишь кратким рассмотрением особенностей изложения, принятого в нашей книге и отличающегося от стандартного.

Интегрирование векторных функций. В этой главе мы рассматривали интегрирование векторных функций по отношению к скалярной мере. Возможность такого обобщения интеграла была замечена Л. Грейвсом [3], рассматривавшим интеграл Римана. Теория лебеговского типа была построена Бохнером [2]. Метод фундаментальных последовательностей, используемый нами, применялся Данфордом [4] для построения интеграла, эквивалентного интегралу Бохнера.

Несколько более общие интегралы для функций со значениями из B-пространства были построены Г. Биркгофом [4], Гельфандом [2], Петтисом [4] и Прайсом [1]. Интегралы от функций со значениями в локально выпуклом топологическом пространстве были построены Филлипсом [7] и Риккартом [1]. Все эти интегралы счетно аддитивны. В § IV.10 мы изложим лебеговского типа теорию интегрирования скалярных функций относительно счетно аддитивной векторной меры. Примеры, когда и функция, и мера принимают векторные значения, были рассмотрены Бохнером и Тейлором [1; стр. 915—917] и Гавуриным [4], изучавшими интеграл типа интеграла Римана, а также Дэйем [9], Прайсом [1], Риккартом [1] и Бартлом [3], изучавшими интегралы Лебега. Превосходное описание этих интегралов и соотношений между ними читатель может найти у Гильдебрандта [4]. В качестве добавления к указанной там литературе, можно привести еще работы Кристиана [1] и Мак-Шейна [3], относящиеся к интегралам, определяемым через отношение порядка; работы Г. Биркгофа [6], Мазани [1], Маслова [1], и Стюарта [1], в которых рассматривается мультипликативное (в отличие от аддитивного) интегрирование; и работу Монны [6], изучавшего интеграл функций с областью значений в некотором неархимедовом поле.

Разложение счетно аддитивной векторной меры, аналогичное разложению Лебега, было получено Риккартом [3] и Накамурой и Суноути [1].

Конечно аддитивные функции множества. Возможность интегрирования ограниченных функций по конечно аддитивной мере была указана Гильдебрандтом [3] и Фихтенгольцем и Канторовичем [1]. Такой же интеграл использовался и другими авторами, обычно для ограниченных функций. Недавно Лидером [1] была построена теория L_p-пространств для конечно аддитивных мер. А. Д. Александров [1] дал подробное изложение теории ограниченных регулярных конечно аддитивных мер на «нормальном» топологическом пространстве. Ему, в частности, принадлежит теорема 5.13 (А. Д. Александров [1; стр. 590]). А. Д. Александров же [1; II, стр. 618] дал условия, при которых ограниченная регулярная конечно аддитивная мера может быть разложена в сумму счетно аддитивной и конечно аддитивной мер. Его разложение отличается от разложения, приводимого нами в теореме 7.8 и принадлежащего Иосиде и Хьюитту [1, стр. 52].

Теорема Витали — Хана — Сакса. Фреше [8] ввел метрику в пространство измеримых функций, определенных на отрезке [0, 1] так, что сходимость относительно этой метрики эквивалентна сходимости по мере. Если применить это к характеристическим функциям, то получится рассмотренное нами в § 7 пространство $\Sigma(\mu)$. Такое метрическое пространство специально изучалось Ароншайном, а также Никодимом [7, 8]; это — важное и плодотворное понятие.

Витали [2, стр. 147] показал, что если $\{f_n\}$ есть последовательность интегрируемых по Лебегу функций, определенных на отрезке [0, 1] и сходящихся почти всюду к функции f, то

$$\int_0^1 f(s)\,ds \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(s)\,ds$$

существуют и равны друг другу в том и только в том случае, если неопределенные интегралы от f_n равностепенно непрерывны относительно меры Лебега (это, по существу, является частным случаем теоремы 6.15). Хан [2] доказал, что если $\{f_n\}$ есть последовательность интегрируемых по Лебегу функций, определенных на отрезке [0, 1], и если $\lim \int_E f_n(s)\,ds$ существует для каждого измеримого множества E, то эти неопределенные интегралы равностепенно непрерывны относительно n и сходятся к некоторой функции множества, непрерывной относительно меры Лебега. Другое доказательство этой теоремы было предложено Банахом [6, стр. 152]. Важная теорема 7.2 является обобщением этой теоремы и доказана Саксом [3] для случая скалярных мер, хотя его доказательство является совершенно общим. Фактически Саксом доказано, что эта теорема справедлива и при несколько более слабых предположениях.

Филлипс [7, стр. 125] и Риккарт [1, стр. 502] заметили, что, по существу, то же самое доказательство проходит и в том случае, когда значения неопределенных интегралов или мер принадлежат некоторому локально выпуклому линейному топологическому пространству. Другие обобщения были получены Алексевичем [1; I, стр. 15—20]. См. также работу Г. Суноути [1]. По поводу других относящихся сюда результатов см. работы Сакса [2], Сакса и Тамаркина [1] и Хана и Розенталя [1, стр. 56—60].

Следствие 7.3 для случая скалярных мер было получено Никодимом [6], доказавшим его до опубликования теоремы 7.2.

Теорема Радона — Никодима. В 1904 г. Лебег [2, стр. 157] получил необходимые и достаточные условия для того, чтобы функция, определенная на отрезке [0, 1], выражалась некоторым неопределенным интегралом. В следующем году Витали [1] охарактеризовал такие функции, как хорошо знакомые нам теперь абсолютно непрерывные функции.

Эти результаты были обобщены Радоном [2, стр. 1349] для определенной в евклидовом пространстве меры Бореля μ. Общая теорема была доказана Никодимом [7; 8, стр. 168]. Существуют и другие доказательства, например Иосида [2]; по поводу дополнительных библиографических указаний см. также монографию Хана и Розенталя [1, стр. 171].

Обобщение теоремы Радона — Никодима на конечно аддитивные меры было получено в работах Бохнера [3] и Бохнера и Филлипса [1]. Соответствующая теорема будет рассмотрена в п. IV.9.14.

Обобщения теоремы Радона — Никодима на случай векторных мер рассматриваются в § IV.8, дополнительные замечания к этому можно найти в § IV.12.

Произведение пространств с мерой. Исследование мер в произведениях конечного числа пространств можно найти у Хана и Розенталя [1, § 8] и Сакса [1, гл. 3], где приводится много ссылок на литературу. Халмош [5, гл. 7] рассматривал также и бесконечные произведения пространств с мерой. Во всех этих работах изучаются скалярные функции.

Йессен [2] впервые обобщил теорему Фубини на случай бесконечного числа сомножителей. Тот же самый вопрос, но без использования топологии рассматривался Дж. Нейманом [4]. Теоремы 11.24 и 11.27 впервые были предложены Йессеном [1], а в формулировке, принятой нами,— Данфордом и Тамаркиным [1]. Другие результаты, относящиеся к бесконечным произведениям мер, можно найти в работах Дьёдонне [12], Какутани [14] и Спарре Андерсена и Йессена [1, 2].

Дифференцирование. Для получения библиографических указаний по теории дифференцирования скалярных функций мы отсылаем читателя к монографиям Хана и Розенталя [1, гл. V] и Сакса [1, гл. IV].

Дифференцирование в В-пространствах. В этой главе теория интегрирования векторных функций была рассмотрена довольно подробно. Имеется также довольно обширная литература по теории дифференцирования функций, определенных на линейном интервале со значениями в некотором B-пространстве. Не рассматривая этих результатов, мы отошлем читателя к следующим работам: Алаоглу [1], Алексевич [3], Алексевич и Орлич [3], Г. Биркгоф [4], Бохнер [5], Бохнер и Тейлор [1], Данфорд и Морс [1], Гельфанд [2], Л. Грейвс [3], Идзуми [4], Кларксон [1], Манроу [3, 4], Петтис [1, 4, 7], Филлипс [7], Себаштьян-и-Сильва [1].

17 Заказ 1324

ГЛАВА IV

Специальные пространства

1. Введение

Для конкретных приложений к анализу необходимо изложенную нами общую теорию дополнить подробным исследованием свойств отдельных пространств. Каково, например, общее аналитическое выражение для функционала в пространстве, сопряженном к лебегову пространству $L_1 = L_1(S, \Sigma, \mu)$? При каких условиях последовательность в L_1 будет слабо сходящейся? Какие множества в L_1 являются бикомпактными или слабо бикомпактными? Ответы на эти и аналогичные им вопросы для пространств, часто встречающихся в математическом анализе, увеличат ценность общей теории. Эта глава посвящена систематическому изучению таких конкретных вопросов.

В § 2 будет приведен перечень некоторых специальных пространств, как правило, являющихся B-пространствами. Для каждого из этих пространств мы попытаемся решить восемь перечисленных ниже проблем. Результаты этих исследований будут сведены в таблицу в § 15.

Проблема 1. Каково аналитическое представление пространства $\mathfrak{X}^*$, сопряженного к заданному пространству $\mathfrak{X}$?

Проблема 2. При каких условиях последовательность $\{x_n\}$ из $\mathfrak{X}$ обладает тем свойством, что $\lim x^* x_n$ существует для любого x^* из $\mathfrak{X}^*$?

Проблема 3. В каком случае последовательность слабо сходится к определенному пределу?

Проблема 4. Является ли пространство $\mathfrak{X}$ слабо полным?

Проблема 5. Является ли $\mathfrak{X}$ рефлексивным?

Проблема 6. Какие подмножества $\mathfrak{X}$ слабо компактны?

Проблема 7. Какие подмножества из $\mathfrak{X}$ бикомпактны в его метрической топологии?

Проблема 8. Если $\{x_n\}$ — последовательность из $\mathfrak{X}$, причем пространство $\mathfrak{X}$ сопряжено к $\mathfrak{Y}$, то при каких условиях последовательность $\{x_n\}$ является $\mathfrak{Y}$-сходящейся в том смысле, что $\lim_n x_n y$ существует при всех $y \in \mathfrak{Y}$?

При исследовании всех этих вопросов мы получим ряд интересных специальных свойств отдельных пространств и выясним некоторые соотношения между ними. Это также будет отражено в таблице в § 15.

2. Перечень специальных пространств

Ниже мы приводим перечень различных специальных B- и F-пространств. За исключением гильбертова пространства, каждое из них состоит из вещественных или комплексных функций f, g, заданных на некоторой определенной области S. Сложение и умножение определяются естественным образом, т. е. равенствами

$$(f+g)(s)=f(s)+g(s), \quad (\alpha f)(s)=\alpha f(s).$$

Таким образом, нулевой вектор — это функция, тождественно равная нулю. В приводимом ниже списке пространств мы обычно не уточняем, будет ли рассматриваемое пространство состоять из всех вещественных функций, обладающих указанными там свойствами, или изо всех комплексных функций с такими свойствами. Кроме специально указанных случаев, допускаются обе возможности. Первая приводит к вещественному B- или F-пространству, вторая — к комплексному B- или F-пространству. Так, например, если S есть некоторое топологическое пространство, то через $C(S)$ может быть обозначено либо вещественное B-пространство всех определенных на S вещественных ограниченных непрерывных функций, либо комплексное B-пространство всех определенных на S комплексных ограниченных непрерывных функций. Делать определенный выбор между вещественными и комплексными числами мы будем лишь в том случае, если исследование вещественного и комплексного B-пространств в рассматриваемом случае действительно требует применения различных методов.

Доказательство того, что данное пространство удовлетворяет соответствующим аксиомам, будет обычно помещаться в том параграфе, где рассматривается это пространство. Проведение наиболее элементарных из таких доказательств иногда предоставляется читателю в качестве упражнения.

1. *Пространство* E^n есть линейное пространство упорядоченных последовательностей $x=[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ из n чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Норма определяется равенством $|x|=(|\alpha_1|^2+\ldots+|\alpha_n|^2)^{1/2}$. Если полем скаляров служит поле вещественных чисел, то E^n называется *n-мерным евклидовым пространством*; если это поле есть поле комплексных чисел, то E^n называется *n-мерным унитарным пространством* или *n-мерным гильбертовым пространством*.

2. *Пространство* l_p^n определено для натурального n и вещественного p, $1 \leqslant p < \infty$. Его точками являются упорядоченные последова-

тельности $x=[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ из n чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, а норма равна

$$|x|=\left\{\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^p\right\}^{1/p}.$$

3. *Пространство* l_∞^n есть линейное пространство всех упорядоченных последовательностей $x=[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ из n чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ с нормой

$$|x|=\sup_{1\leqslant i\leqslant n}|\alpha_i|.$$

4. *Пространство* l_p определяется при $1\leqslant p<\infty$ как линейное пространство всех числовых последовательностей $x=\{\alpha_n\}$, для которых норма

$$|x|=\left\{\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^p\right\}^{1/p}$$

конечна.

5. *Пространство* l_∞ есть линейное пространство всех ограниченных числовых последовательностей $x=\{\alpha_n\}$. Норма определяется равенством

$$|x|=\sup_n|\alpha_n|.$$

6. *Пространство* c есть линейное пространство всех сходящихся числовых последовательностей $x=\{\alpha_n\}$. Нормой является

$$|x|=\sup_n|\alpha_n|.$$

7. *Пространство* c_0 есть линейное пространство всех последовательностей $x=\{\alpha_n\}$, сходящихся к нулю. Норма определяется равенством

$$|x|=\sup_n|\alpha_n|.$$

8. *Пространство* bv есть линейное пространство всех числовых последовательностей $x=\{\alpha_n\}$, для которых норма

$$|x|=|\alpha_1|+\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_{n+1}-\alpha_n|$$

конечна.

9. *Пространство* bv_0 есть линейное пространство всех числовых последовательностей $x=\{\alpha_n\}$, для которых $\lim\limits_n \alpha_n=0$ и для которых норма

$$|x|=\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_{n+1}-\alpha_n|$$

конечна.

10. *Пространство bs* есть линейное пространство всех числовых последовательностей $x=\{\alpha_n\}$, для которых норма

$$|x|=\sup_n\left|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right|$$

конечна.

11. *Пространство cs* есть линейное пространство всех последовательностей $x=\{\alpha_n\}$, для которых ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ сходится. Норма определяется равенством

$$|x|=\sup_n\left|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right|.$$

12. Пусть S — произвольное множество, а Σ — некоторая алгебра подмножеств множества S. *Пространство* $B(S, \Sigma)$ состоит из всех равномерных пределов конечных линейных комбинаций характеристических функций множеств из Σ. Норма в $B(S, \Sigma)$ определяется формулой

$$|f|=\sup_{s\in S}|f(s)|.$$

Определенная на S скалярная функция f является Σ-*измеримой*, если $f^{-1}(A)\in\Sigma$ для каждого борелевского множества A из области значений функции f. Ясно, что каждая ограниченная Σ-измеримая функция принадлежит $B(S, \Sigma)$, причем множество таких функций всюду плотно в $B(S, \Sigma)$. Ясно также, что если мы определим на Σ функцию множества μ, полагая $\mu(E)=\infty$, если $E\neq\varnothing$, и $\mu(\varnothing)=0$, то ограниченная функция будет Σ-измеримой тогда и только тогда, когда она вполне μ-измерима.

13. *Пространство* $B(S)$ определено для произвольного множества S и состоит из всех определенных на S ограниченных скалярных функций. Нормой служит

$$|f|=\sup_{s\in S}|f(s)|.$$

14. *Пространство* $C(S)$ определено для топологического пространства S и состоит из всех определенных на S ограниченных непрерывных скалярных функций. Нормой является

$$|f|=\sup_{s\in S}|f(s)|.$$

15. *Пространство* $ba(S, \Sigma)$ определено для некоторой алгебры Σ подмножеств множества S и состоит из всех ограниченных аддитивных скалярных функций, определенных на Σ. Норма $|\mu|$ есть полная вариация μ на S, т. е. $|\mu|=v(\mu, S)$.

16. *Пространство* $ca(S, \Sigma)$ определено для некоторой σ-алгебры Σ подмножеств множества S и состоит из всех скалярных функций, определенных и счетно аддитивных на Σ. Нормой $|\mu|$ является полная вариация $v(\mu, S)$.

17. *Пространство* $rca(S)$ определено для топологического пространства S и состоит из всех регулярных счетно аддитивных скалярных функций множества, определенных на σ-алгебре $\mathscr{B}$ всех борелевских множеств из S. Нормой $|\mu|$ служит полная вариация $v(\mu, S)$.

18. *Пространство* $L_p\ (S, \Sigma, \mu)$ определено для произвольного вещественного числа p, $1 \leqslant p < \infty$, и любого пространства с положительной мерой (S, Σ, μ). Оно состоит из таких определенных на S μ-измеримых скалярных функций f, для которых норма

$$|f| = \left\{ \int_S |f(s)|^p \mu(ds) \right\}^{1/p}$$

конечна.

Замечание. В определении пространства $L_p(S, \Sigma, \mu)$, приведенном в гл. III, не предполагалось, что $\mu \geqslant 0$. Однако в любом случае пространство $L_p(S, \Sigma, \mu)$ совпадает с $L_p(S, \Sigma, v(\mu))$, а вариация $v(\mu)$ неотрицательна. Как было указано в замечаниях после следствия III.2.5 и теоремы III.3.5, элементами пространства $L_p(S, \Sigma, \mu)$ являются фактически не функции, а классы эквивалентных между собой функций, причем две функции эквивалентны, если они равны почти всюду. (III. 6.8.). Такие же замечания относятся и к вводимым ниже пространствам $L_\infty(S, \Sigma, \mu)$ и $TM(S, \Sigma, \mu)$.

19. *Пространство* $L_\infty(S, \Sigma, \mu)$ определяется для пространства с положительной мерой (S, Σ, μ) и состоит из всех существенно ограниченных относительно μ скалярных функций (см. определение III.1.11.). Нормой служит

$$|f| = \operatorname*{vrai\,sup}_{\mu\quad s \in S} |f(s)|.$$

Замечание. В определении нижеследующих четырех пространств термин *интервал* используется для обозначения множества вещественных чисел одного из следующих видов: $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$ или (a, b), где a — либо вещественное число, либо $-\infty$, а b — либо вещественное число, либо $+\infty$. Во всех четырех случаях a называется *левым концом* соответствующего интервала.

20. *Пространство* $BV(I)$ определено для некоторого интервала I и состоит из всех определенных на I скалярных функций ограниченной вариации (см. III.5.15). Если a — левый конец интервала I, то

$$|f| = |f(a+)| + v(f, I),$$

где $v(f, I)$ есть, как обычно, полная вариация функции f на I (в III.6.21) было показано, что предел $f(a+)$ существует для всех $f \in BV(I)$).

21. *Пространство* $NBV(I)$ определено для интервала I и состоит из таких принадлежащих $BV(I)$ функций f, которые удовлетворяют следующим условиям: 1) f непрерывна справа в каждой внутренней точке интервала I и 2) $f(a+)=0$, где a есть левый конец интервала I. Норма определяется равенством

$$|f| = v(f, I).$$

22. Функция $f \in BV(I)$ называется *абсолютно непрерывной*, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon,$$

где (a_i, b_i), $i=1, 2, \ldots$ — произвольные попарно непересекающиеся подинтервалы I, для которых $\sum_{i=1}^{n} |b_i - a_i| < \delta$. *Пространство* $AC(I)$ определено для интервала I и состоит из всех определенных на I абсолютно непрерывных функций. Если a есть левый конец интервала I, то норма определяется равенством

$$|f| = |f(a+)| + v(f, I).$$

23. *Пространство* $C^n(I)$ определяется для замкнутого интервала I и натурального n как множество определенных на I скалярных функций, имеющих n ограниченных непрерывных производных. Норма определяется равенством

$$|f| = \sum_{i=0}^{n} \sup_{s \in I} |f^{(i)}(s)|.$$

24. *Пространство* $A(D)$ определено для открытого множества D комплексных чисел как совокупность таких комплексных функций, которые ограничены и непрерывны на замыкании D и аналитичны на D. Норма определяется равенством

$$|z| = \sup_{z \in D} |f(z)|.$$

Пространство $A(D)$ есть комплексное линейное пространство, не имеющее, очевидно, вещественного аналога.

25. Функция f вещественного переменного t называется *почти периодической*, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $L > 0$, что каждый интервал вещественной оси длиной не меньше L содержит такую точку x, что $|f(t) - f(t+x)| < \varepsilon$ при $-\infty < t < +\infty$. *Пространство* AP есть линейное пространство всех непрерыв-

ных почти периодических функций вещественного переменного. Нормой служит

$$|f|=\sup_{-\infty<t<+\infty}|f(t)|.$$

В § 7 будет показано, что каждая почти периодическая функция ограничена.

26. Гильбертово пространство есть линейное векторное пространство $\mathfrak{H}$ над полем Φ комплексных чисел вместе с комплексной функцией $(\cdot,\ \cdot)$, определенной на $\mathfrak{H}\times\mathfrak{H}$ и обладающей следующими свойствами:

(I) $(x,\ x)=0$ в том и только в том случае, если $x=0$;

(II) $(x,\ x)\geqslant 0,\ x\in\mathfrak{H}$;

(III) $(x+y,\ z)=(x,\ z)+(y,\ z),\ x,\ y,\ z\in\mathfrak{H}$;

(IV) $(\alpha x,\ y)=\alpha(x,\ y),\ \alpha\in\Phi,\ x,\ y\in\mathfrak{H}$;

(V) $(x,\ y)=\overline{(y,\ x)}$;

(VI) Если $x_n\in\mathfrak{H}$, $n=1,2,\ldots$, и если $\lim\limits_{n,\ m\to\infty}(x_n-x_m,\ x_n-x_m)=0$, то существует такое $x\in\mathfrak{H}$, что $\lim\limits_{n}(x_n-x,\ x_n-x)=0$.

Функция $(\cdot,\ \cdot)$ называется *скалярным* или *внутренним произведением* в $\mathfrak{H}$, причем $(x,\ y)$ называется *скалярным* или *внутренним произведением элементов x и y. Норма* в пространстве $\mathfrak{H}$ определяется равенством $|x|=(x,\ x)^{1/2}$.

Замечание. Гильбертово пространство было определено некоторой системой абстрактных аксиом. Интересно отметить, что некоторые из определенных выше конкретных пространств удовлетворяют этим аксиомам и являются, следовательно, частными случаями абстрактного гильбертова пространства. Так, например, n-мерное унитарное пространство E^n будет гильбертовым пространством, если скалярное произведение двух элементов $x=[\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n]$ $y=[\beta_1,\ \ldots,\ \beta_n]$ из E^n определить формулой

$$(x,\ y)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overline{\beta}_i.$$

Точно так же комплексное l_2 становится гильбертовым пространством, если скалярное произведение $(x,\ y)$ векторов $x=\{\alpha_n\}$, $y=\{\beta_n\}$ определить формулой

$$(x,\ y)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\overline{\beta}_n.$$

Аналогично комплексное пространство $L_2(S,\ \Sigma,\ \mu)$ со скалярным произведением

$$(f,\ g)=\int_S f(s)\overline{g(s)}\,\mu(ds),\quad f,\ g\in L_2(S,\ \Sigma,\ \mu)$$

является гильбертовым пространством.

Последние из перечисляемых нами пространств будут F-, но не B-пространствами.

27. *Пространство* $TM(S, \Sigma, \mu)$ определено для пространства с положительной мерой (S, Σ, μ) и состоит из всех определенных на S вполне измеримых функций f (см. III.2.10). Метрической функцией в $TM(S, \Sigma, \mu)$ служит $\varrho(f, g)=|f-g|$, где

$$|f|=\inf_{\alpha>0}\{\alpha+\operatorname{arctg}\mu(S(|f|>\alpha))\},$$

$$S(|f|>\alpha)=\{s,\ s\in S,\ |f(s)|>\alpha\}.$$

28. *Пространство* s состоит из всех числовых последовательностей $x=\{\alpha_i\}$. Метрической функцией в s является $\varrho(x, y)=|x-y|$, где

$$|x|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|\alpha_n|}{1+|\alpha_n|}.$$

3. Конечномерные пространства

Как мы сейчас увидим, пространство E^n является прототипом всех n-мерных линейных нормированных пространств, и прежде всего, необходимо отметить, что E^n является B-пространством. В силу неравенства Минковского (III.3.3) E^n является линейным нормированным пространством. Если $y=[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]\in E^n$, то $|\alpha_i|\leqslant\leqslant|y|$, и, значит, полнота E^n вытекает из полноты поля скаляров Φ. Таким образом, E^n есть B-пространство. Ограниченное замкнутое множество в E^n бикомпактно; действительно, если последовательность $y^m=[\alpha_1^m, \ldots, \alpha_n^m]$ ограничена, то последовательность $\{\alpha_i^m,\ m=1, 2, \ldots\}$ ограничена в Φ и, следовательно, найдется такая подпоследовательность $\{m_j\}$ последовательности $\{m\}$, для которой пределы $\lim\limits_{j\to\infty}\alpha_i^{m_j}=\alpha_i$, $i=1, \ldots, n$, существуют. Но тогда последовательность $\{y^{m_i}\}$ сходится к вектору $[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$, принадлежащему E^n.

1. Лемма. *Конечномерное линейное нормированное пространство полно и, следовательно, является B-пространством.*

Доказательство. Пусть $\{b_1, \ldots, b_n\}$ — базис конечномерного линейного нормированного пространства $\mathfrak{X}$. Для каждой точки $y=[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ из E^n пусть $Ty=x$, где $x=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i b_i$. Тогда T будет взаимно однозначным непрерывным отображением E^n на $\mathfrak{X}$. Для того чтобы убедиться в полноте $\mathfrak{X}$, мы прежде всего покажем, что, и обратное преобразование T^{-1} непрерывно. Допустим, что это не так, тогда найдется такая последовательность $\{x^n\}$ в $\mathfrak{X}$ и такое $\varepsilon > 0$, что $x^n \to 0$ и $|T^{-1}x^n| \geqslant \varepsilon$, $n=1, 2, \ldots$. Если $y^n = (T^{-1}x^n)/|T^{-1}x^n|$, то $|y^n| = 1$ и $y^n = T^{-1}z^n$, где $z^n \to 0$. Так как последовательность $\{y^n\}$ принадлежит бикомпактному множеству $\{y \mid y \in E^n, \ |y|=1\}$ пространства E^n, то найдется подпоследовательность последовательности $\{y^n\}$, сходящаяся к некоторой точке $y^0 = [\alpha_1^0 \ldots, \alpha_n^0]$, для которой $|y^0| = 1$. Ввиду непрерывности T, $0 = Ty^0 = \alpha_1^0 b_1 + \ldots + \alpha_n^0 b_n$, а так как векторы $b_1, \ldots, b_n$ линейно независимы, то $\alpha_1^0 = \ldots \ldots = \alpha_n^0 = 0$. Однако это противоречит тому, что $|y^0| = 1$, и, таким образом, доказывает непрерывность преобразования T^{-1}. Следовательно, по лемме II.3.4, существует такая константа M, что $|T^{-1}x| \leqslant \leqslant M|x|$, откуда следует, что фундаментальная последовательность $\{x^n\}$ пространства $\mathfrak{X}$ переходит в фундаментальную же последовательность $y^n = T^{-1}x^n$ пространства E^n. Если $y = \lim y^n$, то $x^n = Ty^n$ сходится к $Ty \in \mathfrak{X}$, т. е. пространство $\mathfrak{X}$ полно, ч. т. д.

2. Следствие. *Конечномерное линейное многообразие, принадлежащее B-пространству, замкнуто.*

Доказательство. Это утверждение вытекает из предыдущей леммы и леммы I.6.7.

3. Следствие. *Каждое n-мерное B-пространство эквивалентно E^n.*

4. Следствие. *Каждый линейный оператор, определенный на конечномерном линейном нормированном пространстве, непрерывен.*

Доказательство. Пусть $\{b_1, \ldots, b_n\}$ — базис конечномерного линейного нормированного пространства $\mathfrak{X}$, так что каждое x из $\mathfrak{X}$ однозначно представляется в виде $x = \alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_n b_n$. Как было показано при доказательстве леммы 1, α_i, $i=1, \ldots, n$, непрерывно зависят от x. Таким образом, если U — определенный на $\mathfrak{X}$ линейный оператор, то $Ux = \alpha_1 Ub_1 + \ldots + \alpha_n Ub_n$ также будет непрерывной функцией x, ч. т. д.

5. Теорема. *Для того чтобы линейное нормированное пространство было конечномерным, необходимо и достаточно, чтобы его замкнутая единичная сфера была бикомпактной.*

Доказательство. Предположим, что сфера $S = \{x \mid |x| \leqslant 1\}$ в линейном нормированном пространстве $\mathfrak{X}$ бикомпактна. Мы покажем, что существует такое конечное множество $\{x_1^*, \ldots, x_n^*\}$ элементов из $\mathfrak{X}^*$, что если $x_i^*(x) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$, то $x = 0$. Предположим противное. Тогда для каждого конечного множества $A \subseteq \mathfrak{X}^*$ множество

$$S(A) = \{x \mid |x| = 1, \quad x^*(x) = 0, \quad \text{если} \quad x^* \in A\}$$

является непустым замкнутым подмножеством S. Из наших предположений следует, что каждое конечное число множеств $S(A)$ имеет непустое пересечение. Таким образом, ввиду леммы I.5.6 найдется x, принадлежащее всем $S(A)$. Для этого вектора x $|x|=1$ и $x^*(x)=0$ при всех x^* из $\mathfrak{X}^*$. Но это противоречит следствию II.3.15 и, значит, доказывает наше утверждение. Пусть x_i^*, $i=1, \ldots, n$, обладают тем свойством, что равенства $x_i^*x=0$ при $i=1, \ldots, n$ влекут за собой $x=0$. Тогда отображение $x \longrightarrow [x_1^*x, \ldots, x_n^*x]$ пространства $\mathfrak{X}$ в E^n линейно, взаимно однозначно и имеет конечномерную область значений. Следовательно, пространство $\mathfrak{X}$ имеет конечную размерность.

Обратное утверждение вытекает из следствия 3, ч. т. д.

6. Лемма. *Линейное нормированное пространство имеет конечную размерность n в том и только в том случае, если его сопряженное пространство тоже имеет размерность n.*

Доказательство. Пусть $\{b_1, \ldots, b_n\}$ — базис линейного нормированного пространства $\mathfrak{X}$. Тогда функционалы b_i^*, $i=1, \ldots, n$, определяемые уравнением

$$x=\sum_{i=1}^{n} b_i^*(x)\, b_i, \quad x \in \mathfrak{X},$$

ввиду следствия 4 принадлежат $\mathfrak{X}^*$. Кроме того, для каждого $x^* \in \mathfrak{X}^*$ мы имеем

$$x^*x=\sum_{i=1}^{n} b_i^*(x)\, x^*(b_i), \quad x^*=\sum_{i=1}^{n} b_i^* x^*(b_i),$$

так что множество, порожденное элементами b_i^* $(i=1, 2, \ldots, n)$, есть все пространство $\mathfrak{X}^*$. Далее, векторы b_i^*, $i=1, \ldots, n$, линейно независимы, так как если $\sum_{i=1}^{n} \beta_i b_i^*=0$, то $\beta_j=\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i b_i^*\right) b_j=0$, $j=1, \ldots, n$. Таким образом, $\mathfrak{X}^*$ имеет размерность n. Обратно, пусть $\mathfrak{X}^*$ конечномерно. Тогда и $\mathfrak{X}^{**}$ имеет конечную размерность, а так как $\mathfrak{X}$ эквивалентно некоторому подпространству $\mathfrak{X}^{**}$ (II.3.19), то и $\mathfrak{X}$ конечномерно. Как видно из первой части доказательства, $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}^*$ имеют одинаковые размерности, ч. т. д.

В предыдущей лемме предполагается, что пространства являются линейными нормированными пространствами, так как известны примеры (см., например, начало § IV.11) бесконечномерных F-пространств, для которых сопряженные пространства нульмерны.

Следующее следствие было установлено в первой части доказательства леммы 6.

7. Следствие. *Если* $\{b_1, \ldots, b_n\}$ — *базис линейного нормированного пространства* $\mathfrak{X}$, *то функционалы* b_i^*, $i=1, \ldots, n$, *определяемые уравнениями*

$$x = \sum_{i=1}^{n} b_i^*(x)\, b_i, \quad x \in \mathfrak{X},$$

образуют базис пространства $\mathfrak{X}^*$.

8. Следствие. *Конечномерное линейное нормированное пространство рефлексивно.*

Доказательство. В обозначениях следствия 7

$$x^*x = \sum_{i=1}^{n} b_i^*(x)\, x^*(b_i), \quad x^* = \sum_{i=1}^{n} b_i^* x^*(b_i),$$

и, следовательно, если $x^{**} \in \mathfrak{X}^{**}$, то $x^{**}x^* = x^*x$, где $x = \sum_{i=1}^{n} x^{**}(b_i^*) b_i$, ч. т. д.

Из следствия 7 вытекает, что в конечномерных пространствах сильная и слабая сходимости совпадают, а из следствия 3,— что для бикомпактности множества необходимо и достаточно, чтобы оно было ограничено и замкнуто. Таким образом, проблемы 2—8, перечисленные в § 1, без труда решены нами для конечномерных пространств.

Согласно следствию 3 и лемме 6, каждое конечномерное линейное нормированное пространство эквивалентно своему сопряженному, но этим замечанием не вполне решается проблема представления пространства, сопряженного к данному пространству. Нам необходимо еще получить выражение для нормы функционала через определяющие его скаляры. Таким образом, для полного решения проблем, перечисленных в § 1, осталось описать пространства, сопряженные к E^n, l_p^n и l_∞^n. Так как $E^n = l_2^n$, то нижеследующая теорема дает полный ответ на поставленный вопрос.

9. Теорема. *Если* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *и* $p^{-1} + q^{-1} = 1$, *то отображение* $x^* \longleftrightarrow [\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$, *определяемое уравнением*

$$x^*x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i, \quad x = \{\beta_i\} \in l_p^n,$$

является изометрическим изоморфизмом $(l_p^n)^*$ *на* l_q^n.

Доказательство. Ясно, что это отображение является изоморфизмом. Для того чтобы убедиться в том, что оно, кроме того, является изометрическим отображением, предположим сперва, что

$1 < p < \infty$. Тогда ввиду неравенства Минковского (III.3.3)

$$|x^*x| \leqslant \{\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^q\}^{\frac{1}{q}} \{\sum_{i=1}^{n} |\beta_i|^p\}^{\frac{1}{p}},$$

откуда вытекает, что $|x^*| \leqslant \{\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^q\}^{\frac{1}{q}}$. Пусть, далее $\beta_i = |\alpha_i|^q/\alpha_i$, если $\alpha_i \neq 0$, и $\beta_i = 0$ в противном случае. Тогда

$$x^*x = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^q, \quad |x| = \{\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^{(q-1)p}\}^{\frac{1}{p}} = \{\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^q\}^{\frac{1}{p}},$$

откуда ввиду неравенства $|x^*x| \leqslant |x^*||x|$ вытекает, что $\{\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^q\}^{\frac{1}{q}} \leqslant |x^*|$. Таким образом, $x^* = \{\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^q\}^{\frac{1}{q}}$, откуда видно, что рассматриваемое отображение является изометрическим. Это же рассуждение при вполне понятных изменениях в обозначениях, можно использовать и для доказательства изометричности отображения при $p = 1$ или ∞, ч. т. д.

4. Гильбертово пространство

Среди бесконечномерных B-пространств гильбертово пространство ближе всех стоит, особенно по своим элементарно геометрическим свойствам, к евклидовым и конечномерным унитарным пространствам. Из определения (2.26) непосредственно не видно, что гильбертово пространство является B-пространством, но это устанавливается нижеследующей теоремой. При исследовании гильбертова пространства условия (I) — (VI) определения 2.26 будут использоваться без ссылок на них и через $\mathfrak{H}$ всегда будет обозначаться гильбертово пространство.

1. Теорема. *Гильбертово пространство $\mathfrak{H}$ есть комплексное B-пространство, в котором*

$$|(x, y)| \leqslant |x||y|, \quad x, y \in \mathfrak{H}.$$

Доказательство. Прежде всего будет доказано это последнее неравенство, известное под названием *неравенства Шварца*. Из постулатов для $\mathfrak{H}$ вытекает, что если либо x, либо y равны нулю, то неравенство Шварца справедливо. Предположим поэтому, что $x \neq 0 \neq y$. Для произвольного комплексного числа α

$$0 \leqslant (x + \alpha y, x + \alpha y) = |x|^2 + |\alpha|^2 |y|^2 + \alpha(y, x) + \bar{\alpha}(x, y) =$$
$$= |x|^2 + |\alpha|^2 |y|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\alpha(y, x)).$$

где $\mathrm{Re}(\lambda)$ есть вещественная часть λ. Если $\alpha=re^{i\theta}$ и θ выбрано соответствующим образом, то из последнего неравенства вытекает, что

$$|x|^2+r^2|y|^2\geqslant 2r|(x, y)|$$

для каждого положительного r. Отсюда, полагая $r=|x|/|y|$, и получим неравенство Шварца.

Чтобы завершить доказательство теоремы, дсстаточно показать, что $|x+y|\leqslant|x|+|y|$. Заметим прежде всего, что

$$(x, y)+(y, x)=2\,\mathrm{Re}\,(x, y)\leqslant 2|x||y|$$

и, следовательно,

$$|x+y|^2=|x|^2+|y|^2+(x, y)+(y, x)\leqslant$$
$$\leqslant|x|^2+|y|^2+2|x||y|=(|x|+|y|)^2, \text{ ч. т. д.}$$

Замечание. Необходимо отметить, что в этом доказательстве неравенства Шварца и неравенства треугольника $|x+y|\leqslant|x|+|y|$ не предполагается, что $\mathfrak{H}$ полно или что $(x, x)=0$ только при $x=0$.

2. Лемма. *Пусть x — некоторый элемент из $\mathfrak{H}$, а K — такое подмножество $\mathfrak{H}$, что $\frac{1}{2}(K+K)\subseteq K$. Предположим, что $\{k_i\}$ — такая последовательность из K, для которой*

$$\lim_i|x-k_i|=\inf_{k\in K}|x-k|.$$

Тогда последовательность $\{k_i\}$ сходится.

Доказательство. Тождество

$$|x+y|^2+|x-y|^2=2|x|^2+2|y|^2, \quad x, y\in\mathfrak{H},$$

называемое *тождеством параллелограмма* непосредственно вытекает из аксиом. Если $\delta=\inf_{k\in K}|x-k|$, то из этого тождества следует, что

$$|k_i-k_j|^2=2|x-k_i|^2+2|x-k_j|^2-4\left|x-\frac{k_i+k_j}{2}\right|^2\leqslant$$
$$\leqslant 2|x-k_i|^2+2|x-k_j|^2-4\delta\to 0, \qquad \text{ч. т. д.}$$

3. Определение. Два вектора x, y из $\mathfrak{H}$ называются *ортогональными*, если $(x, y)=0$. Два многообразия $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ из $\mathfrak{H}$ называются *ортогональными*, если $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})=0$. Запись $x\perp y$ означает, что векторы x и y взаимно ортогональны, а запись $\mathfrak{M}\perp\mathfrak{N}$ — что ортогональны многообразия $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$. *Ортогональным дополнением* множества $A\subseteq\mathfrak{H}$ называется множество $\{x\,|\,(x, A)=0\}$. Оно иногда обозначается через $\mathfrak{H}\ominus A$ или, если $\mathfrak{H}$ подразумевается, через $A^{\perp}$.

→ 4. Лемма. *Ортогональное дополнение $\mathfrak{N}$ замкнутого линейного многообразия $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{H}$ есть замкнутое линейное многообразие, дополнительное к $\mathfrak{M}$ в том смысле, что $\mathfrak{H}=\mathfrak{M}\oplus\mathfrak{N}$.*

Доказательство. Из линейности и непрерывности скалярного произведения (теорема 1) вытекает, что ортогональное дополнение произвольного множества $\mathfrak{M}$ есть замкнутое линейное многообразие. Если $\mathfrak{M}$ — замкнутое линейное многообразие и x — произвольная точка из $\mathfrak{H}$, то, по лемме 2, существует такое $m\in\mathfrak{M}$, что $|x-m|=$ $=\delta=\inf\limits_{m_1\in\mathfrak{M}}|x-m_1|$. Теперь мы покажем, что элемент $n=x-m$ принадлежит $\mathfrak{N}$. Для произвольного комплексного числа α и произвольного $m_1\in\mathfrak{M}$ вектор $m+\alpha m_1\in\mathfrak{M}$ и, следовательно, $|x-(m+\alpha m_1)|\geqslant\delta$. Таким образом,

$$0\leqslant|x-(m+\alpha m_1)|^2-|n|^2=|n-\alpha m_1|^2-|n|^2=$$
$$=-\alpha(m_1,\ n)-\bar{\alpha}(n,\ m_1)+|\alpha|^2|m_1|^2.$$

Положим $\alpha=\lambda(n,\ m_1)$, где λ — произвольное вещественное число. Тогда

$$0\leqslant-2\lambda|(n,\ m_1)|^2+\lambda^2|(n,\ m_1)|^2|m_1|^2,$$

что возможно лишь при $(n,\ m_1)=0$. Таким образом, $n\in\mathfrak{N}$. Чтобы завершить доказательство, заметим, что если $x\in\mathfrak{M}\cap\mathfrak{N}$, то $|x|^2=$ $=(x,\ x)=0$. Следовательно, $\mathfrak{M}\cap\mathfrak{N}=0$ и $\mathfrak{H}=\mathfrak{M}\oplus\mathfrak{N}$, ч. т. д.

→ 5. Теорема. *Для каждого y^* из $\mathfrak{H}^*$ существует и притом только один такой $y\in\mathfrak{H}$, что*

$$y^*x=(x,\ y),\quad x\in\mathfrak{H}.$$

Отображение σ: $y^*\to y$ является взаимно однозначным изометрическим отображением $\mathfrak{H}^*$ на все $\mathfrak{H}$, при этом $\sigma(y^*+z^*)=\sigma(y^*)+$ $+\sigma(z^*)$, $\sigma(\alpha y^*)=\bar{\alpha}\sigma(y^*)$.

Доказательство. Если $y^*=0$, положим $y=0$. Если $y^*\neq0$, то множество $\mathfrak{M}=\{x\,|\,y^*x=0\}$ является в $\mathfrak{H}$ собственным замкнутым линейным многообразием, и его ортогональное дополнение $\mathfrak{N}$ содержит, по лемме 4, некоторый вектор $y_1\neq0$. Пусть $y=\alpha y_1$, где $\bar{\alpha}=$ $=\frac{y^*(y_1)}{|y_1|^2}$. Для произвольного вектора x из $\mathfrak{H}$ вектор $x-\frac{y^*x}{(y^*y_1)}y_1$ принадлежит $\mathfrak{M}$, так что $(x,\ y)=\frac{y^*x\,(y_1,\ y)}{y^*y_1}=y^*x$, т. е. мы доказали существование вектора y. Для того чтобы убедиться в единственности такого y, предположим, что y' есть такой элемент из $\mathfrak{H}$, что $y^*x=(x,y')$ для всех $x\in\mathfrak{H}$. Тогда $(x,\ y-y')=0$ для каждого $x\in\mathfrak{H}$ и, в частности, $(y-y',\ y-y')=0$, откуда $y=y'$. Таким образом, отображение σ вполне определено. Так как $|(x,\ y)|\leqslant|x|\,|y|$, то $|y^*| \leqslant |\sigma(y^*)|$, а так как $(y, y) = |y|^2$, то $|y^*| \geqslant |\sigma(y^*)|$. Следовательно, σ является изометрией. Остальные доказываемые свойства σ непосредственно вытекают из постулированных нами свойств скалярного произведения, ч. т. д.

6. Следствие. *Пространство $\mathfrak{H}^*$ также является гильбертовым пространством и пространство $\mathfrak{H}$ рефлексивно.*

Доказательство. Если скалярное произведение в $\mathfrak{H}^*$ определить равенством

$$(x^*, y^*)_1 = (\sigma(y^*), \sigma(x^*)),$$

то ясно, что $\mathfrak{H}^*$ будет гильбертовым пространством. Согласно теореме, если $y^{**} \in \mathfrak{H}^{**}$, то в $\mathfrak{H}^*$ найдется такой элемент y^*, что

$$y^{**}x^* = (x^*, y^*)_1 = (\sigma(y^*), \sigma(x^*)) = x^*y, \quad x^* \in \mathfrak{H}^*,$$

где $y = \sigma(y^*)$, ч. т. д.

7. Следствие. *Гильбертово пространство слабо полно; для того чтобы подмножество его было слабо компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограниченным.*

Доказательство. Это утверждение непосредственно вытекает из следствия 6, II.3.28 и II.3.29, ч. т. д.

8. Множество $A \in \mathfrak{H}$ называется *ортонормированным*, если норма каждого вектора из A равна единице и если каждые два несовпадающих вектора из A взаимно ортогональны. Ортонормированное множество называется *полным*, если не существует ненулевого вектора, ортогонального ко всем векторам этого множества, т. е. множество A полно, если $\{0\} = \mathfrak{H} \ominus A$. Напомним, что *проектором* (проекционным оператором, оператором проектирования) называется линейный оператор E, для которого $E^2 = E$. Проектор E в пространстве $\mathfrak{H}$ называется *ортогональным*, если многообразия $E\mathfrak{H}$ и $(I - E)\mathfrak{H}$ взаимно ортогональны.

Как было показано в лемме 4,

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{M} \oplus (\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M}),$$

где $\mathfrak{M}$ — произвольное замкнутое линейное многообразие в $\mathfrak{H}$. Пусть $x = y + z$, где $y \in \mathfrak{M}$ и $z \in \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M}$; рассмотрим преобразование E пространства $\mathfrak{H}$, при котором $Ex = y$. Ясно, что оператор E является проектором, так как $E^2 = E$, и притом ортогональным. Заметим, что ортогональный проектор E однозначно определяется условием $E\mathfrak{H} = \mathfrak{M}$. В самом деле, если D тоже является ортогональным проектором, для которого $D\mathfrak{H} = \mathfrak{M}$, то $ED = D$, а так как $(I - D)\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M}$, то $E(I - D) = 0$. Таким образом,

$$D = ED + E(I - D) = E.$$

Этот однозначно определенный ортогональный проектор E, для которого $E\mathfrak{H}=\mathfrak{M}$, называется оператором *ортогонального проектирования* на $\mathfrak{M}$, или иногда просто *проектированием на* $\mathfrak{M}$.

9. Лемма. *Если $\{y_i\}$ — ортонормированная последовательность, а $\{\alpha_i\}$ — последовательность скаляров, то ряд $\Sigma\alpha_i y_i$ сходится в том и только в том случае, если $\Sigma|\alpha_i|^2<\infty$; при этом*

$$|\Sigma\alpha_i y_i|=(\Sigma|\alpha_i|^2)^{1/2}.$$

В случае сходимости этого ряда его сумма не зависит от порядка его членов.

Доказательство. Если $m>n$, то

$$\left|\sum_{i=n}^{m}\alpha_i y_i\right|^2=\left(\sum_{i=n}^{m}\alpha_i y_i,\ \sum_{j=n}^{m}\alpha_j y_j\right)=\sum_{i=n}^{m}\sum_{j=n}^{m}\alpha_i\bar{\alpha}_j(y_i,\ y_j)=\sum_{i=n}^{m}|\alpha_i|^2,$$

и, значит, если один ряд сходится, то сходится и другой. Если в последних равенствах, положив $n=1$, устремить m к бесконечности, то мы получим второе утверждение леммы. Наконец, пусть $z=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{i_n}y_{i_n}$ — ряд, полученный из $x=\sum\alpha_i y_i$ некоторой перестановкой его членов. Тогда

$$|x-z|^2=(x,\ x)-(x,\ z)-(z,\ x)+(z,\ z),$$

и непосредственный подсчет, аналогичный проделанному выше, показывает, что каждое из этих скалярных произведений равно $\sum|\alpha_i|^2$. Таким образом $z=x$, ч. т. д.

→ 10. Теорема. *Пусть A — ортонормированное множество в $\mathfrak{H}$, а x — произвольный вектор из $\mathfrak{H}$. Тогда $(x,\ y)=0$ для всех, за исключением, быть может, счетного множества y из A. Ряд*

$$Ex=\sum_{y\in A}(x,\ y)\,y,\quad x\in\mathfrak{H},$$

сходится, и его сумма не зависит от порядка, в котором расположены его ненулевые члены. Оператор E является оператором ортогонального проектирования на замкнутое линейное многообразие, порождаемое множеством A.

Доказательство. Пусть $y_1,\ \ldots,\ y_n$ — несовпадающие элементы из A и $y=\sum_{i=1}^{n}(x,\ y_i)\,y_i$, так что (по лемме 9) $|y|^2=\sum_{i=1}^{n}|(x,\ y_i)|^2$ и

$$0\leqslant|x-y|^2=|x|^2-(x,\ y)-(y,\ x)+|y|^2,$$

$$(x,\ y) = \sum_{i=1}^{n} \overline{(x,\ y_i)}(x,\ y_i) = |y|^2,$$

$$(y,\ x) = \sum_{i=1}^{n} (x,\ y_i)\overline{(x,\ y_i)} = |y|^2.$$

Таким образом, $|y|^2 \leqslant |x|^2$, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} |(x,\ y_i)|^2 \leqslant |x|^2.$$

Отсюда вытекает, что лишь для конечного числа векторов $y_1, \ldots$ $\ldots, y_n \in A$ $|(x, y)|$ может превышать наперед заданное положительное число и, следовательно, самое большее счетное множество скалярных произведений $(x,\ y)$, где $y \in A$ отлично от нуля. Так как

$$\sum_{y \in A} |(x,\ y)|^2 \leqslant |x|^2,$$

то ввиду предшествующей леммы ряд, определяющий Ex, сходится, причем его сумма не зависит от порядка его членов.

Теперь ясно, что E есть линейный оператор, причем $Ex = x$, если $x \in A$. Поэтому $Ex = x$, если x принадлежит замкнутому линейному многообразию $\mathfrak{A}_1$, натянутому на A. Кроме того, $Ex = 0$, если x ортогонален к A. Следовательно, E есть оператор ортогонального проектирования на $\mathfrak{A}_1$, ч. т. д.

11. Определение. Множество A называется *ортонормированным базисом* линейного многообразия $\mathfrak{N}$ из $\mathfrak{H}$, если A есть содержащееся в $\mathfrak{N}$ ортонормированное множество и если

$$x = \sum_{y \in A} (x,\ y)\, y, \quad x \in \mathfrak{N}.$$

12. Теорема. *Каждое замкнутое линейное многообразие в $\mathfrak{H}$ имеет ортонормированный базис.*

Доказательство. Если ортонормированные множества, принадлежащие замкнутому линейному многообразию $\mathfrak{M}$ упорядочить по включению, то, как видно из леммы Цорна (I.2.7), существует максимальное ортонормальное множество A, определяющее замкнутое линейное многообразие $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{M}$. Ввиду максимальности A $\mathfrak{M} \ominus \mathfrak{A}_1 = 0$. Но, по лемме 4, $\mathfrak{M} = \mathfrak{A}_1 \oplus (\mathfrak{M} \ominus \mathfrak{A}_1)$ и, следовательно, $\mathfrak{M} = \mathfrak{A}_1$. Наше утверждение вытекает теперь из теоремы 10, ч. т. д.

13. Теорема. *Для ортонормированного множества $A \subseteq \mathfrak{H}$ следующие утверждения эквивалентны:*

(I) *множество A полно;*

(II) *множество A служит ортонормированным базисом для $\mathfrak{H}$;*
(III) $|x|^2 = \sum_{y \in A} |(x, y)|^2$, $x \in \mathfrak{H}$.

Доказательство. Эквивалентность условий (I) и (II), очевидно, следует из теоремы 10. То, что из каждого из них вытекает условие (III), следует из теоремы 10 и леммы 9. Предположим теперь, что выполнено условие (III), и пусть x — произвольный вектор из $\mathfrak{H}$. По лемме 4, $x = u + v$, где $u \in \overline{\mathrm{sp}}(A)$ и $v \in \mathfrak{H} \ominus \overline{\mathrm{sp}}(A)$. Таким образом, $|x|^2 = |u^2| + |v|^2$. Но, по теореме 10 и лемме 9, $|u|^2 = \sum_{y \in A} |(u, y)|^2$. Следовательно, $|x|^2 = |u|^2$ и $v = 0$. Это означает, что $\overline{\mathrm{sp}}(A) = \mathfrak{H}$, откуда и вытекает условие (I), ч. т. д.

Следующий результат дает нам возможность ввести понятие *размерности* гильбертова пространства.

14. Теорема. *Все ортонормированные базисы данного гильбертова пространства $\mathfrak{H}$ имеют одну и ту же мощность.*

Доказательство. Если $\mathfrak{H}$ конечномерно, этот результат хорошо известен из алгебры. Предположим, что $\mathfrak{H}$ бесконечномерно, и пусть $\{u_\alpha\}$ и $\{v_\beta\}$ — два ортонормальных базиса для $\mathfrak{H}$. Мы будем говорить, что векторы u_α и $u_{\alpha'}$ базиса $\{u_\alpha\}$ эквивалентны, если существует конечная цепочка векторов

$$[*] \qquad u_\alpha,\ v_{\beta_1},\ u_{\alpha_1},\ \ldots,\ u_{\alpha_k},\ v_{\beta_{k+1}},\ u_{\alpha'},$$

в которой скалярное произведение любых двух соседних векторов отлично от нуля и члены которой берутся попеременно то из $\{u_\alpha\}$, то из $\{v_\beta\}$. Эквивалентность двух векторов v_β и $v_{\beta'}$ из $\{v_\beta\}$ определяется аналогично. Из теоремы 10 непосредственно вытекает, что каждый класс эквивалентных между собой векторов будет либо конечным, либо счетным. Класс U эквивалентных между собой векторов u_α назовем соответствующим классу V эквивалентных между собой векторов v_β, если существует пара векторов, один из U, другой из V, с ненулевым скалярным произведением. Предположим, что U и V — соответственные классы эквивалентных между собой векторов и что $u_\alpha \in U$. Рассмотрим произвольный элемент v_β из базиса $\{v_\beta\}$, такой, для которого $(u_\alpha, v_\beta) \neq 0$. Покажем, что $v_\beta \in V$. Так как U и V — соответственные классы, то существуют такие элементы $u_{\alpha'} \in U$ и $v_{\beta'} \in V$, для которых $(u_{\alpha'}, v_{\beta'}) \neq 0$. Но так как $u_{\alpha'} \in U$, то существует такая конечная цепочка вида [*], в которой скалярное произведение соседних векторов отлично от нуля. Таким образом, из строения цепочки $v_\beta, u_\alpha, \ldots, u_{\alpha'}, v_{\beta'}$ видно, что v_β эквивалентно $v_{\beta'}$ и что, следовательно, $v_\beta \in V$. Так как $\{v_\beta\}$ есть базис, то вектор u_α имеет разложение вида $u_\alpha = \sum (u_\alpha, u_\beta) v_\beta$, так что u_α принадлежит замкнутому линейному многообразию, порожденному такими векторами v_β, для которых $\overline{(u_\alpha, v_\beta)} \neq 0$. Но так как такие векторы v_β принадлежат V, то $u_\alpha \in \overline{\mathrm{sp}}[V]$ и, следовательно, $\overline{\mathrm{sp}}[U] \subseteq \overline{\mathrm{sp}}[V]$. Аналогично $\overline{\mathrm{sp}}[V] \subseteq \overline{\mathrm{sp}}[U]$. Отсюда ясно, что соответственные классы эквивалентных между собой векторов U и V порождают одно и то же замкнутое линейное многообразие $\mathfrak{M}$. Таким образом, если один из классов U или V конечен, то $\mathfrak{M}$ конечномерно и, значит, другой класс тоже конечен и состоит из такого же числа элементов. Если U и V бесконечны, то оба они счетны. Таким образом, $\{u_\alpha\}$ и $\{v_\beta\}$ распадаются на суммы попарно непересекающихся соответственных пар U, V классов эквивалентности, причем каждое U имеет точно такую же мощность, что и соответствующее ему V. Поэтому $\{u_\alpha\}$ и $\{v_\beta\}$ имеют одну и ту же мощность, ч. т. д.

15. Определение. Мощность произвольного ортонормального базиса гильбертова пространства $\mathfrak{H}$ называется его *размерностью*.

16. Теорема. *Два гильбертова пространства изометрически изоморфны в том и только в том случае, если они имеют одну и ту же размерность.*

Доказательство. Пусть U — изометрический изоморфизм между $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$. Тогда если x и y — взаимно ортогональные элементы из $\mathfrak{H}_1$, то

$$\begin{aligned}|U(x+\lambda y)|^2 &= |x+\lambda y|^2 = |x|^2 + \lambda^2|y|^2 = |Ux+\lambda Uy|^2 = \\ &= |Ux|^2 + |\lambda|^2|Uy|^2 + (Ux, \lambda Uy) + \overline{(Ux, \lambda Uy)} = \\ &= |x^2| + |\lambda|^2|y|^2 + (Ux, \lambda Uy) + \overline{(Ux, \lambda Uy)}.\end{aligned}$$

Отсюда видно, что для произвольного λ

$$0 = (Ux, \lambda Uy) + \overline{(Ux, \lambda Uy)};$$

подставляя в это равенство $\lambda = (Ux, Uy)$, мы получаем, что $(Ux, Uy) = 0$. Таким образом, U отображает ортонормированный базис пространства $\mathfrak{H}_1$ на ортонормированный базис пространства $\mathfrak{H}_2$, и, значит, $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ имеют одну и ту же размерность.

Обратно, предположим, что пространства $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ имеют одну и ту же размерность, и пусть $\{u_\alpha, \alpha \in A\}$ и $\{v_\alpha, \alpha \in A\}$ — ортонормированные базисы соответственно, для $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$. Для каждой определенной на A скалярной функции C, такой, что $C(\alpha) = 0$ для всех, за исключением счетного множества индексов α, и что $\sum |C(\alpha)|^2 < \infty$, положим

$$U\left(\sum C(\alpha)\ u_\alpha\right) = \sum C(\alpha)\, v_\alpha.$$

По теореме 13, U является изометрическим изоморфизмом между $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$, ч. т. д.

Прямые суммы гильбертовых пространств

Напомним (см. 1.11), что прямая сумма

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{X}_n$$

векторных пространств $\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_n$ есть множество $\mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2 \times \ldots \times \mathfrak{X}_n$, для элементов которого сложение и умножение на скаляр определяются по формулам

$$[x_1, \ldots, x_n] + [y_1, \ldots, y_n] = [x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n],$$

$$\alpha [x_1, \ldots, x_n] = [\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n].$$

Пространство $\mathfrak{X}_i$ алгебраически эквивалентно подпространству $\mathfrak{M}_i$ пространства $\mathfrak{X}$, состоящему из всех таких векторов $[x_1, \ldots, x_n] \in \mathfrak{X}$, у которых $x_j = 0$ при $j \neq i$. Иногда бывает удобно само пространство $\mathfrak{X}_i$ рассматривать как подпространство $\mathfrak{X}$, при этом имеется в виду, что оно эквивалентно пространству $\mathfrak{M}_i$. Отображение

$$[x_1, \ldots, x_n] \to [0, \ldots, x_i, \ldots, 0]$$

пространства $\mathfrak{X}$ на $\mathfrak{M}_i$ является проектированием и иногда называется *проектированием* $\mathfrak{X}$ *на* $\mathfrak{M}_i$. Равносильно этому, отображение $[x_1, \ldots, x_n] \to x_i$ называется *проектированием* $\mathfrak{X}$ *на* $\mathfrak{X}_i$. Если каждое из пространств $\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_n$ является линейным топологическим пространством, то их прямая сумма $\mathfrak{X}$, соответствующим образом топологизированная (см. I.8), также будет линейным топологическим пространством, в котором подпространство $\mathfrak{M}_i$ не только алгебраически, но и топологически эквивалентно $\mathfrak{X}_i$. Если топология в каждом из слагаемых $\mathfrak{X}_i$, $i = 1, \ldots, n$, определяется нормой $|\cdot|_i$, т. е. если каждое из пространств $\mathfrak{X}_i$ является линейным нормированным пространством, то и пространство $\mathfrak{X}$ будет линейным нормированным пространством. Норму в пространстве $\mathfrak{X}$ можно ввести различными способами; в частности, каждая из нижеследующих норм будет определять в $\mathfrak{X}$ произведение топологий:

$$\text{(I)}\ |[x_1, \ldots, x_n]| = |x_1|_1 + |x_2|_2 + \ldots + |x_n|_n;$$

$$\text{(II)}\ |[x_1, \ldots, x_n]| = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|_i;$$

$$\text{(III)}\ |[x_1, \ldots, x_n]| = (|x_1|_1^2 + \ldots + |x_n|_n^2)^{\frac{1}{2}}.$$

В дальнейшем, если прямая сумма линейных нормированных пространств будет выступать в качестве нормированного пространства, всегда будет указываться, какая именно норма имеется в виду. В том случае, однако, если каждое из пространств $\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_n$

является гильбертовым пространством, всегда будет предполагаться, хотя иногда и без напоминания об этом, что $\mathfrak{X}$ есть однозначно определенное гильбертово пространство со скалярным произведением

$$\text{(IV)}\quad ([x_1, \ldots, x_n], [y_1, \ldots, y_n]) = \sum_{i=1}^{n} (x_i, y_i)_i,$$

где $(\cdot, \cdot)_i$ есть скалярное произведение в $\mathfrak{X}_i$. Таким образом, норма в прямой сумме гильбертовых пространств всегда будет определяться равенством (III). Окончательно все это можно сформулировать в виде следующего определения.

17. Определение. Пусть для каждого $i = 1, \ldots, n$ $\mathfrak{H}_i$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_i$. *Прямой суммой гильбертовых пространств* $\mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_n$ называется линейное пространство $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{H}_n$, в котором скалярное произведение определяется равенством (IV).

Рассмотрим прямую сумму $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{H}_n$ гильбертовых пространств $\mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_n$. Тогда при $i \neq j$ многообразия $\mathfrak{H}_i$ и $\mathfrak{H}_j$ взаимно ортогональны в $\mathfrak{H}$ и проектирование $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{H}_i$ совпадает с ортогональным проектированием $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{H}_i$. Таким образом, подпространство $\mathfrak{H}_2 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{H}_n$, например, служит в $\mathfrak{H}$ ортогональным дополнением к $\mathfrak{H}_1$.

Следующее определение обобщает определение 17, включая случай и бесконечного множества прямых слагаемых.

18. Определение. Пусть для каждого ν из некоторого множества индексов A $\mathfrak{H}_\nu$ является некоторым гильбертовым пространством. *Прямой суммой* $\sum \mathfrak{H}_\nu$ гильбертовых пространств $\mathfrak{H}_\nu$ называется, по определению, совокупность всех определенных на A функций $\{x_\nu\}$, таких, что $x_\nu \in \mathfrak{H}_\nu$ для каждого ν и что $\sum_{\nu \in A} |x_\nu|^2 < \infty$.

Ясно, что $\Sigma \mathfrak{H}_\nu$ становится векторным пространством, если сложение и умножение на число определить формулами

$$\alpha \{x_\nu\} = \{\alpha x_\nu\}, \quad \{x_\nu\} + \{y_\nu\} = \{x_\nu + y_\nu\}.$$

Кроме того, можно определить в $\Sigma \mathfrak{H}_\nu$ и скалярное произведение, полагая

$$(\{x_\nu\}, \{y_\nu\}) = \sum_\nu (x_\nu, y_\nu);$$

этот ряд абсолютно сходится, так как

$$\sum_\nu |(x_\nu, y_\nu)| \leqslant \sum_\nu |x_\nu| |y_\nu| \leqslant \left(\sum_\nu |x_\nu|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_\nu |y_\nu|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Можно легко проверить, что свойства (I) — (V) определения 2.26 при этом выполнены.

19. Лемма. *Если* $\{\mathfrak{H}_\nu\}$, $\nu \in A$, — *семейство гильбертовых пространств, то и их прямая сумма* $\Sigma\mathfrak{H}_\nu$ *тоже является гильбертовым пространством.*

Доказательство. Как отмечено выше, нам осталось доказать лишь полноту $\Sigma\mathfrak{H}_\nu$. Если $\{x_\nu^n\}$, $n=1, 2, \ldots$, — фундаментальная последовательность в $\Sigma\mathfrak{H}_\nu$, то ясно, что для каждого фиксированного ν $\{x_\nu^n\}$ будет фундаментальной последовательностью в $\mathfrak{H}_\nu$, сходящейся к некоторому элементу x_ν^0. Для произвольного конечного подмножества $\pi \subseteq A$ и произвольного натурального n

$$\sum_{\nu\in\pi} |x_\nu^n - x_\nu^0|^2 = \lim_{m\to\infty} \sum_{\nu\in\pi} |x_\nu^n - x_\nu^m|^2 \leqslant \overline{\lim_{m\to\infty}} |\{x_\nu^n\} - \{x_\nu^m\}|^2.$$

Отсюда вытекает, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{\nu} |x_\nu^n - x_\nu^0|^2 \leqslant \overline{\lim_{m,\, n\to\infty}} |\{x_\nu^n\} - \{x_\nu^m\}| = 0,$$

т. е. что $\{x_\nu^0\}$ принадлежит $\Sigma\mathfrak{H}_\nu$ и что последовательность $\{x_\nu^n\}$ сходится к $\{x_\nu^0\}$, ч. т. д.

В заключение этого параграфа мы перечислим в нижеследующей лемме несколько полезных свойств ортогонального дополнения.

→ 20. Лемма. *Пусть B — некоторое подмножество $\mathfrak{H}$, а $\mathfrak{M}$ — замкнутое линейное многообразие в $\mathfrak{H}$. Тогда*

(I) $\mathfrak{H} = \mathfrak{M} \oplus (\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M})$;

(II) $\mathfrak{M} = \mathfrak{H} \ominus (\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M})$;

(III) $\overline{\mathrm{sp}}(B) = \mathfrak{H} \ominus (\mathfrak{H} \ominus B)$.

Доказательство. Равенство (I) — это просто лемма 4. Равенство (II) можно доказать, заменяя $\mathfrak{M}$ в равенстве (I) на $\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M}$. При этом мы получим, что $\mathfrak{H} \ominus (\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M})$ является не только замкнутым подпространством $\mathfrak{M}$, но и дополнительным многообразием для $\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M}$. Таким образом, $\mathfrak{M} = \mathfrak{H} \ominus (\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M})$. Для того чтобы доказать равенство (III), заметим, что для произвольного множества $B \subseteq \mathfrak{H}$ условие, что $(B, x) = 0$ для некоторого элемента x из $\mathfrak{H}$, эквивалентно условию, что $(\overline{\mathrm{sp}}(B), x) = 0$. Таким образом, $\mathfrak{H} \ominus B = \mathfrak{H} \ominus \overline{\mathrm{sp}}(B)$, и равенство (III) получается из (II) заменой $\mathfrak{M}$ на $\overline{\mathrm{sp}}(B)$, ч. т. д.

5. Пространства $B(S, \Sigma)$ и $B(S)$

В этом параграфе устанавливается, что $B(S)$ и $B(S, \Sigma)$ являются B-пространствами, определяются сопряженные к ним пространства и даются условия бикомпактности. Слабая бикомпактность и слабая сходимость в $B(S)$ будут рассмотрены в конце § 6.

Ясно, что $B(S)$ есть линейное нормированное пространство. Для того чтобы убедиться в том, что оно полно и, следовательно, является B-пространством, предположим, что $\{f_n\}$ — фундаментальная последовательность в $B(S)$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $m(\varepsilon)$, что при $n, m \geqslant m(\varepsilon)$ $|f_n - f_m| < \varepsilon$. Положим $f(s) = \lim_n f_n(s)$ для каждого $s \in S$. Тогда для каждого $s \in S$ найдется такое $p \geqslant m(\varepsilon)$, что $|f(s) - f_p(s)| < \varepsilon$, при этом

$$|f(s) - f_n(s)| \leqslant |f(s) - f_p(s)| + |f_p(s) - f_n(s)| < 2\varepsilon,$$
$$n \geqslant m(\varepsilon), \quad s \in S.$$

Этим доказано, что f_n сходится к f в $B(S)$, т. е. что $B(S)$ является B-пространством. Для того чтобы убедиться в том, что $B(S, \Sigma)$ тоже является B-пространством, достаточно заметить, что оно было определено как замыкание в $B(S)$ множества всех конечных линейных комбинаций характеристических функций множеств из Σ. Таким образом, $B(S, \Sigma)$ является замкнутым линейным многообразием в $B(S)$ и, следовательно, B-пространством. Так как произведение двух характеристических функций множеств из Σ также является характеристической функцией некоторого множества из Σ, то из определения $B(S, \Sigma)$ ясно, что оно содержит произведение любых двух своих элементов. Таким образом, $B(S, \Sigma)$ *является замкнутой подалгеброй в* $B(S)$ — этот факт в дальнейшем нам окажется полезным.

1. Теорема. *Между пространствами $B^*(S, \Sigma)$ и $ba(S, \Sigma)$ существует изометрический изоморфизм, определяемый тождеством*

$$[*] \qquad x^* f = \int_S f(s)\, \mu(ds).$$

Таким образом, для каждого x^* из $B^*(S, \Sigma)$ существует единственное $\mu \in ba(S, \Sigma)$, для которого имеет место равенство [*], *и для каждого μ из $ba(S, \Sigma)$ существует единственное x^*, для которого выполняется равенство* [*], *причем это соответствие между x^* и μ линейно и изометрично.*

Доказательство. Из определения μ-интегрируемой функции ясно, что для каждого $\mu \in ba(S, \Sigma)$ мы имеем $B(S, \Sigma) \subseteq L_1(S, \Sigma, \mu)$ и что если $f \in B(S, \Sigma)$, то

$$\left| \int_S f(s)\, \mu(ds) \right| \leqslant \sup_{s \in S} |f(s)|\, v(\mu, S).$$

Таким образом, для каждого μ из $ba(S, \Sigma)$ равенство [*] определяет некоторую точку x^* из $B^*(S, \Sigma)$, для которой $|x^*| \leqslant |\mu|$. Для того чтобы доказать, что $|x^*| \geqslant |\mu|$, возьмем $\varepsilon > 0$, и пусть $E_1, \ldots, E_n$ образуют такое разбиение S на попарно непересекающиеся множества из Σ, что $\sum_{i=1}^{n} |\mu(E_i)| > |\mu| - \varepsilon$. Тогда если мы выберем $\theta_j \in (0, 2\pi]$ так, что $e^{i\theta_j}\mu(E_j) = |\mu(E_j)|$ для $j = 1, \ldots, n$, и положим $f(s) = e^{i\theta_j}$ для $s \in E_j$, то $|f| \leqslant 1$, $f \in B(S, \Sigma)$ и

$$|x^*| \geqslant \int_S f(s)\,\mu(ds) = \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i)| > |\mu| - \varepsilon.$$

Ввиду произвольности ε, $|x^*| \geqslant |\mu|$. Мы доказали, что $|x^*| = |\mu|$. Для того чтобы показать, что каждое $x^* \in B^*(S, \Sigma)$ определяется некоторой $\mu \in ba(S, \Sigma)$, предположим, что χ_E есть характеристическая функция некоторого множества $E \in \Sigma$, и определим $\mu(E) = x^*(\chi_E)$. При этом ясно, что μ аддитивна, что $|\mu(E)| \leqslant |x^*|$ и что равенство [*] справедливо для каждой функции f, являющейся линейной комбинацией характеристических функций множеств из Σ. Множество таких функций всюду плотно в $B(S, \Sigma)$, и, следовательно, ввиду непрерывности обеих частей равенства [*] относительно f это равенство справедливо для всех f из $B(S, \Sigma)$. Так как линейность соответствия между x^* и μ очевидна, наша теорема доказана.

2. Определение. Если Σ есть семейство всех подмножеств множества S, то для краткости мы будем писать $ba(S)$ вместо $ba(S, \Sigma)$.

Так как $B(S) = B(S, \Sigma)$, если Σ есть совокупность всех подмножеств множества S, то мы получаем следствие.

3. Следствие. *Между пространствами $B^*(S)$ и $ba(S)$ существует изометрический изоморфизм, определяемый тождеством*

$$x^*f = \int_S f(s)\,\mu(ds), \quad f \in B(S).$$

Теперь мы хотим привести критерии бикомпактности подмножества из $B(S, \Sigma)$. Так как множество в полном метрическом пространстве бикомпактно в том и только в том случае, если оно замкнуто и относительно бикомпактно (I.6.15), то достаточно, и для наших целей удобно, искать условия относительной бикомпактности. Следующая элементарная лемма будет полезна не только здесь, но и в дальнейшем, при исследовании бикомпактности в других B-пространствах.

4. Лемма. *Пусть $\{U_a\}$ — равномерно ограниченная обобщенная последовательность линейных операторов в B-пространстве $\mathfrak{X}$. Если $\lim_a U_a x = x$ для каждого x из $\mathfrak{X}$, то этот предел существует равномерно на любом бикомпактном множестве. Обратно, если*

$\lim\limits_a U_a x = x$ *равномерно относительно* x *из ограниченного множества* K *и если, кроме того, множество* $U_a(\{x \mid |x| \leqslant 1\})$ *для каждого* a *относительно бикомпактно, то* K *относительно бикомпактно.*

Доказательство. Пусть K бикомпактно и $\varepsilon > 0$. Существует конечное множество $\{k_1, \ldots, k_n\}$ элементов из K таких, что $\inf\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |k - k_i| < \varepsilon$ для каждого k из K (I.6.15). Пусть a_ε таково, что $|U_a k_i - k_i| < \varepsilon$ для $a \geqslant a_\varepsilon$ и $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда если $|U_a| \leqslant M$ для всех a, то

$$|U_a k - k| \leqslant \inf_{1 \leqslant i \leqslant n} [|U_a(k - k_i)| + |U_a k_i - k_i| + |k_i - k|] \leqslant (M+2)\varepsilon$$

для всех $k \in K$ и всех $a \geqslant a_\varepsilon$. Таким образом, $U_a k \to k$ равномерно относительно k из K.

Обратно, пусть $\varepsilon > 0$ и a таково, что

$$|U_a k - k| < \varepsilon, \quad k \in K.$$

Так как множество $U_a K$ относительно бикомпактно, то найдутся такие элементы $k_i \in K$, для которых

$$\inf_{1 \leqslant i \leqslant n} |U_a k - k_i| < \varepsilon, \quad k \in K.$$

Таким образом, $\inf\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |k - k_i| < 2\varepsilon$ для каждого k из K, ч. т. д.

5. Следствие. *Если* $\{x_i\}$ — *базис пространства* $\mathfrak{X}$, *то ряд* $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$ *сходится равномерно относительно* x *из ограниченного множества* K *в том и только в том случае, если* K *относительно бикомпактно.*

6. Теорема. *Ограниченное множество* K *из* $B(S, \Sigma)$ *в том и только в том случае является относительно бикомпактным, если для каждого* $\varepsilon > 0$ *найдется конечное число попарно непересекающихся множеств* $\{E_1, \ldots, E_n\}$ *из* Σ, *сумма которых равна* S, *и такие точки* s_i *из* E_i, $i = 1, \ldots, n$, *что*

$$\sup_{s \in E_i} |f(s_i) - f(s)| < \varepsilon, \quad f \in K, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Доказательство. Пусть A — множество, каждый элемент $a = \{E_1, \ldots, E_n; s_1, \ldots, s_n\}$ которого состоит из конечного числа попарно непересекающихся множеств $\{E_1, \ldots, E_n\}$ из Σ, сумма которых равна S, и точек $s_1, \ldots, s_n$, где $s_i \in E_i$, $i = 1, \ldots, n$. Множество A упорядочим, полагая $a \leqslant a'$, если каждое множество из a является суммой множеств из a'. Если $f \in B(S, \Sigma)$ и $a = \{E_1, \ldots,$

$\ldots, E_n; s_1, \ldots, s_n\} \in A$, положим $U_a f = f_a$, где

$$f_a = \sum_{i=1}^{n} f(s_i) \chi_{E_i}$$

и χ_E — характеристическая функция множества E. Ясно, что

$$|U_a| = 1 \text{ и } U_{a'} U_a = U_a, \text{ если } a' \geqslant a.$$

Далее ясно, что если f_0 есть конечная линейная комбинация характеристических функций множеств из Σ, то в множестве A найдется такой элемент a_0, что f_0 постоянна на каждом множестве из a_0. Таким образом, $U_a f_0 = f_0$, если $a \geqslant a_0$. Следовательно, для такого f_0 $\lim\limits_a U_a f_0 = f_0$. Так как множество таких функций всюду плотно в $B(S, \Sigma)$, то, по теореме II.1.18, $\lim\limits_a U_a f = f$ для каждой f из $B(S, \Sigma)$. Наше утверждение вытекает теперь из леммы 4 и теоремы 3.5, ч. т. д.

6. Пространство C(S)

В этом параграфе мы сначала предположим только, что S есть нормальное топологическое пространство. Пространство $C(S)$ состоит из всех определенных на S ограниченных непрерывных вещественных или комплексных функций. Норма в $C(S)$ определяется формулой

$$|f| = \sup_{s \in S} |f(s)|.$$

Из леммы I.4.18 и следствия I.7.7 вытекает, что $C(S)$ является B-пространством. Мы начнем наше исследование с описания сопряженного пространства $C^*(S)$.

1. Определение. Если S — топологическое пространство, то $rba(S)$ есть линейное пространство регулярных ограниченных аддитивных функций множества, определенных на алгебре, порожденной замкнутыми множествами. Нормой $|\mu|$ функции μ является ее полная вариация. Пространство $rba(S)$ будет частично упорядоченным, если неравенство $\mu \geqslant \lambda$, по определению, означает, что $\mu(E) \geqslant \lambda(E)$ для каждого E из алгебры, порожденной замкнутыми множествами. Аналогично пространство $C(S)$ является частично упорядоченным, если неравенство $f \geqslant g$ означает, что $f(s) \geqslant g(s)$ для всех s из S. Наконец, пространство $C^*(S)$ частично упорядочено, если неравенство $x^* \geqslant y^*$ означает, что $x^* f \geqslant y^* f$ для каждого $f \geqslant 0$ из $C(S)$.

Прежде чем заняться выяснением структуры сопряженного пространства $C^*(S)$, мы заметим, что каждая функция $f \in C(S)$ интегрируема по отношению к каждой μ из $rba(S)$. Для того чтобы убедиться в этом, покроем множество $f(S)$ открытыми множествами $G_1, \ldots, G_n$, диаметр каждого из которых меньше наперед заданного положительного числа ε. Положим

$$A_1 = G_1, \quad A_j = G_j - \bigcup_{i=1}^{j-1} G_i \quad j = 2, \ldots, n,$$

и, если A_j не пусто, выберем какую-нибудь точку $\alpha_j \in A_j$. Если A_j пусто, положим $\alpha_j = 0$. Так как G_j открыто, то и $f^{-1}(G_j)$ тоже открыто и, значит, множество $B_j = f^{-1}(A_j)$ принадлежит области определения функции μ. При этом функция

$$f_\varepsilon = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{B_j}$$

является μ-простой функцией, для которой $\sup_s |f_\varepsilon(s) - f(s)| < \varepsilon$. Следовательно, функция f является пределом равномерно сходящейся последовательности μ-простых функций, а так как $v(\mu, S) < \infty$, то f μ-интегрируема. Так как интеграл $\int_S f(s)\,\mu(ds)$ удовлетворяет неравенству

$$\left| \int_S f(s)\,\mu(ds) \right| \leqslant \sup_s |f(s)|\, v(\mu, S),$$

то ясно, что он является непрерывным линейным функционалом на $C(S)$. Следующая теорема является обратной к этому утверждению.

2. Теорема. *Если пространство S нормально, то между $C^*(S)$ и $rba(S)$ существует изометрический изоморфизм, при котором соответственные элементы x^* и μ удовлетворяют равенству*

$$[*] \qquad x^* f = \int_S f(s)\,\mu(ds), \quad f \in C(S),$$

причем этот изоморфизм сохраняет отношение порядка.

Доказательство. Как только что было показано, каждое $\mu \in rba(S)$ определяет по формуле [*] некоторый функционал $x^* \in C^*(S)$, для которого $|x^*| \leqslant |\mu|$. Для того чтобы показать, что $|x^*| = |\mu|$, выберем $\varepsilon > 0$, и пусть $E_1, \ldots, E_n$ — попарно непересекающиеся множества из области определения функции μ, такие, что $\sum_{i=1}^{n} |\mu(E_i)| \geqslant |\mu| - \varepsilon = v(\mu, S) - \varepsilon$. Пусть C_i — замкнутое подмножество E_i такое, что $v(\mu, E_i - C_i) \leqslant \frac{\varepsilon}{n}$, а $\{G_1, \ldots, G_n\}$ — семейство попарно непересекающихся открытых множеств, содержащих попарно непересекающиеся замкнутые множества $C_1, \ldots, C_n$. Ясно, что ввиду регулярности μ можно предположить, что $v(\mu, G_i - C_i) \leqslant \frac{\varepsilon}{n}$. По теореме I.5.2, существует такое множество $\{f_1, \ldots, f_n\}$ непрерывных функций, что $0 \leqslant f_i(s) \leqslant 1$ и что $f_i(s) = 0$, если $s \notin G_i$, и $f_i(s) = 1$, если $s \in C_i$. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — комплексные числа, по модулю равные единице и такие, что $\alpha_i \mu(E_i) = |\mu(E_i)|$; положим тогда $f_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$. При этом выполняется неравенство $x^*(f_0) - |\mu|| \leqslant 2\varepsilon$, и, следовательно, $\sup_{|f| \leqslant 1} |x^*(f)| = |\mu|$.

Теперь мы докажем сохранение порядка. Ясно, что если μ — неотрицательная функция множества, а f — неотрицательная непрерывная функция, то $\int_S f(s)\mu(ds) \geqslant 0$. Обратно, предположим, что $\int_S f(s)\mu(ds) \geqslant 0$ для любой неотрицательной функции $f \in C(S)$. Если существует такое μ-измеримое множество E, что $\mu(E) < -\varepsilon < 0$, то мы можем найти такое замкнутое подмножество $F \subseteq E$, что $v(\mu, E - F) < \frac{\varepsilon}{2}$, и такое открытое множество $G \supseteq E$, что $v(\mu, G - F) < \frac{3\varepsilon}{4}$. Если выбрать в соответствии с теоремой I.5.2 функцию $g \in C(S)$, удовлетворяющую условиям $0 \leqslant g(s) \leqslant 1$, $g(s) = 0$, если $s \notin G$, и $g(s) = 1$, если $s \in F$, то $\left| \int_S g(s)\mu(ds) - \mu(E) \right|$ меньше чем $\frac{3\varepsilon}{4}$, так что неравенство $\int_S g(s)\mu(ds) \geqslant 0$ невозможно.

Таким образом, нам остается только доказать, что каждый непрерывный функционал x^* на $C(S)$ может быть представлен в виде [*], где $\mu \in rba(S)$. По теореме II.3.11, x^* можно продолжить до определенного на $B(S)$ непрерывного функционала y^*, а, по следствию 5.3, для функции $f \in B(S)$ существует такой элемент $\lambda \in ba(S)$, что $y^* f = \int_S f(s)\lambda(ds)$. Согласно теореме III.1.8 о разложении в смысле Жордана, λ можно представить в виде $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 + i(\lambda_3 - \lambda_4)$, где $\lambda_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, следовательно, достаточно рассмотреть случай, когда λ неотрицательно, и найти такое $\mu \in rba(S)$, что $\int_S f(s)\mu(ds) = \int_S f(s)\lambda(ds)$ для каждого $f \in C(S)$.

Условимся буквой F обозначать произвольное замкнутое подмножество, буквой G — произвольное открытое подмножество и буквой E — произвольное подмножество множества S. Функции множества μ_1 и μ_2 определим равенствами

$$\mu_1(F)=\inf_{G\supseteq F}\lambda(G),\quad \mu_2(E)=\sup_{F\subseteq E}\mu_1(F).$$

Ясно, что эти функции множества неотрицательны и не убывают. Пусть G_1 открыто и F_1 замкнуто. Тогда если $G\supseteq F_1-G_1$, то $G_1\bigcup G\supseteq F_1$ и $\lambda(G_1\bigcup G)\leqslant\lambda(G_1)+\lambda(G)$, так что $\mu_1(F_1)\leqslant\lambda(G_1)+\lambda(G)$. Так как G есть произвольное открытое множество, содержащее F_1-G_1, то

$$\mu_1(F_1)\leqslant\lambda_1(G_1)+\mu_1(F_1-G_1).$$

Если F — замкнутое множество, то из этого неравенства, считая G_1 произвольным открытым множеством, содержащим FF_1, мы находим, что

$$\mu_1(F_1)\leqslant\mu_1(FF_1)+\mu_2(F_1-F).$$

Если E есть произвольное подмножество S и F_1 пробегает все замкнутые подмножества E, то из предыдущего неравенства вытекает, что

$$\text{(I)}\qquad \mu_2(E)\leqslant\mu_2(EF)+\mu_2(E-F).$$

Теперь мы покажем, что для произвольного множества E из S и произвольного замкнутого множества F из S имеет место неравенство

$$\text{(II)}\qquad \mu_2(E)\geqslant\mu_2(EF)+\mu_2(E-F).$$

Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим непересекающиеся замкнутые множества F_1 и F_2. Так как S нормально, то существуют непересекающиеся окрестности G_1 и G_2 соответственно множеств F_1 и F_2. Если G — произвольная окрестность суммы $F_1\bigcup F_2$, то $\lambda(G)\geqslant\lambda(GG_1)+\lambda(GG_2)$, так что

$$\mu_1(F_1\bigcup F_2)\geqslant\mu_1(F_1)+\mu_1(F_2).$$

Пусть теперь E и F — произвольные множества из S, причем F — замкнуто, и пусть F_1 пробегает все замкнутые подмножества пересечения EF, а F_2 — все замкнутые подмножества из $E-F$. Тогда из последнего неравенства вытекает неравенство (II). Следствием неравенств (I) и (II) является

$$\text{(III)}\qquad \mu_2(E)=\mu_2(EF)+\mu_2(EF'),\quad E\in S,\ F\ \text{замкнуто}.$$

Функция μ_2 определена на алгебре всех подмножеств множества S и из равенства (III) следует, что каждое замкнутое множество F является μ_2-множеством в смысле определения III.5.1. Если μ есть сужение μ_2 на алгебру, порождаемую замкнутыми множествами, то, по лемме III.5.2, μ аддитивна на этой алгебре. Из определения μ_1 и μ_2 ясно, что $\mu_1(F)=\mu_2(F)=\mu(F)$, если F замкнуто, и, следовательно, $\mu(E)=\sup\limits_{F\subseteq E}\mu(F)$. Это означает, что μ регулярна, и так как $\mu(S) < \infty$, то $\mu \in rba(S)$. Остается лишь показать, что

$$\text{(IV)} \qquad \int_S f(s)\lambda(ds) = \int_S f(s)\mu(ds), \quad f \in C(S).$$

Ясно, что равенство (IV) достаточно доказать для вещественной f, а так как вещественная функция из $C(S)$ представляется в виде разности двух неотрицательных функций из $C(S)$, то достаточно доказать его для неотрицательной f. Наконец, так как каждая f из $C(S)$ ограничена, то мы можем и будем предполагать при доказательстве равенства (IV), что $0 \leqslant f(s) \leqslant 1$.

Итак, предположим, что функция f непрерывна на S и удовлетворяет неравенству $0 \leqslant f(s) \leqslant 1$. Если дано $\varepsilon > 0$, то пусть $E_1, \ldots, E_n$ — такое разбиение S на попарно непересекающиеся множества из области определения μ, что

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i) + \varepsilon \geqslant \int_S f(s)\mu(ds),$$

где $a_i = \inf\limits_{s \in E_i} f(s)$. Ввиду регулярности μ существуют такие замкнутые множества $F_i \subseteq E_i$, что

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \mu(F_i) + 2\varepsilon \geqslant \int_S f(s)\mu(ds).$$

Из нормальности S и непрерывности f вытекает, что существуют такие попарно непересекающиеся открытые множества $G_1, \ldots, G_n$, что $G_i \supseteq F_i$, $i = 1, \ldots, n$, и что

$$b_i = \inf_{s \in G_i} f(s) \geqslant a_i - \frac{\varepsilon}{n\,|\mu|},$$

и, следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} b_i \mu(G_i) + 3\varepsilon \geqslant \int_S f(s)\mu(ds).$$

Ясно, что $\mu_1(F) = \mu_2(F) = \mu(F)$ для замкнутого множества F и что если открытое множество G содержит F, то $\mu(F) \leqslant \lambda(G)$. Таким образом, ввиду регулярности μ, для открытого множества G $\mu(G) \leqslant \lambda(G)$. Отсюда следует, что

$$\sum_{i=1}^{n} b_i \mu(G_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} b_i \lambda(G_i) \leqslant \int_S f(s)\lambda(ds),$$

т. е. что

$$\text{(V)} \qquad \int_S f(s)\,\lambda(ds) \geqslant \int_S f(s)\,\mu(ds).$$

Так как $\mu(S) = \lambda(S)$, то из неравенства (V) вытекает, что

$$\int_S (1 - f(s))\,\lambda(ds) \leqslant \int_S (1 - f(s))\,\mu(ds).$$

Но так как $0 \leqslant 1 - f(s) \leqslant 1$, то в неравенстве (V) функцию f можно заменить на $1 - f$, а отсюда и из последнего неравенства вытекает, что $\int (1 - f)\,d\lambda = \int (1 - f)\,d\mu$; это и доказывает равенство (IV).

→ 3. Теорема (*теорема Рисса об общем виде линейного функционала*). *Если S — бикомпактное хаусдорфово пространство, то между пространствами $C^*(S)$ и $rca(S)$ существует изометрический изоморфизм, при котором соответственные элементы x^* и μ связаны соотношением*

$$[*] \qquad x^* f = \int_S f(s)\,\mu(ds), \quad f \in C(S).$$

Этот изоморфизм сохраняет отношение порядка.

Доказательство. Из предыдущего доказательства ясно, что каждое $\mu \in rca(S)$ определяет некоторое $x^* \in C^*(S)$ по формуле [*], причем $|x^*| = |\mu|$, и что это соответствие между x^* и μ линейно и сохраняет порядок. Таким образом, для доказательства нашей теоремы мы должны только показать, что каждое $\lambda \in rba(S)$ определяет такое $\mu \in rca(S)$, что если $f \in C(S)$, то $\int_S f(s)\,\lambda(ds) = \int_S f(s)\,\mu(ds)$. Однако это вытекает из теоремы III.5.14 и леммы III.8.1(e), ч. т. д.

4. Следствие. *Если $f_n, f \in C(S)$, $n = 1, 2, \ldots$, где S — бикомпактное хаусдорфово пространство, то, для того чтобы последовательность $\{f_n\}$ слабо сходилась к f, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена и чтобы $f(s) = \lim_n f_n(s)$ для каждого $s \in S$.*

Доказательство. Если f_n слабо сходится к f, то в силу II.3.20 $\sup_n |f_n| < \infty$. Далее, для фиксированного s из S число $g(s)$ непрерывно и линейно зависит от g. Таким образом, $f_n(s) \to f(s)$ для каждого s из S. Обратное утверждение вытекает из предшествующей теоремы и теоремы Лебега (III.6.16), ч. т. д.

5. Теорема. *Пусть S—произвольное топологическое пространство, а K—ограниченное подмножество в $C(S)$. Тогда K относительно бикомпактно в том и только в том случае, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует конечное число множеств $\{E_1, \ldots, E_n\}$, сумма которых равна S, и такие точки $s_i \in E_i$, $i = 1, \ldots, n$, что*

$$\sup_{f \in K} \sup_{s \in E_i} |f(s_i) - f(s)| < \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Доказательство. Если Σ есть алгебра всех подмножеств из S, то $C(S)$, по следствию I.7.7, является замкнутым линейным многообразием в $B(S, \Sigma)$, и наша теорема вытекает из теоремы 5.6, ч. т. д.

6. Определение. Подмножество $K \subseteq C(S)$ называется *равностепенно непрерывным*, если для каждого $\varepsilon > 0$ и каждого $s \in S$ найдется такая окрестность $N = N(s)$ точки s, что

$$\sup_{f \in K} \sup_{t \in N} |f(s) - f(t)| < \varepsilon.$$

Эквивалентное условие состоит в следующем: если $\{s_\alpha\}$ — сходящаяся обобщенная последовательность, причем $s_\alpha \to s$, то $f(s_\alpha) \to f(s)$ равномерно относительно $f \in K$.

7. Теорема (*Арцела — Асколи*). *Если S бикомпактно, то для относительной бикомпактности множества из $C(S)$ необходимо и достаточно, чтобы оно было ограничено и равностепенно непрерывно.*

Доказательство. Пусть K — равностепенно непрерывное ограниченное множество из $C(S)$ и $\varepsilon > 0$. Из числа окрестностей, существующих в силу определения 6, выберем конечное число окрестностей $N_1, \ldots, N_m$, покрывающих S. Тогда

$$\sup_{f \in K} \sup_{s \in N_i} |f(s_i) - f(s)| < \varepsilon,$$

и, значит, по теореме 5, K относительно бикомпактно.

Обратно, пусть K относительно бикомпактно и, значит, вполне ограничено (I.6.15) и ограничено (II.1.8). Если дано $\varepsilon > 0$, то в множестве K найдутся такие функции $f_1, \ldots, f_n$, что каждая функция $f \in K$ отстоит меньше, чем на $\frac{\varepsilon}{3}$ от одной из функций $f_1, \ldots, f_n$. Для точки $s \in S$ выберем такую ее окрестность $N = N(s)$, что

$$|f_i(s) - f_i(t)| < \frac{\varepsilon}{3}, \; t \in N, \; i = 1, \ldots, n.$$

Тогда для произвольного $f \in K$, произвольного $t \in N$ и $i \leqslant n$

$$|f(s)-f(t)| \leqslant |f(s)-f_i(s)|+|f_i(s)-f_i(t)|+|f_i(t)-f(t)|<\varepsilon,$$

и, следовательно, K равностепенно непрерывно, ч. т. д.

→ 8. Следствие. *Пусть S — бикомпактное метрическое пространство, а K — ограниченное множество в $C(S)$. Тогда для относительной бикомпактности K необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\varepsilon > 0$ существовало такое $\delta > 0$, что*

$$\sup_{f \in K} |f(s)-f(t)| < \varepsilon, \quad \varrho(s, t) < \delta.$$

Доказательство. Если это условие выполнено, то K является равностепенно непрерывным множеством в $C(S)$ и, по теореме 7, $\overline{K}$ бикомпактно.

Обратно, пусть K относительно бикомпактно; предположим, что условие не выполнено. Тогда существуют такое $\varepsilon > 0$ и такие последовательности $\{s_n\}$, $\{t_n\} \subseteq S$, $\{f_n\} \subseteq K$, что $|f_n(s_n)-f_n(t_n)| > \varepsilon$, $\varrho(s_n, t_n) \to 0$. Так как S и $\overline{K}$ — бикомпактные метрические пространства, то можно считать, что последовательности $\{s_n\}$ и $\{t_n\}$ сходящиеся. Если $f_n \to f$ в $C(S)$ и $s_n \to s$, то $t_n \to s$ и, по лемме I.7.6, $0 = |f(s)-f(s)| \geqslant \varepsilon > 0$; мы пришли к противоречию, доказывающему наше следствие.

9. Следствие. *Пусть S — бикомпактное подмножество топологической группы G, а K — ограниченное множество в $C(S)$. Тогда множество K относительно бикомпактно в том и только в том случае, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность U единицы группы G, что $|f(t)-f(s)| < \varepsilon$ для каждого $f \in K$ и каждой пары s, t точек из S, таких, что t принадлежит Us.*

Доказательство. Если это условие выполнено, то семейство K является, очевидно, равностепенно непрерывным, и следовательно, по теореме 7, относительно бикомпактным. Обратно, если множество K относительно бикомпактно, то, по теореме 7, оно равностепенно непрерывно и для каждого $\varepsilon > 0$ и каждого $s \in S$ найдется такая окрестность V_s единицы группы G, что

$$\text{(I)} \qquad |f(t)-f(s)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad f \in K,$$

где t — произвольная точка множества S, принадлежащая $V_s s$. Ввиду непрерывности групповой операции найдется такая окрестность U_s единицы группы G, что $U_s^{-1} U_s \subset V_s$. Так как множество S бикомпактно, то оно покрывается конечным числом множеств $U_{s_1}s_1, \ldots, U_{s_n}s_n$. Пусть $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{s_i}$ и $s, t \in S$, причем $t \in Us$. Тогда для некоторых j и $u_j \in U_{s_j}$ и некоторого $u \in U$, $t = us$, $t = u_j s_j$ и

$$s = u^{-1} u_j s_j \in U^{-1} U_{s_j} s_j \subseteq U_{s_j}^{-1} U_{s_j} s_j \subset V_{s_j} s_j.$$

Но тогда из неравенства (I) вытекает, что

$$|f(s) - f(s_j)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad f \in K.$$

Так как

$$|f(t) - f(s)| \leqslant |f(t) - f(s_j)| + |f(s_j) - f(s)|$$

и так как $t \in U_{s_j} s_j \subset V_{s_j} s_j$, то

$$|f(t) - f(s)| < \varepsilon, \text{ если } f \in K, \text{ ч. т. д.}$$

10. Определение. Обобщенная последовательность $\{f_\alpha\}$ функций, определенных на множестве S, называется *квазиравномерно сходящейся на* S, если существует такая определенная на S функция f_0, что $f_\alpha(s) \to f_0(s)$ для каждого $s \in S$ и что для каждого $\varepsilon > 0$ и произвольного α_0 существует конечное число индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geqslant \alpha_0$ таких, что для каждого $s \in S$

$$\min_{1 \leqslant i \leqslant n} |f_{\alpha_i}(s) - f_0(s)| < \varepsilon.$$

11. Теорема (*Арцела*). *Если S — бикомпактное хаусдорфово пространство, а $\{f_\alpha\}$ — обобщенная последовательность в $C(S)$, сходящаяся в каждой точке множества S к некоторой функции f_0, то для непрерывности f_0 необходимо и достаточно, чтобы сходимость $\{f_\alpha\}$ была квазиравномерной на S.*

Доказательство. Если $f_0 \in C(S)$, то для заданных α_0, $\varepsilon > 0$ и произвольного $t \in S$ существует такое $\alpha(t) \geqslant \alpha_0$, что $|f_{\alpha(t)}(t) - f_0(t)| < \varepsilon$. Положим $N(t) = \{s \mid |f_{\alpha(t)}(s) - f_0(s)| < \varepsilon\}$; ввиду непрерывности f_0, $N(t)$ есть открытое множество, содержащее t. Ввиду бикомпактности S, для его покрытия достаточно конечного числа множеств $N(t)$, что и означает квазиравномерную сходимость $\{f_\alpha\}$.

Обратно, предположим, что $\{f_\alpha\}$ квазиравномерно сходится к f_0. Мы хотим показать, что непрерывность f_0 в точке s_0 вытекает из непрерывности f_α. Действительно, для заданных $s_0 \in S$ и $\varepsilon > 0$ найдется такое α_0, что при $\alpha \geqslant \alpha_0$ выполняется неравенство $|f_\alpha(s_0) - f_0(s_0)| < \varepsilon$. Выберем $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geqslant \alpha_0$ так, как требуется в определении квазиравномерной сходимости, и пусть

$$N_i(s_0) = \{s \mid |f_{\alpha_i}(s) - f_{\alpha_i}(s_0)| < \varepsilon\}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Ввиду непрерывности f_α, множества $N_i(s_0)$ открыты; следовательно, $N(s_0) = \bigcap_{i=1}^{n} N_i(s_0)$ тоже открыто и содержит точку s_0. Далее, для соответствующим образом выбранного i и произвольного $s \in N(s_0)$ мы имеем

$$|f_0(s) - f_0(s_0)| \leqslant |f_0(s) - f_{\alpha_i}(s)| + |f_{\alpha_i}(s) - f_{\alpha_i}(s_0)| + \\ + |f_{\alpha_i}(s_0) - f_0(s_0)| < 3\varepsilon.$$

Это и означает непрерывность функции f_0 в точке s_0, ч. т. д.

12. Следствие. *Для того чтобы последовательность из $C(S)$ была слабо сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была ограниченной и квазиравномерно сходящейся на S.*

13. Определение. *Семейство $F = \{f\} \subseteq C(S)$ называется квазиравностепенно непрерывным на S*, если из $s_\alpha \longrightarrow s_0$ вытекает, что сходимость $f(s_\alpha) \longrightarrow f(s_0)$ является квазиравномерной на F. Это значит, что для заданного $\varepsilon > 0$ и произвольного α_0 найдется такое конечное число индексов $\alpha_i \geqslant \alpha_0$, $i = 1, \ldots, n$, что для каждого $f \in F$

$$\min_{1 \leqslant i \leqslant n} |f(s_{\alpha_i}) - f(s_0)| < \varepsilon.$$

Напомним, что если F есть семейство функций, отображающих множество S в скалярное поле Φ, то F можно рассматривать как подмножество произведения пространств $\prod_{s \in S} \Phi$, получающееся при взаимно однозначном отображении $f \longrightarrow \prod_{s \in S} f(s)$. Относительная топология на F, индуцированная *произведением топологий*, определяется окрестностями $N(f_0; A, \varepsilon) = \{f \mid f \in F, |f(s) - f_0(s)| < \varepsilon, s \in A\}$, где A есть некоторое конечное подмножество S. Ясно, что сходимость обобщенной последовательности $\{f_\alpha\}$ в этой топологии эквивалентна сходимости обобщенной последовательности скаляров $\{f_\alpha(s)\}$ для каждого $s \in S$. Эта относительная топология на F является наиболее слабой из топологий на F, в которых каждое $s \in S$ порождает *непрерывную* функцию $\hat{s}$ на F, определяемую равенством $\hat{s}(f) = f(s)$, $f \in F$.

Слабая топология пространства $C(S)$ порождается окрестностями $N(f_0; B, \varepsilon) = \{f \mid f \in C(S), |x^*(f - f_0)| < \varepsilon, x^* \in B\}$, где B есть некоторое конечное множество из $C^*(S)$. Так как каждая точка из S определяет некоторый непрерывный линейный функционал на $C(S)$, то ясно, что топология пространства $C(S)$, индуцированная произведением топологий, слабее его слабой топологии.

Следующая теорема указывает на тесную связь между слабой компактностью множества непрерывных функций, определенных на некотором бикомпактном хаусдорфовом пространстве, бикомпактностью в топологии, индуцированной произведением топологий, бикомпактностью в слабой топологии и квазиравностепенной непрерывностью.

14. Теорема. *Пусть S — бикомпактное хаусдорфово пространство и $F \subseteq C(S)$. Тогда нижеследующие условия эквивалентны:*

1. *Замыкание множества F в слабой топологии пространства $C(S)$ слабо бикомпактно.*

2. *Множество F ограничено и его замыкание в топологии, индуцированной произведением топологий, является бикомпактным в этой топологии множеством непрерывных функций.*

3. *Множество F ограничено и квазиравностепенно непрерывно на S.*

4. *Множество F ограничено, и если F_0 есть счетное подмножество в F, а $\{s_0, s_1, s_2, \ldots\}$ — последовательность в S, для которой $f(s_n) \to f(s_0)$, $f \in F_0$, то $\hat{s}_n \to \hat{s}_0$ квазиравномерно на F_0.*

5. *Множество F слабо компактно.*

Доказательство. Если выполнено условие 1, то так как топология, индуцированная произведением топологий в пространстве $C(S)$, слабее его слабой топологии, слабое замыкание множества F в пространстве $C(S)$ бикомпактно (и равно замыканию F) и в этой относительной топологии. Так как непрерывная скалярная функция на бикомпактном множестве ограничена (I.5.10), то множество x^*F ограничено для каждого x^* из $\mathfrak{X}^*$ и, таким образом, в силу (II.3.20) множество F ограничено в определяемой нормой топологии пространства $\mathfrak{X} = C(S)$. Поэтому из условия 1 вытекает 2.

Для того чтобы убедиться в том, что из условия 2 вытекает 3, рассмотрим замыкание $\overline{F}$ множества F в топологии, индуцированной произведением топологий. Так как каждая функция $f \in \overline{F}$ непрерывна, то если $\{s_\alpha\}$ есть обобщенная последовательность, сходящаяся к точке $s_0 \in S$, то $f(s_\alpha) \to f(s_0)$. С другой стороны, каждой $s \in S$ соответствует непрерывная функция $\hat{s}$, определенная на бикомпактном хаусдорфовом пространстве $\overline{F}$. Таким образом, $\hat{s}_\alpha(f) \to \hat{s}_0(f)$ для каждого $f \in \overline{F}$, а так как $\hat{s}_0$ непрерывна, то, по теореме 11, эта сходимость должна быть квазиравномерной на $\overline{F}$. Но отсюда следует, что F квазиравностепенно непрерывно в смысле определения 13.

Предположим, что справедливо условие 3 и что $s_0, s_1, s_2, \ldots$ — последовательность из S такая, что $f(s_n) \to f(s_0)$ для f из некоторого счетного подмножества F_0 множества F. Обозначим через $\mathscr{E}_0$ совокупность всех подмножеств множества S, содержащих некоторое из множеств $E_n = \{s_n, s_{n+1}, \ldots\}$, $n = 1, 2, \ldots$. Ясно, что $\mathscr{E}_0$ будет фильтром на S (см. определение I.7.10); пусть $\mathscr{E} = \{K_\alpha\}$, $\alpha \in A$, — ультрафильтр, мажорирующий $\mathscr{E}_0$. Тогда каждое множество $K_\alpha \in \mathscr{E}$ содержит некоторую точку s_n, для которой $n \geqslant 1$, так как в противном случае $\varnothing = E_1 \cap K_\alpha \in \mathscr{E}$, что невозможно. Пусть для каждого K_α из $\mathscr{E}$, $t_\alpha = s_n$, где n таково, что $s_n \in E_1 \cap K_\alpha$. Упорядочим множество A, положив, по определению, что $\alpha \leqslant \beta$, если $K_\alpha \supseteq K_\beta$; ясно, что A будет при этом направленным множеством. Из леммы I.7.12 следует, что ультрафильтр $\mathscr{E}$ сходится к однозначно определенной точке $t_0 \in S$, и следовательно, что обобщенная последовательность $\{t_\alpha\}$ сходится к t_0. Таким образом, из предположения, сделанного в условии 3, вытекает, что сходимость $\{f(t_\alpha)\}$ к $f(t_0)$ квазиравномерна относительно $f \in F$ и *a fortiori* относительно $f \in F_0$. Кроме того, легко видеть, что $f(s_0) = f(t_0)$ для $f \in F_0$, так как $E_n \in \mathscr{E}$ для каждого n.

Пусть теперь $\varepsilon > 0$ и n_0 заданы, и пусть α_0 — индекс, соответствующий E_{n_0}. Тогда, так как сходимость $\{f(t_\alpha)\}$ является квазиравномерной, найдутся такие $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \geqslant \alpha_0$, что

$$\min_{1 \leqslant j \leqslant r} |f(t_{\alpha_j}) - f(t_0)| < \varepsilon, \quad f \in F_0.$$

Но $t_{\alpha_j} = s_{n_j}$, $j = 1, \ldots, r$, где каждое $n_j \geqslant n_0$. Мы показали, следовательно, что существуют такие $n_1, \ldots, n_r \geqslant n_0$, что

$$\min_{1 \leqslant j \leqslant r} |f(s_{n_j}) - f(s_0)| < \varepsilon, \quad f \in F_0,$$

откуда и следует квазиравномерная сходимость $\hat{s}_n(f)$ к $\hat{s}_0(f)$. Таким образом, из условия 3 вытекает 4.

Теперь мы покажем, что из условия 4 вытекает 5. Рассмотрим счетное множество $F_0 = \{f_1, f_2, \ldots\}$ функций из F. Положим

$$\varrho(s, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|f_i(s) - f_i(t)|}{1 + |f_i(s) - f_i(t)|}, \quad s, t \in S.$$

Тогда ϱ определит на множестве S метрику, которая может идентифицировать некоторые точки из S. Это метрическое пространство мы обозначим через S_ϱ. Ясно, что естественное отображение S на S_ϱ непрерывно (но, возможно, не взаимно однозначно) и, значит, S_ϱ является бикомпактным метрическим пространством. По теореме I.6.15, S_ϱ сепарабельно. Пусть $T = \{t_1, t_2, \ldots\}$ — счетное подмножество, всюду плотное в S_ϱ. Пользуясь диагональным процессом, можно выбрать подпоследовательность $\{g_n\}$ последовательности $\{f_n\}$, сходящуюся на T к некоторому определенному на T пределу f_0.

Теперь мы покажем, что f_0 имеет непрерывное продолжение $\tilde{f}_0$ на все S_ϱ и что $\{g_n\}$ сходится к $\tilde{f}_0$ в каждой точке пространства S_ϱ. Если $\{t_r\} \subseteq T$ и $t_r \to s_0$ в S_ϱ, то ввиду условия 4 сходимость каждой подпоследовательности последовательности $\{t_r\}$ квазиравномерна на F_0. Теперь мы покажем, что если для некоторой подпоследовательности $\{h_i\}$ последовательности $\{g_n\}$ $h_i(s_0) \to L$, то $f_0(t_r) \to L$. Действительно, если $h_i(s_0) \to L$, то для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такое i_0, что $|h_i(s_0) - L| < \varepsilon$ для $i \geqslant i_0$. Пусть $\{t'_r\}$ — некоторая подпоследовательность последовательности $\{t_r\}$; для произвольно заданного r_0 найдется конечное множество индексов $r_1, \ldots, r_m \geqslant r_0$ такое, что если $f \in F_0$, то $|f(t'_{r_j}) - f(s_0)| < \varepsilon$ для некоторого j, $1 \leqslant j \leqslant m$. Так как $\{h_i\}$ — подпоследовательность последовательности $\{g_n\}$, то она сходится на T. Существует, таким образом, такое j_0, что если $i \geqslant j_0$, то

$$|h_i(t'_{r_j}) - f_0(t'_{r_j})| < \varepsilon, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Зафиксируем теперь некоторое $i \geqslant i_0$, j_0, тогда для некоторого j мы будем иметь

$$|f_0(t'_{r_j}) - L| \leqslant |f_0(t'_{r_j}) - h_i(t'_{r_j})| + |h_i(t'_{r_j}) - h_i(s_0)| + \\ + |h_i(s_0) - L| < 3\varepsilon.$$

Отсюда следует, что каждая подпоследовательность $\{t'_r\}$ последовательности $\{t_r\}$ содержит такую подпоследовательность $\{t''_r\}$, что $f_0(t''_r) \to L$ и, следовательно, что $f_0(t_r) \to L$. Если теперь некоторая другая подпоследовательность последовательности $\{g_n\}$ сходится в точке s_0 к некоторому пределу L', то только что проведенное рассуждение показывает, что $f_0(t_r) \to L'$. Следовательно, $L' = L$.

Таким образом, мы заключаем, что последовательность $g_n(s_0)$ сходится к некоторому пределу L и что если $t_r \to s_0$ в S_ϱ, то $f_0(t_r) \to L$. Отсюда вытекает, что f_0 имеет единственное непрерывное продолжение $\tilde{f}_0$ на S_ϱ и что $\{g_n\}$ сходится на S_ϱ к $\tilde{f}_0$. Так как отображение S в S_ϱ непрерывно и так как слабая сходимость ограниченной последовательности в $C(S)$ вытекает из ее поточечной сходимости, то F слабо компактно.

То обстоятельство, что из условия 5 вытекает 1, было установлено Эберлейном и доказывается в гл. V (см. V.6.1).

Замечание. Необходимо отметить, что мы можем потребовать, чтобы точки $s_1, s_2, \ldots$ в условии 4 принадлежали некоторому наперед заданному всюду плотному подмножеству множества S. Это будет использовано при доказательстве теоремы 29.

Продолжая исследование пространства $C(S)$, мы рассмотрим некоторые важные специальные свойства этого пространства как алгебры. Одним из этих свойств является хорошо известная теорема Вейерштрасса об аппроксимации, утверждающая, что скалярная функция, непрерывная на замкнутом интервале вещественных чисел, есть предел равномерно сходящейся на этом интервале последовательности полиномов. Эта важная теорема имеет несколько далеко идущих обобщений; наиболее замечательным среди них является теорема Стоуна, которая будет нами рассмотрена. Заметим прежде всего, что $C(S)$ является *алгеброй*; действительно, если f и g принадлежат $C(S)$, то и произведение их fg, определяемое равенством $(fg)(s) = f(s)g(s)$, также принадлежит $C(S)$ (см. I.4.18). Алгебра $C(S)$ обладает единицей e, такой, что $ef = f$ для всех f из $C(S)$. Эта единица определяется равенством $e(s)=1$, $s\in S$. *Замкнутой подалгеброй* $C(S)$ называется замкнутое линейное многообразие в $C(S)$, содержащее произведение любых двух своих элементов.

15. Определение. Множество A из $B(S)$ *достаточно для различения точек пространства* S, если для каждой пары s, t несовпадающих точек из S в A найдется функция f, для которой $f(s)\neq f(t)$.

Обобщение теоремы Вейерштрасса, доказанное Стоуном, можно в этих терминах сформулировать следующим образом:

16. Теорема. *Пусть S — бикомпактное хаусдорфово пространство, а $C(S)$ — алгебра всех определенных на S вещественных непрерывных функций. Пусть $\mathfrak{A}$ — замкнутая подалгебра в $C(S)$, содержащая единицу e. Тогда $\mathfrak{A}=C(S)$ в том и только в том случае, если множество $\mathfrak{A}$ достаточно для различения точек пространства S.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}=C(S)$, а s и t — несовпадающие точки из S. Так как бикомпактное хаусдорфово пространство нормально (I.5.9), то, по лемме Урысона (I.5.2), существует такая функция $f\in\mathfrak{A}$, что $f(s)=1$ и $f(t)=0$. Для того чтобы доказать обратное, мы определим функции $f\vee g$, $f\wedge g$ и $\varphi(f)$ следующим образом:

$$(f\vee g)(s)=\max\{f(s),\ g(s)\},$$
$$(f\wedge g)(s)=\min\{f(s),\ g(s)\},$$
$$\varphi(f)(s)=|f(s)|.$$

По классической теореме Вейерштрасса, существует такая последовательность P_n полиномов, что

$$||\lambda|-P_n(\lambda)|\leqslant\frac{1}{n},\qquad -n\leqslant\lambda\leqslant n.$$

Таким образом,

$$||g(s)|-P_n(g)(s)|=||g(s)|-P_n(g(s))|\leqslant\frac{1}{n},$$

если только $-n\leqslant g(s)\leqslant n$. Это означает, что $\varphi(g)\in\mathfrak{A}$, если $g\in\mathfrak{A}$. Так как

$$f\vee g=\frac{(f+g)}{2}+\frac{\varphi(f-g)}{2}$$

и

$$f\wedge g=\frac{f+g}{2}-\frac{\varphi(f-g)}{2},$$

то $\mathfrak{A}$ замкнуто относительно структурных операций $\vee$ и $\wedge$. Заметим далее, что для произвольной $F\in C(S)$ и произвольной пары точек s, $t\in S$ найдется такая $f_{s,t}\in\mathfrak{A}$, что $f_{s,t}(s)=F(s)$ и $f_{s,t}(t)=$ $=F(t)$. Для того чтобы убедиться в этом, предположим, что $g\in\mathfrak{A}$

и $g(s) \neq g(t)$. Тогда можно найти такие вещественные числа α и β, что

$$\alpha g(s) + \beta = F(s),$$
$$\alpha g(t) + \beta = F(t).$$

Далее, если $t \in S$, то для каждого $s \in S$ найдется такая окрестность U_s, что $f_{s,t}(u) > F(u) - \varepsilon$ для $u \in U_s$. Предположим, что $U_{s_1}, \ldots, U_{s_p}$ покрывают S, и определим

$$f_t = f_{s_1, t} \vee \ldots \vee f_{s_p, t}.$$

Таким образом, $f_t(u) > F(u) - \varepsilon$ для $u \in S$. Так как $f_{s_i, t}(t) = F(t)$, то $f_t(t) = F(t)$ и, следовательно, существует такая окрестность V_t точки t, что

$$f_t(u) < F(u) + \varepsilon, \quad u \in V_t.$$

Пусть $V_{t_1}, \ldots, V_{t_q}$ покрывают S; определим функцию

$$f = f_{t_1} \wedge \ldots \wedge f_{t_q}.$$

Так как $f_{t_i}(u) > F(u) - \varepsilon$, $u \in S$, то и

$$f(u) > F(u) - \varepsilon, \quad u \in S.$$

С другой стороны, для произвольного $u \in S$, скажем $u \in V_{t_i}$, мы имеем

$$f(u) < f_{t_i}(u) < F(u) + \varepsilon$$

и, следовательно,

$$|f(u) - F(u)| < \varepsilon, \quad u \in S.$$

Так как $f \in \mathfrak{A}$ и $\varepsilon > 0$ произвольно, теорема полностью доказана.

→ 17. Теорема. *Пусть S — бикомпактное хаусдорфово пространство, а $C(S)$ — алгебра всех определенных на S комплексных непрерывных функций. Пусть $\mathfrak{A}$ — замкнутая подалгебра $C(S)$, содержащая единицу e и содержащая вместе с функцией f также и комплексно сопряженную с ней функцию $\bar{f}$, определяемую равенством $\bar{f}(s) = \overline{f(s)}$. Тогда $\mathfrak{A} = C(S)$ в том и только в том случае, если множество $\mathfrak{A}$ достаточно для различения точек пространства S.*

Доказательство. Необходимость этого условия доказывается так же, как в теореме 16. Для того чтобы доказать обратное, предположим, что $\mathfrak{A}_r$ состоит из всех вещественных функций, принадлежащих $\mathfrak{A}$. Тогда $\mathfrak{A}_r$ будет содержащей единицу замкнутой подалгеброй вещественной алгебры $C_r(S)$ всех вещественных непрерывных функций, определенных на S. Если $f \in \mathfrak{A}$ и $f = f_1 + if_2$, где f_1 и f_2 вещественны, то $f_1 = \frac{f+\bar{f}}{2}$ и $f_2 = \frac{f-\bar{f}}{2i}$ принадлежат $\mathfrak{A}$ и, следовательно, $\mathfrak{A}_r$. Поэтому если $f(s) \neq f(t)$, то либо $f_1(s) \neq f_1(t)$, либо $f_2(s) \neq f_2(t)$, т. е. если алгебра $\mathfrak{A}$ достаточна для различения точек пространства S, то и $\mathfrak{A}_r$ обладает этим свойством. Из предыдущей теоремы вытекает, что $C_r(S) = \mathfrak{A}_r \subset \mathfrak{A}$. Так как каждая функция $f \in C(S)$ является линейной комбинацией $f = f_1 + if_2$ вещественных функций f_1, f_2 из $C_r(s)$, то $\mathfrak{A} = C(S)$, ч. т. д.

Пользуясь теоремой 17, можно установить тесную связь между пространством $B(S)$ и пространством непрерывных функций, определенных на некотором бикомпактном хаусдорфовом пространстве. Пространство $B(S)$ является алгеброй относительно естественным образом определенного умножения $(fg)(s) = f(s)g(s)$. Кроме того, $B(S)$ обладает единицей e, определяемой равенством $e(s) = 1$, $s \in S$. Как и в случае алгебр непрерывных функций, *замкнутая подалгебра* в $B(S)$ определяется как замкнутое линейное многообразие в $B(S)$, содержащее произведение любых двух своих элементов.

18. Теорема. *Пусть $\mathfrak{A}$ — замкнутая подалгебра комплексной алгебры $B(S)$, содержащая единицу e и содержащая комплексно сопряженную функцию для каждого из своих элементов. Тогда существует такое бикомпактное хаусдорфово пространство S_1, что $\mathfrak{A}$ изометрически и алгебраически изоморфно $C(S_1)$. При этом изоморфизме U вещественные функции отображаются в вещественные, положительные — в положительные и комплексно сопряженные — в комплексно сопряженные, т. е. $U\bar{f} = \overline{Uf}$ для каждого f из $\mathfrak{A}$. Кроме того, если β — произвольная непрерывная комплексная функция комплексного переменного и если f принадлежит $\mathfrak{A}$, то и $\beta(f)$ принадлежит $\mathfrak{A}$ и $U(\beta(f)) = \beta(U(f))$.*

Доказательство. Пусть S_1 состоит из таких ненулевых непрерывных линейных функционалов, принадлежащих замкнутой единичной сфере пространства $\mathfrak{A}^*$, для которых $x^*(fg) = (x^*f)(x^*g)$ и $x^*(\bar{f}) = \overline{x^*(f)}$. Каждое $s \in S$ определяет некоторое $x_s^* \in S_1$ равенством $x_s^*f = f(s)$. Очевидно, что

$$\text{(I)} \qquad \sup_s |x_s^*f| = |f|.$$

Если $x^* \in S_1$, то найдется такое $f \in \mathfrak{A}$, что $x^*f \neq 0$, а так как $x^*f = x^*(fe) = (x^*f)(x^*e)$, то $x^*e = 1$ и $|x^*| \geqslant 1$. Если $|f| \leqslant 1$, то $|x^*f|^n = |x^*(f^n)| \leqslant |x^*|$ и, следовательно, $1 \leqslant |x^*| \leqslant 1$. Из этого обстоятельства и из равенства (I) вытекает, что

$$\text{(II)} \qquad \sup_{x^* \in S_1} |x^*f| = |f|, \quad f \in \mathfrak{A}.$$

Так как

$$x^*f \in I_f = \{\lambda \mid \lambda \in \Phi,\ |\lambda| \leqslant |f|\}, \quad x^* \in S_1, \quad f \in \mathfrak{A},$$

то топология в произведении пространств $\prod I_f$, где $f \in \mathfrak{A}$, индуцирует в S_1 некоторую относительную топологию. Так как $\prod I_f$ есть бикомпактное хаусдорфово пространство (I.8.2, I.8.5), то и S_1 также является бикомпактным хаусдорфовым пространством, если только оно замкнуто (I.5.7). Пусть $\lambda \in \overline{S}_1$; тогда в силу (I.7.2) некоторая обобщенная последовательность $\{x_\alpha^*\} \subseteq S_1$ сходится к λ. Это означает, что $x_\alpha^* f \longrightarrow \lambda f$, если $f \in \mathfrak{A}$. Отсюда вытекает, что

$$\lambda(fg) = \lim_\alpha x_\alpha^*(fg) = \lim_\alpha (x_\alpha^* f)(x_\alpha^* g) = (\lambda f)(\lambda g).$$

Точно так же можно показать, что λ линейно и что $|\lambda f| \leqslant |f|$. Таким образом, $\lambda \in S_1$, и S_1 бикомпактно. Отображение $U: f \longrightarrow f_1$ множества $\mathfrak{A}$ в $C(S_1)$ определим, полагая $f_1 x^* = x^* f$. Тогда U линейно, и из равенства (II) вытекает, что оно изометрично. Ясно, что $U\mathfrak{A}$ достаточна для различения точек пространства S_1, и так как $x^* e = 1$, если $x^* \in S_1$, то $U\mathfrak{A}$ содержит единицу алгебры $C(S_1)$. Так как $|Uf| = |f|$, то алгебра $U\mathfrak{A}$ замкнута в $C(S_1)$. Следовательно, по теореме 17, $U\mathfrak{A} = C(S_1)$.

Ясно, что U отображает произведение в произведение, комплексно сопряженные функции в комплексно сопряженные и, следовательно, вещественные функции в вещественные. Таким образом, если α есть полином от двух переменных, то

$$U(\alpha(f, \bar{f})) = \alpha(Uf, \overline{Uf}).$$

По теореме Вейерштрасса, существует такая последовательность $\{\alpha_n\}$ полиномов, для которых $\alpha_n(\lambda, \bar{\lambda})$ сходится в $\beta(\lambda)$ равномерно относительно λ из области значений f. Таким образом,

$$\beta(f(s)) = \lim_n \alpha_n(f(s), \overline{f(s)})$$

равномерно относительно s из S. Следовательно, $\beta(f)$ принадлежит $\mathfrak{A}$ и $U(\beta(f)) = \beta(U(f))$. Рассмотрев функцию $\beta(\lambda) = |\lambda|$, мы установим, что U отображает положительные функции в положительные, ч. т. д.

19. Следствие. *Предположим в дополнение к условиям теоремы 18, что запас функций из $\mathfrak{A}$ достаточен для различения точек пространства S. Тогда существует такое бикомпактное хаусдорфово пространство S_1 и такое взаимно однозначное вложение пространства S в качестве всюду плотного подмножества в S_1, что каждая функция f из $\mathfrak{A}$ имеет единственное непрерывное продолжение f_1 на S_1, причем соответствие $f \longleftrightarrow f_1$ является изометрическим изоморфизмом между $\mathfrak{A}$ и $C(S_1)$.*

Доказательство. Мы воспользуемся обозначениями, введенными при доказательстве теоремы 18. Ясно, что отображение $s \longrightarrow x_s^*$ является взаимно однозначным вложением S в S_1, поэтому, для того чтобы доказать наше следствие, достаточно показать, что S всюду плотно в S_1. Но если это не так, то, по теореме I.5.2, существует такое $f \in C(S_1)$, что $f \neq 0$ и $f(s) = 0$ при $s \in S$. Если $g \in \mathfrak{A}$ таково, что $Ug = f$, то $g(s) = x_s^* f = 0$ при $s \in S$, т. е. $g = 0$, что противоречит тому, что $0 \neq f = Ug$, ч. т. д.

20. Теорема. *Пусть замкнутая подалгебра $\mathfrak{A}$ вещественной алгебры $B(S)$ содержит единицу. Тогда существует такое бикомпактное хаусдорфово пространство S_1, что вещественная алгебра $\mathfrak{A}$ изометрически изоморфна $C(S_1)$.*

Доказательство. Доказательство получается по схеме доказательства теоремы 18 с тем лишь исключением, что вместо теоремы 17 здесь используется теорема 16, ч. т. д.

21. Определение. Топологическое пространство S *вполне регулярно*, если для произвольно заданной точки s_0 из S и произвольного замкнутого множества F, не содержащего s_0, существует такая определенная на S и непрерывная на нем функция f, что $0 \leqslant f(s) \leqslant 1$, $f(s_0) = 0$ и $f(s) = 1$ для $s \in F$.

В этом классе пространств содержатся, например, все нормальные и все бикомпактные хаусдорфовы пространства (см. I.5.2 и I.5.9).

22. Теорема. *Вполне регулярное пространство S гомеоморфно некоторому всюду плотному подмножеству бикомпактного хаусдорфова пространства S_1 так, что каждая определенная на S ограниченная непрерывная комплексная функция имеет единственное непрерывное продолжение на S_1.*

Доказательство. Так как алгебра $\mathfrak{A} = C(S)$ удовлетворяет условиям следствия 19, то наша теорема будет вытекать из этого следствия, если мы покажем, что соответствующее взаимно однозначное вложение пространства S в S_1 является гомеоморфизмом. В терминах, введенных при доказательстве теоремы 18, это означает, что достаточно показать, что взаимно однозначное соответствие $s \longleftrightarrow x_s^*$ между S и некоторым подмножеством S_0 пространства S_1 является топологическим отображением. Здесь мы обозначили через S_0 совокупность всех точек x^* из S_1, имеющих вид $x^* = x_s^*$ для некоторого s из S. Пусть $\varepsilon > 0$, $s_0 \in S$ и $f_1, \ldots, f_n \in C(S)$. Тогда множество $\{s \,\|\, f_i(s) - f_i(s_0) | < \varepsilon,\ i = 1, \ldots, n\}$ открыто и содержит s_0. В S_0 ему соответствует множество

$$\{x_s^* \,|\, | x_s^* f_i - x_{s_0}^* f_i | < \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, n\},$$

по определению, являющееся общего вида окрестностью в S_0. Таким образом, для того чтобы завершить доказательство, достаточно показать, что окрестности в пространстве S, имеющие вид $\{s \mid |f_i(s) - f_i(s_0)| < \varepsilon, i = 1, \ldots, n\}$, образуют базис топологии пространства S. Это можно сделать, используя полную регулярность пространства S, следующим образом. Пусть s_0 принадлежит открытому множеству G в пространстве S. Тогда в $C(S)$ существует такая функция f, что $0 \leqslant f(s) \leqslant 1$, $f(s_0) = 0$ и $f(s) = 1$, если s принадлежит дополнению множества G. Множество

$$B = \left\{s \mid |f(s) - f(s_0)| < \frac{1}{2}\right\}$$

является окрестностью точки s_0, содержащейся в G. Это завершает доказательство теоремы, ч. т. д.

Для того чтобы понять, насколько замечательна предыдущая теорема, предположим, что S есть полуоткрытый интервал $0 < s \leqslant 1$ вещественных чисел. Ясно, что пространство S является всюду плотным подмножеством замкнутого интервала $0 \leqslant s \leqslant 1$, но определенная на S функция $\sin\left(\frac{1}{s}\right)$ не имеет непрерывного продолжения на этот интервал. Даже в этом простом случае бикомпактное пространство S_1 предыдущей теоремы не имеет достаточно простого представления.

23. Определение. Определенный на алгебре $\mathfrak{A}$ линейный функционал x^* мы будем называть *мультипликативным*[1]), если $x^*(fg) = (x^*f)(x^*g)$ при любых f и g из $\mathfrak{A}$.

24. Лемма. *Пусть $\mathfrak{A}$ — содержащая единицу e замкнутая подалгебра алгебры $B(S)$. Тогда всякий ненулевой мультипликативный линейный функционал, определенный на $\mathfrak{A}$, непрерывен и имеет норму, равную единице.*

Доказательство. Предположим, что x^* есть определенный на $\mathfrak{A}$ мультипликативный линейный функционал и что f — такой элемент из $\mathfrak{A}$, для которого $x^*f \neq 0$. Тогда $x^*f = x^*(ef) = (x^*e)(x^*f)$, так что $x^*e = 1$ и, значит, $|x^*| \geqslant 1$. Пусть, далее, g — произвольный элемент из $\mathfrak{A}$, для которого $|g| \leqslant 1$, и λ — скаляр, для которого $|\lambda| > 1$. Тогда ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^n}{\lambda^{n+1}}$ сходится к некоторому элементу h из $\mathfrak{A}$, и

$$(\lambda e - g) h = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{g^n}{\lambda^n} - \frac{g^{n+1}}{\lambda^{n+1}}\right) = e.$$

[1]) Такие функционалы часто называются «характерами». — *Прим. ред.*

Таким образом,

$$1 = x^*e = (\lambda - x^*g)\, x^*h,$$

откуда следует, что $x^*g \neq \lambda$. Так как λ — произвольный скаляр с $|\lambda| > 1$, то $|x^*g| \leqslant 1$. Так как g произвольный элемент из $\mathfrak{A}$, для которого $|g| \leqslant 1$, то $|x^*| \leqslant 1$. Следовательно, $|x^*| = 1$, ч. т. д.

25. Лемма. *Пусть S — бикомпактное хаусдорфово пространство, а x^* — определенный на $C(S)$ ненулевой мультипликативный линейный функционал. В комплексном случае предположим, кроме того, что $x^*\bar{f} = \overline{x^*f}$. Тогда найдется такая точка $s \in S$, что $x^*f = f(s)$, $f \in C(S)$.*

Доказательство. Ввиду предшествующей леммы, x^* является точкой пространства S_1, определенного в доказательстве теоремы 18. По теореме 22, S гомеоморфно некоторому всюду плотному в S_1 подмножеству S_0. Ввиду бикомпактности S, S_0 тоже бикомпактно и, следовательно, замкнуто (I.5.7). Это значит, что $S_0 = S_1$ и $x^* \in S_0$. В соответствии с определением S_0, введенном при доказательстве теоремы 22, это означает, что $x^*f = f(s)$ для некоторого s из S и произвольного f из $C(S)$, ч. т. д.

26. Теорема. *Пусть H — некоторый алгебраический гомоморфизм $C(S)$ в $C(T)$, где S и T — бикомпактные хаусдорфовы пространства. Если $C(S)$ и $C(T)$ являются алгебрами над полем комплексных чисел, то, кроме того, предположим, что $H\bar{f} = \overline{Hf}$. Тогда H непрерывно и имеет вид*

$$(Hf)(t) = f(h(t)), \quad t \in T, \quad f \in C(S),$$

где h есть некоторое непрерывное отображение T в S. В том случае, когда H является изоморфизмом $C(S)$ на $C(T)$, h будет гомеоморфизмом T на S.

Доказательство. Для каждого $t \in T$ определим мультипликативный линейный функционал x_t^* на $C(T)$ равенством

$$x_t^*f = f(t), \quad f \in C(T).$$

Пусть для каждого $t \in T$ $y^*(t)$ — заданный на $C(S)$ функционал, определяемый равенством

$$y^*(t)\, f = x_t^*Hf, \quad f \in C(S).$$

Так как и x_t^* и H мультипликативны, то ясно, что и $y^*(t)$ мультипликативен. Ввиду предшествующей леммы, найдется такая точка $s = h(t) \in S$, что $y^*(t)f = f(s)$. Следовательно,

$$\text{(I)} \qquad (Hf)(t) = f(h(t)), \quad t \in T, \quad f \in C(S),$$

откуда следует, что $|Hf| \leqslant |f|$, т. е. что H непрерывно. Для того чтобы убедиться в непрерывности h, предположим, что N есть некоторая окрестность точки $s_0 = h(t_0)$. По теоремам I.5.2 и I.5.9, существует определенная на S непрерывная функция f, для которой $f(s_0)=1$ и $f(s)=0$ для каждой точки s, принадлежащей дополнению множества N. Так как функция $f(h(t))=(Hf)(t)$ непрерывна относительно t, то множество

$$U = \{t \mid f(h(t)) \neq 0\}$$

является некоторой окрестностью точки t_0. Если t принадлежит U, то $f(h(t)) \neq 0$. Отсюда следует, что $h(t)$ принадлежит N. Таким образом, $h(U) \subseteq N$ и h непрерывно. Если H есть изоморфизм, при котором $H(C(S))=C(T)$, то, как уже доказано, существует такая непрерывная функция h_1, отображающая S в T, что

$$\text{(II)} \qquad (H^{-1}f)(s) = f(h_1(s)), \quad s \in S, \quad f \in C(T).$$

Отсюда вместе с равенством (I) вытекает, что

$$\text{(III)} \qquad f(s) = f(h(h_1(s))), \quad s \in S, \quad f \in C(S).$$

Так как в $C(S)$ имеется достаточно много функций для различения точек пространства S, то отсюда вытекает, что $s = h(h_1(s))$. Аналогично $t = h_1(h(t))$ для каждого $t \in T$. Ввиду непрерывности h и h_1 доказательство завершено.

27. Следствие. *Если S и T — бикомпактные хаусдорфовы пространства, для которых вещественные алгебры $C(S)$ и $C(T)$ алгебраически эквивалентны, то пространства S и T гомеоморфны.*

Следствие 27 означает, что бикомпактное хаусдорфово пространство S_1, ассоциируемое с данным, вполне регулярным пространством S, описанным в теореме 22 способом, единственно. Оно называется максимальным бикомпактным расширением пространства S в смысле Стоуна — Чеха.

В заключение этого параграфа мы покажем, как теорема 14 может быть использована для получения условий слабой компактности в $B(S)$. Однако прежде всего необходимо сделать некоторые вводные замечания.

Пусть $\mathscr{E} = \{E_\alpha\}$ — ультрафильтр подмножеств множества S, и пусть s_α для каждого α будет некоторой точкой из E_α. Если множество $\{\alpha\}$ упорядочить, положив $\alpha \leqslant \beta$, если $E_\alpha \supseteq E_\beta$, то ясно, что $\{s_\alpha\}$ будет обобщенной последовательностью точек пространства S. Мы будем говорить, что обобщенная последовательность $\{s_\alpha\}$ *порождается ультрафильтром* $\mathscr{E} = \{E_\alpha\}$. Кроме того, для каждого $f \in B(S)$ обобщенная последовательность $\{f(s_\alpha)\}$ скаляров имеет предел, который мы обозначим через $f(\mathscr{E})$. Хотя ясно, что каждый ультрафильтр порождает много обобщенных последовательностей, но легко видеть, что если $\{s'_\alpha\}$ есть любая другая обобщенная последовательность, порожденная ультрафильтром $\mathscr{E}$, то $\{f(s'_\alpha)\}$ также сходится к $f(\mathscr{E})$, так что это обозначение оправдано.

28. Определение. Множество $F \subseteq B(S)$ называется *квазиравностепенно непрерывным* на S, если для каждой обобщенной последовательности $\{s_\alpha\}$ в S, порождаемой ультрафильтром $\mathscr{E}$, $f\{s_\alpha\}$ сходится к $f(\mathscr{E})$ квазиравномерно на F. Заметим, что в этом определении мы не делаем никаких предположений относительно природы множества S. Можно доказать, что если S есть бикомпактное хаусдорфово пространство, то это определение эквивалентно тому, что $F \subseteq C(S)$ и квазиравностепенно непрерывно на S в смысле определения 13.

29. Теорема. *Пусть S — произвольное множество и $F \subseteq B(S)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. *Множество F ограничено и квазиравностепенно непрерывно на S.*

2. *Множество F ограничено, и если F_0 есть некоторое счетное подмножество F, а $\{s_1, s_2, \ldots\}$ — последовательность точек из S, для которой $\{f(s_n)\}$ сходится при каждом $f \in F_0$, то эта сходимость квазиравномерна на F_0.*

3. *Множество F слабо компактно.*

Доказательство. То, что из условия 1 вытекает 2, можно доказать аналогично тому, как в теореме 14 доказывалось, что из условия 3 этой теоремы вытекает 4.

По следствию 19, множество S можно вложить в качестве всюду плотного подмножества в некоторое бикомпактное хаусдорфово пространство S_1 таким образом, что каждое $f \in B(S)$ имеет единственное продолжение f_1 из $C(S_1)$ и так, что соответствие $f \longleftrightarrow f_1$ является изометрическим изоморфизмом между $B(S)$ и $C(S_1)$. То, что из условия 2 вытекает 3, можно доказать, используя замечание, сделанное нами после теоремы 14, о том, что в теореме 14(4) достаточно выбирать последовательность точек из некоторого множества S, всюду плотного в S_1. Зная связь между пространствами $B(S)$ и $C(S_1)$, мы получаем, что импликация $3 \to 1$ вытекает из импликации $5 \to 3$ теоремы 14, ч. т. д.

30. Лемма. *Пусть A — некоторое всюду плотное подмножество бикомпактного хаусдорфова пространства S; предположим, что последовательность $\{f_n\}$ непрерывных функций сходится в каждой точке множества A к некоторому непрерывному пределу f_0. Тогда, для того чтобы последовательность $\{f_n\}$ сходилась к f_0 в каждой точке пространства S, необходимо и достаточно, чтобы и последовательность $\{f_n\}$, и каждая ее подпоследовательность сходилась к f_0 квазиравномерно на A.*

Доказательство. Из теоремы 11 вытекает, что это условие необходимо. Для того чтобы доказать его достаточность, предположим, что $f_n(s_0)$ не сходится к $f_0(s_0)$. Тогда найдется такое ε_0 и такая подпоследовательность $\{g_k\}$, что $|g_k(s_0)-f_0(s_0)|>\varepsilon_0$, $k=1, 2, \ldots$. Пусть $k_1, \ldots, k_r$, — индексы, соответствующие ε_0 и $k=1$, существование которых гарантируется квазиравномерной сходимостью последовательности $\{g_k\}$. Тогда множества

$$U_i=\{s \mid |g_{k_i}(s)-f_0(s)|>\varepsilon_0\}$$

при $i=1, \ldots, r$ являются открытыми множествами, содержащими s_0. Так как множество A всюду плотно в S, то найдется такая точка $s \in A \cap U_1 \cap \ldots \cap U_r$, для которой $|g_{k_i}(s)-f_0(s)|>\varepsilon_0$, $i=1, \ldots, r$, что противоречит квазиравномерной сходимости последовательности $\{g_k\}$, ч. т. д.

31. Теорема. *Пусть S — произвольное множество. Для того чтобы последовательность $\{f_n\}$ из $B(S)$ слабо сходилась к f_0, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена и вместе с каждой своей подпоследовательностью сходилась к f_0 квазиравномерно на S.*

Доказательство. Последовательность $\{f_n\}$ из $B(S)$ слабо сходится к f_0 в том и только в том случае, если соответствующая последовательность непрерывных функций $\{\tilde{f}_n\}$ из $C(S_1)$ слабо сходится к f_0. (См. следствие 19, показывающее, что S можно идентифицировать с некоторым всюду плотным подмножеством бикомпактного хаусдорфова пространства S_1.) Осуществляя эту идентификацию, мы можем написать, что $\tilde{f}_n(s)=f_n(s)$, $s \in S$, и справедливость нашей теоремы вытекает из леммы 30 и следствия 4, ч. т. д.

7. Пространство AP

Построенная Бором изящная теория почти периодических функций относится к таким комплексным функциям вещественного переменного, которые могут быть равномерно аппроксимированы на всей числовой прямой тригонометрическими полиномами вида

$$s(x)=\sum_{n=1}^{m} \alpha_n e^{i\lambda_n x},$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — произвольные комплексные, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — произвольные вещественные числа. Иными словами, эта теория дает внутреннюю характеристику, без обращения к тригонометрическим полиномам, комплексных функций $f(x)$, $-\infty<x<+\infty$, обладающих тем свойством, что для каждого $\varepsilon>0$ найдется тригонометрический полином s указанного выше вида, такой, что

$$|f(x)-s(x)|<\varepsilon, \quad -\infty<x<+\infty.$$

20 Заказ № 1324

Основной результат теории Бора состоит в том, что класс таких комплексных функций вещественного переменного в точности совпадает с классом AP почти периодических функций. В этом параграфе будет определен класс AP, будет показано, что AP является B-пространством, и дан принадлежащий Бохнеру критерий почти периодичности. Другие важные результаты этой теории (в частности, результат, состоящий в том, что каждая функция из AP является пределом равномерно сходящейся последовательности тригонометрических полиномов) будут даны впоследствии, когда уже будут установлены основные положения спектральной теории.

1. Определение. Для комплексной функции f, определенной на вещественной числовой прямой R, и положительного числа ε множество $T(\varepsilon, f) \subseteq R$ определяется равенством

$$T(\varepsilon, f) = \{t \mid |f(x+t) - f(x)| < \varepsilon, \quad x \in R\}.$$

Каждое число $t \in T(\varepsilon, f)$ называется *ε-периодом функции f*. Если это не может привести к недоразумению, вместо $T(\varepsilon, f)$ используется обозначение $T(\varepsilon)$. Ясно, что если $\varepsilon < \delta$, то $T(\varepsilon) \subseteq T(\delta)$, и что если $t \in T(\varepsilon)$, то и $-t \in T(\varepsilon)$. Функция f называется *почти периодической*, если она непрерывна и если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $L = L(\varepsilon) > 0$, что каждый интервал из R длины L содержит по крайней мере одну точку из $T(\varepsilon)$.

Ясно, что периодическая функция будет и почти периодической. Кроме того, из определения непосредственно вытекает, что если $f \in AP$, α — произвольное комплексное, а λ — произвольное вещественное число, то функции

$$\alpha f(t), \quad f(t+\lambda), \quad \overline{f(t)}, \quad t \in R,$$

также принадлежат AP. Так как

$$||f(t+\lambda)| - |f(t)|| \leqslant |f(t+\lambda) - f(t)|,$$

то ясно, что если $f \in AP$, то и $|f(\cdot)| \in AP$. Полезно заметить также, что если только почти периодическая функция не является на самом деле периодической, допустимые числа $L(\varepsilon)$ неограниченно возрастают при $\varepsilon \to 0$. В самом деле, если $L(\varepsilon) \leqslant K$, $\varepsilon > 0$, то существует такая последовательность $\{t_n\}$, что $0 \leqslant t_n \leqslant K$ и

$$|f(x+t_n) - f(x)| < \frac{1}{n}, \quad x \in R,$$

а, следовательно, каждая предельная точка последовательности $\{t_n\}$ служит периодом для f.

Для любого $\lambda \in R$ *сдвиг* f_λ функции f определяется равенством $f_\lambda(x) = f(x+\lambda)$.

2. Теорема (*Бохнер*). *Для того чтобы функция из $C(R)$ была почти периодической, необходимо и достаточно, чтобы множество ее сдвигов было относительно бикомпактно.*

Для доказательства нам потребуются следующие две леммы.

3. Лемма. *Почти периодическая функция ограничена.*

Доказательство леммы 3. Так как почти периодическая функция f непрерывна, то функция $|f(s)|$ на интервале $0 \leqslant x \leqslant L(1)$ достигает своего максимума K. Пусть x — произвольное вещественное число; выберем $t \in T(1, f)$ в интервале $-x \leqslant t \leqslant -x+L(1)$. Тогда $0 \leqslant t+x \leqslant L(1)$ и

$$|f(x+t)| \leqslant K,$$

$$|f(x)| \leqslant |f(x+t)| + |f(x) - f(x+t)| \leqslant K+1, \qquad \text{ч. т. д.}$$

4. Лемма. *Почти периодическая функция равномерно непрерывна.*

Доказательство леммы 4. Так как почти периодическая функция f непрерывна, то для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое δ, $0 < \delta < 1$, что $|f(s) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{3}$ для каждой пары точек s, t, для которой $-1 \leqslant s, t \leqslant L\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)+1$ и $|s-t| < \delta$. Предположим теперь, что x и y — произвольные вещественные числа, для которых $|x-y| < \delta$. Выберем $u \in T\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$, удовлетворяющее неравенству $-x \leqslant u \leqslant -x + L\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$. Тогда $0 \leqslant x+u \leqslant L\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$ и $-1 \leqslant y+u \leqslant L\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)+1$. Следовательно,

$$|f(x)-f(y)| \leqslant |f(x)-f(x+u)| + |f(x+u)-f(y+u)| + \\ + |f(y+u)-f(y)| < \varepsilon, \qquad \text{ч. т. д.}$$

Доказательство теоремы 2. На основании леммы 4 для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $|f_\lambda(x) - f_\lambda(y)| < \varepsilon$ при всех λ и при $|x-y| < \delta$. На основании следствия 6.8 произвольная последовательность $\{f_{\lambda_i}\}$ содержит подпоследовательность $\{f_{1,i}\}$, равномерно сходящуюся на интервале $|x| \leqslant 1$. Точно так же и последовательность $\{f_{1,i}\}$ содержит подпоследовательность $\{f_{2,i}\}$, равномерно сходящуюся на интервале $|x| \leqslant 2$. Так, одна за другой выбираются подпоследовательности, для которых предел $\lim\limits_i f_{n,i}(x)$ существует равномерно на интервале $|x| \leqslant n$. Тогда последовательность $\{g_n = f_{n,n},\ n = 1, 2, \ldots\}$ будет подпоследовательностью последовательности $\{f_{\lambda_i}\}$, равномерно сходящейся на каждом конечном интервале. Пусть, далее, $\varepsilon > 0$; выберем $n(\varepsilon)$ так, что

$$|g_n(x) - g_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

для всех n, m и x таких, что $0 \leqslant x \leqslant L\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$ и $n, m \geqslant n(\varepsilon)$. Для каждого вещественного числа x выберем $y \in T\left(\frac{\varepsilon}{3}, f\right)$ из отрезка $-x \leqslant y \leqslant -x + L\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$ и заметим, что так как $g_n = f_{\mu_n}$ для некоторого μ_n, то число y принадлежит также и $T\left(\frac{\varepsilon}{3}, g_n\right) = T\left(\frac{\varepsilon}{3}, f\right)$ для каждого $n = 1, 2, \ldots$. Таким образом, если $n, m \geqslant n(\varepsilon)$, то

$$|g_n(x) - g_m(x)| \leqslant |g_n(x) - g_n(x+y)| + |g_n(x+y) - g_m(x+y)| + \\ + |g_m(x+y) - g_m(x)| < \varepsilon.$$

Мы показали, что произвольная последовательность $\{f_{\lambda_i}\}$ сдвигов функции f содержит подпоследовательность, равномерно сходящуюся на всей числовой прямой R. Следовательно, если f — почти периодическая функция, то множество $\{f_\lambda, \lambda \in R\}$ относительно бикомпактно в $C(R)$.

Обратно, пусть f — определенная на всей числовой прямой R ограниченная непрерывная комплексная функция, множество сдвигов которой относительно бикомпактно в $C(R)$. Множество $\{f_\lambda, \lambda \in R\}$ вполне ограничено (I.6.15), следовательно, для каждого $\varepsilon > 0$ существуют такие числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, что каждый сдвиг f_λ удовлетворяет одному из неравенств $|f_\lambda - f_{\lambda_i}| < \varepsilon$, $i = 1, \ldots, m$. Это значит, что для всех $\lambda \in R$ и $x \in R$

$$|f(x+\lambda) - f(x+\lambda_i)| < \varepsilon$$

для некоторого целого числа $i \leqslant m$. Таким образом, для каждого $\lambda \in R$ и каждого $x \in R$

$$|f(x) - f(x+\lambda-\lambda_i)| < \varepsilon$$

для некоторого $i \leqslant m$. Если $k = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} |\lambda_i|$, то отсюда следует, что каждый интервал длины $2k$ содержит некоторую точку из $T(\varepsilon, f)$. Следовательно, функция f почти периодична, ч. т. д.

5. Теорема. *Пространство AP всех комплексных почти периодических функций вещественного переменного является комплексным B-пространством относительно нормы*

$$|f| = \sup_{-\infty < x < +\infty} |f(x)|.$$

Доказательство. Как уже было отмечено, произведение αf скаляра α и почти периодической функции f снова является почти периодической функцией. Если обе функции f и g почти периодические, то, по теореме 2, для каждой последовательности $(f+g)_{\lambda_i} = f_{\lambda_i} + g_{\lambda_i}$ найдется такая подпоследовательность $\mu_n = \lambda_{i_n}$, что обе последовательности $\{f_{\mu_n}\}$ и $\{g_{\mu_n}\}$ равномерно сходятся. Но тогда последовательность $\{(f+g)_{\mu_n}\}=\{f_{\mu_n}+g_{\mu_n}\}$ тоже равномерно сходится и, по теореме 2, функция $f+g$ является почти периодической. Пусть, наконец, $\{f_n\}$ — равномерно сходящаяся последовательность почти периодических функций и f — предел этой последовательности в $C(R)$. Зафиксируем n_0 такое, при котором функция $g=f_{n_0}$ удовлетворяет неравенству $|g-f|<\frac{\varepsilon}{3}$. Пользуясь теоремами 2 и I.6.15, выберем такие $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, что для каждого λ $|g_\lambda-g_{\lambda_i}|<\frac{\varepsilon}{3}$ для некоторого $i\leqslant m$. Тогда для любого λ

$$|f_\lambda-f_{\lambda_i}|\leqslant|f_\lambda-g_\lambda|+|g_\lambda-g_{\lambda_i}|+|g_{\lambda_i}-f_{\lambda_i}|<\varepsilon,$$

при некотором $i\leqslant m$. Следовательно, множество $\{f_\lambda, \lambda\in R\}$ вполне ограничено в $C(R)$ и, значит, (I.6.15) относительно бикомпактно в $C(R)$. Из теоремы 2 вытекает тогда, что f почти периодична, ч. т. д.

6. Теорема. *Пространство AP всех комплексных почти периодических функций вещественного переменного содержит вместе с двумя функциями f и g также функции fg и $\bar{f}$, определяемые равенствами $(fg)(t)=f(t)g(t)$, $\bar{f}(t)=\overline{f(t)}$. Пространство AP изометрически и алгебраически (т. е. с сохранением умножения и комплексной сопряженности) изоморфно алгебре $C(S)$ всех комплексных непрерывных функций, определенных на некотором бикомпактном хаусдорфовом пространстве S.*

Доказательство. Как уже было отмечено, если функция f принадлежит AP, то и $\bar{f}$ ему принадлежит. Точно так же, как в предшествующей теореме было доказано, что сумма $f+g$ двух почти периодических функций является почти периодической, можно доказать, что и произведение их fg тоже почти периодично. Поэтому наша теорема является следствием теоремы 6.18, ч. т. д.

8. Пространства $L_p(S, \Sigma, \mu)$

Пространства $L_p(S, \Sigma, \mu)$, $1\leqslant p<\infty$ уже изучались в главе III. В частности, в теореме III.6.6 было показано, что они являются B-пространствами. В этом параграфе мы продолжим изучение этих пространств, имея в виду решение проблем, перечисленных в § 1. Кроме того, мы будем изучать и пространство $L_\infty(S, \Sigma, \mu)$, определенное в п. 2.19. Согласно следствию III.6.14, оно является B-пространством. Так как $L_p(S, \Sigma, \mu)=L_p(S, \Sigma, v(\mu))$, то мы можем, и в этом параграфе будем, предполагать, что (S, Σ, μ) является пространством с *положительной* мерой.

Читатель должен иметь в виду, что пространство l_p является пространством $L_p(S, \Sigma, \mu)$, в котором S есть множество всех целых чисел, Σ — совокупность всех подмножеств множества S и $\mu(E)$ — число (конечное или бесконечное) элементов множества E. Таким образом, результаты настоящего параграфа будут относиться и к пространству l_p как частному случаю $L_p(S, \Sigma, \mu)$.

→ 1. Теорема. *Если* $1 < p < \infty$ *и* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *то пространства* $L_p^*(S, \Sigma, \mu)$ *и* $L_q(S, \Sigma, \mu)$ *изометрически изоморфны; при этом изоморфизме соответственные векторы* x^* *и* g *связаны соотношением*

$$x^*f = \int_S g(s) f(s) \mu(ds), \quad f \in L_p(S, \Sigma, \mu).$$

Доказательство. Пусть $1 < p < \infty$; положим $L_p = L_p(S, \Sigma, \mu)$, и пусть $|f|_p$ будет нормой f как элемента пространства L_p. Пусть $x^* \in L_p^*$, и предположим на время, что $\mu(S) < \infty$. Если χ_E есть характеристическая функция множества $E \in \Sigma$ и если $\{E_j\}$ — последовательность попарно непересекающихся измеримых подмножеств множества S, такая, что $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j = E_0$, то, по теореме III.6.16, ряд $\sum_{j=1}^{\infty} \chi_{E_j} = \chi_{E_0}$ сходится по норме пространства L_p. Следовательно, $x^*\chi_{E_0} = \sum_{j=1}^{\infty} x^*\chi_{E_j}$, так что $x^*\chi_E$ есть счетно аддитивная функция множества. Так как $|\chi_E|_p \to 0$, если $\mu(E) \to 0$, то $x^*\chi_E$ абсолютно непрерывна относительно μ, и, по теореме Радона — Никодима (III.10.2), существует такое $g \in L_1$, что $x^*\chi_E = \int_S g(s) \chi_E(s) \mu(ds)$. Таким образом, для простых функций f

$$x^*f = \int_S g(s) f(s) \mu(ds). \tag{I}$$

Если $\{f_n\}$ есть последовательность μ-интегрируемых простых функций из L_p, сходящаяся почти всюду относительно μ к некоторой функции f из L_p (как показано в пунктах III.3.8, III.3.6 и III.6.13, такая последовательность всегда существует), то $gf_n \to gf$ почти всюду. Так как последовательность $x^*(f_n\chi_E)$ сходится, то, по теореме Витали — Хана — Сакса (III.7.2),

$$\lim_{\mu(E) \to 0} \int_E g(s) f_n(s) \mu(ds) = 0$$

равномерно относительно n. Так как мы предположили пока, что $\mu(S) < \infty$, то, по теореме III.6.15, fg принадлежит L_1 и равенство (I) имеет место для каждого f из L_p. Теперь мы покажем, что g принадлежит L_q. Для комплексного числа z положим $\alpha(z) = e^{-i\theta}$, если $z = re^{i\theta}$, и $\alpha(0) = 0$. Тогда, по лемме III.6.9, $\alpha(g(\cdot))$ μ-измерима, так что, по лемме III.2.12, функция $g_1(\cdot) = |g(\cdot)|^{1/p}\alpha(g(\cdot))$ μ-измерима и, следовательно, принадлежит L_p. Таким образом,

$$\int_S |g(s)|^{1+\frac{1}{p}}\mu(ds) = x^*(g_1) \leqslant |x^*|\,|g_1|_p = |x^*|\left\{\int_S |g(s)|\,\mu(ds)\right\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$= |x^*|\,\{x^*\alpha(g)\}^{\frac{1}{p}} \leqslant |x^*|^{1+\frac{1}{p}}\mu(S)^{\frac{1}{p}}.$$

Отсюда мы видим, что $|g(\cdot)|^{1+\frac{1}{p}} \in L_1$, так что функция $g_2(\cdot) = |g(\cdot)|^{\left(1+\frac{1}{p}\right)/p}\alpha(g(\cdot))$ принадлежит L_p и, кроме того,

$$|g_2|_p = \left[\int_S |g(s)|^{1+\frac{1}{p}}\mu(ds)\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant |x^*|^{\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}}\mu(S)^{\frac{1}{p^2}}.$$

Таким образом,

$$\int_S |g(s)|^{1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}}\mu(ds) = x^*(g_2) \leqslant |x^*|\,|g_2|_p \leqslant |x^*|^{1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}}\mu(S)^{\frac{1}{p^2}}.$$

Продолжая это рассуждение по индукции, мы определим

$$g_n(\cdot) = |g(\cdot)|^{\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\ldots+\frac{1}{p^n}}\alpha(g(\cdot)),$$

при этом

$$\text{(II)} \qquad \int_S |g(s)|^{1+\frac{1}{p}+\ldots+\frac{1}{p^n}}\mu(ds) \leqslant |x^*|^{1+\frac{1}{p}+\ldots+\frac{1}{p^n}}\mu(S)^{\frac{1}{p^n}},$$

$$n = 1, 2, \ldots .$$

Так как $p > 1$, то $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{p^n} = q$ и, по лемме Фату (III.6.19), $|g|_q \leqslant |x^*|$. С другой стороны, в силу неравенства Гёльдера (III.3.2) $|x^*| \leqslant |g|_q$. Следовательно, $|x^*| = |g|_q$.

Отображение $x^* \to g$ является взаимно однозначным изометрическим отображением L_p^* в L_q. Из неравенства Гёльдера ясно, что для каждого $g \in L_q$ найдется $x^* \in L_p^*$, удовлетворяющее равенству (I), так что отображение $x^* \leftrightarrow g$ является взаимно однозначным изометрическим отображением L_p^* на все L_q. Так как линейность этого отображения очевидна, то для случая $\mu(S) < \infty$ теорема доказана.

Пусть теперь (S, Σ, μ) — произвольное пространство с положительной мерой и Σ_1 состоит из таких множеств $E \in \Sigma$, для которых $\mu(E) < \infty$. Если $E \in \Sigma_1$, то обозначим через $L_p(E)$ замкнутое линейное многообразие в L_p, состоящее из таких функций, которые обращаются в нуль на дополнении к множеству E. Пусть x_E^* будет сужением x^* на $L_p(E)$, так что если $E \in \Sigma_1$, то по только что доказанному существует такое $g_E \in L_q(E)$, что

$$x_E^* f = \int_S g_E(s) f(s) \mu(ds), \quad f \in L_p(E),$$

$$|g_E|_q = |x_E^*| \leqslant |x^*|, \quad E \in \Sigma_1.$$

Из единственности функции g_E вытекает, что если $A, B \in \Sigma_1$, то $g_A(s) = g_B(s) = g_{AB}(s)$ для почти всех s из AB. Таким образом, $|g_E|_q^q = \int_E |g_E(s)|^q \mu(ds)$ есть неотрицательная, аддитивная функция множества, определенная для $E \in \Sigma_1$. Существует, следовательно, такая неубывающая последовательность $\{E_n\} \subseteq \Sigma_1$, для которой

$$|x_{E_n}^*| \to \sup_{E \in \Sigma_1} |x_E^*| \leqslant |x^*|.$$

Так как $g_{E_n}(s) = g_{E_{n+1}}(s)$ почти всюду на E_n, то предел $g(s) = \lim_n g_{E_n}(s)$ существует почти всюду и равен нулю на дополнении множества $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Согласно следствию III.6.17,

$$|g|_q = \lim_n |g_{E_n}|_q = \sup_{E \in \Sigma_1} |x_E^*| \leqslant |x^*|.$$

Если $E \in \Sigma_1$ и $EF = \varnothing$, то $EE_n = \varnothing$ для всех n, и $|g_{E \cup E_n}|_q^q = |g_E|_q^q + |g_{E_n}|_q^q$. Так как $|g_{E_n}|_q^q \to \sup_{E \in \Sigma_1} |g_E|_q^q$, то $|g_E| = 0$, как только $EF = \varnothing$. Следовательно, если $f \in L_p(E)$ для некоторого $E \in \Sigma_1$, то

$$x^* f = x_E^* f = \int_E g_E(s) f(s) \mu(ds) =$$

$$= \int_{E-F} g_E(s) f(s) \mu(ds) + \int_{EF} g_E(s) f(s) \mu(ds) =$$

$$= \int_{E-F} g_{E-F}(s) f(s) \mu(ds) + \int_{EF} g_{EF}(s) f(s) \mu(ds) =$$

$$= \int_{EF} g_{EF}(s) f(s) \mu(ds).$$

Так как $g_{EF}(s)=g_{E_n}(s)$ почти всюду в $EE_nF=EE_n$, то $g_{EF}(s)=g(s)$ почти всюду в EF. Следовательно, если $f\in L_p(E)$ для $E\in\Sigma_1$, то

$$x^*f=\int_{EF} g(s)f(s)\mu(ds)=\int_S g(s)f(s)\mu(ds).$$

Так как, по следствию III.3.8, множество $\bigcup_{E\in\Sigma_1} L_p(E)$ всюду плотно в L_p и так как и правая и левая части последнего равенства непрерывны относительно f, то

$$x^*f=\int_S g(s)f(s)\mu(ds),\quad f\in L_p.$$

Как уже было показано $|g|_q\leqslant|x^*|$. С другой стороны, из неравенства Гёльдера вытекает, что $|x^*|\leqslant|g|_q$. Таким образом $x^*\to g$ есть изометрическое отображение пространства L_p^* в L_q. Остальная часть доказательства проводится так же, как выше для случая $\mu(S)<\infty$, ч. т. д.

2. Следствие. *Если* $1<p<\infty$, *то пространство* $L_p(S, \Sigma, \mu)$ *рефлексивно.*

Доказательство. Пусть $x^{**}\in(L_p^*)^*$. По теореме 1, L_p^* изометрически изоморфно L_q, так что в L_q^* найдется такой функционал y^*, для которого

$$x^{**}(x^*)=y^*(g),$$

где g и x^*, как в теореме 1, связаны соотношением

$$x^*f=\int_S f(s)g(s)\mu(ds),\quad f\in L_p,$$

Снова применяя теорему 1, на этот раз к L_q^* и L_p, мы найдем, что существует такое $h\in L_p$, что

$$y^*f=\int_S h(s)f(s)\mu(ds),\quad f\in L_q.$$

Следовательно, $x^{**}(x^*)=y^*(g)=\int_S g(s)h(s)\mu(ds)=x^*(h)$, т. е. для каждого $x^{**}\in L_p^{**}$ существует такое $h\in L_p$, что $x^{**}(x^*)=x^*(h)$. Это и означает, что пространство L_p рефлексивно, ч. т. д.

3. Следствие. *Если* $1<p<\infty$, *то пространство* $L_p(S, \Sigma, \mu)$ *слабо полно.*

Доказательство. Это утверждение вытекает из следствия 2 и следствия II.3.29, ч. т. д.

4. Следствие. *Пусть* $1 < p < \infty$; *для того чтобы множество в* $L_p(S, \Sigma, \mu)$ *было слабо компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограниченным.*

Доказательство. Это вытекает из следствия 2 и теоремы II.3.28, ч. т. д.

Теперь мы рассмотрим вопрос о представлении сопряженного пространства L_p^* при $p=1$. Предполагая, что (S, Σ, μ) является пространством с σ-конечной мерой, здесь можно получить результат, аналогичный теореме 1.

→ 5. Теорема. *Если* (S, Σ, μ) — *пространство с положительной* σ-*конечной мерой, то между пространствами* $L_1^*(S, \Sigma, \mu)$ *и* $L_\infty(S, \Sigma, \mu)$ *существует изометрический изоморфизм, при котором соответственные векторы* x^* *и* g *связаны соотношением*

$$x^*f = \int_S g(s)\, f(s)\, \mu(ds), \quad f \in L_1(S, \Sigma, \mu).$$

Доказательство. Предположим сперва, что $\mu(S) < \infty$. В этом случае можно воспользоваться рассуждением, проводимым при доказательстве теоремы 1 до того места, где было получено неравенство (II). При $p=1$ это неравенство превращается в

$$\int_S |g(s)|^n \mu(ds) \leqslant |x^*|^n \mu(S), \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Обозначив через E_m множество точек, в которых $|g(s)| \geqslant m$, мы получим отсюда, что $m^n\mu(E_m) \leqslant |x^*|^n \mu(S)$, т. е. что $[\mu(E_m)/\mu(S)]^{\frac{1}{n}} \leqslant |x^*|/m$. Устремляя n к ∞, мы находим, что $\mu(E_m)=0$, если $m > |x^*|$. Таким образом, $|g|_\infty \leqslant |x^*|$. Кроме того, ясно, что $|x^*| \leqslant |g|_\infty$, так что $|x^*| = |g|_\infty$.

Предположим теперь, что мера μ в (S, Σ, μ) σ-конечна, и пусть E_n — возрастающая последовательность измеримых множеств конечной меры, сумма которых совпадает с S. Применяя доказанное к пространствам $L_1(E_n) = L_1(E_n, \Sigma(E_n), \mu)$, мы получим последовательность $\{g_n\}$ функций из L_∞ таких, что $|g_n|_\infty \leqslant |x^*|$, $|g_n(s)| = g_{n+1}(s)$ для почти всех s из E_n и

$$x^*f = \int_{E_n} g_n(s)\, f(s)\, \mu(ds)$$

для каждой функции f из L_1, обращающейся в нуль вне множества E_n. Положим $g(s) = \lim_n g_n(s)$, тогда функция g будет определена почти всюду, причем $|g|_\infty \leqslant |x^*|$ и

$$x^*(\chi_{E_n} f) = \int_S g(s)\chi_{E_n}(s) f(s)\mu(ds), \quad f \in L_1, \ n = 1, 2, \ldots,$$

где χ_{E_n} есть характеристическая функция множества E_n. Так как, по следствию III.6.16, $|f - \chi_{E_n} f|_1 \to 0$ при $n \to \infty$, то ясно, что

$$x^* f = \int_S g(s) f(s)\mu(ds), \quad f \in L_1$$

Из этого равенства видно, что $|x^*| \leqslant |g|_\infty$, а так как уже было показано, что $|g|_\infty \leqslant |x^*|$, то между пространствами L_1^* и L_∞ существует изометрическое соответствие. Так как линейность этого соответствия очевидна, то наша теорема полностью доказана.

Замечание. При изучении локально бикомпактных групп представляет некоторый интерес то обстоятельство, что предшествующая теорема остается справедливой и в том случае, если S есть сумма (быть может, несчетного) множества попарно непересекающихся подмножеств $\{S_\alpha\}$ из Σ, каждое из которых σ-конечно, причем если $E \in \Sigma$ и если $\mu(E) < \infty$, то E имеет непустое пересечение самое большее со счетным числом множеств из S_α. Из предшествующего рассуждения видно, что функцию $g \in L_\infty(S, \Sigma, \mu)$ можно определить на каждом из попарно непересекающихся множеств S_α. Так как единственность функции g была установлена для любого пространства с σ-конечной мерой, то единственность ее на S вытекает из того, что каждое множество конечной меры содержится самое большее в счетной сумме множеств S_α σ-конечной меры.

6. Теорема. *Пространство* $L_1(S, \Sigma, \mu)$ *слабо полно.*

Доказательство. Пусть $\{f_n\}$ слабо фундаментальная последовательность в L_1. По лемме III. 8.5, существует такое σ-конечное множество $E \in \Sigma$, что все функции f_n принадлежат замкнутому подпространству $L_1(E) = L_1(E, \Sigma(E), \mu)$ пространства $L_1(S, \Sigma, \mu)$, состоящему из всех функций, обращающихся в нуль вне E. Если мы сможем найти такое $f \in L_1(E)$, к которому последовательность $\{f_n\}$ слабо сходится, то тем самым мы покажем, что L_1 слабо полно. Так как последовательность $\{f_n\}$ является слабо фундаментальной в $L_1(E)$ по теореме II.3.11, то все рассуждение можно проводить в пространстве $L_1(E)$. Таким образом, не ограничивая этим общности, мы можем предполагать, что мера в пространстве (S, Σ, μ) σ-конечна.

По теореме II. 3.20, последовательность $\{f_n\}$ ограничена в L_1. Так как характеристическая функция произвольного множества $E \in \Sigma$ принадлежит $L_\infty(S, \Sigma, \mu)$, то число $\lambda(E) = \lim\limits_{n\to\infty} \int_E f_n(s)\mu(ds)$

существует для каждого E из Σ. По теореме III.7.2, функция λ абсолютно непрерывна относительно μ. Таким образом, по теореме Радона — Никодима (III.10.2), в $L_1(S, \Sigma, \mu)$ существует такая функция f, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(s)\,\mu(ds) = \int_E f(s)\,\mu(ds), \quad E\in\Sigma.$$

Следовательно,

$$\text{(I)} \qquad \lim_{n\to\infty} \int_S f_n(s)\,h(s)\,\mu(ds) = \int_S f(s)\,h(s)\,\mu(ds)$$

для каждой μ-простой функции h. Так как, по теореме II.3.20, последовательность $\{f_n\}$ ограничена в L_1, то из теоремы II.1.18 будет следовать, что равенство (I) справедливо для каждого $h\in L_\infty$, если только мы покажем, что множество μ-простых функций всюду плотно в L_∞.

Итак, пусть $\varepsilon > 0$ и h — произвольный элемент из L_∞. Не ограничивая этим общности, мы можем предположить, что h ограничено. Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — конечное семейство попарно непересекающихся борелевских множеств поля скаляров, диаметр каждого из которых меньше чем ε и таких, что $h(S)\subseteq\bigcup A_i$. Пусть $\alpha_i\in A_i$, $B_i=f^{-1}(A_i)$ и $h_\varepsilon(s)=\alpha_i$, если $s\in B_i$. Тогда, по теоремам III.6.10 и III.5.17, h_ε будет μ-простой функцией, для которой $|h-h_\varepsilon|_\infty<\varepsilon$. Таким образом, равенство (I) справедливо для каждого $h\in L_\infty$, и наша теорема вытекает из теоремы 5, ч. т. д.

7. Теорема. *Последовательность* $\{f_n\}$ *из* $L_1(S, \Sigma, \mu)$ *в том и только в том случае является слабо фундаментальной, если она ограничена и предел* $\lim_n \int_E f_n(s)\,\mu(ds)$ *существует для каждого* E *из* Σ.

Последовательность $\{f_n\}$ *в том и только в том случае слабо сходится к некоторому элементу* f *из* $L_1(S, \Sigma, \mu)$, *если она ограничена и*

$$\int_E f(s)\,\mu(ds) = \lim_n \int_E f_n(s)\,\mu(ds), \quad E\in\Sigma.$$

Доказательство. В двух последних абзацах доказательства теоремы 6 было показано, что ограниченная последовательность из $L_1(S, \Sigma, \mu)$ слабо сходится к некоторому элементу f из $L_1(S, \Sigma, \mu)$, если только $\int_E f_n(s)\,\mu(ds)\to\int_E f(s)\,\mu(ds)$ для каждого E из Σ. Для того чтобы доказать необходимость наших условий, предположим, что $\{f_n\}$ есть слабо фундаментальная последовательность в $L_1(S, \Sigma, \mu)$. В силу теоремы 6 последовательность $\{f_n\}$ слабо сходится к некоторой функции f из $L_1(S, \Sigma, \mu)$. Так как для каждого E из Σ

интеграл $\int_E f_n(s)\,\mu(ds)$ линейно и непрерывно зависит от f, то $\int_E f_n(s)\,\mu(ds) \to \int_E f(s)\,\mu(ds)$. Ограниченность последовательности $\{f_n\}$ вытекает из принципа равномерной ограниченности (II.3.27), ч. т. д.

8. Лемма. *Пусть Σ — некоторая σ-алгебра множеств, порождаемая подалгеброй Σ_1 и $\{\mu_n\}$ — последовательность счетно аддитивных функций множества, определенных на Σ и со значениями в B-пространстве $\mathfrak{X}$. Предположим, что счетная аддитивность μ_n равномерна относительно n и что $\lim_{n\to\infty} \mu_n(E)$ существует для $E \in \Sigma_1$. Тогда $\lim_{n\to\infty} \mu_n(E)$ существует для $E \in \Sigma$.*

Доказательство. Обозначим через Σ_2 совокупность всех множеств E из Σ, для которых $\lim_{n\to\infty} \mu_n(EF)$ существует для каждого $F \in \Sigma_1$, и через Σ_3 — совокупность всех множеств E из Σ_2, для которых $EF \in \Sigma_2$ для каждого $F \in \Sigma_2$. Ясно, что если F_1 и F_2 принадлежат Σ_3, то и $F_1F_2 \in \Sigma_3$. Ясно также, что если $F_1 \in \Sigma_3$, то и $S - F_1 \in \Sigma_3$, и что если $F_1, F_2 \in \Sigma_3$, причем $F_1F_2 = \varnothing$, то $F_1 \cup F_2 \in \Sigma_3$. Отсюда вытекает, что Σ_3 является алгеброй. Если $\{F_k\}$ есть последовательность попарно непересекающихся элементов из Σ_3, сумма которых есть F, и если $E_1 \in \Sigma_1$ и $E \in \Sigma_2$, то, по предположению,

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \mu_n(F_kEE_1) = \mu_n(FEE_1)$$

равномерно относительно n. Так как $\lim_{n\to\infty} \mu_n(F_kEE_1)$ существует для каждого k, то, по лемме I.7.6, и $\lim_{n\to\infty} \mu_n(FEE_1)$ существует. Таким образом, Σ_3 является σ-алгеброй. Так как ясно, что $\Sigma_3 \supseteq \Sigma_1$, то $\Sigma_3 \supseteq \Sigma$, откуда и вытекает желаемый результат, ч. т. д.

9. Теорема. *Подмножество K из $L_1(S, \Sigma, \mu)$ в том и только в том случае является слабо компактным, если оно ограничено и счетная аддитивность интегралов $\int_E f(s)\,\mu(ds)$ равномерна относительно f из K.*

Доказательство. Утверждение, что счетная аддитивность интегралов $\int_E f(s)\,\mu(ds)$ равномерна относительно f из K, означает, что для каждой убывающей последовательности $\{E_n\}$ из Σ, имеющей пустое пересечение, предел

$$\lim_n \int_{E_n} f(s)\,\mu(ds) = 0$$

равномерен относительно f из K. Предположим теперь, что K слабо компактно. По лемме II.3.27, K ограничено. Если счетная аддитивность интегралов $\int_E f(s)\,\mu(ds)$ неравномерна относительно f из K, то найдется такое число $\varepsilon > 0$, такая убывающая последовательность $E_n \in \Sigma$ с пустым пересечением и такие функции f_n из K, что $\left|\int_{E_n} f_n(s)\,\mu(ds)\right| \geqslant \varepsilon$ для $n = 1, 2, \ldots$. Так как K слабо компактно, то можно предположить, что последовательность $\{f_n\}$ слабо сходится. Тогда предел $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(s)\,\mu(ds)$ существует для каждого $E \in \Sigma$, что противоречит следствию III.7.4.

Обратно, предположим, что K ограничено и что интегралы $\int_E f(s)\,\mu(ds)$ счетно аддитивны равномерно относительно f из K. Пусть $f_n \in K$; предположим, что $|f_n| \leqslant C$ для $n=1, 2, \ldots$. По лемме III.8.5, существует такое σ-конечное множество S_1 из Σ и такая σ-подалгебра Σ_1 в $\Sigma(S_1)$, порождаемая счетной алгеброй $\Sigma_0 = \{E_n\}$, что все эти функции обращаются в нуль вне S_1 и $\{f_n\} \subset L_1(S_1, \Sigma_1, \mu)$. Выберем теперь с помощью канторовского диагонального процесса такую подпоследовательность $\{g_n\}$ последовательности $\{f_n\}$, что предел

$$\lambda(E) = \lim_{n\to\infty} \int_E g_n(s)\,\mu(ds)$$

существует для каждого E из Σ_0. По лемме 8, предел $\lambda(E)$ существует и для каждого E из Σ_1. Таким образом, по теоремам 6 и 7, последовательность $\{g_n\}$ слабо сходится в $L_1(S_1, \Sigma_1, \mu)$. Но так как $L_1(S_1, \Sigma_1, \mu)$ есть линейное подпространство в $L_1(S, \Sigma, \mu)$, то последовательность $\{g_n\}$ слабо сходится и в $L_1(S, \Sigma, \mu)$, ч. т. д.

10. Следствие. *Если $\{f\}$ есть слабо компактное множество функций из $L_1(S, \Sigma, \mu)$, то и множество функций $\{|f(\cdot)|\}$ слабо компактно.*

Доказательство. Прежде всего ясно, что множество $\{|f(\cdot)|\}$ ограничено. По теореме 9, достаточно доказать, что если E_n есть убывающая последовательность множеств с пустым пересечением, то $\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} |f(s)|\,\mu(ds) = 0$ равномерно относительно f из множества

$K = \{f\}$. Но если это не так, то одно из утверждений:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} |\operatorname{Re} f(s)| \mu(ds) = 0 \text{ равномерно относительно } f \in K$$

или

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} |\operatorname{Im} f(s)| \mu(ds) = 0 \text{ равномерно относительно } f \in K$$

не справедливо. Без ограничения общности можно предположить, что не справедливо первое. Пусть $E \in \Sigma$, $f \in K$; определим множества $E^+ = \{s \in E \mid \operatorname{Re} f(s) \geqslant 0\}$ и $E^- = \{s \in E \mid \operatorname{Re} f(s) < 0\}$, тогда

$$\int_E |\operatorname{Re} f(s)| \mu(ds) = \int_{E^+} \operatorname{Re} f(s) \mu(ds) - \int_{E^-} \operatorname{Re} f(s) \mu(ds).$$

Так как найдется такое $\varepsilon > 0$, что для каждого n существует такое $f_n \in K$, что $\int_{E_n} |\operatorname{Re} f_n(s)| \mu(ds) \geqslant \varepsilon$, то мы можем найти такое подмножество A_n множества E_n, что

$$\left| \int_{A_n} f_n(s) \mu(ds) \right| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как множество K слабо компактно, то некоторая подпоследовательность последовательности $\{f_n\}$ слабо сходится, и без ограничения общности можно предположить, что сама последовательность $\{f_n\}$ слабо сходится. По теореме 7, последовательность $\left\{ \int_E f_n(s) \mu(ds) \right\}$ сходится для каждого $E \in \Sigma$. Положим

$$\lambda_n(E) = \int_E |f_n(s)| \mu(ds), \quad \lambda(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\lambda_n(E)}{\lambda_n(S)}.$$

Так как $ca(S, \Sigma)$ является B-пространством (см. § III.7), то λ принадлежит $ca(S, \Sigma)$. Так как ясно, что каждая функция множества $\int_E f_n(s) \mu(ds)$ абсолютно непрерывна относительно λ, то, по теореме III.7.2, $\lim_{\lambda(E)\to 0} \int_E f_n(s) \mu(ds) = 0$ равномерно относительно n. Так как E_n есть убывающая последовательность с пустым пересечением, то $\lambda(E_n) \to 0$, а так как $A_n \subseteq E_n$, то $\lambda(A_n) \to 0$. Следовательно, $\lim_{m\to\infty} \int_{A_m} f_n(s) \mu(ds) = 0$ равномерно относительно n, что противоречит неравенству $\left| \int_{A_n} f_n(s) \mu(ds) \right| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$, ч. т. д.

11. Следствие. *Если множество K из $L_1(S, \Sigma, \mu)$ слабо компактно, то*

$$\lim_{\mu(E)\to 0} \int_E f(s)\,\mu(ds) = 0$$

равномерно относительно f из K. Если $\mu(S) < \infty$, то, обратно, это условие является и достаточным для того, чтобы ограниченное множество K было слабо компактным.

Доказательство. Пусть K — слабо компактное множество из $L_1(S, \Sigma, \mu)$. Если абсолютная непрерывность относительно μ интегралов $\int_E f(s)\,\mu(ds)$ не является равномерной относительно f из K, то найдется такое $\varepsilon > 0$, такая последовательность $\{E_n\}$ из Σ и такая последовательность $\{f_n\}$ из K, что $\mu(E_n) \to 0$ и $\int_{E_n} f_n(s)\,\mu(ds) \geqslant \varepsilon$. Мы можем и будем предполагать, что последовательность $\{f_n\}$ слабо сходится и, значит, что последовательность $\left\{\int_E f_n(s)\,\mu(ds)\right\}$ сходится для каждого E из Σ. Однако это противоречит теореме III.7.2. Обратно, если $\mu(S) < \infty$ и если абсолютная непрерывность относительно μ интегралов $\int_E f(s)\,\mu(ds)$ равномерна относительно f из некоторого ограниченного множества K, то счетная аддитивность этих интегралов равномерна относительно f из K и, по теореме 9, K слабо компактно, ч. т. д.

12. Теорема. *Пусть последовательность f_n слабо сходится к функции f из $L_1(S, \Sigma, \mu)$. Тогда, для того чтобы f_n сильно сходилась к f, необходимо и достаточно, чтобы f_n сходилась к f по мере на каждом измеримом множестве конечной меры.*

Доказательсто. Если $|f_n - f| \to 0$, то, по теореме III.3.6, f_n сходится к f по мере. Чтобы доказать обратное, заметим прежде всего, что так как f_n слабо сходится к f, то последовательность $\{f_n - f\}$ слабо компактна и, значит, по следствию 10, последовательность $\{|f_n(\cdot) - f(\cdot)|\}$ тоже слабо компактна. Но тогда, по следствию 11, абсолютная непрерывность интегралов $\int_E |f_n(s) - f(s)|\,\mu(ds)$ равномерна относительно n. Так как на каждом измеримом множестве конечной меры $f_n - f$ по мере сходится к нулю, то в силу теоремы III.3.6 $\int_E |f_n(s) - f(s)|\,\mu(ds) \to 0$ для каждого множества E конечной меры μ. Так как, далее, функции f, f_n, $n=1, 2, \ldots$ $\ldots$, μ-интегрируемы, то все они обращаются в нуль вне некоторого σ-конечного множества E. Пусть $\{E_m\}$ — возрастающая последовательность множеств, сумма которых совпадает с E и для которых $\mu(E_m) < \infty$. Так как последовательность $\{|f_n(\cdot) - f(\cdot)|\}$ слабо компактна, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое m (теорема 9), что

$$\int\limits_{S-E_m} |f_n(s) - f(s)| \, \mu(ds) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Так как $\int\limits_{E_m} |f_n(s) - f(s)| \, \mu(ds) \to 0$ при $n \to \infty$, то найдется такое $n(\varepsilon)$, что

$$|f_n - f| = \int\limits_{S-E_m} |f_n(s) - f(s)| \, \mu(ds) +$$

$$+ \int\limits_{E_m} |f_n(s) - f(s)| \, \mu(ds) < \varepsilon, \quad n \geqslant n(\varepsilon),$$

и, следовательно, $|f_n - f| \to 0$, ч. т. д.

13. Следствие. *Если каждая точка имеет ненулевую меру, то слабая и сильная сходимости последовательности из* $L_1(S, \Sigma, \mu)$ *совпадают*

Доказательство. Пусть последовательность f_n слабо сходится к f из $L_1(S, \Sigma, \mu)$. Так как функции f_n, f интегрируемы, то $f_n(s) = f(s) = 0$ для каждой точки s, для которой $\mu(\{s\}) = \infty$. Если $0 < \mu(\{s\}) < \infty$, то

$$\mu(\{s\}) f_n(s) = \int\limits_{\{s\}} f_n(s) \, \mu(ds) \to \int\limits_{\{s\}} f(s) \, \mu(ds) = \mu(\{s\}) f(s),$$

и, следовательно, $f_n(s) \to f(s)$ для каждой точки s, для которой $0 < \mu(\{s\}) < \infty$. Таким образом (III.6.13(b)), f_n сходится по мере к f на каждом множестве конечной меры. Наше утверждение вытекает теперь из теоремы 12, ч. т. д.

14. Следствие. *Слабая и сильная сходимости последовательности из* l_1 *совпадают.*

15. Определение. Пусть (S, Σ, μ) — пространство с положительной мерой. Обозначим через Σ^* его лебеговское расширение, и пусть Σ_1 означает совокупность всех таких множеств $E \subseteq S$, для которых $AE \in \Sigma^*$ для каждого множества $A \in \Sigma$ с мерой $\mu(A) < \infty$. Ясно, что Σ_1 является σ-алгеброй, содержащей Σ. Функция μ_1, опреде-

ляемая на Σ_1 равенствами

$$\mu_1(E) = \begin{cases} \mu(E), & E \in \Sigma^*, \\ \infty, & E \in \Sigma_1 - \Sigma, \end{cases}$$

является счетно аддитивным продолжением μ с Σ^* на Σ_1. Пространство $ba(S, \Sigma, \mu)$ состоит из таких определенных на Σ ограниченных аддитивных функций, которые обращаются в нуль на множествах нулевой меры μ. Нормой элемента из $ba(S, \Sigma, \mu)$ служит его полная вариация.

Необходимо отметить, что если мера μ в пространстве (S, Σ, μ) σ-конечна, то $(S, \Sigma^*, \mu) = (S, \Sigma_1, \mu_1)$. Если S есть множество целых чисел, Σ — совокупность всех подмножеств множества S и $\mu(E)$ — мощность множества $E \in \Sigma$, то $L_\infty(S, \Sigma, \mu)$ есть просто l_∞. Поэтому теоремы, относящиеся к L_∞, применимы также и к l_∞.

16. Теорема. *Между пространствами $L_\infty^*(S, \Sigma, \mu)$ и $ba(S, \Sigma_1, \mu_1)$ существует изометрический изоморфизм, определяемый равенством*

$$[*] \qquad x^* f = \int_S f(s)\,\lambda(ds), \quad f \in L_\infty(S, \Sigma, \mu).$$

Доказательство. Пусть $f \in L_\infty(S, \Sigma, \mu)$. Тогда найдется такое нуль-множество N, что множество $f(S-N)$ ограничено. Множество $f(S-N)$ содержится, следовательно, в сумме попарно непересекающихся борелевских множеств $A_1, \ldots, A_n$ из поля скаляров, диаметр каждого из которых меньше наперед заданного положительного числа ε. По теореме III.6.10, множество $E_i = f^{-1}(A_i)$ принадлежит Σ_1. Если $\alpha_i \in A_i$ и $f_\varepsilon = \Sigma \alpha_i \chi_{E_i}$, то $|f(s) - f_\varepsilon(s)| < \varepsilon$ для $s \in S - N$. Так как для $\lambda \in ba(S_1, \Sigma_1, \mu_1)$ каждое нуль-множество относительно меры μ_1 является нуль-множеством и относительно λ, то функция f λ-измерима. Так как функция f существенно ограничена относительно λ, то она λ-интегрируема. По теореме III.2.20 (a) $\left|\int_S f(s)\,\lambda(ds)\right| \leqslant |f|\,|\lambda|$. Таким образом, равенством [*] определяется такой элемент $x^* \in L_\infty^*(S, \Sigma, \mu)$, для которого $|x^*| \leqslant |\lambda|$.

Пусть E_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, — попарно непересекающиеся множества из Σ_1, такие, что $\sum_{i=1}^n |\lambda(E_i)| > |\lambda| - \varepsilon$, а $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — скаляры, для которых $|\alpha_i| = 1$, $\alpha_i \lambda(E_i) = |\lambda(E_i)|$; положим $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{E_i}$, где χ_E — характеристическая функция множества E. Тогда $f \in L_\infty(S, \Sigma, \mu)$, $|f| = 1$ и $|x^*| \geqslant x^* f \geqslant |\lambda| - \varepsilon$. Следовательно, $|x^*| = |\lambda|$.

Ясно, что отображение $\lambda \to x^*$ пространства $ba(S, \Sigma_1, \mu_1)$ в $L_\infty^*(S, \Sigma, \mu)$, определяемое равенством [*], взаимно однозначно.

Для того чтобы убедиться в том, что произвольное x^* из $L^*_\infty(S, \Sigma, \mu)$ соответствует некоторому λ из $ba(S, \Sigma_1, \mu_1)$, положим $\lambda(E) = x^*\chi_E$ для $E \in \Sigma_1$, и пусть $f \in L_\infty(S, \Sigma, \mu)$. Тогда $|f_\varepsilon - f| < \varepsilon$, и ясно, что $x^*f_\varepsilon = \int_S f_\varepsilon(s)\lambda(ds)$. При $\varepsilon \to 0$ получаем, что $\int_S f(s)\lambda(ds) = x^*f$, ч. т. д.

Теперь мы займемся изучением бикомпактности в L_p-пространствах. Здесь могут быть даны различного типа критерии бикомпактности. Прежде всего мы установим основанный на лемме IV.5.4 совершенно общий критерий, который, однако, иногда трудно применим в специальных случаях.

17. Определение. Пусть (S, Σ, μ) — пространство с положительной мерой и Π — множество всех конечных последовательностей $\pi = \{E_1, \ldots, E_n\}$ попарно непересекающихся множеств из Σ конечной положительной меры. Множество Π упорядочим, полагая, что неравенство $\pi \leqslant \pi_1$ означает, что каждое множество из π, за исключением некоторого множества меры нуль, является суммой множеств из π_1. Для каждого $\pi = \{E_1, \ldots, E_n\} \in \Pi$ и каждой определенной на S функции f, интегрируемой на каждом множестве конечной меры, определим функцию f_π следующим образом:

$$\pi(s) = \begin{cases} 0, & \text{если } s \notin \bigcup_{i=1}^{n} E_i, \\ \dfrac{1}{\mu(E_i)} \displaystyle\int_{E_i} f(s)\mu(ds), & \text{если } s \in E_i, \end{cases}$$

и положим $U_\pi f = f_\pi$.

18. Теорема. *Пусть* $1 \leqslant p < \infty$ *и* U_π — *отображение, введенное в предшествующем определении. Тогда для того, чтобы ограниченное множество* K *из* $L_p(S, \Sigma, \mu)$ *было относительно бикомпактным, необходимо и достаточно, чтобы* $\lim_\pi U_\pi f = f$ *равномерно на* K. *Если* $\mu(S) < \infty$, *то этот критерий справедлив также и в* $L_\infty(S, \Sigma, \mu)$.

Доказательство. Пусть $1 \leqslant p < \infty$, χ_E — характеристическая функция множества E и $f \in L_p(S, \Sigma, \mu)$. Тогда для $\pi = \{E_1, \ldots, E_n\}$ мы имеем

$$U_\pi f = \sum_{i=1}^{n} \left\{\mu(E_i)^{-1} \int_{E_i} f(s)\mu(ds)\right\} \chi_{E_i},$$

$$|U_\pi f| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \int_{E_i} |f(s)|\mu(ds)\mu(E_i)^{-1+\frac{1}{p}}.$$

Следовательно, на основании неравенства Гёльдера (III.3.2)

$$|U_\pi f| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \Big[\int_{E_i} |f(s)|^p \mu(ds) \Big]^{\frac{1}{p}} \leqslant |f|.$$

Так как отображение U_π имеет конечномерную область значений, то оно отображает ограниченные множества в относительно бикомпактные. Если $\pi = \{E_1, \ldots, E_n\}$ и $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$, то при $\pi_1 \geqslant \pi$, $U_{\pi_1} f = f$. Таким образом, для простых функций $U_\pi f \to f$. Так как $|U_\pi| \leqslant 1$, то, по следствию III.3.8, $U_\pi f \to f$ для всех f из $L_p(S, \Sigma, \mu)$. Следовательно, если $1 \leqslant p < \infty$, наша теорема вытекает из леммы IV.5.4. В случае когда $\mu(S) < \infty$, аналогичное рассуждение проходит и для $L_\infty(S, \Sigma, \mu)$, ч. т. д.

Если S есть n-мерное евклидово пространство, Σ — алгебра борелевских множеств из S и μ — лебеговская мера, то можно дать более удобные условия. Для этого нам понадобится следующая лемма.

19. Лемма. *Если μ — регулярная конечно аддитивная функция множества, определенная на некоторой алгебре Σ подмножеств нормального пространства S, то для $1 \leqslant p < \infty$ множество ограниченных непрерывных функций из $L_p(S, \Sigma, \mu)$ всюду плотно в $L_p(S, \Sigma, \mu)$.*

Доказательство. Так как множество μ-интегрируемых простых функций всюду плотно в $L_p(S, \Sigma, \mu)$ (III.3.8), то достаточно доказать, что характеристическую функцию множества $E \in \Sigma$, для которого $v(\mu, E) < \infty$, можно аппроксимировать ограниченными непрерывными функциями из $L_p(S, \Sigma, \mu)$. Пусть F_1 и F_2 — такие множества из Σ, что $\overline{F}_1 \subseteq E$, $\overline{F}_2 \in E'$ и

$$v(\mu, E - F_1) < \varepsilon, \quad v(\mu, E' - F_2) < \varepsilon.$$

По теореме Урысона (I.5.2), существует определенная на S непрерывная функция f, такая, что $0 \leqslant f(s) \leqslant 1$, $f(s) = 1$, если $s \in \overline{F}_1$, и $f(s) = 0$, если $s \in \overline{F}_2$. Таким образом,

$$\int_S |f(s) - \chi_E(s)|^p v(\mu, ds) \leqslant 2\varepsilon, \qquad \text{ч. т. д.}$$

20. Теорема. *Пусть S — числовая прямая, $\mathscr{B}$ — алгебра борелевских подмножеств S и μ — лебеговская мера множеств из $\mathscr{B}$. Предположим, что $1 \leqslant p < \infty$. Тогда множество K из $L_p(S, \mathscr{B}, \mu)$ относительно бикомпактно в том и только в том случае, если оно ограничено и*

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x+y)-f(y)|^p\,dy=0$ *равномерно относительно* $f\in K$ *и*

(b) $\lim\limits_{A\to\infty}\Big[\int\limits_{A}^{\infty}+\int\limits_{-\infty}^{-A}|f(y)|^p\,dy\Big]=0$ *равномерно относительно* $f\in K$.

Доказательство. Предположим, что K относительно бикомпактно. Тогда K ограничено. Пусть дано $\varepsilon>0$. По теореме I.6.15 и следствию III.3.8 можно найти конечное множество μ-интегрируемых простых функций $g_1, \ldots, g_N$ такое, что для каждого $f\in K$ найдется j такое, что $|f-g_j|<\varepsilon$. Можно также предположить, что каждое g_j является линейной комбинацией характеристических функций интервалов. Из этого предположения вытекает, что все функции $g_1, \ldots, g_N$ обращаются в нуль вне некоторого достаточно большого интервала $[-A_0, +A_0]$, так что

$$\int\limits_{A}^{\infty}+\int\limits_{-\infty}^{-A}|f(y)|^p\,dy=\int\limits_{A}^{\infty}+\int\limits_{-\infty}^{-A}|f(y)-g_j(y)|^p\,dy\leqslant|f-g_j|^p\leqslant\varepsilon^p$$

при $A\geqslant A_0$, чем и доказано утверждение (b).

Для того чтобы доказать (a), заметим прежде всего, что если χ есть характеристическая функция конечного интервала, то

$$\lim_{x\to 0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\chi(x+y)-\chi(y)|^p\,dy=0.$$

Таким образом, $\lim\limits_{x\to 0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|g_j(x+y)-g_j(y)|^p\,dy=0$ для каждой функции g_j; и, следовательно,

$$\overline{\lim_{x\to 0}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(x+y)-f(y)|^p\,dy\leqslant\overline{\lim_{x\to 0}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(x+y)-g_j\,(x+y|^p\,dy+$$
$$+\overline{\lim_{x\to 0}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(y)-g_j(y)|^p\,dy+\overline{\lim_{x\to 0}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|g_j(x+y)-g_j(y)|^p\,dy=$$
$$=2\,|f-g_j|^p\leqslant 2\varepsilon^p$$

равномерно относительно $f\in K$. Этим доказано утверждение (a).

Для того чтобы доказать обратное, будем рассуждать следующим образом. Мера μ является единственной мерой Бореля, определяемой тем условием, что для каждого интервала $[a, b]$ $\mu([a, b])=b-a$. Следовательно, для каждого борелевского множества E $\mu(x+E)=\mu(E)$. По лемме III.10.8, оператор T_x, определяемый равенством $(T_x f)(y) = f(y+x)$, устанавливает некоторое отображение пространства L_p в L_p, причем $|T_x f| = |f|$. Так как равенство $\lim\limits_{x\to y}|T_x f - T_y f| = 0$ очевидно, если f является характеристической функцией некоторого ограниченного интервала, то, по следствию III.3.8, $\lim\limits_{x\to y}|T_x f - T_y f| = 0$ для всех $f \in L_p$. Таким образом, для каждого фиксированного f $T_x f$ является непрерывной функцией вещественного переменного x. Из предположения (а) вытекает, что $\lim\limits_{x\to 0} T_x f = f$ равномерно относительно f из K. Положим

$$I_a f = \frac{1}{2a}\int\limits_{-a}^{+a} T_y f\, dy;$$

тогда, по теореме III.2.20 (а),

$$|I_a f - f| \leqslant \sup_{-a\leqslant x\leqslant +a} |T_x f - f|,$$

так что при $a \to \infty$ $I_a f \to f$ равномерно относительно $f \in K$.

Так как $T_x f$ непрерывно относительно x, то функции h_n, определяемые равенством $h_n(x) = T_{\frac{ja}{n}} f$, если $\frac{ja}{n} \leqslant x < \frac{(j+1)a}{n}$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, сходятся к $T_x f$ равномерно на каждом конечном интервале изменения x. Следовательно,

$$I_a f = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2a}\int\limits_{-a}^{+a} h_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2an}\sum_{j=-n}^{n-1} T_{\frac{ja}{n}} f,$$

где пределы берутся в метрике пространства L_p. По теореме III.3.6 и следствию III.6.13, переходя к подпоследовательности $\{n_i\}$ последовательности $1, 2, \ldots$, будем иметь

$$(I_a f)(x) = \lim_{i\to\infty}\frac{1}{2an}\sum_{j=-n_i}^{n_i-1} f\left(\frac{ja}{n} + x\right)$$

для почти всех x. Если функция f непрерывна, то предел в правой части, очевидно, равен

$$\frac{1}{2a}\int\limits_{-a}^{+a} f(y+x)\,dy = \frac{1}{2a}\int\limits_{x-a}^{x+a} f(y)\,dy.$$

Таким образом, если мы определим элемент $\varphi^*_{a,x} \in L^*_p$, полагая $\varphi^*_{a,x}(g) = \frac{1}{2a}\int\limits_{x-a}^{x+a} g(y)\,dy$ для $g \in L_p$, то, по теореме 1, $|\varphi^*_{a,x}| = (2a)^{-\frac{1}{p}}$ и $(I_a f)(x) = \varphi^*_{a,x} f$ для $-\infty < a < +\infty$, непрерывной функции f, принадлежащей к L_p и почти всех относительно μ точек x. В силу леммы 19 существует последовательность $\{f_n\}$ непрерывных функций, сходящаяся в L_p к заданной функции f. Тогда $I_a f_n \to I_a f$ и $\varphi^*_{a,x} f_n \to \varphi^*_{a,x} f$. Если мы выберем подпоследовательность в соответствии с III.6.13, то мы будем также иметь, что $(I_a f_n)(x) \to (I_a f)(x)$ для почти всех x. Отсюда вытекает, что $(I_a f)(x) = \varphi^*_{a,x} f$ для почти всех x. Так как функция в левой части этого равенства определена лишь с точностью до множества меры нуль, то мы можем считать, что это равенство справедливо для всех a и x, т. е. что

$$(I_a f)(x) = \varphi^*_{a,x} f, \quad -\infty < a, x < +\infty, \quad f \in L_p.$$

Так как $T_x T_y f = T_{x+y} f = T_y T_x f$, то из теоремы III.2.19 (c) вытекает, что

$$T_y I_a f = T_y \left[\frac{1}{2a} \int_{-a}^{+a} T_x f \, dx \right] = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{+a} T_x (T_y f) \, dx = I_a (T_y f)$$

для $f \in L_p$. Если задано $\delta_1 > 0$, мы можем найти столь малое δ_2, что $|T_y f - f| < \delta_1$ при $|y| < \delta_2$ и $f \in K$. Тогда для каждого фиксированного $a > 0$

$$|(I_a f)(x+y) - (I_a f)(x)| = |\{I_a (T_y f - f)\}(x)| =$$

$$= |\varphi^*_{a,x}(T_y f - f)| < \delta_1 (2a)^{-\frac{1}{p}}.$$

Следовательно, для каждого a множество функций $I_a f$, $f \in K$, равностепенно непрерывно.

Пусть дано $\varepsilon > 0$. Выберем a настолько малым, что $|I_a f - f| < \varepsilon$ для $f \in K$. Выберем затем A столь большим, что

$$\int_{-\infty}^{-A} + \int_{A}^{+\infty} |f(x)|^p \, dx < \varepsilon, \quad \text{для} \quad f \in K.$$

Используя затем теоремы 6.17 и I.6.15, найдем конечное множество непрерывных функций $g_1, \ldots, g_N$, определенных на интервале $[-A, +A]$ и таких, что $|g_j(x) - I_a f(x)| < \varepsilon A^{-\frac{1}{p}}$ для $-A \leqslant x \leqslant A$. Теперь если мы положим, что $v_j(x) = g_j(x)$ для $x \in [-A, +A]$ и $v_j(x) = 0$ вне этого интервала, то ясно, что $v_j \in L_p$ и что $|f - v_j| < 3\varepsilon$. Таким образом, относительная бикомпактность K вытекает из теоремы I.6.15, ч. т. д.

Теорема 20 легко может быть обобщена на n-мерное евклидово пространство. Мы сформулируем это обобщение, предоставляя читателю соответствующую модификацию деталей доказательства теоремы 20.

21. Теорема. *Пусть S — n-мерное евклидово пространство, $\mathscr{B}$ — алгебра борелевских подмножеств S и μ — лебеговская мера множеств*

из $\mathscr{B}$. Тогда подмножество K пространства $L_p(S, \mathscr{B}, \mu)$ относительно бикомпактно в том и только в том случае, если оно ограничено и нижеследующие пределы существуют равномерно относительно f из K:

$$\text{(a)} \lim_{x_1 \to 0, \ldots, x_n \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} | f(x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n) - $$
$$- f(y_1, \ldots, y_n)|^p = 0 \text{ и}$$

$$\text{(b)} \lim_{A \to \infty} \int_{S-C_A} |f(y)|^p \, dy = 0,$$

где C_A есть куб $-A \leqslant x_1, \ldots, x_n \leqslant A$.

Последним обобщением в этом круге идей является обобщение на произвольные группы с инвариантной мерой; этот вопрос будет рассмотрен в гл. XI.

Теперь мы рассмотрим еще некоторые свойства пространства L_p, вытекающие из его естественной упорядоченности; они окажутся полезными в дальнейшем. Мы говорим, что функция $f \in L_p(S, \Sigma, \mu)$ *положительна*, и пишем $f \geqslant 0$, если $f(s) \geqslant 0$ для почти всех $s \in S$. Если f_1 и f_2 — две вещественные или комплексные функции в $L_p(S, \Sigma, \mu)$, такие, что $f_1 - f_2 \geqslant 0$, то мы пишем $f_1 \geqslant f_2$ или $f_2 \leqslant f_1$. Ясно, что это отношение превращает L_p в частично упорядоченное (I.2.1) пространство. Докажем полноту L_p относительно этой упорядоченности (I.12).

22. Теорема. *Пусть (S, Σ, μ) — пространство с положительной мерой. Тогда вещественное частично упорядоченное пространство $L_p(S, \Sigma, \mu)$, $1 \leqslant p < \infty$, является полной структурой.*

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать, что если $\{f_\alpha\}$ есть множество функций из L_1, таких, что $0 \leqslant f_\alpha \leqslant g_0$ для некоторого $g_0 \in L_1$, то $\sup_\alpha \{f_\alpha\}$ существует в L_1. Далее, так как функция g_0 интегрируема, то она обращается в нуль почти всюду вне некоторого множества σ-конечной меры. Мы можем, следовательно, предположить, что (S, Σ, μ) является пространством с σ-конечной положительной мерой. Далее, отображение $f_\alpha \to \lambda_\alpha$, определяемое равенством $\lambda_\alpha(E) = \int_E f_\alpha(s) \mu(ds)$, $E \in \Sigma$, является взаимно однозначным и сохраняющим порядок отображением пространства $L_1(S, \Sigma, \mu)$ в пространство $ca(S, \Sigma)$ с его естественной упорядоченностью (III.7). Таким образом, если g_0 отображается в $\lambda_0 \in ca(S, \Sigma)$, то $0 \leqslant \lambda_\alpha \leqslant \lambda_0$. Пользуясь следствием III.7.6, положим, что $\nu = \sup\{\lambda_\alpha\}$, т. е. что ν есть верхняя грань множества $\{\lambda_\alpha\}$. Тогда $\nu \in ca(S, \Sigma)$ и $0 \leqslant \lambda_\alpha \leqslant \nu \leqslant \lambda_0$. Так как функция λ_0 абсолютно непрерывна относительно μ, то такова же и ν, и из теоремы Радона — Никодима (III.10.7) вытекает, что существует такое $h \in L_1$, что $\nu(E) = \int_E h(s)\,\mu(ds)$. То обстоятельство, что $h = \sup_\alpha \{f_\alpha\}$, вытекает из равенства $\nu = \sup_\alpha \{\lambda_\alpha\}$ и того, что рассматриваемое отображение L_1 в ca сохраняет порядок, ч. т. д.

23. Теорема. *Если (S, Σ, μ) — пространство с σ-конечной положительной мерой, то вещественное частично упорядоченное пространство $L_\infty(S, \Sigma, \mu)$ является полной структурой.*

Доказательство. Пусть $S_n \in \Sigma$, причем $\mu(S_n) < \infty$, $S_n \subseteq S_{n+1}$ и $S = \bigcup S_n$. Пусть, далее, f_α, $g_0 \in L_\infty$ и $f_\alpha \leqslant g_0$. Так как $L_\infty(S_n, \Sigma, \mu) \subseteq L_1(S_n, \Sigma, \mu)$, то из предшествующей теоремы вытекает существование $h_n \in L_1(S_n, \Sigma, \mu)$, являющегося верхней гранью множества $\{f_\alpha\}$, рассматриваемого в $L_1, (S_n, \Sigma, \mu)$. В частности, для каждого α $f_\alpha(s) \leqslant h_n(s) \leqslant g_0(s)$ для почти всех $s \in S_n$, и, следовательно, $h_n \in L_\infty(S_n, \Sigma, \mu)$. Мы можем считать, что h_n обращается в нуль вне S_n, и тогда $h_n \in L_\infty(S, \Sigma, \mu)$. Для почти всех $s \in S$ $\{h_n(s)\}$ будет возрастающей последовательностью вещественных чисел; положим $h(s) = \lim_n h_n(s)$. Функция h измерима, а так как $h(s) \leqslant g_0(s)$ для почти всех s, то она существенно ограничена. Согласно определению функции h, она является мажорантой для множества $\{f_\alpha\}$. Если h не является верхней гранью для $\{f_\alpha\}$, то найдется такое измеримое множество конечной положительной меры $E \subseteq S_{n_0}$ и такая измеримая функция h', что для каждого α $f_\alpha(s) \leqslant h'(s) < h(s) = h_{n_0}(s)$ для почти всех s из E. Но это противоречит определению h_{n_0}, ч. т. д.

Некоторые относящиеся к материалу этого параграфа дополнительные результаты будут даны в § 11. Заметим, что, по доказанному в теореме 16, L_1^{**} является некоторым пространством функций множества, а, значит, по следствию III.7.6, обладает тем свойством, что те его подмножества, для которых существуют мажоранты, имеют и верхние грани. Пространство L_1 можно вложить естественным отображением $\varkappa$ в пространство L_1^{**}. Для дальнейших приложений важно знать, что верхняя грань подмножества в L_1 в то же самое время служит для него верхней гранью и в пространстве L_1^{**}.

24. Теорема. *Пусть (S, Σ, μ) — пространство с σ-конечной положительной мерой. Если $\varkappa$ есть естественный изометрический изоморфизм пространства $L_1 = L_1(S, \Sigma, \mu)$ в L_1^{**} и если множество $\{f_\alpha\}$ имеет мажоранту в частично упорядоченном пространстве L_1, то $\varkappa(\sup_\alpha \{f_\alpha\}) = \sup_\alpha \{\varkappa f_\alpha\}$.*

Доказательство. Так как мера μ в (S, Σ, μ) σ-конечна, то $L_1^{**}(S, \Sigma, \mu) = ba(S, \Sigma^*, \mu)$ есть пространство всех ограниченных аддитивных функций, определенных на лебеговском расширении Σ^* алгебры Σ и обращающихся в нуль на множествах из Σ^*, мера μ которых равна нулю. Если $f \in L_1$, то, как легко видеть, $\varkappa f$ есть функция множества, определяемая соотношением $(\varkappa f)(E) = \int_E f(s)\mu(ds)$, $E \in \Sigma^*$. В частности, $\varkappa f$ счетно аддитивна и абсолютно непрерывна. Предположим, что $0 \leqslant f_0 = \sup_\alpha \{f_\alpha\}$. Так как $\varkappa$ сохраняет отношение порядка, то ясно, что $0 \leqslant \lambda = \sup_\alpha \{\varkappa f_\alpha\} \leqslant \varkappa f_0$, где верхняя грань берется в частично упорядоченном пространстве $ba(S, \Sigma^*, \mu)$. Отсюда вытекает, что λ счетно аддитивна и абсолютно непрерывна относительно μ; следовательно, по теореме Радона—Никодима, существует такая функция $g \in L_1(S, \Sigma^*, \mu)$, что $\lambda(E) = \int_E g(s)\mu(ds)$, $E \in \Sigma^*$. Так как $\varkappa g = \lambda \leqslant \varkappa f_0$, то $g \leqslant f_0$. С другой стороны, так как $\varkappa f_\alpha \leqslant \varkappa g$, то $f_\alpha \leqslant g$ для каждого α. Таким образом, $f_0 = \sup_\alpha f_\alpha \leqslant g$, так что $f_0 = g$, ч. т. д.

Теперь мы покажем, что пространство линейных отображений одного L_p-пространства в другое тоже является частично упорядоченным пространством. Мы говорим, что линейное отображение $T: L_p \to L_q$ *положительно*, и пишем $T \geqslant 0$, если из того, что $f \in L_p$ и $f \geqslant 0$, вытекает, что $Tf \geqslant 0$. Аналогично $T_1 \geqslant T_2$, или $T_2 \leqslant T_1$, означает, что $T_1 - T_2 \geqslant 0$. Легко видеть, что если $T \geqslant 0$, то T отображает вещественные функции в вещественные.

25. Лемма. *Пусть (S, Σ, μ) — пространство с положительной мерой и $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Предположим, что $f_1 + f_2 = \sum_{k=1}^{n} g_k$, где f_j, g_k — положительные элементы из $L_p(S, \Sigma, \mu)$. Тогда в $L_p(S, \Sigma, \mu)$ существуют такие положительные элементы h_{jk}, $j = 1, 2$, $k = 1, \ldots, n$, что*

$$f_j = \sum_{k=1}^{n} h_{jk}, \quad g_k = h_{1k} + h_{2k}, \quad j = 1, 2, \ k = 1, \ldots, n.$$

Доказательство. Предположим, что $n = 2$. Так как $0 \leqslant f_1, g_1 \leqslant f_1 + g_1$, то $\inf\{f_1, g_1\}$ и $\sup\{f_1, g_1\}$ существуют в $L_p(S, \Sigma, \mu)$. Положим $h_{11} = \inf\{f_1, g_1\}$, $h_{12} = f_1 - h_{11}$, $h_{21} = g_1 - h_{11}$ и $h_{22} = (f_1 + f_2) - \sup\{f_1, g_1\}$. Наше утверждение вытекает теперь из определения h_{jk} и того обстоятельства, что

$$\inf\{f_1, g_1\} + \sup\{f_1, g_1\} = f_1 + g_1.$$

Соответствующее утверждение для произвольного n получается по индукции из доказанного результата при $n = 2$, если записать $f_1 + f_2 = \sum_{k=1}^{n-1} g_k + (g_n + g_{n+1})$, ч. т. д.

26. Теорема. *Пусть* (S, Σ, μ) — *пространство с положительной мерой, и пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *и* $1 \leqslant q < \infty$. *Тогда частично упорядоченное пространство линейных отображений вещественного пространства* $L_p(S, \Sigma, \mu)$ *в вещественное пространство* $L_q(S, \Sigma, \mu)$ *является полной структурой. Если мера* μ *в* (S, Σ, μ) *σ-конечна, то наше утверждение справедливо также и при* $q = \infty$.

Доказательство. Достаточно показать, что множество $\{T_\alpha\}$ положительных линейных отображений имеет нижнюю грань T_0, также являющуюся линейным отображением. Сначала мы определим T_0 для положительных элементов f из $L_p(S, \Sigma, \mu)$. Для этого предположим, что $f = \sum_{i=1}^{n} g_i$ есть разложение f в конечную сумму положительных функций g_i из $L_p(S, \Sigma, \mu)$. Положим

$$T_0 f = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} T_{\alpha_i} g_i \right\},$$

где нижняя грань берется по всем таким конечным разложениям $f = \sum g_i$ функции f и произвольным выборам T_{α_i}, $i = 1, \ldots, n$. Ясно, что $0 \leqslant T_0 f \leqslant T_\alpha f$ для любого α. Далее, если S есть произвольная миноранта для $\{T_\alpha\}$, то

$$Sf = \sum_{i=1}^{n} S g_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} T_{\alpha_i} g_i$$

для любого разложения f, и, следовательно, $Sf \leqslant T_0 f$. Теперь мы покажем, что T_0 аддитивно на положительных элементах. Пусть $f_j \in L_p(S, \Sigma, \mu)$, $f_j \geqslant 0$, $j = 1, 2$, и пусть $f_1 = \sum_{i=1}^{n} g_{1i}$, $f_2 = \sum_{i=1}^{n} g_{2i}$ — разложения f_1 и f_2 на положительные элементы. Тогда $\sum g_{1i} + \sum g_{2i}$ будет разложением функции $f_1 + f_2$, и, следовательно,

$$T_0(f_1 + f_2) \leqslant T_0(f_1) + T_0(f_2).$$

Для того чтобы доказать обратное неравенство, предположим, что $f_1 + f_2 = \sum_{k=1}^{n} g_k$ есть разложение функции $f_1 + f_2$ в такую сумму, где $g_k \geqslant 0$. В силу предшествующей леммы существует такое множество h_{jk}, $j = 1, 2$, $k = 1, \ldots, n$, положительных элементов из $L_p(S, \Sigma, \mu)$, что $f_j = \sum_{k=1}^{n} h_{jk}$ и $g_k = h_{1k} + h_{2k}$. Следовательно,

$$T_0(f_1) + T_0(f_2) \leqslant \sum_{k=1}^{n} T_{\alpha_k}(h_{1k}) + \sum_{k=1}^{n} T_{\alpha_k}(h_{2k}) = \sum_{k=1}^{n} T_{\alpha_k}(g_k),$$

и так как $T_0(f_1+f_2)$ является нижней гранью сумм такого вида, то мы получаем, что

$$T_0(f_1)+T_0(f_2)\leqslant T_0(f_1+f_2).$$

Следовательно, отображение T_0 аддитивно на положительных функциях, а его однородность по отношению к положительным скалярам очевидна.

Если f_1, f_2, g_1, g_2 положительны и $f_1-f_2=g_1-g_2$, то $f_1+g_2=g_1+f_2$, $T_0f_1+T_0g_2=T_0g_1+T_0f_2$ и $T_0f_1-T_0f_2=T_0g_1-T_0g_2$. Таким образом, T_0 можно определить для вещественных функций f, полагая $T_0f=$ $=T_0f_1-T_0f_2$, где функции f_1, f_2 положительны и $f=f_1-f_2$. Эта продолженная функция T_0 является линейным отображением, и из определения ее ясно, что она служит нижней гранью для отображений T_α, ч. т. д.

9. Пространства функций множества

В этом параграфе мы рассмотрим специальные свойства пространства $ba(S, \Sigma)$, состоящего из ограниченных аддитивных скалярных функций, определенных на некоторой алгебре множеств, и пространство $ca(S, \Sigma)$, состоящее из счетно аддитивных мер, определенных на некоторой σ-алгебре. Первые теоремы устанавливают условия слабой компактности множеств из $ca(S, \Sigma)$.

1. Теорема. *Для того чтобы множество $K\subseteq ca(S, \Sigma)$ было слабо компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограниченным и чтобы счетная аддитивность μ на Σ была равномерной относительно $\mu\in K$.*

Доказательство. Если множество K слабо компактно, то, по лемме II.3.27, оно ограничено. Если счетная аддитивность μ не является равномерной относительно $\mu\in K$, то существует такая убывающая последовательность множеств $E_n\in\Sigma$ с пустым пересечением, такая последовательность $\{\mu_n\}\subseteq K$ и такое число $\varepsilon>0$, что

$$|\mu_n(E_n)|>\varepsilon,\quad n=1, 2, \ldots .$$

Все функции μ_n абсолютно непрерывны относительно следующим образом определяемой меры:

$$\lambda(E)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}v(\mu_n, E)\quad E\in\Sigma,$$

и, значит, все они принадлежат подпространству $ca(S, \Sigma, \lambda)$, состоящему из всех абсолютно непрерывных относительно λ функций из $ca(S, \Sigma,)$. В силу теоремы Радона — Никодима (III.10.2) формула

$$\mu(E) = \int_E f(s)\,\lambda(ds)$$

устанавливает изометрический изоморфизм между $ca(S, \Sigma, \lambda)$ и $L_1(S, \Sigma, \lambda)$. Поэтому соответствующее множеству K множество $K' \subset L_1(S, \Sigma, \lambda)$ слабо компактно. По теореме 8.9, счетная аддитивность $\mu(E) = \int_E f(s)\,\lambda(ds)$ равномерна относительно $f \in K'$ и, следовательно, равномерна относительно $\mu \in K$.

Обратно, предположим, что множество $K \subset ca(S, \Sigma)$ удовлетворяет двум нашим условиям, и пусть $\mu_n \in K$, $n = 1, 2, \ldots$. Используя определенную выше меру λ, мы получим такие функции $f_n \in L_1(S, \Sigma, \lambda)$, что

$$\mu_n(E) = \int_E f_n(s)\,\lambda(ds), \quad |\mu_n| = |f_n|, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

По теореме 8.9, последовательность $\{f_n\}$ содержит подпоследовательность, слабо сходящуюся в $L_1(S, \Sigma, \lambda)$. Так как пространства $ca(S, \Sigma, \lambda)$ и $L_1(S, \Sigma, \lambda)$ эквивалентны, то последовательность $\{\mu_n\}$ содержит подпоследовательность, слабо сходящуюся в $ca(S, \Sigma, \lambda)$, а следовательно, и в $ca(S, \Sigma)$, ч. т. д.

Другой полезный критерий слабой компактности в $ca(S, \Sigma)$ содержится в следующей теореме.

2. Теорема. *Подмножество $K \subset ca(S, \Sigma)$ в том и только в том случае слабо компактно, если оно ограничено и если для некоторого положительного λ из $ca(S, \Sigma)$ предел $\lim_{\lambda(E)\to 0} \mu(E) = 0$ равномерно относительно μ из K.*

Доказательство. Достаточность этих условий, так же как и необходимость ограниченности, вытекает из теоремы 1. Итак, пусть K слабо компактно и $M = \sup|\mu|$, $\mu \in K$.

Прежде всего мы покажем, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое конечное множество $\mu_1, \ldots, \mu_n$ элементов из K и такое $\delta > 0$, что $|\mu(E)| < \varepsilon$ для каждого μ из K, если только $v(\mu_i, E) < \delta$, $i = 1, \ldots, n$. Действительно, если это неверно, то найдется такое $\varepsilon > 0$ и для каждого $\mu_1 \in K$ такое множество $E_1 \in \Sigma$ и такое $\mu_2 \in K$, что

$$v(\mu_1, E_1) < \frac{1}{2}, \quad |\mu_2(E_1)| \geqslant \varepsilon.$$

Точно так же найдется такое множество $E_2 \in \Sigma$ и такой элемент $\mu_3 \in K$, что

$$v(\mu_1, E_2) < \frac{1}{2^2}, \quad v(\mu_2, E_2) < \frac{1}{2^2}, \quad |\mu_3(E_2)| \geqslant \varepsilon.$$

Так можно определить последовательности $\{\mu_n\} \subseteq K$, $\{E_n\} \subseteq \Sigma$, для которых

$$v(\mu_i, E_n) < \frac{1}{2^n}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$|\mu_{n+1}(E_n)| \geqslant \varepsilon.$$

Так как K слабо компактно, то последовательность $\{\mu_n\}$ содержит слабо сходящуюся подпоследовательность. Для упрощения обозначений предположим, что последовательность $\{\mu_n\}$ сама слабо сходится. Положим $\lambda_0 = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} v(\mu_j)$, тогда каждое μ_n абсолютно непрерывно относительно λ_0. Так как последовательность $\{\mu_n\}$ слабо сходится, то $\lim \mu_n(E)$ существует для каждого $E \in \Sigma$. По теореме Витали — Хана — Сакса (III.7.2), $\lim\limits_{\lambda_0(E)\to 0} \mu_n(E) = 0$ равномерно относительно n. Далее,

$$\lambda_0(E_n) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^j} \cdot \frac{1}{2^n} + \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} M < \frac{1+M}{2^n},$$

и, следовательно, $\lim\limits_{n} \mu_m(E_n) = 0$ равномерно относительно $m = 1, 2, \ldots$. Но это противоречит тому, что $|\mu_{n+1}(E_n)| \geqslant \varepsilon > 0$, и доказывает наше утверждение. Пусть теперь $\delta_n > 0$ и $\mu_1^{(n)}, \ldots, \mu_{m_n}^{(n)}$ — такие элементы из K, что $|\mu(E)| < \frac{1}{n}$ для каждого μ из K и каждого множества $E \in \Sigma$, для которого $v(\mu_i^{(n)}, E) < \delta_n$, $i = 1, \ldots m_n$. Если λ определяется формулой

$$\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m_n} \frac{1}{2^n} \frac{1}{2^i} v(\mu_i^{(n)}),$$

то, по лемме III.4.13, каждое μ из K абсолютно непрерывно относительно λ, т. е. $K \subset ca(S, \Sigma, \lambda)$. По теореме Радона — Никодима (III.10.2), формулой

$$\mu(E) = \int_E f(s) \lambda(ds)$$

устанавливается эквивалентность пространства $ca(S, \Sigma, \lambda)$ и $L_1(S, \Sigma, \lambda)$, и, таким образом, наша теорема вытекает из следствия 8.11, ч. т. д.

3. Следствие. *В предположениях теоремы* 2 λ *можно выбрать так, что*

$$\lambda(E) \leqslant \sup_{\mu \in K} |\mu(E)|, \quad E \in \Sigma.$$

Доказательство. В виду леммы III.1.5 и формулы, определяющей λ, мера $\frac{\lambda}{4}$ обладает нужными свойствами, ч. т. д.

4. Теорема. *Пространство* $ca(S, \Sigma)$ *слабо полно.*

Доказательство. Если $\{\mu_n\}$ — слабо фундаментальная последовательность в $ca(S, \Sigma)$, то предел $\lim \mu_n(E)$ существует для каждого E из Σ и, по лемме II.3.27, последовательность $\{\mu_n\}$ ограничена. В силу следствия III.7.4 счетная аддитивность $\{\mu_n(E)\}$ равномерна относительно $n=1, 2, \ldots$, и, следовательно, по теореме 1, слабо фундаментальная последовательность $\{\mu_n\}$ слабо сходится, ч. т. д.

5. Теорема. *Последовательность* $\{\mu_n)$ *из* $ca(S, \Sigma)$ *слабо сходится (к* μ*) в том и только в том случае, если она ограничена и предел* $\lim\limits_n \mu_n(E)$ *существует (и равен* $\mu(E)$*) для каждого* E *из* Σ.

Доказательство. Пусть λ определено как в доказательстве теоремы 1. Тогда $ca(S, \Sigma, \lambda)$ эквивалентно $L_1(S, \Sigma, \lambda)$, и последовательность

$$\mu_n(E) = \int\limits_E f_n(s)\,\lambda(ds), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

слабо сходится в $ca(S, \Sigma, \lambda)$ (а значит, и в $ca(S, \Sigma)$) в том и только в том случае, если последовательность $\{f_n\}$ слабо сходится в $L_1(S, \Sigma, \lambda)$. Справедливость нашей теоремы вытекает теперь из теоремы 8.7, ч. т. д.

6. Определение. Пусть (S, Σ, μ) — пространство с мерой. Множество $E \in \Sigma$ называется *атомом*, если $\mu(E) \neq 0$ и если из того, что $F \in \Sigma$, $F \subseteq E$, вытекает, что либо $\mu(F) = \mu(E)$, либо $\mu(F) = 0$.

Ясно, что если E_1 и E_2 — атомы, то либо $\mu(E_1E_2) = 0$, либо $\mu(E_1 \Delta E_2) = 0$. Пространство с конечной положительной мерой может иметь не более чем счетное множество несовпадающих атомов.

7. Лемма. (*Сакс*). *Пусть* (S, Σ, μ) — *пространство с конечной положительной мерой. Если* $\varepsilon > 0$, *то* S *является суммой конечного числа попарно непересекающихся множеств* $E_1, \ldots, E_n \in \Sigma$ *таких, что каждое* E_i *либо является атомом, либо имеет меру* $\mu(E_i) \leqslant \varepsilon$.

Доказательство. Пусть ε — произвольное положительное число. Так как $\mu(S) < \infty$, то имеется самое большее конечное число несовпадающих атомов $\{E_1, \ldots, E_p\}$, мера которых превосходит ε. Тогда множество $A = S - \bigcup\limits_{i=1}^{p} E_i$ не содержит атомов, мера которых больше ε.

Теперь мы покажем, что каждое измеримое подмножество B множества A содержит такое множество F, что $0<\mu(F)\leqslant\varepsilon$. Допустим, что это не так, т. е. что некоторое множество B не содержит множества из Σ положительной меры, не превосходящей ε. Тогда так как множество B не может быть атомом, то оно содержит такое множество G_1 из Σ, что $0<\mu(G_1)<\mu(B)$. Множество $B-G_1$ тоже не содержит множества из Σ положительной меры, не превосходящей ε. Существует, следовательно, такое множество $G_2\in\Sigma$, что $G_2\subseteq B-G_1$ и $0<\mu(G_2)<$ $<\mu(B-G_1)$. Продолжая это рассуждение по индукции, мы получим последовательность $\{G_n\}$ попарно непересекающихся множеств положительной меры. Так как $\Sigma\mu(G_i)<\infty$, то для достаточно большого n необходимо будет $\mu(G_n)<\varepsilon$. Это противоречие доказывает существование такого множества $F\subseteq B$, что $0<\mu(F)\leqslant\varepsilon$.

Для каждого множества $E\in\Sigma$ обозначим $\beta(E)=\sup\mu(H)$, где H пробегает все измеримые подмножества из E, для которых $\mu(H)\leqslant\varepsilon$. Тогда, как показывает предшествующее рассуждение, $0<\beta(G)\leqslant\varepsilon$ для каждого измеримого подмножества G множества A, для которого $\mu(G)>0$. Определим по индукции такую последовательность $\{F_n\}$ попарно непересекающихся измеримых подмножеств множества A, что

$$\frac{1}{2}\beta\Big(A-\bigcup_{i=1}^{n}F_i\Big)\leqslant\mu(F_{n+1})\leqslant\varepsilon,\qquad n=1,\ 2,\ \ldots .$$

Положим $F_0=A-\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}F_i$, так что

$$\beta(F_0)\leqslant\beta\Big(A-\bigcup_{i=1}^{n}F_i\Big)\leqslant 2\mu(F_{n+1}),\qquad n=1,\ 2,\ \ldots .$$

Однако $\Sigma\mu(F_i)\leqslant\mu(A)<\infty$ и, следовательно, $\lim\mu(F_n)=0$. Последнее неравенство показывает, что $\beta(F_0)=0$. Следовательно, $\mu(F_0)=0$. Пусть r — такое целое число, что $\sum\limits_{i=r+1}^{\infty}\mu(F_i)<\varepsilon$, и пусть $E_{p+1}=$ $=F_1,\ \ldots,\ E_{p+r}=F_r$ и $E_{p+r+1}=\bigcup\limits_{i=r+1}^{\infty}F_i\cup F_0$. Множества $E_1,\ \ldots$ $\ldots,\ E_n$, где $n=p+r+1$, удовлетворяют требованиям леммы, ч. т. д.

Следующая теорема представляет собой замечательное усиление принципа равномерной ограниченности для пространства $ca(S,\ \Sigma)$.

8. Теорема. (*Никодим*). *Если $M\subseteq ca(S,\Sigma)$ и если для каждого E из Σ найдется такое $N(E)<\infty$, что*

$$|\mu(E)|<N(E),\qquad \mu\in M,$$

то существует такое число $N<\infty$, что

$$|\mu(E)|<N,\ \ \mu\in M,\qquad E\in\Sigma.$$

Доказательство. Если это не верно, то для каждого натурального n существует такая мера $\mu_n \in M$ и такое множество $G_n \in \Sigma$, что $|\mu_n(G_n)| > n$. Пусть $\lambda \in ca(S, \Sigma)$ определяется формулой

$$\lambda(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{v(\mu_n, E)}{v(\mu_n, S)}, \qquad E \in \Sigma;$$

рассмотрим полное метрическое пространство $\Sigma(\lambda)$, определенное в § III.7. Положим

$$H_m = \{E \in \Sigma(\lambda) \,|\, |\mu_n(E)| \leqslant m, \quad n = 1, 2, \ldots\},$$

так что H_m есть замкнутое множество в $\Sigma(\lambda)$ и $\Sigma(\lambda) = \bigcup_{m=1}^{\infty} H_m$. По теореме Бэра о категориях (I.6.9), существует такое множество $B_0 \in \Sigma(\lambda)$ и такое число $\varepsilon > 0$, что если $\lambda(E \Delta B_0) \leqslant \varepsilon$, то $|\mu_n(E)| \leqslant m_0$ для некоторого натурального m_0 и всех натуральных чисел $n = 1, 2, \ldots$.

Пусть множество A будет атомом относительно λ. Если $F \subseteq A$, $F \in \Sigma$ и для некоторого n $0 < v(\mu_n, F) < v(\mu_n, A)$, то $0 < \lambda(F) < \lambda(A)$. Следовательно, для каждого n либо $v(\mu_n, A) = 0$, либо A является атомом относительно $v(\mu_n)$. В последнем случае если $F \subseteq A$, $F \in \Sigma$ и $\mu_n(F) \neq 0$, то $v(\mu_n, A - F) = 0$, откуда следует, что $\mu_n(F) = \mu_n(A)$, т. е. что A является атомом относительно μ_n. Пусть, далее, $\varepsilon > 0$ и $E_1, \ldots, E_m$ — определенное леммой 7 разложение S относительно меры λ. Пусть $E \in \Sigma$ и $F_k = E \cap E_k$ для $k = 1, \ldots, m$. Если $E_1, \ldots, E_p$ — атомы из множества $\{E_1, \ldots, E_m\}$, для которых $\lambda(E_i) \geqslant \varepsilon$, то, согласно сделанным выше замечаниям,

$$|\mu_n(F_k)| \leqslant |\mu_n(E_k)| < N(E_k), \qquad k = 1, \ldots, p.$$

Далее, если $k = p + 1, \ldots, m$, то $\lambda(F_k) \leqslant \varepsilon$. Запишем

$$F_k = (B_0 \cup F_k) - (B_0 - F_k).$$

Так как $B_0 \Delta (B_0 \cup F_k) = F_k - B_0$ и $B_0 \Delta (B_0 - F_k) = B \cap E_k$, то $\lambda(B_0 \Delta (B_0 - F_k))$ и $\lambda(B_0 \Delta (B_0 \cup F_k))$ не превосходят $\lambda(F_k) \leqslant \lambda(E_k) \leqslant \varepsilon$. Следовательно,

$$|\mu_n(F_k)| \leqslant 2m_0, \qquad k = p + 1, \ldots, m.$$

Таким образом,

$$|\mu_n(E)| \leqslant \sum_{k=1}^{p} N(E_k) + 2m_0(m - p)$$

для любого $E \in \Sigma$ и всех $n = 1, 2, \ldots$. Правая часть этого неравенства не зависит от n, что противоречит предположению о существовании при любом натуральном n такого множества $G_n \in \Sigma$, для которого $|\mu_n(G_n)| > n$, ч. т. д.

Обратимся теперь к исследованию пространства $ba(S, \Sigma)$.

22 Заказ № 1324

9. Теорема. *Пространство* $ba(S, \Sigma)$ *слабо полно. Если* S *является топологическим пространством, то* $rba(S)$ *тоже слабо полно.*

Доказательство. Рассмотрим замкнутое подпространство $B(S, \Sigma)$ пространства $B(S)$. Согласно теоремам 6.18 и 6.20, существует бикомпактное хаусдорфово пространство S_1 такое, что $B(S, \Sigma)$ эквивалентно $C(S_1)$. По теореме 5.1 существует изометрический изоморфизм $x^* \longleftrightarrow \mu$ между $B^*(S, \Sigma)$ и $ba(S, \Sigma)$, определяемый равенством $x^*\chi_E = \mu(E)$, $E \in \Sigma$. Следовательно, так как $B(S, \Sigma)$ эквивалентно $C(S_1)$, то $ba(S, \Sigma)$ эквивалентно $rca(S_1)$ (теорема 6.3). Но $rca(S_1)$, будучи замкнутым подпространством пространства счетно аддитивных мер на борелевских множествах из S_1, по теореме 4, слабо полно. Следовательно, $ba(S, \Sigma)$ тоже слабо полно.

Так как $rba(S)$ есть замкнутое подпространство в $ba(S, \Sigma)$, где алгебра Σ порождается замкнутыми подмножествами топологического пространства S, то $rba(S)$ слабо полно, ч. т. д.

Важным моментом в доказательстве теоремы 9 является установление изометрического изоморфизма между пространствами $B(S, \Sigma)$ и $C(S_1)$, где S_1 есть соответствующее бикомпактное хаусдорфово пространство. Теперь мы рассмотрим свойства пространства S_1, вытекающие из существования этого изоморфизма, и рассмотрим подробнее изоморфное отображение пространства $ba(S, \Sigma)$ на $rca(S_1)$. Полученные при этом результаты будут использованы для дальнейшего изучения свойств пространства $ba(S, \Sigma)$. Пусть H — изоморфное отображение пространства $B(S, \Sigma)$ на $C(S_1)$, и пусть $E \in \Sigma$. Заметим, что если χ_E есть характеристическая функция множества E, то $H(\chi_E)$ непрерывна на S_1 и $(H(\chi_E))^2 = H(\chi_E^2) = H(\chi_E)$. Следовательно, $H(\chi_E)(s_1)$ равно либо нулю, либо единице для каждого $s_1 \in S_1$, т. е. $H(\chi_E)$ является характеристической функцией некоторого множества $E_1 \subseteq S_1$. Ввиду непрерывности $H(\chi_E)$ множество E_1 должно быть одновременно открытым и замкнутым. Можно поставить вопрос, справедливо ли обратное: если множество E_1 одновременно открыто и замкнуто в S_1, то будет ли $H^{-1}(\chi_{E_1})$ характеристической функцией χ_E некоторого множества $E \in \Sigma$? Иными словами, будет ли из существования изоморфизма H между пространствами $B(S, \Sigma)$ и $C(S_1)$ вытекать существование некоторого изоморфного отображения τ алгебры Σ на алгебру Σ_1 всех одновременно открытых и замкнутых множеств из S_1?

То, что это действительно так, будет доказано ниже, в лемме 10. Кроме того, будет показано, что пространство S_1 вполне разрывно т. е. что множества, одновременно открытые и замкнутые, образуют базис его топологии.

10. Лемма. *Пусть S_1 — бикомпактное хаусдорфово пространство такое, что $B(S, \Sigma)$ изометрически изоморфно $C(S_1)$. Тогда пространство S_1 определено однозначно с точностью до гомеоморфизма и вполне разрывно. Соответствием $\chi_E \to \chi_{E_1}$ устанавливается некоторый изоморфизм τ между алгеброй Σ и алгеброй Σ_1 всех одновременно открытых и замкнутых подмножеств из S_1, т. е. при этом $\tau(E \cup F) = \tau(E) \cup \tau(F)$, $\tau(EF) = \tau(E)\tau(F)$ и $\tau(E') = [\tau(E)]'$ для всех $E, F \in \Sigma$.*

Доказательство. Пусть по-прежнему H обозначает изоморфное отображение пространства $B(S, \Sigma)$ на $C(S_1)$, определяемое теоремами 6.18 и 6.20. Мы уже видели, что множество $\tau(E)$ для $E \in \Sigma$ одновременно открыто и замкнуто. Обратно, пусть E_1 — произвольное множество одновременно открытое и замкнутое в S_1. Мы хотим показать, что множество $E = \tau^{-1}(E_1)$ принадлежит Σ. Так как функция χ_E Σ-измерима, то существует такое конечное разложение S на попарно непересекающиеся множества $A_1, \ldots, A_n$ из Σ и такие скаляры $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, что $\left|\chi_E - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}\right| < \frac{1}{4}$. Заметим прежде всего, что $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, так как если s принадлежит $E - \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, то $\left|\chi_E(s) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}(s)\right| = 1 > \frac{1}{4}$. Мы хотим показать, что если $EA_i \neq \varnothing$, то $A_i \subseteq E$, откуда будет следовать, что множество E является суммой всех содержащихся в нем множеств A_j и, значит, что $E \in \Sigma$.

В самом деле, если $s \in EA_i$ для некоторого i, то $\left|\chi_E(s) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}(s)\right| = |1 - \alpha_i| < \frac{1}{4}$. Следовательно, $|\alpha_i| > \frac{3}{4}$. Однако если $t \in A_i$ и $\chi_E(t) = 0$, то $\left|\chi_E(t) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}(t)\right| = |\alpha_i| < \frac{1}{4}$, что невозможно. Отсюда следует, что $A_i \subseteq E$ и, следовательно, что $E \in \Sigma$. Тот факт, что τ является изоморфизмом между Σ и Σ_1, вытекает из равенств $H(1 - \chi_E) = 1 - H(\chi_E)$, $H(\chi_E \chi_F) = H(\chi_E) H(\chi_F)$ и $H(\chi_E + \chi_F - \chi_{EF}) = H(\chi_E) + H(\chi_F) - H(\chi_E) H(\chi_F)$.

Теперь мы покажем, что пространство S_1 вполне разрывно. Если G_1 — непустое открытое множество в S_1, то пусть $t_0 \in G_1$, а f_1 — непрерывная функция, такая, что $f_1(t_0) = 1$ и $f_1(t) = 0$ для $t \in G_1'$ (см. I.5.2). Как и прежде, мы можем выбрать такую простую функцию

$g=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{A_i}$ из $B(S, \Sigma)$, где $A_1, \ldots, A_n \in \Sigma$, что $|g-H^{-1}(f_1)|<\frac{1}{4}$.

Если $g_1=H(g)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{\tau(A_i)}$, пусть $U_1=\left\{s_1 \,|\, |g_1(s_1)|>\frac{1}{2}\right\}$. Тогда множество U_1 одновременно открыто и замкнуто и $t_0 \in U_1 \subseteq G_1$.

Единственность пространства S_1 вытекает из теоремы 6.26, ч. т. д.

11. Лемма. *В обозначениях леммы 10, предположим, что пространство $B(S, \Sigma)$ изометрически изоморфно $C(S_1)$.*

(a) *Между пространствами $ba(S, \Sigma)$ и $ba(S_1, \Sigma_1)$ существует изометрический изоморфизм T, определяемый равенством $(T\mu)(E_1)=\mu(\tau^{-1}(E_1))$, где $\mu \in ba(S, \Sigma)$ и $E_1 \in \Sigma_1$.*

b) *Каждое $\mu_1 \in ba(S_1, \Sigma_1)$ единственным образом продолжается до регулярной счетно аддитивной меры $\mu_2 \in ca(S_1, \Sigma_2)$, где Σ_2 есть σ-алгебра, порожденная Σ_1. Каждое μ_2 из $ca(S_1, \Sigma_2)$ регулярно. Соответствие U: $\mu_1 \rightarrow \mu_2$ является изометрическим изоморфизмом между $ba(S_1, \Sigma_1)$ и $ca(S_1, \Sigma_2)$.*

c) *Если $E_1 \in \Sigma_1$, то $v(\mu_1, E_1)=v(U(\mu_1), E_1)$ для всех μ_1 из $ba(S_1, \Sigma_1)$.*

Доказательство. Вспомним, что τ есть изоморфизм между Σ и Σ_1; тогда ясно, что отображение T будет изометрическим изоморфизмом между $ba(S, \Sigma)$ и $ba(S_1, \Sigma_1)$, так как

$$|T\mu|=\sup\sum_{i=1}^{n}|(T\mu)(\tau E_i)|=\sup\sum_{i=1}^{n}|\mu(E_i)|=|\mu|,$$

где $\{E_1, \ldots, E_n\}$ есть произвольное разбиение S. Этим доказано утверждение (a).

Так как ясно, что каждое $\mu_1 \in ba(S_1, \Sigma_1)$ регулярно, то, по теореме III.5.13, каждое $\mu_1 \in ba(S_1, \Sigma_1)$ счетно аддитивно. Следовательно, по теореме III.5.14, каждое $\mu_1 \in ba(S_1, \Sigma_1)$ единственным образом продолжается до некоторого регулярного $\mu_2 \in ca(S_1, \Sigma_2)$. С другой стороны, и сужение каждого $\mu_2 \in ca(S_1, \Sigma_2)$ на Σ_1 регулярно. Таким образом, каждое $\mu_2 \in ca(S_1, \Sigma_2)$ регулярно и отображение U является алгебраическим изоморфизмом между $ba(S_1, \Sigma_1)$ и $ca(S_1, \Sigma_2)$. Мы покажем, что U является изометрией. По теореме 6.3,

$$|U\mu_1|=\sup_{|f|=1}\left|\int_{S_1} f(s_1)(U\mu_1)(ds_1)\right|, \qquad f \in C(S_1).$$

Так как, по лемме 10, алгебра Σ_1 является базисом топологии пространства S_1, то ввиду теоремы Стоуна — Вейерштрасса 6.16 (или 6.17) множество функций вида $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{E_i}$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — скаляры и $E_1, \ldots$

..., E_n — попарно непересекающиеся множества из Σ_1, всюду плотно в $C(S_1)$. Кроме того,

$$\int_{S_1} \{\Sigma\alpha_i\chi_{E_i}(s_1)\}(U\mu_1)(ds_1) = \int_{S_1} \{\Sigma\alpha_i\chi_{E_i}(s_1)\}\mu_1(ds_1).$$

Таким образом, если H является изометрическим изоморфизмом между пространствами $B(S, \Sigma)$ и $C(S_1)$, то вследствие (a) и теоремы 5.1

$$|U\mu_1| = \sup_{|f|=1}\left|\int_{S_1} f(s_1)\mu_1(ds_1)\right| = \sup_{|H^{-1}(f)|=1}\left|\int_S (H^{-1}f)(s)(T^{-1}\mu_1)(ds)\right| =$$
$$= |T^{-1}\mu_1| = |\mu_1|.$$

Для того чтобы доказать утверждение (c), предположим, что $\mu_1 \in ba(S_1, \Sigma_1)$ и $E \in \Sigma_1$. Пусть λ_1 определяется равенством $\lambda_1(F) = \mu_1(EF)$, $F \in \Sigma_1$. Тогда если $G \in \Sigma_2$, то $U(\lambda_1)(G) = (U\mu_1)(GE)$. Пользуясь предложением (b), получаем

$$v(U(\mu_1), E) = |U(\lambda_1)| = |\lambda_1| = v(\mu_1, E), \text{ ч. т. д.}$$

12. Теорема. *Для того чтобы подмножество K из $ba(S, \Sigma)$ было слабо компактным, необходимо и достаточно, чтобы в пространстве $ba(S, \Sigma)$ существовало такое неотрицательное μ, что*

$$\lim_{\mu(E)\to 0} \lambda(E) = 0$$

равномерно относительно $\lambda \in K$.

Доказательство. Предположим, что $K \subseteq ba(S, \Sigma)$ слабо компактно, и пусть $V = UT$ — изометрический изоморфизм между пространствами $ba(S, \Sigma)$ и $ca(S_1, \Sigma_2)$. Тогда множество $VK \subseteq ca(S_1, \Sigma_2)$ слабо компактно. По теореме 2, существует такое неотрицательное $\mu_2 \in ca(S_1, \Sigma_2)$, что $\lim\limits_{\mu_2(E)\to 0} \lambda_2(E) = 0$ равномерно относительно $\lambda_2 \in VK$. Ясно, что $\mu = V^{-1}(\mu_2)$ является неотрицательным элементом пространства $ba(S, \Sigma)$ и что $\lim\limits_{\mu(E)\to 0} \lambda(E) = 0$ равномерно относительно $\lambda \in K$.

Для того чтобы доказать обратное, предположим, что существует такое неотрицательное $\mu \in ba(S, \Sigma)$, что $\lim\limits_{\mu(E)\to 0} \lambda(E) = 0$ равномерно относительно λ из K. Тогда $\mu_1 = T(\mu)$ будет такой неотрицательной мерой в $ba(S_1, \Sigma_1)$, что $\lim\limits_{\mu_1(E)\to 0} \lambda_1(E) = 0$, $E \in \Sigma_1$, равномерно относительно $\lambda_1 \in K_1 = T(K)$. Положим, $\mu_2 = U\mu_1$ и $K_2 = UK_1$. Мы покажем, что $\lim\limits_{\mu_2(E)\to 0} \lambda_2(E) = 0$, $E \in \Sigma_2$, равномерно относительно $\lambda_2 \in K_2$, откуда будет следовать, что K_2 слабо компактно в $ca(S_1, \Sigma_2)$ а, значит, K слабо компактно в $ba(S, \Sigma)$.

Если $A \subseteq S_1$, положим $\hat{\mu}_1(A) = \inf \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu_1(E_i)$, где нижняя грань берется по всем таким последовательностям $\{E_i\}$ множеств из Σ_1, для которых $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i \supseteq A$. В силу содержащегося в теореме III.5.8 утверждения о единственности продолжения и по теореме III.5.4 и лемме III.5.5 $\hat{\mu}_1(A)=\mu_2(A)$, если $A \in \Sigma_2$. Пусть задано $\varepsilon > 0$, и пусть $\delta>0$ таково, что из $\mu_1(E)<\delta$ и $E \in \Sigma_1$ вытекает, что $|\lambda_1(E)|<\varepsilon$ для всех λ_1 из K_1, так что $v(\lambda_1, E) < 4\varepsilon$ (см. III.1.5). Тогда если $A \in \Sigma_2$ и $\mu_2(A) < \frac{\delta}{2}$, то существует такая последовательность $\{E_i\}$ множеств из Σ_1, что $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i \supseteq A$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu_1(E_i) < \delta$. Так как μ_1 положительно, то мы можем и будем предполагать, что множества (E_i) попарно не пересекаются. Так как тогда для каждого n $\mu_1(\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i) < \delta$, то $v(\lambda_1, \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i) < 4\varepsilon$ для каждого n и произвольного $\lambda_1 \in K_1$. Следовательно, по лемме 11 (с), $v(\lambda_2, \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i) < 4\varepsilon$ для любого n и $\lambda_2 \in K_2$. Устремляя n к ∞, мы находим, что $v(\lambda_2, \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i) \leqslant 4\varepsilon$, если $\lambda_2 \in K_2$. Следовательно, из того, что $\mu_2(A) < \frac{\delta}{2}$, вытекает, что $|\lambda_2(A)| < 4\varepsilon$ для $\lambda_2 \in K_2$, т. е. мы доказали, что $\lim\limits_{\mu_2(E)\to 0} \lambda_2(E)=0$, $E \in \Sigma_2$, равномерно относительно $\lambda_2 \in K_2$, ч. т. д.

Справедливость следующего предложения вытекает из доказательства теоремы 12.

13. Следствие. *Пусть S_1 — некоторое множество, Σ_1 — некоторая алгебра подмножеств множества S_1 и $\mu_1, \lambda_1 \in ba(S_1, \Sigma_1)$. Предположим, что Σ_2 есть σ-алгебра, порожденная алгеброй Σ_1 и что μ_1 и λ_1 имеют счетно аддитивные продолжения μ_2 и λ_2 на Σ_2. Тогда, для того чтобы λ_1 было абсолютно непрерывно относительно μ_1, необходимо и достаточно, чтобы λ_2 было абсолютно непрерывно относительно μ_2.*

Доказательство. Ясно, что если λ_2 абсолютно непрерывно относительно μ_2, то λ_1 будет абсолютно непрерывным относительно μ_1. Для того чтобы доказать обратное, вспомним (см. замечание, следующее за определением III.4.12), что нам достаточно показать, что если $v(\lambda_1)$ абсолютно непрерывно относительно $v(\mu_1)$, то $v(\lambda_2)$ абсолютно непрерывно относительно $v(\mu_2)$. Однако из последнего абзаца доказательства теоремы 12 видно, что если задано ε и $\delta > 0$ таково, что из неравенства $v(\mu_1, E) < \delta$ вытекает неравенство $v(\lambda_1, E) < \varepsilon$ для $E \in \Sigma_1$, то из неравенства $v(\mu_2, A) < \frac{\delta}{2}$ вытекает неравенство $v(\lambda_2, A) \leqslant 4\varepsilon$ для $A \in \Sigma_2$, ч. т. д.

Теперь мы докажем полученное Бохнером обобщение теоремы Радона — Никодима.

14. Теорема. *Пусть* μ — *некоторый неотрицательный элемент пространства* $ba(S, \Sigma)$; *предположим, что* $\lambda \in ba(S, \Sigma)$ *абсолютно непрерывна относительно* μ. *Тогда для каждого* $\varepsilon > 0$ *найдется такая* μ-*интегрируемая простая функция* f_ε, *что функция* F, *определяемая равенством* $F(E) = \int_E f_\varepsilon(s)\,\mu(ds)$, $E \in \Sigma$, *удовлетворяет неравенству* $|\lambda - F| = v(\lambda - F, S) < \varepsilon$.

Доказательство. Пусть U и T определены, как в лемме 11, так что $V = UT$ является изометрическим изоморфизмом пространства $ba(S, \Sigma)$ на $ca(S_1, \Sigma_2)$. Так как λ, по условию, абсолютно непрерывна относительно μ, то, по лемме 11 (a), $T\lambda$ будет абсолютно непрерывной относительно $T\mu$, а тогда, по следствию 13, функция $\lambda_2 = V\lambda$ абсолютно непрерывна относительно функции $\mu_2 = V\mu$. По теореме Радона — Никодима (III.10.7), существует такая μ_2-интегрируемая функция g, что

$$\lambda_2(E) = \int_E g(s_1)\,\mu_2(ds_1), \quad E \in \Sigma_2.$$

Если $\mu_1 = U^{-1}\mu_2$, то, по лемме III.8.3 и лемме 11 (c), существует такая μ_1-интегрируемая простая функция h_ε, что $|\lambda_1 - F_1| < \varepsilon$, где

$$F_1(E) = \int_E h_\varepsilon(s_1)\,\mu_1(ds_1).$$

Пусть $E_1, \ldots, E_n$ — некоторое разбиение S_1 и $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — скаляры, причем $E_i \in \Sigma_1$ и $\alpha_i = h_\varepsilon(s_i)$, где $s_i \in E_i$. Положим $G_i = \tau^{-1}(E_i) \in \Sigma$, и пусть $f_\varepsilon(s) = \alpha_i$, если $s \in G_i$. Ясно, что f_ε есть μ-интегрируемая простая функция и что если

$$F(G) = \int_G f_\varepsilon(s)\,\mu(ds), \quad G \in \Sigma,$$

то $F_1 = T(F)$. Так как преобразования T и U изометрические, то $|\lambda - F| < \varepsilon$, ч. т. д.

В заключение этого параграфа мы дадим одно решение проблемы 1.8 для случая, когда $\mathfrak{X} = C^*(S)$ и $\mathfrak{Y} = C(S)$. Нижеследующая теорема формулируется в несколько более общей форме для того, чтобы она была применима к функциям множества не только из $C^*(S) = rba(S)$, но и из $ba(S, \Sigma)$.

15. Теорема (*А. Д. Александров*). *Пусть* μ, μ_n, $n = 1, 2, \ldots,$ - *ограниченная последовательность в* $ba(S, \Sigma)$, *где* Σ *означает алгебру, содержащую открытые множества топологического про-*

странства S. Для того чтобы

$$\text{(I)} \qquad \int_S f(s)\mu_n(ds) \to \int_S f(s)\mu(ds), \quad f \in C(S),$$

достаточно, чтобы

$$\text{(II)} \qquad \mu_n(G) \to \mu(G)$$

для каждого такого открытого множества G, для которого $\mu(\overline{G}) = \mu(G)$. Если пространство S нормально, функция μ регулярна и μ, μ_n, $n=1, 2, \ldots$, неотрицательны, то это условие будет также и необходимым.

Доказательство. Соотношение (I) достаточно доказать для вещественной функции f. Итак, предположим, что $-M < f(S) < M$, $s \in S$, и выберем такие $\alpha_0, \ldots, \alpha_m$, что

$$-M = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_m = M,$$

$$\alpha_i - \alpha_{i-1} < \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, m,$$

и

$$\mu(\{s \mid f(s) = \alpha_i\}) = 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Последнему условию можно удовлетворить, так как множества вида $F_\alpha = \{s \mid f(s) = \alpha\}$ попарно не пересекаются и, значит, имеется самое большее счетное число таких значений α, для которых $\mu(F_\alpha) \neq 0$. Если $G_i = \{s \mid f(s) < \alpha_i\}$, то $\overline{G}_i \subseteq \{s \mid f(s) \leqslant \alpha_i\}$. По условию (II), $\mu_n(G_i) \to \mu(G_i)$ и, следовательно,

$$\text{(III)} \qquad \mu_n(G_i - G_{i-1}) \to \mu(G_i - G_{i-1}).$$

Пусть χ_i — характеристическая функция множества $G_i - G_{i-1}$ и $f_\varepsilon = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_i$. Тогда $|f - f_\varepsilon| < \varepsilon$, и из (III) вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_S f_\varepsilon(s)\mu_n(ds) = \int_S f_\varepsilon(s)\mu(ds).$$

Следовательно, если $|\mu_n| \leqslant K$ и $|\mu| \leqslant K$, то

$$\left| \int_S f(s)\mu_n(ds) - \int_S f(s)\mu\, ds \right| \leqslant \left| \int_S (f - f_\varepsilon)(s)(\mu_n - \mu)(ds) \right| + \left| \int_S f_\varepsilon(s)(\mu_n - \mu)(ds) \right| \leqslant 2\varepsilon K + \left| \int_S f_\varepsilon(s)(\mu_n - \mu)(ds) \right|$$

и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \int_S f(s)\mu_n(ds) - \int_S f(s)\mu(ds) \right| \leqslant 2\varepsilon K.$$

Этим доказано утверждение (I).

Теперь мы докажем обратное утверждение в предположении, что пространство S нормально, μ регулярна и что все функции множества μ, μ_n, $n=1, 2,\ldots$, неотрицательны. Пусть G — фиксированное открытое множество в S такое, что $\mu(\bar{G})=\mu(G)$. Зададим $\varepsilon>0$ и выберем такое замкнутое множество F и такое открытое множество H, что

$$F \subseteq G \subseteq \bar{G} \subseteq H,$$

$$\mu(H-F) < \varepsilon.$$

Пусть f и h — такие непрерывные функции, что

$$0 \leqslant f(s), h(s) \leqslant 1, \quad s \in S;$$

$$f(s)=\begin{cases} 1, & s \in F; \\ 0, & s \notin G; \end{cases} \quad h(s)=\begin{cases} 0, & s \notin H; \\ 1, & s \in \bar{G}. \end{cases}$$

Тогда

$$\mu(F) \leqslant \int_S f(s)\,\mu(ds) \leqslant \mu(G)=\mu(\bar{G}) \leqslant \int_S h(s)\,\mu(ds) \leqslant \mu(H).$$

Таким образом,

$$0 \leqslant \int_S \{h(s)-f(s)\}\,\mu(ds) \leqslant \mu(H-F) < \varepsilon.$$

Следовательно, мы имеем

$$\int_S f(s)\,\mu_n(ds) \leqslant \mu_n(G) \leqslant \int_S h(s)\,\mu_n(ds),$$

$$\int_S f(s)\,\mu(ds) \leqslant \mu(G) \leqslant \int_S h(s)\,\mu(ds) \leqslant \int_S f(s)\,\mu(ds)+\varepsilon.$$

Но тогда из предположения (I) вытекает, что

$$\overline{\lim_n}\,|\mu_n(G)-\mu(G)| < \varepsilon,$$

чем и доказано утверждение (II), ч. т. д.

10. Векторнозначные меры

Доказанные в последнем параграфе теоремы о пространствах функций множества дают нам возможность построить более удовлетворительную теорию векторнозначных счетно аддитивных функций множества (короче, *векторнозначных мер*), чем это мы были в состоянии сделать в гл. III. В частности, теперь мы сможем добавить к изложенной в гл. III теории интегрирования удовлетворительную теорию интегрирования скалярных функций по векторнозначной мере.

В этом параграфе через S будет обозначаться некоторое фиксированное множество, через Σ — некоторая σ-алгебра его подмножеств и через μ — определенная на Σ аддитивная функция множества со значениями в некотором B-пространстве $\mathfrak{X}$. Мы предположим, кроме того, что μ *слабо счетно аддитивна, т. е.* что $\sum_{i=1}^{\infty} x^*(\mu E_i) = x^*\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)$ для каждого x^* из $\mathfrak{X}^*$ и каждой последовательности попарно непересекающихся множеств E_n из Σ.

1. Теорема (*Петтис*). *Слабо счетно аддитивная векторнозначная функция множества μ, определенная на σ-алгебре Σ, счетно аддитивна. Кроме того, если λ — конечная положительная мера на Σ и если μ обращается в нуль на множествах нулевой меры λ, то μ абсолютно непрерывна относительно λ.*

Доказательство. Пусть $\{E_n\}$ — последовательность множеств из Σ, обозначим через Σ_0 алгебру, порожденную последовательностью $\{E_n\}$, а через Σ_1 — σ-алгебру, порожденную алгеброй Σ_0. По лемме III.8.4, Σ_0 счетно, и, следовательно, $\mathfrak{X}_1 = \overline{\mathrm{sp}}\,\{\mu(E) | E \in \Sigma_0\}$ является сепарабельным подпространством в $\mathfrak{X}$. Мы утверждаем, что если $F \in \Sigma_1$, то $\mu(F) \in \mathfrak{X}_1$. Действительно, если для некоторого $F \in \Sigma_1$ это не так, то, по следствию II.3.13, существует такое $x^* \in \mathfrak{X}^*$, что $x^*\mu(F) \neq 0$ и $x^*\mu(E) = 0$, $E \in \Sigma_0$, что противоречит содержащемуся в следствии III.5.9 утверждению о единственности продолжения.

Если μ не счетно аддитивна, то для некоторого $\varepsilon > 0$ существует такая убывающая последовательность $\{E_n\}$ из Σ с пустым пересечением, что $|\mu(E_n)| > \varepsilon$, $n = 1, 2, \ldots$. По следствию II.3.14, имеется такая последовательность $x_n^* \in \mathfrak{X}^*$, что $|x_n^*| = 1$ и $x_n^*\mu(E_n) = |\mu(E_n)| > \varepsilon$, $n = 1, 2, \ldots$. Пусть Σ_1 и $\mathfrak{X}_1$ определены, как в предшествующем абзаце, и $\{x_k\}$ — счетное множество, всюду плотное в $\mathfrak{X}_1$. Пользуясь канторовским диагональным процессом, мы можем выделить такую подпоследовательность $\{y_m^* = x_{n_m}^*\}$ последовательности $\{x_n^*\}$, что $\lim_{m\to\infty} y_m^* x_k$ существует для всех k. Так как $|y_m^*| = 1$, $m = 1, 2, \ldots$, то, по теореме II.3.6, $\lim_{m\to\infty} y_m^* x$ существует для каждого $x \in \mathfrak{X}_1$ и, в частности, $\lim_{m\to\infty} y_m^* \mu(E)$ существует для каждого $E \in \Sigma_1$. По следствию III.7.4, множество $\{y_m^*\mu\}$ скалярных мер равномерно счетно аддитивно на Σ_1, вопреки предположению о том, что $y_m^*\mu(E_{n_m}) > \varepsilon$ при $m = 1, 2, \ldots$. Этим доказано наше первое утверждение.

Если μ не абсолютно непрерывна относительно λ, то для некоторого $\varepsilon > 0$ найдется такая последовательность $\{E_n\}$ множеств из Σ, что $\lambda(E_n) < \frac{1}{n}$ и $|\mu(E_n)| > \varepsilon$ при $n = 1, 2, \ldots$. Рассуждая так же, как прежде, получим такую последовательность $\{y_m^*\} \subset \mathfrak{X}^*$, что $\lim_{m\to\infty} y_m^*\mu(E)$ существует для $E \in \Sigma_1$ и $y_m^*\mu(E_{n_m}) > \varepsilon$, $m = 1, 2, \ldots$ Так как $y_m^*\mu(E) = 0$, если $\lambda(E) = 0$, то по лемме III.4.13, каждая мера $y_m^*\mu$ абсолютно непрерывна относительно λ и, по теореме Витали — Хана — Сакса (III.7.2), ее абсолютная непрерывность является равномерной относительно $m = 1, 2, \ldots$. Однако это противоречит тому предположению, что $\lambda(E_{n_m}) < \frac{1}{n_m}$ и $y_m^*\mu(E_{n_m}) > \varepsilon$ при $m = 1, 2, \ldots$. Следовательно, μ абсолютно непрерывна относительно λ, и наша теорема полностью доказана.

2. Следствие. *Векторнозначная мера ограничена, и множество* $\{x^*\mu \mid x^* \in \mathfrak{X}^*, |x^*| \leqslant 1\}$ *скалярных мер является слабо компактным подмножеством в* $ca(S, \Sigma)$.

Доказательство. Так как $|x^*\mu(E)| \leqslant v(x^*\mu, S)$ для каждого x^* и $E \in \Sigma$, то, по теореме II.3.20, существует такая константа M, что $|\mu(E)| \leqslant M$, $E \in \Sigma$. Так как

$$|x^*\mu| = v(x^*\mu, S) \leqslant 4 \sup_{E \subseteq S} |x^*\mu(E)| \leqslant 4M, \quad |x^*| \leqslant 1,$$

то это множество мер ограничено в $ca(S, \Sigma)$. Пусть $\{E_n\}$ — убывающая последовательность множеств из Σ с пустым пересечением. Так как μ счетно аддитивна, то $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0$. Следовательно, $\lim_{n\to\infty} x^*\mu(E_n) = 0$ равномерно относительно $|x^*| \leqslant 1$. Справедливость нашего утверждения вытекает теперь из теоремы 9.1, ч. т. д.

В отличие от случая комплексных мер, полная вариация векторнозначной меры (см. определение III.1.4) не обязательно конечна. Следующим нашим шагом будет построение конечной положительной функции множества, которая будет играть роль полной вариации для векторного случая.

3. Определение. *Полувариация* векторнозначной меры μ определяется равенством

$$\|\mu\|(E) = \sup \left| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i) \right|, \quad E \in \Sigma,$$

где верхняя грань берется по всем конечным наборам скаляров, для которых $|\alpha_i| \leqslant 1$, и всевозможным разбиениям множества E в конечную сумму попарно непересекающихся множеств из Σ.

В следующей лемме перечисляются некоторые элементарные свойства полувариации.

4. Лемма. *Пусть* μ — *векторнозначная мера. Тогда*

(a) $\|\mu\|(E) \geqslant |\mu(E)| \geqslant 0, \ E \in \Sigma$,

(b) $\|\mu\|(E) \leqslant 4 \sup\limits_{F \subseteq E} |\mu(F)| < \infty, \ E \in \Sigma$;

(c) $\|\mu\|(F) \leqslant \|\mu\|(E)$, *если* $F \subseteq E$;

(d) *если* $\{E_i\}$ — *некоторая последовательность множеств из* Σ, *то* $\|\mu\|(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} \|\mu\|(E_i)$.

Замечание. Даже если множества E_i в (d) попарно не пересекаются, это неравенство может быть строгим, т. е. $\|\mu\|$ не обязательно аддитивна. Легко видеть, что $\|\mu\|$ аддитивна в том и только в том случае, если $\|\mu\| = v(\mu)$, так что, если $v(\mu, S) = \infty$, $\|\mu\|$ и *не может быть аддитивной.*

Доказательство. Утверждения (a) и (c) очевидны. Для того чтобы доказать (b), заметим, что ввиду следствия II.3.15 и следствия 2 мы имеем

$$\|\mu\|(E) = \sup \Big| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i) \Big| = \sup_{|x^*| \leqslant 1} \sup \Big| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^* \mu(E_i) \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{|x^*| \leqslant 1} \sup \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| v(x^*\mu, E_i) \leqslant \sup_{|x^*| \leqslant 1} v(x^*\mu, E) \leqslant$$

$$\leqslant 4 \sup_{|x^*| \leqslant 1} \sup_{F \subseteq E} |x^*\mu(F)| = 4 \sup_{F \subseteq E} |\mu(F)| < \infty.$$

Утверждение (d) мы докажем в предположении, что множества E_i попарно не пересекаются. Заметим, что если $F_1, \ldots, F_k$ есть разбиение $E = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$ на попарно непересекающиеся подмножества, то $E_iF_1, \ldots, E_iF_k$ для каждого i будет разбиением множества E_i на попарно непересекающиеся подмножества. Таким образом, если $|\alpha_j| \leqslant 1$ для $j = 1, \ldots, k$, то

$$\Big| \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mu(F_j) \Big| = \Big| \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_j \mu(E_iF_j) \Big| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \|\mu\|(E_i),$$

так что

$$\|\mu\|(E) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \|\mu\|(E_i), \text{ ч. т. д.}$$

Нижеследующая лемма является основной в теории интегрирования скалярных функций по отношению к μ.

5. Лемма. *Существует такая определенная на* Σ *конечная положительная мера* λ, *что*

(a) $\lambda(E) \leqslant \|\mu\|(E), \ E \in \Sigma$;

(b) $\lim\limits_{\lambda(E) \to 0} \|\mu\|(E) = 0$

Доказательство. По следствию 2, теореме 9.2 и следствию 9.3, можно найти такую положительную меру λ, что

$$\lambda(E) \leqslant \sup_{|x^*| \leqslant 1} |x^*\mu(E)| = |\mu(E)| \text{ и что } \lim_{\lambda(E)\to 0} x^*\mu(E) = 0$$

равномерно относительно $|x^*| \leqslant 1$. Таким образом, по лемме 4(a), $\lambda(E) \leqslant \|\mu\|(E)$, и, по лемме 4(b), $\lim\limits_{\lambda(E)\to 0} \|\mu\|(E) = \lim\limits_{\lambda(E)\to 0} |\mu(E)| = 0$, ч. т. д.

Лемма 5 дает нам возможность доказать обещанный в гл. III, § 7, результат, обобщающий теорему Никодима на случай векторнозначных мер.

6. Теорема. *Пусть $\{\mu_n\}$ — последовательность определенных на σ-алгебре Σ векторнозначных мер. Если $\mu(E) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(E)$ существует для каждого $E \in \Sigma$, то μ является векторной мерой на Σ, и счетная аддитивность μ_n равномерна относительно $n = 1, 2, \ldots$.*

Доказательство. Пусть λ_n для каждого n означает положительную конечную меру, соответствующую μ_n по лемме 5. Меру λ определим формулой

$$\lambda(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\lambda_n(E)}{1+\lambda_n(S)}.$$

Тогда каждое μ_n абсолютно непрерывно относительно λ. По следствию III.7.3, μ счетно аддитивна. Если $\{E_m\}$ есть убывающая последовательность множеств из Σ с пустым пересечением, то $\lim\limits_{m\to\infty} \lambda(E_m) = 0$. По теореме Витали — Хана — Сакса (III.7.2), $\lim\limits_{m\to\infty} \mu_n(E_m) = 0$ равномерно относительно $n = 1, 2, \ldots$, ч. т. д.

В оставшейся части параграфа λ будет конечной положительной мерой, связанной с μ по лемме 5.

Теперь мы приступим к изложению теории интегрирования скалярных функций относительно векторной меры μ. *Нуль-множеством* относительно меры μ называется любое подмножество множества $E \in \Sigma$, для которого $\|\mu\|(E) = 0$; в силу леммы 5 мера λ каждого такого множества также равна нулю. Термин «*почти всюду относительно* μ» означает «на дополнении к некоторому нуль-множеству относительно μ» и, следовательно, является синонимом к «почти всюду относительно λ». Символом Σ^* обозначается лебеговское расширение Σ. Таким образом, (III.5.17) Σ^* является σ-алгеброй, состоящей из сумм $E \cup N$, где $E \in \Sigma$, а N есть нуль-множество относительно μ. Определенная на S скалярная функция f является μ-*измеримой*, если для каждого борелевского множества B скаляров $f^{-1}(B) \in \Sigma^*$; по лемме III.6.9, это будет в том и только в том случае, если функция f λ-измерима. Определенная на S скалярная функция f называется *μ-простой*, если она является линейной комбинацией конечного числа характеристических функций множеств из Σ^*; ясно, что это будет в том и только в том случае, если функция f является *λ-простой*. По следствиям III.6.13 и III.6.14, функция f в том и только в том случае будет μ-измеримой, если почти всюду относительно μ она является пределом некоторой последовательности μ-простых функций. В силу следствия III.6.14 предел почти всюду относительно μ сходящейся последовательности μ-измеримых функций является μ-измеримой функцией.

Если f есть μ-простая функция, $f=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{E_i}$, где $E_1, \ldots, E_n$ — множества из Σ, то *интеграл* от f по множеству $E\in\Sigma$ определяется равенством

$$\int_E f(s)\,\mu(ds)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu(E\cap E_i).$$

Точно так же, как и для случая комплексной функции μ, получаем, что интеграл от f не зависит от частного представления ее в виде линейной комбинации характеристических функций (см. абзац, следующий за определением III.2.13).

Ясно, что интегрирование простых функций по множеству E является линейной операцией. Далее, интеграл от простой функции является счетно аддитивной функцией множества со значениями в $\mathfrak{X}$. Если f — простая функция и для каждого $s\in\Sigma$ $|f(s)|\leqslant M$, то

$$\left|\int_E f(s)\,\mu(ds)\right|=\left|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu(E\cap E_i)\right|=M\left|\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\alpha_i}{M}\right)\mu(E\cap E_i)\right|\leqslant$$
$$\leqslant M\,\|\mu\|(E);$$

следовательно,

$$\text{[*]}\qquad \left|\int_E f(s)\,\mu(ds)\right|\leqslant\{\sup_{s\in E}|f(s)|\}\,\|\mu\|(E).$$

Если f — произвольная измеримая функция, то, по определению, *существенная верхняя грань* ($\operatorname{vrai}\sup\limits_{\mu\ \ s\in E}|f(s)|$) функции f на E относительно μ, есть нижняя грань всех таких чисел A, для которых $\{s\in E\,|\,|f(s)|>A\}$, есть нуль-множество относительно μ. Если $\operatorname{vrai}\sup\limits_{\mu\ \ s\in E}|f(s)|<\infty$, то функция f называется *существенно ограниченной* относительно μ на множестве $E\in\Sigma$.

Ясно, что $\operatorname{vrai}\sup\limits_{\mu\ \ s\in E}|f(s)| = \operatorname{vrai}\sup\limits_{\lambda\ \ s\in E}|f(s)|$ и что функция f в том и только в том случае существенно ограничена относительно μ, если она существенно ограничена относительно λ. Неравенство [*] для μ-простой функции f можно переписать в несколько более общей форме:

$$\left|\int_E f(s)\,\mu(ds)\right| \leqslant \{\operatorname{vrai}\sup_{\mu\ \ s\in E}|f(s)|\}\,\|\mu\|(E).$$

7. Определение. Измеримая скалярная функция f называется *интегрируемой*, если существует такая последовательность $\{f_n\}$ простых функций, что

(I) последовательность $\{f_n(s)\}$ сходится к $f(s)$ почти всюду относительно μ.

(II) последовательность $\left\{\int_E f_n(s)\,\mu(ds)\right\}$ для каждого $E\in\Sigma$ сходится по норме пространства $\mathfrak{X}$.

Предел этой последовательности интегралов и называется, по определению, *интегралом от функции f относительно меры μ, взятым по множеству $E\in\Sigma$*; обозначается он

$$\int_E f(s)\,\mu(ds).$$

8. Теорема. (a) *Если $E\in\Sigma$ и f — скалярная μ-интегрируемая функция, то интеграл от функции f относительно μ по множеству E есть однозначно определенный элемент пространства $\mathfrak{X}$.*

(b) *если f и g — скалярные μ-интегрируемые функции, α и β — скаляры $E\in\Sigma$, то*

$$\int_E \{\alpha f(s)+\beta g(s)\}\,\mu(ds) = \alpha\int_E f(s)\,\mu(ds) + \beta\int_E g(s)\,\mu(ds);$$

(c) *если скалярная функция f μ-измерима и μ-существенно ограничена на E, то она μ-интегрируема и*

$$\left|\int_E f(s)\,\mu(ds)\right| \leqslant \{\operatorname{vrai}\sup_{\mu\ \ s\in E}|f(s)|\}\,\{\|\mu\|(E)\};$$

(d) *если скалярная функция f μ-интегрируема, то $\int_E f(s)\,\mu(ds)$ является счетно аддитивной функцией, отображающей Σ в $\mathfrak{X}$.*

(e) *если скалярная функция f μ-интегрируема, то*

$$\lim_{\|\mu\|(E)\to 0}\int_E f(s)\,\mu(ds) = 0;$$

(f) если U есть ограниченный линейный оператор, отображающий $\mathfrak{X}$ в банахово пространство $\mathfrak{Y}$, то $U\mu$ является векторной мерой на Σ со значениями в $\mathfrak{Y}$, причем для каждой скалярной μ-интегрируемой функции f и любого $E \in \Sigma$ мы имеем

$$U\left\{\int_E f(s)\,\mu(ds)\right\} = \int_E f(s)\,U\mu(ds).$$

Доказательство. Для того чтобы доказать утверждение (a), рассмотрим две последовательности $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$ простых функций, определяемых в п. 7. Мы должны показать, что соответствующие им две последовательности интегралов имеют один и тот же предел. Положим, по определению, $h_n(s)=0$, если в точке s либо $\{f_n(s)\}$, либо $\{g_n(s)\}$ не сходится к $f(s)$, и $h_n(s)=f_n(s)-g_n(s)$ в противном случае. Ясно, что последовательность $\{h_n\}$ всюду сходится к нулю и что последовательность $\left\{\int_E h_n(s)\,\mu(ds)\right\}$ сходится по норме пространства $\mathfrak{X}$ для $E \in \Sigma$. Мы должны показать, что эта последовательность интегралов сходится к нулевому элементу пространства $\mathfrak{X}$.

Пусть λ означает положительную меру, связанную с μ так, как указано в лемме 5. Так как каждое h_n является простой функцией, то ясно, что

$$[*] \qquad \lim_{\lambda(E)\to 0} \int_E h_n(s)\,\mu(ds) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots;$$

кроме того, последовательность интегралов $\left\{\int_E h_n(s)\,\mu(ds)\right\}$ сходится для каждого $E \in \Sigma$, так что по теореме Витали — Хана — Сакса (III.7.2) предел [*] существует равномерно относительно n. Следовательно, для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что если $A \in \Sigma$ и $\lambda(A) < \delta$, то

$$\left|\int_A h_n(s)\,\mu(ds)\right| < \varepsilon, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

По теореме Егорова (III.6.12), существует такое множество $A \in \Sigma$, что $\lambda(A) < \delta$ и что последовательность $\{h_n(s)\}$ сходится к нулю равномерно относительно $s \in S - A$. Если для заданного $\varepsilon > 0$ $\delta = \delta(\varepsilon)$ выбрано так, как указано выше, то существует такое $N = N(\varepsilon)$, что если $n \geqslant N$, то $|h_n(s)| < \varepsilon$ для $s \in S - A$. Следовательно, если $n \geqslant N$, то

$$\left|\int_E h_n(s)\,\mu(ds)\right| \leqslant \left|\int_{E-A} h_n(s)\,\mu(ds)\right| + \left|\int_{E\cap A} h_n(s)\,\mu(ds)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon\,\|\mu\|(S) + \varepsilon$$

равномерно относительно $E \in \Sigma$. Таким образом, интеграл определен однозначно.

Утверждение (b) вытекает из его справедливости для простых функций и аддитивности операции перехода к пределу.

Для того чтобы доказать утверждение (c), предположим, что μ-измеримая функция f на множестве E существенно ограничена относительно μ числом B, и пусть $\varepsilon > 0$. Предположим, что $F_1, \ldots, F_n$ образуют покрытие множества $f(E)$ попарно непересекающимися борелевскими множествами скаляров диаметра $< \varepsilon$, и пусть $E_j = f^{-1}(F_j)$. Пусть $\alpha_j \in F_j$ и $f_\varepsilon(s) = \alpha_j$, если $s \in E_j$. Тогда f_ε (измененная в случае необходимости на некотором нуль-множестве) является μ-простой функцией и $\underset{\mu}{\operatorname{vrai}} \sup\limits_{s \in E} |f_\varepsilon(s) - f(s)| < \varepsilon$. Пусть $\varepsilon_n \to 0$. Тогда $\lim\limits_{m, n \to \infty} \underset{\mu}{\operatorname{vrai}} \sup\limits_{s \in E} |f_{\varepsilon_n}(s) - f_{\varepsilon_m}(s)| = 0$. Так как мы уже установили справедливость утверждения (c) для каждой μ-простой функции, то мы можем сразу же заключить отсюда, что

$$\lim_{m, n \to \infty} \left| \int_E f_{\varepsilon_n}(s) \mu(ds) - \int_E f_{\varepsilon_m}(s) \mu(ds) \right| = 0,$$

так что последовательность $\left\{ \int_E f_{\varepsilon_m}(s) \mu(ds) \right\}$ сходится для каждого $E \in \Sigma$, и мы имеем

$$\int_E f(s) \mu(ds) = \lim_{n \to \infty} \int_E f_{\varepsilon_n}(s) \mu(ds), \quad E \in \Sigma.$$

Так как $\underset{\mu}{\operatorname{vrai}} \sup\limits_{s \in E} |f_{\varepsilon_n}(s)| \leqslant B + \varepsilon_n$, то справедливость утверждения (c) в общем виде вытекает теперь из справедливости его для μ-простых функций.

Мы уже видели, что утверждения (d) и (e) справедливы для простых функций. Пусть f — произвольная μ-интегрируемая функция и $\{f_n\}$ — последовательность простых функций, определенная в п. 7. Из теоремы Витали — Хана — Сакса (III.7.2) вытекает тогда справедливость утверждения (d) и то обстоятельство, что

$$\lim_{\lambda(E) \to 0} \int_E f(s) \mu(ds) = 0,$$

откуда ввиду леммы 4(a) непосредственно вытекает и справедливость утверждения (e).

Первое утверждение в п. (f) очевидно, а второе вытекает путем несложного перехода к пределу из его справедливости для μ-простых функций, ч. т. д.

9. Теорема. *Пусть $\{f_n\}$ — последовательность μ-интегрируемых функций, сходящаяся почти всюду относительно μ к функции f.*

Тогда функция f будет μ-интегрируемой, если

$$\lim_{\|\mu\|(E)\to 0} \int_E f_n(s)\,\mu(ds) = 0$$

равномерно относительно $n=1, 2, \ldots$. В этом случае

$$\int_E f(s)\,\mu(ds) = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n(s)\,\mu(ds).$$

Доказательство. Пусть k — положительное целое число и $\delta_k > 0$ таково, что если $E \in \Sigma$ и $\|\mu\|(E) < \delta_k$, то

$$(1) \qquad \left| \int_E f_n(s)\,\mu(ds) \right| < 2^{-k}, \quad n=1, 2, \ldots .$$

Ясно, что мы можем предположить, что $\delta_k \leqslant 2^{-k}$. Пусть $\eta_k > 0$ таково, что если $A \in \Sigma$ и $\lambda(A) < \eta_k$, то $\|\mu\|(A) < \delta_k$. Последовательность $\{f_n\}$ сходится почти всюду относительно λ, и, используя теорему Егорова (III.6.12), можно найти такое множество $A \in \Sigma$, что $\lambda(A) < \eta_k$ и что сходимость последовательности $\{f_n\}$ равномерна на множестве $S-A$. Существует, таким образом, такое N_k, что если $E \in \Sigma$ и $n, m > N_k$, то

$$(2) \qquad \left| \int_E \{f_n(s)-f_m(s)\}\,\mu(ds) \right| \leqslant \left| \int_{E-A} \{f_n(s)-f_m(s)\}\,\mu(ds) \right| +$$
$$+ \left| \int_{E\cap A} f_n(s)\,\mu(ds) \right| + \left| \int_{E\cap A} f_m(s)\,\mu(ds) \right| < 2^{-k}\{\|\mu\|(S)+2\}.$$

Но так как k есть произвольное натуральное число, то отсюда видно, что последовательность $\left\{ \int_E f_n(s)\,\mu(ds) \right\}$ сходится по норме пространства $\mathfrak{X}$ для любого $E \in \Sigma$.

Теперь мы докажем, что функция f μ-интегрируема. Пусть δ_k и η_k определены так же, как в предшествующем абзаце. Так как каждая функция f_k является μ-интегрируемой, то, по теореме Егорова (III.6.12) и согласно второму абзацу доказательства теоремы III.2.22, существует такая простая функция g_k и такое множество $A_k \in \Sigma$, что $\lambda(A_k) < \eta_k$ и что

$$(3) \qquad |f_k(s) - g_k(s)| < 2^{-k}, \quad s \in S - A_k;$$

$$(4) \qquad |g_k(s)| \leqslant 2|f_k(s)|, \quad s \in S.$$

Пусть $B_k = \bigcup_{i=k}^{\infty} A_i$, так что $B_k \in \Sigma$ и последовательность $\{B_k\}$, убывая, сходится к множеству $B = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$. Так как

$$\|\mu\|(B_k) \leqslant \sum_{i=k}^{\infty} \|\mu\|(A_i) < \sum_{i=k}^{\infty} \delta_i \leqslant \sum_{i=k}^{\infty} 2^{-i} = 2^{-(k-1)},$$

то $\|\mu\|(B)=0$. Далее,

$$|f(s)-g_k(s)| \leqslant |f(s)-f_k(s)| + |f_k(s)-g_k(s)|.$$

Если $s \in S-B$, то $s \in S-B_k$ для k, превосходящего некоторое натуральное число $K(s)$, и, следовательно, неравенство (3) будет справедливо при $k > K(s)$. Так как, по предположению, последовательность $\{f_k\}$ почти всюду относительно μ сходится к функции f, то и последовательность $\{g_k\}$ почти всюду сходится к функции f.

Остается показать, что для $E \in \Sigma$ последовательность интегралов $\left\{\int_E g_n(s)\,\mu\,(ds)\right\}$ сходится. Но

$$\left|\int_E \{f_k(s)-g_k(s)\}\,\mu(ds)\right| \leqslant \left|\int_{E-A_k} \{f_k(s)-g_k(s)\}\,\mu(ds)\right| +$$

$$+\left|\int_{E\cap A_k} f_k(s)\,\mu(ds)\right| + \left|\int_{E\cap A_k} g_k(s)\,\mu(ds)\right|.$$

В силу неравенства (3) интеграл по множеству $E - A_k$ не превосходит $2^{-k}\|\mu\|(S)$. Так как $\|\mu\|(E\cap A_k) < \delta_k$, то из неравенства (1) следует, что второй член в правой части не превосходит 2^{-k}. Для оценки последнего члена предположим, что $x^* \in \mathfrak{X}^*$, $|x^*| \leqslant 1$, $F \subseteq E$, $F \in \Sigma$ и $\|\mu\|(E) < \delta_k$. Тогда, согласно неравенству (1),

$$\left|\int_F f_n(s)\,x^*\mu(ds)\right| < 2^{-k},$$

так что, по теореме III.2.20 и замечанию, следующему за определением III.4.12,

$$(5) \qquad \int_E |f_n(s)|\,v(x^*\mu, ds) < 4\cdot 2^{-k}, \quad n=1, 2, \ldots,$$

если $\|\mu\|(E) < \delta_k$. В силу неравенств (4) и (5)

$$\left|\int_{E\cap A_k} g_k(s)\,\mu(ds)\right| = \sup_{|x^*|\leqslant 1} \left|\int_{E\cap A_k} g_k(s)\,x^*\mu(ds)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{|x^*|\leqslant 1} \int_{E\cap A_k} |g_k(s)|\,v(x^*\mu, ds) \leqslant 2 \sup_{|x^*|\leqslant 1} \int_{E\cap A_k} |f_k(s)|\,v(x^*\mu, ds) \leqslant 8\cdot 2^{-k}.$$

Комбинируя все это, мы получаем, что

$$(6)\qquad \left|\int_E \{f_k(s)-g_k(s)\}\,\mu(ds)\right| \leqslant 2^{-k}\{\|\mu\|(S)+9\},$$

откуда, так как последовательность $\left\{\int_E f_k(s)\,\mu(ds)\right\}$ сходится, вытекает, что и последовательность $\left\{\int_E g_k(s)\,\mu(ds)\right\}$ сходится, т. е. что функция f μ-интегрируема.

Для того чтобы доказать последнее утверждение теоремы, заметим, что так как последовательность $\left\{\int_E f_k(s)\,\mu(ds)\right\}$ сходится, то, по теореме Витали — Хана — Сакса (III.7.2), для каждого $x^* \in \mathfrak{X}^*$ $\lim_{v(x^*\mu,\, E)\to 0} \int_E f_k(s)\,x^*\mu(ds)=0$ равномерно относительно k. Таким образом, по теореме III.2.20 и замечанию, следующему за определением III.4.12.

$$\lim_{v(x^*\mu,\, E)\to 0} \int_E |f_k(s)|\,v(x^*\mu,\, ds)=0$$

равномерно относительно k. По теореме III.6.15,

$$\lim_{n\to\infty} x^* \int_E f_k(s)\,\mu(ds) = x^* \int_E f(s)\,\mu(ds)$$

для каждого $x^* \in \mathfrak{X}^*$. Таким образом,

$$x^*\left(\int_E f(s)\,\mu(ds) - \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(s)\,\mu(ds)\right)=0,$$

если $x \in \mathfrak{X}^*$, так что, по следствию II.3.15,

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(s)\,\mu(ds) = \int_E f(s)\,\mu(ds), \quad \text{ч. т. д.}$$

Теперь мы покажем, что для векторнозначных мер справедлива теорема, аналогичная теореме Лебега (III.8.16).

10. Теорема. *Если $\{f_n\}$ — последовательность μ-интегрируемых функций, почти всюду относительно μ сходящаяся к функции f и если g — такая μ-интегрируемая функция, что $|f_n(s)| \leqslant g(s)$ почти всюду относительно μ при $n=1, 2, \ldots$, то функция f μ-интегрируема и*

$$\int_E f(s)\,\mu(ds) = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(s)\,\mu(ds), \quad E \in \Sigma.$$

Доказательство. Ввиду предшествующей теоремы достаточно показать, что

$$\lim_{\|\mu\|(E)\to 0} \int_E f_n(s)\,\mu(ds) = 0$$

равномерно относительно $n=1, 2, \ldots$. Для заданного $\varepsilon > 0$ мы можем, согласно теореме 8(e), выбрать такое $\delta > 0$, что если $E \in \Sigma$ и $\|\mu\|(E) < \delta$, то

$$\left| \int_E g(s)\,\mu(ds) \right| < \varepsilon.$$

Следовательно, если $F \subseteq E$, $F \in \Sigma$ и $\|\mu\|(E) < \delta$, то

$$\left| \int_F g(s)\,x^*\mu(ds) \right| < \varepsilon, \quad |x^*| \leqslant 1.$$

По теореме III.2.20 и замечанию, следующему за определением III.4.12, отсюда вытекает, что

$$\int_E g(s)\,v(x^*\mu, ds) < 4\varepsilon, \quad |x^*| \leqslant 1.$$

Следовательно, если $\|\mu\|(E) < \delta$ и $n=1, 2, \ldots$, то

$$\left| \int_E f_n(s)\,\mu(ds) \right| \leqslant \sup_{|x^*|\leqslant 1} \int_E |f_n(s)|\,v(x^*\mu, ds) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{|x^*|\leqslant 1} \int_E g(s)\,v(x^*\mu, ds) \leqslant 4\varepsilon,$$

откуда и вытекает справедливость нашего утверждения, ч. т. д.

11. Пространство $TM(S, \Sigma, \mu)$

В этом параграфе мы будем рассматривать множество S, некоторую σ-алгебру Σ его подмножеств и определенную на Σ скалярную счетно аддитивную функцию множества μ. Через $TM(S, \Sigma, \mu)$ будет обозначаться совокупность всех определенных на S скалярных вполне μ-измеримых функций (см. определение III.2.10). Точнее говоря, так же, как и в гл. III, элементами пространства $TM(S, \Sigma, \mu)$ будут классы эквивалентных между собой функций, причем две вполне измеримые функции считаются эквивалентными в том случае, если их разность равна нулю почти всюду. Некоторые свойства пространства $TM(S, \Sigma, \mu)$ уже были установлены в гл. III. В частности, мы установили, что $TM(S, \Sigma, \mu)$ есть линейное векторное пространство, являющееся метрическим пространством, если расстояние $\varrho(f, g)=|f-g|$, а норма $|f|$ элемента f определяется равенством

$$|f|=\inf_{\alpha>0} \operatorname{arctg}(\alpha+v^*(\mu, S(|f|>\alpha))),$$

где $S(|f|>\alpha)=\{s \mid s\in S, |f(s)|>\alpha\}$. Это метрическое пространство является полным (III.6.5), причем сходимость последовательности $\{f_n\}\subseteq TM(S, \Sigma, \mu)$ эквивалентна сходимости по мере функций f_n на множестве S.

Легко видеть, что $TM(S, \Sigma, \mu)$ является F-пространством. Для того чтобы убедиться в этом, мы заметим, что ввиду леммы III.2.8 (b) достаточно доказать, что $\lim\limits_{\alpha\to 0}\alpha f=0$ для каждого $f\in TM(S, \Sigma, \mu)$. Пусть $f\in TM(S, \Sigma, \mu)$ и $\varepsilon>0$. Предположим, что g_ε есть μ-простая функция, такая, что $|f(s)-g_\varepsilon(s)|<\varepsilon$, если s принадлежит дополнению некоторого множества $E_\varepsilon\in\Sigma$, для которого $\mu(E_\varepsilon)<\varepsilon$. Если $M=\operatorname{vrai}\sup\limits_{s\in S}|g_\varepsilon(s)|$ и $|\alpha|<\frac{\varepsilon}{M+\varepsilon}$, то $|\alpha f(s)|<\varepsilon$ для $s\notin E_\varepsilon$. Таким образом, по лемме III.2.7, $\lim\limits_{\alpha\to 0}\alpha f=0$.

Заметим, что не для каждой измеримой функции $\lim\limits_{\alpha\to 0}\alpha f=0$ в смысле сходимости по мере μ. Пусть, например, $S=(-\infty, \infty)$ и μ — мера Лебега; определим функцию f, полагая $f(s)=s$. Тогда $\frac{f}{n}$ не стремится к нулю по мере, так как $\mu\left(E\left(\left|\frac{f}{n}\right|>\alpha\right)\right)=\infty$ при всех $n=1, 2, \ldots$ и всех $\alpha>0$. Следовательно, пространство $M(S, \Sigma, \mu)$ всех измеримых функций не обязательно будет F-пространством.

Может оказаться, что на F-пространстве $TM(S, \Sigma, \mu)$ не существует непрерывных линейных функционалов. Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим меру Лебега μ на множестве $S=[0, 1]$. Если $0\neq x^*\in TM^*(S, \Sigma, \mu)$, т. е. если x^* есть определенный на $TM(S, \Sigma, \mu)$ непрерывный линейный функционал, не равный тождественно нулю, то, так как совокупность линейных комбинаций характеристических функций интервалов всюду плотна в пространстве $TM(S, \Sigma, \mu)$, в $[0, 1]$ найдется такой подинтервал Δ_n длины, меньшей чем $\frac{1}{n}$ и такой, что x^* не равен нулю на характеристической функции χ_n интервала Δ_n. Пусть $x^*\chi_n=\delta_n\neq 0$, и пусть $f_n=\chi_n/\delta_n$, тогда $f_n\to 0$ и $x^*f_n=1$, $n=1, 2, \ldots$, что невозможно. Таким образом, пространство, сопряженное к пространству вполне измеримых функций, может состоять только из нулевого вектора. Но это не всегда так; например, если мера множества $\{s_0\}$, состоящего из единственной точки s_0, отлична от нуля, то $f(s_0)$ линейно и непрерывно зависит от f и $f(s_0)=g(s_0)$ для каждой пары f и g эквивалентных между собой функций.

Таким образом из проблем, перечисленных в § 1, все, кроме одной, теряют смысл для некоторых пространств измеримых функций. Единственная из этих проблем, имеющая смысл во всех случаях, — это седьмая, т. е. вопрос об определении подмножеств пространства $TM(S, \Sigma, \mu)$, бикомпактных в его метрической топологии. Ответ на этот вопрос содержится в следующей теореме.

1. Теорема. *Пусть μ — счетно аддитивная функция множества, комплексная или со значениями из расширенной области вещественных чисел, определенная на σ-алгебре Σ подмножеств множества S. Тогда, для того чтобы подмножество A из $TM(S, \Sigma, \mu)$ было относительно бикомпактным, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\varepsilon > 0$ нашлись такие множества $E_1, \ldots, E_n$ из Σ, такая константа K и для каждого $f \in A$ такое множество E_f из Σ, что*

$$(1) \qquad E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n = S, \quad E_i E_j = \varnothing, \quad i \neq j;$$

$$(2) \qquad v^*(\mu, E_f) < \varepsilon, \quad f \in A;$$

$$(3) \qquad |f(s)| < K, \quad f \in A, \quad s \notin E_f;$$

$$(4) \qquad \sup_{s,\, t \in E_i - E_f} |f(s) - f(t)| < \varepsilon, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Доказательство. Так как μ счетно аддитивна на σ-алгебре Σ, то пространство $TM(S, \Sigma, \mu)$ всех определенных на S вполне измеримых функций является полным метрическим пространством (III.6.5) и, следовательно, (I.6.15), множество $A \subseteq TM$ относительно бикомпактно в том и только в том случае, если A вполне ограничено. (Стоит отметить, что это есть единственное место в доказательстве, где используется счетная аддитивность μ, т. е. условия теоремы необходимы и достаточны для полной ограниченности A даже и в том случае, если Σ есть просто алгебра, а μ —определенная на Σ и только аддитивная, и не обязательно ограниченная функция множества).

Предположим прежде всего, что множество A вполне ограничено, так что для заданного $\varepsilon > 0$ в A найдутся такие функции $f_1, \ldots, f_q$, что

$$\inf_{1 \leqslant i \leqslant q} |f_i - f| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad f \in A.$$

Согласно определению полной измеримости (III.2.10), существуют такие простые функции $g_1, \ldots, g_q$, что

$$|g_i - f_i| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad i = 1, \ldots, q,$$

тогда

$$\inf_{1 \leqslant i \leqslant q} |g_i - f| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad f \in A.$$

Найдутся, следовательно, множества $E_1, \ldots, E_n$, удовлетворяющие условию (1) и такие константы $\alpha_i^{(j)}$, $j=1, \ldots, n$; $i=1, \ldots, q$, что

$$g_i(s)=\sum_{j=1}^{n} \alpha_i^{(j)} \chi_{E_j}(s), \quad i=1, \ldots, q,$$

где χ_{E_j} есть характеристическая функция множества E_j,

Для каждого f из A найдется такое i, для которого $|g_i-f|<$ $<\frac{\varepsilon}{2}$, и, следовательно, такое $\alpha>0$, что

$$\alpha+v^*(\mu, S(|g_i-f|>\alpha))<\frac{\varepsilon}{2},$$

где множество $S(|g_i-f|>\alpha)$ определяется так:

$$S(|g_i-f|>\alpha) \equiv \{s \mid s \in S, \ |g_i(s)-f(s)|>\alpha\}.$$

Так как $\alpha \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, то

$$S\left(|g_i-f|>\frac{\varepsilon}{2}\right) \subseteq S(|g_i-f|>\alpha),$$

$$v^*\left(\mu, S\left(|g_i-f|>\frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \leqslant v^*(\mu, S(|g_i-f|>\alpha))<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Если $E_f=S\left(|g_i-f|>\frac{\varepsilon}{2}\right)$ и $K=\varepsilon+\operatorname{vrai}\sup\limits_{i,\, s}|g_i(s)|$, то неравенства (2) и (3) получаются непосредственно. Так как $g_i(s)=g_i(t)$, если обе точки s и t принадлежат одному и тому же множеству E_j, и так как $|g_i(s)-f(s)|<\frac{\varepsilon}{2}$, если $s \notin E_f$, то неравенство (4) также очевидно.

Теперь предположим обратное, т. е. что множество A удовлетворяет условиям (1) — (4). Пусть $\varepsilon>0$, $\alpha=2^{-1} \operatorname{tg} \varepsilon$,

$$-K=\alpha_0<\alpha_1<\ldots<\alpha_p=K;$$

$$\alpha_i-\alpha_{i-1}<\alpha, \quad i=1, \ldots, p,$$

и рассмотрим множество всех простых функций, имеющих постоянные значения на каждом из множеств $E_1, \ldots, E_n$ и значения которых принадлежат множеству $(\alpha_i, i=0, 1, \ldots, p)$. Существует лишь конечное число таких функций $g_1, \ldots, g_n$ и ввиду условий (2) – (4) для каждого $f \in A$ найдется такое $i \leqslant m$ и такое множество $E_f \in \Sigma$, что

$$v^*(\mu, E_f)<\alpha, \quad |g_i(s)-f(s)|<\alpha, \quad s \notin E_f.$$

Таким образом,

$$S(|g_i-f|>\alpha) \subseteq E_f,$$

и, следовательно,

$$\alpha+v^*(\mu, S(|g_i-f|>\alpha))<2\alpha=\operatorname{tg} \varepsilon,$$

откуда следует, что $|g_i - f| < \varepsilon$. Это означает, что каждое $f \in A$ находится на расстоянии, не превосходящем ε, от одной из функций $g_1, \ldots, g_m$, т. е. что множество A вполне ограничено, ч. т. д.

Из общей теории непрерывных линейных отображений одного F-пространства в другое известно, что если для последовательности $\{T_n\}$ таких отображений: (I) множество $\{T_n x\}$ ограничено для каждого x и (II) последовательность $\{T_n x\}$ сходится для каждого x из некоторого всюду плотного множества, то последовательность $\{T_n x\}$ сходится для каждого x из области определения отображений T_n (см. теорему II.1.18). Если при этом областью значений отображений является пространство $\mathfrak{Y} = TM(S, \Sigma, \mu)$, где (S, Σ, μ) есть пространство с положительной σ-конечной мерой, то имеется аналогичная теорема, в которой понятия ограниченности и сходимости понимаются в смысле выполнимости их почти всюду на множестве S. Если T есть отображение F-пространства $\mathfrak{X}$ в $TM(S, \Sigma, \mu)$, то мы будем обозначать через $T(x, s)$ значение функции Tx (т. е. значение какой-нибудь из функций определяемого функцией Tx класса эквивалентности) в точке s.

2. Теорема (*Банах*). *Пусть $\{T_n\}$ — последовательность непрерывных линейных отображений F-пространства $\mathfrak{X}$ в пространство $TM(S, \Sigma, \mu)$ всех вещественных или комплексных вполне измеримых функций, где (S, Σ, μ) — пространство с положительной σ-конечной мерой. Предположим, что $\sup_n |T_n(x, s)| < \infty$ для каждого x из $\mathfrak{X}$ и для почти всех s из S. Предположим также, что для каждого x из некоторого множества, всюду плотного в $\mathfrak{X}$, предел $\lim_n T_n(x, s)$ существует для почти всех s из S. Тогда для каждого x из $\mathfrak{X}$ предел $\lim_n T_n(x, s)$ существует почти всюду на S.*

Иногда нам будет нужно некоторое обобщение этого результата, содержащееся в следующей теореме. Теорема 2 будет частным случаем этой теоремы, если в качестве A_k взять множество всех целых чисел $n \geqslant k$.

3. Теорема. *Пусть (S, Σ, μ) — пространство с σ-конечной положительной мерой. Пусть $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ — счетные множества и, пусть T_a для каждого $a \in A_1$ является непрерывным линейным отображением F-пространства $\mathfrak{X}$ в пространство $TM(S, \Sigma, \mu)$ вещественных или комплексных вполне измеримых функций. Предположим, что*

(I) *для каждого $x \in \mathfrak{X}$*

$$\sup_{a \in A_1} |T_a(x, s)| < \infty$$

почти всюду на S и

(II) *для каждого x из некоторого множества, всюду плотного в $\mathfrak{X}$,*

$$\lim_{p \to \infty} \sup_{a, b \in A_p} |T_a(x, s) - T_b(x, s)| = 0$$

почти всюду на S. Тогда равенство в п. (II) имеет место для каждого x из $\mathfrak{X}$.

Доказательство. Заметим прежде всего, что эту теорему достаточно доказать для случая пространства с конечной мерой. В самом деле, пусть $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$, где $\{S_n\}$ есть некоторая последовательность попарно непересекающихся измеримых множеств конечной меры μ. Тогда, если меру μ_1 положить, по определению, равной

$$\mu_1(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(ES_n)}{2^n[1+\mu(S_n)]}, \quad E \in \Sigma,$$

то μ_1 будет конечной мерой, причем $\mu_1(E)=0$ тогда и только тогда, если $\mu(E)=0$. Мы можем, следовательно, предполагать, что μ есть конечная мера, так что $TM(S, \Sigma, \mu)=M(S, \Sigma, \mu)$.

Пусть $a_1, a_2, \ldots$ — все элементы из A_1, и пусть отображения $W, V, V_n, n=1, 2, \ldots$ пространства $\mathfrak{X}$ в $TM(S, \Sigma, \mu)$ определяются равенствами

$$V_n(x, s) = \sup_{1 \leqslant m \leqslant n} |T_{a_m}(x, s)|, \quad V(x, s) = \sup_{a \in A_1} |T_a(x, s)|,$$

$$W(x, s) = \lim_{p \to \infty} \sup_{a, b \in A_p} |T_a(x, s) - T_b(x, s)|.$$

Ясно, что V_n есть непрерывное отображение пространства $\mathfrak{X}$ в $TM(S, \Sigma, \mu)$, удовлетворяющее условиям $|V_n(x+y)| \leqslant |V_n(x)| + |V_n(y)|$ и $|V_n(\alpha, x)| = |\alpha V_n(x)|$ для каждой пары x, y элементов из $\mathfrak{X}$ и каждого скаляра α. Условие (I) обеспечивает, что V отображает $\mathfrak{X}$ в $TM(S, \Sigma, \mu)$, и из определений этих отображений и только что доказанного вытекает, что $|\alpha V_n(x)| \leqslant |\alpha V(x)|$. Для каждого x $\alpha V(x) \to 0$ при $\alpha \to 0$ и, следовательно, множество $\{V_n(x) | n=1, 2, \ldots\}$ ограничено (II.1.7) в пространстве $TM(S, \Sigma, \mu)$. По лемме II.1.13, $\lim_{x \to 0} V_n(x)=0$ равномерно относительно $n \geqslant 1$. По следствию III.6.13 (b), $V_n(x) \to V(x)$, и, следовательно, V непрерывно при $x=0$. Так как $|W(x, s)| \leqslant 2V(x, s)$, то $|W(x)| \leqslant 2|V(x)|$ и, следовательно, W непрерывно при $x=0$. Теперь легко можно показать, что

$$|W(x, s) - W(y, s)| \leqslant |W(x-y, s)|$$

для почти всех s и, следовательно,

$$|W(x) - W(y)| \leqslant |W(x-y)|, \quad x, y \in \mathfrak{X}.$$

Отсюда следует непрерывность отображения W в каждой точке пространства $\mathfrak{X}$. По условию (II), W обращается в нуль на некотором множестве, всюду плотном в $\mathfrak{X}$; следовательно, W тождественно равно нулю, ч. т. д.

Теперь мы рассмотрим некоторые свойства упорядоченности пространства $M(S, \Sigma, \mu)$. Если $f \in M(S, \Sigma, \mu)$ и если $f(s) \geqslant 0$ для почти всех относительно μ точек s из S, мы говорим, что f *положительна*, и пишем $f \geqslant 0$. Если f_1 и f_2 — вещественные или комплексные функции из $M(S, \Sigma, \mu)$ и если $f_1 - f_2 \geqslant 0$, то мы пишем $f_1 \geqslant f_2$ или $f_2 \leqslant f_1$. При этом пространство $M(S, \Sigma, \mu)$ становится частично упорядоченным множеством в смысле определения I.2.1. Заметим, что пространство $TM(S, \Sigma, \mu)$ тоже будет частично упорядоченным при том же самом определении порядка.

4. Лемма. *Если Σ — некоторая алгебра подмножеств множества S и μ — конечно аддитивная функция множества, то вещественные пространства $M(S, \Sigma, \mu)$ и $TM(S, \Sigma, \mu)$ являются структурами. Если (S, Σ, μ) — пространство с положительной мерой, то вещественное пространство $M(S, \Sigma, \mu)$ является σ-полной структурой.*

Доказательство. Определения структуры и σ-полноты были даны в конце § I.12, на стр. 55. Для того чтобы доказать первое утверждение, достаточно заметить, что

$$\sup\{f, g\} = \frac{1}{2}[|f(\cdot)+g(\cdot)| + |f(\cdot)-g(\cdot)|],$$

$$\inf\{f, g\} = \frac{1}{2}[|f(\cdot)+g(\cdot)| - |f(\cdot)-g(\cdot)|].$$

Тот факт, что эти функции принадлежат $M(S, \Sigma, \mu)$ или $TM(S, \Sigma, \mu)$, вытекает из лемм III.2.11 и III.2.12. Ясно также, что значение функции $\sup\{f, g\}$ в точке $s \in S$ почти всюду равно числу $\sup\{f(s), g(s)\}$. Второе утверждение леммы было доказано после теоремы III.6.10, ч. т. д.

Для того чтобы установить и другой тип полноты пространства $M(S, \Sigma, \mu)$, нам будет удобно доказать некоторую общую лемму о σ-полных структурах.

5. Лемма. *Пусть L — σ-полная структура, в которой каждое множество элементов, вполне упорядоченное относительно частичной упорядоченности L, самое большее счетно. Тогда структура L является полной, причем каждое подмножество A из L имеет верхнюю грань, являющуюся верхней гранью некоторого счетного подмножества множества A.*

Доказательство. Пусть A — подмножество L, имеющее мажоранту, и пусть A_1 — совокупность верхних граней всех счетных подмножеств множества A. Рассмотрим семейство W подмножеств множества A_1, вполне упорядоченных относительно порядка, установленного в L. Мы можем упорядочить и W, полагая, по определению, что неравенство $a \leqslant b$ между элементами a и b из W означает, что $a \subseteq b$ и что каждый элемент x, принадлежащий b, но не принадлежащий a, служит мажорантой для a. Прежде всего мы покажем, что W удовлетворяет условиям леммы Цорна. Для этого мы предположим, что W_0 есть некоторое линейно упорядоченное подмножество (1.22) множества W и что $c \subseteq \bigcup W_0$. Тогда для некоторого $a \in W_0$ пересечение $c \cap a$ не пусто. Пусть x — наименьший элемент из $c \cap a$ и y — любой другой элемент из c. Если $y \in b \in W_0$, то либо $b \leqslant a$, либо $a \leqslant b$. Если $b \leqslant a$, то $y \in b$ влечет $y \in a$ и, следовательно, $y \in c \cap a$ и $y \geqslant x$. Если $a \leqslant b$ и $y \in a$, то $y \in c \cap a$ и $y \geqslant x$. Наконец, если $a \leqslant b$ и $y \notin a$, то $y \geqslant x$, по определению упорядоченности в W. Таким образом, x есть наименьший элемент в c. Отсюда следует, что множество $\bigcup W_0$ вполне упорядочено и, значит, оно служит для W_0 мажорантой в W. По лемме Цорна, W содержит максимальный элемент b_0. По условию, b_0 не более чем счетно, и, следовательно, $y_0 = \sup b_0$ существует и принадлежит A_1. Теперь мы докажем, что $y \leqslant y_0$ для любого $y \in A_1$. Действительно, если для некоторого $y_1 \in A_1$ это неверно, то $\sup \{y_0, y_1\} > y_0$; но $y_2 = \sup \{y_0, y_1\} \in A_1$ и $b_0 < b_0 \bigcup \{y_2\}$ и, следовательно, элемент b_0 не максимальный. Таким образом, $y \leqslant y_0$, $y \in A_1$, и так как $y_0 \in A_1$, то $y_0 = \sup A_1 = \sup A$. Точно так же можно показать существование и нижней грани множества, имеющего миноранту. Этим доказано, что структура L является полной; последнее утверждение леммы вытекает из того замечания, что y_0 служит верхней гранью некоторой последовательности из A_1 и, следовательно, некоторой последовательности из A, ч. т. д.

6. Теорема. *Пусть (S, Σ, μ) — пространство с положительной σ-конечной мерой. Тогда частично упорядоченное пространство определенных на S вещественных измеримых функций, где неравенство $f \geqslant g$ означает, что $f(s) \geqslant g(s)$ для почти всех s из S, является полной структурой. Кроме того, верхняя грань каждого ограниченного множества B этой структуры является верхней гранью для некоторого соответственным образом выбранного счетного подмножества B.*

Доказательство. Пусть B — некоторое ограниченное множество структуры $M(S, \Sigma, \mu)$ определенных на S вещественных измеримых функций. Мы можем и будем предполагать, что все функции из B положительны и ограничены сверху некоторой измеримой функцией g. Прежде всего мы покажем, что структура L, состоящая из всех $f \in M(S, \Sigma, \mu)$, для которых $0 \leqslant f \leqslant g$, обладает тем свойством, что каждое ее вполне упорядоченное подмножество счетно. Для этого рассмотрим вещественную прямую (R, Σ_0, λ) с определенной на ней мерой Лебега; если мы положим $(T, \Sigma_1, \theta) = (S, \Sigma, \mu) \times \times (R, \Sigma_0, \lambda)$, то мера в пространстве (T, Σ_1, θ) будет σ-конечной (III.11.6). Каждому $f \in L$ мы поставим в соответствие измеримое множество $A(f)=\{[s, r]\in S\times R \mid 0\leqslant r\leqslant f(s)\}$. Заметим, что если $f_1, f_2\in L$ и если $f_1\leqslant f_2$, то $A(f_1)\subseteq A(f_2)$ и $0\leqslant\theta(A(f_2)-A(f_1))=$ $=\int\limits_S\{f_2(s)-f_1(s)\}\mu(ds)\leqslant\infty$. Отсюда следует, что f_1 и f_2 равны между собой почти всюду в том и только в том случае, если равны $\theta(A(f_1))$ и $\theta(A(f_2))$. Далее, пространство с σ-конечной мерой (T, Σ_1, θ) может содержать самое большее счетное множество попарно непересекающихся измеримых множеств ненулевой θ-меры, и, следовательно, каждое вполне упорядоченное подмножество L может содержать только счетное число не эквивалентных между собой функций. Справедливость нашей теоремы вытекает теперь из лемм 4 и 5, ч. т. д.

Естественное упорядочение, только что использованное для функций из $M(S, \Sigma, \mu)$, уже рассматривалось для функций из пространства $L_p(S, \Sigma, \mu)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$. В теоремах 8.22 и 8.23 мы доказали, что если подмножество одного из этих пространств ограничено сверху некоторой функцией, то оно имеет в этом пространстве верхнюю грань. Каждое из этих пространств является, конечно, подпространством $M(S, \Sigma, \mu)$, и полезно знать, что эту верхнюю грань можно брать как в пространстве $L_p(S, \Sigma, \mu)$, так и в $M(S, \Sigma, \mu)$. Мы сформулируем этот результат следующим образом.

7. Следствие. *Пусть (S, Σ, μ) — пространство с положительной σ-конечной мерой. Тогда вещественные пространства $L_p(S, \Sigma, \mu)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, и $M(S, \Sigma, \mu)$ являются полными структурами и верхняя грань в $L_p(S, \Sigma, \mu)$ некоторого ограниченного множества этой структуры совпадает с его верхней гранью в структуре $M(S, \Sigma, \mu)$. Кроме того, каждое множество B, ограниченное в структуре $L_p(S, \Sigma, \mu)$, содержит некоторое счетное подмножество, имеющее ту же верхнюю грань, что и B.*

Доказательство. Это утверждение вытекает из того, что $L_p(S, \Sigma, \mu)\subseteq M(S, \Sigma, \mu)$ и что $M\text{-}\sup\limits_\alpha\{f_\alpha\}\leqslant L_p\text{-}\sup\limits_\alpha\{f_\alpha\}$; так как $L_p\text{-}\sup_\alpha\{f_\alpha\}$ принадлежит пространству $L_p(S, \Sigma, \mu)$, то, по теореме III.2.22 (b), $M\text{-}\sup\limits_\alpha\{f_\alpha\}$ тоже принадлежит $L_p(S, \Sigma, \mu)$ и, следовательно, обе верхние грани совпадают. Последнее утверждение вытекает из предшествующей теоремы, ч. т. д.

12. Функции ограниченной вариации

Пусть I — некоторый интервал с концами a и b. Обозначим через Σ алгебру множеств из I, состоящую из всевозможных сумм интервалов $(c, d]$, полуоткрытых слева, за исключением того случая, когда c совпадает с левым концом a интервала I и $a\in I$; в этом случае берется замкнутый интервал $[a, d]$. Для заданной $f \in BV(I)$ определим $\mu_f \in ba(I, \Sigma)$ так, что $\mu_f([a, d]) = f(d) - f(a)$ и $\mu_f((c, d]) = f(d) - f(c)$, если $c \neq a$. Тогда ясно, что $v(\mu_f, I) = v(f, I)$. Таким образом, $ba(S, \Sigma)$ изометрически изоморфно с замкнутым подпространством $BV_0(I)$, состоящим из всех $f \in BV(I)$, для которых $f(a+) = 0$. Если N есть одномерное подпространство функций-констант, то ясно, что $BV(I) = BV_0(I) \oplus N$. Таким образом, $BV(I)$ изометрически изоморфно прямой сумме $ba(I, \Sigma)$ и некоторого одномерного пространства. Отсюда очевидна следующая теорема (см. 9.9).

1. Теорема. *Пространство $BV(I)$ является слабо полным B-пространством.*

Ясно, что определенный выше изоморфизм можно использовать, чтобы получить для пространства $BV(I)$ ответы и на многие другие вопросы, поставленные в § 1. Детальное проведение этих рассуждений мы оставляем читателю в качестве упражнения.

Как было показано в § III.5 (см. рассуждение, следующее за леммой III.5.16), если $f \in NBV(I)$, то μ_f регулярна; обратное тоже очевидно. Таким образом, соответствием $f \longleftrightarrow \mu_f$ определяется некоторый изометрический изоморфизм между пространствами $NBV(I)$ и $rba(I, \Sigma)$. Пользуясь теоремой 9.9, получаем следующий результат.

2. Теорема. *Пространство $NBV(I)$ является слабо полным B-пространством.*

Здесь снова рассматриваемое пространство изометрически изоморфно ранее изученному пространству; и снова этот изометрический изоморфизм можно использовать для получения ответов на вопросы, поставленные в § 1. Детали этих рассуждений мы оставляем читателю в качестве упражнения.

Пусть, наконец, $f \in AC(I)$, и пусть $f(a+) = 0$, так что $f \in NBV(I)$. Обозначим через Σ_1 σ-алгебру, порожденную алгеброй Σ, т. е. алгебру всех борелевских подмножеств I. Через λ обозначим меру Бореля — Лебега, а через λ_1 — ее сужение на алгебру Σ. Ясно, что μ_f абсолютно непрерывна относительно λ_1. Обратно, если $f \in NBV(I)$ и μ_f абсолютно непрерывна относительно λ_1, то ясно, что $f \in AC(I)$.

Если $\hat{\mu}_f$ есть однозначно определенное счетно аддитивное продолжение μ_f на Σ_1 (существующее, согласно рассуждению, следующему за леммой III.5.16), то, по лемме 9.13, $\hat{\mu}_f$ абсолютно непрерывна относительно λ в том и только в том случае, если μ_f абсолютно непрерывна относительно λ_1. Согласно теореме Радона — Никодима (III.10.7), $\hat{\mu}_f$ представима интегралом вида

$$\hat{\mu}_f(E) = \int_E g(x)\,dx, \quad g \in L_1(I, \Sigma, \lambda).$$

Следовательно, произвольную функцию $f \in AC(I)$ можно представить в виде

$$f(x) = f(a+) + \int_0^x g(y)\,dy,$$

где g есть некоторый элемент из $L_1(S, \Sigma, \lambda)$. Обратно, ясно, что каждая функция f такого вида принадлежит $AC(I)$. Легко видеть, что

$$|f| = |f(a+)| + \int_a^b |g(y)|\,dy.$$

Этим доказан следующий результат.

3. Теорема. *Пространство $AC(I)$ изометрически изоморфно прямой сумме пространства $L_1(I, \Sigma, \lambda)$ и некоторого одномерного пространства. Следовательно, $AC(I)$ слабо полно.*

Решения поставленных в § 1 вопросов относительно пространства $AC(I)$ можно легко получить, используя упомянутый в теореме 3 изометрический изоморфизм. Проведение деталей доказательства предоставляется читателю в качестве упражнения.

13. Упражнения

A. *Упражнения, дополняющие таблицу в § 15.*

1. Показать, что все топологии конечномерного линейного топологического пространства $\mathfrak{X}$ эквивалентны. Вывести отсюда, что подмножество пространства $\mathfrak{X}$ относительно бикомпактно в том и только в том случае, если оно ограничено. Показать, что если $\{x_1, \ldots, x_n\}$ — базис n-мерного линейного топологического пространства $\mathfrak{X}$ и $\{y_m\}$, где $y_m = \sum_{i=1}^{n} \alpha_m^{(i)} x_i$ — последовательность элементов из $\mathfrak{X}$, то y_m сходится к элементу $y = \sum_{i=1}^{n} \alpha^{(i)} x_i$ в том и только в том случае, если $\alpha_m^{(i)} \to \alpha^{(i)}$. Если $\mathfrak{X}$ является B-пространством, то, для того чтобы последовательность $\{y_m\}$ была слабо фундаментальной, необходимо и достаточно, чтобы $\lim_{m\to\infty} \alpha_m^{(i)}$ существовал для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant n$.

2. Показать, что пространство $L_1(S, \Sigma, \mu)$, не являющееся конечномерным, не может быть рефлексивным.

3. Показать, что подмножество K пространства l_p, $p \geqslant 1$, относительно бикомпактно в том и только в том случае, если оно ограничено и $\lim_{n\to\infty} \sum_{n=i}^{\infty} |a_i|^p = 0$ равномерно относительно $[a_1, a_2, \ldots] \in K$.

Показать, что в пространстве l_1 сильная относительная бикомпактность совпадает со слабой компактностью.

4. Если $1 < p < \infty$, то последовательность $x^{(n)} = \{\xi_i^{(n)}, i = 1, 2, \ldots\}$ является слабо фундаментальной в l_p в том и только в том случае, если она ограничена и все пределы $\xi_i = \lim_n \xi_i^{(n)}$, $i = 1, 2, \ldots$, существуют, при этом такая последовательность слабо сходится к элементу $x = \{\xi_i\}$. Показать, что при $p = 1$ то же условие дает c_0-сходимость в $l_1 = c_0^*$.

5. Показать, что пространство $B(S, \Sigma)$ не может быть слабо полным, если Σ бесконечно, и что пространство $B(S)$ не может быть слабо полным, если множество S бесконечно. Показать, что пространство $ba(S, \Sigma)$ может быть рефлексивным лишь в том случае, если оно конечномерно.

6. Пусть $f, f_n \in L_\infty(S, \Sigma, \mu)$; тогда $\lim_n \int_S f_n(s) g(s) \mu(ds) = \int_S f(s) g(s) \mu(ds)$ для каждого g из $L_1(S, \Sigma, \mu)$ в том и только в том случае, если последовательность $\{f_n\}$ ограничена в $L_\infty(S, \Sigma, \mu)$ и

$$\lim_n \int_e f_n(s) \mu(ds) = \int_e f(s) \mu(ds)$$

для каждого e из некоторой алгебры, порождающей σ-алгебру Σ.

7. Пользуясь теоремой 6.3, найти общий вид линейных функционалов из c_0^* и c^* (см. упражнение II.4.33).

8. Показать, что пространства c_0 и c не являются ни слабо полными, ни рефлексивными.

9. Множество K из c или из c_0 относительно бикомпактно в том и только в том случае, если оно ограничено и предел $\lim_n \xi_n$ существует равномерно относительно $x = \{\xi_n\}$ из K. Множество K из c или из c_0 слабо компактно в том и только в том случае, если оно ограничено и $\lim_n \xi_n$ существует квазиравномерно относительно $x = \{\xi_n\}$ из K.

10. Пусть $x_n = \{\xi_i^{(n)}\}$ и $x = \{\xi_i\}$ — векторы из c или из c_0. Тогда x_n слабо сходится к x в том и только в том случае, если последовательность $\{x_n\}$ ограничена и

$$\lim_n \lim_i \xi_i^{(n)} = \lim_i \xi_i,$$

$$\lim_n \xi_i^{(n)} = \xi_i, \quad i = 1, 2, \ldots .$$

Последовательность $\{x_n\}$ в том и только в том случае является слабо фундаментальной, если $\lim_n \xi_i^{(n)}$ и $\lim_n \lim_i \xi_i^{(n)}$ существуют.

11. Показать, что пространство bv_0 изометрически изоморфно пространству l_1 и что пространство bv есть прямая сумма пространства bv_0 и некоторого одномерного подпространства. Пользуясь этим изоморфизмом, перенести на эти пространства все результаты, полученные для l_1. Какой вид принимают эти результаты в данном случае?

12. Показать, что пространство bv естественно интерпретировать как cs^* и что bv_0 имеет аналогичную интерпретацию как пространство, сопряженное к подпространству пространства cs, состоящему из рядов, суммы которых равны нулю. Пользуясь этим, перенести утверждения упражнения 4 на bv и bv_0.

13. Показать, что пространство bs изометрически изоморфно пространству l_∞. Показать, как этот изоморфизм может быть использован для решения всех перечисленных в таблице проблем, относящихся к bs. Какой вид принимают эти результаты в данном случае?

14. Пространство cs изометрически изоморфно пространству c. Пользуясь этим, решить для этого пространства все проблемы, указанные в таблице.

15. Пусть S — бикомпактное хаусдорфово пространство. Показать, что $C(S)$ слабо полно в том и только в том случае, если оно конечномерно, что будет тогда и только тогда, если множество S конечно. Пользуясь этим результатом и следствием 6.19, показать, что то же самое утверждение справедливо и для любого нормального пространства.

16. Пусть S — вполне регулярное топологическое пространство. Показать, что для того чтобы $C(S)$ было сепарабельно, необходимо и достаточно, чтобы S было бикомпактным метрическим пространством.

17. Показать, что последовательность $\{\lambda_n\}$ элементов из $ba(S, \Sigma)$ слабо сходится к некоторому элементу $\lambda \in ba(S, \Sigma)$ в том и только в том случае, если существует такое неотрицательное $\mu \in ba(S, \Sigma)$, что $\lim\limits_{\mu(E)\to 0} |\lambda_n(E)| = 0$ равномерно относительно n и

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n(E) = \lambda(E) \quad \text{для} \quad E \in \Sigma.$$

18. Пусть $\mu_n \in ba(S, \Sigma)$. Тогда для существования такого $\mu \in ba(S, \Sigma)$, что

$$\lim_n \int_S f(s)\, \mu_n(ds) = \int_S f(s)\, \mu(ds), \quad f \in B(S, \Sigma),$$

необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{|\mu_n|\}$ была ограничена и предел $\lim\limits_n \mu_n(E)$ существовал для каждого множества $E \in \Sigma$.

19. Пусть μ — неотрицательный элемент пространства $ba(S, \Sigma)$, и пусть $ba(S, \Sigma, \mu)$ — подпространство пространства $ba(S, \Sigma)$, состоящее из всех λ, абсолютно непрерывных относительно μ. Для каждого $a = (e_1, \ldots, e_n)$ из определенного в теореме 5.6 частично упорядоченного множества A обозначим через U_a оператор, действующий в $ba(S, \Sigma, \mu)$ и определяемый равенством

$$(U_a\lambda)(e) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda(e_i)}{\mu(e_i)} \mu(e_i e), \quad e \in \Sigma.$$

Показать, что, для того чтобы множество $K \subset ba(S, \Sigma)$ было относительно бикомпактным, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие условия:

(I) K ограничено;

(II) существует такое неотрицательное $\mu \in ba(S, \Sigma)$, по отношению к которому каждое λ из K абсолютно непрерывно;

(III) $\lim\limits_a U_a\lambda = \lambda$ равномерно относительно $\lambda \in K$.

20. Пусть $\Sigma = \{E_n\}$ — счетная алгебра подмножеств множества S, а Σ_1 — σ-алгебра, порожденная алгеброй Σ. Пусть μ — определенная на Σ_1 неотрицательная конечная счетно аддитивная мера. В множестве A_μ μ-измеримых функций f, таких, что $\operatorname{vrai\,sup}\limits_{\mu \;\; s \in S} |f(s)| \leqslant 1$, мы введем метрику

$$\varrho_\mu(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left| \int\limits_{E_n} \{f(s) - g(s)\} \mu(ds) \right|.$$

Показать, что A_μ есть бикомпактное метрическое пространство. Показать, что ограниченное множество K из $ca(S, \Sigma_1)$ в том и только в том случае относительно бикомпактно, если в $ca(S, \Sigma_1)$ существует такое неотрицательное μ, что непрерывность интеграла

$$\int\limits_S f(s)\lambda(ds)$$

на множестве $f \in A_\mu$ равномерна относительно $\lambda \in K$.

21. Показать, что пространство $ca(S, \Sigma)$ рефлексивно только в том случае, когда оно конечномерно.

22. Пусть S — нормальное топологическое пространство, а $rca(S)$ — пространство регулярных счетно аддитивных функций множества, определенных на борелевских множествах из S. Доказать, что:

(I) Пространство $rca(S)$ слабо полно.

(II) Последовательность $\{\mu_n\}$ из $rca(S)$ является слабо фундаментальной в том и только в том случае, если она ограничена и предел $\lim\limits_n \mu_n(e) = \mu(e)$ существует для каждого борелевского множества e; в этом случае $\mu \in rca$ и μ_n слабо сходится к μ.

(III) Подмножество $K \subseteq rca(S)$ слабо компактно в том и только в том случае, если оно ограничено и если для некоторого положительного λ из $rca(S)$ предел $\lim\limits_{\lambda(e)\to 0} \mu(e) = 0$ равномерно относительно μ из K.

(IV) Множество $K \subseteq rca(S)$ слабо компактно в том и только в том случае, если оно ограничено и счетная аддитивность $\mu(e)$, где e принадлежит алгебре борелевских множеств, равномерна относительно $\mu \in K$.

(V) Пространство $rca(S)$ рефлексивно только в том случае, если оно конечномерно.

23. Пусть $1 < p < \infty$, f_n, $f \in L_p[0, 1]$ (здесь имеется в виду мера Лебега). Тогда f_n слабо сходится к f в том и только в том случае, если

$$\text{(I)} \qquad \sup_n \int_0^1 |f_n(t)|^p \, dt < \infty;$$

$$\text{(II)} \qquad \int_0^x f_n(t)\, dt \to \int_0^x f(t)\, dt, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Последовательность $\{f_n\}$ будет слабо фундаментальной в том и только в том случае, если выполняется условие (I) и $\lim\limits_n \int_0^x f_n(t)\, dt$ существует для каждого $0 \leqslant x \leqslant 1$.

24. Пусть f, $f_n \in L_p(S, \Sigma, \mu)$, где $1 < p < \infty$, и пусть Σ_0 — совокупность множеств конечной меры, характеристические функции которых образуют в $L_p(S, \Sigma, \mu)$ фундаментальное множество. Тогда последовательность $\{f_n\}$ в том и только в том случае слабо сходится к f, если она ограничена и

$$\lim_n \int_E f_n(s)\, \mu(ds) = \int_E f(s)\, \mu(ds), \quad E \in \Sigma_0.$$

Последовательность $\{f_n\}$ будет слабо фундаментальной в том и только в том случае, если она ограничена и $\lim\limits_n \int_E f_n(s)\, \mu(ds)$ существует для каждого $E \in \Sigma_0$.

25. Пусть f_n, $f \in L_1(S, \Sigma, \mu)$. Тогда последовательность f_n слабо сходится к f в том и только в том случае, если $\lim\limits_n \int_E f_n(s)\, \mu(ds) = \int_E f(s)\, \mu(ds)$ для каждого $E \in \Sigma$. Кроме того, последователь-

ность $\{f_n\}$ будет слабо фундаментальной в том и только в том случае, если $\lim\limits_n \int\limits_E f_n(s)\,\mu(ds)$ существует для всех $E \in \Sigma$.

26. Показать, что ограниченное подмножество $K \subseteq L_\infty(S, \Sigma, \mu)$ бикомпактно в том и только в том случае, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение π множества S на конечное число измеримых подмножеств, что

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{\substack{s \in A \\ t \in A}} |f(s) - f(t)| < \varepsilon$$

для каждого $A \in \pi$.

27. Пусть $g,\ g_n \in L_\infty(0, 1)$. Тогда $\int\limits_0^1 g_n(t) f(t)\,dt \to \int\limits_0^1 g(t) f(t)\,dt$ для каждого $f \in L_1(0, 1)$ в том и только в том случае, если

(I) $\sup\limits_n \operatorname*{vrai\,sup}\limits_t |g_n(t)| < \infty$;

(II) $\int\limits_0^x g_n(t)\,dt \to \int\limits_0^x g(t)\,dt.$

28. Показать, что пространства $BV(I)$, $NBV(I)$ и $AC(I)$ нерефлексивны.

29. Если $L_\infty(I)$ есть пространство определенных на I существенно ограниченных измеримых по Лебегу функций и если пространство $\Phi + L_\infty(I)$ нормировано условием

$$|a + g| = |a| + |g| = |a| + \operatorname*{vrai\,sup}_{s \in I} |g(s)|,$$

то равенством

$$x^* f = af(a) + \int\limits_I g(s) f'(s)\,ds, \quad f \in AC(I),$$

устанавливается некоторый изометрический изоморфизм между $AC^*(I)$ и $\Phi + L_\infty(I)$.

30. Ограниченное подмножество K пространства $NBV(I)$ (или $BV(I)$) слабо компактно в том и только в том случае, если существует такое $g \in NBV$ (или BV), что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что из неравенства $\sum\limits_{i=1}^n |g(s_i) - g(t_i)| < \delta$ вытекает неравенство $\sum\limits_{i=1}^n |f(s_i) - f(t_i)| < \varepsilon$ для каждого f из K.

Для того чтобы последовательность $\{f_n\}$ из $BV(I)$ или $NBV(I)$ слабо сходилась к некоторому элементу f, необходимо и достаточно, чтобы множество $\{f_n\}$ было слабо компактным и чтобы $f_n(s) \to f(s)$ для каждого s из I.

31. Ограниченное подмножество K пространства $AC(I)$ в том и только в том случае слабо компактно, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что из неравенства $\sum_{i=1}^{n} |s_i - t_i| < \delta$ вытекает неравенство $\sum_{i=1}^{n} |f(s_i) - f(t_i)| < \varepsilon$ для каждого f из K.

Для того чтобы последовательность $\{f_n\}$ из $AC(I)$ слабо сходилась к некоторому элементу f, необходимо и достаточно, чтобы множество $\{f_n\}$ было слабо компактным и чтобы $f_n(s) \to f(s)$ для всех s.

32. Пусть $K \subseteq AC(I)$, и, если I не совпадает с $(-\infty, \infty)$, пусть $AC(I)$ вложено в $AC(-\infty, \infty)$ так, что каждое $f \in AC(I)$ постоянно вне I. Тогда для того, чтобы множество K было относительно бикомпактным в $AC(I)$, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие условия:

(I) множество K ограничено;

(II) $\lim_{n\to\infty} v(f, I_n^+ \cup I_n^-) = 0$ равномерно относительно f из K, где $I_n^+ = [n, \infty)$ и $I_n^- = (-\infty, n]$.

(III) $\lim_{\varepsilon\to 0} |f - f_\varepsilon| = 0$ равномерно относительно f из K, где $f_\varepsilon(s) = f(s+\varepsilon)$.

33. Обозначим через Σ алгебру множеств на замкнутом интервале I, порожденную семейством подинтервалов с рациональными концами; элементы алгебры Σ расположим в последовательность $\{E_n\}$. Пусть μ — мера Лебега. В множестве A измеримых по Лебегу функций f, для которых $\operatorname{vrai\,sup}_{s\in I} |f(s)| \leqslant 1$, введем метрику:

$$\varrho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left| \int_{E_n} \{f(s) - g(s)\} \mu(ds) \right|.$$

Показать, что A есть бикомпактное метрическое пространство. Показать, что для относительной бикомпактности ограниченного множества K из $AC(I)$ необходимо и достаточно, чтобы непрерывность интеграла $\int_I f(s)\,dg(s)$ для $f \in A$ была равномерной относительно $f \in K$.

34. Пусть K будет ограниченным подмножеством пространства $NBV(I)$ при тех же предположениях и в тех же обозначениях, что и в предыдущем упражнении. В обозначениях упражнения 20 и § 12 показать, что множество K относительно бикомпактно в том и только в том случае, если существует такая функция $g \in NBV(I)$, что непрерывность интеграла $\int_I h(s)\,\mu_f(ds)$ для $h \in A_{\mu_g}$ равномерна относительно $f \in K$.

35 (a). Пусть I — замкнутый интервал. Показать, что формулой

$$x_g^*(f) = \int_I f(s)\, dg(s), \quad f \in C(I),$$

устанавливается некоторый изометрический изоморфизм между пространствами $C(I)^*$ и $NBV(I)$. Показать, что если $\{g_n\}$ есть некоторая последовательность функций из $NBV(I)$, то $\lim_{n\to\infty} \int_I f(s)\, dg_n(s) = \int_I f(s)\, dg_0(s)$ для всех $f \in C(I)$ в том и только в том случае, если

(I) $v(g_n, I)$ равномерно ограничено;

(II) $g_n(s) \to g_0(s)$ в каждой точке s непрерывности функции g_0.

(b). Пользуясь установленным в первом абзаце параграфа 12 соотношением между пространствами $BV(I)$ и $ba(I, \Sigma)$, показать, что пространство $BV(I)$ можно считать сопряженным к прямой сумме $\mathfrak{X}$ пространства $B(S, \Sigma)$ и некоторого одномерного пространства, и вывести необходимые и достаточные условия $\mathfrak{X}$-сходимости последовательности элементов из $BV(I)$.

36. Показать, что пространство $C^p[a, b]$ разложимо в прямую сумму некоторого конечномерного пространства и пространства изоморфного $C[a, b]$. Показать, что:

(a) Каждый элемент x^* пространства, сопряженного к C^p, однозначно представим в виде

$$x^*(f) = \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i f^{(i)}(a) + \int_a^b f^{(p)}(s)\, \mu(ds),$$

где μ — регулярная борелевская мера.

(b) Последовательность f_n в том и только в том случае является слабо фундаментальной последовательностью (слабо сходящейся к f), если она ограничена и $f_n^{(j)}(s)$ сходится (к $f^{(j)}(s)$) для каждого $s \in [a, b]$ и каждого $j = 0, 1, \ldots, p$.

(c) Пространство C^p не является ни слабо полным, ни рефлексивным.

(d) Подмножество $A \subseteq C^p$ в том и только в том случае относительно бикомпактно, если оно ограничено и если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что из неравенства $|s - t| < \delta$ вытекает неравенство $|f^{(p)}(s) - f^{(p)}(t)| < \varepsilon$ для $s, t \in [a, b]$.

(e) Подмножество $A \subseteq C^p$ в том и только в том случае слабо компактно, если оно ограничено и множество $\{f^{(p)}\}$, $f \in A$, квазиравностепенно непрерывно.

37. Пусть D — ограниченная область. Показать, что последовательность функций из $A(D)$ является слабо фундаментальной (слабо сходящейся к $f \in A(D)$) в том и только в том случае, если она равномерно ограничена и сходится (к f) в каждой точке границы

области D. Показать, что подмножество из $A(D)$ в том и только в том случае относительно бикомпактно, если оно ограничено и принадлежащие ему функции равностепенно непрерывны. Показать, что подмножество из $A(D)$ в том и только в том случае слабо компактно, если оно ограничено и квазиравностепенно непрерывно на границе области D. Показать, что пространство $A(D)$ никогда не является ни слабо полным, ни рефлексивным. Показать, что $A(D)$ является замкнутым подпространством пространства $C(\overline{D})$.

38. Показать, что пространство AP не является ни слабо полным, ни рефлексивным.

39. Показать, что для того чтобы ограниченное подмножество K пространства AP было относительно бикомпактным, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие условия:

(I) для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое l_ε, что множество

$$M_\varepsilon = \{t \,\|\, f(s+t) - f(s)| < \varepsilon, \quad \text{если} \quad -\infty < s < +\infty \text{ и } f \in K\}$$

имеет непустое пересечение с каждым интервалом длины l_ε;

(II) для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$|f(s) - f(t)| < \varepsilon, \quad \text{если} \quad |s-t| < \delta \quad \text{и} \quad f \in K.$$

40. Пусть S — бикомпактное хаусдорфово пространство. Показать, что последовательность $\{f_n\} \in C(S)$ в том и только в том случае является слабо фундаментальной, если $|f_n|$ равномерно ограничены и $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(s)$ существует для каждого $s \in S$.

41. Показать, что последовательность $\{f_n\}$ элементов пространства AP в том и только в том случае является слабо фундаментальной, если $|f_n|$ равномерно ограничены и каждая последовательность $\{s_m\}$ вещественных чисел содержит такую подпоследовательность $\{s_{m_i}\}$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{i\to\infty} f_n(s_{m_i})$ существует. Показать, что последовательность $\{f_n\}$ элементов пространства AP в том и только в том случае слабо сходится к $f \in AP$, если каждая последовательность $\{s_m\}$ вещественных чисел содержит такую подпоследовательность $\{s_{m_i}\}$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{i\to\infty} f_n(s_{m_i}) = \lim\limits_{i\to\infty} f(s_{m_i})$.

42. Пусть S — нормальное топологическое пространство. Показать, что последовательность $\{f_n\} \in C(S)$ в том и только в том случае является слабо фундаментальной, если $|f_n|$ равномерно ограничены и каждая последовательность $\{s_m\}$ точек из S содержит подпоследовательность $\{s_{m_i}\}$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{i\to\infty} f_n(s_{m_i})$ существует.

43. Показать, что последовательность $\{f_n\}$ элементов пространства $B(S, \Sigma)$ в том и только в том случае является слабо фундаментальной, если $|f_n|$ равномерно ограничены и каждая последовательность $\{s_m\}$ точек из S содержит подпоследовательность $\{s_{m_i}\}$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{i\to\infty} f_n(s_{m_i})$ существует.

44. Показать, что последовательность $\{x_n\}$ элементов гильбертова пространства в том и только в том случае является слабо фундаментальной (со слабым пределом x), если $|x_n|$ равномерно ограничены и $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, y_\alpha)$ существует ($\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, y_\alpha)=(x, y_\alpha)$) для каждого элемента y_α из ортонормального базиса.

45. Пусть $\{y_\alpha\}$ — некоторый ортонормированный базис гильбертова пространства $\mathfrak{H}$. Показать, что ограниченное подмножество A из $\mathfrak{H}$ относительно бикомпактно в том и только в том случае, если для каждого $\varepsilon>0$ существует конечное множество $y_{\alpha_1}, \ldots, y_{\alpha_n}$ элементов ортонормированного базиса $\{y_\alpha\}$ таких, что $\sum\limits_{\alpha\neq\alpha_1,\ldots,\alpha_n}|(x, y_\alpha)|^2<\varepsilon$ для всех x из A.

46. Показать, что каждый непрерывный линейный функционал, определенный на пространстве s, имеет вид

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\xi_i,$$

где $x=\{\xi_i\}\in s$ и $[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ есть конечное множество комплексных чисел.

47. Показать, что совокупность $\{x_\alpha\}=\{\xi_i^{(\alpha)}\}$ элементов пространства s в том и только в том случае относительно бикомпактна, если $\xi_i^{(\alpha)}$ для каждого фиксированного i равномерно ограничены относительно α.

48. Показать, что пространство $BV(I)$ разложимо в прямую сумму своего подпространства $NBV(I)$ и подпространства, состоящего из всех таких функций из BV, которые обращаются в нуль всюду, кроме некоторого счетного множества точек. Доказать, что это последнее пространство изометрически изоморфно пространству L_1. Пользуясь этим фактом и результатом упражнения 34, охарактеризовать относительно бикомпактные подмножества пространства $BV(I)$.

В. *Различные упражнения*

49. (a) Показать, что если в пространстве $L_1(S, \Sigma, \mu)$ сильная и слабая сходимости последовательностей совпадают, то каждое множество положительной меры из S является атомом.

(b) Показать, что пространство $L_1(S, \Sigma, \mu)$ в том и только в том случае эквивалентно l_1, если в Σ существует такое счетное множество $\{E_n\}$ атомов конечной меры, что каждое измеримое подмножество из $S-\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$ является либо атомом бесконечной меры, либо нуль-множеством.

50. Показать, что пространство, эквивалентное $C(S)$, может быть эквивалентно некоторому замкнутому подпространству пространства $ba(S, \Sigma)$ только в том случае, если оно конечномерно.

51. Показать, что пространство $L_p(S, \Sigma, \mu)$, $1 < p < \infty$, может быть эквивалентно пространству $C(S)$ или пространству $L_1(S_1, \Sigma_1, \mu_1)$ лишь в том случае, если оно конечномерно.

52. Показать, что если $\mathfrak{X}_1$ есть конечномерное подпространство B-пространства $\mathfrak{X}$, то $\mathfrak{X}_1$ замкнуто и существует второе замкнутое подпространство $\mathfrak{X}_2 \subseteq \mathfrak{X}$ такое, что $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 \oplus \mathfrak{X}_2$.

53. Пусть (S, Σ, μ) — пространство с (необязательно положительной) мерой. Пусть $v(E) = v(\mu, E)$, если $E \in \Sigma$. Показать, что пространства $L_p(S, \Sigma, \mu)$ и $L_p(S, \Sigma, v)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, при естественном отображении одного на другое изометрически изоморфны. Переформулируйте все теоремы параграфа 8 для этого несколько более общего случая.

54. Показать, что, для того чтобы ограниченное подмножество K пространства $L_1(S, \Sigma, \mu)$ было слабо компактным, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие условия:

(I) $\lim\limits_{\mu(E) \to 0} \int\limits_E f(s)\, \mu(ds) = 0$ равномерно относительно $f \in K$;

(II) существует такая последовательность множеств $\{A_n\}$, $A_n \in \Sigma$, $\mu(A_n) < \infty$, что

$\lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_{S - A_n} f(s)\, \mu(ds) = 0$ равномерно относительно $f \in K$.

55. Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторое B-пространство, а (S, Σ, μ) — пространство с мерой. Предположим, что $f: S \to \mathfrak{X}$ и что функция $x^* f(\cdot)$ μ-интегрируема для каждого x^* из $\mathfrak{X}^*$. Показать, что существует такое $x^{**} \in \mathfrak{X}^{**}$, что

$$x^{**}(x^*) = \int\limits_S x^* f(t)\, \mu(dt), \quad x^* \in \mathfrak{X}^*.$$

56. (Гельфанд). Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторое B-пространство, а (S, Σ, μ) — пространство с мерой. Пусть $f^*: S \to \mathfrak{X}^*$, и предположим, что функция $f^*(\cdot)x$ μ-интегрируема для каждого x из $\mathfrak{X}$. Показать, что существует такое $x^* \in \mathfrak{X}^*$, что

$$x^* x = \int\limits_S f^*(s)\, x \mu(ds), \quad x \in \mathfrak{X}.$$

57. Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторое B-пространство и K — определенная на $\mathfrak{X} \times [0, 1]$ вещественная функция, линейная по x для каждого фиксированного $t \in [0, 1]$ и принадлежащая $L_q[0, 1]$ для каждого фиксированного $x \in \mathfrak{X}$ (имеется в виду мера Лебега). Предположим,

что

$$\lim_{x\to 0}\int_0^s K_x(t)\,dt=0,\quad 0\leqslant s\leqslant 1.$$

Доказать, что

$$\lim_{x\to 0}\int_0^1 |K_x(t)|^q\,dt=0, \text{ если } 1\leqslant q<\infty,$$

и что

$$\lim_{x\to 0}\operatorname*{vrai\,sup}_{0\leqslant t\leqslant 1}|K_x(t)|=0,\quad \text{если}\quad q=\infty.$$

58. Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторое B-пространство и K — определенная на $\mathfrak{X}\times[0, 1]$ комплексная функция, линейная по x для каждого фиксированного $t\in[0, 1]$ и принадлежащая пространству $NBV[0, 1]$ для каждого фиксированного x. Предположим, что $\lim\limits_{x\to 0}K_x(t)=0$ для $0\leqslant t\leqslant 1$. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 0}v(K_x, [0, 1])=0$.

59. Пусть $1\leqslant p\leqslant\infty$ и $\{\alpha_n\}$ — последовательность комплексных чисел такая, что ряд $\Sigma\alpha_n\xi_n$ сходится для каждого $\{\xi_n\}$ из l_p. Тогда $\{\alpha_n\}$ принадлежит $l_{p'}$, где $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$.

60. Если $\{\alpha_n\}$ есть последовательность комплексных чисел такая, что ряд $\Sigma\alpha_n\xi_n$ сходится для каждого $x=\{\xi_n\}$ из c, показать, что $\Sigma|\alpha_n|<\infty$.

61. Пусть $1\leqslant p<\infty$, $1<q\leqslant\infty$. Пусть $\{\alpha_{ij}\}$ — бесконечная матрица такая, что все ряды $\eta_i=\sum\limits_{j=1}^{\infty}\alpha_{ij}\xi_j$ сходятся для каждого $\xi=[\xi_1, \xi_2, \ldots]$ из l_p и что $\eta=[\eta_1, \eta_2, \ldots]$ принадлежит l_q. Показать, что если $q<\infty$, то существует такое число K, что

$$\Big(\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^q\Big)^{\frac{1}{q}}\leqslant K\Big(\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\ \text{для каждого}\ \xi=[\xi_j]\ \text{из}\ L_p,$$

а если $q=\infty$, то существует такое число K, что

$$\sup_{1\leqslant i<\infty}|\eta_i|\leqslant K\Big(\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\ \text{для каждого}\ \xi=[\xi_j]\ \text{из}\ L_p.$$

62. Пусть $1\leqslant p<\infty$ и $1\leqslant q<\infty$. Пусть (S, Σ, μ) и (S_1, Σ_1, μ_1) пространства с мерой и K — определенная на $S\times S_1$ комплексная $\mu\times\mu_1$-измеримая функция такая, что для каждого $f\in L_p(S_1, \Sigma_1, \mu_1)$ интеграл

$$g(s)=\int_{S_1}K(s, s_1)f(s_1)\,\mu_1(ds_1)$$

существует почти всюду относительно μ_1 и принадлежит L_q. Показать, что существует такая константа $M < \infty$, что $|g|_q \leqslant M |f|_p$.

63. Пусть f и g — определенные на замкнутом интервале $[a, b]$ комплексные функции. Мы говорим, что интеграл $\int\limits_a^b f(s)\,dg(s)$ существует в смысле Римана — Стильтьеса, если для каждого $\varepsilon > 0$ на интервале $[a, b]$ найдутся такие точки $s_1, \ldots, s_n$, что если $t_1, \ldots, t_n$ и $u_1, \ldots, u_l$ — две возрастающие последовательности точек из $[a, b]$, причем каждая из этих последовательностей содержит все точки $s_1, \ldots, s_n$, то

$$\left| \sum_{i=1}^{n-1} f(t_i)\,(g(t_{i+1}) - g(t_i)) - \sum_{i=1}^{l-1} f(u_i)\,(g(u_{i+1}) - g(u_i)) \right| \leqslant \varepsilon.$$

Показать, что если g есть определенная на $[a, b]$ функция, интеграл от которой $\int\limits_a^b f(s)\,dg(s)$, в смысле Римана — Стильтьеса, существует для каждой функции f из $C[a, b]$, то g принадлежит $BV[a, b]$, и обратно.

64. Показать, что каждая непрерывная комплексная функция $f(s)$ вещественного переменного s, удовлетворяющая условию $f(s) = f(s + 2\pi)$, может быть аппроксимирована конечными линейными комбинациями функций вида e^{ins}, $-\infty < s < +\infty$.

65. Показать, что каждая непрерывная функция, определенная на прямом произведении $S \times T$ двух бикомпактных хаусдорфовых пространств S и T, может быть равномерно аппроксимирована конечными линейными комбинациями функций вида $f(s)\,g(t)$.

66. Пусть S — бикомпактное хаусдорфово пространство, $x, x_n \in C(S)$ и

(a) $\lim\limits_n x_n(s) = x(s), \quad s \in S;$

(b) $|x_n(s)| \leqslant M < \infty, \quad s \in S, \quad n = 1, 2, \ldots.$

Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число n и такие комплексные числа α_i, $i = 1, \ldots, n$, что

$$\left| x(s) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i(s) \right| < \varepsilon, \quad s \in S.$$

67. Показать, что гильбертово пространство изометрически эквивалентно пространству $L_2(S, \Sigma, \mu)$, где Σ состоит из всех подмножеств множества S и μ есть счетно аддитивная функция, принимающая на каждом множестве, состоящем из одной точки, значение единица.

68. Пусть (S, Σ, μ) — пространства с конечной мерой и K — ограниченное подмножество из $L_\infty(S, \Sigma, \mu)$. Показать, что K, рассматриваемое как подмножество $L_1(S, \Sigma, \mu)$, слабо компактно.

69. Показать, что множество характеристических функций множеств из Σ является фундаментальным в $L_\infty(S, \Sigma, \mu)$.

70. Совокупность всех векторов $x = \{\eta_n\}$ вещественного пространства l_2, у которых $|\eta_n| \leqslant \frac{1}{n}$, называется *гильбертовым параллелепипедом*. Показать, что это множество бикомпактно в l_2.

71. Пусть (S, Σ, μ) — пространство с мерой. Пусть f — определенная на S комплексная функция такая, что $fg \in L_1(S, \Sigma, \mu)$ для каждого $g \in L_p(S, \Sigma, \mu)$, $1 < p \leqslant \infty$. Показать, что f принадлежит $L_q(S, \Sigma, \mu)$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Показать, что если мера в S σ-конечна, то это же верно и при $p = 1$.

72. Оператор A в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ называется *эрмитовым*, если $(Ax, y) = (x, Ay)$ для любых x, y из $\mathfrak{H}$.

(a) Показать, что если оператор A эрмитов, то равенство $A = 0$ эквивалентно тому, что $(Ax, x) = 0$ для всех x из $\mathfrak{H}$.

(b) Показать, что если оператор A_n при $n \geqslant 0$ эрмитов, то $\lim_{n\to\infty} (A_n x, y) = (A_0 x, y)$ для всех x, y из $\mathfrak{H}$ в том и только в том случае, если $\lim_{n\to\infty} (A_n x, x) = (A_0 x, x)$ для всех x из $\mathfrak{H}$.

73. Определенная на интервале I вещественная функция в том и только в том случае принадлежит к $BV(I)$, если она представляется в виде разности двух определенных на I ограниченных монотонно возрастающих функций.

74. Пусть (S, Σ, μ) — пространство с конечной положительной мерой. Показать, что в F-пространстве $TM(S, \Sigma, \mu)$ можно ввести эквивалентную норму формулой

$$|f| = \int_S \frac{|f(s)|}{1 + |f(s)|} \mu(ds).$$

75. Пусть S — топологическое пространство, Σ — некоторая σ-алгебра его подмножеств и $\mathfrak{X}$ — B-пространство. Пусть μ — определенная на Σ функция множества со значениями в $\mathfrak{X}$. Предположим, что для каждого x^* из $\mathfrak{X}^*$ функция множества $x^*\mu$ регулярна и счетно аддитивна. Тогда существует такая неотрицательная регулярная счетно аддитивная функция множества $\nu \in ca(S, \Sigma)$, что $\lim_{\nu(E)\to 0} \mu(E) = 0$.

76. Упорядочим пространство $B(S, \Sigma)$, полагая, что $f \geqslant g$, если $f(s) \geqslant g(s)$ для всех s из S, и пространство $ba(S, \Sigma)$, полагая, что $\mu \geqslant \lambda$, если $\mu(E) \geqslant \lambda(E)$ для E из Σ. Показать, что $\mu \geqslant \lambda$

в том и только в том случае, если

$$\int_S f(s)\,\mu(ds) \geqslant \int_S f(s)\,\lambda(ds) \quad \text{для всех} \quad f \geqslant 0,$$

и что $f \geqslant g$ в том и только в том случае, если

$$\int_S f(s)\,\mu(ds) \geqslant \int_S g(s)\,\mu(ds) \quad \text{для всех } \mu \geqslant 0.$$

77. Упорядочим пространство $L_\infty(S, \Sigma, \mu)$, полагая $f \geqslant g$, если $f(s) \geqslant g(s)$ для почти всех s из S, и пространство $ba(S, \Sigma_1, \mu_1)$ (обозначения см. в п. 8.15), полагая $\mu \geqslant \lambda$, если $\mu(E) \geqslant \lambda(E)$ для E из Σ_1. Показать, что $\mu \geqslant \lambda$ в том и только в том случае, если

$$\int_S f(s)\,\mu(ds) \geqslant \int_S f(s)\,\lambda(ds) \quad \text{для всех } f \geqslant 0,$$

и что $f \geqslant g$ в том и только в том случае, если

$$\int_S f(s)\,\mu(ds) \geqslant \int_S g(s)\,\mu(ds) \quad \text{для всех } \mu \geqslant 0,$$

C. *Упражнения на интегральные методы суммирования.*

Нижеследующие упражнения являются «непрерывными» аналогами упражнений II.4.31—II.4.54. Для того чтобы выполнить эти упражнения, читатель может вспомнить решения соответствующих упражнений, приведенных в II.4. Необходимо отметить, что, кроме тех случаев, когда говорится противное, результаты упражнений 78—99 остаются справедливыми, если определяемые ниже пространства M_0, M_1 и M_2 интерпретировать как пространства функций, значения которых принадлежат некоторому B-пространству $\mathfrak{X}$.

78. Пусть R — множество положительных вещественных чисел, $\mathscr{B}$ — алгебра борелевских подмножеств R и λ — мера Лебега для множеств из $\mathscr{B}$. Пусть M_0 обозначает семейство определенных на R ограниченных λ-измеримых функций f таких, что $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ существует. Показать, что если мы положим

$$|f| = \sup_{0 \leqslant x < \infty} |f(x)|,$$

то M_0 будет B-пространством.

79. Пусть $K(x, y)$ — определенная на $R \times R$ $\lambda\times\lambda$-измеримая функция. Предположим, что для каждого фиксированного x функция $K(x, y)$ λ-интегрируема. Показать, что, для того чтобы интеграл

$\int\limits_0^\infty K(x, y) f(y)\, dy$ принадлежал M_0 для каждой функции f из M_0, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие условия:

(a) $\int\limits_0^\infty |K(x, y)|\, dy$ ограничен относительно x;

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \int\limits_0^A K(x, y)\, dy$ существует для всех $0 < A < \infty$;

(c) для каждого $\varepsilon > 0$ и $A > 0$ существует такое $\delta > 0$ и такое $N > 0$, что

$$\left| \int\limits_E K(x, y)\, dy \right| < \varepsilon, \text{ если } E \subseteq (0, A],\ \lambda(E) < \delta,\ x > N.$$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} \int\limits_0^\infty K(x, y)\, dy$ существует.

Показать, что $\int\limits_0^\infty K(x, y) f(y)\, dy$ имеет при $x = \infty$ тот же самый предел, что и $f(x)$, в том и только в том случае, если

(b′) $\lim\limits_{x\to\infty} \int\limits_0^A K(x, y)\, dy = 0$ для всех $0 < A < \infty$ и

(d′) $\lim\limits_{x\to\infty} \int\limits_0^\infty K(x, y)\, dy = 1$.

80. Пусть k — неотрицательная функция вещественного переменного, интегрируемая по Лебегу на каждом конечном интервале. Положим $K(x) = \int\limits_0^x k(y)\, dy$. Показать, что

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{K(x)} \int\limits_0^x f(y) k(y)\, dy$$

для каждого f из M_0 в том и только в том случае, если $\lim\limits_{x\to\infty} K(x) = \infty$.

81. Пусть k — возрастающая неотрицательная функция вещественного переменного, интегрируемая на каждом конечном интервале. Положим $K(x) = \int\limits_0^x k(y)\, dy$. Показать, что если $\lim\limits_{x\to\infty} k(x)/K(x) = 0$,

то

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{K(x)}\int_0^x f(y)\,k(x-y)\,dy=\lim_{x\to\infty}f(x)$$

для всех f из M_0.

82. Пусть μ — неотрицательная мера, определенная для всех борелевских подмножеств положительной вещественной полуоси. Предположим, что $\int_0^\infty e^{-s_0t}\mu(dt)=\infty$, но что $\int_0^\infty e^{-st}\mu(dt)=N(s)<\infty$ при $s>s_0$. Положим $N(f,s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,\mu(dt)$, если $s>s_0$ и $f\in M_0$. Показать, что $\lim_{s\to s_0}N(s)^{-1}N(f,s)=\lim_{x\to\infty}f(x)$, если $f\in M_0$.

83. Показать, что если f принадлежит M_0, то

(a) (Чезаро)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(y)\,dy=\lim_{x\to\infty}f(x);$$

(b) если $\alpha>0$, то

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha}{x^\alpha}\int_0^x (x-y)^{\alpha-1}f(y)\,dy=\lim_{x\to\infty}f(x);$$

(c) (Абель) $\lim_{x\to0}x\int_0^\infty e^{-xy}f(y)\,dy=\lim_{x\to\infty}f(x);$

(d) (Гаусс) $\lim_{x\to0}\frac{2x}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-(xy)^2}f(y)\,dy=\lim_{x\to\infty}f(x);$

(e) $\lim_{x\to0}\frac{2}{\pi x}\int_0^\infty\left(\frac{\sin xy}{y}\right)^2 f(y)\,dy=\lim_{x\to\infty}f(x).$

84. Пусть (R,Σ,λ) определено как в упражнении 78. Обозначим через M_1 пространство всех определенных на R ограниченных λ-измеримых функций f, для которых $\lim_{x\to0}f(x)$ существует. Положив

$$|f|=\sup_{0\leqslant x<\infty}|f(x)|,$$

показать, что M_1 есть B-пространство.

85. Пусть $K(x,y)$ — определенная на $R\times R$ $\lambda\times\lambda$-измеримая функция. Предположим, что $K(x,y)$ для каждого фиксированного x λ-интегрируема. Показать, что для того, чтобы интеграл

$\int_0^\infty K(x, y) f(y)\, dy$ принадлежал M_1 для любой функции f из M_1, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие условия:

(a) $\int_0^\infty |K(x, y)|\, dy$ ограничен по x;

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \int_A^\infty K(x, y)\, dy$ существует для всех $0 < A < \infty$;

(c) для каждых $\varepsilon > 0$ и $A > 0$ существует такое $\delta > 0$ и такое $N > 0$, что $\left| \int_E K(x, y)\, dy \right| < \varepsilon$, если $E \subseteq [A, \infty]$, $\lambda(E) < \delta$ и $x < N$;

(d) для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $M > 0$ и такое $N > 0$, что $\int_M^\infty |K(x, y)|\, dy < \varepsilon$ при $x < N$;

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \int_0^\infty K(x, y)\, dy$ существует.

Показать, что $f(x)$ имеет при $x = 0$ тот же самый предел, что и $\int_0^\infty K(x, y) f(y)\, dy$ в том и только в том случае, если выполнены следующие условия:

(b′) $\lim\limits_{x\to 0} \int_A^\infty K(x, y)\, dy = 0$, если $0 < A < \infty$;

(e′) $\lim\limits_{x\to 0} \int_0^\infty K(x, y)\, dy = 1$.

86. Показать, что если $f \in M_1$, то

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(y)\, dy = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$;

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\alpha}{x^\alpha} \int_0^x (x-y)^{\alpha-1} f(y)\, dy = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$;

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} x \int e^{-xy} f(y)\, dy = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$;

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty e^{-(xy)^2} f(y)\, dy = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$;

(e) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{\pi x} \int\limits_0^\infty \left(\frac{\sin xy}{y}\right)^2 f(y)\, dy = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

87. Показать, что если $f \in L_\infty(R, \mathscr{B}, \lambda)$, то $z^2 \int\limits_0^\infty e^{-zx} \int\limits_0^x f(y)\, dy\, dx = z \int\limits_0^\infty e^{-zy} f(y)\, dy$ и, следовательно, что если $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} \int\limits_0^x f(y)\, dy$ существует, то и $\lim\limits_{z\to 0} z \int\limits_0^\infty e^{-zy} f(y)\, dy$ существует и имеет то же самое значение. Показать, что если $f \in L_\infty(R, \mathscr{B}, \lambda)$, $\alpha > 0$ и $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\alpha}{x^\alpha} \int\limits_0^x (x-y)^{\alpha-1} f(y)\, dy$ существует, то и $\lim\limits_{x\to 0} z \int\limits_0^\infty e^{-zy} f(y)\, dy$ существует и имеет то же самое значение.

88. Показать, что если f принадлежит $L_\infty(R, \mathscr{B}, \lambda)$ и если $\lim\limits_{x\to\infty} x f(x) = 0$, то $\lim\limits_{x\to 0} \int\limits_0^\infty e^{-xy} f(y)\, dy = A$ в том и только в том случае, если $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} \int\limits_0^x (x-y) f(y) dy = A$. (Указание: сравнить с упражнением II.4.54.)

89. Пусть M_2 обозначает множество всех таких λ-измеримых функций f, что

(a) функция f λ-интегрируема на каждом конечном интервале $[0, A]$;

(b) $\lim\limits_{A\to\infty} \int\limits_0^A f(x) dx$ существует.

Положим $|f| = \sup\limits_{0 \leqslant A < \infty} \left| \int\limits_0^A f(x)\, dx \right| + \sum\limits_{n=1}^\infty \frac{I_n}{2^n(1+I_n)}$,

где $I_n = \int\limits_0^n |f(x)|\, dx$. Показать, что M_2 является сепарабельным F-пространством. Если M_2 интерпретировать как некоторое пространство функций со значениями в B-пространстве $\mathfrak{X}$, то для того, чтобы M_2 было сепарабельным, необходимо и достаточно, чтобы пространство $\mathfrak{X}$ было сепарабельным.

90. Показать, что если β есть определенная на R функция ограниченной вариации и если f принадлежит M_2, то и $f\beta$ принадлежит M_2.

91. Показать, что если $\beta(x, y)$ есть определенная на $R\times R$ функция, для которой:

(a) вариация $v(\beta(x, \cdot), (0, \infty))$ равномерно ограничена;

(b) $|\beta(x, 0+)|$ равномерно ограничена;

(c) $\lim\limits_{x\to\infty}\int\limits_0^A \beta(x, y)\,dy = A$ для каждого $0 < A < \infty$, то

$$\lim_{x\to\infty}\lim_{A\to\infty}\int_0^A \beta(x, y) f(y)\,dy = \lim_{A\to\infty}\int_0^A f(y)\,dy, \text{ где } f\in M_2.$$

92. Показать, что если f принадлежит M_2, то

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_0^A e^{-xy} f(y)\,dy = \lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_0^A f(y)\,dy;$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_0^A e^{-(xy)^2} f(y)\,dy = \lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_0^A f(y)\,dy;$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{-\alpha}\int\limits_0^x (x-y)^\alpha f(y)\,dy = \lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_0^A f(y)\,dy, \quad \alpha\geqslant 0;$

(d) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_0^A \left(\frac{\sin xy}{xy}\right)^2 f(y)\,dy = \lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_0^A f(y)\,dy.$

93. Пусть $\{\alpha\}$ — некоторое множество индексов и

(a) $\beta_\alpha(0)$ равномерно ограничено относительно α;

(b) $v(\beta_\alpha, [0, \infty))$ равномерно ограничена относительно α.

Тогда если $f\in M_2$, то

$$\lim_{A\to\infty}\int_0^A f(x)\,\beta_\alpha(x)\,dx$$

существует равномерно относительно α.

94. Пусть $f(x)$ — λ-измеримая функция, λ-интегрируемая на каждом конечном интервале $[0, A]$. Предположим, что для некоторого комплексного числа $\lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_0^A e^{-zx} f(x)\,dx$ существует. Тогда

$$\lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-z'x} f(x)\,dx$$

существует в полуплоскости $\mathscr{R}(z') > \mathscr{R}(z)$ и является на ней аналитической функцией. (Указание: воспользоваться результатом упражнения 93.)

95. Если λ_n — последовательность положительных вещественных чисел, монотонно возрастающая до бесконечности, и если ряд (обобщенный ряд Дирихле) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda_n^{-z}$ сходится для некоторого комплексного числа z_0, то этот ряд сходится во всей полуплоскости $\operatorname{Re}(z) > \operatorname{Re}(z_0)$ и представляет собой здесь аналитическую функцию. (Указание: см. упражнения 93 и 94).

96. Если функция f интегрируема на каждом конечном интервале, если $\frac{1}{x}\int_0^x |f(t)|\,dt \leqslant B$ и если $\lim_{x\to 0}\int_0^x f(t)\,dt = A$, то

$$\lim_{x\to\infty} \frac{8}{3\pi x^2}\int_0^\infty \frac{\sin^3 xt}{t^3} f(t)\,dt = A.$$

97. Пусть K является преобразованием Лапласа функции g такой, что $\frac{g(s)}{s}$ принадлежит L_1 и $\int_0^\infty \frac{g(s)}{s}\,ds = 1$. Если функция f интегрируема на любом конечном интервале, если

$$\lim_{t\to 0} t\int_0^\infty e^{-tz} f(z)\,dz = A$$

и если

$$t\int_0^\infty e^{-tz}|f(z)|\,dz \leqslant B,$$

то

$$\lim_{t\to 0} t\int_0^\infty K(tz) f(z)\,dz = A.$$

98. Если функция f интегрируема на любом конечном интервале, если $\lim_{t\to 0} t\int_0^\infty e^{-tz} f(z)\,dz = A$ и $t\int_0^\infty e^{-tz}|f(z)|\,dz \leqslant B$, то при $a > 0$

$$\lim_{t\to 0}\int_0^\infty \frac{at}{(tz+a)^2} f(z)\,dz = A.$$

99. Пусть $1 \leqslant p < \infty$; для каждой функции f из $L_p(R, \mathscr{B}, \lambda)$ положим $f_y(x) = f(x+y)$. Тогда f_y будет непрерывной функцией y со значениями в $L_p(R, \mathscr{B}, \lambda)$.

100. Пусть K_s для каждого $s \in R$ является элементом пространства $L_1(R, \mathscr{B}, \lambda)$. Предположим, что

(a) $\int\limits_0^\infty |K_s(x)|\,dx \leqslant M < \infty; \quad s \in R;$

(b) $\lim\limits_{s\to\infty} \int\limits_A^\infty K_s(x)\,dx = 0, \quad 0 < A < \infty,$

(c) для каждого $\varepsilon > 0$ существуют такое $N \geqslant 0$ и такое $K > 0$, что

$$\int\limits_K^\infty |K_s(x)|\,dx < \varepsilon, \quad s \geqslant N;$$

(d) для каждого $\varepsilon > 0$ и $A > 0$ существуют такое $\delta > 0$ и такое $N > 0$, что

$$\left| \int\limits_E K_s(x)\,dx \right| < \varepsilon,$$

если $E \subseteq [A, \infty)$, $\lambda(E) < \delta$ и $s \geqslant N$.

Показать, что если f принадлежит $L_p(R, \mathscr{B}, \lambda)$, $1 \leqslant p < \infty$, то функция f_s, определяемая равенством

$$f_s(x) = \int\limits_0^\infty K_s(y) f(x+y)\,dy,$$

определена почти всюду относительно λ для $s \in R$; принадлежит $L_p(R, \mathscr{B}, \lambda)$ и предельное соотношение

$$\lim_{s\to\infty} f_s = f$$

выполняется по норме пространства L_p.

101. Предположим, что функция f измерима по Лебегу на всей числовой прямой и что

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p\,dx < \infty$, где $1 \leqslant p < \infty$. Показать, что

(a) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left| \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_x^{x+\varepsilon} f(y)\,dy \right\} - f(x) \right|^p dx = 0;$

(b) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left| \left\{ \frac{\alpha}{\varepsilon^\alpha} \int\limits_x^{x+\varepsilon} (\varepsilon + x - y)^{\alpha-1} f(y)\,dy \right\} - f(x) \right|^p dx = 0;$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left| \left\{ n \int\limits_0^\infty e^{-ny} f(x-y)\,dy \right\} - f(x) \right|^p dx = 0;$

$$\text{(d)}\ \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\left\{\frac{n}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(ny)^2}f(x-y)\,dy\right\}-f(x)\right|^p dx=0;$$

$$\text{(e)}\ \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\left\{\frac{1}{\pi n}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin ny}{y}\right)^2 f(x-y)\,dy\right\}-f(x)\right|^p dx=0.$$

14. Упражнения на ортогональные ряды и аналитические функции

Нижеследующие упражнения содержат приложение методов теории линейных пространств к теории ортогональных рядов. Важнейшим специальным случаем этой теории является теория рядов Фурье, в которой рассматривается разложение произвольной функции на интервале $[0, 2\pi]$ в ряд вида $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{inx}$. Ввиду важности этого частного случая (и скорее ради удобства, чем по необходимости) мы всегда будем брать в качестве основного интервала интервал $[0, 2\pi]$. Далее, через $C^{(k)}$ мы условимся обозначать $C^{(k)}[0, 2\pi]$; через AC и BV — пространства $AC[0, 2\pi]$ и $BV[0, 2\pi]$; через L_p, $1 \leqslant p < \infty$, — пространство функций f, определенных и измеримых по Лебегу на интервале $[0, 2\pi]$ и таких, для которых $|f|_p = \left\{\int_0^{2\pi} |f(x)|^p\,dx\right\}^{\frac{1}{p}} < \infty$, и т. д. Мы будем также для удобства пользоваться обозначениями $C^{(\infty)}$ вместо $\bigcap_{n=1}^{\infty} C^{(n)}$ и CBV вместо $C \bigcap BV$.

В случае рядов Фурье будет предполагаться, что рассматриваемые функции периодичны, т. е. что $f(0) = f(2\pi)$, если f принадлежит C, AC, BV или CBV; $f^{(k)}(0) = f^{(k)}(2\pi)$, $0 \leqslant k \leqslant n$, если $f \in C^{(n)}$, и $f^{(k)}(0) = f^{(k)}(2\pi)$ для всех $k \geqslant 0$, если $f \in C^{(\infty)}$. Разумеется, в случае пространства L_p ограничение типа $f(0) = f(2\pi)$ бессмысленно.

1. Определение. *Замкнутой ортонормированной системой* называется такая двусторонняя последовательность функций φ_n, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, из $C^{(\infty)}$, что

(I) совокупность линейных комбинаций функций φ_n всюду плотна в каждом из пространств $C^{(k)}$, $0 \leqslant k < \infty$;

$$\text{(II)}\qquad \int_0^{2\pi} \varphi_n(x)\overline{\varphi_m(x)}\,dx = 0, \quad n \neq m,$$

$$\int_0^{2\pi} |\varphi_n(x)|^2\,dx = 1, \quad -\infty < n < \infty.$$

n-м коэффициентом f_n функции $f \in L_1$ называется $\int\limits_0^{2\pi} f(x)\overline{\varphi_n(x)}\,dx$, n-й частной суммой $S_n f$ ортогонального разложения функции f называется сумма $\sum\limits_{j=-n}^{+n} f_j \varphi_j(x)$.

2. Пусть $\{\varphi_n\}$ — замкнутая ортонормированная система. Положим $E_n(x, y) = \sum\limits_{-n}^{n} \varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)}$. Показать, что $S_n f$ выражается формулой

$$(S_n f)(x) = \int\limits_0^{2\pi} E_n(x, y) f(y)\,dy$$

и преобразование S_n является проектированием в каждом из пространств L_p, BV, CBV, AC, $C^{(k)}$, где $1 \leqslant p < \infty$, $k = 0, 1, 2, \ldots, \infty$. Показать, что область значений преобразования S_n принадлежит $C^{(\infty)}$.

3. Показать, что S_n сильно сходятся к I в каждом из пространств $C^{(k)}$, $k < \infty$, AC, L_p, $1 \leqslant p < \infty$, в том и только том случае, если $|S_n| \leqslant K$, где $|S_n|$ — операторная норма преобразования S_n в соответствующем пространстве. Показать, что в пространстве L_2 S_n сильно сходятся к I для каждой замкнутой ортонормированной системы.

4. Показать, что для заданной замкнутой ортонормированной системы преобразования S_n сильно сходятся к I в пространстве L_1 в том и только том случае, если S_n сильно сходятся к I в пространстве C.

5. Показать, что S_n сильно сходятся к I в пространстве L_p в том и только в том случае, если S_n сильно сходятся к I и в пространстве $L_q \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$.

6. Показать, что $(S_n f)(x)$ сходятся к $f(x)$ равномерно на интервале $[0, 2\pi]$ для всех $f \in C^{(k)}$ в том и только в том случае, если операторная норма S_n как оператора, отображающего $C^{(k)}$ в C, равномерно ограничена при $n \to \infty$.

7. Показать, что $(S_n f)(x)$ сходятся к $f(x)$ равномерно на $[0, 2\pi]$ для каждого f из AC в том и только в том случае, если

$$\left| \int\limits_0^y E_n(x, z)\,dz \right| \leqslant M$$

для всех y и x.

8. Показать, что S_n сильно сходятся к I в пространстве C в том и только в том случае, если

$$\int_0^{2\pi} |E_n(x, y)|\, dy \leqslant M, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi, \quad n > 0.$$

9. Показать, что $\int_0^{2\pi} \varphi_n(x) f(x)\, dx \to 0$ при $n \to \infty$ для всех f из L_1 в том и только в том случае, если функции φ_n равномерно ограничены.

10. Показать, что $\int_0^{2\pi} \varphi_n(x) f(x)\, dx \to 0$ для всех f из L_p, $1 < p < \infty$, в том и только в том случае, если

$$\int_0^{2\pi} |\varphi_n(x)|^q\, dx < M, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

11. Показать, что функции $\{(2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{inx}\}_{-\infty}^{\infty}$ образуют замкнутую ортонормированную систему.

12. Показать, что для функций $\varphi_n(x) = \dfrac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$

$$E_n(x, y) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left\{\left[n + \frac{1}{2}\right](x - y)\right\}}{\sin \frac{x - y}{2}}.$$

Если $f \in L_1$, то

$$f_n = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx}\, dx$$

называется *n-м коэффициентом Фурье функции* f, а формальный ряд

$$(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \sum_{-\infty}^{\infty} f_n e^{inx}$$

называется *рядом Фурье* функции f.

13. Показать, что если $\{c_n\}$ является последовательностью, для которой $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$, то в пространстве L_2 найдется такая функция f, n-й коэффициент Фурье которой совпадает с c_n. Показать обратное: если $f \in L_2$ и f_n есть ее n-й коэффициент Фурье, то $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} |f_n|^2 < \infty$.

14. Доказать, что n-й коэффициент Фурье функции из L_1 при $n \to \infty$ стремится к нулю.

15. Показать, что ряд Фурье непрерывной функции не обязательно сходится равномерно на $[0, 2\pi]$. Показать, что существует непрерывная функция, ряд Фурье которой расходится в нуле.

16. Показать, что в пространстве L_1 имеются функции, ряды Фурье которых расходятся в L_1.

17. Показать, что если $f \in AC$ и, в частности, если $f \in C^{(k)}$, $k \geqslant 1$, то ряд Фурье функции f на интервале $[0, 2\pi]$ сходится равномерно.

18. Показать, что в пространстве AC найдется такая функция f, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{inx}$ не является равномерно сходящимся.

19. Оператор E определим равенством

$$E\left(\sum_{n=-N}^{N} a_n e^{inx}\right) = \sum_{n=0}^{N} a_n e^{inx}.$$

В дальнейшем будет показано, что при $p > 1$ оператор E можно продолжить до ограниченного оператора, отображающего пространство L_p в себя. Вывести отсюда, что в L_p при $1 < p < \infty$ операторы S_n сильно сходятся к I.

20. Показать, что в пространстве C имеются функции f с такими рядами Фурье $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{inx}$, что никакая функция g из C не имеет ряда Фурье вида $\sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{inx}$.

Сходимость частных сумм $S_n f$ относительно заданной замкнутой ортонормированной системы называется *локализуемой*, если для каждой функции f из L_1, обращающейся в нуль в окрестности точки p, последовательность $(S_n f)(x)$ сходится к нулю равномерно относительно x из некоторой окрестности точки p.

21. Показать, что если $\left| \int_0^y E_n(x, z)\, dz \right| \leqslant M$, то сходимость $S_n f$ для заданной замкнутой ортонормированной системы локализуема тогда и только тогда, когда $\max_{|x-y| \geqslant \varepsilon} |E_n(x, y)| \leqslant M_\varepsilon < \infty$ для всех $\varepsilon > 0$.

22. Предположим, что $(S_n f)(x) \to f(x)$ равномерно для каждого f из AC. Показать, что существует такая конечная константа K, что для $f \in CBV$

$$|(S_n f)(x)| \leqslant K\left(v(f, [0, 2\pi]) + \sup_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} |f(x)|\right), \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi.$$

23. Предположим, что:

(I) $(S_n f)(x) \to f(x)$ равномерно относительно x для $f \in AC$.

(II) Сходимость $S_n f$ локализуема. Показать, что для каждого f из CBV $(S_n f)(x) \to f(x)$ равномерно относительно x.

24. Предположим, что выполнены условия (I) и (II) предыдущего упражнения. Показать, что если $f \in BV$, то $(S_n f)(x) \to f(x)$ в каждой точке x непрерывности функции f.

25. Предположим, что в точке разрыва 1-го рода функции f $(S_n f)(x) \to \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$. Показать, что в предположениях (I) и (II) упражнения 23 $(S_n f)(x) \to \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$ для каждой функции $f \in BV$ и каждой точки x.

26. Показать, что сходимость ряда Фурье локализуема.

27. Показать, что для ряда Фурье

(a) $(S_n f)(x) \to f(x)$ равномерно относительно x, если $f \in CBV$;

(b) $(S_n f)(x) \to f(x)$, если функция f принадлежит BV и непрерывна в точке x;

(c) $(S_n f)(x) \to \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$ для всех x, если f принадлежит BV.

28. (Дини). Пусть φ_n — замкнутая ортонормированная система, такая, что $(S_n f)(x) \to f(x)$ равномерно для всех f из AC. Пусть $0 \leqslant x_0 \leqslant 2\pi$. Показать, что из условия $(y - x_0)^{-1}(f(y) - f(x_0)) \in L_1$ в том и только в том случае вытекает, что $(S_n f)(x_0) \to f(x_0)$, если существует такая конечная константа M, что $|E_n(x_0, y)(x_0 - y)| \leqslant M$ для $0 \leqslant y \leqslant 2\pi$.

29. Показать, что ряд Фурье функции из L_1 сходится к значению этой функции в каждой точке, где эта функция дифференцируема.

30. Показать, что если $f \in C^{(1)}$, то ряд Фурье функции f сходится абсолютно. Показать, что если $f \in AC$, то это уже не всегда верно.

31. Показать, что последовательность $\{f_n, -\infty < n < \infty\}$, для которой $\lim\limits_{|n| \to \infty} f_n = 0$, не всегда является последовательностью коэффициентов Фурье некоторой функции из L_1.

32. Пусть $F^{(n)}$ — последовательность заданных на интервале $[0, 2\pi]$ функций с абсолютно сходящимися рядами Фурье, и пусть $g \in L_1$. Предположим, что

(I) $\lim\limits_{n \to \infty} F^{(n)}(x) = g(x)$ для всех x;

(II) $F^{(n)}(x) = \sum\limits_{\nu=-\infty}^{\infty} F_\nu^{(n)} e^{i\nu x}$ и $\sum\limits_{\nu=-\infty}^{\infty} |F_\nu^{(n)}| \leqslant K$, $n = 1, 2, \ldots$.

Показать, что тогда ряд Фурье функции $g(x)$ сходится абсолютно и что функция g непрерывна. (A. Beurling, Sur les intégrales de Fourier absolument convergentes, 9-th Scandinavian Mathematics Congress, 1938.)

33. Пусть (α, β) — произвольный подинтервал интервала $[0, 2\pi]$. Показать, что не каждая определенная на (α, β) непрерывная

функция f может быть представлена на (α, β) в виде абсолютно сходящегося ряда Фурье: $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$, $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$.

В нижеследующих упражнениях мы предполагаем, что нам задан некоторый процесс суммирования, отображающий сходящиеся ряды в сходящиеся последовательности (см. упражнение II.4.46). Это значит, что мы имеем множество вещественных чисел $\{\lambda_{mn}\}$, $1 \leqslant m \leqslant \infty$, $-\infty < n < +\infty$, такое, что если ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n$ сходится к некоторому пределу C, то каждый из рядов $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_{mn} C_n$, $m=1, \ldots$, сходится и $\lim_{m\to\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_{mn} C_m = C$. Дополнительно мы сделаем следующие предположения:

(I) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\lambda_{mn}| < \infty$, $m=1, 2, \ldots$.

(II) Замкнутая ортонормированная система φ_n равномерно ограничена.

В этом случае $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_{mn} f_n \varphi_n(x)$ сходится равномерно относительно x при всех $m > 1$ для каждой функции f из L_1 $\left(\text{напомним, что, по определению, } f_n = \int_0^{2\pi} f(x)\overline{\varphi_n(x)}\,dx\right)$. Сумму этого ряда мы будем обозначать через $T_m f$, т. е. мы положим

$$(T_m f)(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_{mn} f_n \varphi_n(x), \quad m \geqslant 1.$$

34. Показать, что существует непрерывная функция $K_m(x, y)$ двух вещественных переменных, такая, что

$$(T_m f)(x) = \int_0^{2\pi} f(y) K_m(x, y)\,dy, \quad m \geqslant 1, \quad f \in L_1.$$

35. Показать, что в каждом из пространств $C^{(k)}$, AC или L_p $T_m f$ в том и только в том случае сильно сходится к f при $m \to \infty$, если T_m отображает данное пространство в себя и $|T_m| < K$, где $|T_m|$ — норма оператора T_m в данном пространстве.

36. Показать, что сходимость $T_m f$ в пространстве C или в пространстве L_1 эквивалентна тому, что

$$\int_0^{2\pi} |K_m(x, y)|\,dy \leqslant M, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$$

37. Показать, что если $\varphi_0(x) = (2\pi)^{-1/2}$ и если $K_m(x, y) \geqslant 0$ для всех m, то T_m сходится и в C и в L_1.

38. Задана ограниченная последовательность чисел $\{a_n\}$, $-\infty < n < \infty$. В предположениях упражнения 37, показать, что в пространстве C в том и только в том случае найдется такая функция f, для которой $a_n = \int\limits_0^{2\pi} f(x)\overline{\varphi_n(x)}\,dx$, если функции $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_{mn} a_n \varphi_n(x)$, $m \geqslant 1$, равномерно ограничены и равностепенно непрерывны.

39. Пусть $\{a_n\}$, $-\infty < n < \infty$, — ограниченная последовательность чисел. Показать, что, в предположениях упражнения 37, в пространстве C^* в том и только в том случае существует такая комплексная регулярная мера μ, что $a_n = \int\limits_0^{2\pi} \overline{\varphi_n(y)}\,\mu(dy)$, если $\int\limits_0^{2\pi} \left| \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_{mn} a_n \varphi_n(x) \right| dx < K$ для всех $m \geqslant 1$. Показать, что в пространстве L_1 в том и только в том случае существует такая функция f, что $a_n = \int\limits_0^{2\pi} \overline{\varphi_n(y)} f(y)\,dy$, если, кроме уже сформулированных предположений, $\lim\limits_{\lambda(E)\to 0} \int\limits_E \left| \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_{mn} a_n \varphi_n(x) \right| dx = 0$ равномерно относительно n; здесь E — борелевское множество, а $\lambda(E)$ — его мера Лебега.

40. Пусть $\{a_n\}$, $-\infty < n < +\infty$, — некоторая ограниченная последовательность чисел и $1 < p < \infty$. Предположим, что наш процесс суммирования таков, что $T_m f$ сходится к f из L_p для каждого $f \in L_p$. Показать, что в пространстве L_p в том и только в том случае существует такая функция f, что $a_n = \int\limits_0^{2\pi} f(x)\varphi_n(x)\,dx$, если найдется такое $M < \infty$, что

$$\int\limits_0^{2\pi} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_{mn} a_n \varphi_n(x) \right|^p dx \leqslant M, \quad m \geqslant 1.$$

41. Пусть $\{a_n\}$, $-\infty < n < +\infty$, — некоторая ограниченная последовательность чисел и $1 < p < \infty$. Показать, что в пространстве L_p

в том и только в том случае существует такое f, что $a_n = \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx}\,dx$, если найдется такое $M < \infty$, что

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{n=-m}^{m} a_n e^{inx} \right|^p dx < M \quad \text{для } m = 1, 2, \ldots .$$

42. Пусть $\{a_n\}$, $-\infty < n < +\infty$, — некоторая ограниченная последовательность чисел. Предположим, что $1 < p < \infty$, и пусть $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Показать, что в пространстве L_p в том и только в том случае существует такое f, что $a_n = \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx}\,dx$, если ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n b_n$ сходится для каждой последовательности $\{b_n\}$ вида $b_n = \int_0^{2\pi} g(x) e^{-inx}\,dx$, где $g \in L_q$.

43. Пусть $\{a_n\}$, $-\infty < n < +\infty$ — некоторая ограниченная последовательность чисел. Показать, что, в предположениях упражнения 40, в пространстве L_p в том и только в том случае существует такое f, что $a_n = \int_0^{2\pi} f(x) \overline{\varphi_n(x)}\,dx$, если $\lim_{m\to\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_{mn} a_n b_n$ существует для каждой последовательности $\{b_n\}$ вида $b_n = \int_0^{2\pi} \varphi_n(x) g(x)\,dx$, где $g \in L_q$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

44. (Суммируемость по Чезаро.) Пусть

$$\lambda_{mn} = \begin{cases} 1 - \dfrac{|n|}{m}, & n = 0 \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm (m-1), \\ 0, & |n| \geqslant m. \end{cases}$$

Найти соответствующие ядра $K_m(x, y)$. Показать, что если $f \in L_1$, то

$$T_m f = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} S_j f,$$

где символы S_j и T_m имеют их прежний смысл.

45. Показать, что если $(\varphi_n) = \{(2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{inx}\}$ и множество $\{\lambda_{mn}\}$ определено, как в упражнении 44, то

(a) $K_m(x, y) \geqslant 0$;

(b) $T_n f \longrightarrow f$ в пространствах C и L_1.

46. Пусть $\{\varphi_n\}$ — произвольная равномерно ограниченная замкнутая ортонормированная система. Если $f \in L_1$, то положим $f_n = \int_0^{2\pi} f(y)\varphi_n(y)\,dy$ и

$$(T_r f)(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} f_n \varphi_n(x), \quad 0 < r < 1.$$

Найти ядро $P_r(x, y)$ такое, что

$$(T_r f)(x) = \int_0^{2\pi} f(y) P_r(x, y)\,dy.$$

47. (Суммируемость по Пуассону.) Пусть $\{\varphi_n\} = \{(2\pi)^{-1/2} e^{inx}\}$. Показать, что ядром упражнения 46 в этом случае будет

$$P_r(x, y) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(x - y)}.$$

Показать, что $T_r f \longrightarrow f$ в пространствах C и L_1.

48. Для $f \in L_1$ и $-\infty < t < +\infty$ определим $U_t f$ формулой $(U_t f)(x) = f(x + t)$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ (при $x < 0$ мы определим $f(x)$ по периодичности, т. е. тем условием, что $f(x) = f(x + 2\pi)$, $-\infty < x < +\infty$). Показать, что если $f \in L_p$, или AC, или $C^{(n)}$ (и подчинена в каждом случае сформулированным перед определением 1 требованиям периодичности), то $U_t f$ есть векторная функция t (значения которой в зависимости от случая принадлежат заданному пространству L_p, или AC, или $C^{(n)}$), непрерывная относительно t, и что $|U_t f| = |f|$.

49. Показать, что в случае, когда $\varphi_n(x) = (2\pi)^{-1/2} e^{inx}$, оператор T_m определяется интегралом

$$T_m f = \int_0^{2\pi} (U_t f) K_m(t)\,dt,$$

где $K_m(t)$, в обозначениях упражнения 34, есть $K_m(0, t)$. (Здесь функция f принадлежит L_p, AC или $C^{(n)}$.)

50. Показать, что в случае, когда $\varphi_n(x) = (2\pi)^{-1/2} e^{inx}$, $T_m f \longrightarrow f$ по норме пространства L_p (или AC, или $C^{(n)}$) для $f \in L_p$ (или AC, или $C^{(n)}$), если $T_m f \longrightarrow f$ по норме пространства C для каждого f из C. (Указание: воспользоваться результатами упражнений 35 и 49.)

51. Показать, что если T_m есть оператор, определенный в упражнении 45, то $(T_m f)(x) \longrightarrow f(x)$ в каждой точке лебеговского множества

функции $f \in L_1$. Показать, что это же верно и для оператора T_r, определенного в упражнении 47. (Указание: воспользоваться теоремой III.12.11.)

52. (Харди.) Пусть функция $f(z)$ аналитична при $|z| < 1$. Показать, что при $p \geqslant 1$

$$N_r(f, p) = \left\{ \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta \right\}^{\frac{1}{p}}$$

есть возрастающая функция r, $0 \leqslant r \leqslant 1$. (Указание: применить принцип максимума модуля к векторной функции F, определяемой равенством $(F(z))(\theta) = f(ze^{i\theta})$.)

53. Пусть класс H_p состоит из всех функций $f(z)$, аналитических при $|z| < 1$ и таких, что

$$N(f, p) = \sup_{r<1} N_r(f, p) < \infty,$$

где $N_r(f, p)$ определено как в упражнении 52. Предположим, что $p > 1$. Показать, что если $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n \in H_p$, то в L_p существует такая функция $\tilde{f}$, что

$$\int_0^{2\pi} \tilde{f}(\theta) e^{-in\theta} \, d\theta = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ 2\pi f_n, & n \geqslant 0. \end{cases}$$

54. Предположим, что $F \in L_p$ для некоторого $p > 1$ и что $\int_0^{2\pi} F(\theta) e^{in\theta} \, d\theta = 0$ для всех $n < 0$. Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n$, где $F_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta) e^{-in\theta} \, d\theta$ при $n \geqslant 0$. Показать, что

(a) $$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(t) P_r(t, \theta) \, dt,$$

(b) $$\left\{ \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant |F|_p.$$

Показать, что отображение $f \to \tilde{f}$, определенное в упражнении 53, является линейным взаимно однозначным отображением H_p на замкнутое подпространство пространства L_p, состоящее из таких F, у которых все коэффициенты Фурье с отрицательными номерами равны нулю.

55. Пользуясь обозначениями упражнений 53 и 54, показать что если $f \in H_p$ и если $(U_r f)(\theta) = f(re^{i\theta})$, то $|U_r f - \tilde{f}|_p \to 0$ при $r \to 1$ $(p > 1)$.

56. Пользуясь обозначениями упражнений 53 и 54, показать, что если $f \in H_p$, $p > 1$, то при $|z| < 1$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=1} \frac{\tilde{f}(\xi)\, d\xi}{\xi - z}.$$

57. Показать, что если класс H_p нормировать условием $|f| = \sup\limits_{r<1} \left\{ \int\limits_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta \right\}^{\frac{1}{p}}$, то он становится рефлексивным банаховским пространством.

58. Пользуясь результатом упражнения 19, показать, что если $F \in L_p$, $G \in L_q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} F_n \overline{G}_n$ сходится и

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} F(t) \overline{G(t)}\, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \overline{G}_n,$$

где $F_n = (2\pi)^{-1} \int\limits_0^{2\pi} F(t) e^{-int}\, dt$, $G_n = (2\pi)^{-1} \int\limits_0^{2\pi} G(t) e^{-int}\, dt$.

59. Пусть $\{a_n\}_{-\infty}^{\infty}$ — некоторая ограниченная последовательность чисел. Показать, что если

$$u(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{in\theta} \geqslant 0, \quad r > 1, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi,$$

то в пространстве C^* существует такая положительная мера μ, что $\int\limits_0^{2\pi} e^{-int} d\mu(t) = a_n$, $-\infty < n < +\infty$. (Указание: см. упражнение 39.)

60. Если $P_r(t, \theta)$ определено, как в упражнении 47, а $u(r, \theta)$ и μ — как в упражнении 59, то

$$u(r, \theta) = 2\pi \int\limits_0^{2\pi} P_r(t, \theta)\, d\mu(t), \quad r < 1, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi.$$

61. (Герглотц). Предположим, что функция $f(z)$ аналитична при $z < 1$ и $\operatorname{Re} f(z) \geqslant 0$. Показать, что существуют такая положитель-

ная мера $\mu \in C^*$ и такая вещественная константа v_0, что

$$f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,\mu(dt) + iv_0, \quad |z| < 1.$$

(Указание: воспользоваться результатом предыдущего упражнения; в круге $|z| < 1$ аналитическая функция своей вещественной частью определена с точностью до мнимой константы.)

62. Пусть $\{f_n\}$ — равномерно ограниченная последовательность монотонно возрастающих функций. Предположим, что f — монотонно возрастающая функция и что

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{2\pi} e^{-inx} f_k(x)\,dx = \int_0^{2\pi} e^{-inx} f(x)\,dx$$

при всех n. Показать, что $f_k(x)$ сходится к $f(x)$ в каждой точке непрерывности функции f на интервале $(0, 2\pi)$.

63. Пусть $\{\varphi_n\}$ — замкнутая ортонормированная система; для $f \in L_1$ положим $a_n(f) = \int_0^{2\pi} \varphi_n(x) f(x)\,dx$. Множество E натуральных чисел называется *(p, q)-лакунарным*, если из того, что $f \in L_p$ и $f_n = 0$ при $n \notin E$, вытекает, что $\{f_n\}_{-\infty}^{\infty} \in l_q$. Пусть $1 \leqslant p < \infty$ и $1 \leqslant q < \infty$. Пусть числа p' и q' выбраны так, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. Показать, что для того, чтобы множество E было (p, q)-лакунарным, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\{\alpha_n\}_{-\infty}^{+\infty}$ из $l_{q'}$ в пространстве $L_{p'}$ нашлось такое f, что $\alpha_n = f_n$ для $n \in E$.

Пусть $\{\varphi_n\}$ — равномерно ограниченная замкнутая ортонормированная система и $\{\lambda_n\}$, $-\infty < n < +\infty$, — некоторая числовая последовательность. Пусть $\mathfrak{A}$ обозначает любое из рассматриваемых нами пространств функций, определенных на интервале $[0, 2\pi]$. Мы говорим, что $\{\lambda_n\}$ есть *фактор-последовательность типа* $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A})$, или, короче, что $\{\lambda_n\}$ есть $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A})$, если для каждого $f \in \mathfrak{A}$ найдется такое $f^* \in \mathfrak{A}$, что $f_n^* = \lambda_n f_n$. Если $rca = C^*$ есть пространство регулярных мер, мы говорим, что $\{\lambda_n\}$ есть (rca, rca), если для каждого $\mu \in rca$ в пространстве rca найдется такое μ^*, что

$$\int_0^{2\pi} \overline{\varphi_n(x)}\,\mu^*(dx) = \lambda_n \int_0^{2\pi} \overline{\varphi_n(x)}\,\mu(dx).$$

64. Показать, что если каждое λ_n вещественно, то последовательность $\{\lambda_n\}$ есть (L_1, L_1) в том и только в том случае, если она есть (L_∞, L_∞), (C, C) или (rca, rca). (Указание: $C \subset L_\infty$, пространство rca является сопряженным к C, $L_1 \subset rca$, пространство L_∞ является сопряженным к L_1.)

65. Пусть $\{\lambda_n\}$ — заданная последовательность. Показать, что если интеграл

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{j=-(n-1)}^{n-1} \lambda_j \left(1 - \frac{|j|}{n}\right) \varphi_j(x) \overline{\varphi_j(y)} \right| dy$$

ограничен для всех n и x, то $\{\lambda_n\}$ является фактор-последовательностью типа (C, C). Показать, что если мы имеем суммируемость по Чезаро в пространстве C (т. е. если операторы T_m, определенные в упражнении 44, сильно сходятся к I), то это условие также и необходимо.

66. Показать, что фактор-последовательность $\{\lambda_n\}$ есть (C, C) по отношению к системе $(2\pi)^{-\frac{1}{2}}e^{inx}$ в том и только в том случае, если существует такая регулярная мера μ, что $\lambda_n = \int_0^{2\pi} e^{-inx}\mu(dx)$.

Кратные ряды Фурье

Обозначим через A топологическое произведение n раз взятых интервалов $[0, 2\pi]$. Через L_p будем обозначать $L_p(A, \mathscr{B}, \lambda)$, где $\mathscr{B}$ — алгебра борелевских подмножеств множества A, а через λ — лебеговскую меру на $\mathscr{B}$. В нижеследующем упражнении будет использоваться понятие замкнутой ортонормированной системы, несколько более общее, чем введенное в определении 1. Оно содержится в следующем определении.

67. Определение. *Замкнутой ортонормированной системой* функций на множестве A называется такое множество $\{\varphi_\alpha\}$ функций из $C(A)$, что

(I) совокупность линейных комбинаций функций φ_α всюду плотна в пространстве $C(A)$;

(II) $\int_A \varphi_\alpha(x_1, \ldots, x_n) \overline{\varphi_\beta(x_1, \ldots, x_n)}\, dx_1 \ldots dx_n = 0, \ \alpha \neq \beta;$

(III) $\int_A |\varphi_\alpha(x_1, \ldots, x_n)|^2\, dx_1 \ldots dx_n = 1$ при всех α.

68. Пусть $\{\varphi_m\}$ — определенная на отрезке $[0, 2\pi]$ замкнутая ортонормированная система (в смысле определения 1). Показать, что совокупность всевозможных произведений вида

$$\varphi_{m_1}(x_1)\, \varphi_{m_2}(x_2) \ldots \varphi_{m_n}(x_n)$$

является замкнутой ортонормированной системой функций на A (в смысле определения 67).

Кратным рядом Фурье называется ряд, общим членом которого является произведение константы на функцию вида $e^{i(m_1x_1+\ldots+m_nx_n)}$. В нижеследующих упражнениях на кратные ряды Фурье будет предполагаться, что $C(A)$ есть пространство всех определенных на A скалярных непрерывных функций f, являющихся *кратно периодическими* в том смысле, что

$$f(0, x_2, \ldots, x_n)=f(2\pi, x_2, \ldots, x_n); \ldots$$
$$\ldots; f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)=f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 2\pi).$$

69. Показать, что совокупность линейных комбинаций функций $e^{i(m_1x_1+\ldots+m_nx_n)}$, где $-\infty<m_j<\infty$, $j=1, \ldots, n$, всюду плотна и в пространстве $C(A)$ и в пространстве $L_p(A)$ для каждого p, $1\leqslant p<\infty$.

70. Пусть K — определенная на $A\times A$ непрерывная функция вида

$$K(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n)=K_1(x_1, y_1) \ldots K_n(x_n, y_n),$$

где $K_1, \ldots, K_n$ — непрерывные функции, определенные на $[0, 2\pi]\times\times[0, 2\pi]$. Выразить норму оператора $\hat{K}$ в $C(A)$, определяемого равенством

$$(\hat{K}f)(y_1, \ldots, y_n)=$$
$$=\int_A K(y_1, \ldots, y_n; x_1, \ldots, x_n)f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 \ldots dx_n$$

через нормы операторов $\hat{K}_1, \ldots, \hat{K}_n$ в $C[0, 2\pi]$, определяемых аналогичным образом через ядра $K_1, \ldots, K_n$. Как связаны между собой соответствующие нормы операторов $\hat{K}$ и $\hat{K}_1, \ldots, \hat{K}_n$, рассматриваемых как операторы, действующие в $L_p(A)$ и $L_p(0,2\pi)$?

71. Для каждого f из $L_1(A)$ положим

$$f_{m_1\ldots m_n}=\int_A f(x_1, \ldots, x_n)\,e^{-i(m_1x_1+\ldots+m_nx_n)}\,dx_1\ldots dx_n.$$

Если $f\in L_p(A)$, где $1<p<\infty$, то при $R_1\to\infty, \ldots, R_n\to\infty$

$$f=\lim\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n\sum_{m_1=-R_1}^{R_1}\cdots\sum_{m_n=-R_n}^{R_n} f_{m_1\ldots m_n}e^{i(m_1x_1+\ldots+m_nx_n)}$$

по норме пространства $L_p(A)$. При $p=1$ это утверждение неверно.

72. В обозначениях, введенных в упражнении 71, при $r_1\to 1, \ldots$ $\ldots, r_n\to 1$ мы имеем

$$f=\lim(2\pi)^{-n}\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}\ldots\sum_{m_n=-\infty}^{\infty} f_{m_1\ldots m_n}r_1^{|m_1|}\ldots r_n^{|m_n|}e^{i(m_1x_1+\ldots+m_nx_n)},$$

где для каждого f из $C(A)$ предел берется по норме пространства $C(A)$, а для каждого f из $L_p(A)$ при $1 \leqslant p < \infty$ — по норме пространства $L_p(A)$.

73. В обозначениях, введенных в упражнении 71, при $N_1 \to \infty, \ldots$ $\ldots, N_n \to \infty$ мы имеем

$$f = \lim \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \sum_{m_1=-N_1}^{N_1} \ldots \sum_{m_n=-N_n}^{N_n} \left(1 - \frac{|m_1|}{N_1}\right) \ldots$$

$$\ldots \left(1 - \frac{|m_n|}{N_n}\right) f_{m_1 \ldots m_n} e^{i(m_1 x_1 + \ldots + m_n x_n)},$$

где для каждого f из $C(A)$ предел берется по норме пространства $C(A)$, а для каждого f из $L_p(A)$ при $1 \leqslant p < \infty$ — по норме пространства $L_p(A)$.

Экстремальные методы для полиномов и классов H_p.

74. Пусть $\mathfrak{X}$ — конечномерное подпространство B-пространства $\mathfrak{Y}$ и f — определенный на $\mathfrak{X}$ линейный функционал с нормой $|f|$. Тогда существуют такая точка $x_0 \in \mathfrak{X}$ и такой определенный на $\mathfrak{Y}$ линейный функционал f^*, что

a) $f^*(x) = f(x), \quad x \in \mathfrak{X}$;

b) $f^*(x_0) = |f^*| = |f|$;

c) $|x_0| = 1$.

75. Обозначим через P_n пространство всех полиномов степени не выше n. Будем рассматривать P_n как подпространство пространства $C[-1, 1]$. Пусть f — некоторый линейный функционал, определенный на P_n. Тогда найдется такое $x_0 \in P_n$ и такая мера μ из $rca[-1, 1]$, что

a) $f(x) = \int_{-1}^{1} x(t)\, \mu(dt), \quad x \in P_n$;

b) $\max_{-1 \leqslant t \leqslant 1} |x_0(t)| = 1$;

(c) если C есть совокупность тех значений t из интервала $-1 \leqslant t \leqslant 1$, где $|x_0(t)| = 1$, то $v(\mu, C') = 0$.

Следовательно, если $x_0(t)$ не является константой по абсолютной величине, равной единице, то множество C состоит самое большее из $n+1$ точек $-1 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_\kappa \leqslant 1$ и существуют такие константы $c_1, \ldots, c_k$, $\sum_{i=1}^{k} |c_i| = |f|$, с помощью которых мы можем написать следующую «интерполяционную формулу»:

$$f(x)=\sum_{j=1}^{k} c_j x(t_j), \quad x\in P_n.$$

76. Пусть τ_n — вещественный полином степени n, не равный тождественно константе и такой, что

$$\max_{-1\leqslant t\leqslant 1} |\tau_n(t)|=1,$$

причем $|\tau_n(t)|$ достигает своего максимального значения 1 в $n+1$ различных точках. Тогда τ_n удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(t^2-1)(\tau_n'(t))^2=n^2(\tau_n(t)^2-1)$$

и, следовательно, с точностью до знака совпадает с n-м *многочленом Чебышева на интервале* $[-1, +1]$, т. е.

$$\tau_n(t)=\cos(n\arccos t).$$

77. Пусть P_n и f определены, как в упражнении 75, а τ_n — как в упражнении 76. Предположим, что $\max\limits_{x\in P_n,\ |x|\leqslant 1}|f(x)|$ не достигается, когда x есть функция-константа $x(t)\equiv 1$. Если исключить тот случай, когда существуют k точек $t_1<\ldots<t_k$, $k\leqslant n$, таких, что значения $f(x)$, $x\in P_n$, определяются значениями $x(t_1), \ldots, x(t_k)$, то

$$\max_{x\in P_n,\ |x|\leqslant 1}|f(x)|=|f(\tau_n)|.$$

78. Если $a_n(x)$ есть старший коэффициент полинома от x степени n, то

$$|a_n(x)|\leqslant 2^{n-1}\max_{-1\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|,$$

причем равенство достигается лишь для полиномов, кратных многочлену Чебышева τ_n.

79. Для каждого x из P_n справедливо неравенство

$$|x'(1)|\leqslant n^2\max_{-1\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|.$$

80. Если n нечетно, то для каждого x из P_n имеет место неравенство

$$|x'(0)|\leqslant n\max_{-1\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|.$$

Если n четно, то для каждого x из P_n справедливо неравенство

$$|x'(0)|\leqslant (n-1)\max_{-1\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|.$$

(Указание: фигурирующую в упражнении 75 функцию x_0 в данном случае можно выбрать нечетной.)

81. (С. Н. Бернштейн.) Для каждого полинома степени n справедливо неравенство

$$|x'(1)| \leqslant n \max_{|z| \leqslant 1} |x(z)|.$$

(Указание: фигурирующая в упражнении 75 функция x_0 в данном случае постоянна по модулю.)

82. (Г. Шапиро.) Обозначим через Π_n пространство полиномов степени n от переменного z с нормой

$$|x| = \max_{|z| \leqslant 1} |x(z)|.$$

Пусть f — определенный на Π_n линейный функционал; определим линейное отображение F, полагая

$$F(x)(\zeta) = f(x_\zeta),$$

где $x_\zeta(z) = x(\zeta z)$. Тогда F отображает пространство Π_n в себя и норма его равна $|f|$. Более общо, если $1 \leqslant p < \infty$ и $x \in \Pi_n$, то

$$\left\{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(x)(e^{i\theta})|^p \, d\theta\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant |f| \left\{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |x(e^{i\theta})|^p \, d\theta\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

(Указание: найти меру такую, как в упражнении 75.)

83. Если $1 \leqslant p < \infty$ и $x \in \Pi_n$, то

$$\left\{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |x'(e^{i\theta})|^p \, d\theta\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant n \left\{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |x(e^{i\theta})|^p \, d\theta\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

84. Пусть (S, Σ, μ) — пространство с положительной мерой и $L_p = L_p(S, \Sigma, \mu)$, где $p \geqslant 1$. Пусть f и g — два элемента из L_p, такие, что $|f + \lambda g| \geqslant |f|$ для каждого скаляра λ. Тогда

$$\int_S |f(s)|^{p-1} \operatorname{sgn}(f(s)) \overline{g(s)} \mu(ds) = 0,$$

где $\operatorname{sgn} z$ определяется равенством

$$\operatorname{sgn} z = \begin{cases} \dfrac{z}{|z|}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

85. (Произведение Бляшке.) Пусть $p > 1$ и f — функция из H_p, не равная нулю тождественно. Тогда в H_∞ найдется такая функция g, что $|g(e^{i\theta})| = 1$ для почти всех θ и имеющая внутри единичного круга те же самые нули, что и функция f. (Указание: Предположим, что $f(z_0) \neq 0$. Из всех функций h, для которых $f(z_0) = h(z_0)$ и для которых $h(z) = 0$, если $f(z) = 0$, выберем функцию с наименьшей нормой.)

86. Пусть p, f определены, как в упражнении 85. Тогда $f(e^{i\theta})\neq 0$ для почти всех θ.

87. Пусть $p>1$ и f — функция из H_p. Тогда в H_∞ существует такая функция g, что $g(e^{i\theta})=1$ для почти всех θ,

$$\frac{f}{g}\in H_p, \qquad \left|\frac{f}{g}\right|=|f|,$$

и такая, что $\frac{f}{g}$ не имеет нулей.

(Указание: обобщить рассуждение, проводимое в упражнении 85, применив его к нулям, лежащим на границе единичного круга.)

88. Показать, что утверждение упражнения 87, справедливо даже и в том случае, если $p=1$.

89. Каждая функция $f\in H_1$ может быть представлена в виде произведения gh, где g и h принадлежат H_2. (Указание: воспользоваться результатом упражнения 88.)

90. Показать, что утверждения упражнений 55, 54 и 56 остаются справедливыми и при $p=1$. (Указание: воспользоваться результатом упражнения 89.)

91. (Ф. Рисс — М. Рисс.) Борелевская мера μ на интервале $[0, 2\pi]$, такая, что

$$\int_0^{2\pi} e^{in\theta}\mu(d\theta)=0, \ n\geqslant 0,$$

абсолютно непрерывна.

(Указание: воспользоваться результатом упражнения 90 и методом упражнения 60.)

15. Сводка результатов

В этом параграфе мы подведем итог тому, что нам известно относительно восьми вопросов, поставленных в § 1, в применении к каждому из 28 пространств, перечисленных в § 2. Эти сведения представлены в табл. IV A (стр. 408—413), где на пересечении строки и столбца, в заголовках которых стоят соответственно формулировка вопроса и название пространства, дается ссылка на соответствующие теоремы или упражнения из этой главы, из предыдущих глав или, в небольшом числе случаев, из последующих глав.

В ответ на вопрос о слабой полноте и рефлексивности в таблице даются определенные утверждения «да» или «нет», однако это относится к «общему случаю» пространства рассматриваемого типа. Так, например, написанное в таблице «нет» в ответ на вопрос «является ли пространство $B(S)$ слабо полным?» означает тот установленный в упражнении 13.5 факт, что пространство $B(S)$ слабо полно в том и только в том случае, если множество S конечно.

Ссылки вроде (F3) в круглых скобках отсылают читателя к сноскам, помещенным непосредственно под таблицей.

16. Примечания и добавления

Конечномерные и гильбертовы пространства. Идея конечномерного пространства является, конечно, алгебраизацией обычных геометрических понятий. Аксиомы конечномерного евклидова пространства были явно сформулированы, например, в книге Г. Вейля [3; стр. 15—25]. Изучение норм, отличных от евклидовой, впервые проводилось Минковским. Пространства l_2 и L_2 подробно изучались Гильбертом и др., абстрактная аксиоматика гильбертова пространства для сепарабельного случая принадлежит Дж. Нейману [8, стр. 15—17; 7], а в общем случае — Лёвигу [1] и Реллиху [3].

Тихоновым [1, стр. 769] было доказано, что каждое конечномерное линейное топологическое пространство эквивалентно некоторому евклидову пространству. Отсюда, в частности, вытекает его полнота. Теорема 3.5, характеризующая локально бикомпактные B-пространства, принадлежит Ф. Риссу [4].

«Неравенство Шварца» [теорема 4.1] было известно еще очень давно. При $n=3$ это есть следствие хорошо известного тождества Лагранжа [1, стр. 662—663], доказанного им в 1773 г. Для случая конечной суммы оно было доказано Коши [2, стр. 373] в 1821 г. Для интегралов его доказали Буняковский [1, стр. 4] в 1859 г. и Г. А. Шварц [1, стр. 251] в 1885 г. Конечно, оно является частным случаем неравенства Гёльдера (III.3.2), доказанного для сумм Гёльдером [2, стр. 44], а для интегралов — Ф. Риссом [2, стр. 456].

Лемма 4.2 принадлежит Ф. Риссу [8, стр. 36], она использовалась также Секефальви-Надем [5]. С помощью аналогичного рассуждения можно доказать этот результат и для любого равномерно выпуклого B-пространства. Этим обобщается и абстрагируется соответствующий результат Э. Фишера [2], доказанный им для замкнутых линейных многообразий в $L_2[0, 1]$.

Теорема о том, что линейное многообразие, не являющееся всюду плотным во всем пространстве, имеет ненулевое ортогональное дополнение (см. лемму 4.4), была доказана Ф. Риссом [8] без предположения о сепарабельности. Доказательство Рисса аналогично рассуждениям Б. Леви [1, § 7], использованным им при исследовании проблемы Дирихле.

То обстоятельство, что каждый заданный на L_2 [0, 1] непрерывный линейный функционал определяется некоторым элементом из L_2, было установлено независимо друг от друга Фреше [4; 5, стр. 439] и Ф. Риссом [9]. Приводимое нами доказательство теоремы 4.5 принадлежит Ф. Риссу [8]. Следствие 4.7 для L_p [0, 1] было доказано Ф. Риссом [2, стр. 466]. (Текст продолжается на стр. 414.)

Таблица IVA

Пространство $\mathfrak{X}$	1. E^n	2. l_p^n	3. l_∞^n	4A. l_p, $1 < p < \infty$	4B. l_1
Сопряженное пространство $\mathfrak{X}^*$	3.9	3.9	3.9	8.1	8.5
Слабая полнота	Да II.3.29	Да II.3.29	Да II.3.29	Да II.3.29	Да 8.6
Рефлексивность	Да 3.8	Да 3.8	Да 3.8	Да 8.2	Нет 13.2
Сильно бикомпактные множества	13.1	13.1	13.1	13.3	13.3
Слабо (би)компактные множества	II.3.28	II.3.28	II.3.28	II.3.28	13.3
Слабо фундаментальные последовательности	13.1, (F3)	13.1, (F3)	13.1, (F3)	13.4, 13.24, (F3)	8.14, 13.25, (F3)
Слабая сходимость к x	13.1	13.1	13.1	13.4, 13.24	8.14, 13.25
$\mathfrak{Y}$-сходимость в $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}^*$	13.1	13.1	13.1	13.4	13.4
Различные другие свойства	3.3, 3.4, 3.6, 3.7, 13.1, 13.50, 13.51	3.3, 3.4, 3.6, 3.7, 3.9, 13.1	3.3, 3.4, 3.6, 3.7, 3.9, 13.1	13.59, 13.61, 13.70, (F6)	8.14, 13.49, 13.59, 13.60, 13.61, (F5)

Примечания к таблице IVA

(F1) По-видимому, не известно никакого вполне удовлетворительного описания пространств, сопряженных к $ba(S, \Sigma)$, $ca(S, \Sigma)$ или $rca(S, \Sigma)$, а также пространств, сопряженных к $NBV(I)$ и $BV(I)$, изометрически изоморфных пространствам с мерой. В литературе, однако, рассматривались различного типа представления этих пространств. Ссылки на эти работы можно найти в параграфе 16.

Продолжение табл. IV A

Пространство $\mathfrak{X}$	5. l_∞	6. c	7. c_0	8. bv	9. bv_0
Сопряженное пространство $\mathfrak{X}^*$	8.16	13.7	13.7	13.11	13.11
Слабая полнота	Нет 13.5	Нет 13.8	Нет 13.8	Да 13.11	Да 13.11
Рефлексивность	Нет II.3.29	Нет 13.8	Нет 13.8	Нет 13.11	Нет 13.11
Сильно бикомпактные множества	5.6	13.9	13.9	13.11	13.11
Слабо (би)компактные множества	6.29	13.9	13.9	13.11	13.11
Слабо фундаментальные последовательности	13.43	13.10	13.10	13.11	13.11
Слабая сходимость к x . .	6.31	13.10	13.10	13.11	13.11
$\mathfrak{Y}$-сходимость в $\mathfrak{X}=\mathfrak{Y}^*$ . .	13.6	Не имеет смысла	Не имеет смысла	13.11	13.11
Различные другие свойства	6.18, (F4), 13.59	(F4), 13.60	(F4)	13.11, 13.12, (F5)	13.11, 13.12, (F5)

(F2) Описание пространства $L_1^*(S, \Sigma, \mu)$ с помощью некоторого пространства с мерой, справедливое и для не σ-конечного случая, было дано в работе Дж. Шварца [1].

(F3) Заметим, что в слабо полном пространстве слабо фундаментальная последовательность слабо сходится к некоторому определенному элементу.

Продолжение табл. IVA

Пространство $\mathfrak{X}$	10. bs	11. cs	12. $B(S, \Sigma)$	13. $B(S)$	14. $C(S)$
Сопряженное пространство $\mathfrak{X}^*$	13.13	13.14	5.1	5.3	6.2, 6.3
Слабая полнота	Нет 13.13	Нет 13.14	Нет 13.5	Нет 13.5	Нет 13.15
Рефлексивность	Нет 13.13	Нет 13.14	Нет II.3.29	Нет II.3.29	Нет 13.15
Сильно бикомпактные множества	13.13	13.14	5.6	5.6	6.5, 6.7, 6.8, 6.9
Слабо (би)компактные множества	13.13	13.14	6.29	6.29	6.14
Слабо фундаментальные последовательности	13.13	13.14	13.43	13.43	13.40
Слабая сходимость к x . .	13.13	13.14	6.31	6.31	6.4, 6.12, 6.31
$\mathfrak{Y}$-сходимость в $\mathfrak{X}=\mathfrak{Y}^*$ . .	13.13	13.14	Не имеет смысла	Не имеет смысла	Не имеет смысла
Различные другие свойства	13.13, (F4)	13.14, (F4)	6.18, 6.19, (F4), 13.76	6.18, 6.19, (F4)	6.16, 6.17, 6.26, V.8.8, (F4), 13.50, 13.51, 13.63, 13.64, 13.65, 13.66

(F4) В пространстве $\mathfrak{X}$, изометрически изоморфном пространству непрерывных функций, можно ввести интересное отношение порядка, при котором $\mathfrak{X}$ становится векторной структурой типа M-пространства[1]). Можно также ввести умножение функций, при котором $\mathfrak{X}$ становится B^*-алгеброй. Ссылки на литературу в этих двух направлениях приводятся в параграфе 16.

[1]) Определение M-пространства см. ниже (стр. 429).—*Прим. ред.*

Продолжение табл. IVA

Пространство $\mathfrak{X}$	15. $ba(S, \Sigma)$	16. $ca(S, \Sigma)$	17. $rca(S, \Sigma)$	18A. $L_p(S, \Sigma, \mu)$ $1 < p < \infty$	18B. $L_1(S, \Sigma, \mu)$
Сопряженное пространство $\mathfrak{X}^*$ . . .	(F1)	(F1)	(F1)	8.1	8.5, (F2)
Слабая полнота . . .	Да 9.9	Да 9.4	Да 13.22	Да II.3.29	Да 8.6
Рефлексивность . . .	Нет 13.5	Нет 13.21	Нет 13.22	Да 8.2	Нет 13.2
Сильно бикомпактные множества	13.19	13.19, 13.20	13.19, 13.20	8.18, 8.20	8.18, 8.20, 13.68
Слабо (би)компактные множества	9.12	9.1, 9.2	13.22	II.3.28	8.9, 8.11, 13.54
Слабо фундаментальные последовательности	13.17, (F3)	9.5, (F3)	13.22, (F3)	13.23, 13.24, (F3)	13.25, (F3)
Слабая сходимость к x	13.17	9.5	13.22	13.23, 13.24	13.25
$\mathfrak{Y}$-сходимость в $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}^*$	13.18	Не имеет смысла	9.15	13.24	Не имеет смысла
Различные другие свойства	9.11 (b), III. 7.5, III. 7.6, 13.50, 13.76, 13.77, (F5)	III. 7.5, III. 7.6, 9.8, (F5)	(F5)	13.51, 8.22, 13.53, 8.26, 13.62, 11.7, 13.71, (F6)	13.49, 8.10, 13.51, 8.13, 13.53, 8.14, 13.54, 8.22, 13.62, 8.24, 13.68, 8.26, 13.71, 11.7, (F5)

(F5) Все пространства мер, L_1-пространства и пространства им изометрически изоморфные посредством введения соответствующего отношения порядка могут быть превращены в векторные структуры типа L-пространства [1]). Сравнить это с относящимися сюда замечаниями, приводимыми в параграфе 16.

(F6) Пространства l_2 и $L_2(S, \Sigma, \mu)$, будучи гильбертовыми пространствами, обладают многими специальными свойствами.

[1]) Определение L-пространства см. ниже (стр. 428).—*Прим. ред.*

Продолжение табл. IVA

Пространство $\mathfrak{X}$	19. $L_\infty(S, \Sigma, \mu)$	20. $BV(I)$	21. $NBV(I)$	22. $AC(I)$	23. $C^n(I)$
Сопряженное пространство $\mathfrak{X}^*$	8.16	(F1)	(F1)	13.29	13.36
Слабая полнота	Нет V.11.2	Да 12.1	Да 12.2	Да 12.3	Нет 13.36
Рефлексивность	Нет V.11.2	Нет 13.28	Нет 13.28	Нет 13.28	Нет 13.36
Сильно бикомпактные множества	6.26	13.48	13.34	13.32, 13.33	13.36
Слабо (би)компактные множества	(F8)	13.30	13.30	13.31	13.36
Слабо фундаментальные последовательности	V.11.2	13.30, (F3)	13.30, (F3)	13.31, (F3)	13.36
Слабая сходимость к x . .	V.11.2	13.30	13.30	13.31	13.36
$\mathfrak{Y}$-сходимость в $\mathfrak{X}=\mathfrak{Y}^*$ . .	13.27	13.35 (B)	13.35 (A)	Не имеет смысла	Не имеет смысла
Различные другие свойства	11.7, V.8.11, 13.53, 8.23, 13.69, 8.26, 13.77, 13.71, (F4)	13.48, 13.63, 13.73, (F5)	13.35, (F5)	12.3, (F5)	13.36

(F7) Отметим, однако, результат, содержащийся в упражнении 13.46.

(F8) Используя устанавливаемый теоремой V.8.11 изоморфизм между $L_\infty(S, \Sigma, \mu)$ и некоторым пространством непрерывных функций, можно получить некоторое условие слабой бикомпактности из теоремы 6.14. (Сравнить это с упражнением V.11.2, где дается соответствующий результат для слабой сходимости.) К сожалению, это условие можно получить лишь в чрезвычайно громоздком виде.

Продолжение табл. IVA

Пространство $\mathfrak{X}$	24. $A(D)$	25. AP	26. Гильбертово пространство	27. $TM(S,\Sigma,\mu)$	28. s
Сопряженное пространство $\mathfrak{X}^*$		(F9)	4.5	Не имеет смысла	Не имеет смысла, (F7)
Слабая полнота	Нет 13.37	Нет 13.38	Да 4.7	Не имеет смысла	Не имеет смысла
Рефлексивность	Нет 13.37	Нет 13.38	Да 4.6	Не имеет смысла	Не имеет смысла
Сильно бикомпактные множества	13.37	13.39	13.45	11.1	13.47
Слабо (би)компактные множества	13.37	6.29	4.7	Не имеет смысла	Не имеет смысла
Слабо фундаментальные последовательности	13.37	13.41	13.44	Не имеет смысла	Не имеет смысла
Слабая сходимость к x . .	13.37	13.41	13.44	Не имеет смысла	Не имеет смысла
$\mathfrak{Y}$-сходимость в $\mathfrak{X}=\mathfrak{Y}^*$ . .	Не имеет смысла	Не имеет смысла	13.44	Не имеет смысла	Не имеет смысла
Различные другие свойства		7.6, XI.2, (F4)	4.1, 4.4, 4.5, 4.9, 4.10, 4.12, 4.15, 4.16, 13.67, 13.70, 13.72	11.2, 11.4, 11.6, 11.7, 13.74	

(F9) Пользуясь теоремой 7.6, можно, конечно, представить AP^* как $rca(S)$, где S есть фигурирующее в этой теореме бикомпактное пространство, иногда называемое *боровским бикомпактным расширением* вещественной прямой. По-видимому, не известно никакого более конкретного представления пространства AP^*. Опубликованный Хьюитом [6] результат в этом направлении кажется не вполне доказанным.

Круг идей, изложенных в п. 4.9—4.13, выражает в абстрактной форме результаты, известные под названием теоремы Рисса — Фишера, доказанной независимо друг от друга Э. Фишером [1] и Ф. Риссом [5], хотя под этим названием известна также и теорема о полноте пространства L_2. Равенство, фигурирующее в теореме 4.13,— это классическое «равенство Парсеваля», а связанное с ним неравенство, появляющееся в доказательстве теоремы 4.10, называется «неравенством Бесселя».

Теорема о том, что все ортонормированные базисы гильбертова пространства имеют одну и ту же мощность, была доказана Лёвигом [1, стр. 31] и Реллихом [3, стр. 355]. Теорема 4.16 принадлежит Лёвигу [1, стр. 27].

Пространства $B(S, \Sigma)$ *и* $B(S)$. Результаты, содержащиеся в п. 5.1 и 5.3, были независимо доказаны Гильдебрандтом [3] и Фихтенгольцем и Канторовичем [1]. (См. также работу Иосиды и Хьюита [1].) Лемма 5.4 и следствие 5.5 принадлежат Филлипсу [3, стр. 526]. Теорема 5.6 была доказана Фересом [1; 2, стр. 184].

Пространство $C(S)$. Так как результаты § 6 распадаются на несколько групп, то мы соответственно разделим наши комментарии на несколько частей.

Теорема Рисса об общем виде линейного функционала (6.1—6.3). Под этим названием известны теоремы 2 и 3, так как это основное интегральное представление непрерывного линейного функционала на $C[0, 1]$ впервые было обнаружено Ф. Риссом [7].

Некоторые представления линейных функционалов на $C[0, 1]$ были получены и раньше, однако все они страдали различными дефектами, такими, как отсутствие единственности. Так, например, Адамаром [1] было доказано, что каждое $x^* \in C^*[0, 1]$ имеет вид

$$x^*f = \lim_{m\to\infty} \int_0^1 k_m(s) f(s)\, ds,$$

где $k_m \in C[0, 1]$. Фреше [5; I] дал другое доказательство этого факта и заметил [5; II], что функции k_m можно считать обращающимися в нуль в точках 0 и 1 или многочленами (но не то и другое сразу). В частности, существует такая двойная последовательность констант b_{nm}, $0 \leqslant n \leqslant m$, $1 \leqslant m < \infty$, что

$$x^*f = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} b_{nm} f\left(\frac{n}{m}\right).$$

Фреше дал также приложения этих результатов.

Рисс сформулировал свою теорему в 1909 г. (Ф. Рисс [7]). С тех пор он дал несколько различных ее доказательств (Ф. Рисс [3, 10, 11]). Новое доказательство и тоже для $C[0, 1]$ было предложено Хелли [1]. Радон [2, стр. 1333] обобщил эту теорему на компактное множество в E^n, причем выразил линейный функционал через интеграл по некоторой регулярной мере, а не с помощью интеграла Стильтьеса. См. также работу К. Фишера [2]. В работах Гильдебрандта [8] и Гильдебрандта и Шёнберга [1], показано, что теорема об общем виде линейного функционала эквивалентна теореме Хаусдорфа о моментах. Дальнейшее обобщение этой теоремы было сделано в 1937 г., когда Банах (в приложении II к монографии Сакса [1]) доказал ее для $C(S)$ в предположении, что S есть бикомпактное метрическое пространство. При тех же предположениях эта теорема была доказана и Саксом [4]. В 1941 г. Какутани [9, стр. 1009] обобщил эту теорему на бикомпактные хаусдорфовы пространства, видоизменив рассуждения, проводимые в некоторых неопубликованных заметках Дж. Неймана.

Несколько раньше, в 1938 г., первая попытка обобщить этот результат на небикомпактные пространства была сделана в работе Маркова [2], который рассматривал ограниченные непрерывные функции на некотором пространстве, удовлетворяющем аксиоме отделимости нормального пространства, но без предположения о замкнутости точек. Он показал, что положительные функционалы соответствуют положительным регулярным конечно аддитивным мерам, и рассматривал некоторые инвариантные функционалы, т. е. такие, что $x^*(fg)=x^*(f)$ для всех $f \in C(S)$. Аналогичным вопросом занимался и А. Д. Александров [1], исследовавший «пространства», удовлетворяющие аксиоме отделимости нормального пространства, однако такие, в которых несчетные суммы открытых множеств не обязательно открыты. Для таких пространств он [1; II, стр. 577] доказал теорему 2 и установил связь аддитивных свойств со свойствами бикомпактности пространства [1; II, стр. 587] и свойствами сходимости функционалов [1; II, стр. 593].

Имеется также несколько новых работ, относящихся к этому вопросу. Так, например, Халмош [5, гл. 10], Хьюит [3] и Эдвардс [1] рассматривали функционалы на пространстве непрерывных функций, заданных на локально бикомпактном хаусдорфовом пространстве и обращающихся в нуль вне бикомпактных множеств. Аренс [3] рассматривал некоторые подалгебры, образованные непрерывными функциями, заданными на топологическом пространстве и такими, что множество $\{s \mid |f(s)| > c > 0\}$ бикомпактно для каждого $c > 0$. В каждом из этих случаев представление осуществляется с помощью регулярной счетно аддитивной меры, заданной на некоторой алгебре подмножеств. Гликсберг [1] показал, что если пространство S вполне регулярно, то для того, чтобы каждый неотрицательный функционал на $C(S)$ мог быть представлен с помощью некоторой счетно аддитивной меры, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено одно из следующих условий: (1) из того, что $f_n \in C(S)$, $n=0, 1, 2, \ldots$, и $f_n(s) \uparrow f_0(s)$, $s \in S$, вытекает, что $f_n \to f_0$ равномерно на S; (2) каждая непрерывная вещественная функция на S ограничена;

(3) каждая непрерывная вещественная функция на S достигает своего максимума; (4) каждое ограниченное равностепенно непрерывное семейство из $C(S)$ относительно бикомпактно.

Вплоть до настоящего времени изучаются и линейные функционалы на пространствах *ограниченных* непрерывных функций. Хьюит [1] показал, что если S вполне регулярно, то положительный линейный функционал на пространстве всех определенных на S непрерывных функций может быть представлен посредством счетно аддитивной меры μ, определенной на некоторой σ-алгебре, и что каждая функция ограничена всюду, за исключением некоторого нуль-множества относительно μ. Это обобщает результат, сформулированный для $C(-\infty, +\infty)$ Вехаузеном [1, стр. 164]. В своей работе Хьюит рассматривает также линейные функционалы, непрерывные в некоторых топологиях (например, в бикомпактно открытой топологии и в произведении топологий).

Исследование доказательства теоремы 2 показывает, что проблема отыскания общего вида линейного функционала может рассматриваться как проблема продолжения линейной функции, заданной первоначально на $C(S)$, на более широкий класс функций, заданных на S, такой, как класс ограниченных борелевских функций. Как только это продолжение найдено, мера легко получается, и функционал представляется в виде некоторого интеграла. Это вполне аналогично идее, использованной Даниелем [1] в теории интегрирования, различные модификации которой дали Бурбаки [4], Люмис[1] и Стоун [6]. Хьюит [2] и Люмис [2] рассматривали линейные функционалы с этой же точки зрения. Идеи Даниеля значительно обобщены на сохраняющие порядок отображения между упорядоченными пространствами Мак-Шейном [3] и на положительные отображения пространства $C(S)$ в упорядоченные пространства Кристианом [1].

Сильная и слабая бикомпактности в $C(S)$ (6.5—6.14). Асколи [2, стр. 545] ввел понятие равностепенной непрерывности в данной точке множества непрерывных функций (вещественного переменного); почти в то же самое время это понятие использовал также Арцела [5]. Определение 6.6 просто применяет его определение в каждой точке области. Это основное понятие легко можно обобщить на функции, значения которых принадлежат некоторому метрическому пространству и даже на еще более широкие классы функций. (см. Бурбаки [5, гл. 10]).

Важная теорема 4.7 известна под названием теоремы Арцела — Асколи, хотя многими авторами используется лишь одно из этих имен. В случае пространства $C[0, 1]$ Асколи [2, стр. 545—549] применил конструкцию, которая по существу эквивалентна достаточному условию бикомпактности. Арцела [2] доказал необходимость этого условия. Обе работы используют геометрическую терминологию, и извлечь из них эти результаты нелегко. Однако Арцела

[3, стр. 56—60] дал очень ясное изложение этой и смежных с нею теорем. Обобщение на случай, когда областью определения служит некоторое пространство, в котором определено понятие предела (скажем, метрическое пространство), было дано Фреше [1]. Нетрудно получить обобщение и на тот случай, когда областью значений служит вместо поля вещественных или комплексных чисел некоторое метрическое пространство, хотя в этом случае приходится также предполагать, что множество $\{f(s) \mid f \in K\}$ для каждого $s \in S$ относительно бикомпактно.

В том случае, когда S не предполагается бикомпактным, или если область значений функций не предполагается метрическим пространством, аналогичный критерий бикомпактности был установлен Аренсом [5], Гейлом [1] и Майерсом [1] (см. также Бурбаки [5, гл. 10] и Келли [5]). В этих случаях обычно используется «бикомпактно открытая» топология пространства функций. Различные критерии бикомпактности для C [0, 1] были даны Идзуми [2].

Здесь, пожалуй, уместно изложить некоторые исторические сведения по поводу понятия равномерной сходимости — основного вида сходимости в этом пространстве. Важность этого типа сходимости теперь вполне оценена, однако это не всегда было так. Даже такой крупнейший математик, как Коши, ошибался на этот счет, утверждая в 1821 г., что сумма сходящегося ряда непрерывных функций сама является непрерывной функцией (см. Коши [1, стр. 120]). Ошибочность этого утверждения была указана в 1826 г. Абелем [1, стр. 316]. На этом дело остановилось на несколько лет. В 1847 г. Стокс [1, стр. 562], в 1848 г. Зейдель [1] и в 1853 г. Коши [1, стр. 30—36] независимо друг от друга показали, что равномерная сходимость является достаточным условием для непрерывности предельной функции. (Интересно, что Вейерштрасс [1, стр. 67, 70] пользовался этим понятием сходимости в некоторых своих неопубликованных рукописях, написанных в 1841 г. и даже использовал термин «gleichmässig».) К чести Зейделя — он заметил, что не в состоянии доказать также и необходимость этого условия. Стокс запутался в этом вопросе, а Коши сохранял молчание. Необходимые и достаточные условия не были получены еще в течение нескольких лет.

Понятие квазиравномерной сходимости последовательности функций ввел в 1884 г. Арцела [1], доказавший теорему 6.11 для классического случая последовательности в C [0, 1]. Однако в 1878 г. Дини [1, стр. 107—109] дал необходимое и достаточное условие непрерывности предельной функции в точке и сформулировал [1, стр. 110—112] свою классическую теорему о монотонно сходящейся последовательности непрерывных функций.

Понятие квазиравностепенной непрерывности (связанное с квазиравномерной сходимостью точно так же, как обычная равностепенная непрерывность связана с равномерной сходимостью) было введено Сирвинтом [2, 3] для C [0, 1] и Бартлом [2] для C (S). В случае C [0, 1] эквивалентность условий (1), (2) и (3) теоремы 6.14 была доказана Сирвинтом [2, 3; стр. 76, 82] и Бурженом [1, стр. 601]. Для общего случая Гротендик [2, стр. 180—182] доказал эквивалентность условий (1), (2) и (5). Эквивалентность условий (1), (3) и (4) для общего случая была доказана Бартлом [2], которому и принадлежит приводимое нами доказательство. Гротендик [2] рассматривал соотношение между бикомпактностью, счетной бикомпактностью и компактностью для случая, когда область значений непрерывных функций содержится в некотором более общем топологическом пространстве. Некоторые из результатов Бартла [2] справедливы также и в этом более общем случае.

Теорема Стоуна — Вейерштрасса и смежные с ней теоремы (6.15—6.27). Классическая теорема об аппроксимации непрерывных функций полиномами принадлежит Вейерштрассу [2, стр. 5]. Было предложено много доказательств этой теоремы; см., например, работы Л. Грейвса [1, 4], Гобсона [1; II, стр. 228—234] и Уиддера [1, стр. 152—153]. (Из доказательства, приводимого в работе Л. Грейвса [4], видно, что если $f \in C^n[0, 1]$, то полиномы можно выбрать таким образом, чтобы все их производные до порядка n включительно равномерно сходились к соответствующим производным функции f.)

Из многочисленных обобщений теоремы Вейерштрасса для [0, 1] мы упомянем замечательную теорему Мюнца [1], утверждающую, что множество $\{1, x^{\alpha_1}, \ldots, x^{\alpha_n}, \ldots\}$ в том и только в том случае является фундаментальным в C [0, 1], если ряд $\Sigma\alpha_i^{-1}$ расходится. Эта теорема была уточнена и упрощена в работах Саса [1] и Кларксона и Эрдёша [1].

Стоуновское обобщение теоремы Вейерштрасса для вещественных функций содержится в его работе [1, стр. 466—469], где в основном пространство непрерывных функций рассматривается как некоторая алгебра. Комплексный случай был рассмотрен Гельфандом и Шиловым [1]. Какутани [9] изучал аналогичный вопрос, основываясь на структурных свойствах пространства. Стоун в работе [4] рассматривал оба эти аспекта, найдя полный и элементарный подход к этому красивому и важному обобщению. В этой последней работе Стоун рассматривает несколько близких между собой аспектов этой проблемы, а также многие приложения этого результата. Доказательство другого типа, основанное на теории полугрупп, было получено Данфордом и Сигалом [1].

Для случая вещественных скаляров теорема Стоуна утверждает, что совокупность алгебраических комбинаций семейства $D \subseteq C(S)$ в том и только в том случае всюду плотна в C (S), если функции из D разделяют точки пространства S. Хьюит [4] показал, что если пространство S предполагается только вполне регулярным, а не бикомпактным, то это утверждение теряет силу. Хьюит доказал, кроме того, что более сильного свойства отделимости (для замкнутых множеств вместо точек) достаточно для справедливости теоремы и в этом случае.

Аренс [4] дал некоторое обобщение теоремы Стоуна — Вейерштрасса для случая, когда областью значений служит некоторая абелева группа с определенными структурными и топологическими свойствами. Капланский [1, стр. 228—233] доказал соответствующую теорему для случая, когда S есть бикомпактное хаусдорфово пространство, а функции в точке $s \in S$ принимают значения из некоторой C^*-алгебры A_s, зависящей от s. Это есть некоторое «некоммутативное» обобщение теоремы Стоуна — Вейерштрасса. Доказательство Капланского даже для обычного случая отлично от приводимого нами. Капланский [2] дал также теорему типа теоремы Стоуна, где скаляры принадлежат некоторому евклидову кольцу с делением.

Все упомянутые выше абстрактные теоремы устанавливают условия, достаточные для того, чтобы некоторый класс функций порождал все пространство. Уэрмер [6, 9] дал условия, достаточные для того, чтобы две функции порождали $C(S)$, где S есть единичный круг. Если f взаимно однозначна или $f(\lambda)=\lambda^2$, то даются необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять функция g для того, чтобы f и g порождали $C(S)$. Этот вопрос тесно связан с классификацией замкнутых подалгебр B, максимальных в том смысле, что если B' есть замкнутая подалгебра в $C(S)$ и если $B \subseteq B'$, то B' совпадает либо с B, либо со всем $C(S)$. Дополнительные результаты относительно максимальных подалгебр и смежных с этим вопросов имеются в работах Уэрмера [10, 11], Хельсона и Квигли [1, 2] и Рудина [1].

Теперь мы остановимся вкратце на теоремах 6.18—6.27. По существу, они получены Стоуном [1], по крайней мере для вещественного случая, хотя его терминология и доказательства часто отличаются от предлагаемых нами. Необходимо упомянуть, что теорема 6.22 была независимо и лишь несколько позднее доказана и Чехом [1] (см. также элементарное изложение в работе Стоуна [5]). Лемма 6.25 была доказана Стоуном [1, стр. 465]; обобщения этого результата имеются также у Хьюита [5] и Капланского.

Существует несколько теорем, тесно связанных с теоремами 6.26 и 6.27,— см., например, теорему V.8.8, в которой доказано, что если $C(S)$ изометрически изоморфно $C(T)$, где S и T — бикомпактные хаусдорфовы пространства, то S и T гомеоморфны. Эта теорема была доказана для вещественных скаляров и бикомпактных метрических пространств Банахом [1, стр. 145], а для бикомпактных хаусдорфовых пространств — Стоуном [1, стр. 469]. (Близкие к этому результаты имеются также у Эйленберга [1], Аренса и Келли [1], Хьюита [5].) Все это можно резюмировать в виде утверждения, что «банахово пространство $C(S)$ определяет S». Шилов [1] показал, что

$C(S)$ как топологическое кольцо определяет S при условии, что S есть бикомпактное метрическое пространство. Гельфанд и Колмогоров [1] доказали более сильную теорему о том, что если S — бикомпактное хаусдорфово пространство, то кольцо $C(S)$ определяет S. Эта теорема включает следствие 6.27. Стоун [7; II] показал, что $C(S)$ как структурно упорядоченная группа определяет S. Наконец, Капланский [3; I] доказал, что и просто как структура $C(S)$ определяет S. Хьюит [5], Нагата [1] и Сирота [1] получили некоторые результаты для случая, когда пространство S не предполагается бикомпактным. Кейдисон [2] получил результаты такого же рода для некоммутативных C^*-алгебр.

Из предыдущего абзаца видно, что каждое разумное топологическое или алгебраическое свойство пространства $C(S)$ определяет S, если только S бикомпактно. То, что это перестает быть верным, если $C(S)$ рассматривать только как линейное топологическое пространство, видно из того, что пространство $C[0, 1]$ можно линейно и гомеоморфно отобразить на пространство $C([0, 1]\bigcup 2)$ (см. Банах [1, стр. 156–157).

Слабая бикомпактность в $B(S)$. Определение 6.28 эквивалентно определению Бартла [2], которому принадлежит и теорема 6.29. Лемма 6.30, по существу, принадлежит Буржену [1, стр. 600], приводимое нами ее доказательство и ее применение к 6.31 принадлежит Бартлу [2]. Теорема 6.31 впервые была доказана Сирвинтом [3, стр. 80], доказательство которого было основано на некоторых близких к этому теоремах Банаха [1, стр. 185—191]. Эта теорема еще раньше без доказательства была сформулирована Фихтенгольцем и Канторовичем [2].

Пространство AP. Теория почти периодических функций была создана Г. Бором [1], но в этой области работало и много других математиков. Хотя теория почти периодических функций представляет собой естественное и красивое обобщение теории периодических функций, Бор пришел к ней в результате изучения рядов Дирихле. Весьма интересный обзор некоторых различных доказательств основных теорем этой теории читатель может найти в работе Бора [4]. Книга Бора [2] дает очень хороший обзор элементарной теории, а в книге Безиковича [1] рассматриваются некоторые обобщения и аналитические почти периодические функции. (См. также работу Маака [1].)

Теорема 7.2 была использована Бохнером [4] в качестве определения почти периодических функций. Это привело Дж. Неймана и Бохнера (Дж. Нейман [9], Бохнер и Дж. Нейман [1]) к обобщению этой теории на произвольную абстрактную группу; если G есть некоторая абстрактная группа, функция $f\in B(G)$ называется *почти периодической справа*, если множество $\{f_a \mid a\in G\}$, где $f_a(x)=f(xa)$, относительно бикомпактно в $B(G)$. Подробнее об этом направлении в теории почти периодических функций см. в работе Бора [3].

Если сильную топологию в $B(G)$ заменить слабой топологией, то мы получим *слабо почти периодическую* функцию в смысле Эберлейна [3]. Некоторые аспекты этих обобщений будут рассматриваться в последующих главах. Другие ссылки читатель может найти у Люмиса [1] и А. Вейля [1][1].

Пространство S теоремы 7.6 называется *боровским бикомпактным расширением* вещественной прямой: А. Вейль [1, 2] показал, что вполне аналогичный результат можно получить также и для любой локально бикомпактной абелевой группы и указал приложения этого факта. Андзаи и Какутани [1] показали, между прочим, что боровское бикомпактное расширение локально бикомпактной абелевой группы G можно получить с помощью группы характеров $\hat{G}$ группы G, устанавливая в $\hat{G}$ дискретную топологию и беря затем группу характеров этой дискретной группы. Хьюит [6] пользовался боровским бикомпактным расширением для изучения пространства $(AP)^*$. (См. также работы Артеменко [2] и Крейна [5] о некоторых положительных линейных функционалах.)

Пространство L_p. Для случая L_2 [0, 1] теорема 8.1 была сформулирована независимо и одновременно в 1907 г. Фреше [4] и Ф. Риссом [9]. Подробное доказательство принадлежит Фреше [5; III, стр. 441]. Эта же теорема для L_p [0, 1], $1 < p < \infty$, была доказана Ф. Риссом [2, стр. 475]. Для случая пространства с конечной мерой эта теорема была установлена Никодимом [9, стр. 132] и, позднее, Данфордом [1, стр. 338], по существу, тем же методом, которым пользуемся и мы. Доказательство, основанное на свойстве равномерной выпуклости, было дано Мак-Шейном [1] для совершенно произвольного пространства с мерой. Совсем иное доказательство было предложено Дж. Шварцем [1]. Обобщения этой теоремы на пространства Орлича были получены Зааненом [1; 5, стр. 138].

Для случая L_p [0,1], $1 < p < \infty$, следствия 8.3 и 8.4 были доказаны Ф. Риссом [2, стр. 467].

Штейнгауз [2] доказал теорему 8.5 для отрезка [0, 1] и получил следствие 8.6. Данфорд [1, стр. 338] обобщил теорему 8.5 на пространство с конечной мерой. Пример Ботса (изложенный в работе Дж. Шварца [1]) показывает, что без предположения σ-конечности эта теорема неверна. Однако если S локально бикомпактно и μ — регулярная мера, то $L_1^* = L_\infty$ (см. Дьёдонне [7, стр. 83]). Дж. Шварц [1] дал некоторое представление пространства L_1^* для случая произвольной меры. Прежде чем появилась работа Штейнгауза, Фреше [5, III] дал некоторое представление линейных функционалов F на пространстве L_1 [0, 1] непрерывных в том смысле, что если $f_n(s) \to f(s)$ почти всюду, то $F(f_n) \to F(f)$. Некоторое обобщение теоремы Штейнгауза было получено Сан Хуаном [1].

[1]) См. также книгу Б. М. Левитана [8*]. — *Прим. ред.*

Теорема 8.9 для случая конечной меры была доказана Данфордом [9, стр. 643], а для σ-конечного случая — Данфордом и Петтисом [1, стр. 376]. Для случая, когда S локально бикомпактно и μ — регулярная положительная мера на борелевских множествах Σ, Дьёдонне [7, стр. 93] показал, что для того, чтобы множество $K \subset L_1(S, \Sigma, \mu)$ было слабо бикомпактным, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие условия: (1) K ограничено; (2) для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что если $\mu(E) < \delta$, то $\int\limits_E |f(s)|\,\mu(ds) < \varepsilon$ для всех $f \in K$; (3) для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое бикомпактное множество $C \subseteq S$, что $\int\limits_{S-C} |f(s)|\,\mu(ds) < \varepsilon$ при $f \in K$.

Дьёдонне [7] обобщил эти результаты на некоторый класс функций, не образующих B-пространства, но тесно связанный с L_1. Подробности об этом читатель может найти в его работе.

Следствие 8.13 представляет собой классический результат Я. Шура [1]. Существует аналогичная теорема для L_p, $1 < p < \infty$, принадлежащая Радону [2, стр. 1363] и Ф. Риссу [13]:

Теорема. *Если $1 < p < \infty$, то последовательность $\{f_n\}$ в том и только в том случае сильно сходится к f в $L_p(S, \Sigma, \mu)$, если она слабо сходится и $|f_n| \to |f|$.*

Эта теорема остается справедливой и для любого равномерно выпуклого B-пространства.

Теорема 8.15 была независимо доказана Гильдебрандтом [3, стр. 875] и Фихтенгольцем и Канторовичем [1, стр. 76]. Еще раньше Штейнгауз [2] показал, что произвольный непрерывный линейный функционал, заданный на пространстве существенно ограниченных измеримых функций с L_1-нормой, определяется некоторым элементом из L_∞.

Фреше [9, стр. 308] дал необходимые и достаточные условия бикомпактности множества из l_2. Аналогичные результаты были получены и для $L_2[0, 1]$ (см. Фреше [7, стр. 118]), но они используют наперед указанное ортонормированное множество. Другие результаты для $L_2[0, 1]$ были получены Фересом [2]. Теорема 8.17, по существу, принадлежит Колмогорову [2] для случая, когда $1 < p < \infty$ и S — ограниченное множество в конечномерном евклидовом пространстве. На неограниченные множества она была перенесена Тамаркиным [1]. Тулайков [1] показал, что теорема Тамаркина справедлива так же и при $p=1$. М. Рисс [2] дал другое доказательство этого условия. Такахаси [1] показал, что этот результат справедлив и для обобщенных L_p пространств Орлича. Теорема 8.17 в том виде, как она дана у нас, и ее справедливость при $p=\infty$ была установлена Филлипсом [3, стр. 527]. Иной критерий для L_p, $p \geqslant 1$, был дан Фреше [7]. Николеску [1] также рассматривал результат Колмогорова. Идзуми [2] использовал условия типа введенных Колмогоровым, чтобы получить критерий бикомпактности для $C[0, 1]$ и $TM(S, \Sigma, \lambda)$[1]).

Теоремы 8.18 и 8.20 принадлежат М. Риссу [2]. Некоторое обобщение их на случай $0 < p < 1$ было дано Цудзи [2]. Лемма 8.25 и теорема 8.26 принадлежат Ф. Риссу [23], который рассматривал их в несколько более общей ситуации.

Так как каждый элемент из L_∞ представляет собой некоторый класс эквивалентных функций, то естественно поставить вопрос, можно ли из этих классов выбрать ограниченных представителей таким образом, чтобы сохранялись суммы и скалярные произведения. Дж. Нейману [21] принадлежит замечательная теорема о том, что такой выбор в $L_\infty(0, 1)$ можно сделать так, чтобы сохранялись полиномиальные тождества

Теорема. *Пусть (S, Σ, μ) — пространство с положительной конечной мерой такое, что $L_1(S, \Sigma, \mu)$ сепарабельно. Тогда существует такое линейное отображение T пространства $L_\infty(S, \Sigma, \mu)$ в $B(S)$, что $|T| \leqslant 1$ и что Tf и f принадлежит одному и тому же классу эквивалентности при всех $f \in L_\infty(S, \Sigma, \mu)$.*

Для $S=[0, 1]$ это есть частный случай одной теоремы Дж. Неймана. Краткое доказательство этой теоремы, использующее одну из теорем Халмоша и Дж. Неймана [1], принадлежит Дьёдонне [9], показавшему, что этот результат тесно связан с некоторыми теоремами, рассматриваемыми нами в § VI. 8.

Пространства функций множества. То обстоятельство, что равномерная счетная аддитивность множества из $ca(S, \Sigma)$ эквивалентна равностепенной непрерывности относительно некоторой фиксированной положительной меры, было доказано Дубровским [2]. В работе [1] Дубровский доказал также, что для случая бикомпактного куба в E^n из каждого из этих предположений вместе с ограниченностью вытекает, что каждая последовательность содержит подпоследовательность, сходящуюся для каждого борелевского множества. Близкие к этому результаты см. также в работах Кафиеро [3—5] и Дубровского [3—6]. Доказательства теорем 9.1—9.3, отличные от приводимых нами, имеются в работе Бартла, Данфорда и Шварца [1].

Гротендиком [4, стр. 146] были доказаны аналогичные критерии слабой бикомпактности для регулярных мер. Приводим его результат.

Теорема. *Пусть M — локально бикомпактное пространство и $K \subset rca(M)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *K слабо компактно;*

[1]) Весьма общий критерий компактности дан также Шиловым [7*]. — *Прим. ред.*

(2) *если* $\{f_n\}$ — *равномерно ограниченная последовательность определенных на* M *непрерывных функций, в каждой точке сходящаяся к нулю, то*

$$\lim_{n\to\infty}\int_M f_n(s)\,\mu(ds)=0$$

равномерно относительно $\mu\in K$;

(3) *для каждой последовательности* $\{G_n\}$ *попарно непересекающихся открытых множеств* $\lim\mu(G_n)=0$ *равномерно относительно* $\mu\in K$;

(4) (a) *для каждого бикомпактного множества* $C\subseteq M$ *и* $\varepsilon>0$ *существует такая открытая окрестность* U *множества* C, *что* $v(\mu;\ U-C)\leqslant\varepsilon$ *для каждого* $\mu\in K$; (b) *для заданного* $\varepsilon>0$ *существует такое бикомпактное множество* $C\subseteq M$, *что* $v(\mu,\ M-C)\leqslant\varepsilon$ *для каждого* $\mu\in K$.

Ввиду теоремы Радона — Никодима теорема 9.5 может рассматриваться как обобщение одной теоремы Лебега [1, стр. 57]. Теорема 9.4 есть частный случай этого результата и некоторой теоремы Никодима [6], а именно теоремы III.7.3.

Теорема 9.8, усиливающая теорему о равномерной ограниченности для некоторого частного случая, принадлежит Никодиму [5]. Приводимое нами доказательство, так же, как и лемма 9.7, имеется в работе Сакса [3], где доказан несколько более сильный ее вариант. (По поводу других результатов относительно «атомной структуры» пространства с мерой см. работы Хана и Розенталя [1, стр. 45—53] и Халмоша [5, стр. 162—180].)

Теорема 9.14 принадлежит Бохнеру [3]. В работе Бохнера и Филлипса [1] также имеется доказательство этой теоремы.

Теорема 9.15 была доказана А. Д. Александровым [1, III, стр. 182], которому принадлежит несколько аналогичных результатов (см. А. Д. Александров [1, III]). Нижеследующие замечания относятся к этой теореме.

Некоторые замечания о $\mathfrak{X}$-*сходимости в* $\mathfrak{X}^*$. Одна из проблем, перечисленных в § 1 этой главы, это определение конкретных условий $\mathfrak{X}$-сходимости в $\mathfrak{X}^*$, т. е. определение в терминах пространств $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}^*$, условий, при которых $x_n^*x\longrightarrow x^*x$ для любого $x\in\mathfrak{X}$. Теорема 9.15 служит примером такой теоремы. Аналогичные вопросы рассматривались в классической работе Лебега [1]. Он получил некоторые необходимые и достаточные условия, при которых

$$\int_0^1 f(s)\,\varphi_n(s)\,ds\longrightarrow 0,\quad f\in F,$$

где функции f и $\{\varphi_n\}$ берутся из некоторых наперед указанных классов: L_1, L_2, L_∞, C, BV и т. д. Одни из этих результатов имеют в виду слабую сходимость, другие — $\mathfrak{X}$-сходимость в $\mathfrak{X}^*$, третьи — ни то, ни другое. Кемп [1] обобщил некоторые результаты Лебега на случай нескольких переменных. Подробное изложение таких условий было дано Ханом [2], рассматривавшим много разных пространств.

Соответствующие проблемы для мер возникают сами собой — определить условия на $\{\mu_n\}$, при которых

$$[*] \qquad \int f(s)\,\mu_n(ds) \to 0, \quad f \in F,$$

где F есть определенное множество функций. Интеграл здесь может пониматься в смысле Стильтьеса. В этой связи мы сформулируем классическую теорему, принадлежащую Хелли [1, стр. 268] и Брею [1, стр. 180].

Теорема. *Если* $\{\alpha_n\}$ *есть последовательность функций равномерно ограниченной вариации и если существует такая функция* $\alpha \in BV[0, 1]$, *что* $\alpha_n(x) \to \alpha(x)$, *где* x *принадлежит некоторому всюду плотному подмножеству отрезка* $[0, 1]$, *содержащему* 0 *и* 1, *то*

$$\int_0^1 f(s)\,\alpha_n(ds) \to \int_0^1 f(s)\,\alpha(ds), \quad f \in C[0, 1].$$

Условие этой теоремы достаточно, но не необходимо; необходимое и достаточное условие было дано Гильдебрандтом [9]. Другие результаты читатель может найти у Гливенко [1, гл. 7] или у Л. Грейвса [2, стр. 281—292]. Г. М. Шварц [1] также получил некоторые результаты в этом направлении, причем функцию f он не предполагал непрерывной.

Дьёдонне [11] рассматривал сходимость интегралов [*], где S есть бикомпактное хаусдорфово пространство, μ_n — регулярные меры и F — один из следующих классов: 1) непрерывные функции, (2) функции, интегрируемые по Риману, (3) полунепрерывные функции, (4) ограниченные измеримые по Борелю функции. Его, быть может, самый замечательный результат состоит в следующем:

Теорема. *Если* S — *бикомпактное метрическое пространство,* $\mu_n \in rca(S)$ *и если* $\mu_n(G) \to \mu(G)$ *для каждого открытого множества* $G \subseteq S$, *то* $\mu_n(E) \to \mu(E)$ *для каждого борелевского множества* E.

Векторнозначные меры. Важная теорема 10.1 принадлежит Петтису [4, стр. 283], доказавшему ее для неопределенного интеграла с помощью одной теоремы Орлича и Банаха; однако доказательство Петтиса годится и для общего случая. В следующем году Петтис [6] сформулировал и общий результат. Кунисава [1] первый опубликовал доказательство этой общей теоремы (см. также работу Накамуры и Суноути [1]).

Полувариация, как она определена в п. 10.3, в скалярных случаях превращается в обычную полную вариацию. В абстрактном случае она использовалась Гавуриным [4], построившим теорию интеграла риманова типа, в которой функция и мера принимают значения из двух векторных пространств, на произведении которых определена некоторая векторнозначная билинейная функция.

Изложенная нами теория интеграла типа интеграла Лебега для скалярных функций по отношению к векторнозначной мере дана в работе Бартла, Данфорда и Шварца [1]. Аналогичным образом Бартл [3] построил теорию интеграла лебеговского типа для случая, когда и функция и мера векторнозначны.

Пространство $TM(S, \Sigma, \mu)$. Хотя понятие сходимости по мере было введено в 1909 г. Ф. Риссом [12], только Фреше [8, стр. 199] ввел в пространство измеримых функций некоторую метрику таким образом, что метрическая сходимость была эквивалентна сходимости по мере. Фреше [6] дал необходимые и достаточные условия для того, чтобы множество измеримых функций, определенных на отрезке [0, 1], было бикомпактным в этой метрике. (Еще раньше Ферес [1] нашел условия, при которых последовательность измеримых функций содержит равномерно сходящуюся подпоследовательность.) Рассуждения Фреше были упрощены Хенсоном [1]. Несколько иные условия были даны Идзуми [2], а также Медведевым [1]. Теорема 11.1, обобщающая результаты Фреше, принадлежит В. Шмульяну [14]. Другое обобщение ее имеется в работе Кафиеро [2].

Теорема 11.2 является обобщением одной из теорем Банаха [8, стр. 37]. В той форме, как она приведена у нас, она является обобщением некоторой теоремы Данфорда и Миллера [1, стр. 542]. Доказательство, приводимое нами, по существу принадлежит Мазуру и Орличу [1, стр. 157]. Алексевич [1; IV] рассматривал полиномиальные операторы, в случае когда область определения не предполагается B-пространством, но удовлетворяет некоторым предельным условиям. Смежные с этим теоремы и их приложения см. у Сакса [2, 5].

Мы видели, что $TM(S, \Sigma, \mu)$ не является B-пространством и, следовательно, существование на нем ненулевых непрерывных линейных функций сомнительно. Никодим [9, стр. 141] показал, что если $\mu(S) < \infty$, то для существования на $TM(S, \Sigma, \mu)$ ненулевого непрерывного линейного функционала необходимо и достаточно существование атома относительно μ.

Функции ограниченной вариации. Понятие функции ограниченной вариации было введено в 1881 г. Жорданом [1], а понятие абсолютно непрерывной функции — в 1905 г. Витали [1]. Несмотря на то, что эти классы функций играют весьма важную роль во многих вопросах анализа, их изучение было в значительной степени поглощено изучением более общего современного понятия меры; это было сделано в основном Радоном [2].

Общий вид линейных функционалов на BV был найден Гильдебрандтом [7], Артеменко [1] и Гросбергом [1]. В несколько большей общности этот вопрос рассматривался Шрейдером [1], однако ни один из этих результатов не является вполне естественным. В работах Адамса [1] и Адамса и Морса [1, 2] рассматривалось пространство BV и некоторые его подпространства с другой метрикой, относительно которой оно не является B-пространством. В этих работах даются естественные представления для функционалов самого общего вида непрерывных и равномерно непрерывных относительно этой метрики.

Существует несколько определений ограниченной вариации и абсолютной непрерывности для функций двух переменных. Различные соотношения между этими определениями и свойствами связанных с ними понятий были подробно рассмотрены Адамсом и Кларксоном [1—4].

Характеристика гильбертова пространства. Йордан и Дж. Нейман [1] доказали, что в линейном нормированном пространстве $\mathfrak{X}$ двух или большего числа измерений, в котором для любых двух элементов x, $y \in \mathfrak{X}$ справедливо «тождество параллелограмма»:

$$|x+y|^2+|x-y|^2=2\{|x|^2+|y|^2\},$$

можно определить внутреннее произведение так, что $|x|^2=(x, x)$. Таким образом, выполнимость тождества параллелограмма характеризует пространства с внутренним произведением (см. также работу Рубина и Стоуна [1]). Аналогичный результат был получен из других тождеств или неравенств для нормы Г. Биркгофом [1], Дэйем [7], Джеймсом [2], Лорхом [3, 4], Фиккеном [1] и Шёнбергом [1].

Характеризующие гильбертово пространство условия, основанные на некоторых свойствах линейных функционалов, гиперплоскостей и типах ортогональности, рассматривались Г. Биркгофом [1] и Джеймсом [1—3].

Какутани и Макки [1] показали, что в вещественном B-пространстве $\mathfrak{X}$ можно ввести эквивалентную норму, при которой оно становится вещественным гильбертовым пространством, при условии, что существует такое отображение $T \to T^*$ кольца $B(\mathfrak{X})$ ограниченных линейных операторов в $\mathfrak{X}$, что $(T_1T_2)^*=T_2^*T_1^*$, $(T_2+T_1)^*=T_1^*+T_2^*$, $T^{**}=T$, и из того, что $T\neq 0$, вытекает, что $T^*T\neq 0$. Они показали также, что это верно и в том случае, если существует такое отображение $\mathfrak{M}\to\mathfrak{M}'$ структуры $\mathcal{L}$ замкнутых линейных многообразий пространства $\mathfrak{X}$, что $\mathfrak{M}''=\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'\cap\mathfrak{M}=0$, и из того, что $\mathfrak{M}_1\subset\mathfrak{M}_2$, вытекает, что $\mathfrak{M}_1'\supset\mathfrak{M}_2'$. В этом случае пространство $\mathfrak{M}'$ можно идентифицировать с ортогональным дополнением пространства $\mathfrak{M}$.

Какутани [6] доказал, что если $\mathfrak{X}$ есть линейное нормированное пространство трех или большего числа измерений, то норму в нем в том и только в том случае можно задать с помощью некоторого внутреннего произведения, если каждое его двумерное подпространство является областью значений некоторого проектирования с нормой 1 (см. также работы Боненблуста [2], Собчика [1], Филлипса [2]).

Близкие к этому вопросы рассмотрены у Блюменталя [1].

*Библиография.*Ароншайн [1, Г. Биркгоф [1], Блюменталь [1], Боненблуст [2], Джеймс [1—3], Дэй [7], Йордан и Дж. Нейман [1], Какутани [6], Какутани и Макки]1], Лорх [3, 4], Нагумо [3], Охира [1, 2], Рубин и Стоун [1], Собчик [1], Фиккен [1], Филлипс [2], Шёнберг [1], Эллис [1].

Упорядоченные пространства. Имеется обширная литература, посвященная векторным пространствам, в которых задано некоторое отношение порядка. Так, например, *полуупорядоченное векторное пространство* — это векторное пространство $\mathfrak{B}$, в котором для некоторых пар элементов определено отношение $x \geqslant y$, подчиненное следующим условиям:

(I) если $x \geqslant 0$ и $-x \geqslant 0$, то $x = 0$;

(II) если $x \geqslant y$ и $y \geqslant z$, то $x \geqslant z$;

(III) если $x \geqslant 0$ и λ — вещественно и неотрицательно то $\lambda x \geqslant 0$;

(IV) если $x \geqslant y$, то $x + z \geqslant y + z$.

Если для каждой пары элементов из $\mathfrak{B}$ существует верхняя грань $x \vee y$ и нижняя грань $x \wedge y$, то говорят, что $\mathfrak{B}$ есть *векторная структура*.

Часто встречаются и другие соотношения между отношением порядка и алгебраической структурой (как в случае упорядоченных алгебр) или между отношением порядка и топологической или метрической структурами. Здесь имеется много разных возможностей. Мы ограничимся формулированием теорем о представлении абстрактных L- и M-пространств.

Вещественное B-пространство называется *абстрактным L-пространством*, если оно является векторной структурой, в которой

(l) из того, что $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$, вытекает, что $|x+y| = |x| + |y|$.

Такие B-пространства были аксиоматически введены Г. Биркгофом [2] при абстрагировании от конкретного B-пространства, состоящего из интегрируемых по Лебегу функций на некотором пространстве с мерой. (См. также работы Фрейденталя [1], Какутани [3, 7 — 9] и Смайли [1].)

Какутани [8] показал, что в каждом абстрактном L-пространстве может быть введена некоторая эквивалентная норма, удовлетворяющая условию (l), а также следующему условию:

(m) из того, что $x \wedge y = 0$, вытекает, что $|x+y| = |x-y|$.

Говорят, что абстрактное L-пространство обладает *единицей*, если в нем существует такой элемент e, что из условия $x > 0$ вытекает, что $e\wedge x>0$. Обобщая один из результатов Фрейденталя, Какутани [8] доказал следующую теорему:

Теорема. *Для произвольно заданного абстрактного L-пространства, удовлетворяющего условию* (m) *и обладающего единицей, существует такое вполне разрывное бикомпактное топологическое пространтво S и такая счетно аддитивная мера* μ, *определенная на борелевской алгебре* Σ *пространства S, что это абстрактное L-пространство изометрично и структурно изоморфно вещественному B-пространству* $L_1(S, \Sigma, \mu)$.

В работах Какутани [3, 9] (и Боненблуста и Какутани [1]) вещественное B-пространство называется *абстрактным М-пространством*, если оно является векторной структурой, в которой

(V) из того, что $x_n\geqslant y_n$, $x_n\to x_0$, $y_n\to y_0$, вытекает, что $x_0\geqslant y_0$;
(m^*) если $x\wedge y=0$, то $|x+y|=|x-y|$ и $|x\vee y|=\max(|x|, |y|)$.

Мы говорим, что абстрактное M-пространство обладает *единицей*, если в нем существует такой элемент e, что $e\geqslant 0$, $|e|=1$, и из того, что $|x|\leqslant 1$, вытекает, что $x\leqslant e$. Какутани [9] и независимо М. Г. и С. Г. Крейны [1, 2] показали:

Теорема. *Для каждого абстрактного М-пространства с единицей существует такое бикомпактное хаусдорфово пространство S, что это абстрактное пространство изометрично и структурно изоморфно вещественному B-пространству C (S).*

В случае когда наше абстрактное пространство не предполагается обладающим единицей, может быть получена аналогичная теорема о представлении, в котором могут быть линейные соотношения между значениями функций в парах точек.

Какутани принадлежит также следующий результат:

Теорема. *Пространство, сопряженное к абстрактному М-пространству, является абстрактным L-пространством. Пространство, сопряженное к абстрактному L-пространству, является абстрактным М-пространством с единицей.*

Теоремы о представлении ненормированных пространств, аналогичные приведенным выше, были получены Каллером [1] [1]).

Приводим неполный перечень работ, в основном имеющих дело с различными аспектами теории упорядоченных пространств. *Книги*: Г. Биркгоф [3], Накано [2], Канторович, Вулих и Пинскер [1]. *Статьи*: Берри [1], Г. Биркгоф [2], Боненблуст [1], Боненблуст и Какутани [1], Бохнер [1], Бохнер и Фань Ку [1], Бохнер и Филлипс [1], Васильков [1—4], Вулих [1—11], Гросберг и Крейн [1], Дьёдонне [4—6], Иосида [1, 2], Какутани [3, 7—9],

---

[1]) Отметим, что полная теория полуупорядоченных пространств была построена Л. В. Канторовичем [1].—*Прим. ред.*

Канторович [1—3], Канторович, Вулих и Пинскер [2], Кейдисон [1], М. Г. Крейн [2—4], М. Г. Крейн и С. Г. Крейн [1, 2], М. Г. Крейн и Рутман [1], Микусинский [1], Секефальви-Надь [1], Накамура [1, 2], Накано [2—6, 14—16], Нахбин [2], Огасавара [1—6], Огасавара и Маеда [1, 2], Орихара [11], Пинскер [1—7], Пирс [1], Ф. Рисс [23], Смайли [1], Тагамлицкий [1], Фань Ку [1, 2], Фрейденталь [1], Широхов [1], Шмульян [11], Юдин [1].

Характеристика пространств L_1 и L_p. Выше мы рассматривали пространство L_1 как некоторое конкретное представление абстрактного L-пространства. Боненблуст [1] дал весьма интересную характеристику L_p-пространств при $1 \leqslant p < \infty$. Рассмотрим вкратце его результат. Если $\mathfrak{B}$ есть полуупорядоченное вещественное B-пространство, то *абсолютная величина* элемента $x \in \mathfrak{B}$ определяется равенством $\|x\| = x \vee (-x)$. Два элемента x и y из $\mathfrak{B}$ называются ортогональными, если $\|x\| \wedge \|y\| = 0$. *Единица* здесь понимается в том же смысле, как и для L-пространства. Для удобства условимся говорить, что пространство $\mathfrak{B}$ обладает свойством (P), если выполнено следующее условие:

(P) если $x = x_1 + x_2$, где x_1 и x_2 ортогональны, и $y = y_1 + y_2$, где y_1 и y_2 ортогональны, и если

$$|x_1| = |y_1|, \quad |x_2| = |y_2|,$$

то $|x| = |y|$.

Теперь мы можем сформулировать теорему Боненблуста.

Теорема. *Каждое сепарабельное полуупорядоченное вещественное B-пространство с единицей, являющееся σ-полной структурой, имеющее по меньшей мере три измерения и обладающее свойством (P), эквивалентно одному из пространств l_p^n, l_∞^n, l_p, L_p, $L_p \oplus l_p^n$, $L_p \oplus l_p$, $1 \leqslant p < \infty$, или c_0, причем соответствующий изоморфизм сохраняет норму и порядок.*

Для того чтобы различать между собой все эти возможности, можно дать дополнительные условия. Другая характеристика пространства L_1, близкая к работе Кларксона [2], была дана Фуллертоном [5]. Еще одна характеристика L_p-пространств имеется в работах Накано [14—16].

Характеристика пространства C. Имеется много характеристик пространства вещественных непрерывных функций. Выше мы уже упоминали теорему Какутани [9] и М. Г. и С. Г. Крейнов [2], представляющую M-пространство в виде $C(S)$ для некоторого бикомпактного хаусдорфова пространства S. Аналогичные результаты, использующие понятие нормы и структурные свойства, были получены Стоуном [7; II] и Иосидой [1]. В работе Стоуна [7; I] также дана некоторая характеристика пространства C в терминах алгебры, нормы и порядковых свойств. Другие результаты, основанные только на алгебраических свойствах и свойствах нормы, были разработаны Гельфандом [1] для комплексного случая, а затем изучались Гельфандом и Наймарком [1], Аренсом [6, 7], Аренсом и Каплански́м [1] и Сигалом [1]. Мы коснемся этих вопросов в одной из последующих глав о B-алгебрах. Большинство характеристик, основанных на алгебраических свойствах, использует комплексные скаляры. Структурные и порядковые свойства, вообще говоря, приводят к вещественным $C(S)$-пространствам. Аренсом [4], однако, получены условия, при которых вещественная B-алгебра является пространством непрерывных функций, заданных на бикомпактном хаусдорфовом пространстве и принимающих значения из тела кватернионов.

Характеристика, основанная на свойствах упорядоченности и линейных свойствах, была дана Фань Ку [2] и Кейдисоном [1]. Работа Кейдисона является настолько общей, что она включает в себя большую часть предшествующих теорий. В работе Нахбина [2] используются понятие порядка, нормы и линейные свойства.

Результаты, характеризующие $C(S)$ среди вещественных B-пространств $\mathfrak{X}$, были получены Аренсом и Келли [1], Кларксоном [2], Джерисоном [1] и Майерсом [2—4]. Эти результаты касаются некоторых специальных свойств единичной сферы пространства $\mathfrak{X}$ или $\mathfrak{X}^*$. Так, например, Кларксон [2, стр. 847] нашел, что вещественное B-пространство в том и только в том случае является пространством $C(S)$ для некоторого S, если: (1) существует такая точка v, что $|v|=1$ и каждый элемент единичной сферы $\{x\,|\,|x|=1\}$ можно соединить либо с v, либо с $-v$ некоторым прямолинейным отрезком, целиком лежащим на этой сфере, и (2) полуконус прямых, соединяющих точку v с каждой точкой, лежащей внутри или на поверхности единичной сферы, обладает тем свойством, что пересечение двух его сдвигов само является его сдвигом. (См. также работы Фуллертона [1, 5].)

Аренс и Келли [1] показали, что пространство $\mathfrak{X}$ в том и только в том случае изометрически эквивалентно $C(S)$, если (1) крайние точки единичной сферы U пространства $\mathfrak{X}^*$ содержатся в двух опорных гиперплоскостях и (2) каждое множество принадлежащих U крайних точек, замыкание которого не содержит двух диаметрально противоположных точек, целиком лежит в некоторой опорной к U гиперплоскости. Они дали также и другое условие, которое было обобщено Джерисоном.

Некоторые другие интересные условия были получены Майерсом, за подробностями читатель отсылается к его обзорной статье [4].

Абдельгай [1, 2] пользовался кольцевыми и структурными свойствами для характеристики пространства c_0 и пространства непрерывных функций, обращающихся в нуль в некоторой точке. Джерисон [1] рассматривал структурные свойства исключительно методами теории B-пространств.

Специальные $C(S)$-пространства. Если S обладает какими-то специальными свойствами, то последние часто отражаются и на $C(S)$. Так, например, в работе М. Г. и С. Г. Крейнов [1] показано, что если S вполне регулярно, то для того чтобы $C(S)$ было сепарабельным, необходимо и достаточно, чтобы S было бикомпактным метрическим пространством (см. также работу Майерса [3]). Эйленбергом [1] было доказано, что пространство $C(S)$ в том и только в том случае разложимо в прямую сумму, если S несвязно.

Вполне регулярное пространство называется *вполне разрывным*, если замыкание каждого его открытого множества само открыто. Бикомпактные вполне разрывные пространства часто называются *пространствами Стоуна*, так как Стоун [1] доказал, что каждая полная булева алгебра изоморфна (как булева алгебра) с булевой алгеброй всех открытых и замкнутых множеств такого пространства. Такая разрывность отражается в том факте, что вещественное пространство $C(S)$ при естественном определении порядка является полной структурой. (Дополнительные результаты такого рода см. в работе Стоуна [8].) В гл. V мы увидим, что вещественное пространство L_∞ изометрически изоморфно вещественному пространству $C(S)$, где S есть некоторое пространство Стоуна.

Пусть S — пространство Стоуна, а $\mathfrak{X} = C(S)$ — пространство вещественных непрерывных функций. Гротендик [4, стр. 168] показал, что каждая $\mathfrak{X}$-сходящаяся последовательность в $\mathfrak{X}^*$ является $\mathfrak{X}^{**}$-сходящейся последовательностью и что если $\mathfrak{Y}$ — сепарабельное B-пространство, то каждый оператор из $B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ является слабо бикомпактным. Гуднер [1, стр. 103] доказал, что единичная сфера в $\mathfrak{X}$ является замкнутой выпуклой оболочкой своих крайних точек. Келли [2] дополнил один из результатов Нахбина [3] и Гуднера [1], доказав, что если $\mathfrak{X} = C(S)$ есть замкнутое линейное многообразие B-пространства $\mathfrak{Z}$, то существует проекционный оператор с нормой, равной единице, отображающий $\mathfrak{Z}$ на $\mathfrak{X}$. Свойство это является характеристическим в том смысле, что каждое обладающее им B-пространство изометрически эквивалентно $C(S)$, где S есть некоторое пространство Стоуна. Нахбин [3] доказал также, что если $\mathfrak{Y}$ есть вещественное B-пространство, единичная сфера которого содержит крайнюю точку и такое, в котором каждое множество сфер (любые две из которых пересекаются), также имеет непустое пересечение, то $\mathfrak{Y}$ изометрически эквивалентно $C(S)$, где S есть некоторое пространство Стоуна.

Даже и более специальные свойства пространства S (*гиперстоуновские пространства*) оказываются полезными при изучении алгебр операторов. По этому вопросу отсылаем читателя к работе Диксмье [3].

Другие специальные пространства. Кроме пространств, перечисленных в § 2, имеется много других пространств, изучавшихся различными авторами. Одни из них являются B-пространствами, другие — только линейными топологическими пространствами. Мы упомянем здесь лишь некоторые из рассматривавшихся пространств.

Дэй [1] рассматривал пространство L_p, $0 < p < 1$, представляющее собой линейное пространство функций, в котором определена некоторая «норма», не удовлетворяющая неравенству треугольника, но подчиняющаяся некоторым другим неравенствам, частично компенсирующим его отсутствие. Дэй показал, в частности, что единственным непрерывным линейным функционалом на этом пространстве является нулевой функционал. С другой стороны, пространство $L_p[0, 2\pi]$ содержит подпространство H_p всех функций, регулярных в единичном круге и таких, что

$$|f|_p = \sup_{0 \leqslant r < 1} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, d\vartheta \right]^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Уолтерс [1] показал, что даже в том случае, когда пространство L_p, $0 < p < 1$, не имеет нетривиальных непрерывных линейных функционалов, пространство H_p, $0 < p < 1$, имеет достаточно много функционалов для того, чтобы различать между собой функции из этого пространства. (См. также работы Ливингстона [1] и Уолтерса [2].)

Аренс [2] ввел пространство $L_\omega[0, 1]$, состоящее из всех функций f, у которых все нормы $|f|_1$, $|f|_2$, ... конечны. Он показал, что включение $L_\infty \subset L_\omega \subset L_p$ строгое и что, хотя пространство L_ω является локально выпуклой линейной топологической алгеброй, его топология не может быть задана при помощи некоторой нормы. В частности, если U есть содержащее 0 выпуклое открытое множество, для которого $UU \subset U$, то $U = L_\omega$. Другие замечания относительно пространств L_p, $0 < p < 1$, и L_ω можно найти в работе Ласаля [3].

B-пространство H_p, $p \geqslant 1$, с определенной выше нормой (или с нормой его как подпространства L_p) изучалось многими авторами. (См., в частности, работы Тейлора [4—7].) Исследованием целых функций занимался Ийер [1]. Была построена подробная теория аналитических функций с точки зрения теории линейных пространств, начинающаяся с работ Фантапье и Вольтерра. В этой связи мы упомянем только работы Гротендика [5], Себаштьян-и-Сильвы [2, 3] и Сильва Диаса [1], где можно найти и дополнительные библиографические указания. Пространства, состоящие из функций почти периодических в различных смыслах, рассматривались Бором и Фёльнером [1]. (См. также работу Хартмана и Уинтнера [1].)

Кёте и Теплиц [1] ввели класс топологических векторных пространств, называемых «совершенными пространствами» и состоящих из последовательностей $\{x_n\}$ вещественных или комплексных

28 Заказ № 1324

чисел, удовлетворяет некоторой совокупности условий вида

$$\sum |a_n^{(\alpha)} x_n| < \infty.$$

Эти пространства, среди которых содержатся и некоторые из классических пространств, составленных из последовательностей, допускают теорию двойственности (Кёте [1—9], Теплиц [1]) и находят себе применение при решении систем уравнений с бесконечным множеством неизвестных. Обобщения и другие результаты, относящиеся к этому типу пространств [в частности, введенное Кёте [5] «ступенчатое пространство» (Stüfenräume)], имеются в работах Дьёдонне [7], Дьёдонне и Гомеса [1] и Дьёдонне и Шварца [1]. В работе Дьёдонне и Шварца [1] (см. также работу Дьёдонне [13]) изучается класс пространств, каждое из которых представляет собой объединение некоторой совокупности локально выпуклых F-пространств, в эти пространства вводится соответствующая топология и доказывается, что многие из основных результатов относительно B-пространств остаются справедливыми и в этом более общем случае. (Так, например, пространство C непрерывных функций на $(-\infty, \infty)$ можно рассматривать как объединение пространств $C[-n, n]$, $n = 1, 2, \ldots$; топология в C определяется равномерной сходимостью на бикомпактных множествах.) Пространства такого типа независимо рассматривались так же Мазуром и Орличем [3], построившими подробную их теорию.

Векторные пространства, в которых скаляры берутся из некоторых неархимедовых полей, рассматривались в работах И. Коэна [1] и Монны [1—9]. См. также работы Флейшера [1], Инглтона [1] и Оно [1].

В работах Бирнбаума и Орлича [1], Орлича [3, 4] и Зигмунда [1, гл. 4] рассматривалось некоторое обобщение L_p-пространств следующего типа. Пусть M — непрерывная выпуклая функция, определенная на $[0, \infty)$, обращающаяся в нуль только при $u=0$ и для которой $u^{-1}M(u)$ стремится к 0 и ∞ вместе с u. Пространство $L_M(0, 1)$ определяется как множество определенных на интервале $(0, 1)$ измеримых функций f, для которых

$$\int_0^1 M(|f(x)|)\,dx < \infty.$$

Эти пространства образуют класс B-пространств, содержащий и пространства L_p, $1 < p < \infty$, и обладающих многими аналогичными свойствами. Так, например, существует функция N, обладающая теми же самыми свойствами, что и M, и играющая роль сопряженной с M функции. В частности, если существует такое $k > 0$, что $M(2u) \leqslant kM(u)$, то пространство $(L_M)^*$ эквивалентно L_N. (См. работу Заанена [1], где дается некоторое определение, включающее также и пространства L_1 и L_∞.) Условия относительной бикомпактности в L_M в точности такие же, как и в L_p (Такахаси [1]). Другие условия для того, чтобы интегральный оператор в L_M был бикомпактным, вполне аналогичны соответствующим условиям в L_p (Заанен [2]). Эти пространства подробно рассмотрены в книге Заанена [5]. См. также работы Красносельского и Рутицкого [1—3].

Другие обобщения лебеговых пространств можно найти в работах Эллиса и Гальперина [1], Гальперина [1, 3, 4], и Лоренца [1, 2]. Пространства функций, интегрируемых по Данжуа, изучались Сарджентом [1, 2].

Говорят, что функция, определенная на некотором подмножестве E евклидова пространства, *удовлетворяет в E условию Гёльдера для показателя* α, или является *непрерывной по Гёльдеру*, если

$$|f| = \sup_{x,\, y \in E} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\alpha}} < \infty.$$

Ясно, что совокупность всех таких функций с указанной нормой является B-пространством. Это B-пространство функций играет весьма важную роль в связи с изучением некоторых сингулярных интегральных операторов, в частности таких, которые появляются в теории дифференциальных операторов с частными производными. Более подробные указания по этим вопросам приводятся в последнем параграфе гл. XI части II. Об основных неравенствах, связывающих функции, непрерывные по Гёльдеру, и сингулярные интегральные операторы, см. работу Фридрихса [11]. Примеры приложения неравенства такого типа к вопросам, не относящимся к теории дифференциальных операторов с частными производными, см. в работе Фридрихса [1]. Относительно свойств B-пространства всех функций, удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем α, по-видимому, известно очень немного, и дополнительная информация по этому вопросу была бы полезной.

Интересная разновидность локально выпуклых линейных топологических пространств (общее определение таких пространств дается в следующей главе), введенная Л. Шварцем, по-видимому, призвана играть заметную роль во многих областях анализа. Пусть I — открытый интервал вещественной оси и $C_0^{\infty}(I)$ — линейное пространство всех определенных на I комплексных функций, каждая из которых бесконечно дифференцируема и обращается в нуль вне некоторого бикомпактного подмножества I. Пусть r — произвольное натуральное число и $\varphi_0, \ldots, \varphi_r$ — произвольное множество из $r+1$ определенных на I всюду положительных функций. Тогда, если мы положим

$$N(g; \varphi_0, \ldots, \varphi_r) = \{f \in C_0^{\infty}(I) \mid |f^{(j)}(t) - g^{(j)}(t)| < \varphi_j(t), \\ t \in I,\ j = 0, \ldots, r\}$$

для каждого $g \in C_0^\infty(I)$, то совокупность окрестностей $N(g; \varphi_0, \ldots, \varphi_r)$ определит в $C_0^\infty(I)$ некоторую топологию, относительно которой это линейное пространство будет (локально выпуклым) линейным топологическим пространством. Пространство $D(I)$ всех определенных на этом линейном топологическом пространстве непрерывных линейных функционалов называется *определенным на I пространством обобщенных функций.* Отображение $f \to F_f$, где

$$F_f(g) = \int_I f(t)\, g(t)\, dt,$$

вкладывает $C_0^\infty(I)$ (и даже $L_1(I)$) в $D(I)$. Это и дает нам возможность рассматривать элементы из $D(I)$ как обобщенные функции. Очень многие из обобщенных функций, рассматривавшихся время от времени в эвристическом анализе (такие, как известная δ-функция Дирака и ее производные), могут быть идентифицированы со вполне определенными элементами из $D(I)$. Если в $D(I)$ определить соответствующую слабую топологию, то становится возможным такую аналитическую операцию, как дифференцирование, определить как некоторое непрерывное отображение в $D(I)$ и в этом смысле определить соответствующую обобщенную производную для каждой функции, скажем, из $L_1(I)$. В своей фундаментальной книге [5] Л. Шварц подробно рассматривает все эти вопросы, а также строит для обобщенных функций теорию разложений Фурье, интегральных преобразований, сверток и т. д. Кроме того, он дает ряд приложений этой теории к различным вопросам анализа. Дьёдонне и Шварц в работе [1] дают общую теорию ряда линейных топологических пространств, среди которых содержатся и $C_0^\infty(I)$ и $D(I)$[1]). Мы изложим некоторые сведения из теории обобщенных функций в гл. XIV части II в связи с изучением дифференциальных операторов с частными производными.

Интеграл Гаусса — Винера в гильбертовом пространстве.

Рассмотрим n-мерное (вещественное) евклидово пространство E^n. Пусть μ_n — борелевская мера в E^n, определяемая равенством

$$\mu_n(A) = \pi^{-(n/2)} \int_A e^{-|x|^2}\, dx,$$

где интеграл есть n-мерный интеграл Лебега и $|x|$ — длина вектора x в E^n. Так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi},$$

[1]) Много других пространств бесконечно дифференцируемых функций приведено в книге И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова [2*, вып. 2]. — *Прим. ред.*

то $\mu_n(E^n)=1$. Кроме того, мера μ_n, как легко видеть, обладает следующим важным свойством *унитарной инвариантности*:

$$\mu_n(A)=\mu_n(UA),$$

где U есть произвольное, сохраняющее норму линейное отображение E^n на себя. Пространство E^{n+m} можно, очевидно, рассматривать как прямую сумму $E^n \oplus E^m$ в смысле §IV.4. Тогда $(|x \oplus y|)^2=|x|^2+|y|^2$ и, следовательно, $e^{-(|x\oplus y|)^2}=e^{-|x|^2}e^{-|y|^2}$ для всех x из E^n и y из E^m. Отсюда легко вытекает, что если A и B — борелевские множества соответственно в E^n и E^m и если $A \oplus B$ есть множество $\{x \oplus y \mid x \in A, y \in B\}$, то $\mu_{n+m}(A \oplus B)=\mu_n(A)\mu_m(B)$. В частности,

$$(1)\quad \mu_{n+m}(A \oplus E^m)=\mu_n(A).$$

Из унитарной инвариантности μ_n вытекает, что μ_n можно рассматривать как некоторую меру, присущую каждому n-мерному вещественному гильбертову пространству $\mathfrak{H}$ безотносительно к какой-либо индивидуальной системе координат в этом пространстве. Эта мера будет называться *гауссовой мерой* в $\mathfrak{H}$. Пусть, в частности, $\mathfrak{H}_0$ является таким пространством, а $\mathfrak{H}_1$ — подпространство в $\mathfrak{H}_0$. Рассмотрим ортогональное проектирование E пространства $\mathfrak{H}_0$ на $\mathfrak{H}_1$. Предположим, что $\mu_{\mathfrak{H}_0}$ и $\mu_{\mathfrak{H}_1}$ означают гауссовы меры соответственно в $\mathfrak{H}_0$ и $\mathfrak{H}_1$. Пусть A является борелевским подмножеством $\mathfrak{H}_0$ таким, что $x \in A$ в том и только в том случае, если $Ex \in A$. Тогда из равенства (1) легко вытекает, что

$$(2)\qquad \mu_{\mathfrak{H}_1}(A\mathfrak{H}_1)=\mu_{\mathfrak{H}_0}(A).$$

Равенство (2) дает возможность следующим образом определить *гауссову меру* в вещественном *гильбертовом пространстве* $\mathfrak{H}$. Назовем борелевское подмножество A из $\mathfrak{H}$ *цилиндрическим множеством*, если существует ортогональное проектирование E пространства $\mathfrak{H}$ на некоторое его конечномерное подпространство $\mathfrak{H}_1$ такое, что $x \in A$ тогда и только тогда, когда $Ex \in A$. В этом случае положим

$$(3)\qquad \mu(A)=\mu_{\mathfrak{H}_1}(A\mathfrak{H}_1).$$

Тогда из равенства (2) вытекает, что левая часть равенства (3) не зависит от $\mathfrak{H}_1$, т. е. что определение (3) однозначно и, следовательно, законно.

Из соответствующих свойств конечномерных гауссовых мер легко вытекает, что

(I) μ — неотрицательная, конечно аддитивная функция множества, определенная на алгебре Σ цилиндрических множеств из $\mathfrak{H}$.

(II) Пусть U — сохраняющее норму линейное отображение пространства $\mathfrak{H}$ в себя. Тогда для каждого $A \in \Sigma$ UA тоже принадлежит Σ и $\mu(A)=\mu(UA)$. Это есть свойство *унитарной инвариантности в гильбертовом пространстве.*

(III) $\mu(\mathfrak{H})=1$.

Пользуясь условием (I) и общей теорией, изложенной в параграфах III.1, III.2 и III.3, мы можем теперь для функций из $\mathfrak{H}$ построить (конечно аддитивную) теорию интегрирования. Оказывается, однако, что эта теория интегрирования недостаточно широка для обычных приложений интеграла Гаусса. Поэтому стоит до некоторой степени расширить эту теорию следующим образом.

(a) Сначала построим теорию интегрирования параграфов III.1, III.2, III.3, которая, между прочим, дает и определения μ-измеримости и μ-интегрируемости функций.

(b) Обозначим через $\mathscr{E}$ множество всех проектирований E пространства $\mathfrak{H}$ на его конечномерные подпространства, и пусть $\mathscr{E}_1$ является совокупностью всех ограниченных линейных отображений в $\mathfrak{H}$, имеющих конечномерные области значений. Положим

$$|f| = \inf_{E \in \mathscr{E}} \sup_{F \in \mathscr{E}_1} \int_{\mathfrak{H}} |f(Fx)| \, \mu(dx),$$

$$\varepsilon > 0, \ |E - FE| < \varepsilon,$$

если это — конечная величина и $|f| = \infty$ в противном случае. Тогда $|f|$ определит норму на некотором линейном подпространстве Φ множества определенных на $\mathfrak{H}$ функций. Легко видеть, что Φ содержит пространство Φ_0 всех μ-интегрируемых функций и что линейный функционал S

$$S : f \longrightarrow \int_{\mathfrak{H}} f(x) \, \mu(dx), \qquad f \in \Phi_0,$$

равномерно непрерывен на Φ_0 относительно топологии, индуцируемой нормой $|f|$. Следовательно, по теореме I.6.17, S можно однозначно продолжить до непрерывного линейного функционала, определенного на всем $\overline{\Phi_0} = \Phi_1$. Мы говорим, что функция f из Φ_1 μ-интегрируема в *расширенном смысле* и для $S(f)$, $f \in \Phi_1$, пишем $\int_{\mathfrak{H}} f(x) \, \mu(dx)$. Эта теория «в расширенном смысле» обладает многими свойствами обычной конечно аддитивной теории интегрирования. Кроме того, она унитарно инвариантна, т. е. если U *есть некоторое сохраняющее норму линейное отображение пространства* $\mathfrak{H}$ *в себя* и если $f(\cdot) \in \Phi_1$, то $f(U(\cdot)) \in \Phi_1$ и

$$\int_{\mathfrak{H}} f(x) \, \mu(dx) = \int_{\mathfrak{H}} f(Ux) \, \mu(dx).$$

Предположим, что пространство $\mathfrak{H}$ сепарабельно и что мы реализовали его как l_2, т. е. отобразили его на l_2 (скажем, пользуясь теоремой 4.16) взаимно однозначно, линейно и с сохранением нормы. Так как мера μ инвариантно связана с $\mathfrak{H}$, то мы получим в l_2 некоторую гауссову меру μ, и, из определений, легко видеть, что эта мера удовлетворяет условию

$$\mu(\{[x_i]\in l_2 \mid a_i \leqslant x_i \leqslant b_i, \quad i=1, \ldots, n\}) = \\ = \pi^{-n/2}\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\ldots\int_{a_n}^{b_n} e^{-(y_1^2+\ldots+y_n^2)}\,dy_1\ldots dy_n.$$

Следовательно, она очень тесно связана с бесконечным произведением мер $\mu_\infty=\mu_1\times\mu_1\times\ldots$, определенном на бесконечном произведении s счетного числа раз повторенной вещественной оси, причем μ_1 так же, как и выше, есть одномерная гауссова мера на вещественной прямой. Пространство s является, конечно, пространством всех вещественных последовательностей $x=[x_1]$, оно отлично от l_2, являющегося подпространством s, определяемым тем условием, что $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$. Мера μ_∞ счетно аддитивна; подмножество l_2 пространства s имеет μ_∞-меру нуль; мера μ не является счетно аддитивной. В самом деле, используя соотношение между μ_∞ и μ, легко видеть, что l_2 является суммой счетного числа нуль-множеств относительно μ. Эти соотношения можно выразить следующей эвристической формулой: переходя от всего бесконечного произведения — пространства s к его подмножеству l_2, мы теряем счетную аддитивность, приобретая взамен важное свойство унитарной инвариантности.

Общие библиографические указания по изложенным вопросам можно найти в работе Фридрихса [12].

Существует еще другой, предложенный Винером метод построения счетно аддитивной теории ценой отказа от унитарной инвариантности. Его можно изложить следующим образом. Представим $\mathfrak{H}$ в виде вещественного пространства $L_2(-\infty, +\infty)$. Тогда отображение $f \to Tf$, определяемое равенством

$$(Tf)(x)=\int_0^x f(t)\,dt, \qquad f\in L_2(-\infty, +\infty),$$

отображает L_2 в некоторое (довольно «тощее») подмножество пространства $\hat{C}$ всех непрерывных функций, определенных на вещественной оси. Это дает нам возможность определить алгебру $\hat{\Sigma}$ подмножеств пространства $\hat{C}$ и аддитивную функцию множества $\hat{\mu}$ и $\hat{\Sigma}$ следующим образом:

$$\Sigma=\{A\subseteq\hat{C} \mid \chi_{T^{-1}A}\in\Phi_1\},$$

$$\hat{\mu}(A)=\int_{\mathfrak{H}} \chi_{T^{-1}A}(x)\,\mu(dx), \qquad A\in\hat{\Sigma},$$

где χ_{E_0} означает, как обычно, характеристическую функцию множества E_0. Эта мера $\hat{\mu}$ на пространстве $\hat{C}$, по существу, совпадает с мерой Винера.

Заметим, что каждое множество вида $\{f \in \hat{C} \mid f(t_0) \in E_0\}$, где $-\infty < t_0 < \infty$ и E_0 — борелевское подмножество поля скаляров, принадлежит $\hat{\Sigma}$. Пусть $\hat{\Sigma}_0$ является подалгеброй в $\hat{\Sigma}$, порожденной семейством множеств такого вида. Тогда можно показать, что мера $\hat{\mu}$ счетно аддитивна на $\hat{\Sigma}_0$. Следовательно, по теореме III.5.8, $\hat{\mu}$ можно продолжить до счетно аддитивной меры μ_w, определенной на σ-алгебре Σ_w подмножеств пространства $\hat{C}$, порожденной подалгеброй $\hat{\Sigma}_0$. Пространство с мерой $(\hat{C}, \Sigma_w, \mu_w)$ есть пространство с мерой Винера.

Теория этого пространства с мерой была очень тщательно разработана. Основные из ранних работ — это работы Винера [6,7] и Пэли, Винера, и Зигмунда [1]. Для дальнейшего развития теории больше всего сделано Камероном, Мартином и их учениками. В работах Камерона и Мартина [3, 5, 7] и Камерона и Фейгана [1] изучается результат действия различных отображений в $\hat{C}$ на меру μ_w и устанавливается обобщение понятия якобиана при замене переменных в конечномерных кратных интегралах. Камерон и Мартин [6] вычислили различные интегралы Винера, пользуясь общим методом, содержащим «замену переменных» в пространстве $\hat{C}$, и некоторыми дифференциальными уравнениями Штурма — Лиувилля. В работах Камерона и Мартина [2], Камерона и Хатфилда [1, 2] вводится полное ортонормированное множество «функционалов Фурье — Эрмита» в $L_2(\hat{C}, \Sigma_w, \mu_w)$ и изучается теория разложения по этим функционалам произвольных элементов из $L_1(\hat{C}, \Sigma_w, \mu_w)$. В работах Камерона [4] и Камерона и Мартина [9] рассматривается теория, близкая к теории интеграла Фурье. В работах Камерона и Мартина [1, 4], Камерона и Шапиро [1], Камерона, Линдгрена и Мартина [1] показано, как решения некоторых нелинейных интегральных уравнений можно «явно» выразить через интегралы Винера. Камерон [2] и Оухар [1] изучали для интегралов Винера формулы, близкие к формуле

$$\frac{d}{dt}\int^{t} f(x)\,dx = f(t)$$

для функций вещественного переменного. Камерон [1] дал «правило Симпсона» для вычисления интегралов Винера.

См., кроме того, работы Винера [8], Камерона [5], Камерона и Мартина [8] , Камерона и Грейвса [1], М. Каца [2], Маруямы [1], Пэли и Винера [1, гл. IX].

Наиболее интересное развитие теории начинается с диссертации физика Фейнмана [1] и продолжается в исследованиях М. Каца [1, 3], Розенблата [1], Тингли [1], Форте [4], Камерона [3], Монтролля [1], Стейнберга [1]. Формулой

$$[*] \qquad f(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-y)^2/t} f(y)\, dy$$

выражается, как известно, решение дифференциального уравнения «теплопроводности» с начальными условиями:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x, t) = \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, t), \quad t \geqslant 0, \quad f(x, 0) = f(x).$$

Из определения меры Винера легко видеть, что это решение можно записать в виде

$$f_0(x, t) = \int_G f(\varphi(t) + x)\, \mu_w(d\varphi).$$

Существует соответствующая формула, выражающая через интеграл Винера решение F дифференциального уравнения 2-го порядка параболического типа с начальными условиями:

$$[**] \qquad \frac{\partial}{\partial t} F(x, t) = \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial x^2} F(x, t) + V(x, t) F(x, t),$$
$$t \geqslant 0, \ F(x, 0) = f(x),$$

где V есть заданная функция. Соответствующая формула имеет вид

$$[***] \ F(x, t) = \int_{\hat{G}} f(\varphi(t) + x) \exp\left\{ \int_0^t V(t-s, \varphi(s) + x)\, ds \right\} \mu_w(d\varphi).$$

Упоминавшиеся выше авторы рассматривали различные аспекты соотношения между задачей Коши [**] теории дифференциальных уравнений в частных производных и формулой [***]. Камерон [3], в частности, получил весьма подробные результаты при очень слабых аналитических предположениях. Необходимо также отметить, что связь между формулами [**] и [***] имеет отношение и к известному из теории вероятностей более общему соотношению между «переходными вероятностями» марковского процесса и представлением его «выборочных функций». Использование формулы [***] в теории вероятностей можно найти в работах М. Каца [1] и Эрдёша и Каца [1]. Гельфанд и Яглом [1] дали превосходный обзор теории интеграла Винера с особым ударением на формуле [***].

Различные другие подходы к проблеме интегрирования в гильбертовом пространстве можно найти в работах Лёвнера [1], Лорха [12—14], Фридрихса [12, стр. 121—132], П. Леви [1, стр. 209—355][1]).

---

[1]) Ю. Л. Далецкий [1*] построил теорию интегрирования в функциональном пространстве, связанную с общими параболическими уравнениями. Р. А. Минлос [1*] выяснил важную связь ядерных пространств с теорией интегрирования в функциональных пространствах, а также применил континуальное интегрирование к обобщенным случайным процессам. —*Прим. ред.*

ГЛАВА V

Выпуклые множества и слабые топологии

В гл. II мы видели, что непрерывные линейные функционалы являются важным средством изучения B-пространств; в настоящей главе мы продолжим эти исследования для более общих пространств. Мы начнем с изучения понятия выпуклости в общем линейном пространстве и с доказательства основной леммы, эквивалентной теореме Хана — Банаха и связывающей линейные функционалы с выпуклыми множествами. Эти результаты рассматриваются в § 2 при дополнительном предположении, что наше пространство является линейным топологическим пространством. В § 3 показано, как некоторые классы линейных функционалов определяют топологии линейного пространства. В частности, в B-пространствах можно ввести некоторую топологию, называемую слабой топологией, таким образом, что слабая сходимость элементов в смысле определения II.3.25 будет эквивалентна сходимости в этой слабой топологии.

В §§ 4—6 продолжается исследование различных топологий B-пространства, определяемых линейными функционалами. В частности, изучаются свойства бикомпактности в связи с метрическими топологиями, рефлексивностью, ограниченностью и неограниченностью множеств и свойствами последовательностей. Многие из этих результатов справедливы и для локально выпуклых линейных топологических пространств.

В §§ 8—10 рассматриваются вопросы о крайних точках, касательных плоскостях и теоремы о неподвижной точке. Идеи этих параграфов, хотя и чрезвычайно интересные сами по себе, в последующих главах будут использоваться гораздо реже. Дополнительные результаты и примеры можно найти в упражнениях параграфов 7 и 11.

1. Выпуклые множества в линейных пространствах

В этом параграфе через $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ и т. д. будут обозначаться линейные векторные пространства, а через p, q, x, y, ... — точки этих пространств. Буквами α, β, ... будут обозначаться вещественные или комплексные числа, буквами a, b, ... — вещественные числа.

1. Определение. Множество $K \subseteq \mathfrak{X}$ называется *выпуклым*, если для любых $x, y \in K$ и любого $a \in [0, 1]$ точка $ax+(1-a)y \in K$.

Нижеследующая лемма непосредственно вытекает из определения 1.

2. Лемма. *Пересечение произвольного семейства выпуклых подмножеств линейного пространства $\mathfrak{X}$ само выпукло.*

В качестве примеров выпуклых подмножеств пространства $\mathfrak{X}$ можно назвать каждое подпространство $\mathfrak{X}$ и каждое подмножество, состоящее из единственной точки.

3. Лемма. *Если $x_1, \ldots, x_n$ — точки выпуклого множества K, а $a_1, \ldots, a_n$ — неотрицательные скаляры, такие, что $a_1+\ldots+a_n=1$, то $a_1x_1+\ldots+a_nx_n \in K$.*

Доказательство. При $n=2$ наше утверждение верно по определению. Предположим, что лемма верна при $n=m$.

Пусть $b=a_2+\ldots+a_{m+1}$ и

$$y=\frac{a_2}{b}x_2+\ldots+\frac{a_{m+1}}{b}x_{m+1};$$

в силу индуктивного предположения $y \in K$. Так как $a_1+b=1$, то

$$\sum_{i=1}^{m+1} a_ix_i=a_1x_1+by \in K,$$

ч. т. д.

4. Лемма. *Пусть $\mathfrak{X}$—линейное пространство. Если множества K_1, $K_2 \subseteq \mathfrak{X}$ выпуклы, то и βK_1 и $K_1 \pm K_2$ тоже выпуклы.*

Доказательство. Если $x, y \in \beta K_1$, то для некоторых $x', y' \in K_1$. $x=\beta x'$, $y=\beta y'$. Тогда если $0 \leqslant a \leqslant 1$, то ввиду выпуклости K_1 $ax+(1-a)\ y=\beta\{ax'+(1-a)y'\} \in \beta K_1$. Вторая часть леммы может быть доказана точно таким же образом.

В доказательстве нижеследующей леммы используется та же самая идея.

5. Лемма. *Если T — линейное отображение пространства $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{Y}$, а K — выпуклое множество из $\mathfrak{X}$, то множество TK выпукло.*

6. Определение. Пусть M — подмножество линейного пространства $\mathfrak{X}$; точка p называется *С-внутренней*[1]) *точкой* M, если для

[1]) В оригинале автор употребляет термины «internal» и «bounding» для внутренних и граничных точек множеств в смысле определения 6, сохраняя термины «interior» и «boundary» для аналогичных топологических понятий.— *Прим. ред.*

каждого $x \in \mathfrak{X}$ найдется такое $\varepsilon > 0$, что при $|\delta| \leqslant \varepsilon$ точка $p+\delta x \in M$. Точка $p \in \mathfrak{X}$ называется *С-граничной* точкой множества M, если она не является C-внутренней точкой ни для множества M, ни для его дополнения.

7. Определение. Пусть K — выпуклое множество линейного пространства $\mathfrak{X}$, и пусть нулевая точка 0 пространства $\mathfrak{X}$ является C-внутренней точкой K. Для каждого $x \in \mathfrak{X}$ положим $I(x) = \{a \mid a > 0,\ a^{-1}x \in K\}$ и $\mathfrak{k}(x) = \inf\limits_{a \in I(x)} a$. Функция $\mathfrak{k}(x)$ называется *опорной функцией* (функцией Минковского) множества K.

Так, например, если K есть единичная сфера B-пространства $\mathfrak{X}$, то $\mathfrak{k}(x) = |x|$.

8. Лемма. *Пусть K — выпуклое множество пространства $\mathfrak{X}$, имеющее нулевую точку своей C-внутренней точкой, и пусть $\mathfrak{k}(x)$ — его опорная функция. Тогда*

(a) $\mathfrak{k}(x) \geqslant 0$;

(b) $\mathfrak{k}(x) < +\infty$;

(c) *если* $a \geqslant 0$, *то* $\mathfrak{k}(ax) = a\mathfrak{k}(x)$;

(d) *если* $x \in K$, *то* $\mathfrak{k}(x) \leqslant 1$;

(e) $\mathfrak{k}(x+y) \leqslant \mathfrak{k}(x) + \mathfrak{k}(y)$;

(f) *совокупность C-внутренних точек множества K характеризуется тем, что $\mathfrak{k}(x) < 1$, а совокупность его C-граничных точек — условием $\mathfrak{k}(x) = 1$.*

Доказательство. Утверждения (a), (c) и (d) очевидны. Утверждение (b) следует из того, что нулевая точка является C-внутренней точкой множества K. Для того чтобы доказать утверждение (e), заметим, что если $c > \mathfrak{k}(x) + \mathfrak{k}(y)$, то $c = a + b$, где $a > \mathfrak{k}(x)$, $b > \mathfrak{k}(y)$. Из выпуклости множества K вытекает, что точка

$$\frac{x+y}{c} = \frac{x+y}{a+b} = \frac{a\,(a^{-1}x) + b\,(b^{-1}y)}{a+b}$$

принадлежит K, так как $a^{-1}x$ и $b^{-1}y \in K$. Следовательно, $\mathfrak{k}(x+y) \leqslant c$.

Если x — C-внутренняя точка множества K, то точка $x + \varepsilon x = (1+\varepsilon)\,x$ для некоторого достаточно малого $\varepsilon > 0$ принадлежит K, так что $\mathfrak{k}(x) \leqslant (1+\varepsilon)^{-1}$. Обратно, если $\mathfrak{k}(x) < 1$, положим $\varepsilon = 1 - \mathfrak{k}(x)$. Для того чтобы завершить доказательство пункта (f), предположим, что пространство $\mathfrak{X}$ вещественно, предоставляя детали доказательства для комплексного случая читателю. Предположим, что $|\delta|\,(\mathfrak{k}(y) + \mathfrak{k}(-y)) < \varepsilon$. Тогда

$$\mathfrak{k}(x + \delta y) < (1 - \varepsilon) + \varepsilon = 1$$

независимо от того, положительно δ или отрицательно, так что $1\,(x+\delta y) = x + \delta y \in K$. Следовательно, x — C-внутренняя точка множества K. Точно так же можно убедиться в том, что неравенство

$\mathfrak{k}(x) > 1$ характеризует C-внутренние точки дополнения множества K. Таким образом, равенство $\mathfrak{k}(x)=1$ характеризует C-граничные точки множества K, ч. т. д.

9. Определение. Если $\mathfrak{X}$ — векторное пространство, а M и N — его подмножества, то определенный на $\mathfrak{X}$ функционал f *разделяет* множества M и N, если существует такая вещественная константа c, что $\operatorname{Re} f(M) \geqslant c$, $\operatorname{Re} f(N) \leqslant c$.

10. Лемма. *Для того чтобы линейный функционал f разделял подмножества M и N пространства $\mathfrak{X}$, необходимо и достаточно, чтобы он разделял его подмножества $M - N$ и $\{0\}$.*

Доказательство леммы элементарно и предоставляется читателю.

При работе с подпространствами часто бывает удобна следующая лемма.

11. Лемма. *Пусть f — линейный функционал, определенный на векторном пространстве $\mathfrak{X}$, а $\mathfrak{Y}$ — подпространство в $\mathfrak{X}$. Если $f(\mathfrak{Y})$ не совпадает со всем полем скаляров, то $f(\mathfrak{Y})=0$.*

Доказательство. Предположим, что существует такое $y \in \mathfrak{Y}$, что $f(y) \neq 0$. Тогда $f(\alpha y/f(y))=\alpha$, так что каждый скаляр принадлежит $f(\mathfrak{Y})$, ч. т. д.

12. Теорема. (*Основная теорема о разделимости подмножеств.*) *Пусть M и N — непересекающиеся выпуклые подмножества линейного пространства $\mathfrak{X}$, причем M имеет C-внутреннюю точку. Тогда существует ненулевой линейный функционал f, разделяющий M и N.*

Доказательство. Предположим, что $\mathfrak{X}$—вещественное векторное пространство. Если m является C-внутренней точкой множества M, то нулевая точка 0 пространства $\mathfrak{X}$ будет C-внутренней точкой множества $M - m$. Нетрудно видеть, что функционал разделяет множества M и N в том и только в том случае, если он разделяет множества $M - m$ и $N - m$. Следовательно, нашу теорему достаточно доказать при дополнительном предположении, что 0 есть C-внутренняя точка множества M.

Пусть p — произвольная точка множества N, так что $-p$ есть C-внутренняя точка множества $M - N$, а 0 — C-внутренняя точка множества $K=M - N+p$. Так как множества M и N не пересекаются, то множество $M - N$ не содержит нулевой точки; и следовательно, K не содержит точки p. Обозначим через $\mathfrak{k}$ опорную функцию множества K, когда $\mathfrak{k}(p) \geqslant 1$. Если мы положим $f_0(ap)=$ $=a\mathfrak{k}(p)$, то f_0 будет линейным функционалом, определенным на одномерном подпространстве пространства $\mathfrak{X}$, состоящем из вещественных кратных p. Кроме того, при всех вещественных a $f_0(ap) \leqslant \mathfrak{k}(ap)$, так как $f_0(ap) = \mathfrak{k}(ap)$ при $a \geqslant 0$, а при $a < 0$ $f_0(ap) = af_0(p) < 0 < \mathfrak{k}(ap)$. По теореме Хана — Банаха [II.3.10], f_0 можно продолжить до такого линейного функционала f, что $f(x) \leqslant \mathfrak{k}(x)$, для всех $x \in \mathfrak{X}$. Отсюда вытекает, что $f(K) \leqslant 1$, в то время как $f(p) \geqslant 1$. Таким образом, f разделяет множества K и $\{p\}$; по лемме 10, f разделяет также множества $M - N$ и $\{0\}$, и, снова по лемме 10, f разделяет множества M и N. Таким образом, для вещественного пространства наша теорема доказана.

Если пространство $\mathfrak{X}$ комплексное, мы можем все же рассматривать его как векторное пространство над подполем вещественных скаляров. В силу приведенного выше доказательства можно определить на $\mathfrak{X}$ такую вещественную функцию f, что $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ при вещественном α и что $f(M)$ и $f(N)$ принадлежат неперекрывающимся интервалам. Тогда функция $F(x) = f(x) - if(ix)$ будет ненулевым линейным функционалом, определенном на комплексном пространстве $\mathfrak{X}$ и разделяющим множества M и N, ч. т. д.

2. Линейные топологические пространства

В этом параграфе результаты § 1 применяются к линейным топологическим пространствам. Предложения 1 — 6 этого параграфа элементарны. Предложения 7—12 представляют собой приложения основной теоремы 1.12.

1. Теорема. (а) *В линейном топологическом пространстве замыкание и внутренность выпуклого множества выпуклы.*

(b) *Внутренняя точка множества в линейном топологическом пространстве является С-внутренней точкой этого множества.*

(c) *Если выпуклое множество K линейного топологического пространства имеет по крайней мере одну внутреннюю точку, то для того, чтобы точка p была С-внутренней точкой K, необходимо и достаточно, чтобы она была внутренней; для того чтобы она была С-граничной точкой, необходимо и достаточно, чтобы она была граничной. Кроме того, внутренность множества K всюду плотна в K.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{X}$ — линейное топологическое пространство, K — подмножество $\mathfrak{X}$ и I — замкнутый единичный интервал. Тогда для того, чтобы множество K было выпуклым, необходимо и достаточно, чтобы при отображении

$$\psi: [x, y, a] \rightarrow ax + (1-a)y$$

топологического произведения $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \times I$ в $\mathfrak{X}$ множество $K \times K \times I$

переходило в K. Но так как отображение ψ непрерывно и $\overline{K\times K\times I}=\overline{K}\times\overline{K}\times I$, то

$$\psi(\overline{K}\times\overline{K}\times I)=\psi(\overline{K\times K\times I})\subseteq\overline{\psi(K\times K\times I)}\subseteq\overline{K},$$

если только K выпукло. Итак, если K выпукло, то и $\overline{K}$ выпукло.

Теперь мы покажем, что если p есть внутренняя точка множества K и q—точка $\overline{K}$, то $ap+(1-a)q$ при $0<a<1$ есть внутренняя точка K. В самом деле, найдется такая окрестность U нуля, что $p+U\subseteq K$, и некоторая точка $q_1\in K$ в окрестности $a(a-1)^{-1}U+q$ точки q. Далее, так как множество K выпукло, то открытое множество $U_1=a(p+U)+(1-a)q_1$ содержится в K. Так как $(1-a)\times\times(q-q_1)\in aU$, то $ap+(1-a)q=ap+(1-a)q_1+(1-a)(q-q_1)\in U_1$ и, следовательно, $ap+(1-a)q$ — внутренняя точка K.

Вторая часть утверждения (a) и последняя часть (c) непосредственно вытекают из только что доказанного. Утверждение (b) непосредственно вытекает из определения линейного топологического пространства. Из (b) ясно, что C-граничная точка множества K является его граничной точкой; остается показать, что если выпуклое множество K имеет по крайней мере одну внутреннюю точку p, то его C-внутренняя точка q_1 будет внутренней, а граничная точка q_2 — C-граничной.

Если точка q_1 C-внутренняя, то вектор $r=-\varepsilon p+(1+\varepsilon)q_1$ для некоторого достаточно малого положительного ε принадлежит K. Из доказанного выше ясно, что для достаточно малого положительного ε точка $q_1=\frac{r}{1+\varepsilon}+\frac{\varepsilon p}{1+\varepsilon}$ является внутренней точкой K. Пусть точка q_2 — граничная, тогда она не является C- внутренней точкой K. Но мы уже видели, что при $0<a<1$ точка $ap+(1-a)q_2\in K$, следовательно, q_2 не является C-внутренней точкой дополнения множества K. Таким образом, q_2 есть C-граничная точка множества K, ч. т. д.

2. Определение. Если A есть подмножество линейного пространства $\mathfrak{X}$, то множество $\mathrm{co}(A)$, называемое *выпуклой оболочкой* множества A, по определению, является пересечением всех содержащих A выпуклых множеств; если $\mathfrak{X}$ есть линейное топологическое пространство, то множество $\overline{\mathrm{co}}(A)$, называемое *замкнутой выпуклой оболочкой* множества A, определяется как пересечение всех содержащих A замкнутых выпуклых множеств.

Легко видеть, что $\mathrm{co}(A)$ есть совокупность всевозможных линейных комбинаций $\sum_{i=1}^{n}a_ix_i$ элементов $x_i\in A$, в которых $0\leqslant a_i\leqslant 1$ и $\sum_{i=1}^{n}a_i=1$. Такие линейные комбинации иногда называются *вы-*

пуклыми комбинациями; таким образом, $\mathrm{co}(A)$ есть совокупность всевозможных выпуклых комбинаций точек множества A.

Операции взятия $\mathrm{co}(A)$ и $\overline{\mathrm{co}}(A)$ отображают множества в множества. Некоторые элементарные свойства этих операций приводятся ниже, в лемме 4. Для доказательства леммы 4 нам понадобится следующая лемма о топологических группах.

3. Лемма. *Если A и K — замкнутые подмножества аддитивной топологической группы G, причем множество K бикомпактно, то множество $A+K$ замкнуто.*

Доказательство. Пусть $p\in\overline{A+K}$. Для каждой окрестности U точки p положим $K_U=\{k\mid k\in K,\ k\in U-A\}$. Так как $p\in\overline{A+K}$, то никакое K_U не пусто. Ясно, что если $U_1\subseteq U_2$, то $K_{U_1}\subseteq K_{U_2}$. Следовательно, семейство замкнутых множеств $\overline{K}_U$ центрировано. Ввиду леммы I.5.6 существует точка $k_0\in K$, принадлежащая всем множествам $\overline{K}_U$. Таким образом, если N есть произвольная окрестность нуля, то

$$(N+k_0)\bigcap(N+p-A)\neq\varnothing.$$

Это означает, что $(N-N+k_0)\bigcap(p-A)\neq\varnothing$. Если M — произвольная окрестность нуля, то найдется такая окрестность N нуля, что $N-N\subseteq M$. Таким образом, каждая окрестность точки k_0 пересекается с множеством $p-A$. Ввиду замкнутости A, множество $p-A$ тоже замкнуто. Следовательно, точка $k_0\in p-A$, и, значит, $p\in A+k_0\subseteq A+K$, ч. т. д.

Поскольку коммутативность группы G в доказательстве не существенна, лемма справедлива и для неабелевых топологических групп.

4. Лемма. *Для произвольных подмножеств A и B линейного пространства $\mathfrak{X}$:*

(I) $\mathrm{co}(\alpha A)=\alpha\,\mathrm{co}(A)$; $\mathrm{co}(A+B)=\mathrm{co}(A)+\mathrm{co}(B)$.

Если $\mathfrak{X}$ есть линейное топологическое пространство, то

(II) $\overline{\mathrm{co}}(A)=\overline{\mathrm{co}(\overline{A})}$;

(III) $\overline{\mathrm{co}}(\alpha A)=\alpha\,\overline{\mathrm{co}}(A)$;

(IV) *если $\overline{\mathrm{co}}(A)$ бикомпактно, то $\overline{\mathrm{co}}(A+B)=\overline{\mathrm{co}}(A)+\overline{\mathrm{co}}(B)$.*

Доказательство. Первая часть утверждения (I) элементарна и вытекает из леммы 1.4. Из нее же получаем, что $\mathrm{co}(A+B)\subseteq$

$\mathrm{co}(A)+\mathrm{co}(B)$. Далее, если $y\in B$ и $x=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\in\mathrm{co}(A)$, то

$x+y=\sum_{i=1}^{n}a_i(x_i+y)$, так что $\mathrm{co}(A)+y=\mathrm{co}(A+y)$ и, следовательно,

$\text{co}(A)+B\subseteq\text{co}(A+B)$. Отсюда $\text{co}(A)+\text{co}(B)\subseteq\text{co}(\text{co}(A)+B)$. Следовательно, $\text{co}(A)+\text{co}(B)\subseteq\text{co}(\text{co}(A)+B)\subseteq\text{co}(\text{co}(A+B))=\text{co}(A+B)$. Этим доказано утверждение (I). Для того чтобы доказать утверждение (II), заметим, что множество $\overline{\text{co}}(A)$ замкнуто и содержит $\text{co}(A)$. Следовательно $\overline{\text{co}}(A)\supseteq\overline{\text{co}(A)}$. По теореме 1, замыкание выпуклого множества выпукло; следовательно, множество $\overline{\text{co}(A)}$ выпукло и содержит A. Таким образом, $\overline{\text{co}(A)}\supseteq\overline{\text{co}}(A)$, что завершает доказательство утверждения (II). Утверждение (III) вытекает из (I) и (II). Докажем теперь утверждение (IV). Из доказанного утверждения (I) и леммы 3 вытекает, что $\overline{\text{co}}(A)+\overline{\text{co}}(B)$ — выпуклое замкнутое множество, так что $\overline{\text{co}}(A+B)\subseteq\overline{\text{co}}(A)+\overline{\text{co}}(B)$. Далее, так как сумма $x+y$ является непрерывной функцией от x и y, то $\overline{X}_1+\overline{Y}_1\subseteq\overline{X_1+Y_1}$ для произвольных подмножеств X_1, Y_1 пространства $\mathfrak{X}$. Таким образом, из (I) и (II) вытекает

$$\overline{\text{co}}(A+B)=\overline{\text{co}(A)+\text{co}(B)}\supseteq\overline{\text{co}}(A)+\overline{\text{co}}(B).$$

Это завершает доказательство утверждения (IV), ч. т. д.

5. Лемма. *Пусть A и B — множества линейного топологического пространства. Если замкнутые выпуклые оболочки множеств A и B бикомпактны, то $\overline{\text{co}}(A\cup B)=\text{co}(\overline{\text{co}}(A)\cup\overline{\text{co}}(B))$.*

Доказательство. Включение $\text{co}(\overline{\text{co}}(A)\cup\overline{\text{co}}(B))\subseteq\overline{\text{co}}(A\cup B)$ доказывается непосредственно. Пусть $K_1=\overline{\text{co}}(A)$, $K_2=\overline{\text{co}}(B)$. Отображение

$$\psi:(A,\ p,\ q)\longrightarrow ap+(1-a)q$$

является непрерывным отображением бикомпактного пространства $K=[0,\ 1]\times K_1\times K_2$ в $\text{co}(K_1\cup K_2)$; поэтому множество $\psi(K)$ бикомпактно и, следовательно, замкнуто. Но $A\cup B\subseteq K_1\cup K_2\subseteq\psi(K)$. Если множество $\psi(K)$, кроме того, и выпукло, то $\overline{\text{co}}(A\cup B)\subseteq$ $\subseteq\psi(K)\subseteq\text{co}(K_1\cup K_2)$. Но его выпуклость можно доказать следующей элементарной выкладкой.

Если $0\leqslant a_1,\ a_2,\ b\leqslant 1$, то

$$\begin{aligned}
&b\{a_1p_1+(1-a_1)q_1\}+(1-b)\{a_2p_2+(1-a_2)q_2\}=\\
&=\{ba_1+(1-b)a_2\}\left\{\frac{ba_1}{ba_1+(1-b)a_2}p_1+\frac{(1-b)a_2}{ba_1+(1-b)a_2}p_2\right\}+\\
&+\{b(1-a_1)+(1-b)(1-a_2)\}\left\{\frac{b(1-a_1)}{b(1-a_1)+(1-b)(1-a_2)}q_1+\right.\\
&\left.+\frac{(1-b)(1-a_2)}{b(1-a_1)+(1-b)(1-a_2)}q_2\right\},
\end{aligned}$$

ч. т. д.

6. Теорема. (*Мазур*). *Пусть* $\mathfrak{X}$ — *B-пространство и* $A \subseteq \mathfrak{X}$ *бикомпактно. Тогда и* $\overline{\text{co}}(A)$ *бикомпактно.*

Доказательство. Множество $\overline{\text{co}}(A)$ как замкнутое подмножество полного пространства полно. Следовательно, по теореме I.6.15, достаточно показать, что множество $\overline{\text{co}}(A)$ вполне ограничено. Пусть $\varepsilon > 0$. Так как A вполне ограничено, найдется такое конечное подмножество $\{z_1, \ldots, z_n\} \subseteq A$, что $A \subseteq S(\{z_1, \ldots, z_n\}, \varepsilon/4)$. Положим $K = \text{co}(\{z_1, \ldots, z_n\})$. Мы имеем $\overline{\text{co}}(A) \subseteq S(\text{co}(A), \varepsilon/4)$. Но если $y \in \text{co}(A)$, то $y = \sum_{i=1}^{m} a_i y_i$, где $y_i \in A$, $a_i \geqslant 0$ и $\sum_{i=1}^{m} a_i = 1$. Пусть v является функцией, отображающей A в $\{1, \ldots, n\}$ такой, что если $x \in A$, то $|x - z_{v(x)}| < \varepsilon/4$. Тогда

$$\left| y - \sum_{i=1}^{m} a_i z_{v(y_i)} \right| = \left| \sum_{i=1}^{m} a_i (y_i - z_{v(y_i)}) \right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

и, следовательно, $\overline{\text{co}}\,(A) \subseteq S\,(K, \varepsilon/2)$. Далее,

$$K = \left\{ k \,|\, k = \sum_{i=1}^{n} a_i z_i, \quad a_i \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i = 1 \right\}.$$

Отображение

$$\psi : (a_1, \ldots, a_n, z_1, \ldots, z_n) \to \sum_{i=1}^{n} a_i z_i$$

является непрерывным отображением бикомпактного множества $[0, 1] \times \ldots \times [0, 1] \times \{z_1\} \times \ldots \times \{z_n\}$ на K. Поэтому K бикомпактно и, следовательно, вполне ограничено. Это значит, что существует такое конечное подмножество $\{k_1, \ldots, k_m\}$ множества K, что $K \subseteq S\,(\{k_1, \ldots, k_m\}, \varepsilon/2)$. Но тогда $\overline{\text{co}}(A) \subseteq S\,(\{k_1, \ldots, k_m\}, \varepsilon)$, ч. т. д.

7. Лемма. *Если определенный на линейном топологическом пространстве линейный функционал разделяет два множества, одно из которых содержит внутреннюю точку, то этот функционал непрерывен.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{X}$ — линейное топологическое пространство и $A_1, A_2 \subseteq \mathfrak{X}$. Рассмотрим линейный функционал h, разделяющий множества A_1 и A_2, и пусть p — внутренняя точка A_1. Если f и g — вещественная и мнимая части h, то $g(x) = -f(ix)$ и, следовательно, для того чтобы доказать непрерывность h, достаточно доказать непрерывность f. Пусть N — некоторая окрестность нуля такая, что $p + N \subseteq A_1$. Тогда $f(N) \subseteq f(A_1) - f(p)$ и множество $f(N)$

содержится в некотором собственном подинтервале $[-a, \infty)$ или $(-\infty, a]$ вещественной оси, причем $a > 0$. Пусть $M = N \cap (-N)$; тогда $M = -M$ и M есть некоторая окрестность нуля такая, что $f(M)$ содержится в интервале $[-a, a]$. Но тогда $f(\varepsilon a^{-1}M)$ содержится в интервале $[-\varepsilon, \varepsilon]$. Так как $\varepsilon a^{-1} M$ есть некоторая окрестность нуля, то f непрерывна в нуле. По лемме II.1.6, f непрерывна, ч. т. д.

Из леммы 7 и теоремы 1.12 вытекает следующий результат:

8. Теорема. *Любые два не пересекающихся выпуклых множества линейного топологического пространства, одно из которых содержит внутреннюю точку, могут быть разделены некоторым ненулевым непрерывным линейным функционалом.*

9. Определение. Линейное топологическое пространство называется *локально выпуклым*, если его топология обладает базисом, состоящим из выпуклых множеств.

10. Теорема. *Если K_1 и K_2 — непересекающиеся замкнутые выпуклые подмножества локально выпуклого линейного топологического пространства $\mathfrak{X}$ и если K_1 бикомпактно, то найдутся такие константы c и ε, $\varepsilon > 0$, и такой определенный на $\mathfrak{X}$ непрерывный линейный функционал f, что*

$$\operatorname{Re} f(K_2) \leqslant c - \varepsilon < c \leqslant \operatorname{Re} f(K_1).$$

Доказательство. По лемме 3, множество $K_1 - K_2$ замкнуто; по лемме 1.4, оно выпукло. Так как множество $K_1 - K_2$ не содержит нуля, то найдется выпуклая окрестность U нуля, не пересекающаяся с $K_1 - K_2$. По теореме 8 существует ненулевой непрерывный линейный функционал f, разделяющий множества U и $K_1 - K_2$, т. е. найдется такая вещественная константа d, что $\operatorname{Re} f(K_1 - K_2) \geqslant d$ $\operatorname{Re} f(U) \leqslant d$. Далее, так как функционал f ненулевой, то найдется такое $x \in \mathfrak{X}$, что $f(x) = 1$. Отсюда следует, что $f(\alpha x) = \alpha$. С другой стороны, для достаточно малого α $\alpha x \in U$. Таким образом, существует такое $\varepsilon > 0$, что множество $f(U)$ содержит каждый скаляр, модуль которого меньше, чем ε. Следовательно, $\operatorname{Re} f(K_1) - \operatorname{Re} f(K_2) = \operatorname{Re} f(K_1 - K_2) \geqslant d \geqslant \varepsilon$, так что каждое число из множества $\operatorname{Re} f(K_1)$ по крайней мере на ε больше каждого числа из множества $\operatorname{Re} f(K_2)$. Утверждение теоремы получается теперь, если положить $c = \inf \operatorname{Re} f(K_1)$, ч. т. д.

→ 11. Следствие. *Если K_1 и K_2 — непересекающиеся замкнутые выпуклые подмножества локально выпуклого линейного топологического пространства $\mathfrak{X}$ и если K_1 бикомпактно, то существует определенный на $\mathfrak{X}$ ненулевой непрерывный линейный функционал, разделяющий множества K_1 и K_2.*

12. Следствие. *Если K — замкнутое выпуклое подмножество локально выпуклого линейного топологического пространства и $p \notin K$, то существует ненулевой непрерывный линейный функционал, разделяющий K и p.*

13. Следствие. *Если p и q — несовпадающие точки локально выпуклого линейного топологического пространства $\mathfrak{X}$, то существует такой определенный на $\mathfrak{X}$ непрерывный линейный функционал f, что $f(p) \neq f(q)$.*

В качестве последнего следствия мы сформулируем некоторый результат, который будет иметь важные приложения в последующих параграфах.

14. Следствие. *Пусть линейное пространство $\mathfrak{X}$ имеет две локально выпуклые топологии τ_1 и τ_2. Если пространства $(\mathfrak{X}, \tau_1)$ и $(\mathfrak{X}, \tau_2)$ имеют одни и те же непрерывные линейные функционалы, то выпуклое множество замкнуто в $(\mathfrak{X}, \tau_1)$ в том и только в том случае, если оно замкнуто в $(\mathfrak{X}, \tau_2)$.*

Доказательство. Пусть K — выпуклое множество, замкнутое в $(\mathfrak{X}, \tau_1)$, и пусть $p \notin K$. По теореме 10 существует такой непрерывный линейный функционал f, определенный на $(\mathfrak{X}, \tau_1)$, и такие вещественные числа c и $\varepsilon > 0$, что

$$\operatorname{Re} f(K) \leqslant c < c + \varepsilon \leqslant \operatorname{Re} f(p).$$

Так как функционал f непрерывен также и на пространстве $(\mathfrak{X}, \tau_2)$, то окрестность $\{x \mid |f(x) - f(p)| < \varepsilon\}$ точки p в $(\mathfrak{X}, \tau_2)$ не пересекается с K. Следовательно, множество K замкнуто в $(\mathfrak{X}, \tau_2)$, ч. т. д.

3. Слабые топологии.
Определения и основные свойства

1. Определение. Если $\mathfrak{X}$ есть линейное векторное пространство, то через $\mathfrak{X}^+$ обозначается пространство всех определенных на $\mathfrak{X}$ линейных функционалов.

Линейное подпространство $\Gamma \subseteq \mathfrak{X}^+$ называется *тотальным* (см. определение II.2.6), если из того, что $f(x) = 0$ для всех $f \in \Gamma$, вытекает, что $x = 0$. Пространство Γ часто называют *тотальным пространством определенных на $\mathfrak{X}$ функционалов.*

2. Определение. Пусть $\mathfrak{X}$ — линейное векторное пространство и Γ — тотальное подпространство в $\mathfrak{X}^+$. Тогда Γ-*топологией* пространства $\mathfrak{X}$ называется его топология, базис которой составляют все множества вида

$$N(p; A, \varepsilon) = \{q \mid |f(p) - f(q)| < \varepsilon, \quad f \in A\},$$

где $p \in \mathfrak{X}$, A — конечное подмножество Γ и $\varepsilon > 0$.

Термины Г-открытые и Г-замкнутые подмножества $\mathfrak{X}$, Г-непрерывные отображения и т. д. относятся к Г-топологии пространства $\mathfrak{X}$.

Следующая лемма является следствием определения 2.

3. Лемма. *Если* Г — *тотальное линейное пространство определенных на* $\mathfrak{X}$ *линейных функционалов, то относительно* Г-*топологии* $\mathfrak{X}$ *является локально выпуклым линейным топологическим пространством.*

Заметим, что $\mathfrak{X}$ и само по себе уже могло быть линейным топологическим пространством, в котором определены понятия открытых и замкнутых подмножеств, непрерывных отображений и т. д. Эти понятия необходимо отличать от соответствующих понятий в Г-топологии. Так, если $\mathfrak{X}$ является B-пространством, то оно обладает естественной метрической топологией, определяемой его нормой. Эта топология часто называется *сильной* или *метрической*. Если говорят просто о замкнутом подмножестве в $\mathfrak{X}$ или о непрерывном отображении $\mathfrak{X}$, не уточняя, в какой топологии, то при этом имеют в виду сильную топологию.

Г-топология линейного пространства $\mathfrak{X}$ связана с определенной в п. I.8.1 топологией произведения пространств. Пусть $\mathfrak{X}$ является линейным пространством над полем Ф, а Г — тотальное подпространство в $\mathfrak{X}^+$. Положим $\Phi_f = \Phi$, если $f \in \Gamma$, и пусть $\Psi = \prod_{f \in \Gamma} \Phi_f$. Обозначим через T отображение пространства $\mathfrak{X}$ в Ψ, определяемое равенством

$$T(x) = \prod_{f \in \Gamma} f(x).$$

Так как Г тотально, то T есть взаимно однозначное вложение $\mathfrak{X}$ в Ψ и, следовательно, $\mathfrak{X}$ можно рассматривать как некоторое подмножество Ψ. Из определений 2 и I.8.1 ясно, что Г-топология пространства $\mathfrak{X}$ тождественна с относительной топологией пространства $\mathfrak{X}$ как подмножества топологического произведения Ψ. Это замечание позволит нам в следующем параграфе доказать несколько интересных теорем о Г-топологии линейного пространства $\mathfrak{X}$.

Имеются два особенно важных примера локально выпуклых топологий, определяемых тотальными множествами линейных функционалов. Если $\mathfrak{X}$ есть B-пространство, или, более общо, любое локально выпуклое линейное топологическое пространство и $\Gamma = \mathfrak{X}^*$ — множество всех определенных на $\mathfrak{X}$ непрерывных линейных функционалов (существующих ввиду следствия 2.13), то Г-топология называется $\mathfrak{X}^*$-*топологией* или *слабой топологией* пространства $\mathfrak{X}$. Обобщенная последовательность $\{x_\alpha\}$ в том и только в том случае будет сходиться к x в $\mathfrak{X}^*$-топологии, если слабый предел $\lim_\alpha x_\alpha = x$ в смысле определения II.3.25. С другой стороны, если $\mathfrak{X}$ есть подпространство в $\mathfrak{Y}^+$, то каждый элемент $y \in \mathfrak{Y}$ определяет на $\mathfrak{X}$ линейный функционал f_y такой, что

$$f_y(x) = x(y), \quad x \in \mathfrak{X},$$

и подпространство $\Gamma = \{f_y \mid y \in \mathfrak{Y}\} \subseteq \mathfrak{X}^+$, очевидно, тотально. Γ-топология пространства $\mathfrak{X}$ часто называется его *$\mathfrak{Y}$-топологией*. Ясно, что обобщенная последовательность $\{x_\alpha\}$ сходится к x в этой топологии в том и только в том случае, если для каждого $y \in \mathfrak{Y}$ $\lim x_\alpha(y) = x(y)$. Наиболее важный случай топологии последнего типа для пространства функционалов получается, если $\mathfrak{Y}$ есть линейное топологическое пространство и $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}^*$. В этом случае получается *$\mathfrak{Y}$-топология* пространства $\mathfrak{Y}^*$.

Читатель заметит, что в некоторых случаях для одного и того же пространства $\mathfrak{X}$ определены несколько различных топологий. Так, например, если $\mathfrak{X}$ есть B-пространство, то в $\mathfrak{X}$ есть и метрическая и $\mathfrak{X}^*$-топологии. Если $\mathfrak{Y}$ есть B-пространство, то его сопряженное пространство $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}^*$ имеет и метрическую, и $\mathfrak{Y}$- и $\mathfrak{Y}^{**}$- (или $\mathfrak{X}^*$-) топологии. Кроме того, в гл. II (см. II.3.25) уже были определены отдельно различные топологические понятия, такие, как слабая компактность.

В ближайших параграфах будут рассматриваться соотношения между различными уже определенными топологиями.

4. Лемма. *Топология локально выпуклого пространства $\mathfrak{X}$ сильнее, чем его $\mathfrak{X}^*$-топология.*

5. Следствие. *Метрическая топология B-пространства $\mathfrak{X}$ сильнее, чем его слабая топология.*

6. Лемма. *Пусть $\mathfrak{X}$ — линейное пространство, а Γ_1 и Γ_2 — два тотальных подпространства $\mathfrak{X}^+$. Если $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$, то Γ_1-топология $\mathfrak{X}$ слабее, чем его Γ_2-топология.*

7. Следствие. *Если $\mathfrak{X}$ есть B-пространство, то $\mathfrak{X}$-топология пространства $\mathfrak{X}^*$ слабее, чем его $\mathfrak{X}^{**}$-топология.*

Доказательства предложений 4—7 элементарны и предоставляются читателю.

8. Лемма. *Пусть $\mathfrak{X}$ — линейное пространство, а Γ — тотальное подпространство в $\mathfrak{X}^+$. Тогда Γ-топология пространства $\mathfrak{X}$ есть слабейшая из топологий, в которых каждый функционал из Γ непрерывен.*

Доказательство элементарно и предоставляется читателю. Для леммы 8 справедливо следующее важное обратное предложение.

9. Теорема. *Пусть $\mathfrak{X}$ — линейное пространство, а Γ — тотальное подпространство в $\mathfrak{X}^+$. Тогда совокупность определенных на $\mathfrak{X}$ линейных функционалов, непрерывных в его Γ-топологии, совпадает с Γ.*

Доказательство теоремы 9 будет основано на следующей лемме.

10. Лемма. *Если g, $f_1, \ldots, f_n$ — линейные функционалы, определенные на линейном пространстве $\mathfrak{X}$, и если из того, что $f_i(x)=0$ при $i=1, \ldots, n$, вытекает, что $g(x)=0$, то g является линейной комбинацией f_i.*

Доказательство. Рассмотрим линейное отображение $T: \mathfrak{X} \to E^n$, определяемое равенством

$$T(x) = [f_1(x), \ldots, f_n(x)].$$

На линейном подпространстве $T(\mathfrak{X})$ пространства E^n определим отображение ψ формулой

$$\psi[T(x)] = \psi[f_1(x), \ldots, f_n(x)] = g(x).$$

Отображение ψ однозначно определено, так как из того, что $T(x) = T(y)$, вытекает, что $T(x-y)=0$, так что $g(x)=g(y)$. Ясно, что ψ есть линейный функционал, определенный на подпространстве $T(\mathfrak{X})$ пространства E^n. По теореме II.3.11, его можно продолжить до линейного функционала ψ_1, определенного на всем E^n. Согласно следствию IV.3.7, ψ_1 имеет вид

$$\psi_1[y_1, \ldots, y_n] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i.$$

Следовательно,

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x), \quad x \in \mathfrak{X},$$

ч. т. д.

Доказательство теоремы 9.

Каждый функционал из Γ Γ-непрерывен по лемме 8.

Обратно, пусть $g \neq 0$ — определенный на $\mathfrak{X}$ Γ-непрерывный линейный функционал. Существует Γ-окрестность $N(0; f_1, \ldots, f_n, \varepsilon)$, отображаемая функционалом g в единичную сферу пространства Φ. Если $f \in \mathfrak{X}^+$, то положим $\mathfrak{H}_f = \{x \mid f(x)=0\}$, и пусть $x_0 \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{H}_{f_i}$. Тогда $x_0 \in N(0; f_1, \ldots, f_n, \varepsilon)$ и, следовательно, $|g(x_0)|<1$. Будучи линейным пространством, $\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{H}_{f_i}$ содержит mx_0 для каждого целого m. Следовательно, $m|g(x_0)| = |g(mx_0)| < 1$, откуда следует, что $g(x_0)=0$. Итак, если $f_i(x_0)=0$ при $i=1, \ldots, n$, то $g(x_0)=0$. По лемме 10, отсюда следует, что g есть линейная комбинация функционалов f_i. Следовательно, $g\in\Gamma$, ч. т. д.

11. Следствие. *Пусть f — линейный функционал, определенный на линейном пространстве $\mathfrak{X}$, а Γ — тотальное подпространство в $\mathfrak{X}^+$. Тогда нижеследующие утверждения эквивалентны:*

(I) *f принадлежит Γ;*

(II) *f Γ-непрерывен;*

(III) *множество $\mathfrak{H}_f=\{x \mid f(x)=0\}$ Γ-замкнуто.*

Доказательство. По теореме 9, (I) эквивалентно (II). Ясно что из (II) вытекает (III); теперь мы покажем, что из (III) вытекает (I). Предположим, что $f\neq 0$. По теореме 2.10, существует такой ненулевой линейный Γ-непрерывный функционал g и такая вещественная константа c, что $\operatorname{Re} g(\mathfrak{H}_f)\leqslant c$. По лемме 1.11 $g(\mathfrak{H}_f)=0$, т. е. из того, что $f(x)=0$, вытекает, что $g(x)=0$. По лемме 10, это значит, что $g=\alpha f$ для некоторого ненулевого скаляра α. По теореме 9, g принадлежит Γ, следовательно, и f принадлежит Γ, ч. т. д.

12. Следствие. *Пусть $\mathfrak{X}$ — линейное векторное пространство, а Γ — тотальное подпространство в $\mathfrak{X}^+$. Для того чтобы линейное подпространство $\mathfrak{Y}$ пространства $\mathfrak{X}$ было Γ-замкнутым, необходимо и достаточно, чтобы для каждого x, не принадлежащего $\mathfrak{Y}$, в Γ нашлось такое f, что $f(\mathfrak{Y})=0$, $f(x)=1$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{Y}$ не является Γ-замкнутым; предположим, что $x\in\mathfrak{Y}'\cap\overline{\mathfrak{Y}}$, где замыкание берется в Γ-топологии. Если $f\in\Gamma$ и $f(\mathfrak{Y})=0$, то по непрерывности $f(\overline{\mathfrak{Y}})=0$ и, значит, $f(x)=0$. Обратно, если $\mathfrak{Y}$ Γ-замкнуто и $x\notin\mathfrak{Y}$, то, по следствию 2.12, существует такое Γ-непрерывное f_0 и такая константа c, что $\operatorname{Re} f_0(\mathfrak{Y})\leqslant c$, $f_0(x)\neq 0$. По лемме 1.11 $f_0(\mathfrak{Y})=0$; по теореме 9, $f_0\in\Gamma$. Положим $f=f_0/f_0(x)$, и наше следствие доказано,

13. Теорема. *Для того чтобы выпуклое подмножество локально выпуклого линейного топологического пространства было $\mathfrak{X}^*$-замкнутым, необходимо и достаточно, чтобы оно было замкнутым.*

Доказательство. Это утверждение вытекает из теоремы 9 и следствия 2.14, ч. т. д.

14. Следствие. *Если $\mathfrak{X}$ есть B-пространство, а $\{x_n\}$ — последовательность элементов из $\mathfrak{X}$, слабо сходящаяся к x, то некоторая последовательность выпуклых комбинаций элементов x_n сходится к x в метрической топологии.*

Доказательство. Пусть $A = \overline{\text{co}}\{x_n\}$. По только что доказанной теореме, множество A замкнуто в слабой топологии, следовательно, $x \in A$. Наше следствие теперь легко вытекает из леммы 2.4 (II) и леммы I.6.6, ч. т. д.

15. Теорема. *Пусть T — линейное отображение B-пространства $\mathfrak{X}$ в B-пространство $\mathfrak{Y}$. Тогда для того, чтобы T было непрерывным относительно метрических топологий в $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$, необходимо и достаточно, чтобы оно было непрерывным относительно слабых топологий.*

Доказательство. Предположим, что T непрерывно относительно метрических топологий. Пусть $N(0; y_1^*, \ldots, y_n^*, \varepsilon)$ — окрестность нуля в $\mathfrak{Y}$. Для каждого y_i^* определим x_i^* равенством

$$x_i^*(x) = y_i^*(Tx).$$

Тогда $|x_i^*| \leqslant |y_i^*|\,|T|$ и, следовательно, $x_i^* \in \mathfrak{X}^*$. Если $x \in N(0; x_1^*, \ldots, x_n^*, \varepsilon,)$ то $|x_i^*(x)| < \varepsilon$. Поэтому $|y_i^*\ (Tx)| < \varepsilon$, так что $Tx \in N(0; y_1^*, \ldots, y_n^*, \varepsilon)$. Мы нашли, что T слабо непрерывно в нуле, а значит и в каждой точке.

Обратно, предположим, что T слабо непрерывно и $y^* \in \mathfrak{Y}^*$. Тогда y^*T есть определенный на $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}^*$-непрерывный линейный функционал. Следовательно, по теореме 9, $y^*T \in \mathfrak{X}^*$ для $y^* \in \mathfrak{Y}^*$, так что для всех $y^* \in \mathfrak{Y}^*$ функционал y^*T непрерывен в метрической топологии. А тогда, по теореме II.2.7, T непрерывно в метрической топологии, ч. т. д.

4. Слабые топологии. Бикомпактность и рефлексивность

Два следующих параграфа посвящены изучению $\mathfrak{X}$-топологии пространства $\mathfrak{X}^*$, сопряженного к некоторому B-пространству. Следующая основная лемма является простым следствием теоремы Тихонова (I.8.5).

1. Лемма. *Пусть $\mathfrak{X}$ — линейное пространство, а c — определенная на $\mathfrak{X}$ вещественная функция. Тогда множество*

$$K = \{f \mid f \in \mathfrak{X}^+, |f(x)| \leqslant c(x)\}$$

бикомпактно в $\mathfrak{X}$-топологии пространства $\mathfrak{X}^+$.

Доказательство. Для каждого $x \in \mathfrak{X}$ обозначим через $I(x)$ совокупность таких скаляров α, что $|\alpha| \leqslant c(x)$, и пусть $I = \prod_{x \in \mathfrak{X}} I(x)$. Определим отображение $\tau : K \to I$, полагая $\tau(f) = \prod_{x \in \mathfrak{X}} f(x)$. Пусть пространство $\mathfrak{X}^+$ снабжено $\mathfrak{X}$-топологией, K — относительной топологией как подмножество в $\mathfrak{X}^+$ и I — произведением топологий. Тогда из определений и рассуждения, следующего за леммой 3.3, ясно, что τ есть гомеоморфизм. По теореме I.8.5, I бикомпактно. Таким образом, ввиду леммы I.5.7(a) остается доказать, что τK есть замкнутое подмножество в I.

Нетрудно проверить, что τK есть совокупность всех таких $g \in I$, которые принадлежат всем множествам $A(x, y) = \{g | pr_{x+y} g = pr_x g + pr_y g\}$ и всем множествам $B(\alpha, x) = \{g \mid \alpha pr_x g = pr_{\alpha x} g\}$. Так как каждое проектирование является непрерывным отображением, то каждое из множеств $A(x, y)$ и $B(\alpha, x)$ замкнуто. Следовательно, и $\tau K = \bigcap_{x, y \in \mathfrak{X}} A(x, y) \bigcap \bigcap_{\alpha \in \Phi,\, x \in \mathfrak{X}} B(\alpha, x)$ тоже замкнуто, ч. т. д.

2. Теорема. (*Алаоглу*). *Замкнутая единичная сфера пространства $\mathfrak{X}^*$, сопряженного к B-пространству $\mathfrak{X}$, бикомпактна в $\mathfrak{X}$-топологии пространства $\mathfrak{X}^*$.*

Доказательство. По определению II.3.5, единичная сфера пространства $\mathfrak{X}^*$ — это множество $\{f | f \in \mathfrak{X}^+, |f(x)| \leqslant |x|\}$, и наша теорема вытекает, следовательно, из леммы 1, ч. т. д.

3. Следствие. *Если $\mathfrak{X}$ есть B-пространство, то для того, чтобы подмножество пространства $\mathfrak{X}^*$ было бикомпактным в $\mathfrak{X}$-топологии, необходимо и достаточно, чтобы оно было замкнутым в $\mathfrak{X}$-топологии и ограниченным в метрической топологии.*

4. Следствие. *Каждое B-пространство $\mathfrak{X}$ изометрически изоморфно некоторому замкнутому подпространству пространства $C(\Lambda)$ непрерывных функций, определенных на некотором бикомпактном хаусдорфовом пространстве Λ.*

Доказательство. Обозначим через Λ замкнутую единичную сферу пространства $\mathfrak{X}^*$. Тогда, по теореме 2, Λ есть бикомпактное хаусдорфово пространство относительно $\mathfrak{X}$-топологии. Рассмотрим естественное вложение $\varkappa$ пространство $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{X}^{**}$. По лемме 3.8. для каждого $x \in \mathfrak{X}$ сужение отображения $\varkappa x = \hat{x}$ на Λ является на Λ непрерывной функцией. Кроме того, по следствию II.3.15,

$$\sup_{x^* \in \Lambda} |\hat{x}(x^*)| = |x|.$$

Таким образом, $\varkappa$ определяет некоторый изометрический изоморфизм между пространством $\mathfrak{X}$ и некоторым подпространством $\mathfrak{X}_1$ пространства $C(\Lambda)$. Ввиду полноты пространства $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}_1$ является полным и, следовательно, замкнутым подмножеством пространства $C(\Lambda)$, ч. т. д.

Так как естественное вложение $\varkappa : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}^{**}$ изометрично, то оно отображает метрически замкнутые подмножества пространства $\mathfrak{X}$ на метрически замкнутые же подмножества пространства $\mathfrak{X}^{**}$. Однако если метрическую топологию пространства $\mathfrak{X}^{**}$ заменить на его $\mathfrak{X}^{*}$-топологию, то положение совершенно изменится, как показывает следующая теорема.

5. Теорема. (*Голдстайн*). *Пусть $\varkappa$ — естественное вложение B-пространства $\mathfrak{X}$ в его второе сопряженное пространство $\mathfrak{X}^{**}$, и пусть S и S^{**} — замкнутые единичные сферы соответственно в пространствах $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}^{**}$. Тогда множество $\varkappa S$ всюду плотно в S^{**} в $\mathfrak{X}^{*}$-топологии.*

Доказательство. Обозначим через S_1 $\mathfrak{X}^{*}$-замыкание множества $\varkappa(S)$. Так как S^{**}, по теореме 2, $\mathfrak{X}^{*}$-замкнуто, то $S_1 \subseteq S^{**}$. По теореме 2.1, S_1 выпукло. Покажем, что $S_1 = S^{**}$. Если найдется элемент $x^{**} \in S^{**}$, не входящий в S_1, то, по теореме 2.10, найдется такой $\mathfrak{X}^{*}$-непрерывный линейный функционал f, определенный на $\mathfrak{X}^{**}$, и такие константы c и $\varepsilon > 0$, что $\operatorname{Re} f(S_1) \leqslant c$, $\operatorname{Re} f(x^{**}) \geqslant c + \varepsilon$. По теореме 3.9, существует такой элемент $x^{*} \in \mathfrak{X}^{*}$, что $f(x^{**}) = x^{**}x^{*}$, если $x^{**} \in \mathfrak{X}^{**}$. Так как $\varkappa(S) \subseteq S_1$, то $\operatorname{Re} x^{*}(x) \leqslant c$ для $x \in S$. Но если $x \in S$, то при $|\alpha| = 1$ и $\alpha x \in S$, а следовательно, $|x^{*}(x)| \leqslant c$ для $x \in S$. Таким образом, $|x^{*}| \leqslant c$ и $|x^{**}(x^{*})| \leqslant c|x^{**}| \leqslant c$, что противоречит неравенству $\operatorname{Re} x^{**}(x^{*}) \geqslant c + \varepsilon$. Следовательно, каждый элемент $x^{**} \in S^{**}$ принадлежит S_1, ч. т. д.

6. Следствие. *Если $\varkappa$ есть естественное вложение B-пространства $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{X}^{**}$, то множество $\varkappa\mathfrak{X}$ всюду плотно в $\mathfrak{X}^{**}$ в $\mathfrak{X}^{*}$-топологии.*

Доказательство. $\mathfrak{X}^{*}$-замыкание множества $\varkappa(\mathfrak{X})$ является подпространством в $\mathfrak{X}^{**}$, содержащим, по теореме 5, единичную сферу пространства $\mathfrak{X}^{**}$. Отсюда сразу же следует, что оно содержит каждую точку пространства $\mathfrak{X}^{**}$, ч. т. д.

Из теорем 2 и 5 получается следующий важный результат относительно рефлексивных пространств.

7. Теорема. *Для того чтобы B-пространство было рефлексивным, необходимо и достаточно, чтобы его замкнутая единичная сфера была бикомпактной в слабой топологии.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{X}$ — рефлексивное B-пространство и $\varkappa$ — естественное вложение $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{X}^{**}$. Тогда отображения $\varkappa$ и $\varkappa^{-1}$ изометричны, причем $\varkappa$ отображает замкнутую единичную сферу S пространства $\mathfrak{X}$ на замкнутую единичную сферу S^{**} пространства $\mathfrak{X}^{**}$. Из определений обеих топологий ясно, что отображение $\varkappa$ является гомеоморфизмом между сферой S с ее $\mathfrak{X}^*$-топологией и сферой S^{**} с ее $\mathfrak{X}^*$-топологией. По теореме 2, S слабо бикомпактно.

Обратно, пусть замкнутая единичная сфера S пространства $\mathfrak{X}$ слабо бикомпактна. Так как отображение $\varkappa$ является гомеоморфизмом между S и $\varkappa(S)$ в $\mathfrak{X}^*$-топологии, определенной на обоих множествах S и $\varkappa(S)$, то $\varkappa(S)$ бикомпактно. По лемме I.5.7, множество $\varkappa(S)$ замкнуто в его $\mathfrak{X}^*$-топологии. По теореме 5, множество $\varkappa(S)$ всюду плотно в S^{**}. Отсюда следует, что $\varkappa(S) = S^{**}$ и, значит, $\varkappa(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^{**}$, т. е. пространство $\mathfrak{X}$ рефлексивно, ч. т. д.

8. Следствие. *Ограниченное слабо замкнутое множество рефлексивного B-пространства слабо бикомпактно. Обратно, это свойство характеризует рефлексивные пространства.*

5. Слабые топологии Метризуемость. Неограниченные множества

В этом параграфе продолжается исследование $\mathfrak{X}$-топологии пространства $\mathfrak{X}^*$, сопряженного к B-пространству $\mathfrak{X}$.

1. Теорема. *Если $\mathfrak{X}$ есть B-пространство, то $\mathfrak{X}$-топология замкнутой единичной сферы S^* пространства $\mathfrak{X}^*$ в том и только в том случае определяется некоторой метрикой, если пространство $\mathfrak{X}$ сепарабельно.*

Доказательство. Предположим, что $\mathfrak{X}$ сепарабельно, и пусть $\{x_n\}$ — счетное всюду плотное его подмножество. Положим, по определению,

$$\varrho(x^*, y^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|(x^*-y^*)x_n|}{1+|(x^*-y^*)x_n|}.$$

Нетрудно убедиться в том, что определяемая этой метрикой топология сферы S^* слабее, чем ее $\mathfrak{X}$-топология. По теореме 4.2 и лемме I.5.8, отсюда следует, что метрическая топология множества S^*, определяемая функцией ϱ, совпадает с его $\mathfrak{X}$-топологией.

Обратно, если $\mathfrak{X}$-топология сферы S^* определяется некоторой метрикой, то существует такая счетная последовательность $\{U_n^*\}$ $\mathfrak{X}$-окрестностей нуля пространства $\mathfrak{X}^*$, что $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n^* = \{0\}$. Мы можем предполагать, что

$$U_n^* = \{x^* \mid x^* \in S^*, \quad |x^*(x)| < \varepsilon_n, \quad x \in A_n\},$$

где A_n есть некоторое конечное подмножество пространства $\mathfrak{X}$ и $\varepsilon_n > 0$. Положим $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$; если $x^*(A) = 0$, то $x^* \in U_n^*$ для каждого n и, следовательно, $x^* = 0$. Пусть $\mathfrak{X}_1 = \overline{\mathrm{sp}}(A)$. По лемме II.1.5, $\mathfrak{X}_1$ сепарабельно, и ввиду следствия II.3.13 $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}$, ч. т. д.

2. Теорема. *Если $\mathfrak{X}$ есть B-пространство, то $\mathfrak{X}^*$-топология замкнутой единичной сферы пространства $\mathfrak{X}$ в том и только в том случае определяется некоторой метрикой, если пространство $\mathfrak{X}^*$ сепарабельно.*

Доказательство. Пусть пространство $\mathfrak{X}^*$ сепарабельно и $\varkappa$ — естественное вложение $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{X}^{**}$. По теореме 1, $\mathfrak{X}^*$-топология замкнутой единичной сферы S^{**} пространства $\mathfrak{X}^{**}$ определяется некоторой метрикой. Если S — замкнутая единичная сфера пространства $\mathfrak{X}$, то отображение $\varkappa : S \to S^{**}$ является гомеоморфизмом между S и $\varkappa S$ в их $\mathfrak{X}^*$-топологиях. По лемме I.6.4, $\mathfrak{X}^*$-топология множества S определяется той же метрикой.

Обратно, пусть $\mathfrak{X}^*$-топология сферы S определяется некоторой метрикой. Тогда найдется такая последовательность $\{U_n\}$ $\mathfrak{X}^*$-окрестностей нуля пространства $\mathfrak{X}$, что каждая $\mathfrak{X}^*$-окрестность нуля содержит некоторую из окрестностей U_n. Мы можем предполагать, что

$$U_n = \{x \mid x \in S, \quad |x^*(x)| < \varepsilon_n, \quad x^* \in A_n^*\},$$

где A_n^* есть конечное подмножество пространства $\mathfrak{X}^*$ и $\varepsilon_n > 0$. Положим $A^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^*$ и $\mathfrak{X}_1^* = \overline{\mathrm{sp}}(A^*)$. По лемме II.1.5, $\mathfrak{X}_1^*$ сепарабельно, и остается показать, что $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{X}_1^*$.

Если $\mathfrak{X}^* \neq \mathfrak{X}_1^*$, мы можем выбрать $y^* \in \mathfrak{X}^*$, $y^* \notin \mathfrak{X}_1^*$. Положим

$$d = \inf_{x_1^* \in \mathfrak{X}_1^*} |y^* - x_1^*|.$$

Тогда $d > 0$ и, по лемме II.3.12, найдется такое $x^{**} \in \mathfrak{X}^{**}$, норма которого $|x^{**}| = 1/d$ и для которого $x^{**}(\mathfrak{X}_1^*) = 0$, $x^{**}(y^*) = 1$. Множество $V = \{x \mid x \in S, \quad |y^*(x)| < d/2\}$ является некоторой $\mathfrak{X}^*$-окрестностью нуля, и, следовательно, для некоторого n $V \supseteq U_n$. Так как $dx^{**} \in S^{**}$, то, по теореме 4.5, существует такое $x_1 \in S$, что

$$|x^*(x_1)| = |dx^{**}(x^*) - x^*(x_1)| < \varepsilon_n, \quad x^* \in A_n^*,$$

$$|d - y^*(x_1)| = |dx^{**}(y^*) - y^*(x_1)| < \frac{d}{2}.$$

Таким образом,

$$|y^*(x_1)| > \frac{d}{2}; \quad |x^*(x_1)| < \varepsilon_n, \quad x^* \in A_n^*.$$

Но это означает, что $x_1 \in U_n$ и $x_1 \notin V$; мы пришли к противоречию, доказывающему, что $\mathfrak{X}_1^* = \mathfrak{X}^*$, ч. т. д.

Остальные теоремы этого параграфа относятся к выпуклым множествам, которые не предполагаются ограниченными. Можно отметить, что все предложения, аналогичные содержащимся в пунктах 3—6 и относящиеся к $\mathfrak{X}^*$-топологии пространства $\mathfrak{X}$, являются тривиальными следствиями теоремы 3.13.

3. Определение. Пусть $\mathfrak{X}$ является B-пространством. *Ограниченная $\mathfrak{X}$-топология*, или *BX-топология*, пространства $\mathfrak{X}^*$ — это сильнейшая из топологий, совпадающих с $\mathfrak{X}$-топологией на каждом множестве $aS^* = \{x^* \mid x^* \in \mathfrak{X}^*, \ |x^*| \leqslant a\}$. Таким образом, множество $U \subseteq \mathfrak{X}^*$ будет BX-открытым в том и только в том случае, если для каждого $a \geqslant 0$ пересечение $U \cap aS^*$ является относительно $\mathfrak{X}$-открытым подмножеством множества aS^*, и множество $K \subseteq \mathfrak{X}^*$ будет BX-замкнутым в том и только в том случае, если для каждого $a \geqslant 0$ пересечение $K \cap aS^*$ является $\mathfrak{X}$-замкнутым.

4. Лемма. *Пусть $\mathfrak{X}$ является B-пространством. Фундаментальная система окрестностей нуля ограниченной $\mathfrak{X}$-топологии пространства $\mathfrak{X}^*$ состоит из множеств $\{x^* \mid |x^*(x)| < 1, \ x \in A\}$, где $A = \{x_i\}$ — произвольная сходящаяся к нулю последовательность элементов пространства $\mathfrak{X}$.*

Доказательство. Пусть S^* — замкнутая единичная сфера пространства $\mathfrak{X}^*$. Если A — сходящаяся к нулю последовательность элементов, то, как легко видеть, $\{x^* \mid |x^*(x)| < 1, \ x \in A\} \cap aS^* = \{x^* \mid |x^*(x)| < 1, \ x \in A_1\} \cap aS^*$, где A_1 есть конечное множество элементов $x \in A$, норма которых $|x| \geqslant 1/a$. Таким образом, $\{x^* \mid |x^*(x)| < 1, \ x \in A\} \cap aS^*$ есть относительно $\mathfrak{X}$-открытое подмножество множества aS^*.

Для того чтобы доказать обратное утверждение леммы, удобно ввести обозначение $A^0 = \{x^* \mid |x^*(x)| \leqslant 1, \ x \in A\}$, где A — подмножество из $\mathfrak{X}$. Пусть U — некоторая BX-окрестность нуля. Тогда, по определению BX-топологии, найдется такое конечное множество $A_1 \subseteq \mathfrak{X}$, что $A_1^0 \cap S^* \subseteq U$. Предположим, что для некоторого натурального n мы уже определили конечное множество $A_n \subseteq \mathfrak{X}$ такое, что $A_n^0 \cap nS^* \subseteq U$. Мы покажем теперь, что существует такое конечное множество элементов $B_n \subseteq \mathfrak{X}$, что $|B_n| \leqslant 1/n$ и что $(A_n \cup B_n)^0 \cap (n+1) S^* \subseteq U$.

Если это не так, то ясно, что семейство множеств вида $(A_n \cup B)^0 \cap (n+1) S^* \cap U'$, где B конечно и $|B| \leqslant 1/n$ центрировано. Так как множество U' BX-замкнуто, то все эти множества $\mathfrak{X}$-замкнуты, а так как множество $(n+1) S^*$, по теореме 4.2, $\mathfrak{X}$-бикомпактно, то из леммы I.5.6 следует, что существует такое $x^* \in (n+1) S^* \cap U' \cap A_n^0$, что $|x^*(x)| \leqslant 1$ для каждого $x \in \mathfrak{X}$, для которого $|x| \leqslant 1/n$. Таким образом, $|x^*| \leqslant n$, так что $x^* \in nS^* \cap \cap A_n^0 \cap U'$ вопреки тому, что $nS^* \cap A_n^0 \subseteq U$.

Положив, по определению, $A_{n+1} = A_n \cup B_n$, мы индуктивно построим последовательность конечных множеств $A_n \subseteq \mathfrak{X}$ таких, что $A_n^0 \cap nS^* \subseteq U$ и что при каждом расположении элементов множества $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_n$ в последовательность это будет сходящаяся к нулю подпоследовательность элементов пространства $\mathfrak{X}$. Следовательно, $\{x^* \mid x^* \in \mathfrak{X}^*, \ |x^*(x)| < 1, \ x \in A\}$ есть содержащееся в U множество указанного в формулировке леммы вида, ч. т. д.

Для читателя не составит труда применить лемму 4 для доказательства такого следствия.

5. Следствие. *Пусть $\mathfrak{X}$ является B-пространством. Тогда $\mathfrak{X}^*$ с его ограниченной $\mathfrak{X}$-топологией есть локально выпуклое линейное топологическое пространство.*

Следующая теорема устанавливает основное свойство BX-топологии.

6. Теорема. *Для того чтобы определенный на $\mathfrak{X}^*$ функционал θ был непрерывен в $\mathfrak{X}$-топологии, необходимо и достаточно, чтобы он был непрерывен в ограниченной $\mathfrak{X}$-топологии.*

Доказательство. По определению, BX-топология сильнее, чем $\mathfrak{X}$-топология, так что $\mathfrak{X}$-непрерывный функционал будет и BX-непрерывным. Обратно, предположим, что определенный на $\mathfrak{X}^*$ линейный функционал θ непрерывен в BX-топологии. Тогда найдется такая последовательность $\{x_i\}$, что $\lim_{i\to\infty} x_i = 0$ и что $|\theta(x^*)| \leqslant 1$, если $|x^*(x_i)| < 1$, $i = 1, 2, \ldots$. Пусть $T: x^* \to [x^*(x_i)]$ — отображение пространства $\mathfrak{X}^*$ в B-пространство c_0. Так как из того, что $x^*(x_i) = 0$ при $i = 1, 2, \ldots$, вытекает, что $\theta(x^*) = 0$, то функционал $h(Tx^*) = \theta(x^*)$ на $T\mathfrak{X}^*$ однозначно определен. Этот функционал, очевидно, непрерывен и, по теореме II.3.11, может быть продолжен на B-пространство $c = C(S)$, где $S = \left\{0, \frac{1}{n}, n \geqslant 1\right\}$. Но тогда, по теореме IV.6.3, существует такая последовательность $[\alpha_0, \alpha_1, \ldots]$, что $\sum_{i=0}^{\infty} |\alpha_i| < \infty$ и что $h(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i$, если $\xi = [\xi_1, \xi_2, \ldots] \in c_0$ (см. упр. IV.13.7). Таким образом,

$$\theta(x^*) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x^*(x_i) = x^*\Big(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i\Big), \quad x^* \in \mathfrak{X}^*,$$

то есть θ имеет вид $\theta(x^*) = x^*(x)$, где $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \in \mathfrak{X}$. Следовательно, функционал θ, по теореме 3.9, $\mathfrak{X}$-непрерывен, ч. т. д.

7. Теорема. (*Крейн — Шмульян*). *Для того чтобы выпуклое множество пространства $\mathfrak{X}^*$ было $\mathfrak{X}$-замкнутым, необходимо и достаточно, чтобы его пересечение с каждым положительным кратным, замкнутой единичной сферы пространства $\mathfrak{X}^*$, было $\mathfrak{X}$-замкнутым.*

Доказательство. Это утверждение вытекает из предыдущей теоремы и следствия 2.14, ч. т. д.

8. Следствие. *Если $\mathfrak{X}$ есть B-пространство, то для того, чтобы линейное подпространство $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}^*$ было $\mathfrak{X}$-замкнутым, необходимо и достаточно, чтобы существовало $\mathfrak{X}$-замкнутое ограниченное подмножество K пространства $\mathfrak{X}^*$, содержащее некоторое непустое метрически открытое подмножество подпространства $\mathfrak{Y}$.*

Доказательство. Если $\mathfrak{Y}$ $\mathfrak{X}$-замкнуто, то, так как замкнутая единичная сфера S^* пространства $\mathfrak{X}^*$ тоже $\mathfrak{X}$-замкнута, мы можем положить $K = \mathfrak{Y} \cap S^*$.

Обратно, предположим, что K есть ограниченное $\mathfrak{X}$-замкнутое подмножество $\mathfrak{Y}$ и $K \supseteq \mathfrak{Y} \cap S^*(p^*, \delta)$. Если $a > 0$, то отображение $x^* \to a(x^* - p^*)/\delta$ является некоторым $\mathfrak{X}$-гомеоморфизмом пространства $\mathfrak{X}^*$ на себя. Следовательно, множество $a(K - p^*)/\delta$ $\mathfrak{X}$-замкнуто. Так как $\mathfrak{Y} \cap \delta S^* \subseteq K - p^*$, то $\mathfrak{Y} \cap aS^* \subseteq a(K - p^*)/\delta$ и, следовательно, множество $\mathfrak{Y} \cap aS^* = aS^* \cap a(K - p^*)/\delta$ $\mathfrak{X}$-замкнуто. Наше утверждение вытекает теперь из теоремы 7, ч. т. д.

9. Следствие. *Пусть $\mathfrak{X}$ является B-пространством, а K — выпуклое $\mathfrak{X}$-замкнутое подмножество пространства $\mathfrak{X}^*$. Предположим, что $\mathfrak{Y}$ есть линейное пространство, натянутое на множество K. Тогда для того, чтобы $\mathfrak{Y}$ было замкнутым в метрической топологии пространства $\mathfrak{X}^*$, необходимо и достаточно, чтобы оно было $\mathfrak{X}$-замкнутым.*

Доказательство. Если $\mathfrak{Y}$ $\mathfrak{X}$-замкнуто, то, согласно следствиям 3.5 и 3.7, оно замкнуто и в метрической топологии.

Обратно, пусть $\mathfrak{Y}$ замкнуто в метрической топологии. Мы будем предполагать пространство $\mathfrak{X}$ вещественным, предоставляя читателю проведение деталей доказательства в комплексном случае. Пусть S^* — замкнутая единичная сфера пространства $\mathfrak{X}^*$ и $K_n = K \cap nS^*$. Положим

$$\tilde{K} = \operatorname{co}(K \cup -K) \text{ и } \tilde{K}_n = \operatorname{co}(K_n \cup -K_n).$$

Тогда, согласно леммам 2.5 и 4.3, множество $\tilde{K}_n$ будет $\mathfrak{X}$-замкнутым; поэтому, согласно следствиям 3.5 и 3.7, $\tilde{K}_n$ замкнуто и в метрической топологии. Далее, каждое $y \in \mathfrak{Y}$ можно представить в виде $y = \sum_{i=1}^{p} a_i x_i - \sum_{i=p+1}^{m} a_i x_i$, где $x_i \in K$ и все a_i положительны. Отсюда следует, что $y \in a\tilde{K}$, где $a = \sum_{i=1}^{m} a_i$; так как $0 \in \tilde{K}$ и при $0 \leqslant a \leqslant b$ $a\tilde{K} \subseteq b\tilde{K}$, то каждый элемент $y \in \mathfrak{Y}$ для всех достаточно больших натуральных n принадлежит $n\tilde{K}$. Поскольку $\tilde{K} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{K}_n$, то отсюда следует, что $\mathfrak{Y} = \bigcup_{n=1}^{\infty} n\tilde{K}_n$. Так как $\mathfrak{Y}$ есть замкнутое подпространство в $\mathfrak{X}^*$, то, по лемме I.6.7, оно полно. Следовательно, по теореме Бэра о категориях (I.6.9), некоторое множество $\tilde{K}_n$ содержит непустое метрически открытое подмножество подпространства $\mathfrak{Y}$. Наше утверждение вытекает теперь из следствия 8, ч. т. д.

6. Слабые топологии. Слабая бикомпактность

Мы уже ввели и использовали понятия слабой компактности (II.3.25) и бикомпактности в $\mathfrak{X}^*$-(или слабой) топологии. Существует еще по крайней мере один тип слабой бикомпактности, используемый в некоторых случаях. Замечательным и важным является то обстоятельство, что эти три понятия эквивалентны.

1. Теорема (*Эберлейн — Шмульян*). *Пусть A — некоторое подмножество B-пространства $\mathfrak{X}$. Тогда три следующих утверждения эквивалентны*:

(I) *A слабо компактно, т. е. каждая последовательность элементов из A имеет подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторому элементу пространства $\mathfrak{X}$*;

(II) *каждое счетное подмножество множества A имеет в $\mathfrak{X}$ слабо предельную точку, т. е. такую точку, каждая слабая окрестность которой содержит элемент этого бесконечного подмножества*;

(III) *замыкание множества A в $\mathfrak{X}^*$-топологии $\mathfrak{X}^*$-бикомпактно.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что из каждого из этих трех условий вытекает, что множество A ограничено в метрической топологии; действительно, так как $x^*(A)$ для каждого $x^* \in \mathfrak{X}^*$ есть ограниченное множество скаляров, мы можем применить теорему II.3.20. Нетрудно видеть, что из условия (III) вытекает (II). Остальные импликации здесь явно нетривиальны; мы дополним доказательство теоремы, показав сперва, что из (II) вытекает (I), а затем — что из (I) вытекает (III).

Доказательство того, что из условия (II) *вытекает* (I). Пусть $\{x_n\}$ — произвольная последовательность элементов из A, и пусть

$\mathfrak{X}_0 = \overline{\mathrm{sp}}\{x_n\}$; по лемме II.1.5, $\mathfrak{X}_0$ сепарабельно. По теореме 5.1, следствию 4.2 и теореме I.6.15, единичная сфера в $\mathfrak{X}_0^*$ сепарабельна в ее $\mathfrak{X}_0$-топологии. Так как пространство $\mathfrak{X}_0^*$ является объединением последовательности кратных его единичной сферы, то и $\mathfrak{X}_0^*$ сепарабельно в $\mathfrak{X}_0$-топологии. Обозначим через H_0 счетное всюду плотное подмножество пространства $\mathfrak{X}_0^*$. Ясно, что множество H_0 является тотальным на $\mathfrak{X}_0$ и что каждый элемент из H_0 можно продолжить до линейного функционала, определенного на всем $\mathfrak{X}$. Взяв по одному такому продолжению для каждого элемента из H_0, мы получим счетное подмножество H пространства $\mathfrak{X}^*$.

Так как множество A ограничено, с помощью диагонального процесса из последовательности $\{x_n\}$ можно извлечь такую подпоследовательность $\{y_m\}$, для которой $\lim\limits_{m\to\infty} x^*y_m$ существует при любом $x^* \in H$. Ввиду условия (II) найдется такая точка $y_0 \in \mathfrak{X}$, каждая слабая окрестность которой содержит по меньшей мере одно y_m. Так как $\{y_m\} \subset \mathfrak{X}_0$ и пространство $\mathfrak{X}_0$ $\mathfrak{X}^*$-замкнуто, то $y_0 \in \mathfrak{X}_0$. Ясно, что

$$x^*y_0 = \lim_{m\to\infty} x^*y_m, \quad x^* \in H,$$

и остается показать, что это верно для каждого $x^* \in \mathfrak{X}^*$. Если это не так, то найдутся такие $x_0^* \in \mathfrak{X}^*$, $\varepsilon > 0$ и подпоследовательности $\{y_{m_k}\}$, что

$$(*) \qquad |x_0^*(y_{m_k} - y_0)| > \varepsilon, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

Применяя условие (II) к последовательности $\{y_{m_k}\}$, мы получим такую точку $y_0' \in \mathfrak{X}$, каждая слабая окрестность которой содержит по меньшей мере одно y_{m_k}. Точно так же, как выше, мы покажем, что $y_0' \in \mathfrak{X}_0$ и что

$$(**) \qquad x^*y_0' = \lim_{k\to\infty} x^*y_{m_k}, \quad x^* \in H.$$

Следовательно, $x^*y_0 = x^*y_0'$ для всех $x^* \in H$, а так как множество H тотально на $\mathfrak{X}_0$, то $y_0 = y_0'$. Но это обстоятельство и равенство (**) противоречат неравенству (*). Мы доказали, что произвольная последовательность $\{x_n\}$ элементов из A содержит слабо сходящуюся подпоследовательность $\{y_m\}$, т. е. что множество A слабо компактно.

Доказательство того, что из условия (I) *вытекает* (III). Пусть $\overline{A}$ обозначает замыкание множества A в $\mathfrak{X}^*$-топологии пространства $\mathfrak{X}$; мы должны показать, что из условия (I) вытекает $\mathfrak{X}^*$-бикомпактность множества $\overline{A}$. Так как естественное вложение $\varkappa$: $\mathfrak{X} \to \mathfrak{X}^{**}$ является гомеоморфизмом между $\mathfrak{X}$ и $\varkappa(\mathfrak{X})$ в их $\mathfrak{X}^*$-топологиях, то множество $\varkappa(\overline{A}) = \overline{\varkappa(A)} \cap \varkappa(\mathfrak{X})$ и, кроме того, множество $\overline{A}$ в том и только в том случае $\mathfrak{X}^*$-бикомпактно, если

$\varkappa(\bar{A})$ $\mathfrak{X}^*$-бикомпактно. Так как $\bar{A}$ ограничено по следствию 4.3, то множество $\varkappa(\bar{A})$ в том и только в том случае $\mathfrak{X}^*$-бикомпактно, если $\varkappa(\bar{A})$ является $\mathfrak{X}^*$-замкнутым подмножеством пространства $\mathfrak{X}^{**}$. Так как $\varkappa(\bar{A}) \subseteq \overline{\varkappa(A)}$, где черта означает замыкание в $\mathfrak{X}^*$-топологии, то достаточно показать, что $\overline{\varkappa(A)} \subseteq \varkappa(\bar{A})$; но это, в виду равенства $\varkappa(\bar{A}) = \overline{\varkappa(A)} \cap \varkappa(\mathfrak{X})$, будет верно, если мы докажем, что $\overline{\varkappa(A)} \subseteq \varkappa(\mathfrak{X})$. Пусть $x^{**} \in \mathfrak{X}^{**}$ — некоторый элемент из $\mathfrak{X}^*$-замыкания множества $\varkappa(A)$; мы покажем, что $x^{**} \in \varkappa(\mathfrak{X})$. Это значит, что мы должны доказать существование такого $x \in \mathfrak{X}$, что $x^{**}x^* = x^*x$, $x^* \in \mathfrak{X}^*$. Сначала, однако, мы докажем более слабое утверждение: если $\{x_1^*, \ldots, x_n^*\}$ есть произвольное конечное подмножество пространства $\mathfrak{X}^*$, то найдется такое $z \in \bar{A}$, что $x^{**}x_i^* = x_i^* z$, $i = 1, \ldots, n$. Для того чтобы убедиться в этом, предположим, что m — произвольное натуральное число; так как x^{**} принадлежит $\mathfrak{X}^*$-замыканию множества $\varkappa(A)$, то найдется такой элемент $z_m \in A$, что

$$|x_i^*(z_m) - x^{**}(x_i^*)| < \frac{1}{m}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Так как множество A слабо компактно, то некоторая подпоследовательность последовательности $\{z_m\}$ будет слабо сходиться к некоторому элементу z, принадлежащему, конечно, $\bar{A}$, так как слабые пределы последовательностей элементов из A содержатся в $\bar{A}$ и, следовательно, $x_i^*(z) = x^{**}(x_i^*)$, $i = 1, \ldots, n$.

Остается доказать, что $x^{**} \in \varkappa(\mathfrak{X})$. Ввиду следствия 3.11, это верно в том и только в том случае, если подпространство $\mathfrak{Q} = \{x^* \in \mathfrak{X}^* \mid x^{**}x^* = 0\} \subset \mathfrak{X}^*$ является $\mathfrak{X}$-замкнутым. Если S^* — замкнутая единичная сфера пространства $\mathfrak{X}^*$, то, по следствию 5.8, $\mathfrak{Q}$ будет $\mathfrak{X}$-замкнуто, если пересечение $\mathfrak{Q} \cap S^*$ $\mathfrak{X}$-замкнуто. Мы должны, следовательно, показать, что если y_0^* принадлежит $\mathfrak{X}$-замыканию множества $\mathfrak{Q} \cap S^*$, то $y_0^* \in \mathfrak{Q} \cap S^*$. Для того чтобы сделать это, мы возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и построим три последовательности $\{z_n\} \subseteq \bar{A}$, $\{x_n\} \subseteq A$ и $\{y_n^*\} \subseteq \mathfrak{Q} \cap S^*$ следующим образом: согласно замечанию, сделанному в предыдущем абзаце, существует такое $z_1 \in \bar{A}$, что $y_0^*(z_1) = x^{**}(y_0^*)$. Так как z_1 принадлежит $\mathfrak{X}^*$-замыканию множества A, то найдется такое $x_1 \in A$, что $|y_0^*(x_1) - y_0^*(z_1)| < \varepsilon/4$. Так как y_0^* принадлежит $\mathfrak{X}$-замыканию множества $\mathfrak{Q} \cap S^*$, то найдется такое $y_1^* \in \mathfrak{Q} \cap S^*$, что $|y_1^*(x_1) - y_0^*(x_1)| < \varepsilon/4$.

По индукции, если уже определены элементы с индексами, меньшими, чем n, мы выберем $z_n \in \bar{A}$, $x_n \in A$ и $y_n^* \in \mathfrak{Q} \cap S^*$ таким образом, что

$$\text{(a)} \quad y_m^*(z_n) = x^{**}(y_m^*) = 0, \qquad m = 0, \ldots, n-1;$$

$$\text{(b)} \quad |y_m^*(x_n) - y_m^*(z_n)| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad m = 0, \ldots, n-1;$$

$$\text{(c)} \quad |y_n^*(x_i) - y_0^*(x_i)| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Так мы построим три последовательности. По построению их мы имеем

(d) $$|y_m^*| \leqslant 1, \quad m = 1, 2, \dots;$$

(e) $$y_m^*(z_n) = 0, \quad m = 1, 2, \dots, n-1.$$

Полагая в соотношениях (a) и (b) $m = 0$ и комбинируя их с (c), мы получим

(f) $$|x^{**}(y_0^*) - y_n^*(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Так как $\{x_n\} \subseteq A$ и A слабо компактно, существует подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$, слабо сходящаяся к некоторому элементу $x \in \overline{A}$. Для того чтобы не менять обозначений, мы предположим (не ограничивая этим общности), что вся последовательность $\{x_n\}$ слабо сходится в x. Но из (b) и (e) вытекает, что

$$|y_m^*(x_n)| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad m = 1, \dots, n-1,$$

и, следовательно,

(g) $$|y_m^*(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}, \quad m = 1, 2, \dots .$$

По следствию 3.14, существует такая выпуклая комбинация элементов x_i $w = \sum_{i=1}^{N} a_i x_i$, где $a_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{N} a_i = 1$, что $|x - w| < \varepsilon/4$.

В неравенстве (f) положим $n = N$, так что

(h) $$|x^{**}(y_0^*) - y_N^*(w)| \leqslant \sum_{i=1}^{N} a_i |x^{**}(y_0^*) - y_N^*(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Очевидно,

$$|x^{**}(y_0^*)| \leqslant |x^{**}(y_0^*) - y_N^*(w)| + |y_N^*(w) - y_N^*(x)| + |y_N^*(x)|.$$

Но первое слагаемое в силу неравенства (h) не превосходит $\varepsilon/2$, второе в силу неравенства (d) и того, что $|w - x| < \varepsilon/4$, меньше чем $\varepsilon/4$, последнее слагаемое ввиду неравенства (g) не превосходит $\varepsilon/4$. Так как ε произвольно, отсюда следует, что

$$x^{**}(y_0^*) = 0.$$

Следовательно, $y_0^* \in \mathfrak{Q}$; а так как S^* $\mathfrak{X}$-замкнуто, то $y_0^* \in \mathfrak{Q} \cap S^*$. Отсюда следует, что $\mathfrak{Q}$ $\mathfrak{X}$-замкнуто, так что $x^{**} \in \varkappa(\mathfrak{X})$ и, теорема доказана.

2. Теорема (*Шмульян*). *Для того чтобы выпуклое подмножество K B-пространства $\mathfrak{X}$ было слабо бикомпактным, необходимо и достаточно, чтобы каждая убывающая последовательность непустых замкнутых выпуклых подмножеств из K имела непустое пересечение.*

Доказательство. Необходимость этого условия непосредственно вытекает из леммы I.5.6. Для того чтобы доказать его достаточность, заметим, что из этого условия вытекает ограниченность множества K. Действительно, в противном случае существует такое $x_1^* \in \mathfrak{X}^*$, что $x_1^*(K)$ является неограниченным выпуклым множеством скаляров и, следовательно, существует такое $x^* \in \mathfrak{X}^*$, что множество $x^*(K)$ содержит сегмент $[N, \infty)$. Если $K_n = \{x \in K \mid x^*x \geqslant N+n\}$, то последовательность множеств $\{K_n\}$ не удовлетворяет условию теоремы. Далее, из этого условия вытекает, что K замкнуто. Действительно, пусть $x_n \to x_0$, $x_n \in K$, и пусть $K_n = K \cap \overline{\text{co}}\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$. Ясно, что $\{x_0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\text{co}}\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$, так что из условия вытекает, что $x_0 \in K$.

Для того чтобы доказать, что K слабо бикомпактно, возьмем произвольную последовательность $\{x_n\}$ и так же, как в первой части доказательства предыдущей теоремы, построим такую подпоследовательность $\{y_m\}$ последовательности $\{x_n\}$, что $\lim_{m\to\infty} x^*y_m$ существует для каждого x^* из множества H, определенного в доказательстве теоремы 1. Положим $K_m = \overline{\text{co}}\{y_m, y_{m+1}, \ldots\}$, и пусть y_0—произвольная точка из $\bigcap_{m=1}^{\infty} K_m$. Для каждого $x^* \in \mathfrak{X}^*$ мы имеем

$$x^*y_0 \in \bigcap_{m=1}^{\infty} x^*(K_m).$$

Отсюда без труда получаем, что

$$x^*y_0 = \lim_{m\to\infty} x^*y_m, \quad x^* \in H.$$

Для того чтобы доказать, что это верно для всех $x^* \in \mathfrak{X}^*$, мы поступим, как в первой части доказательства теоремы 1, заменяя условие (II) этой теоремы нашим новым условием. Так мы найдем, что K слабо компактно, но поскольку K есть замкнутое выпуклое множество, то в силу 3.13 оно $\mathfrak{X}^*$-замкнуто и на основании предыдущей теоремы $\mathfrak{X}^*$-бикомпактно, ч. т. д.

3. Теорема. *Слабая топология слабо бикомпактного подмножества A сепарабельного B-пространства порождается некоторой метрикой.*

Доказательство. Предположим, что $\mathfrak{X} = \overline{\text{sp}}\{x_1, x_2, \ldots\}$. Так же как в доказательстве теоремы 1, построим множество $H \subseteq \mathfrak{X}^*$. Пусть $H = \{x_n^*\}$. Метрика

$$\varrho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n^*(x-y)|}{1+|x_n^*(x-y)|}$$

определяет некоторую топологию множества A, более слабую, чем его $\mathfrak{X}^*$-топология. По лемме I.5.8, эти две топологии множества A тождественны, ч. т. д.

Необходимо отметить, что аналог теоремы 3 для $\mathfrak{X}$-топологии пространства $\mathfrak{X}^*$ тривиальным образом вытекает из следствия 4.3 и теоремы 5.1. Теорема, аналогичная теореме 1 для $\mathfrak{X}$-топологии пространства $\mathfrak{X}^*$, неверна. В то время как из следствия 4.3 непосредственно вытекает, что $\mathfrak{X}$-компактное подмножество пространства $\mathfrak{X}^*$ имеет $\mathfrak{X}$-бикомпактное $\mathfrak{X}$-замыкание, подмножество пространства $\mathfrak{X}^*$ может быть $\mathfrak{X}$-бикомпактным, не будучи $\mathfrak{X}$-компактным. Способ построения соответствующего примера дается в упражнении 7.32.

В качестве приложения теоремы 1 мы докажем следующее предложение.

4. Теорема. (*Крейн — Шмульян*). *Замкнутая выпуклая оболочка слабо бикомпактного подмножества B-пространства сама слабо бикомпактна.*

Доказательство. Пусть A — слабо бикомпактное подмножество B-пространства $\mathfrak{X}$. Так как, по теореме 3.13, множество $\overline{\text{co}}(A)$ $\mathfrak{X}^*$-замкнуто, то на основании теоремы 1 достаточно показать, что множество $\text{co}(A)$ слабо компактно. Пусть $\{p_n\}$ — некоторая последовательность точек из множества $\text{co}(A)$; тогда каждое p_n есть выпуклая комбинация конечного множества B_n точек из A. Положим $B_0 = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_n$, и пусть $\mathfrak{X}_0 = \overline{\text{sp}}(B_0)$; по лемме II.1.5, $\mathfrak{X}_0$ сепарабельно. Положим $A_0 = A\mathfrak{X}_0$; по теореме 3.13 и лемме I.5.7 (a), множество A_0 слабо бикомпактно. Так как $\{p_n\} \subseteq \text{co}(A_0)$, наша теорема будет доказана, если мы покажем, что множество $\overline{\text{co}}(A_0)$ слабо бикомпактно.

По теореме 1, A_0 слабо компактно; по теореме II.3.20, существует такая константа K, что $|A_0| \leqslant K$. Далее, множество A_0 в его относительной $\mathfrak{X}^*$-топологии является бикомпактным хаусдорфовым пространством. Обозначим через $C(A_0)$ пространство определенных на A_0 непрерывных функций, а через $C^*(A_0)$ — пространство, сопряженное к $C(A_0)$; по теореме IV.6.3 $C^*(A_0)$ изометрически изоморфно пространству всех определенных на A_0 регулярных мер. Через S^* обозначим замкнутую единичную сферу пространства $C^*(A_0)$.

Определим линейное отображение ψ: $C^*(A_0) \to \mathfrak{X}$ равенством

$$\psi(f^*) = \int_{A_0} a\mu_{f^*}(da),$$

где $f^* \in C^*(A_0)$ и μ_{f^*} есть соответствующая f^* регулярная мера. Так как множество A_0 сепарабельно и так как $|a| \leqslant K$, если $a \in A_0$, то этот интеграл имеет смысл (см. III.6.9). Обозначим через rx^*, где $x^* \in \mathfrak{X}^*$, сужение линейного функционала x^* на A_0. Тогда, по лемме 3.8, $rx^* \in C(A_0)$. Кроме того, из определения ψ, ясно, что $x^*\psi f^* = f^* r x^*$, если $f^* \in C^*(A_0)$ и $x^* \in \mathfrak{X}^*$. Следовательно, если J есть произвольное конечное подмножество пространства $\mathfrak{X}^*$, то ψ отображает $C(A_0)$-окрестность $N(f^*, rJ, \varepsilon)$ элемента f^* в $\mathfrak{X}^*$-окрестность $N(\psi f^*, J, \varepsilon)$ элемента ψf^* (см. определение 3.1). Таким образом, отображение $\psi: C^*(A_0) \to X$ непрерывно, если $C^*(A_0)$ рассматривать в его $C(A_0)$-топологии, а $\mathfrak{X}$ — в $\mathfrak{X}^*$-топологии. По лемме 1.5, множество $\psi(S^*)$ выпукло, а по теореме 4.2 и лемме I.5.7(b) это множество $\mathfrak{X}^*$-бикомпактно. Если мы положим $f_a^*(g) = g(a)$ для $a \in A_0$ и $g \in C(A_0)$, то легко видеть, что $\psi(f_a^*) = a$ и, следовательно, $\psi(S^*) \supseteq A_0$. Так как множество $\psi(S^*)$, по лемме I.5.7 (c) и лемме 3.4, замкнуто в метрической топологии, то $\overline{\mathrm{co}}(A_0) \subseteq \psi(S^*)$. По теореме 3.13 и лемме I.5.7(a) множество $\overline{\mathrm{co}}(A_0)$ слабо бикомпактно, ч. т. д.

Необходимо отметить, что аналог теоремы 4 для $\mathfrak{X}$-бикомпактных подмножеств пространства $\mathfrak{X}^*$ тривиальным образом вытекает из следствия 4.3.

7. Упражнения

1. Пусть $\mathfrak{X}$ — линейное векторное пространство. Показать, что $\mathfrak{X}^+$ является тотальным пространством линейных функционалов на $\mathfrak{X}$.

2. Если $\mathfrak{X}$ есть бесконечномерное B-пространство, то $\mathfrak{X}^+ \neq \mathfrak{X}^*$.

3. Пусть $\mathfrak{X}$ — линейное топологическое пространство. Тогда, для того чтобы на $\mathfrak{X}$ существовал ненулевой непрерывный линейный функционал, необходимо и достаточно, чтобы нулевая точка была внутренней точкой некоторого выпуклого собственного подмножества пространства $\mathfrak{X}$.

4. Если выпуклое множество линейного топологического пространства имеет внутреннюю точку, то оно имеет ту же самую внутренность, что и его замыкание.

5. Пусть Γ — тотальное множество определенных на пространстве $\mathfrak{X}$ линейных функционалов. Показать, что если $\mathfrak{X}$ содержит непустое Γ-открытое ограниченное (определение II.1.7) множество, то $\mathfrak{X}$ конечномерно.

6. Пусть $\mathfrak{X}$ является B-пространством, а $\mathfrak{X}_1$ — его подпространство. Показать, что $\mathfrak{X}_1^*$-топология подпространства $\mathfrak{X}_1$ совпадает с его относительной $\mathfrak{X}^*$-топологией.

7. Пусть $\mathfrak{X}$ — линейное пространство, а Γ — тотальное подпространство в $\mathfrak{X}^+$. Показать, что для того, чтобы множество $A \subseteq \mathfrak{X}$ было Γ-ограниченным, необходимо и достаточно, чтобы $f(A)$ для каждого $f \in \Gamma$ было ограниченным множеством скаляров.

8. Пусть $\mathfrak{X}$ является B-пространством. Показать, что подмножество пространства $\mathfrak{X}$ в том и только в том случае $\mathfrak{X}^*$-ограничено, если оно метрически ограничено, и что подмножество пространства

$\mathfrak{X}^*$ тогда и только тогда $\mathfrak{X}$-ограничено, если оно метрически ограничено.

9. Показать, что для того, чтобы слабая и метрическая топологии единичной сферы нормированного пространства совпадали, необходимо и достаточно, чтобы пространство было конечномерным.

10. Пусть $\mathfrak{X}$ — линейное пространство, а Γ_1 и Γ_2 — два тотальных подпространства в $\mathfrak{X}^+$. Показать, что если Γ_1 и Γ_2 определяют на $\mathfrak{X}$ одну и ту же топологию, то $\Gamma_1=\Gamma_2$.

11. Доказать теорему II.3.28 и следствия II.3.29 и II.3.24, используя теоремы 4.8 и 6.1.

12. Показать, что B-пространство сепарабельно в том и только в том случае, если оно изометрически изоморфно замкнутому подпространству пространства $C(S)$, где S есть бикомпактное метрическое пространство.

13. Показать, что существует непрерывное отображение канторова совершенного множества на произвольное бикомпактное метрическое пространство S. (Указание: построить покрытие пространства $S=\bigcup_{i=1}^{2n} C_i^n$ последовательностью замкнутых множеств C_i^n таких, что $C_i^n=C_{2i}^{n+1}\bigcup C_{2i-1}^{n+1}$ и что диаметр множества $C_j^n\to 0$ при $n\to\infty$.)

14. Показать, что B-пространство сепарабельно в том и только в том случае, если оно изометрически изоморфно замкнутому подпространству пространства $C(P)$, где P есть канторово совершенное множество.

15. Если $\mathfrak{X}$ — сепарабельное линейное топологическое пространство и A — $\mathfrak{X}$-бикомпактное подмножество в $\mathfrak{X}^*$, то $\mathfrak{X}$-топология множества A порождается некоторой метрикой.

16. Если $\mathfrak{X}$ есть сепарабельное B-пространство, то выпуклое подмножество A пространства $\mathfrak{X}^*$ в том и только в том случае $\mathfrak{X}$-замкнуто, если из условий $x_n^*\in A$ и $\lim_{n\to\infty} x_n^*(x)=x^*(x)$, $x\in\mathfrak{X}$, вытекает, что $x^*\in A$.

17. Если S — нормальное пространство и $C(S)$ сепарабельно, то S — бикомпактное метрическое пространство, и обратно.

18. Нормальное пространство S гомеоморфно некоторому подмножеству единичной сферы сопряженного к $C(S)$ пространства с $C(S)$-топологией.

19. Каждое нормальное пространство S гомеоморфно некоторому всюду плотному подмножеству S_1 бикомпактного хаусдорфова пространства C_1, такому, что каждая ограниченная непрерывная функция, определенная на S_1, имеет единственное непрерывное продолжение на C_1.

20. Если $\mathfrak{X}$ есть B-пространство, то для того, чтобы выпуклое множество $K\subseteq\mathfrak{X}$ было слабо замкнутым, необходимо и достаточно,

чтобы его пересечение с каждым ограниченным слабо замкнутым множеством было слабо замкнутым.

21. Если S есть бикомпактное хаусдорфово пространство, а $\{f_n\}$ — последовательность определенных на S непрерывных функций, таких, что $\sup|f_n| < \infty$ и $f_n(s) \to f(s)$ для каждого $s \in S$, причем функция f непрерывна, то некоторая последовательность выпуклых комбинаций функций f_n равномерно сходится к f.

22. Пусть $\mathfrak{X}$ является B-пространством и $A \subseteq \mathfrak{X}$. Если каждое сепарабельное подпространство пространства $\mathfrak{X}$ пересекает A по слабо бикомпактному множеству, то слабое замыкание множества A слабо бикомпактно.

23. Показать, что каждая окрестность N нуля линейного топологического пространства содержит такую окрестность M, что $\alpha M \subseteq M$ при $|\alpha| \leqslant 1$.

24. Показать, что если линейное пространство $\mathfrak{X}$ конечномерно, $K \subseteq \mathfrak{X}$ выпукло и $p \notin K$, то некоторый определенный на $\mathfrak{X}$ функционал разделяет K и p.

25. Построить выпуклое множество K и точку $p \notin K$ в некотором линейном пространстве такие, которые не разделяются никаким ненулевым функционалом (Указание: пусть $\mathfrak{X}$ — пространство со счетным базисом Гамеля $\{x_n\}$; рассмотреть множество K векторов вида $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$, где $a_n > 0$.)

26. Построить выпуклое множество K, имеющее C-внутреннюю точку (определение 1.6) и точку $p \notin K$, принадлежащие некоторому B-пространству и не разделяемые никаким ненулевым непрерывным функционалом.

27. Каждое бесконечномерное B-пространство является суммой двух непересекающихся всюду плотных выпуклых подмножеств.

28. Построить два замкнутых подмножества A_1 и A_2 некоторой топологической группы такие, что множество $A_1 + A_2$ не замкнуто.

29. Построить два замкнутых выпуклых множества A_1, A_2 линейного топологического пространства такие, что $\mathrm{co}(A_1 \cup A_2) \neq \neq \overline{\mathrm{co}}(A_1 \cup A_2)$, и два множества B_1, B_2 такие, что $\overline{\mathrm{co}}(B_1 + B_2) \neq \overline{\mathrm{co}}(B_1) + + \overline{\mathrm{co}}(B_2)$.

30. Линейное гомеоморфное отображение локально выпуклого пространства на некоторое нормированное пространство существует в том и только в том случае, если некоторое открытое множество этого локально выпуклого пространства ограничено.

31. Пусть K — выпуклое подмножество линейного топологического пространства и нулевая точка является C-внутренней его точкой; показать, что для того, чтобы опорная функция множества K была непрерывной, необходимо и достаточно, чтобы нулевая точка была также внутренней точкой множества K и в топологическом смысле.

32. Показать, что бикомпактное пространство может содержать последовательность, не имеющую сходящейся подпоследовательности.

33. Показать, что если подмножество пространства $\mathfrak{X}^*$, сопряженного к B-пространству $\mathfrak{X}$, является $\mathfrak{X}$-компактным, то его $\mathfrak{X}$-замыкание $\mathfrak{X}$-бикомпактно, но что обратное не всегда верно.

34. Если $\mathfrak{X}$ есть линейное пространство, а Γ — тотальное подпространство в $\mathfrak{X}^+$, то для того, чтобы Γ-топология пространства $\mathfrak{X}$ порождалась некоторой метрикой, необходимо и достаточно, чтобы Γ имело счетный базис Гамеля.

35. Если слабая топология единичной сферы B-пространства порождается некоторой метрической топологией, то $\mathfrak{X}^*$ содержит счетное тотальное множество.

36. Если пространство $\mathfrak{X}$ рефлексивно и $\mathfrak{X}^*$ содержит счетное тотальное множество, то $\mathfrak{X}^*$ сепарабельно.

37. Пусть $S=\{x \,|\, |x|<1\}$ — единичная сфера F-пространства $L_p(0, 1)$, где $0<p<1$. Норма в этом пространстве определяется равенством $|x|=\int_0^1 |x(t)|^p dt$. Показать, что $\operatorname{co}(S)$ совпадает со всем пространством $L_p(0, 1)$. Показать, что на $L_p(0, 1)$ не существует ненулевого непрерывного линейного функционала.

38. (Дж. Нейман.) Пусть A — подмножество пространства l_2, состоящее из векторов $\{x_{mn} \,|\, 1 \leqslant m<n<\infty\}$, где m-я координата элемента x_{mn} равна единице, n-я координата его равна m, а все остальные — нулю. Показать, что нулевая точка принадлежит слабому замыканию множества A, но что A не содержит последовательности элементов, слабо сходящейся к нулю.

39. Показать, что если точка p из l_2 принадлежит слабому замыканию ограниченного множества $A \subseteq l_2$, то p служит слабым пределом некоторой последовательности элементов множества A.

40. Пусть $\mathfrak{Z}$ является всюду плотным линейным многообразием B-пространства $\mathfrak{X}$. Показать, что $\mathfrak{Z}^*$ и $\mathfrak{X}^*$ изометрически изоморфны, но что в тех случаях, когда $\mathfrak{X} \neq \mathfrak{Z}$, этот изометрический изоморфизм между ними не является гомеоморфизмом, если $\mathfrak{Z}^*$ рассматривать в $\mathfrak{Z}$-топологии, а $\mathfrak{X}^*$ — в $\mathfrak{X}$-топологии.

41. Пусть $\mathfrak{X}$ — локально выпуклое линейное топологическое пространство, а $\mathfrak{G}$ — линейное подпространство в $\mathfrak{X}^*$. Тогда для того, чтобы $\mathfrak{G}$ было $\mathfrak{X}$-всюду плотным в $\mathfrak{X}^*$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{G}$ было тотальным множеством функционалов на $\mathfrak{X}$.

42. Пусть $\mathfrak{X}$ — локально выпуклое линейное топологическое пространство, а $\mathfrak{X}_1$ — его подпространство. Пусть $x_1^* \in \mathfrak{X}_1^*$. Тогда существует такой элемент $x^* \in \mathfrak{X}^*$, что $x^*(x_1)=x_1^*(x_1)$ для $x_1 \in \mathfrak{X}_1$.

43. Пусть $\{x_n\}$ — ограниченная последовательность точек рефлексивного B-пространства $\mathfrak{X}$ и $K_n=\overline{\operatorname{co}}\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$. Тогда, для того чтобы x_n слабо стремилось к x_0, необходимо и достаточно, чтобы

$\{x_0\}=\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$. Показать, что без предположения о рефлексивности эта теорема не верна.

44. Пусть $\mathfrak{X}$ — комплексное локально выпуклое линейное топологическое пространство. Показать, что слабая топология пространства $\mathfrak{X}$ будет одна и та же, независимо от того, будем ли мы рассматривать его как комплексное пространство или как векторное пространство над полем вещественных чисел.

8. Крайние точки

1. Определение. Пусть K есть подмножество вещественного или комплексного линейного векторного пространства $\mathfrak{X}$. Непустое подмножество $A\subseteq K$ называется *крайним подмножеством* K, если выпуклая комбинация $ak_1+(1-a)k_2$, $0<a<1$, двух точек множества K принадлежит A лишь в том случае, если обе точки k_1 и k_2 содержатся в A. Крайнее подмножество множества K, состоящее из одной точки, называется *крайней точкой* множества K.

Так, например, в трехмерном евклидовом пространстве поверхность замкнутой сферы является ее крайним подмножеством, а каждая точка поверхности является крайней точкой. Вершины, ребра и грани куба образуют его крайнее подмножество, но только восемь вершин будут крайними точками куба, остальные точки на ребрах и гранях не будут ни крайними, ни внутренними точками. Выпуклое множество может и совсем не иметь крайних точек, как в случае открытой сферы.

2. Лемма. *Непустое бикомпактное множество локально выпуклого линейного топологического пространства имеет крайние точки.*

Доказательство. Пусть K — бикомпактное подмножество локально выпуклого линейного топологического пространства $\mathfrak{X}$. Обозначим через $\mathcal{A}$ непустое семейство замкнутых крайних подмножеств множества K. Упорядочим $\mathcal{A}$ по включению. Нетрудно видеть, что если $\mathcal{A}_1$ есть линейно упорядоченное подсемейство из $\mathcal{A}$, то непустое множество $\bigcap\mathcal{A}_1$ будет замкнутым крайним подмножеством K, являющимся минорантой для $\mathcal{A}_1$. По лемме Цорна, $\mathcal{A}$ содержит минимальный элемент A_0. Предположим, что в A_0 найдутся две несовпадающие точки p и q. Тогда, по следствию 2.13, существует такой функционал $x^*\in\mathfrak{X}^*$, что $\operatorname{Re}x^*(p)\neq\operatorname{Re}x^*(q)$. Отсюда следует, что множество $A_1=\{x\,|\,x\in A_0,\ \operatorname{Re}x^*(x)=\inf_{y\in A_0}\operatorname{Re}x^*(y)\}$ является собственным подмножеством A_0. С другой стороны, если k_1 и k_2—такие точки из K, что $ak_1+(1-a)k_2\in A_1$ для некоторого $0<a<1$, то, ввиду того, что A_0 — крайнее множество, $k_1, k_2\in A_0$. По определению A_1, точки k_1 и k_2 принадлежат A_1. Следовательно, A_1 является собственным замкнутым крайним подмножеством множества A_0. Из этого противоречия следует, что множество A_0 содержит только одну точку, которая, следовательно, и будет крайней точкой множества K, ч. т. д.

3. Лемма. *Если K есть подмножество линейного пространства, A_1 — крайнее подмножество K и A_2 — крайнее подмножество A_1, то A_2 есть крайнее подмножество множества K.*

Доказательство леммы элементарно и предоставляется читателю.

4. Теорема (*Крейн — Мильман*). *Если K есть бикомпактное подмножество локально выпуклого линейного топологического пространства $\mathfrak{X}$ и E — совокупность его крайних точек, то $\overline{\text{co}}(E) \supseteq K$. Следовательно, $\overline{\text{co}}(E) = \overline{\text{co}}(K)$ и, если K выпукло, то $\overline{\text{co}}(E) = K$.*

Доказательство. Пусть $k \in K$ и $k \notin \overline{\text{co}}(E)$. Тогда, по теореме 2.10, мы можем найти такое $x^* \in \mathfrak{X}^*$ и такие вещественные константы c и $\varepsilon > 0$, что $\operatorname{Re} x^*(k) \leqslant c$, $\operatorname{Re} x^*(\overline{\text{co}}(E)) \geqslant c + \varepsilon$. Рассмотрим множество $K_1 = \{x \mid x \in K, \operatorname{Re} x^*(x) = \inf\limits_{y \in K} \operatorname{Re} x^*(y)\}$. Тогда K_1 будет замкнутым крайним подмножеством в K и $K_1 E = \varnothing$. По лемме 3, K_1 не имеет крайних точек, что противоречит лемме 2. Этим доказано первое утверждение теоремы 4; второе же тривиальным образом вытекает из первого.

5. Лемма. *Пусть Q — бикомпактное множество локально выпуклого линейного топологического пространства $\mathfrak{X}$, замкнутая выпуклая оболочка которого бикомпактна. Тогда крайними точками множества $\overline{\text{co}}(Q)$ могут быть лишь точки, принадлежащие Q.*

Доказательство. Пусть p будет не принадлежащей Q крайней точкой множества $\overline{\text{co}}(Q)$. Так как Q замкнуто, мы можем найти такую окрестность U_0 нулевой точки пространства $\mathfrak{X}$, что $(p + U_0) \cap Q = \varnothing$, и такую выпуклую окрестность U той же точки, что $\overline{U - U} \subseteq U_0$. Но тогда $(p + U) \cap (Q + U) = \varnothing$, так что $p \notin \overline{Q + U}$. Семейство множеств $\{q + U\}$, $q \in Q$, является открытым покрытием Q; пусть $\{q_i + U\}$, $i = 1, \ldots, n$, — некоторое его конечное подпокрытие. Положим $K_i = \overline{\text{co}}((\overline{q_i + U}) \cap Q) \subseteq \overline{q_i + U}$. Множество K_i — замкнуто и, следовательно, является бикомпактным подмножеством в $\overline{\text{co}}(Q)$. Поэтому из леммы 2.5, с помощью несложной индукции, получаем

$$\overline{\text{co}}\,(Q) = \overline{\text{co}}\,(K_1 \cup \ldots \cup K_n) = \text{co}\,(K_1 \cup \ldots \cup K_n).$$

Отсюда без труда получаем, что p имеет вид $p = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i k_i$, $a_i \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 1$, $k_i \in K_i$, а так как p — крайняя точка, то $k_i = p$, если $a_i > 0$. Следовательно, $p\in\bigcup_{i=1}^{n}K_i\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}(\overline{q_i+U})\subseteq\overline{Q+U}$. Это противоречие и доказывает лемму, ч. т. д.

6. Лемма. *Пусть $\mathfrak{X}$ — замкнутое линейное многообразие в B-пространстве $C(Q)$ всех вещественных (или комплексных) непрерывных функций, определенных на бикомпактном хаусдорфовом пространстве Q. Для каждого $q\in Q$ определим элемент x_q^* из $\mathfrak{X}^*$ равенством*

$$x_q^*f=f(q),\quad f\in\mathfrak{X}.$$

Тогда каждая крайняя точка замкнутой единичной сферы S^* пространства $\mathfrak{X}^*$ имеет вид αx_q^*, где $|\alpha|=1$ и $q\in Q$. Если $\mathfrak{X}=C(Q)$, то справедливо и обратное, т. е. каждый элемент вида αx_q^*, где $|\alpha|=1$ и $q\in Q$, является крайней точкой множества S^*.

Доказательство. Обозначим через A множество всех точек пространства $\mathfrak{X}^*$, имеющих вид αx_q^*, где $|\alpha|=1$ и $q\in Q$, так что $A\subseteq S^*$. Пространство $\mathfrak{X}^*$ мы будем рассматривать в его $\mathfrak{X}$-топологии; так как S^* выпукло и $\mathfrak{X}$-замкнуто, по теореме V.2.4, то $\mathfrak{X}$-замыкание $\overline{\operatorname{co}(A)}=\overline{\operatorname{co}}(A)\subseteq S^*$. Если $x^*\notin\overline{\operatorname{co}}(A)$, то, по следствию 2.12 и теореме 3.9, существуют такое $x\in\mathfrak{X}$ и такие вещественные константы c и $\varepsilon>0$, что

$$\operatorname{Re}x^*(x)\geqslant c;\quad \operatorname{Re}\alpha x(q)\leqslant c-\varepsilon,\quad q\in Q,\quad |\alpha|=1.$$

Следовательно, $|x|\leqslant c-\varepsilon$, так что $|x^*|>1$. Таким образом, $\overline{\operatorname{co}}(A)\supseteq S^*$, и, значит, $\overline{\operatorname{co}}(A)=S^*$. Из леммы 5 и теоремы 4.2 следует, что каждая крайняя точка множества S^* принадлежит A.

Обратно, пусть $\mathfrak{X}=C(Q)$ и точка $q\in Q$ такова, что $x_q^*=ay^*+(1-a)z^*$, где $0<a<1$ и $y^*,\ z^*\in S^*$. Мы покажем, что $y^*=z^*=x_q^*$. Пусть $x_0\in C(Q)$, $|x_0|\leqslant 1$ и $x_0(p)=0$, если p принадлежит некоторой окрестности N точки q. По теореме I.5.3, найдется такое $y\in C(Q)$, что $|y|\leqslant 1$, $y(q)=1$ и $y(p)=0$, если $p\notin N$. Тогда $ay^*(y)+(1-a)z^*(y)=x_q^*(y)=1$ и $|y^*(y)|\leqslant 1$, $|z^*(y)|\leqslant 1$. Следовательно, $y^*(y)=z^*(y)=1$. Точно таким же образом можно показать, что $y^*(x_0+y)=z^*(x_0+y)=1$. Следовательно, $y^*(x_0)=z^*(x_0)=0$. Пусть, далее, $x_1\in C(Q)$, $|x_1|\leqslant 1$ и $x_1(q)=0$. Тогда для каждого натурального n найдется такая окрестность N_n точки q, что $|x_1(p)|<1/n$, если $p\in N_n$. Пусть M_n — такая окрестность точки q, что $\overline{M}_n\subseteq N_n$; по теореме I.5.3, существует $g_n\in C(Q)$ такая, что $|g_n|\leqslant 1/n$, $g_n(p)=0$, если $p\notin N_n$, и $g_n(p)=x_1(p)$, если $p\in M_n$. Тогда $x_1-g_n\to x_1$, $|x_1-g_n|\leqslant 1$ и x_1-g_n обращается в нуль на множестве M_n. Отсюда вытекает, что $y^*(x_1)=z^*(x_1)=0$. Если $x\in C(Q)$ таково, что $x(q)=0$, то $|x/n|\leqslant 1$ для некоторого достаточно большого натурального n, так что $y^*(x)=z^*(x)=0$. Теперь с помощью леммы 3.10 можно показать, что существуют такие скаляры α и β, что $y^*=\alpha x_q^*$, $z^*=\beta x_q^*$. Так как y^*, $z^*\in S^*$, то $|\alpha|\leqslant 1$, $|\beta|\leqslant 1$. Так как $x_q^*=[a\alpha+(1-a)\beta]x_q^*$, то $\alpha=\beta=1$. Отсюда следует, что x_q^* есть крайняя точка множества S^*; аналогичным образом можно убедиться в том, что точка αx_q^*, где $|\alpha|=1$, также является крайней, ч. т. д.

7. Лемма. *Если Q есть бикомпактное хаусдорфово пространство, а $C(Q)$ — B-пространство всех определенных на Q вещественных или комплексных непрерывных функций, то отображение $\lambda: q \to x_q^*$ пространства Q в некоторое подмножество $\hat{Q}$ множества крайних точек сферы S^* является гомеоморфизмом, если пространство $C^*(Q)$ рассматривать в его $C(Q)$-топологии.*

Доказательство. Ясно, что отображение $\lambda: q \to x_q^*$ взаимно однозначно. По лемме 6, оно переводит Q в некоторое подмножество крайних точек множества S^*. Для того чтобы убедиться в непрерывности λ, предположим, что $N(x_q^*; x_0, \varepsilon)=\{x^* \,|\, |(x^*-x_q^*)\,x_0|<\varepsilon\}$ — некоторая окрестность точки x_q^*, принадлежащая фундаментальной системе. Так как $x_0 \in C(Q)$, то множество $N(q)=\{p \,|\, |x_0(p)-x_0(q)|<\varepsilon\}$ открыто в Q и ясно, что $\lambda(N(q)) \subseteq N(x_q^*; x_0, \varepsilon)$. Следовательно, множество $\hat{Q}=\lambda(Q)$ бикомпактно и отображение λ является гомеоморфизмом, ч. т. д.

8. Теорема (*Банаха — Стоуна*). *Пусть Q и R — бикомпактные хаусдорфовы пространства и T — изометрический изоморфизм между $C(Q)$ и $C(R)$. Тогда существует такой гомеоморфизм τ между R и Q и такая функция α из $C(R)$, равная по модулю единице, что*

[*] $$(Tx)(r)=\alpha(r)\,x(\tau(r)), \quad x \in C(Q), \quad r \in R.$$

Доказательство. Легко видеть, что линейное отображение $T^*: C^*(R) \to C^*(Q)$, определяемое равенством $(T^*y^*)x=y^*(Tx)$, $y^* \in C^*(R)$, $x \in C(Q)$, является изометрическим отображением. Кроме того, T^* отображает $C^*(R)$ на все $C^*(Q)$; в самом деле, для произвольного функционала $x^* \in C^*(Q)$ существует прообраз $y^*=x^*T^{-1}$. Таким образом, если S_Q^* и S_R^*— единичные сферы в пространствах $C^*(Q)$ и $C^*(R)$, то $T^*(S_R^*)=S_Q^*$. Так как преобразование T^* линейно и изометрично, то ясно, что оно переводит совокупность крайних точек E_R множества S_R^* в совокупность крайних точек E_Q множества S_Q^* взаимно однозначно.

Далее, нетрудно показать, что преобразование T^* непрерывно относительно $C(R)$-топологии на $C^*(R)$ и $C(Q)$-топологии на $C^*(Q)$. Так как, по лемме 7, $\hat{R}$ бикомпактно в $C(R)$-топологии, то T^* в этих топологиях является гомеоморфизмом между $\hat{R}$ и некоторым подмножеством множества E_Q (I.5.8). По лемме 6, для каждого $r \in R$ $T^*y_r^*=\alpha(r)\,x_{\tau(r)}^*$, где $|\alpha(r)|=1$ и $\tau(r) \in Q$. Из того, что T^* отображает E_R на E_Q, и леммы 6 вытекает, что преобразование $t: y_r^* \to x_{\tau(r)}^*$ отображает $\hat{R}$ на $\hat{Q}$, а так как T^* взаимно однозначно, то и t тоже. Следовательно, t есть гомеоморфизм между $\hat{R}$ и $\hat{Q}$. Но так как, по лемме 7, $\lambda: Q \to \hat{Q}$ и $\mu: R \to \hat{R}$ тоже гомеоморфизмы, то и $\tau = \lambda^{-1} t \mu$ является гомеоморфным отображением R на Q. Следовательно, для каждого $x \in C(Q)$ и $r \in R$ мы имеем

$$(Tx)(r) = y_r^*(Tx) = (T^* y_r^*)(x) = \alpha(r) x_{\tau(r)}^*(x) = \alpha(r) x(\tau(r)),$$

и равенство [*] доказано. Остается показать, что α непрерывно. Подставив в последнюю формулу функцию $x_0 \in C(Q)$, тождественно равную единице, мы найдем, что $\alpha = Tx_0 \in C(R)$, ч. т. д.

Мы сейчас доказали несколько интересных результатов относительно пространства $C(S)$, рассматривая крайние точки единичной сферы пространства $C^*(S)$; теперь мы увидим, что исследование крайних точек пространства $L_\infty^*(S, \Sigma, \mu)$ приводит к интересным результатам относительно $L_\infty(S, \Sigma, \mu)$.

9. Лемма. *Пусть (S, Σ, μ) — пространство с положительной мерой. Функционал x^* из $L_\infty^*(S, \Sigma, \mu)$ является крайней точкой замкнутой единичной сферы S^* пространства $L_\infty^*(S, \Sigma, \mu)$ только в том случае, если он имеет вид $x^* = \alpha y^*$, где $|\alpha| = 1$ и где y^* отлично от нуля и мультипликативно*:

$$y^*(fg) = y^*(f) y^*(g).$$

(*Здесь, по определению, $(fg)(s) = f(s) g(s)$ для почти всех s из S.*)

Доказательство. Прежде всего мы покажем, что норма крайней точки x^* сферы S^* равна единице. Ясно, что $x^* \neq 0$, так что $y^* = x^*/|x^*|$ принадлежит S^* и

$$x^* = |x^*| y^* + (1 - |x^*|) 0.$$

Таким образом, по определению 1, $1 - |x^*| = 0$.

По теореме IV.8.16, существует такое $\lambda \in ba(S, \Sigma_1, \mu_1)$, что $|\lambda| = 1$ и

$$x^* f = \int_S f(s) \lambda(ds), \quad f \in L_\infty(S, \Sigma, \mu).$$

Теперь мы покажем, что λ обращается в нуль по крайней мере на одном из каждой пары непересекающихся множеств из Σ_1. Для этого предположим, что найдутся два непересекающихся множества E_1, $E_2 \in \Sigma_1$ такие, что $\lambda(E_1) \neq 0$ и $\lambda(E_2) \neq 0$. Если $\lambda_1(E) = \lambda(EE_1)$ и $\lambda_2(E) = \lambda(E(S - E_1))$ для $E \in \Sigma_1$, то ясно, что $\lambda_1, \lambda_2 \in ba(S, \Sigma_1, \mu_1)$, что $v(\lambda_1, E) = v(\lambda, EE_1)$ и что $v(\lambda_2, E) = v(\lambda, E(S - E_1))$ для $E \in \Sigma_1$. Следовательно, $1 = |\lambda| = |\lambda_1| + |\lambda_2|$. Так как $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, мы можем положить $v_1 = \lambda_1/|\lambda_1|$ и $v_2 = \lambda_2/|\lambda_2|$. Тогда $v_1, v_2 \in S^*$ и $\lambda = |\lambda_1| v_1 + (1 - |\lambda_1|) v_2$. Следовательно, $v_1 = v_2 = \lambda$ и $0 \neq \lambda(E_1) = v_2(E_1) = 0$, т. е. мы пришли к противоречию.

Так как λ обращается в нуль на одном из каждой пары взаимно дополнительных множеств, то

$$\lambda(E)(\lambda(S) - \lambda(E)) = 0, \quad E \in \Sigma_1,$$

откуда видно, что функция $m=\lambda/\lambda(S)$ принимает только значения 0 и 1. Но тогда

$$m(AB)=m(A)\,m(B), \quad A,\ B\in\Sigma_1; \tag{1}$$

действительно, если одно из множеств A или B является нулевым относительно m, то таким же будет и AB, если же $m(A)=1=m(B)$, то, так как множества $A—AB$ и $B—AB$ не пересекаются, одно из них является нулевым и $m(AB)=1$.

Если функционал y^* определен равенством

$$y^*f=\int_S f(s)\,m(ds)$$

для $f\in L_\infty$, то $|y^*|=|m|=1$ и $y^*=\alpha x^*$, где $|\alpha|=1/|\lambda(S)|=1$. Из равенства (1) вытекает, что $y^*(fg)=y^*(f)\,y^*(g)$, если и f и g являются характеристическими функциями множеств из Σ_1. Ясно, что для каждого $g\in L_\infty$ многообразие

$$\mathfrak{M}_g=\{f\mid f\in L_\infty,\ y^*(fg)=y^*(f)\,y^*(g)\}$$

является в L_∞ замкнутым линейным многообразием, и из предыдущего замечания следует, что если g есть характеристическая функция, то $\mathfrak{M}_g=L_\infty$. (В доказательстве теоремы IV.8.16 было показано, что характеристические функции образуют в L_∞ фундаментальное множество.) Следовательно, если f есть произвольная функция из L_∞, то многообразие $\mathfrak{M}_f$ содержит все характеристические функции и, значит, $\mathfrak{M}_f=L_\infty$. Таким образом, $y^*(fg)=y^*(f)\,y^*(g)$ для всех f и g из L_∞, ч. т. д.

10. Следствие. *Пусть $(S,\ \Sigma,\ \mu)$ — пространство с положительной мерой. Обозначим через M совокупность всех ненулевых элементов x^* из замкнутой единичной сферы пространства $L_\infty^*(S,\Sigma,\mu)$ таких, что $x^*(h)=x^*(f)\,x^*(g)$, если только $h(s)=f(s)\,g(s)$ почти всюду. Тогда*

$$\sup_{x^*\in M}|x^*(f)|=|f|,\quad f\in L_\infty(S,\ \Sigma,\ \mu).$$

Доказательство. Ясно, что $\sup\limits_{x^*\in M}|x^*(f)|\leqslant|f|$ для $f\in L_\infty(S,\Sigma,\mu)$. Предположим, что для некоторого $\varepsilon>0$ и некоторого $f_0\in L_\infty(S,\Sigma,\mu)$ $\sup\limits_{x^*\in M}|x^*(f_0)|\leqslant|f_0|-\varepsilon$. Тогда, согласно лемме 9, множество

$$A=\{x^*\mid |x^*|\leqslant 1,\quad |x^*(f_0)|\leqslant|f_0|-\varepsilon\}$$

содержит все крайние точки замкнутой единичной сферы пространства $L_\infty^*(S,\Sigma,\mu)$. С другой стороны, ясно, что A выпукло и $L_\infty(S,\Sigma,\mu)$-замкнуто. По теореме 4.2 и теореме 4, A содержит всю единичную сферу пространства L_∞^* и, значит,

$$\sup_{|x^*|\leqslant 1}|x^*(f_0)|\leqslant|f_0|-\varepsilon.$$

31 Заказ № 1324

Но, по следствию II.3.15 из теоремы Хана—Банаха, это невозможно, ч. т. д.

11. Теорема. *Пусть* (S, Σ, μ) — *пространство с положительной мерой. Тогда пространство* $L_\infty(S, \Sigma, \mu)$ *изометрически изоморфно* $C(S_1)$, *где* S_1 — *некоторое бикомпактное хаусдорфово пространство. При этом изоморфизме* Λ *вещественные функции (т. е. функции, вещественные почти всюду относительно* μ) *переходят в вещественные, положительные функции — в положительные и комплексно сопряженные — в комплексно сопряженные. Кроме того,* Λ *является алгебраическим изоморфизмом в том смысле, что если* $h(s)=f(s)g(s)$ *почти всюду, то* $\Lambda h=\Lambda f\cdot\Lambda g$. *Если* β *есть произвольная непрерывная функция комплексного переменного и* $f\in L_\infty(S, \Sigma, \mu)$, *то* $\Lambda(\beta(f))=$ $=\beta(\Lambda(f))$.

Доказательство. В силу следствия 10 можно дать доказательство этой теоремы слово в слово такое же, как доказательство теоремы IV.6.18, ч. т. д.

9. Касательные функционалы

Этот параграф мы начнем с изучения функционалов, касательных к некоторому выпуклому множеству K. Поскольку многие из наших результатов зависят от предположения, что множество K содержит C-внутреннюю точку, стоит заметить, что точка p в том и только в том случае служит C-внутренней точкой множества K, если нуль является C-внутренней точкой множества $K-p$. Мы будем поэтому рассматривать только подмножества, содержащие нуль в качестве своей C-внутренней точки. Читатель без труда сможет перенести наши определения и результаты на несколько более общий случай множеств, не обязательно содержащих нулевую точку.

1. Лемма. *Пусть* K — *выпуклое множество линейного пространства* $\mathfrak{X}$, *причем нуль является* C-*внутренней точкой этого множества; обозначим через* $\mathfrak{k}$ *опорную функцию множества* K. *Тогда для всех* x, y *из* $\mathfrak{X}$ *отношение* $(\mathfrak{k}(x+ay)-\mathfrak{k}(x))/a$ *является возрастающей функцией положительного вещественного переменного* a. *Предел*

$$\tau(x, y)=\lim_{a\to 0+}\frac{1}{a}(\mathfrak{k}(x+ay)-\mathfrak{k}(x))$$

существует при всех x, y *из* $\mathfrak{X}$.

Доказательство. Пусть $a_1\geqslant a_2>0$; тогда, по лемме 1.8 (e),

$$\mathfrak{k}(a_1x+a_1a_2y)\leqslant\mathfrak{k}(a_2x+a_1a_2y)+\mathfrak{k}((a_1-a_2)x).$$

Таким образом, по лемме 1.8 (c),

$$a_1\{\mathfrak{k}(x+a_2y)-\mathfrak{k}(x)\}\leqslant a_2\{\mathfrak{k}(x+a_1y)-\mathfrak{k}(x)\},$$

так что

$$\frac{1}{a_2}\{\mathfrak{k}(x+a_2y)-\mathfrak{k}(x)\}\leqslant\frac{1}{a_1}\{\mathfrak{k}(x+a_1y)-\mathfrak{k}(x)\}.$$

Следовательно, функция

$$\frac{1}{a}\{\mathfrak{k}(x+ay)-\mathfrak{k}(x)\}$$

убывает при убывании a. Так как $\mathfrak{k}(x+ay)+\mathfrak{k}(-ay)\geqslant\mathfrak{k}(x)$, то $\{\mathfrak{k}(x+ay)-\mathfrak{k}(x)\}/a\geqslant-\mathfrak{k}(-y)$, так что $\{\mathfrak{k}(x+ay)-\mathfrak{k}(x)\}/a$ ограничено снизу. Это и доказывает лемму, ч. т. д.

2. Определение. Пусть K — выпуклое множество линейного пространства $\mathfrak{X}$, содержащее нуль в качестве своей C-внутренней точки. Если $\mathfrak{k}$ — опорная функция множества K, то вещественная функция τ, определяемая для всех $x,\ y\in\mathfrak{X}$ равенством

$$\tau(x,\ y)=\lim_{a\to 0+}\frac{1}{a}\{\mathfrak{k}(x+ay)-\mathfrak{k}(x)\},$$

называется *касательной функцией* множества K.

3. Лемма. *Пусть K — выпуклое множество в линейном пространстве, причем нуль является C-внутренней точкой этого множества, и пусть $\mathfrak{k}$ будет опорной функцией, а τ — касательной функцией множества K. Тогда*

(a) $\tau(x,\ y)\leqslant\mathfrak{k}(y)$;

(b) $\tau(x,\ y_1+y_2)\leqslant\tau(x,\ y_1)+\tau(x,\ y_2)$;

(c) $\tau(x,\ ay)=a\tau(x,\ y)$ *при* $a\geqslant 0$;

(d) $-\tau(x,\ -y)\leqslant\tau(x,\ y)$;

(e) $\tau(x,\ ax)=a\mathfrak{k}(x)$, *если* a — *вещественное число*.

Доказательство. По лемме 1.8 (c) и 1.8 (e)

$$\frac{1}{a}\{\mathfrak{k}(x+ay)-\mathfrak{k}(x)\}\leqslant\mathfrak{k}(y),$$

откуда вытекает утверждение (a). Утверждение (b) вытекает из неравенства

$$2\mathfrak{k}\left(x+\frac{a}{2}(y_1+y_2)\right)\leqslant\mathfrak{k}(x+ay_1)+\mathfrak{k}(x+ay_2).$$

Утверждение (c) тривиально. Утверждение (d) вытекает из неравенства

$$\tau(x,\ -y)+\tau(x,\ y)\geqslant\tau(x,\ 0)=0\cdot\tau(x,\ y)=0.$$

Утверждение (e) тривиально, ч. т. д.

4. Определение. Если A является подмножеством линейного пространства $\mathfrak{X}$, а x — его C-граничная точка, то функционал $f \in \mathfrak{X}^+$ называется *касательным к* A в точке x, если существует такая вещественная константа c, что

$$\operatorname{Re} f(A) \leqslant c, \quad \operatorname{Re} f(x) = c.$$

Заметим, что если функционал f является касательным к A в точке x, то таким же будет и каждое вещественное кратное f. Обратно, если каждый касательный к A в точке x функционал является кратным f, мы говорим, что множество A *имеет единственную касательную в точке* x.

Заметим, что если $\mathfrak{X}$ является линейным топологическим пространством, а множество A имеет внутреннюю точку, то, по лемме 2.7, каждый касательный к A функционал непрерывен.

Нижеследующая теорема дает некоторый критерий существования линейных функционалов, касательных к выпуклому множеству, в терминах его касательной функции.

5. Теорема. *Пусть $\mathfrak{X}$ — линейное пространство, а K — содержащееся в $\mathfrak{X}$ выпуклое множество, причем нуль является его C-внутренней точкой. Пусть τ—касательная функция множества K. Тогда если x есть C-граничная точка множества K, то функционал f из $\mathfrak{X}^+$ такой, что $f(x)=1$, в том и только том случае будет касательным к A в точке :, если*

$$-\tau(x, -y) \leqslant \operatorname{Re} f(y) \leqslant \tau(x, y) \text{ при всех } y \in \mathfrak{X}.$$

Обратно, если x есть C-граничная точка множества K и y — произвольная точка из $\mathfrak{X}$, для которой

$$-\tau(x, -y) \leqslant c \leqslant \tau(x, y),$$

то существует функционал f, касательный к K в точке x, для которого $f(x)=1$ и $\operatorname{Re} f(y)=c$.

Доказательство. Если функционал f является касательным к K в точке x и $f(x)=1$, то, по лемме I.8 (f), из неравенства $\mathfrak{k}(y) < 1$ вытекает, что $\operatorname{Re} f(y) \leqslant 1$. Отсюда с помощью леммы 1.8(c) легко находим, что $\mathfrak{k}(y) \geqslant \operatorname{Re} f(y)$. Следовательно, так как $f(x)=\mathfrak{k}(x)=1$, то

$$\operatorname{Re} f(y) = \operatorname{Re} \frac{1}{a} \{f(x+ay) - f(x)\} \leqslant \frac{1}{a} \left\{\mathfrak{k}(x+ay) - \mathfrak{k}(x)\right\},$$

так что $\operatorname{Re} f(y) \leqslant \tau(x, y)$. Заменяя y на $-y$, мы получим $-\operatorname{Re} f(y) \leqslant \tau(x, -y)$, так что $-\tau(x, -y) \leqslant \operatorname{Re} f(y) \leqslant \tau(x, y)$. С другой стороны, если f удовлетворяет этому неравенству, то, по лемме 3(a), функционал f является касательным к K в точке x.

Для того чтобы доказать обратное, будем рассматривать $\mathfrak{X}$ как линейное пространство над полем вещественных чисел. Заметим, что при этом функционалы $\mathfrak{k}$ и τ не изменятся. Пусть $y \in \mathfrak{X}$ и $-\tau(x, -y) \leqslant c \leqslant \tau(x, y)$. Каждый элемент z из $\mathfrak{S} = \operatorname{sp}\{x, y\}$ имеет вид $z = ax + by$; определим функционал f_0 на $\mathfrak{S}$ равенством $f_0(z) = a + bc$. Если $y = dx$, то, по лемме 3 (е), $c = d$, так что из равенства $z = 0$ вытекает, что $f_0(z) = 0$. Если y не кратно x, то представление $z = ax + by$ единственно. Таким образом, f_0 есть вполне определенный линейный функционал на $\mathfrak{S}$.

Мы хотим доказать, что $f_0(z) \leqslant \mathfrak{k}(z)$ для $z \in \mathfrak{S}$. Так как это тривиально в случае, когда y есть скалярное кратное x, то мы можем предположить, что каждое $z \in \mathfrak{S}$ имеет единственное представление вида $z = ax + by$.

Случай 1. $a > 0$. Так как $f_0(y) = c$, то достаточно показать, что

$$\mathfrak{k}\left(x + \frac{b}{a} y\right) \geqslant f_0(x) + \frac{bc}{a},$$

или, полагая $\frac{b}{a} = a_1$, что

$$\mathfrak{k}(x + a_1 y) - \mathfrak{k}(x) \geqslant a_1 c,$$

так как $f_0(x) = \mathfrak{k}(x) = 1$. Если $a_1 = 0$, то это очевидно. Если $a_1 > 0$, то $\mathfrak{k}(x + a_1 y) - \mathfrak{k}(x) \geqslant a_1 \tau(x, y) \geqslant a_1 c$, по лемме 1. Если $a_1 < 0$, положим $a_2 = -a_1$ и $y_1 = -y$. Тогда $\mathfrak{k}(x + a_2 y_1) - \mathfrak{k}(x) \geqslant a_2 \tau(x, -y) \geqslant -a_2 c$, по лемме 1, так что и в этом случае $\mathfrak{k}(x + a_1 y) - \mathfrak{k}(x) \geqslant a_1 c$.

Случай 2. $a \leqslant 0$. Мы хотим показать, что

$$\mathfrak{k}(ax + by) - a\mathfrak{k}(x) \geqslant bc,$$

т. е. что

$$\mathfrak{k}(ax + by) + \mathfrak{k}(-ax) \geqslant bc.$$

Если $b \geqslant 0$, то

$$\mathfrak{k}(ax + by) + \mathfrak{k}(-ax) \geqslant \mathfrak{k}(by) = b\mathfrak{k}(y) \geqslant b\tau(x, y) \geqslant bc,$$

по леммам 1.8 (е) и 3 (а). Если $b < 0$, то

$$\mathfrak{k}(ax + by) + \mathfrak{k}(-ax) \geqslant \mathfrak{k}(by) =$$
$$= -b\mathfrak{k}(-y) \geqslant -b\tau(x, -y) \geqslant (-b)(-c) = bc.$$

Следовательно, $f_0(z) \leqslant \mathfrak{k}(z)$ для $z \in \mathfrak{S}$. По теореме Хана—Банаха (II.3.10), f_0 можно продолжить до линейного функционала f, определенного на всем $\mathfrak{X}$ и такого, что $f(x) \leqslant \mathfrak{k}(x)$ для $x \in \mathfrak{X}$. Из леммы 1.8 (d) вытекает, что $f(K) \leqslant 1$, так что f является касательным к K функционалом в точке x, и $f(y) = c$. В случае, когда $\mathfrak{X}$ является линейным пространством над полем комплексных чисел, функционал $f(x) - if(ix)$ будет искомым касательным функционалом, ч. т. д.

6. Следствие. *Если нуль является C-внутренней точкой выпуклого множества K линейного пространства, то K обладает ненулевым касательным функционалом в каждой из своих C-граничных точек. В точке x в том и только в том случае имеется единственный касательный функционал, если $\tau(x, y) = -\tau(x, -y)$ для всех $y \in \mathfrak{X}$.*

В случае линейного топологического пространства справедливо и обратное предложение.

7. Теорема. *Пусть $\mathfrak{X}$ — линейное топологическое пространство и A — замкнутое подмножество в $\mathfrak{X}$, обладающее внутренними точками. Предположим, что A обладает ненулевым касательным функционалом в каждой точке некоторого множества, всюду плотного на его границе. Тогда множество A выпукло.*

Доказательство. Обозначая внутренность множества A через A_1, мы покажем прежде всего, что ни в одной точке множества $aA_1 + (1-a)A$, где $0 < a < 1$, не существует ненулевой касательной к A. В самом деле, пусть $p \in A_1$, $q \in A$, и пусть $x = ap + (1-a)q$, где $0 < a < 1$. Если f есть функционал, касательный к A в точке x, то найдется такое вещественное число c, что $\operatorname{Re} f(x) = c$, $\operatorname{Re} f(A) \leqslant c$. Так как $f(x) = af(p) + (1-a)f(q)$, то отсюда следует, что $\operatorname{Re} f(p) = \operatorname{Re} f(q) = c$. Пусть N и M—такие окрестности нуля, что $p + N \subseteq A$ и $M \cup (-M) \subseteq N$. Тогда $\operatorname{Re} f(N+p) \leqslant c$ и, следовательно, $\operatorname{Re} f(N) \leqslant 0$. Таким образом, $0 \leqslant \operatorname{Re} f(M) \leqslant 0$, т. е. $\operatorname{Re} f(M) = 0$, откуда вытекает, что $f = 0$.

Пусть B_1 — такое всюду плотное подмножество границы B множества A, в каждой точке которого существует ненулевой функционал, касательный к A. Мы видели, что если $0 < a < 1$, то $(aA_1 + (1-a)A) \cap B_1 = \varnothing$. Так как множество $aA_1 + (1-a)A$ открыто, то $(aA_1 + (1-a)A) \cap B = \varnothing$, если $0 < a < 1$. Пусть $p \in A_1$, и $q \in A$; так как p есть внутренняя точка множества A, то точка $(1-a)p + aq$ при всех достаточно малых положительных a принадлежит A. Если d есть верхняя грань множества

$$\{a \mid 0 < a < 1, \ (1-a)p + aq \in A\},$$

то точка $(1-d)p + dq \in B$, и из предыдущего следует, что $d = 1$. Следовательно, $(1-a)p + aq \in A$ для $0 < a < 1$, т. е. $(1-a)A_1 + aA \subseteq A$ для $0 < a < 1$. Так как множество $(1-a)A_1 + aA$ открыто, если $0 < a < 1$, то при тех же a множество $(1-a)A_1 + aA_1 \subseteq A_1$, и следовательно, A_1 выпукло.

Так как множество A замкнуто, то $A \supseteq \overline{A}_1$. С другой стороны, если $p \in A_1$ и если $q \in A$, то $q = \lim_{a \to 0} \{(1-a)q + ap\}$ и, следовательно, $A \subseteq \overline{A}_1$. Выпуклость множества $A = \overline{A_1}$ вытекает теперь из выпуклости множества A_1 и теоремы 2.1(a), ч. т. д.

Хотя из элементарных примеров ясно, что выпуклое множество не обязательно имеет единственный касательный функционал в каждой своей C-граничной точке, тем не менее удается получить следующий довольно сильный результат в этом направлении.

8. Теорема. *Если выпуклое подмножество сепарабельного B-пространства $\mathfrak{X}$ имеет внутреннюю точку, то оно обладает единственной касательной в каждой точке некоторого подмножества, всюду плотного на его границе.*

Доказательство. Пусть K — выпуклое множество. Покажем, что для x, принадлежащих некоторому всюду плотному подмножеству Z пространства $\mathfrak{X}$, и всех $y \in \mathfrak{X}$ выполняется равенство $-\tau(x, y) = \tau(x, -y)$. Не ограничивая общности, можно считать, что множество K содержит некоторую сферу $S\left(0, \frac{1}{N}\right)$ с центром в нуле. Отсюда вытекает, очевидно, что опорная функция $\mathfrak{k}$ множества K удовлетворяет неравенству $\mathfrak{k}(x) \leqslant N|x|$. По лемме 1.8 (e),

$$[*] \qquad |\mathfrak{k}(y_1) - \mathfrak{k}(y_2)| \leqslant N|y_1 - y_2|.$$

Точно так же

$$\tau(x, y_1) - \tau(x, y_2) \leqslant \tau(x, y_1 - y_2) \leqslant \mathfrak{k}(y_1 - y_2) \leqslant N|y_1 - y_2|.$$

Следовательно,

$$|\tau(x, y_1) - \tau(x, y_2)| \leqslant N|y_1 - y_2|.$$

Таким образом, если мы предположим, что $\{y_n\}$ есть счетное всюду плотное подмножество пространства $\mathfrak{X}$, и положим

$$Z_n = \{x \mid x \in \mathfrak{X},\ \tau(x, y_n) = -\tau(x, -y_n)\},$$

то включение $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} Z_n$ эквивалентно тому, что $\tau(x, y) = -\tau(x, -y)$ для всех $y \in \mathfrak{X}$. Остается, следовательно, доказать, что множество $Z = \bigcap_{n=1}^{\infty} Z_n$ всюду плотно в $\mathfrak{X}$.

Множество Z_n определено условием

$$\lim_{a \to 0+} \frac{1}{a}\{\mathfrak{k}(x + ay_n) - \mathfrak{k}(x)\} = \lim_{a \to 0+} -\frac{1}{a}\{\mathfrak{k}(x - ay_n) - \mathfrak{k}(x)\},$$

а так как эти пределы существуют, то Z_n есть совокупность таких x, для которых

$$\lim_{a \to 0+} \frac{1}{a}\{\mathfrak{k}(x + ay_n) - 2\mathfrak{k}(x) + \mathfrak{k}(x - ay_n)\} = 0.$$

Так как функция

$$g(a, x, y)=\frac{1}{a}\{\mathfrak{f}(x+ay)-2\mathfrak{f}(x)+\mathfrak{f}(x-ay)\}$$

является (по лемме 1) суммой двух монотонно возрастающих функций от a, то она обладает тем же свойством при всех $x, y \in \mathfrak{X}$. Следовательно, полагая

$$Z_{n, i, j}=\left\{x \mid x \in \mathfrak{X},\ j\left\{\mathfrak{f}\left(x+\frac{y_n}{j}\right)-2\mathfrak{f}(x)+\mathfrak{f}\left(x-\frac{y_n}{j}\right)\right\}<\frac{1}{i}\right\},$$

мы будем иметь $Z_n=\bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} Z_{n, i, j}$. Если мы положим $Z_{n, i}=\bigcup_{j=1}^{\infty} Z_{n, i, j}$, то множество $Z_{n, i}$ будет открыто в $\mathfrak{X}$ и $Z_n=\bigcap_{i=1}^{\infty} Z_{n, i}$.

Мы хотим доказать, что множество $Z=\bigcap_{n=1}^{\infty} Z_n=\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=1}^{\infty} Z_{n, i}$ всюду плотно в $\mathfrak{X}$. Предположим, что это не так и что $p \notin \overline{Z}$. Тогда некоторая сфера $S(p, \varepsilon)$ не пересекается с Z. Если $S=\overline{S(p, \varepsilon/2)}$, то $SZ=\varnothing$. Следовательно, $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} SZ'_{n, i}=S$. По теореме I.6.9, некоторое множество $Z'_{n, i}$ содержит открытое подмножество, а значит, некоторое множество $Z_{n, i}$ не является всюду плотным в $\mathfrak{X}$; так как $Z_{n, i} \supseteq Z_n$, то и некоторое множество Z_n не является всюду плотным. Мы покажем, однако, что это невозможно.

Предположим, что $x_1 \in \mathfrak{X}$, $x_1 \notin \overline{Z}_n$, тогда $\tau(x, y_n) \neq -\tau(x, -y_n)$ для x, принадлежащего некоторой относительной окрестности точки x_1. Отсюда вытекает, что функция $\mathfrak{f}(x_1+ay_n)$ не имеет производной ни в одной точке a некоторой окрестности нуля. Но неравенство [*] показывает, что $\varphi(a)=\mathfrak{f}(x_1+ay_n)$ является непрерывной функцией ограниченной вариации. Таким образом, ввиду замечания, предшествующего теореме III.5.17, существует такая мера Бореля — Стильтьеса μ, что $\mu(c, d)=\varphi(c)-\varphi(d)$. Но тогда из следствия III.11.6 вытекает, что функция $\mathfrak{f}(x_1+ay_n)$ имеет производную почти всюду. Это противоречие и доказывает, что множество Z_n всюду плотно в $\mathfrak{X}$. Следовательно, множество Z всюду плотно в $\mathfrak{X}$. Так как $\tau(ax, ay)=a\tau(x, y)$, если $a>0$, то $ax \in Z$, если $x \in Z$ и $a>0$. Следовательно, при непрерывном отображении $x \longrightarrow \frac{x}{\mathfrak{f}(x)}$ множества $\{x \in \mathfrak{X},\ x \neq 0\}$ на границу B множества K множество Z переходит в некоторое свое подмножество, которое, так как Z всюду плотно в $\mathfrak{X}$, будет, очевидно, всюду плотным в B. Отсюда следует, что множество $Z \cap B$ всюду плотно в B. Наша теорема непосредственно вытекает теперь из следствия 6, ч. т. д.

Существуют интересные связи между касательными к некоторому множеству линейного пространства $\mathfrak{X}$ и некоторыми специальными выпуклыми подмножествами пространства $\mathfrak{X}$, называемыми конусами.

9. Определение. *Пусть $\mathfrak{X}$ есть векторное пространство*; выпуклое множество $K \subseteq \mathfrak{X}$ называется *конусом с вершиной* p, если из того, что $p+x \in K$, вытекает, что при $r \geqslant 0$ и $p+rx \in K$. *Конус K с вершиной p, порождаемый множеством A*, есть пересечение всех конусов с вершиной p, содержащих множество A. Легко видеть, что если множество A выпукло, то

$$K = \{z \mid z = r(q-p)+p,\ q \in A,\ r \geqslant 0\}.$$

10. Теорема. *Если K есть замкнутый конус с вершиной p в вещественном локально выпуклом линейном топологическом пространстве $\mathfrak{X}$ и $K \neq \mathfrak{X}$, то существует ненулевой непрерывный линейный функционал, касательный к K в точке p. Если A есть некоторое подмножество $\mathfrak{X}$ и точка p принадлежит A, то ненулевой непрерывный линейный функционал, касательный к A в точке p, существует в том и только в том случае, если порождаемый множеством A конус B с вершиной p не является всюду плотным в $\mathfrak{X}$.*

Доказательство. Если $q \notin K$, то, по следствию 2.12, можно найти такой функционал f и такую вещественную константу c, что $\operatorname{Re} f(K) \leqslant c < \operatorname{Re} f(q)$. Пусть $\operatorname{Re} f(p) = a$. Тогда если $z \in K$ и $\operatorname{Re} f(z) > a$, то $\operatorname{Re} f(z-p) \geqslant \varepsilon > 0$ и $\operatorname{Re} f(r(z-p)+p) \geqslant r\varepsilon + a$, что при достаточно большом r противоречит тому, что $\operatorname{Re} f(K) \leqslant c$. Следовательно, $\operatorname{Re} f(K) \leqslant \operatorname{Re} f(p)$, чем доказана первая часть теоремы.

Ясно, что B и $\overline{B}$ являются конусами. Если $\overline{B} \neq \mathfrak{X}$, то каждый ненулевой непрерывный линейный функционал, касательный к $\overline{B}$ в точке p, будет касательным и к A в точке p.

Обратно, если f есть ненулевой непрерывный линейный функционал, касательный к A в точке p, то $\operatorname{Re} f(p) = c$, $\operatorname{Re} f(A) \leqslant c$. Отсюда вытекает, что $\operatorname{Re} f(a(q-p)+p) \leqslant c$, если $a \geqslant 0$, так что $\operatorname{Re} f(B) \leqslant c$, и так как $\overline{B} = \mathfrak{X}$, то, по лемме 1.11, $f(\mathfrak{X}) = 0$, что невозможно ввиду того, что $f \neq 0$, ч. т. д.

11. Теорема. *Пусть $\mathfrak{X}$ — линейное нормированное пространство, а K — его выпуклое подмножество. Если найдутся такие точки p, q, что $p \in K$, $q \notin K$ и*

$$|q-p| = \inf_{z \in K} |q-z|,$$

то существует ненулевой непрерывный линейный функционал, касательный к K в точке p.

Доказательство. Пусть $d = |q-p|$ и $S = S(q, d)$. Тогда S — открытое множество и $S \cap K = \varnothing$. По теореме 2.8, существует ненулевой непрерывный линейный функционал f такой, что $\operatorname{Re} f(K) \leqslant \operatorname{Re} f(S)$. Так как точка p принадлежит замыканиям как K, так и S, то ясно, что функционал f является касательным к K в точке p, ч. т. д.

12. Следствие. *Пусть $\mathfrak{X}$ — линейное нормированное пространство, а K — его выпуклое подмножество. Предположим, что для каждого q, не принадлежащего K, в K найдется такая точка p, что $|p-q| = \inf\limits_{z \in K} |z-q|$. Тогда K имеет ненулевой непрерывный линейный касательный функционал в каждой точке некоторого множества всюду плотного на его границе.*

Доказательство. Пусть точка $z \in K$ принадлежит границе множества K, и пусть $q_n \notin K$, $q_n \to z$. Тогда если точка $p_n \in K$такова, что $|p_n - q_n| = \inf\limits_{z \in K} |z - q_n|$, то, по теореме 11, существует ненулевой функционал, касательный к K в точке p_n. Но ясно, что $p_n \to z$, ч. т. д.

10. Теоремы о неподвижной точке

1. Определение. Будем говорить, что топологическое пространство R обладает Fp-свойством, если для каждого непрерывного отображения $T: R \to R$ существует такая точка $p \in R$, что $p = T(p)$.

Известная теорема Броуэра о неподвижной точке утверждает, что *замкнутая единичная сфера пространства E^n обладает Fp-свойством.*

Этот параграф посвящен доказательству одного замечательного обобщения (теорема 5) теоремы Броуэра. При доказательстве теоремы 5 мы будем пользоваться теоремой Броуэра; однако, ввиду того что теорема Броуэра хорошо известна, мы не даем в этом параграфе подробного ее доказательства, отсылая читателя к замечаниям в конце главы, где дается и доказательство ее и некоторые дополнительные сведения.

Гильбертовым параллелепипедом (кирпичом) *C называется подмножество B-пространства l_2, состоящее из всех последовательностей $[\xi_n]$, где $|\xi_n| \leqslant \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Ясно, что C является бикомпактным подмножеством l_2* (см., например, следствие IV.5.5).

2. Лемма. *Гильбертов параллелепипед обладает Fp-свойством.*

Доказательство. Пусть $T: C \to C$ — непрерывное отображение и отображение $P_n: C \to C$ определяется условием

$$P_n([\xi_1, \ldots, \xi_n, \xi_{n+1}, \ldots]) = [\xi_1, \ldots, \xi_n, 0, 0, \ldots].$$

Множество $C_n = P_n(C)$ гомеоморфно замкнутой единичной сфере пространства E^n. Так как отображение $P_nT: C_n \to C_n$ непрерывно, то, по теореме Броуэра, оно имеет неподвижную точку $y_n \in C_n \subset C$, так что

$$|y_n - T(y_n)| \leqslant \sqrt{\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^2}}.$$

Ввиду бикомпактности C последовательность $\{y_n\}$ имеет сходящуюся подпоследовательность. Предел этой подпоследовательности и будет, очевидно, неподвижной точкой преобразования T, ч. т. д.

3. Лемма. *Каждое выпуклое замкнутое подмножество K гильбертова параллелепипеда C обладает Fp-свойством.*

Доказательство. Покажем, что для каждой точки $p \in C$ найдется единственная ближайшая точка $N(p) \in K$. Действительно, по лемме IV.4.2, если $\{k_i\}$ есть такая последовательность из K, что $\lim_{i\to\infty} |p - k_i| = \inf_{k \in K} |p - k|$, то она сходится, скажем, к точке $q \in K$. Если $\{k_i'\}$ — другая последовательность с тем же свойством, сходящаяся к точке $q' \in K$, то, по лемме IV.4.2, последовательность $\{k_1, k_1', k_2, k_2', \ldots\}$ тоже сходящаяся. Следовательно, $q = q'$ и q есть искомая ближайшая к p точка $N(p)$.

Далее, $N(p)$ — непрерывно зависит от p. В самом деле, если $p_n \to p$ и $N(p_n) \not\to N(p)$, то ввиду бикомпактности K последовательность $\{N(p_n)\}$ содержит подпоследовательность $\{N(p_{n_i})\}$, сходящуюся к некоторому элементу q из K, отличному от $N(p)$. Тогда

$$|p_{n_i} - N(p_{n_i})| \leqslant |p_{n_i} - N(p)| \leqslant |p_{n_i} - p| + |p - N(p)|,$$

так что $|p - q| \leqslant |p - N(p)|$; но в силу первой части доказательства отсюда вытекает, что $N(p) = q$. Заметим, что $N(C) \subseteq K$, причем если $p \in K$, то $N(p) = p$. Далее, если отображение $T: K \to K$ непрерывно, то и отображение $TN: C \to K$ непрерывно и, по предыдущей лемме, обладает неподвижной точкой. Эта неподвижная точка принадлежит K и является, следовательно, неподвижной точкой и отображения T, ч. т. д.

4. Лемма. *Пусть K — бикомпактное выпуклое подмножество локально выпуклого линейного топологического пространства $\mathfrak{X}$. Пусть $T: K \to K$ — непрерывное отображение. Если K содержит по крайней мере две точки, то найдется такое собственное замкнутое выпуклое подмножество $K_1 \subset K$, что $T(K_1) \subseteq K_1$.*

Доказательство. Мы можем предполагать, что K рассматривается в $\mathfrak{X}^*$-топологии, так как тождественное отображение пространства $\mathfrak{X}$ с его исходной топологией на $\mathfrak{X}$ с $\mathfrak{X}^*$-топологией непрерывно. А так как непрерывное и взаимно однозначное отображение множества K является гомеоморфизмом (см. лемму I.5.8), то переход к $\mathfrak{X}^*$-топологии не изменяет условий леммы.

Мы будем говорить, что множество непрерывных линейных функционалов $F=\{f\}$ *определяется* другим множеством $G=\{g\}$, если для каждого $f \in F$ и $\varepsilon > 0$ найдется окрестность $N(0;\gamma,\delta)=\{x \mid |g(x)|<\delta, g\in\gamma\}$, где γ есть некоторое конечное подмножество множества G, обладающая тем свойством, что если p, $q \in K$ и $p-q \in N(0;\ \gamma,\ \delta)$, то $|f(Tp)-f(Tq)|<\varepsilon$. Ясно, что если множество F определяется множеством G, то из того, что $g(p)=g(q)$, $g \in G$, вытекает, что $f(Tp)=f(Tq)$, $f \in F$.

Каждый непрерывный линейный функционал f определяется некоторым счетным множеством функционалов $G=\{g_m\}$. Действительно, по следствию IV.6.9, скалярная функция $f(Tp)$ равномерно непрерывна на бикомпактном множестве K. Следовательно, для каждого натурального n существует такая окрестность $N(0;\ \gamma_n,\ \delta_n)$ нуля пространства $\mathfrak{X}$, определяемая конечным множеством γ_n непрерывных линейных функционалов и числом $\delta_n>0$, что если $p,\ q \in K$ и $p-q \in N(0;\ \gamma_n,\ \delta_n)$, то $|f(Tp)-f(Tq)|<\frac{1}{n}$. Положим $G=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\gamma_n$; тогда f определяется множеством G. Отсюда следует, что если F есть счетное подмножество пространства $\mathfrak{X}^*$, то найдется такое счетное подмножество G_F пространства $\mathfrak{X}^*$, что каждое $f \in F$ определяется множеством G_F.

Можно даже утверждать, что каждый непрерывный линейный функционал f может быть включен в некоторое счетное, определяющее себя множество G функционалов. В самом деле, пусть функционал f определяется счетным множеством G_1; пусть, далее, каждый функционал из G_1 определяется счетным множеством G_2, каждый функционал из G_2— счетным множеством G_3 и т. д. Положим тогда $G=\{f\}\cup\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}G_i$.

Предположим теперь, что K содержит две различные точки p и q, и пусть $f \in \mathfrak{X}^*$ таково, что $f(p)\neq f(q)$. Пусть $G=\{g_i\}$—счетное определяющее себя множество непрерывных линейных функционалов, среди которых содержится f. Ввиду бикомпактности K, $g_i(K)$ для каждого i будет ограниченным множеством скаляров, а так как мы можем помножить g_i на соответственным образом выбранную константу, то можно предполагать, что $|g_i(K)|\leqslant\frac{1}{i}$. При этом отображение $H: K\to l_2$, определяемое условием $H(k)=[g_i(k)]$, будет непрерывным отображением множества K на некоторое бикомпактное выпуклое подмножество K_0 гильбертова куба, содержащее по меньшей мере две точки. Рассмотрим отображение $T_0 = HTH^{-1}: K_0 \to K_0$; так как множество G само себя определяет, то T_0 взаимно однозначно. Для того чтобы убедиться в непрерывности T_0, предположим, что $b_0 \in K_0$ и $0 < \varepsilon < 1$. Выберем такое N, что $\sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{1}{i^2} < \varepsilon$. Тогда, так как множество G само себя определяет, найдется такое $\delta > 0$ и такое m, что если $|g_j(p) - g_j(q)| < \delta$, $j = 1, \ldots, m$, то

$$[*] \qquad |g_i(Tp) - g_i(Tq)| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{N}}, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Таким образом, если $|b - b_0| < \delta$ и если p и q — произвольные точки из K такие, что $b = [g_i(p)]$ и $b_0 = [g_i(q)]$, то справедливо неравенство [*] и

$$|T_0(b) - T_0(b_0)|^2 = |HTH^{-1}(b) - HTH^{-1}(b_0)|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{N} |g_i(Tp) - g_i(Tq)|^2 + 2 \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{1}{i^2} < 3\varepsilon.$$

Следовательно, T_0 есть непрерывное отображение K_0 в K_0. По лемме 3, T_0 имеет неподвижную точку k_0. Таким образом, $TH^{-1}(k_0) \subseteq H^{-1}T_0(k_0) = H^{-1}(k_0)$. Полагая $K_1 = H^{-1}(k_0)$, заметим, что K_1 есть собственное замкнутое подмножество множества K и что $T(K_1) \subseteq K_1$. Выпуклость K_1 вытекает из линейности H. Таким образом, наша лемма доказана.

5. Теорема (*Шаудер — Тихонов*). *Бикомпактное выпуклое подмножество локально выпуклого линейного топологического пространства обладает Fp-свойством.*

Доказательство. По лемме Цорна, существует минимальное выпуклое подмножество K_1 множества K, обладающее тем свойством, что $TK_1 \subseteq K_1$. В силу предыдущей леммы это минимальное подмножество состоит из единственной точки, ч. т. д.

Теорема 5 интересна тем, что она применима и к нелинейным отображениям. Рассматривая же только линейные отображения, можно доказать несколько более сильный результат и притом более элементарными средствами.

6. Теорема (*Марков — Какутани*). *Пусть K — бикомпактное выпуклое подмножество линейного топологического пространства $\mathfrak{X}$. Обозначим через $\mathfrak{F}$ семейство коммутирующих между собой непрерывных линейных преобразований, отображающих K в себя. Тогда в K найдется такая точка p, что $Tp = p$ для всех T из $\mathfrak{F}$.*

Доказательство. Пусть n — натуральное число и $T \in \mathfrak{J}$. Положим $T_n = n^{-1}(I + T + \ldots + T^{n-1})$. Обозначим через $\mathscr{K}$ семейство всех множеств $T_n(K)$ при $n \geqslant 1$ и $T \in \mathfrak{J}$. Тогда каждое множество из $\mathscr{K}$ выпукло, по лемме 1.5, и бикомпактно, по лемме I.5.7(b); так как K выпукло, то $T_n(K) \subseteq K$. Ввиду того, что при $T, S \in \mathfrak{J}$ преобразования T_n и S_m коммутируют между собой, $T_n S_m(K) \subseteq T_n(K) \cap S_m(K)$. Следовательно, каждое конечное подсемейство из $\mathscr{K}$ имеет непустое пересечение. По лемме I.5.6, существует точка $p \in \bigcap \mathscr{K}$.

Если $T \in \mathfrak{J}$ и $Tp \neq p$, то найдется такая окрестность U нуля пространства $\mathfrak{X}$, что $Tp - p \notin U$. Если n — произвольное натуральное число, то, так как $p \in T_n(K)$, найдется такая точка $q \in K$, что $p = n^{-1}(I + T + \ldots + T^{n-1})q$. Следовательно, $Tp - p = n^{-1}(T^n - I)q \notin U$. Так как $T^n q \in K$, отсюда вытекает, что множество $n^{-1}(K - K)$ ни для какого натурального n не является подмножеством U. Но $K - K = \varphi(K \times K)$, где $\varphi(x, y) = x - y$, и, следовательно, множество $K - K$ бикомпактно. Однако это противоречит лемме II.1.8, ч. т. д.

Рассматривая вышеприведенное доказательство, замечаем, что, кроме непрерывности, нами было использовано только то свойство преобразования T, что

$$T(ax + (1-a)y) = aT(x) + (1-a)Ty$$

при $x, y \in \mathfrak{X}$ и $0 \leqslant a \leqslant 1$. Отображения, обладающие этим свойством, часто называют *аффинными* преобразованиями.

7. Определение. Семейство $\mathfrak{G}$ линейных преобразований линейного топологического пространства $\mathfrak{X}$ называется *равностепенно непрерывным на подмножестве* K пространства $\mathfrak{X}$, если для каждой окрестности V нуля пространства $\mathfrak{X}$ найдется такая окрестность U нуля, что если $k_1, k_2 \in K$ и $k_1 - k_2 \in U$, то $\mathfrak{G}(k_1 - k_2) \subseteq V$, т. е. $T(k_1 - k_2) \in V$ при $T \in \mathfrak{G}$.

8. Теорема (*Какутани*). *Пусть K — бикомпактное выпуклое подмножество локально выпуклого линейного топологического пространства $\mathfrak{X}$, а $\mathfrak{G}$ — группа линейных преобразований, равностепенно непрерывная на K и такая, что $\mathfrak{G}(K) \subseteq K$. Тогда существует такая точка $p \in K$, что $\mathfrak{G}(p) = p$.*

Доказательство. По лемме Цорна, K содержит минимальное непустое бикомпактное выпуклое подмножество K_1 такое, что $\mathfrak{G}K_1 \subseteq K_1$. Если K_1 содержит только одну точку, то наша теорема доказана. В противном случае бикомпактное (по лемме II.1.2) множество $K_1 - K_1$ содержит точку, отличную от нулевой, и, следовательно, найдется такая окрестность V нуля, что $\bar{V}$ не содержит множества $K_1 - K_1$. Далее, найдется выпуклая окрестность V_1 нуля такая, что $\alpha V_1 \subseteq V$ при $|\alpha| \leqslant 1$. В силу равностепенной непрерывности $\mathfrak{G}$ на множестве K_1, найдется такая окрестность нуля U_1, что если $k_1, k_2 \in K_1$ и $k_1 - k_2 \in U_1$, то $\mathfrak{G}(k_1 - k_2) \subseteq V_1$. Положим $U_2 = \operatorname{co}(\mathfrak{G}U_1)$; так как $\mathfrak{G}$ — группа, то $\mathfrak{G}U_2 = U_2$ и, по лемме I.4.16 (d), $\mathfrak{G}(\overline{U}_2) = \overline{U}_2$. Пусть $\delta = \inf\{a \mid a > 0, aU_2 \supseteq K_1 - K_1\}$ и $U = \delta U_2$. Нетрудно видеть, что для каждого $\varepsilon \in (0; 1)$ множество $K_1 - K_1$ не содержится в $(1-\varepsilon)\overline{U}$, но $K_1 - K_1 \subseteq (1+\varepsilon)U$. Семейство открытых множеств $\{2^{-1}U + k\}$, $k \in K_1$, покрывает K_1. Пусть $\{2^{-1}U + k_1, \ldots, 2^{-1}U + k_n\}$ — некоторое конечное подпокрытие, и пусть $p = \frac{k_1 + \ldots + k_n}{n}$. Если k — произвольная точка из K_1, то $k_i - k \in 2^{-1}U$ при некотором i, заключенном между 1 и n. Так как $k_i - k \in (1+\varepsilon)U$ при $1 \leqslant i \leqslant n$ и $\varepsilon > 0$, то $p \in n^{-1}(2^{-1}U + (n-1)(1+\varepsilon)U) + k$; полагая $\varepsilon = \frac{1}{4(n-1)}$, мы найдем, что $p \in \left(1 - \frac{1}{4n}\right)U + k$ для каждого $k \in K_1$. Предположим, что $K_2 = K_1 \cap \bigcap_{k \in K_1}\left(\left(1 - \frac{1}{4n}\right)\overline{U} + k\right) \neq \varnothing$. Так как множество $\left(1 - \frac{1}{4n}\right)\overline{U}$ не содержит $K_1 - K_1$, то $K_2 \neq K_1$. Ясно, что замкнутое множество K_2 выпукло. Далее, так как $T(a\overline{U}) \subseteq a\overline{U}$ при $T \in \mathfrak{G}$, то мы имеем, что $T(a\overline{U} + k) \subseteq a\overline{U} + Tk$ при $T \in \mathfrak{G}$, $k \in K_1$. Поскольку $\mathfrak{G}$ — группа и $TK_1 \subseteq K_1$ при $T \in \mathfrak{G}$, то $TK_1 = K_1$ при $T \in \mathfrak{G}$. Отсюда вытекает, что $\mathfrak{G}K_2 \subseteq K_2$, но это противоречит минимальности K_1, ч. т. д.

11. Упражнения

1. Пусть C — замкнутое выпуклое сепарабельное множество в B — пространстве, а p — его крайняя точка. Пусть μ — положительная мера, определенная на борелевских подмножествах множества C и такая, что $\mu(C) = 1$. Показать, что если $p = \int_C x\mu(dx)$, то $\mu(p) = 1$.

2. Пусть (S, Σ, μ) — пространство с положительной мерой. Показать, что пространство $L_\infty(S, \Sigma, \mu)$ может быть слабо полным или рефлексивным только в том случае, если оно конечномерно. Пусть $\{f_n\}$ — некоторая последовательность точек из $L_\infty(S, \Sigma, \mu)$ и $f \in L_\infty(S, \Sigma, \mu)$. Обозначим через M множество всех λ из $ba(S, \Sigma_1, \mu_1)$ (обозначение см. в теореме IV.8.16), принимающих только значения 0 и 1. Показать, что последовательность $\{f_n\}$ в том и только в том случае будет слабо фундаментальной, если она равномерно ограничена и $\lim_{n\to\infty} \int_S f_n(s)\lambda(ds)$ существует для всех λ из M. Показать, что f_n в том и только в том случае слабо сходится к f, если $\{f_n\}$ равномерно ограничена и $\lim_{n\to\infty} \int_S f_n(s)\lambda(ds) = \int_S f(s)\lambda(ds)$ для каждого λ из M.

3. Показать, что замкнутая единичная сфера пространства c_0 не содержит крайних точек.

4. Пусть (S, Σ, μ) — пространство с σ-конечной положительной мерой. Показать, что пространство $L_1(S, \Sigma, \mu)$ в том и только том случае изометрически изоморфно пространству $\mathfrak{X}^*$, сопряженному к некоторому B-пространству $\mathfrak{X}$, если S можно представить в виде счетной суммы $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ измеримых подмножеств S_i таких, что $\mu(S_i) < \infty$ и что для каждого измеримого подмножества A множества S_i либо $\mu(A) = \mu(S_i)$, либо $\mu(A) = 0$.

5. Если замкнутая единичная сфера бесконечномерного B-пространства $\mathfrak{X}$ содержит лишь конечное число крайних точек, то пространство $\mathfrak{X}$ не является изометрически изоморфным пространству, сопряженному к некоторому B-пространству.

6. Пусть S — топологическое пространство, а $C(S)$ — B-пространство определенных на S, вещественных ограниченных непрерывных функций. Сколько крайних точек имеется на замкнутой единичной сфере пространства $C(S)$?.

7. Показать, что для того, чтобы каждая граничная точка замкнутой единичной сферы S B-пространства $\mathfrak{X}$ была крайней точкой, необходимо и достаточно, чтобы из равенства $|x+y| = |x| + |y|$ вытекала линейная зависимость x и y. Пространство, обладающее таким свойством, называется *строго выпуклым*. Показать, что для того, чтобы пространство $\mathfrak{X}$ было строго выпуклым, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $x^* \in \mathfrak{X}^*$ $\sup_{x \in S} \operatorname{Re} x^* x$ достигался самое большее для одного x из S.

8. Пусть $\mathfrak{X} = c$ и $\mathfrak{Y} = c \times c$, причем норма в $\mathfrak{Y}$ определяется равенством $|[y_1, y_2]| = \max(|y_1|, |y_2|)$. Показать, что пространства $\mathfrak{X}^*$ и $\mathfrak{Y}^*$ изометрически изоморфны, хотя $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ не являются таковыми.

9. (Кли.) Пусть K является совокупностью последовательностей $x = [\xi_i] \in l_p$, $1 \leqslant p < \infty$, у которых $\xi_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots$. Тогда K есть замкнутое выпуклое множество, каждая точка которого является граничной. Однако для того, чтобы множество K имело в точке $[\xi_i]$ непрерывный касательный функционал, необходимо и достаточно, чтобы для некоторого $m \geqslant 0$ $\xi_m = 0$.

10. Определить касательную функцию замкнутой единичной сферы гильбертова пространства.

11. Пусть (S, Σ, μ) — пространство с положительной мерой и $p > 1$. Определить касательную функцию замкнутой единичной сферы пространства $L_p(S, \Sigma, \mu)$. Показать, что замкнутая единичная сфера пространства $L_p(S, \Sigma, \mu)$ в каждой своей граничной точке обладает единственным касательным функционалом. Будет ли это верно и при $p = 1$?

12. Пусть $\mathfrak{X}$ является B-пространством, а K — слабо бикомпактное выпуклое подмножество пространства $\mathfrak{X}$. Показать, что мно-

жество K обладает непрерывным касательным функционалом в каждой точке некоторого множества, всюду плотного на его границе.

13. Пусть $\mathfrak{X}$ является B-пространством, а K^* — ограниченное $\mathfrak{X}$-замкнутое выпуклое подмножество пространства $\mathfrak{X}^*$. Показать, что K^* обладает непрерывным касательным функционалом в каждой точке некоторого множества, всюду плотного на его границе.

14. Определение. Точка p подмножества A метрического пространства называется *диаметральной*, если $\sup\limits_{x\in A}\varrho(p, x)=\sup\limits_{x,\, y\in A}\varrho(x, y)$. Подмножество метрического пространства M называется *допустимым*, если оно является пересечением замкнутых сфер $\{x \mid \varrho(x, y_0)\leqslant \leqslant c_0\}$, $y_0\in M$, $0<c_0\leqslant\infty$. Метрическое пространство называется пространством *нормальной структуры*, если каждое его допустимое подмножество, содержащее более одной точки, содержит недиаметральную точку.

15. Бикомпактное выпуклое подмножество B-пространства является пространством нормальной структуры.

16. Пусть M — бикомпактное метрическое пространство и A — замкнутое подмножество M. Пусть преобразование $T: M\to M$ таково, что $\varrho(Tx, Ty)\geqslant\varrho(x, y)$ для $x, y\in M$. Тогда если $TA\supseteq A$ или если $TA\subseteq A$, то $TA=A$.

17. Показать, что если метрическое пространство M нормальной структуры содержит по меньшей мере две точки, то для каждого отображения T пространства M на себя, при котором $\varrho(Tx, Ty)\leqslant \leqslant\varrho(x, y)$; $x, y\in M$, существует такое собственное подмножество A, что $TA\subseteq A$. Показать, что если, кроме того, M бикомпактно, то оно содержит такую точку p, что $Tp=p$.

18. Пусть M — бикомпактное метрическое пространство нормальной структуры. Показать, что для каждого отображения $T: M\to M$, при котором $\varrho(Tx, Ty)\geqslant\varrho(x, y)$; $x, y\in M$, найдется такая точка $p\in M$, что $Tp=p$.

19. Пусть M — полное метрическое пространство, преобразование $T: M\to M$ таково, что $\varrho(Tx, Ty)\leqslant a\varrho(x, y)$ для $x, y\in M$, и $0<a<1$. Показать, что найдется в точности одна такая точка $p\in M$, что $Tp=p$.

20. Пусть T — нелинейное отображение рефлексивного B-пространства $\mathfrak{X}$ в себя, непрерывное в $\mathfrak{X}^*$-топологии пространства $\mathfrak{X}$. Предположим, что $\lim\limits_{|x|\to\infty}\frac{|Tx|}{|x|}=0$. Показать, что $(I+T)\,\mathfrak{X}=\mathfrak{X}$.

21. Пусть S — бикомпактное хаусдорфово пространство, а μ — определенная на S конечная регулярная мера. Пусть Φ — поле вещественных или комплексных чисел и K — элемент из $C(S\times S\times\Phi)$.

32 Заказ № 1324

Показать, что нелинейное интегральное уравнение

$$f(s)=g(s)-\int_S K(s,\ t,\ g(t))\,\mu(dt)$$

для каждого $f \in C(S)$ имеет решение $g \in C(S)$.

22. Определение. Пусть G — топологическая группа. Тогда определенная на G регулярная мера μ называется *левоинвариантной*, если $\mu(sE)=\mu(E)$ для всех $s \in G$, $E \in \Sigma$. Такую меру часто называют *мерой Хаара*

23. (Хаар.) Пусть G — бикомпактная топологическая группа, а Σ — совокупность борелевских подмножеств G. Показать, что на Σ существует регулярная левоинвариантная мера, не равная тождественно нулю, и что любые две левоинвариантные меры на Σ отличаются лишь скалярным множителем. Показать, что левоинвариантная мера удовлетворяет также соотношениям $\mu(Es)=\mu(E)$ и $\mu(E^{-1})=\mu(E)$.

12. Примечания и дополнения

Выпуклые множества и линейные топологические пространства. Доказательство теоремы 1.12, по существу, принадлежит Мазуру [1, стр. 73], доказавшему, что содержащее внутреннюю точку выпуклое множество в вещественном линейном нормированном пространстве может быть отделено (в смысле определения 1.9) от любой невнутренней по отношению к нему точки. Это обобщает аналогичный результат, полученный Асколи [1, стр. 206] для сепарабельных пространств. Эйдельгайт [1] обобщил этот результат на случай двух выпуклых множеств, обладающих внутренними точками, но не имеющих общей внутренней точки. Более простые доказательства теоремы Эйдельгайта были предложены Какутани [1] и Ботсом [1].

Теорема 1.12 в ее полной общности впервые была сформулирована Дьёдонне [1], доказательство которого несколько отличается от нашего. Дьёдонне заметил, что, хотя предположение о существовании C-внутренней точки может быть заменено более слабым предположением о том, что M содержит точку, C-внутреннюю относительно наименьшего содержащего M векторного подпространства, тем не менее от него не удается отказаться полностью. Другой подход к этому вопросу имеется в монографии Стоуна [2], краткий обзор его можно найти в работе Кли [3, стр. 445].

Тьюки [1, стр. 96] доказал, что разделение открытого выпуклого множества и произвольного выпуклого множества возможно при условии, что они не пересекаются (ср. с теоремой 2.8). Он доказал также, что выпуклое множество K, бикомпактное в $\mathfrak{X}^*$-топологии линейного нормированного пространства $\mathfrak{X}$, можно отделить от произвольного не пересекающегося с ним выпуклого замкнутого множества (ср. с теоремой 2.10). Тьюки заметил, что отсюда вытекает, что в рефлексивном B-пространстве два непересекающихся замкнутых выпуклых множества, одно из которых ограничено, могут быть разделены гиперплоскостью.

Тьюки показал, что эти результаты не могут быть слишком сильно обобщены, построив следующие примеры:

(I) Двух непересекающихся ограниченных выпуклых множеств, одно из которых замкнуто и которые не могут быть разделены.

(II) Двух непересекающихся замкнутых выпуклых множеств в гильбертовом пространстве, которые не могут быть разделены.

Аналогично этому Дьёдонне [2] нашел пример:

(III) Двух непересекающихся замкнутых ограниченных выпуклых множеств в l_1, которые не могут быть разделены.

Последний результат следующим образом был обобщен Кли [4, стр. 881]:

(IV) Каждое нерефлексивное сепарабельное B-пространство содержит два непересекающихся ограниченных замкнутых выпуклых множества, которые не могут быть разделены.

В связи с этими примерами замечательна следующая теорема Тьюки [1, стр. 99]: Если A и B — замкнутые выпуклые множества в линейном нормированном пространстве и если A ограничено, то множество $A-B=\{a-b \mid a\in A,\ b\in B\}$ содержит каждую сферу, в которой оно всюду плотно.

Тьюки показал, что каждое бесконечномерное линейное нормированное пространство $\mathfrak{X}$ является суммой двух взаимно дополнительных всюду плотных выпуклых множеств. То, что число два здесь может быть заменено любым кардинальным числом, не превосходящим мощности пространства $\mathfrak{X}$, было показано в работе Кли [2]. Кли [3, стр. 454], кроме того, обобщил результат Тьюки на пространства несколько более общего типа.

Леммы 2.4 и 2.5 для важного частного случая подмножеств сопряженного пространства $\mathfrak{X}^*$, рассматриваемого в его $\mathfrak{X}$-топологии, были доказаны Крейном и Шмульяном [1].

Теорема 2.6 принадлежит Мазуру [2].

Слабые топологии. Понятие слабой сходимости последовательности в L_2 [0, 1] введено Гильбертом, а в L_p [0, 1] — Ф. Риссом, однако использование слабых окрестностей при определении настоящей топологии было введено Дж. Нейманом [2, стр. 380], показавшим (см. упражнение 7.38), что при использовании этой топологии не достаточно только секвенциальных понятий. Буржен [1, стр. 608] усилил это, найдя такое бикомпактное в $\mathfrak{X}$-топологии пространства, сопряженного к B-пространству $\mathfrak{X}$, множество, в котором последовательности сходятся только при условии, что, начиная с некоторого места, они постоянны. Вехаузен [1] показал, что слабая топология в том и только в том случае эквивалентна топологии по норме, если пространство конечномерно.

Можно упомянуть еще, что некоторые авторы называют $\mathfrak{X}$-топологию пространства $\mathfrak{X}^*$ *слабой** (или w^*) *топологией* пространства $\mathfrak{X}^*$, однако мы не будем пользоваться этой терминологией.

Теорема 3.9 принадлежит Филлипсу [7, стр. 116]. Дьёдонне [3, стр. 109] доказал теорему 3.9, пользуясь доказываемой по индукции леммой 3.10. Частный случай теоремы 3.9 в предположении, что $\mathfrak{X}=\mathfrak{Y}^*$ и $\Gamma=\mathfrak{Y}$, был доказан для сепарабельного случая Банахом [1, стр. 113], а в полной общности — Алаоглу [1, стр. 256]. Майкл [1] обобщил лемму 3.10 на случай линейных операторов.

Эквивалентность слабого и сильного замыканий для подпространств линейного нормированного пространства (частный случай теоремы 3.13) доказана Банахом [1, стр. 49, 116]. Мазур [1,стр. 80] показал, что сильно замкнутое выпуклое множество в линейном нормированном пространстве содержит все слабые пределы последовательностей элементов этого множества. Незначительное изменение этого доказательства приводит к теореме 3.13. Банах и Сакс [1] доказали, что каждая слабо сходящаяся последовательность $\{x_n\}$ из $L_p(0, 1)$ или l_p при $p>1$ содержит подпоследовательность $\{y_i\}$, $(C, 1)$-суммируемую по норме, т. е. такую, что последовательность $\{n^{-1}\sum_{i=0}^{n-1} y_i\}$ сильно сходится. То, что этот более сильный вариант следствия 3.14 не справедлив в $C[0, 1]$, было показано противоречащим примером Я. Шрейера [1]. Изучая общего вида выпуклые комбинации, Зальцвассер [1] и независимо от него Джиллеспи и Гурвиц [1, стр. 538] доказали справедливость следствия 3.14 для пространства $C[0, 1]$. Какутани [22] дал доказательство теоремы Банаха — Сакса, справедливое для любого равномерно выпуклого пространства.

То обстоятельство, что из обычной (метрической) непрерывности линейного преобразования одного B-пространства в другое вытекает его слабая непрерывность, было отмечено Банахом [1, стр. 124]. Обратное утверждение теоремы 3.15 было доказано Данфордом [1, стр. 317]. Некоторые результаты в этом направлении были получены также Дьёдонне [3, стр. 122, 131—137].

Кроме рассмотренных нами топологических понятий замыкания, для подпространств или выпуклых подмножеств линейного топологического пространства рассматривались и различные специальные определения замыкания. Банах в своей монографии ввел понятия *регулярного* и *трансфинитного замыканий* для линейных многообразий в пространстве, сопряженном к произвольному B-пространству, и показал эквивалентность этих понятий (см. Банах [1, стр. 105]). Банах [1, стр. 108] доказал, кроме того, что в случае сепарабельного пространства эти понятия совпадают с понятием замыкания в $\mathfrak{X}$-топологии пространства $\mathfrak{X}^*$. Алаоглу [1, стр. 256] и независимо Какутани [2, стр. 170] установили эквивалентность этих типов замыкания без каких-либо предположений о сепарабельности. Крейн и Шмульян [1] ввели определение *регулярно выпуклого* множества в $\mathfrak{X}^*$. Нетрудно показать, что регулярно выпуклые множества в $\mathfrak{X}^*$—это просто выпуклые множества, замкнутые в $\mathfrak{X}$-топологии пространства $\mathfrak{X}^*$.

Слабые топологии и рефлексивность. Ослабленный вариант важной теоремы 4.2 (с заменой бикомпактности на компактность) был доказан Банахом [1, стр. 107] для сепарабельных пространств; Алаоглу [1, стр. 255] доказал ее в том виде, как она формулируется у нас. (Еще раньше эта теорема в ее полной общности была сформулирована без доказательства в работах Алаоглу [2], Бурбаки [1] и Какутани [3, стр. 63].) Теорема 4.5 принадлежит Голдстайну [1, стр. 128], хотя он выразил этот результат в других терминах и дал совершенно другое доказательство. Другие доказательства, более близкие к нашему, были предложены Какутани [2, стр. 171], Дэйем [2, стр. 764] и Дьёдонне [3, стр. 137].

Теорема 4.7 была доказана Банахом [1, стр. 160] для сепарабельных пространств; им же было получено несколько ее обобщений на произвольные пространства. В том виде, в каком мы сформулировали теорему 4.7, она была приведена Бурбаки [1, стр. 1703], где доказательство ее не было, однако, достаточно подробным. Идея нашего доказательства подсказывается работами Какутани [3, стр. 64; 2, стр. 171]. Эта теорема независимо была также доказана В. Л. Шмульяном [2, стр. 471]. Более сильный результат, состоящий в том, что для B-пространства рефлексивность эквивалентна слабой компактности единичной сферы, принадлежит Эберлейну [1].

Пусть $\mathfrak{X}$ — линейное пространство, а Γ — тотальное подпространство в $\mathfrak{X}^*$. Понятие Γ-бикомпактности связано с различными другими введенными для выпуклых множеств понятиями бикомпактности. Приводимая ниже теорема, использующая теорию кардинальных и порядковых чисел, является типичным из результатов, полученных в этом круге вопросов. Результаты такого рода, связывающие бикомпактность и выпуклость с трансфинитными процессами различных типов, исследовались в монографии Банаха; в последнее время большой сдвиг в этом направлении был сделан работами таких советских математиков, как В. Л. Шмульян [1, 5, 8, 10], В. Р. Гантмахер и В. Л. Шмульян [1] и Мильман [1]. См. также работу Филлипса [1].

Теорема (*В. Л. Шмульян*). *Пусть $\mathfrak{X}$ — линейное пространство, а K — его выпуклое подмножество. Обозначим через Γ тотальное подпространство пространства $\mathfrak{X}^*$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *K — бикомпактно в Γ-топологии.*

(2) *Если* x_ξ ($\xi < \theta$, θ — *предельное порядковое число*) *есть трансфинитная последовательность в* K, *то найдется такое* $x_0 \in K$, *что для каждого* $f \in \Gamma$

$$\varliminf_{\xi \to \theta} \operatorname{Re} f(x_\xi) \leqslant f(x_0) \leqslant \varlimsup_{\xi \to \theta} \operatorname{Re} f(x_\xi).$$

(3) *Для каждого* $f \in \Gamma$ $\sup\limits_{x \in K} \operatorname{Re} f(x) < \infty$; *кроме того, каждый линейный функционал* Φ *на* Γ, *удовлетворяющий неравенству*

$$\inf_{x \in K} \operatorname{Re} f(x) \leqslant \operatorname{Re} \Phi(f) \leqslant \sup_{x \in K} \operatorname{Re} f(x),$$

удовлетворяет также условию

$$\Phi(f) = f(x_0)$$

для некоторого $x_0 \in K$.

(4) *Если* K_ξ ($\xi < \theta$, *где* θ — *предельное порядковое число*) *есть монотонно убывающая трансфинитная последовательность* Γ-*замкнутых выпуклых множеств, каждое из которых пересекается с* K, *то*

$$K \cap (\cap K_\xi) \neq \varnothing.$$

Доказательство. Ясно, что из (1) вытекает (4). Из утверждения (4) вытекает (2); в самом деле, если мы положим

$$K_\xi = \overline{\operatorname{co}}\,(\bigcup_{\eta < \xi} x_\eta),$$

где замыкание берется в Γ-топологии, то множества K_ξ удовлетворяют условию утверждения (4); и если $x_0 \in K \cap (\cap K_\xi)$, то ясно, что x_0 удовлетворяет неравенству утверждения (2).

Далее, из (2) вытекает (3). Действительно, предположим, что справедливо утверждение (2), и пусть Φ удовлетворяет неравенству утверждения (3). Предположим, что утверждение (3) неверно, и пусть $\aleph$ — наименьшее кардинальное число, для которого существует подмножество Γ' множества Γ мощности $\aleph$ и такое, что равенство

$$\Phi(f) = f(x), \quad f \in \Gamma',$$

не имеет места ни для одного $x \in K$. Пусть θ обозначает наименьшее порядковое число мощности $\aleph$, и пусть Γ' вполне упорядочено как f_ξ, $\xi < \theta$. Если $\aleph$ бесконечно, то θ есть предельное порядковое число. В этом случае можно найти такую трансфинитную последовательность $\{x_\xi\}$ элементов из K, что

$$(*) \qquad \Phi(f_\eta) = f_\eta(x_\xi) \quad \text{для } \eta \leqslant \xi.$$

Тогда, по условию (2), мы можем найти такое $\bar{x} \in K$, что

$$\varliminf_{\xi \to \theta} \operatorname{Re} f(x_\xi) \leqslant \operatorname{Re} f(\bar{x}) \leqslant \varlimsup_{\xi \to \theta} \operatorname{Re} f(x_\xi), \quad f \in \Gamma.$$

Так как, ввиду равенства (*)

$$\lim_{\xi\to\theta} \operatorname{Re} f(x_\xi) = \operatorname{Re}\Phi(f) \quad \text{для } f \in \Gamma',$$

то $\operatorname{Re}\Phi(f) = \operatorname{Re} f(\bar{x})$ для $f \in \Gamma'$, откуда легко вытекает, что $\Phi(f) = f(\bar{x})$ при $f \in \Gamma'$. Если $\aleph$ есть конечное кардинальное число n, то $\Gamma' = \{f_1, \ldots, f_n\}$, и мы можем рассуждать следующим образом. Ясно, что множество $K' = \{[f_1(x), \ldots, f_n(x)]\}$, $x \in K$, есть выпуклое подмножество n-мерного евклидова пространства. Легко видеть, что ввиду условия (2) множество K' замкнуто. Если мы положим $p_i = \Phi(f_i)$ и $p = [p_1, \ldots, p_n]$, то точка $p \notin K'$. Таким образом, по теореме 2.10, можно найти такие скаляры $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и такие вещественные числа c и $\varepsilon > 0$, что

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i\right) > c + \varepsilon > c > \operatorname{Re}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x)\right), \quad x \in K.$$

Таким образом, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i = f \in \Gamma$ и

$$\operatorname{Re}\Phi(f) > c + \varepsilon > c > \operatorname{Re} f(x), \quad x \in K,$$

что противоречит посылке утверждения (3).

Наконец, из утверждения (3) вытекает (1); в самом деле, предположим, что утверждение (3) справедливо. Пусть каждому $x \in K$ соответствует функционал Φ на Γ, определяемый равенством

$$\Phi(f) = f(x).$$

Из утверждения (3) вытекает, что множество K отображается на множество

$$\{\Phi \mid \Phi \in \Gamma^+, \quad \inf \operatorname{Re} f(K) \leqslant \operatorname{Re}\Phi(f) \leqslant \sup \operatorname{Re} f(K)\}.$$

Легко видеть, что если рассматривать $\mathfrak{X}$ и Γ^+ в Γ-топологиях, то это отображение будет гомеоморфизмом. Бикомпактность множества K' теперь без труда вытекает из леммы 4.1, ч. т. д.

Слабые топологии и бикомпактность. Прямые утверждения теорем 5.1 и 5.2 принадлежат Банаху [1, стр. 157—158].

Частный случай теоремы 5.7, относящийся к подпространствам пространства, сопряженного к некоторому B-пространству, был сформулирован в статье Бурбаки [1] и доказан в работе Дьёдонне [3, стр. 129]. Общий случай теоремы 5.7 принадлежит М. Г. Крейну и В. Л. Шмульяну [1].

Определение BX-топологии и доказательство леммы 5.4 принадлежат Дьёдонне [8]. Обобщение теоремы 5.7 на более общие пространства можно найти у Кёте [10].

Важная теорема 6.1 доказывалась постепенно. В. Л. Шмульян [8] доказал, что из (II) вытекает (I). а также, что слабо секвенциальное замыкание слабо компактного множества само слабо компактно (последнее см. в работе М. Г. Крейна и В. Л. Шмульяна [1]). Эберлейн [1] показал, что для того, чтобы множество было слабо бикомпактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было слабо замкнутым и слабо компактным. Предлагаемое нами доказательство, являющееся простой модификацией доказательств В. Л. Шмульяна и Эберлейна, принадлежит Брейсу [1, 2]. Обобщения этих результатов на более общие пространства были сделаны Гротендиком [1, 2], Дьёдонне и Л. Шварцем [1, стр. 89], Коллинзом [1] и Птаком [1—3].

Теорема 6.2 принадлежит В. Л. Шмульяну [5]. Другое ее доказательство было предложено Кли [4], а обобщение на более общие пространства сделано Дьёдонне [15].

В случае сепарабельного B-пространства теорема 6.4 была доказана М. Г. Крейном [1], а в общем случае — М. Г. Крейном и В. Л. Шмульяном [1, стр. 581]; см. также работу Филлипса [1].

Крайние точки. Теорема 8.4, по существу, принадлежит Крейну и Мильману [1]. Усовершенствованный вариант теоремы 8.4 был впоследствии доказан Мильманом и Рутманом [1]. Мы привели доказательство теоремы 8.4, принадлежащее Келли [1]. См. также работы Хотта [1] и Иосида и Фукамия [1].

Лемма 8.6 принадлежит Аренсу и Келли [1], использовавшим ее при доказательстве теоремы 8.8. Мильман [2—4] дал близкие к этому результаты относительно крайних точек. Сама теорема 8.8 в некотором частном случае была доказана Банахом [1, стр. 145], а в общем случае — Стоуном [1, стр. 469].

Касательные функционалы. Леммы 9.1 и 9.3 и теорема 9.5 принадлежат Асколи [1, стр. 53—56, 205] для случая сепарабельного нормированного пространства и Мазуру [1, стр. 75—78] для случая прозвольного нормированного пространства. Теорема 9.8 также принадлежит Мазуру [1]. Московиц и Дайнс [1, стр. 526] доказали теорему 9.7 для гильбертова пространства, однако их доказательство без изменений проходит и в общем случае.

Другие доказательства того, что выпуклое множество, обладающее внутренней точкой, в каждой своей граничной точке имеет опорную плоскость, содержатся в работах Московица и Дайнса [2] и Кли [1, 3, стр. 457], где доказаны предложения 9.10—9.12. В работах Московица и Дайнса [1, стр. 531] и Кли [1, стр. 771] приводятся примеры, показывающие, что для того, чтобы опорная плоскость существовала в *каждой* граничной точке, нельзя отбросить условие, что существует внутренняя точка.

Несколько других результатов относительно выпуклых множеств в весьма общих пространствах содержатся в работе Кли [3].

Теоремы о неподвижной точке. Доказательство теоремы Брауэра о неподвижной точке с минимальным использованием теории гомологий имеется в работе Л. Грейвса [2, стр. 149]. П. С. Александров и Хопф [1, стр. 377] дали другое доказательство этой теоремы наряду с различными другими теоремами о неподвижной точке, которые можно получить гомологическими методами. См. также работы Гуревича и Волмэна [1, стр. 40] или Лефшеца [1, стр. 318 и след.], [2, стр. 117].

Прежде чем доказывать теорему Броуэра о неподвижной точке, заметим, что случай комплексных скаляров является следствием случая вещественных скаляров. Это вытекает из того обстоятельства, что комплексное пространство E^n изометрично обычному пространству E^{2n}, причем единичные сферы этих пространств естественным образом соответствуют друг другу. Мы ограничимся поэтому случаем вещественного евклидова пространства. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма. *Пусть f — бесконечно дифференцируемая функция $n+1$ переменных $(x_0, \ldots, x_n)$ со значениями в E^n. Обозначим через D_i определитель, столбцы которого состоят из n частных производных $f_{x_0}, \ldots, f_{x_{i-1}}, f_{x_{i+1}}, \ldots, f_{x_n}$. Тогда*

$$[*] \qquad \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{\partial}{\partial x_i} D_i = 0.$$

Доказательство. Для каждой пары i, j не равных между собой целых чисел между 0 и n обозначим через C_{ij} определитель, первый столбец которого есть $f_{x_i x_j}$, а остальные столбцы которого суть векторы $f_{x_0}, \ldots, f_{x_n}$, расположенные в порядке возрастания индексов, и где f_{x_i} и f_{x_j} опущены при перечислении. Ясно, что $C_{ij} = C_{ji}$, и, по правилам дифференцирования определителей и перестановки столбцов в них, мы имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_i} D_i = \sum_{j<i} (-1)^j C_{ij} + \sum_{j>i} (-1)^{j-1} C_{ij}.$$

Следовательно,

$$(-1)^i \frac{\partial}{\partial x_i} D_i = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{i+j} C_{ij} \sigma(i, j),$$

где $\sigma(i, j) = 1$, если $j < i$, $\sigma(i, j) = 0$, если $i = j$, и $\sigma(i, j) = -1$, если $j > i$. Таким образом,

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{\partial}{\partial x_i} D_i = \sum_{i,\, j=0}^{n} (-1)^{i+j} C_{ij} \sigma(i, j).$$

Переставляя в этом выражении индексы суммирования i, j и пользуясь тем, что $\sigma(i, j)=-\sigma(j, i)$, мы видим, что

$$\sum_{i, j=0}^{n}(-1)^{i+j} C_{ij}\sigma(i,j)=\sum_{i, j=0}^{n}(-1)^{j+i}C_{ji}\sigma(j, i)=$$
$$=(-1)\sum_{i, j=0}^{n}(-1)^{i+j}C_{ij}\sigma(i, j).$$

Таким образом, каждое из трех равных между собой выражений в последней формуле должно быть равно нулю, и формула [*] доказана.

Теорема (*Броуэр*). *Если φ есть непрерывное отображение замкнутой единичной сферы $S=\{x\in E^n \mid |x|\leqslant 1\}$ n-мерного евклидова пространства в себя, то найдется такая точка $y\in S$, что $\varphi(y)=y$.*

Доказательство. Как мы видели, достаточно рассмотреть случай вещественного евклидова пространства. Далее, из теоремы Вейерштрасса об аппроксимации непрерывных функций n переменных вытекает, что каждое непрерывное отображение φ сферы S в себя является пределом некоторой равномерно сходящейся последовательности $\{\varphi_k\}$ бесконечно дифференцируемых отображений сферы S в себя. Предположим, что теорема была бы доказана для бесконечно дифференцируемых отображений. Тогда для каждого натурального k найдется такая точка $y_k\in S$, что $\varphi_k(y_k)=y_k$. Ввиду бикомпактности S некоторая подпоследовательность $\{y_{k_i}\}$ последовательности $\{y_k\}$ сходится к некоторой точке y из S. Так как $\lim\limits_{i\to\infty}\varphi_{k_i}(x)=$ $=\varphi(x)$ равномерно относительно S, то $\varphi(y)=\lim\limits_{i\to\infty}\varphi_{k_i}(y_{k_i})=$ $=\lim\limits_{i\to\infty}y_{k_i}=y$. Следовательно, достаточно рассмотреть случай, когда отображение φ бесконечно дифференцируемо.

Предположим, что φ — бесконечно дифференцируемое отображение сферы S в себя и что $\varphi(x)\neq x$ для всех $x\in S$. Пусть $a=a(x)$ — больший корень квадратного уравнения $|x+a(x-\varphi(x))|^2=1$, так что

$$1=(x+a(x-\varphi(x)),\ x+a(x-\varphi(x)))=$$
$$=|x|^2+2a(x,\ x-\varphi(x))+a^2|x-\varphi(x)|^2.$$

По формуле для решения квадратного уравнения

$$[**]\qquad |x-\varphi(x)|^2a=(x,\ \varphi(x)-x)+$$
$$+\{(x,\ x-\varphi(x))^2+(1-|x|^2)|x-\varphi(x)|^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

Так как $|x-\varphi(x)|\neq 0$ при $x\in S$, то дискриминант $(x,\ x-\varphi(x))^2+$ $+(1-|x|^2)|x-\varphi(x)|^2$ при $|x|\neq 1$ положителен. Если же $|x|=1$, то $(x, x-\varphi(x))\neq 0$, так как в противном случае $(x,\ \varphi(x))=1$, а скалярное произведение двух векторов, по длине не превосходящих 1, может быть равно 1 только в том случае, когда они равны между собой. Таким образом, этот дискриминант не может быть равен нулю для $x \in S$. Так как функция $t^{1/2}$ является бесконечно дифференцируемой функцией t при $t > 0$ и так как $|x - \varphi(x)| \neq 0$ при $x \in S$, то из формулы [**] вытекает, что функция $a(x)$ является при $x \in S$ бесконечно дифференцируемой. Кроме того, из формулы [**] вытекает, что $a(x)=0$ при $|x| = 1$. Далее, для каждого вещественного числа t положим $f(t; x)=x+ta(x)(x-\varphi(x))$. Тогда f будет бесконечно дифференцируемой функцией $n+1$ переменных $t, x_1, \ldots, x_n$ со значениями в E^n. Так как $a(x)=0$ при $|x|=1$, то $f_t(t; x)=0$ при $|x|=1$. Кроме того, $f(0; x)=x$, и из определения a вытекает, что $|f(1; x)|=1$ для всех $x \in S$.

Обозначим через $D_0(t; x)$ определитель, столбцами которого служат векторы $f_{x_1}(t; x), \ldots, f_{x_n}(t; x)$, и рассмотрим интеграл

$$I(t) = \int_S \cdots \int D_0(t; x)\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Ясно, что $I(0)$ есть объем сферы S и, значит, $I(0) \neq 0$. Так как $f(1; x)$ удовлетворяет нетривиальному функциональному уравнению $|f(1; x)| = 1$, то якобиан $D_0(1; x)$ тождественно равен нулю и, следовательно, $I(1)=0$. Ожидаемое нами противоречие будет получено, если мы сможем показать, что $I(t)$ является константой, т. е. что $I'(t)=0$. Для того чтобы это доказать, применим дифференцирование под знаком интеграла и воспользуемся формулой [*] для того, чтобы представить $I'(t)$ в виде суммы интегралов вида

$$[***] \qquad \pm \int_S \cdots \int \frac{\partial}{\partial x_i} D_i(t; x)\, dx_1 \ldots dx_n,$$

где $D_i(t; x)$ есть определитель, столбцами которого служат векторы

$$f_t(t; x),\ f_{x_1}(t; x),\ \ldots,\ f_{x_{i-1}}(t; x),\quad f_{x_{i+1}}(t; x),\ \ldots,\ f_{x_n}(t; x).$$

Обозначим через S_i единичную сферу в пространстве переменных $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$. Пусть

$$x_i^+ = +\sqrt{1-(x_1^2+\ldots+x_{i-1}^2+x_{i+1}^2+\ldots+x_n^2)}, \text{ а } x_i^- = -x_i^+;$$

через p_i^+ обозначим точку, j-я координата которой равна x_j, если $j \neq i$, и x_i^+ — если $j=i$, а через p_i^- — точку, j-я координата которой равна x_j, если $j \neq i$, и x_i^- — если $j=i$. Тогда интеграл [***] будет равен

$$\pm \int_{S_i} \cdots \int D_i(t, p_i^+)\, dx_1 \ldots dx_{i-1} dx_{i+1} \ldots dx_n \mp$$

$$\mp \int_{S_i} \cdots \int D_i(t, p_i^-)\, dx_1 \ldots dx_{i-1} dx_{i+1} \ldots dx_n.$$

Но $|p_i^+|=|p_i^-|=1$, и так как $f_t(t;x)=0$, если $|x|=1$, то из определения D_i вытекает, что эти интегралы равны нулю. Это завершает доказательство.

Дж. Биркгоф и Келлог [1] первыми обобщили эту теорему на бесконечномерные векторные пространства, доказав, что бикомпактные выпуклые множества в C^n [0,1] и в L_2 [0,1] обладают Fp-свойством, и применив эти результаты к дифференциальным и интегральным уравнениям. Шаудер обобщил эту теорему сперва на бикомпактные выпуклые множества в B-пространстве с базисом [1], а затем и на произвольные B-пространства [2]. Тихонову [1] осталось сделать обобщение на локально выпуклые линейные топологические пространства, в которых теорема такого типа применяется к слабым топологиям точно так же, как в случае B-пространства,— к сильной топологии.

Из других обобщений теоремы о неподвижной точке упомянем следующее, принадлежащее Роте [1]. Непрерывное отображение единичного шара S B-пространства $\mathfrak{X}$ в относительно бикомпактное подмножество $\mathfrak{X}$, при котором граница $\{x||x|=1\}$ переходит в S, имеет по крайней мере одну неподвижную точку [1]).

Большинство из упомянутых выше работ имеют приложения к дифференциальным уравнениям. Исследование вопроса о неподвижной точке и другие абстрактные подходы к теоремам существования для дифференциальных уравнений можно найти в обзорных статьях Л. Грейвса [1] и Лере [1]. Работы Миранды [1] и В. В. Немыцкого [1] также будут полезны; особенно рекомендуется первая, содержащая обширную библиографию. Можно упомянуть, что, хотя метод неподвижной точки и другие топологические методы, вообще говоря, приводят только к теореме существования, Ароншайн [2] и Роте [2], между прочим, указали, каким образом можно получить также и теоремы единственности.

Пользуясь следствием 4.7, можно показать, что каждое слабо непрерывное (т. е. непрерывное в слабой топологии) отображение единичной сферы рефлексивного B-пространства в себя всегда имеет неподвижную точку. Какутани [5] построил пример, показывающий, что для сильно непрерывных отображений это не справедливо даже для гомеоморфного отображения сферы гильбертова пространства на себя. Дугунджи [1] показал, что для того, чтобы единичная сфера B-пространства с сильной топологией обладала Fp-свойством, необходимо и достаточно, чтобы это пространство было конечномерным.

Изучались еще «природа» и «устойчивость» неподвижных точек функций в соответствующей окрестности заданной функции, непод-

---

[1]) Большое число различных теорем о неподвижной точке принадлежит советским математикам. См., например, книгу М. А. Красносельского «Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений». — *Прим. ред.*

вижные точки которой известны. Вопросы такого рода рассматривались в работах Вехаузена [2], Киноситы [1], Форта [1].

Марков [1] доказал теорему 10.6, используя теорему Тихонова. Приводимое нами доказательство, по существу, принадлежит Какутани [4], давшему и несколько приложений этого результата; ему принадлежит и теорема 10.8. (См. также работу Пека [1].)

Материал, содержащийся в пунктах 11.14—11.18, взят из работы Бродского и Мильмана [1].

Конечномерные пространства. В этой главе мы ограничились рассмотрением выпуклых множеств в бесконечномерных пространствах. Существует большая теория специальных свойств выпуклых множеств в конечномерных пространствах. По этому вопросу читатель отсылается к работе Минковского [1] и трактату Боннезена и Фенхеля [1]. Этот трактат содержит большое количество результатов и их приложений, а также обширную библиографию.

Локально выпуклые пространства. Мы рассмотрели лишь немногое из весьма обширной теории локально выпуклых линейных топологических пространств. На самом деле теория таких пространств развита значительно сильнее, чем это сделано у нас. Кроме того, большое количество результатов было получено и для линейных топологических пространств, не предполагаемых локально выпуклыми. Читателю, интересующемуся этим вопросом, необходимо познакомиться с трактатами Бурбаки [2] и Накано [1] и с обзорной статьей Хайерса [3]. (См. также Себаштьян-и-Сильва [4*]. *Ред.*)

Равномерная выпуклость и дифференцируемость норм. Теория касательной плоскости, изложенная нами в § 9, была значительно продвинута в различных направлениях. Одно из наиболее интересных направлений касается дифференцируемости опорной функции $\mathfrak{k}(x)$ выпуклого тела в несколько более сильном смысле, чем в определении 9.2.

Определение. Пусть $\mathfrak{k}$ является опорной функцией выпуклого тела, содержащего нуль в качестве своей внутренней точки, а τ — его касательная функция. Если

$$\lim_{|y|\to 0} \frac{1}{|y|} \{\mathfrak{k}(x+y) - \mathfrak{k}(x) - \tau(x, y)\} = 0,$$

то функция $\mathfrak{k}$ называется *сильно дифференцируемой* в точке x.

Банах [1, стр. 144] показал, что для того, чтобы норма в пространстве $C[0, 1]$ была сильно дифференцируемой в точке $x_0 \in C[0, 1]$, необходимо и достаточно, чтобы функция x_0 достигала своего максимума в точности в одной точке. Мазур [1, стр. 78—79] доказал, что то же самое условие справедливо и в $B(S)$ и что норма в L_p, $p > 1$, сильно дифференцируема в каждой точке, за исключением нуля, и дал условия сильной дифференцируемости нормы в пространстве L_1. Он показал, кроме того, что в F-пространстве определенных на отрезке [0, 1] измеримых функций норма не дифференцируема ни в одной точке.

Мазур [3] доказал, что в рефлексивном пространстве, в котором норма сильно дифференцируема в каждой ненулевой точке, ограниченное замкнутое выпуклое множество является пересечением всех содержащих его замкнутых сфер.

В. Л. Шмульян [4, 6, 7, 9] получил несколько результатов относительно дифференцируемости и различных других свойств. В первых двух работах даются необходимые и достаточные условия для слабого типа дифференцируемости норм в пространствах $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}^*$, а также получены результаты относительно дифференцируемости, касательных плоскостей к единичной сфере, рефлексивности и различных других геометрических свойств.

В. Л. Шмульян [7] получил два интересных необходимых и достаточных условия сильной дифференцируемости нормы.

Теорема. *Для того чтобы норма в точке x B-пространства $\mathfrak{X}$ была сильно дифференцируемой, необходимо и достаточно, чтобы каждая последовательность элементов $x_n^* \in \mathfrak{X}^*$, удовлетворяющая условиям $|x_n^*| \leqslant 1$ и $x_n^*(x) \to |x|$, была сходящейся.*

Теорема. *Для того чтобы норма в точке x^* пространства $\mathfrak{X}^*$, сопряженного к B-пространству $\mathfrak{X}$, была сильно дифференцируемой, необходимо и достаточно, чтобы каждая последовательность элементов $x_n \in \mathfrak{X}$, удовлетворяющая условиям $|x_n| \leqslant 1$ и $x^*(x_n) \to$ $\to |x^*|$, была сходящейся.*

В работе В. Л. Шмульяна [7] получены результаты о связи сильной дифференцируемости нормы с понятиями рефлексивности, слабой полноты и равномерной выпуклости (см. ниже). В работе [9] Шмульян продолжил эти исследования, получив условия сильной дифференцируемости в l_∞, c, c_0, $C(S)$ и L_1 и доказав несколько теорем о дифференцируемости норм в банаховых алгебрах.

Джеймс [2] применил понятие дифференцируемости для получения нескольких результатов относительно некоторого типа «ортогональности» в линейных нормированных пространствах.

Оба приведенных выше результата В. Л. Шмульяна делают более интересным следующее определение, принадлежащее Кларксону [1].

Определение. B-пространство $\mathfrak{X}$ называется *равномерно выпуклым*, если в нем из того, что $x_n \in \mathfrak{X}$, $y_n \in \mathfrak{X}$, $|x_n| \leqslant 1$, $|y_n| \leqslant 1$ и $|x_n +$ $+ y_n| \to 2$, вытекает, что $|x_n - y_n| \to 0$.

Кларксон [1] показал, что пространства L_p, $p > 1$, являются равномерно выпуклыми (см. также работу Р. Боаса [1]). Мильманом [1] и Петтисом [2] (см. также работу Какутани [2]) было показано, что каждое равномерно выпуклое B-пространство рефлексивно, но что существуют рефлексивные пространства, не эквивалентные никакому равномерно выпуклому пространству (Дэй [3]).

В работе [5] Дэй показал, что из равномерной выпуклости в окрестности некоторой точки вытекает равномерная выпуклость всего пространства, а в работах [4, 6] он нашел некоторые условия смешанного типа, также обеспечивающие равномерную выпуклость пространства. Двойственное понятие «равномерной гладкости» (flattening) в работе Дэя [6] связывается с понятием равномерной выпуклости.

Другие результаты относительно равномерной выпуклости можно найти в уже упомянутых работах Шмульяна, а также в работах Джеймса [2], Крачковского и Виноградова [1], Растона [1] и Форте [1—3].

Библиография

Выпуклые множества. Асколи [1], Ботс [1—2], Бродский и Мильман [1], Гальперин [2], Дьёдонне [1, 2], Иосида и Фукамия [1], Кли [1—4], М. Крейн [1], М. Крейн и В. Шмульян [1], Мазур [1—3], Московиц и Дайнс [1, 2], Стоун [2], Тагамлицкий [2], Тьюки [1], В. Л. Шмульян [8, 10], Шёнберг [2], Эберлейн [2], Эйдельгайт [1].

Слабые топологии и рефлексивность. Алаоглу [1], Аренс [1], Бурбаки [1], Буржен [1], В. Р. Гантмахер и В. Л. Шмульян [1, 2], Голдстайн [1], Дэй [2, 3], Джеймс [4], Дьёдонне [3], Дьёдонне и Шварц [1], Какутани [2, 3], Кли [7], М. Крейн и В. Шмульян [1], Макки [1, 2], Мильман [1], Дж. Нейман [2], Петтис [1, 2], Растон [4], Тейлор [2, 3], Филлипс [1], В. Л. Шмульян [1—10, 12 13], Эберлейн [1].

Крайние точки. Аренс и Келли [1], Джерисон [2], Иосида и Фукамия [1], Келли [1], М. Крейн и Мильман [1], Мильман [2—4, 7], Мильман и Рутман [1], Томита [1], Хотта [1].

Теоремы о неподвижной точке. Дж. Биркгоф и Келлог [1], Броуэр [1], Вехаузен [2], Инаба [1], Какутани [4, 5], Киносита [1], М. Крейн и В. Шмульян [1], Лере [1], Марков [1], Миранда [1], Немыцкий [1], О'Нилл [1], Пек [1], Роте [1, 2], Тихонов [1], Форт [1], Фукухара [1], Шаудер [1, 2], Юд [3].

Линейные топологические пространства. Аренс [1], Буржен [2], Вехаузен [1], Гротендик [1, 2], Доногю и Смит [1], Дьёдонне [3], Дьёдонне и Шварц [1], Кли [3, 4], Колмогоров [1], Макки [1, 2], Дж. Нейман [1], Тихонов [1], Хайерс [1—4].

Равномерная выпуклость. Р. Боас [1], Дэй [3—6], Джеймс [2], Какутани [22], Кларксон [1], Крачковский и Виноградов [1], Ловалья [1], Мильман [1], Петтис [2], Растон [1], Форте [1—3], В. Л. Шмульян [4, 6, 7, 9].

Дифференцируемость нормы. Банах [1], Джеймс [2], Мазур [1], В. Л. Шмульян [4, 6, 7, 9][1]).

[1]) Более полный обзор советских работ можно найти в сборниках «Математика в СССР за 30 лет» и «Математика в СССР за 40 лет». — *Прим. ред.*

ГЛАВА VI

Операторы и их сопряженные

В этой главе продолжается начатое в гл. II изучение линейных отображений одного B-пространства в другое. В пространстве $B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ ограниченных линейных отображений B-пространства $\mathfrak{X}$ в B-пространство $\mathfrak{Y}$ вводятся различные топологии. Вводятся понятия сопряженных операторов, операторов проектирования, слабо вполне непрерывных и вполне непрерывных операторов и изучаются их основные свойства. Даются аналитические выражения для различных общих классов операторов в пространствах непрерывных и интегрируемых функций. Другие аналогичные теоремы содержатся в упражнениях. Кроме того, рассматривается принадлежащая М. Риссу важная теорема о выпуклости. *В этой главе символами* $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, если специально не оговорено противное, *будут обозначаться B-пространства.*

Напомним, что если T принадлежит $B(\mathfrak{X})$, то мы часто будем называть T оператором в $\mathfrak{X}$.

1. Пространство $B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$

B-пространство $\mathfrak{X}$ имеет, по крайней мере, две важные топологии: сильную, или метрическую, топологию и слабую, или $\mathfrak{X}^*$-топологию. Если пространство $\mathfrak{X}$ сопряжено к $\mathfrak{Y}$, то в нем имеется, кроме того, и $\mathfrak{Y}$-топология.

Линейное пространство $B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ непрерывных линейных отображений $T: \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ имеет соответственно более богатый набор топологий. Чаще всего в пространстве $B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ используются три топологии: *равномерная, сильная и слабая операторные топологии*, определяемые следующим образом.

1. Определение. *Равномерная операторная топология в* $B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ — это метрическая топология пространства $B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, индуцируемая нормой

$$|T| = \sup_{|x| \leqslant 1} |Tx|.$$

2. Определение. *Сильная операторная топология* в $B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ — это топология, определяемая следующим базисным множеством

окрестностей:

$$N(T;\ A,\ \varepsilon) = \{R \mid R \in B(\mathfrak{X},\ \mathfrak{Y}),\ |(T-R)x| < \varepsilon,\ x \in A\},$$

где A — произвольное конечное подмножество $\mathfrak{X}$ и $\varepsilon > 0$ — произвольно. Таким образом, в этой сильной топологии обобщенная последовательность $\{T_\alpha\}$ в том и только в том случае сходится к T, если $\{T_\alpha x\}$ для каждого x из $\mathfrak{X}$ сходится к Tx.

3. Определение. *Слабая операторная топология в* $B(\mathfrak{X},\ \mathfrak{Y})$ — это топология, определяемая следующим базисным множеством окрестностей:

$$N(T;\ A,\ B,\ \varepsilon) = \{R \mid R \in B(\mathfrak{X},\ \mathfrak{Y}),\ |y^*(T-R)x| < \varepsilon,\ y^* \in B,\ x \in A\},$$

где A и B — произвольные конечные подмножества элементов соответственно из $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}^*$ и $\varepsilon > 0$ произвольно. Таким образом, в этой слабой топологии обобщенная последовательность $\{T_\alpha\}$ в том и только в том случае сходится к T, если $\{y^* T_\alpha x\}$ сходится к $y^* Tx$ для всех x из $\mathfrak{X}$ и y^* из $\mathfrak{Y}^*$.

Однако в пространстве $B(\mathfrak{X},\ \mathfrak{Y})$ возможны и другие интересные топологии. Их можно ввести таким образом, что сходимость обобщенной последовательности $\{T_\alpha\}$ к пределу T будет пониматься в одном из следующих смыслов:

(I) для каждого x из $\mathfrak{X}$ обобщенная последовательность $\{T_\alpha x\}$ сходится к Tx равномерно относительно x из любого бикомпактного подмножества $\mathfrak{X}$;

(II) для каждого y^* из $\mathfrak{Y}^*$ обобщенная последовательность $\{y^* T_\alpha x\}$ сходится к $y^* Tx$ равномерно относительно x из любого бикомпактного (или ограниченного) подмножества $\mathfrak{X}$;

(III) обобщенная последовательность $\{T_\alpha\}$ сходится к T так, как определено в пунктах (I) или (II), но с заменой понятия «бикомпактный» на «слабо бикомпактный»;

(IV) если пространство $\mathfrak{Y}$ сопряжено к $\mathfrak{Z}$, то в $\mathfrak{Z}$-топологии пространства $\mathfrak{Y}$ $\lim_\alpha T_\alpha x = Tx$ для каждого $x \in \mathfrak{X}$; можно считать также, что это предельное соотношение должно выполняться равномерно относительно бикомпактных, слабо компактных или ограниченных подмножеств $\mathfrak{X}$.

В заключение мы упомянем топологию, базисными окрестностями которой служат множества

$$N(T;\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ \varepsilon) = \left\{R \mid R \in B(\mathfrak{X},\ \mathfrak{Y}),\ \sum_{i=1}^{\infty} |(R-T)x_i| < \varepsilon\right\},$$

где $\varepsilon > 0$ произвольно и $x_1,\ x_2, \ldots$ — произвольная последовательность элементов из $\mathfrak{X}$, для которой $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty$.

33 Заказ № 1324

В каждой из этих топологий $B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ есть локально выпуклое линейное топологическое пространство. В нашей книге рассматриваются равномерная, сильная и слабая операторные топологии пространства $B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$. Ясно, что равномерная операторная топология сильнее, чем сильная операторная топология, а последняя сильнее слабой операторной топологии.

В равномерной операторной топологии пространство $B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ является B-пространством, в качестве такового оно обладает и слабой топологией, которую не следует путать со слабой операторной топологией в $B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$.

4. Теорема. *Для того чтобы линейный функционал, определенный на $B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, был непрерывным в слабой операторной топологии, необходимо и достаточно, чтобы он был непрерывным в сильной операторной топологии.* 17

Доказательство. Так как сильная операторная топология сильнее слабой операторной топологии, то функционал, непрерывный в слабой топологии, будет непрерывным и в сильной. Обратно, пусть F будет функционалом на $\mathfrak{B} = B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, непрерывным в сильной топологии. Тогда найдется такое конечное подмножество $\{x_1, \ldots, x_m\}$ пространства $\mathfrak{X}$ и такое $\varepsilon > 0$, что из того, что $|Tx_i| < \varepsilon$ $(T \in \mathfrak{B},\ i = 1, \ldots, n)$, вытекает, что $|F(T)| < 1$.

Рассмотрим B-пространство $\mathfrak{Y}_n = \mathfrak{Y} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{Y}$ всех упорядоченных строк $\mathfrak{y} = [y_1, \ldots, y_n]$ из элементов $y_i \in \mathfrak{Y}$, $i = 1, \ldots, n$; норму в $\mathfrak{Y}_n$ определим равенством $|[y_1, \ldots, y_n]| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |y_i|$. Рассмотрим отображение $H : \mathfrak{B} \to \mathfrak{Y}_n$, определяемое равенством $HT = [Tx_1, \ldots$ $\ldots, Tx_n]$, и положим $f(\mathfrak{y}) = F(T)$, если $\mathfrak{y} \in H(\mathfrak{B})$ и $\mathfrak{y} = HT$. Так как из неравенства $|H(T)| < \delta\varepsilon$, вытекает, что $|F(T)| < \delta$, то f есть вполне определенный функционал, непрерывный на $H(\mathfrak{B})$. По теореме II.3.11, f имеет непрерывное линейное продолжение f_1, определенное на всем $\mathfrak{Y}_n$. Легко видеть, что каждый такой функционал должен иметь вид

$$f_1[y_1, \ldots, y_n] = \sum_{i=1}^{n} y_i^*(y_i),$$

где $y_i^* \in \mathfrak{Y}^*$, $i = 1, \ldots, n$. Следовательно, $F(T) = f_1(HT)$ имеет вид $F(T) = \sum_{i=1}^{n} y_i^* Tx_i$, а тогда ясно, что функционал F непрерывен и в слабой операторной топологии, ч. т. д.

5. Следствие. *Выпуклое множество в пространстве $B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ имеет то же самое замыкание в слабой операторной топологии, что и в сильной операторной топологии.*

Доказательство. Это утверждение непосредственно вытекает из теоремы 4 и следствия V.2.14, ч. т. д.

2. Сопряженные операторы

1. Определение. Оператором T^*, *сопряженным* к линейному оператору T из $B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, называется отображение пространства $\mathfrak{Y}^*$ в $\mathfrak{X}^*$, определяемое равенством $T^*y^* = y^*T$.

2. Лемма. *Отображение $T \to T^*$ является изометрическим изоморфизмом пространства $B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ в $B(\mathfrak{Y}^*, \mathfrak{X}^*)$.*

Доказательство. Линейный функционал y^*T непрерывен (I.4.17), и, следовательно, $T^*y^* \in \mathfrak{X}^*$. Отображение $T \to T^*$, очевидно, линейно. По следствию II.3.15, $|Tx| = \sup\limits_{|y^*| \leqslant 1} |y^*Tx|$, и, следовательно,

$$|T^*| = \sup_{|y^*| \leqslant 1} |T^*y^*| = \sup_{|y^*| \leqslant 1} \sup_{|x| \leqslant 1} |y^*Tx| =$$
$$= \sup_{|x| \leqslant 1} \sup_{|y^*| \leqslant 1} |y^*Tx| = \sup_{|x| \leqslant 1} |Tx| = |T|,$$

откуда вытекает, что отображение $T \to T^*$ является изометрическим изоморфизмом, ч. т. д.

3. Лемма. *Оператор T^*, сопряженный к оператору T из $B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, является непрерывным отображением пространства $\mathfrak{Y}^*$ в $\mathfrak{X}^*$, если эти пространства рассматриваются соответственно в их $\mathfrak{Y}$- и $\mathfrak{X}$-топологиях.*

Доказательство тривиально и предоставляется читателю.

4. Лемма. *Если $T \in B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, а $U \in B(\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$, то $(UT)^* = T^*U^*$. Оператор, сопряженный к единичному оператору из $B(\mathfrak{X})$, является единичным в $B(\mathfrak{X}^*)$.*

Доказательство. Если $z^* \in \mathfrak{Z}^*$, $x^* \in \mathfrak{X}^*$, то

$$(UT)^* z^* = z^*UT = (U^*z^*)\,T = T^*(U^*z^*) = (T^*U^*)\,z^*,$$
$$I^*x^* = x^*I = x^*,$$

ч. т. д.

Таким образом, отображение $T \to T^*$ кольца $B(\mathfrak{X})$ в кольцо $B(\mathfrak{X}^*)$ является «антиизоморфизмом».

5. Определение. Пусть $\hat{\mathfrak{X}}$ и $\hat{\mathfrak{Y}}$ — образы $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ при естественном их вложении в $\mathfrak{X}^{**}$ и $\mathfrak{Y}^{**}$ соответственно. Для любого $T \in B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ определим $\hat{T} \in B(\hat{\mathfrak{X}}, \hat{\mathfrak{Y}})$, полагая $\hat{T}\hat{x} = \hat{y}$, где $y = Tx$. Функция U,

областью значений которой является некоторое содержащее $\hat{\mathfrak{X}}$ подмножество пространства $\mathfrak{X}^{**}$, называется *продолжением* T, если $U\hat{x} = \hat{T}\hat{x}$ для $\hat{x} \in \hat{\mathfrak{X}}$. Таким образом, при определении понятия продолжения оператора T мы идентифицируем $\mathfrak{X}$ и $\hat{\mathfrak{X}}$. Аналогично если $\hat{\mathfrak{X}} = \mathfrak{X}^{**}$, то равенство $U = T$ понимается в том смысле, что $U\hat{x} = \hat{T}\hat{x}$ для $\hat{x} \in \hat{\mathfrak{X}}$.

6. Лемма. *Если $T \in B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, то повторно сопряженный оператор $T^{**} : \mathfrak{X}^{**} \to \mathfrak{Y}^{**}$ является продолжением T. Если $\mathfrak{X}$ рефлексивно, то $T^{**} = T$.*

Доказательство. Пусть $x \in \mathfrak{X}$, $y^* \in \mathfrak{Y}^*$. Тогда

$$(T^{**}\hat{x})\, y^* = \hat{x}T^*y^* = (T^*y^*)\, x = y^*Tx = (\hat{T}\hat{x})\, y^*,$$

ч. т. д.

7. Лемма. *Линейный оператор T из $B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ в том и только в том случае имеет ограниченный обратный оператор T^{-1}, определенный на всем $\mathfrak{Y}$, если его сопряженный оператор T^* имеет ограниченный обратный оператор $(T^*)^{-1}$, определенный на всем $\mathfrak{X}^*$. Если эти обратные операторы существуют, то $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.*

Доказательство. Если оператор T^{-1} существует и принадлежит $B(\mathfrak{Y}, \mathfrak{X})$, то, по лемме 4, $(TT^{-1})^* = (T^{-1})^*\, T^*$ есть единичный оператор в $\mathfrak{Y}^*$, а $(T^{-1}T)^* = T^*(T^{-1})^*$ — единичный оператор в $\mathfrak{X}^*$. Таким образом, оператор $(T^*)^{-1}$ существует, принадлежит $B(\mathfrak{X}^*, \mathfrak{Y}^*)$ и равен $(T^{-1})^*$. Обратно, если $(T^*)^{-1}$ существует и принадлежит $B(\mathfrak{X}^*, \mathfrak{Y})^*$, то в силу только что доказанного $(T^{**})^{-1}$ существует и принадлежит $B(\mathfrak{Y}^{**}, \mathfrak{X}^{**})$. Таким образом, отображение T^{**} является гомеоморфизмом; по лемме 6, оно служит продолжением T. Следовательно, T взаимно однозначно и множество $T\mathfrak{X}$ замкнуто. Остается только показать, что $T\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}$. Если $y \in \mathfrak{Y}$ и $y \notin T\mathfrak{X}$, то найдется (II.3.13) такое $y^* \in \mathfrak{Y}^*$, что $y^* \neq 0$, $y^*T = T^*y^* = 0$. Но это противоречит тому, что T^* взаимно однозначно, и доказывает лемму.

Попутно мы доказали также следующую лемму.

8. Лемма. *Если $T \in B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, то замыкание в $\mathfrak{Y}$ множества $T\mathfrak{X}$ состоит из всех таких векторов y, что $y^*y = 0$ для каждого y^*, удовлетворяющего уравнению $T^*y^* = 0$.*

Для операторов в гильбертовом пространстве принято несколько другое понятие сопряженного оператора. Рассмотрим гильбертово пространство $\mathfrak{H}$, и пусть $T \in B(\mathfrak{H})$. Тогда оператор T_1, сопряженный к T, принадлежит $B(\mathfrak{H}^*)$. Однако, поскольку пространства $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}^*$ тесно связаны между собой, как показывает теорема IV.4.5, обычно в качестве оператора, сопряженного к T для $T \in B(\mathfrak{H})$, рассматривается оператор $T_2=\sigma T_1\sigma^{-1}$, где $\sigma:\mathfrak{H}^*\to\mathfrak{H}$ есть отображение, определяемое теоремой IV.4.5. Это имеет то преимущество, что оператор T_2 принадлежит $B(\mathfrak{H})$, а не $B(\mathfrak{H}^*)$. Мы будем называть оператор T_2 *гильбертовым сопряженным к* T. Дадим ему формальное определение.

9. Определение. Пусть $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство и $T\in B(\mathfrak{H})$. Существует однозначно определенный оператор $T^*\in B(\mathfrak{H})$, называемый *гильбертовым сопряженным* к T, удовлетворяющий условию

$$(Tx, y)=(x, T^*y),\quad x, y\in\mathfrak{H}.$$

Если прямо не оговорено противное, *термин сопряженный и обозначение* T^*, *если они применяются к оператору в гильбертовом пространстве, будут иметь только что указанный смысл*. Оператор T в гильбертовом пространстве называется *самосопряженным*, если $T^*=T$.

Предшествующие леммы для сопряженных операторов в гильбертовом пространстве принимают следующий вид:

→ 10. Лемма. *Если T и U — ограниченные линейные операторы в гильбертовом пространстве, то*

(a) $(T+U)^*=T^*+U^*$;

(b) $(TU)^*=U^*T^*$;

(c) $(\alpha T)^* = \bar{\alpha}T^*$;

(d) $I^*=I$;

(e) $T^{**}=T$;

(f) $|T^*|=|T|$;

(g) *если один из операторов T^{-1} или $(T^*)^{-1}$ существует и принадлежит $B(\mathfrak{H})$, то и другой тоже существует и $(T^{-1})^*=(T^*)^{-1}$.*

Все эти утверждения вытекают из лемм 2, 4, 6 и 7, ч. т. д.

3. Проекторы

Проектором в произвольном линейном пространстве $\mathfrak{X}$ выше (§ I.11) был назван такой линейный оператор E, для которого $E^2=E$. Если $\mathfrak{X}$ есть линейное топологическое пространство, то мы будем требовать, начиная с этого места, чтобы E был непрерывен.

1. Определение. *Проектором* (проекционным оператором, оператором проектирования) в пространстве $\mathfrak{X}$ называется такой оператор $E\in B(\mathfrak{X})$, что $E^2=E$.

→ Если E — проекционный оператор в $\mathfrak{X}$, то каждый элемент x может быть единственным образом представлен в виде суммы $x=x_1+x_2$, где $Ex_1=x_1$, $Ex_2=0$. В самом деле, $x=Ex+(I-E)x$ есть требуемое разложение. Обратно, если в $\mathfrak{X}$ даны два замкнутых линейных подпространства $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$ такие, что каждое x единственным образом представляется в виде $x=x_1+x_2$, где $x_1 \in \mathfrak{X}_1$ и $x_2 \in \mathfrak{X}_2$, то функция E, определяемая равенством $E(x)=x_1$, является замкнутым и, следовательно, по теореме II.2.4, ограниченным линейным преобразованием $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{X}$, причем $E^2=E$. Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между проекторами в $\mathfrak{X}$ и разложениями пространства $\mathfrak{X}$ в прямую сумму двух замкнутых подпространств $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$. Подпространства, соответствующие E, т. е. $E\mathfrak{X}$ и $(I-E)\mathfrak{X}$ характеризуются соответственно равенствами $Ex=x$ и $Ex=0$.

В нижеследующих леммах перечисляются некоторые элементарные свойства проекторов. Другие свойства будут даны в упражнениях.

2. Лемма. *Пусть E_1 и E_2 — коммутирующие между собой проекторы в B-пространстве $\mathfrak{X}$. Если $\mathfrak{M}_i=E_i\mathfrak{X}$* и *$\mathfrak{N}_i=(I-E_i)\mathfrak{X}$, $i=1, 2$, то*

(a) *$E_1E_2=E_2$ в том и только в том случае, если $\mathfrak{M}_2 \subseteq \mathfrak{M}_1$, или, что эквивалентно, в том и только в том случае, если $\mathfrak{N}_1 \subseteq \mathfrak{N}_2$;*

(b) *оператор $E=E_1+E_2-E_1E_2$ является проектором, причем $E\mathfrak{X}=\mathrm{sp}\{\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2\}$ и $(I-E)\mathfrak{X}=\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2$;*

(c) *оператор $E=E_1E_2$ является проектором, причем $E\mathfrak{X}=\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2$ и $(I-E)\mathfrak{X}=\mathrm{sp}\{\mathfrak{N}_1 \cup \mathfrak{N}_2\}$;*

(d) *оператор $E=E_1-E_2$ в том и только в том случае является проектором, если $E_1E_2=E_2$. В этом случае $E\mathfrak{X}=\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{N}_2$ и $(I-E)\mathfrak{X}=$ $=\mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{M}_2$.*

Доказательства непосредственно вытекают из определений и предоставляются читателю (сравните с упражнением I.14.6).

3. Лемма. *Если E — проектор в пространстве $\mathfrak{X}$, то E^* — проектор в $\mathfrak{X}^*$ и*

$$E^*\mathfrak{X}^*=\{x^* \mid x^*x=0,\ x \in (I-E)\mathfrak{X}\};$$
$$(I-E^*)\mathfrak{X}^*=\{x^* \mid x^*x=0,\ x \in E\mathfrak{X}\}.$$

Доказательство. Ясно, что $E^{*2}=E^*$, так что E^* есть проектор. Если $x \in \mathfrak{X}$ и $E^*y^*=y^*$, то $y^*x=E^*y^*x=y^*Ex$ и $y^*(x-Ex)=0$. Обратно, предположим, что $y^*(x-Ex)=0$ для каждого x из $\mathfrak{X}$. Тогда $y^*x=y^*Ex$, $y^*=y^*E$ и $y^*=E^*y^*$. Второе утверждение вытекает из первого при подстановке $I-E^*$ вместо E^*, ч. т. д.

Существует интересный способ упорядочения проекторов.

4. Определение. Два проектора упорядочены *естественным образом* и притом $E_1 \leqslant E_2$, если $E_1E_2=E_2E_1=E_1$.

Это условие означает, что $E_1\mathfrak{X} \subseteq E_2\mathfrak{X}$, $(I-E_1)\mathfrak{X} \supseteq (I-E_2)\mathfrak{X}$. Читатель без труда докажет следующую лемму.

5. Лемма. *Естественное упорядочение проекторов*, $\leqslant$, *обладает следующими свойствами*:

(I) $E_1 \leqslant E_1$;

(II) *если* $E_1 \leqslant E_2$ *и* $E_2 \leqslant E_3$, *то* $E_1 \leqslant E_3$;

(III) *если* $E_1 \leqslant E_2$ *и* $E_2 \leqslant E_1$, *то* $E_1 = E_2$.

Таким образом, семейство всех проекторов в $B(\mathfrak{X})$ образует частично упорядоченное множество. Любые два коммутирующие между собой проектора E_1 и E_2 имеют верхнюю грань

$$E_1 \vee E_2 = E_1 + E_2 - E_1 E_2$$

и нижнюю грань

$$E_1 \wedge E_2 = E_1 E_2.$$

Эти две операции будут особенно важны во втором томе, где мы введем и будем изучать понятие булевской алгебры проекторов в B-пространстве.

В заключение этого параграфа сделаем несколько замечаний относительно проекторов в гильбертовом пространстве. Пусть E — проектор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, а E^* — сопряженный с ним оператор. Тогда из равенства

$$(Ex, (I-E)y) = (Ex, y) - (E^*Ex, y)$$

вытекает, что взаимно дополнительные многообразия $E\mathfrak{H}$ и $(I-E)\mathfrak{H}$ в том и только в том случае ортогональны, если $E=E^*E$, или, что эквивалентно, если $E=E^*$. Поэтому самосопряженные проекторы иногда называют операторами *ортогонального* или *перпендикулярного проектирования* или просто ортогональными проекторами. Так как замкнутые взаимно дополнительные многообразия $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ однозначно определяют такое проектирование E, что $E\mathfrak{H} = \mathfrak{X}$ и $(I-E)\mathfrak{H} = \mathfrak{Y}$, то из приведенного выше равенства вытекает, что существует взаимно однозначное соответствие между самосопряженными проекторами и взаимно дополнительными ортогональными многообразиями.

Следует вспомнить, что (IV.4.4) каждое замкнутое линейное многообразие в $\mathfrak{H}$ однозначно определяет свое ортогональное дополнение: следовательно, каждое замкнутое линейное многообразие $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{H}$ однозначно определяет такой самосопряженный проектор E в $\mathfrak{H}$, для которого $E\mathfrak{H} = \mathfrak{X}$.

4. Слабо вполне непрерывные операторы

1. Определение. Пусть $T \in B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ и S — замкнутая единичная сфера в $\mathfrak{X}$. Оператор T называется *слабо вполне непрерывным*, если слабое замыкание множества TS бикомпактно в слабой топологии пространства $\mathfrak{Y}$. Таким образом, по теореме V.6.1, *оператор в том и только в том случае будет слабо вполне непрерывным, если отображает ограниченные множества в слабо компактные.*

2. Теорема. *Для того чтобы линейный оператор $T \in B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ был слабо вполне непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы $T^{**}\mathfrak{X}^{**}$ содержалось в образе $\varkappa\mathfrak{Y}$ при естественном вложении пространства $\mathfrak{Y}$ в $\mathfrak{Y}^{**}$.*

Доказательство. Через S и S^{**} будут соответственно обозначаться замкнутые единичные сферы в пространствах $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}^{**}$. Заметим, что оператор T^{**} непрерывен в $\mathfrak{X}^{*}$- и $\mathfrak{Y}^{*}$-топологиях соответственно пространств $\mathfrak{X}^{**}$ и $\mathfrak{Y}^{**}$ (см. 2.3). Следовательно, поскольку оператор T^{**} является продолжением T (см. 2.6),

$$\text{(I)} \qquad T^{**}(S_1) \subseteq \overline{T^{**}(\varkappa S)} = \overline{\varkappa(TS)} \subseteq \varkappa(\overline{TS}),$$

где S_1 есть $\mathfrak{X}^{*}$-замыкание множества $\varkappa S$ и где черта означает замыкание в $\mathfrak{Y}^{*}$-топологии. Если T — слабо вполне непрерывный оператор, то множество $\overline{TS}$ бикомпактно в $\mathfrak{Y}^{*}$-топологии пространства $\mathfrak{Y}$ и, следовательно, $\varkappa(\overline{TS})$ бикомпактно, а значит, и замкнуто в $\mathfrak{Y}^{*}$-топологии пространства $\mathfrak{Y}^{**}$. Таким образом, если T — слабо вполне непрерывный оператор, то соотношение (I) дает

$$T^{**}(S_1) \subseteq \varkappa(\overline{TS}).$$

Согласно теореме V.4.5, $S_1 = S^{**}$ и, следовательно, $T^{**}S^{**} \subseteq \varkappa(\overline{TS})$, откуда следует, что

$$\text{(II)} \qquad T^{**}\mathfrak{X}^{**} \subseteq \varkappa\mathfrak{Y}.$$

Обратно, пусть оператор $T \in B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ удовлетворяет соотношению (II). Так как, по лемме 2.3, оператор T^{**} непрерывен в $\mathfrak{X}^{*}$- и $\mathfrak{Y}^{*}$-топологиях соответственно пространств $\mathfrak{X}^{**}$ и $\mathfrak{Y}^{**}$ и множество S^{**} $\mathfrak{X}^{*}$-бикомпактно в $\mathfrak{X}^{**}$ (теорема V.4.2), то множество $T^{**}S^{**} \subseteq \varkappa\mathfrak{Y}$ является $\mathfrak{Y}^{*}$-бикомпактным (I.5.7). Таким образом, $\mathfrak{Y}^{*}$-гомеоморфный образ $\varkappa(TS)$ множества TS является подмножеством $\mathfrak{Y}^{*}$-бикомпактного подмножества $\varkappa\mathfrak{Y}$. Следовательно, $\mathfrak{Y}^{*}$-замыкание множества $\varkappa(TS)$ является $\mathfrak{Y}^{*}$-бикомпактным подмножеством $\varkappa\mathfrak{Y}$, а $\mathfrak{Y}^{*}$-замыкание множества TS является $\mathfrak{Y}^{*}$-бикомпактным подмножеством $\mathfrak{Y}$, ч. т. д.

3. Следствие. *Если либо $\mathfrak{X}$, либо $\mathfrak{Y}$ рефлексивно, то каждый оператор из $B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ является слабо вполне непрерывным.*

Доказательство. Пусть $T \in B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$. Если пространство $\mathfrak{Y}$ рефлексивно, то

$$T^{**}\mathfrak{X}^{**} \subseteq \mathfrak{Y}^{**} = \varkappa\mathfrak{Y},$$

а если пространство $\mathfrak{X}$ рефлексивно, то

$$T^{**}\mathfrak{X}^{**} = T^{**}\varkappa\mathfrak{X} = \varkappa T\mathfrak{X} \subseteq \varkappa\mathfrak{Y}.$$

Таким образом, в обоих случаях из теоремы 2 вытекает, что T слабо вполне непрерывен, ч. т. д.

4. Следствие. *Множество слабо вполне непрерывных операторов замкнуто в равномерной операторной топологии пространства* $B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$.

Доказательство. Если $T_n \to T$ в $B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, то, по лемме 2.2, $|T_n^{**} - T^{**}| \to 0$. Если T_n — слабо вполне непрерывный оператор, то для каждого x^{**} из $\mathfrak{X}^{**}$ $T_n^{**}x^{**} \in \varkappa\mathfrak{Y}$ (теорема 2), а так как множество $\varkappa\mathfrak{Y}$ замкнуто в метрической топологии пространства $\mathfrak{Y}^{**}$, то $T^{**}x^{**} \in \varkappa\mathfrak{Y}$. Следовательно, $T^{**}\mathfrak{X}^{**} \subseteq \varkappa\mathfrak{Y}$, и наше утверждение вытекает из теоремы 2, ч. т. д.

5. Теорема. *Линейные комбинации слабо вполне непрерывных операторов слабо вполне непрерывны. Произведение слабо вполне непрерывного линейного оператора и ограниченного линейного оператора слабо вполне непрерывно.*

Доказательство. Пусть $T, U \in B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, $W \in B(\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$, $V \in B(\mathfrak{Z}, \mathfrak{X})$, $\alpha, \beta \in \Phi$, и пусть операторы T и U слабо вполне непрерывны. Тогда из теоремы 2, леммы 2.2 и леммы 2.3 вытекают следующие включения:

$$(\alpha T + \beta U)^{**}\mathfrak{X}^{**} = (\alpha T^{**} + \beta U^{**})\mathfrak{X}^{**} \subseteq \varkappa\mathfrak{Y},$$
$$(TV)^{**}\mathfrak{Z}^{**} = T^{**}V^{**}\mathfrak{Z}^{**} \subseteq T^{**}\mathfrak{X}^{**} \subseteq \varkappa\mathfrak{Y},$$
$$(WT)^{**}\mathfrak{X}^{**} = W^{**}T^{**}\mathfrak{X}^{**} \subseteq W^{**}\varkappa\mathfrak{Y} = W\mathfrak{Y} \subseteq \varkappa\mathfrak{Z}.$$

Теорема 5 вытекает из этих включений и теоремы 2, ч. т. д.

6. Следствие. *В равномерной операторной топологии пространства* $B(\mathfrak{X})$ *слабо вполне непрерывные операторы образуют замкнутый двусторонний идеал.*

Мы уже видели (лемма 2.3), что оператор T^*, сопряженный к произвольному оператору T из $B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, непрерывен относительно $\mathfrak{X}$- и $\mathfrak{Y}$-топологий соответственно в пространствах $\mathfrak{X}^*$ и $\mathfrak{Y}^*$. Нижеследующий результат показывает, что если оператор T слабо вполне непрерывен, то сопряженный к нему оператор T^* обладает более сильным свойством непрерывности.

7. Лемма. *Для того чтобы оператор из* $B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ *был слабо вполне непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы сопряженный к нему оператор был непрерывен относительно* $\mathfrak{X}^{**}$- *и* $\mathfrak{Y}$-*топологий соответственно в пространствах* $\mathfrak{X}^*$ *и* $\mathfrak{Y}^*$.

Доказательство. Предположим, что оператор T слабо вполне непрерывен. По теореме 2, для каждого x^{**} из $\mathfrak{X}^{**}$ найдется такое y из $\mathfrak{Y}$, что

$$x^{**}(T^*y^*) = (T^{**}x^{**})\,y^* = y^*y, \quad y^* \in \mathfrak{Y}^*.$$

Таким образом, если $y_\alpha^* \to y^*$ в $\mathfrak{Y}$-топологии пространства $\mathfrak{Y}^*$, то $T^*y_\alpha^* \to T^*y^*$ в $\mathfrak{X}^{**}$-топологии пространства $\mathfrak{X}^*$. Следовательно, оператор T^* обладает необходимым свойством непрерывности (I.7.4). Обратно, пусть оператор T^* непрерывен относительно $\mathfrak{X}^{**}$- и $\mathfrak{Y}$-топологий в пространствах $\mathfrak{X}^*$ и $\mathfrak{Y}^*$ соответственно, и пусть $x_0^{**} \in \mathfrak{X}^{**}$. Если $y_\alpha^* y \to y^* y$, $y \in \mathfrak{Y}$, то $x_0^{**}T^*y_\alpha^* = T^{**}x_0^{**}y_\alpha^* \to T^{**}x_0^{**}y^*$. Таким образом, $T^{**}x_0^{**}$ из $\mathfrak{Y}^{**}$ есть непрерывный линейный функционал на $\mathfrak{Y}^*$ в его $\mathfrak{Y}$-топологии. Из теоремы V.3.9 вытекает, что $T^{**}x_0^{**} \in \varkappa\mathfrak{Y}$ и, следовательно, $T^{**}\mathfrak{X}^{**} \subseteq \varkappa\mathfrak{Y}$. Наше утверждение вытекает теперь из теоремы 2, ч. т. д.

8. Теорема (*В. Р. Гантмахер*). *Оператор из $B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ в том и только в том случае является слабо вполне непрерывным, если сопряженный к нему оператор слабо вполне непрерывен.*

Доказательство. Предположим, что T — слабо вполне непрерывен. Так как замкнутая единичная сфера S^* пространства $\mathfrak{Y}^*$ $\mathfrak{Y}$-бикомпактна (V.4.2), то, по лемме 7 и лемме I.5.7, множество T^*S^* бикомпактно в $\mathfrak{X}^{**}$-топологии пространства $\mathfrak{X}^*$. Следовательно, оператор T^* слабо вполне непрерывен.

Обратно, если T^* — слабо вполне непрерывный оператор, то, по лемме 7, оператор T^{**} непрерывен в $\mathfrak{X}^*$- и $\mathfrak{Y}^{***}$-топологиях пространств $\mathfrak{X}^{**}$ и $\mathfrak{Y}^{**}$ соответственно. Если S и S^{**} — замкнутые единичные сферы соответственно в $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}^{**}$ и если $\varkappa$ есть естественное вложение пространства $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{X}^{**}$, то, по теореме V.4.5, множество $\varkappa S$ является $\mathfrak{X}^*$-всюду плотным в S^{**} и, следовательно, ввиду непрерывности T^{**}, $T^{**}S^{**}$ содержится в $\mathfrak{Y}^{***}$-замыкании множества $T^{**}\varkappa S = \varkappa TS$. Согласно теореме V.3.13, $\mathfrak{Y}^{***}$-замыкание выпуклого множества $\varkappa TS$ совпадает с его сильным замыканием. Таким образом, $T^{**}S^{**} \subseteq \varkappa\mathfrak{Y}$, и наше утверждение вытекает из теоремы 2, ч. т. д.

5. Вполне непрерывные операторы

1. Определение. Пусть $T \in B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ и S — замкнутая единичная сфера в $\mathfrak{X}$. Оператор T называется *вполне непрерывным*, если сильное замыкание множества TS бикомпактно в сильной топологии пространства $\mathfrak{Y}$.

2. Теорема (*Шаудер*). *Оператор из $B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ является вполне непрерывным в том и только в том случае, если сопряженный к нему оператор вполне непрерывен.*

Доказательство. Пусть S и S^* — замкнутые единичные сферы в пространствах $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}^*$ соответственно. Предположим, что T вполне непрерывен, и пусть $\{y_n^*\}$ — произвольная последовательность в S^*. Так как $|y_n^* y - y_n^* z| \leqslant |y - z|$, $n = 1, 2, \ldots$, то, по теореме IV.6.7, некоторая подпоследовательность $y_{n_i}^* y$ равномерно сходится для y из бикомпактного множества $\overline{TS}$. Следовательно, $y_{n_i}^* Tx = (T^* y_{n_i}^*)\, x$ сходится равномерно для x из S. Отсюда вытекает, что $T^* y_{n_i}^*$ сходится в сильной топологии пространства $\mathfrak{X}^*$. Следовательно, оператор T^* вполне непрерывен.

Обратно, предположим, что T^* вполне непрерывен. Тогда, по только что доказанному, T^{**} вполне непрерывен; следовательно, если S^{**} есть замкнутая единичная сфера в $\mathfrak{X}^{**}$, то множество $T^{**}S^{**}$ вполне ограничено (I.6.15). Таким образом, так как $\varkappa TS \subseteq T^{**}S^{**}$, то множество $\varkappa TS$ вполне ограничено; следовательно, и TS вполне ограничено, а значит, множество $\overline{TS}$ бикомпактно (I.6.15), и оператор T вполне непрерывен, ч. т. д.

3. Лемма. *Множество вполне непрерывных операторов замкнуто в равномерной операторной топологии пространства* $B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$.

Доказательство. Пусть S — замкнутая единичная сфера в пространстве $\mathfrak{X}$, T_n — вполне непрерывный оператор и $|T_n - T| \to 0$. Тогда для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такое n, что $|T_n - T| < \varepsilon/3$. Так как T_n вполне непрерывен, то, по теореме I.6.15, в S найдутся такие точки $x_1, \ldots, x_p$, что

$$\inf_{1 \leqslant i \leqslant p} |T_n x - T_n x_i| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad x \in S.$$

Отсюда следует, что

$$\inf_{1 \leqslant i \leqslant p} |Tx - Tx_i| < \varepsilon, \quad x \in S.$$

Таким образом, множество TS вполне ограничено и $\overline{TS}$ бикомпактно (I.6.15), ч. т. д.

4. Теорема. *Линейные комбинации вполне непрерывных линейных операторов являются вполне непрерывными операторами; каждое произведение вполне непрерывного линейного оператора и ограниченного линейного оператора является вполне непрерывным линейным оператором.*

Доказательство. Справедливость теоремы 4 легко вытекает из того факта, что множество в метрическом пространстве бикомпактно в том и только в том случае, если оно компактно (I.6.13), ч. т. д.

5. Следствие. *В равномерной операторной топологии пространства* $B(\mathfrak{X})$ *вполне непрерывные операторы образуют замкнутый двусторонний идеал.*

Доказательство. Это утверждение непосредственно вытекает из леммы 3 и теоремы 4, ч. т. д.

Читатель заметит аналогию между леммой 4.7 и следующим результатом.

6. Теорема. *Для того чтобы оператор из* $B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ *был вполне непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы сопряженный к нему оператор переводил ограниченные обобщенные последовательности, сходящиеся в* $\mathfrak{Y}$*-топологии пространства* $\mathfrak{Y}^*$, *в обобщенные последовательности, сходящиеся в метрике пространства* $\mathfrak{X}^*$.

Доказательство. Пусть S и S^* — единичные сферы пространств $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}^*$ соответственно и $T \in B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$. Напомним, что обобщенная последовательность в пространстве $\mathfrak{X}^*$ в том и только в том случае сходится в метрике пространства $\mathfrak{X}^*$, если она сходится равномерно относительно S. Из доказательства следствия V.4.4 видно, что множество $T(S)$ изометрично некоторому ограниченному подмножеству множества $C(S^*)$, где S^* рассматривается в $\mathfrak{Y}$-топологии. Условие нашей теоремы эквивалентно утверждению, что если обобщенная последовательность $\{y_\alpha^*\}$ ограничена и $y_\alpha^* \to y_0^*$ в $\mathfrak{Y}$-топологии, то $y_\alpha^*(Tx) \to y_0^*(Tx)$ равномерно относительно x из S. Ввиду определения IV.6.6 это условие эквивалентно утверждению, что $T(S)$ есть равностепенно непрерывное подмножество $C(S^*)$. Из теоремы IV.6.7 вытекает, что $T(S)$ относительно бикомпактно в метрике пространства $\mathfrak{Y}$ в том и только в том случае, если это условие выполнено, ч. т. д.

6. Операторы с замкнутой областью значений

Как было отмечено в лемме 2.8, замыкание области значений оператора $U \in B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ состоит из таких векторов y, для которых из равенства $y^*U\mathfrak{X} = 0$ вытекает, что $y^*y = 0$. Или, иными словами,

$$\overline{U\mathfrak{X}} = \{y \mid \text{ из } U^*y^* = 0 \text{ вытекает, что } y^*y = 0\}.$$

Двойственное этому утверждение: если $U \in B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, то

$$\overline{U^*\mathfrak{Y}^*} = \{x^* \mid \text{ из } Ux = 0 \text{ вытекает, что } x^*x = 0\},$$

вообще говоря, не справедливо, что будет видно из соответствующего упражнения. Однако это двойственное утверждение все же справедливо в тех случаях, когда область значений $U\mathfrak{X}$ замкнута, в этом случае область значений $U^*\mathfrak{Y}^*$ тоже замкнута. Двойственно этому, если $U^*\mathfrak{Y}^*$ замкнуто, то и $U\mathfrak{X}$ тоже. Эти результаты содержатся в двух нижеследующих теоремах. Дополнительная информация по этому вопросу содержится в упражнениях § 9.

1. Лемма. *Если область значений оператора* U *из* $B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ *замкнута, то существует такая константа* K, *что каждому* y *из* $U\mathfrak{X}$

соответствует такое x, что $Ux = y$ и $|x| \leqslant K|y|$.

Доказательство. Из принципа открытости отображения (II.2.1) вытекает, что единичная сфера S пространства $\mathfrak{X}$ отображается на множество US, содержащее некоторую относительную сферу $\{y \mid y \in U\mathfrak{X}, |y| < \delta\}$ при $\delta > 0$. Таким образом, для $0 \neq y \in U\mathfrak{X}$ вектор $\delta y/2|y|$ является образом при отображении U некоторого вектора z с нормой $|z| \leqslant 1$. Следовательно, если $x = \frac{2|y|z}{\delta}$, то $Ux = y$ и $|x| \leqslant \frac{2}{\delta}|y|$, ч. т. д.

2. Теорема. *Если область значений оператора U из $B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ замкнута, то областью значений сопряженного с ним оператора является совокупность таких x^* из $\mathfrak{X}^*$, что из равенства $Ux = 0$, вытекает равенство $x^*x = 0$.*

Доказательство. Пусть x^* удовлетворяет условию теоремы; определим (возможно, разрывный) линейный функционал y_0^* на $\mathfrak{Y}_0 = U\mathfrak{X}$, полагая $y_0^*(Ux) = x^*(x)$. Ввиду условия, наложенного на x^*, y_0^* определено однозначно. В силу предшествующей леммы существует такая константа K, что для каждого $y \in \mathfrak{Y}_0$ найдется такое x, что $|x| \leqslant K|y|$ и $Ux = y$. Следовательно, $|y_0^*(y)| \leqslant K|x^*||y|$. По теореме II.3.11, y_0^* можно продолжить до непрерывного линейного функционала y^*, определенного на всем $\mathfrak{Y}$, и при этом $U^*y^* = x^*$.

Из определения оператора U^* ясно, что каждый элемент из его области значений удовлетворяет условию теоремы, ч. т. д.

3. Лемма. *Если оператор, сопряженный к оператору U из $B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, является взаимно однозначным и имеет замкнутую область значений, то $U\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}$.*

Доказательство. Пусть $0 \neq y \in \mathfrak{Y}$ и

$$\Gamma = \{y^* \mid y^* \in \mathfrak{Y}^*, \quad y^*y = 0\}.$$

Тогда Γ будет $\mathfrak{Y}$-замкнутым в $\mathfrak{Y}^*$.

Предположим сначала, что множество $U^*\Gamma$ замкнуто в $\mathfrak{X}$-топологии и отлично от $U^*\mathfrak{Y}^*$. Ввиду следствия V.3.12 найдется такое $x \in \mathfrak{X}$, что $\hat{x}U^*\mathfrak{Y}^* \neq 0$, $\hat{x}U^*\Gamma = 0$. Это означает, что $Ux \neq 0$ и $y^*Ux = 0$ для каждого $y^* \in \Gamma$. По лемме V.3.10, $Ux = \alpha y$ для некоторого ненулевого скаляра α. Следовательно, $y \in U\mathfrak{X}$ и $U\mathfrak{X} = \overline{\mathfrak{Y}}$, что нам и нужно доказать.

Остается показать, что $U^*\Gamma$ замкнуто в $\mathfrak{X}$-топологии, но не равно $U^*\mathfrak{Y}^*$. Так как $y \neq 0$, то Γ есть собственное подмножество в $\mathfrak{Y}^*$. Следовательно, так как оператор U^* обратим, $U^*\Gamma$ является собственным подмножеством в $U^*\mathfrak{Y}^*$. Наконец, для того чтобы показать, что множество $U^*\Gamma$ замкнуто в $\mathfrak{X}$-топологии, достаточно ввиду теоремы V.5.7 (или V.5.8) показать, что в этой топологии замкнуто $(U^*\Gamma)\bigcap S^*$. S^* здесь есть замкнутая единичная сфера пространства $\mathfrak{X}^*$. По лемме 1, множество $(U^*)^{-1}S^*$ ограничено. Следовательно, $(U^*)^{-1}S^*$ содержится в некотором кратном nS_1^* замкнутой единичной сферы S_1^* пространства $\mathfrak{Y}^*$. По теореме V.4.2, множество nS_1^* бикомпактно в $\mathfrak{Y}$-топологии пространства $\mathfrak{Y}^*$. Так как, по лемме 2.3, U^* является непрерывным отображением пространства $\mathfrak{Y}^*$ с его $\mathfrak{Y}$-топологией в пространство $\mathfrak{X}^*$ с его $\mathfrak{X}$-топологией, то образ при отображении U^* бикомпактного множества $\Gamma\bigcap nS_1^*$ замкнут. Следовательно, множество $(U^*\Gamma)\bigcap S^* = S^*\bigcap U^*(\Gamma\bigcap nS_1^*)$ $\mathfrak{X}$-замкнуто, ч. т. д.

4. Теорема. *Если оператор, сопряженный к некоторому оператору U из $B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, имеет замкнутую область значений, то область значений оператора U замкнута и состоит из таких векторов y пространства $\mathfrak{Y}$, для которых из условия $U^*y^*=0$ вытекает, что $y^*y=0$.*

Доказательство. Рассмотрим отображение U_1 пространства $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{Z}=\overline{U(\mathfrak{X})}$, определяемое равенством $U_1(x)=U(x)$. Тогда, так как оператор U_1 имеет всюду плотную область значений, оператор U_1^* взаимно однозначен. Если $x^*\in\mathfrak{X}^*$ принадлежит замыканию множества $U_1^*\mathfrak{Z}^*$, то $x^*=\lim\limits_{n\to\infty}U_1^*z_n^*$, где $z_n^*\in\mathfrak{Z}^*$. Если y_n^* есть продолжение z_n^* на все $\mathfrak{Y}$ (II.3.11), то $x^*=\lim\limits_{n\to\infty}U^*y_n^*$, а так как область значений оператора U^* замкнута, то $x^*=U^*y^*$ для некоторого $y^*\in\mathfrak{Y}^*$. Если z^* есть сужение y^* на $\mathfrak{Z}$, то $x^*=U_1^*z^*$. Следовательно, область значений оператора U_1^* тоже замкнута. Из предыдущей леммы вытекает, что $U_1\mathfrak{X}=U\mathfrak{X}=\mathfrak{Z}$. Следовательно, область значений оператора U замкнута, ч. т. д.

5. Теорема. *Если оператор $U\in B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ отображает ограниченные замкнутые множества на замкнутые множества, то его область значений замкнута.*

Доказательство. Пусть $y=\lim\limits_{n}Ux_n$ принадлежит замыканию множества $U\mathfrak{X}$ и пусть $\mathfrak{M}=\{x\,|\,Ux=0\}$. Обозначим через d_n расстояние между x_n и $\mathfrak{M}$, и пусть $w_n\in\mathfrak{M}$ таково, что

$$d_n\leqslant|x_n-w_n|\leqslant 2d_n.$$

Если последовательность $\{x_n-w_n\}$ содержит ограниченную подпоследовательность $\{x_{n_i}-w_{n_i}\}$, то, по предположению, замыкание этой подпоследовательности отображается на замкнутое множество, содержащее $y = \lim\limits_i U(x_{n_i} - w_{n_i})$ и, значит, $y \in U\mathfrak{X}$. Таким образом, для того чтобы завершить доказательство, достаточно показать, что предположение $|x_n - w_n| \to \infty$ приводит к противоречию.

Пусть $|x_n - w_n| \to \infty$; так как $U(x_n - w_n) \to y$, то, очевидно, $U\left(\frac{x_n - w_n}{|x_n - w_n|}\right) \to 0$ и, следовательно, по предположению, $\mathfrak{M}$ содержит точку w, принадлежащую замыканию ограниченной последовательности $\left\{\frac{x_n - w_n}{|x_n - w_n|}\right\}$. Если число n выбрано так, что

$$\left|\frac{x_n - w_n}{|x_n - w_n|} - w\right| < \frac{1}{3},$$

то

$$|x_n - w_n - w|x_n - w_n|| < \frac{1}{3}|x_n - w_n| < \frac{2}{3} d_n,$$

что противоречит определению d_n, ч. т. д.

6. Следствие. *Если оператор U из $B(\mathfrak{X})$ отображает ограниченные замкнутые множества на замкнутые множества, то области значений всех его итераций замкнуты.*

7. Общий вид линейных операторов в $C(S)$

При применении теорем из параграфов 4 и 5 часто бывает полезным подробное знание специфического аналитического выражения для самого общего вполне непрерывного или слабо вполне непрерывного линейного отображения между заданной парой B-пространств. В некоторых случаях легко получить совершенно полную информацию. В настоящем параграфе будет показано, что это так, например, для оператора, областью значений которого является пространство непрерывных функций. В некоторых других случаях, наоборот, известно очень немногое. Так, например, нетрудно видеть, что общее непрерывное линейное отображение T пространства $L_p[0, 1]$, $p > 1$, в $L_q[0, 1]$ имеет вид

$$g(s) = \frac{d}{ds} \int_0^1 K(s, t) f(t)\, dt;$$

вместе с тем не известно никакого удовлетворительного выражения для нормы T. Не известно также никаких условий на $K(s, t)$, эквивалентных полной непрерывности T. Конечно, условия на $K(s, t)$, *достаточные* для того, чтобы обеспечить полную непрерывность T, дать можно; такие условия помещены в упражнениях.

Настоящий параграф, касающийся бикомпактного хаусдорфова пространства S, разделен на две части. Сначала мы рассматриваем операторы с областью значений в $C(S)$, а затем — операторы, определенные на $C(S)$.

1. Теорема. *Пусть S — бикомпактное хаусдорфово пространство, а T — ограниченный линейный оператор, отображающий B-пространство $\mathfrak{X}$ в $C(S)$. Тогда существует такое непрерывное в $\mathfrak{X}$-топологии пространства $\mathfrak{X}^*$ отображение $\tau: S \to \mathfrak{X}^*$, что*

$$Tx(s) = \tau(s)x, \quad x \in \mathfrak{X}, \quad s \in S; \tag{1}$$

$$|T| = \sup_{s \in S} |\tau(s)|. \tag{2}$$

Обратно, если задано такое отображение τ, то оператор T, определяемый равенством (1), есть ограниченный линейный оператор, отображающий $\mathfrak{X}$ в $C(S)$, и с нормой, определяемой равенством (2). Для того чтобы оператор T был слабо вполне непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы τ было непрерывно в $\mathfrak{X}^{**}$-топологии пространства $\mathfrak{X}^*$. Для того чтобы оператор T был вполне непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы τ было непрерывно в топологии, определяемой нормой пространства $\mathfrak{X}^*$.

Доказательство. Пусть T — ограниченное линейное отображение $\mathfrak{X}$ в $C(S)$. Сопряженный к T оператор T^* отображает $C^*(S)$ в $\mathfrak{X}^*$. Кроме того, отображение $\pi: S \to C^*(S)$, определяемое условием

$$\pi(s)(f) = f(s), \quad f \in C(S), \quad s \in S,$$

является гомеоморфным отображением S в некоторое бикомпактное подмножество пространства $C^*(S)$ с его $C(S)$-топологией (см. V.8.7). По лемме 2.3, T^* непрерывно в $C(S)$-топологии пространства $C^*(S)$ и $\mathfrak{X}$-топологии пространства $\mathfrak{X}^*$, следовательно, отображение $\tau: S \to \mathfrak{X}^*$, определяемое равенством $\tau = T^*\pi$, непрерывно в $\mathfrak{X}$-топологии пространства $\mathfrak{X}^*$. Легко видеть, что равенства (1) и (2) справедливы. Обратно, если отображение $\tau: S \to \mathfrak{X}^*$ непрерывно в $\mathfrak{X}$-топологии пространства $\mathfrak{X}^*$, то ясно, что равенством (1) определяется некоторое линейное отображение пространства $\mathfrak{X}$ в $C(S)$ с нормой

$$|T| = \sup_{|x| \leq 1} \sup_{s \in S} |\tau(s)x| = \sup_{s \in S} \sup_{|x| \leq 1} |\tau(s)x| = \sup_{s \in S} |\tau(s)|.$$

Это завершает доказательство первой части теоремы.

Если T слабо вполне непрерывен, то, по лемме 4.7, T^* непрерывен в $C(S)$-топологии пространства $C^*(S)$ и $\mathfrak{X}^{**}$-топологии пространства $\mathfrak{X}^*$, чем гарантируется непрерывность τ. Обратно, если τ непрерывно в $\mathfrak{X}^{**}$-топологии и если $s_\alpha \to s_0$ в S, то $\tau(s_\alpha) \to \tau(s_0)$ в $\mathfrak{X}^{**}$-топологии пространства $\mathfrak{X}^*$. Далее, $\tau(s_\alpha)$ и $\tau(s_0)$ принадлежат $C(B_2)$, где B_2 есть единичный шар пространства $\mathfrak{X}^{**}$, рассматриваемого в его $\mathfrak{X}^*$-топологии. По теореме Арцела (IV.6.11), эта сходимость квазиравномерна на B_2, а следовательно, и на B — единичной сфере пространства $\mathfrak{X}$. Отсюда и из равенства (1) мы заключаем, что ограниченное множество $T(B)$ представляет собой квазиравностепенно непрерывное множество функций в $C(S)$. По теореме IV.6.14, $T(B)$ относительно слабо бикомпактно, так что T слабо вполне непрерывен. Это дополняет доказательство утверждения относительно слабой полной непрерывности операторов.

Наконец, если T вполне непрерывен, то из теоремы 5.6 и ограниченности $\pi(S)$ в $C^*(S)$ вытекает непрерывность отображения τ в определяемой нормой топологии пространства $\mathfrak{X}^*$. Обратно, пусть τ непрерывно в определяемой нормой топологии пространства $\mathfrak{X}^*$. Тогда для заданного $\varepsilon > 0$ и $s_0 \in S$ найдется такая окрестность N точки s_0, что если $s \in N$, то

$$\sup_{x \in B} |Tx(s) - Tx(s_0)| = |\tau(s) - \tau(s_0)| < \varepsilon.$$

Следовательно, если s принадлежит N, то $|Tx(s) - Tx(s_0)| < \varepsilon$ при всех x из B. В силу определения IV.6.6, множество $T(B)$ является равностепенно непрерывным подмножеством в $C(S)$. Ввиду ограниченности множества $T(B)$, оно, по теореме IV.6.7, относительно сильно бикомпактно. Следовательно, T — вполне непрерывен и наша теорема доказана.

Только что доказанная теорема дает довольно полную информацию относительно операторов с областью значений в $C(S)$. Теперь мы займемся общим видом операторов T, определенных на $C(S)$. Имея в виду теорему (IV.6.3) о представлении линейных функционалов на $C(S)$, мы можем надеяться, что представление операторов будет осуществляться с помощью векторной меры, значения которой принадлежат $\mathfrak{X}$. Так, оказывается, и будет в случае слабо вполне непрерывных операторов; в общем же случае значения меры будут принадлежать пространству $\mathfrak{X}^{**}$.

В дальнейшем через $\mathscr{B}$ будет обозначаться алгебра борелевских множеств из S, т. е. σ-алгебра, порождаемая замкнутыми множествами из S. Если μ есть функция, определенная на $\mathscr{B}$ и со значениями в B-пространстве, то, согласно определению IV.10.3, через $\|\mu\|(E)$ обозначается полувариация функции μ на множестве $E \in \mathscr{B}$, определяемая равенством

$$\|\mu\|(E) = \sup \left| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i) \right|,$$

где верхняя грань берется по всем конечным совокупностям попарно не пересекающихся борелевских множеств из E и всем конечным множествам скаляров $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, для которых $|\alpha_i| \leqslant 1$.

Теперь мы перейдем к отысканию общего вида линейного оператора.

2. Теорема. *Пусть S — бикомпактное хаусдорфово пространство и T — оператор, отображающий $C(S)$ в $\mathfrak{X}$. Тогда существует и притом только одна такая функция множества μ, определенная на борелевских множествах из S и со значениями в $\mathfrak{X}^{**}$, что*

(a) *$\mu(\cdot)x^*$ для каждого x^* из $\mathfrak{X}^*$ принадлежит $rca(S)$;*

(b) *отображение $x^* \longrightarrow \mu(\cdot)x^*$ пространства $\mathfrak{X}^*$ в $rca(S)$ непрерывно в $\mathfrak{X}$- и $C(S)$-топологиях этих пространств соответственно;*

(c) $$x^*Tf = \int_S f(s)\mu(ds)x^*, \quad f \in C(S), \quad x^* \in \mathfrak{X}^*;$$

(d) $|T| = \|\mu\|(S)$.

Обратно, если μ есть функция множества, определенная на борелевских множествах из S, со значениями в $\mathfrak{X}^{**}$ и удовлетворяющая условиям (a) *и* (b), *то равенством* (c) *определяется линейное отображение T пространства $C(S)$ в $\mathfrak{X}$, норма которого определяется равенством* (d), *а сопряженный оператор—равенством $T^*x^* = \mu(\cdot)x^*$.*

Доказательство. Пусть $E \in \mathscr{B}$; обозначим через φ_E элемент пространства $C^{**}(S)$, второго сопряженного к $C(S)$, определяемый равенством

$$\varphi_E(\lambda) = \lambda(E), \quad \lambda \in rca(S).$$

Определим функцию множества $\mu : \mathscr{B} \longrightarrow \mathfrak{X}^{**}$, полагая

$$\mu(E) = T^{**}(\varphi_E), \quad E \in \mathscr{B}.$$

По теореме Рисса об общем виде линейного функционала (IV.6.3), T^*x^* является мерой $\lambda_{x^*} \in rca(S)$. Из равенства

$$\lambda_{x^*}(E) = \varphi_E(\lambda_{x^*}) = \varphi_E(T^*x^*) = T^{**}\varphi_E(x^*) = \mu(E)x^*$$

вытекает справедливость утверждений (a) и (c). Из этого же равенства вытекает, что $T^*x^* = \mu(\cdot)x^*$, откуда следует справедливость утверждения (b). Нетрудно проверить и справедливость равенства (d).

Обратно, если для отображения, переводящего x^* в $\mu(\cdot)x^*$, выполнены условия (a) и (b), то для каждого фиксированного $f \in C(S)$ отображение

$$x^* \longrightarrow \int_S f(s)\mu(ds)x^*$$

непрерывно в $\mathfrak{X}$-топологии пространства $\mathfrak{X}^*$ и, следовательно (V.3.9), оно порождается некоторым элементом $x_f \in \mathfrak{X}$. Таким образом, отображение $T: f \longrightarrow x_f$, определяемое равенством (c), есть линейное отображение пространства $C(S)$ в $\mathfrak{X}$. Легко доказать, что оно ограничено и обладает требуемыми свойствами, ч. т. д.

В случае слабо вполне непрерывного оператора значения мер лежат в $\mathfrak{X}$, а не только в $\mathfrak{X}^{**}$.

3. Теорема. *Пусть S — бикомпактное хаусдорфово пространство, а T — слабо вполне непрерывный оператор, отображающий $C(S)$ в $\mathfrak{X}$. Тогда существует такая векторная мера μ, определенная на борелевских множествах из S и со значениями в $\mathfrak{X}$, что*

(a) $x^*\mu$ *принадлежит* $rca(S)$, $\quad x^* \in \mathfrak{X}^*$;

(b) $Tf = \int_S f(s)\mu(ds)$, $\quad f \in C(S)$;

(c) $|T| = \|\mu\|(S)$;

(d) $T^*x^* = x^*\mu$, $\quad x^* \in \mathfrak{X}^*$.

Обратно, если μ есть векторная мера, определенная на борелевских множествах из S, со значениями в B-пространстве $\mathfrak{X}$ и удовлетворяющая условию (a), *то оператор T, определяемый равенством* (b), *является слабо вполне непрерывным оператором, отображающим $C(S)$ в $\mathfrak{X}$; норма его определяется равенством* (c), *а сопряженный к нему оператор — равенством* (d).

Доказательство. Если T — слабо вполне непрерывен, то, по теореме 4.2, оператор T^{**} отображает $C^{**}(S)$ в образ $\varkappa(\mathfrak{X})$ при естественном вложении пространства $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{X}^{**}$. Следовательно, в силу конструкции, данной в теореме 2, функция μ определена на борелевских множествах Σ, и значения ее принадлежат $\varkappa(\mathfrak{X})$. Поэтому мы можем и будем считать μ отображением в $\mathfrak{X}$. Так как $x^*\mu$ для каждого x^* из $\mathfrak{X}^*$ принадлежит $rca(S)$, то, по теореме IV.10.1, μ есть сильно счетно аддитивная векторная мера. Следовательно, по теореме IV.10.8(c), интеграл в равенстве (b) существует, и его значение принадлежит $\mathfrak{X}$. Из равенства (c) в теореме 2 заключаем, что

$$Tf = \int_S f(s)\mu(ds), \quad f \in C(S).$$

Справедливость равенств (c) и (d) вытекает из соответствующих результатов в теореме 2.

Обратно, пусть μ будет $\mathfrak{X}$-значной мерой, определенной на борелевских множествах из S и такой, что $x^*\mu$ для каждого x^* из $\mathfrak{X}^*$ принадлежит $rca(S)$. Ясно, что оператор T, определяемый равенством (b), есть ограниченный линейный оператор, отображающий $C(S)$ в $\mathfrak{X}$, и что сопряженный к нему оператор T^* определяется равенством (d).

По следствию IV.10.2, T^* отображает единичную сферу пространства $\mathfrak{X}^*$ в слабо компактное подмножество из $rca(S)$, а, значит, T^* слабо вполне непрерывен. По теореме 4.8, отсюда следует, что и T есть слабо вполне непрерывный оператор, ч. т. д.

4. Теорема. *Если T—слабо вполне непрерывный оператор, отображающий $C(S)$ в $\mathfrak{X}$, то T отображает слабо фундаментальные последовательности в сильно сходящиеся последовательности. Следовательно, T отображает относительно слабо бикомпактные подмножества из $C(S)$ в относительно сильно бикомпактные подмножества $\mathfrak{X}$.*

Доказательство. Если $\{f_n\}$ — слабо фундаментальная последовательность в $C(S)$, то она (II.3.20) ограничена. Ясно, что предел $f_0(s) = \lim f_n(s)$ существует для каждого $s \in S$. Хотя предельная функция f_0 может и не принадлежать $C(S)$, она, во всяком случае, ограничена и измерима. Пусть μ — векторная мера, соответствующая оператору T в силу предыдущей теоремы. Тогда

$$Tf_n = \int_S f_n(s)\,\mu(ds), \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Таким образом, по теореме IV.10.10, отсюда вытекает, что $\{Tf_n\}$ есть сходящаяся последовательность, чем и доказано первое наше утверждение; второе же непосредственно вытекает из первого, ч. т. д.

5. Следствие. *Произведение двух слабо вполне непрерывных операторов в $C(S)$ вполне непрерывно; в частности, квадрат слабо вполне непрерывного оператора в $C(S)$ вполне непрерывен.*

Доказательство. Это утверждение непосредственно вытекает из теоремы 4, ч. т. д.

Как было доказано в следствии 4.3, произвольный ограниченный оператор с областью значений в рефлексивном B-пространстве является слабо вполне непрерывным. Нижеследующая теорема утверждает, что это же верно и для слабо полных пространств, если только областью определения служит $C(S)$.

6. Теорема. *Произвольный ограниченный линейный оператор, отображающий $C(S)$ в слабо полное B-пространство $\mathfrak{X}$, слабо вполне непрерывен.*

Доказательство. Прежде всего мы докажем теорему в предположении, что S есть бикомпактное метрическое пространство. Пусть в этом случае μ обозначает функцию множества, определяемую теоремой 2. Для того чтобы доказать нашу теорему, достаточно ввиду теоремы 3 показать, что $\mu(E)$ принадлежит $\varkappa(\mathfrak{X})$ для каждого борелевского множества E.

Обозначим через $\mathscr{B}$ борелевские множества из S. Тогда $B(S, \mathscr{B})$ (см. IV.2.12) будет пространством определенных на S ограниченных функций, измеримых по Борелю. Обозначим через $\mathfrak{B}_0$ пересечение всех линейных многообразий $\mathfrak{B} \subseteq B(S, \mathscr{B})$, обладающих следующими двумя свойствами:

(I) $C(S) \subseteq \mathfrak{B}$;

(II) если $\{f_n\}$ есть равномерно ограниченная последовательность из $\mathfrak{B}$ и если $f(s) = \lim_{n \to \infty} f_n(s)$ для каждого s из S, то $f \in \mathfrak{B}$.

Ясно, что $\mathfrak{B}_0$ обладает этими двумя свойствами. Докажем теперь, что $\mathfrak{B}_0$ представляет собой алгебру при естественном определении произведения $(fg)(s) = f(s)g(s)$, $s \in S$. Для того чтобы убедиться в этом, предположим, что h есть некоторый фиксированный элемент из $C(S)$, и пусть $\mathfrak{B}(h) = \{f \in \mathfrak{B}_0 \mid fh \in \mathfrak{B}_0\}$. Ясно, что $\mathfrak{B}(h) \subseteq \mathfrak{B}_0$ и что $\mathfrak{B}(h)$ обладает свойствами (I) и (II), так что $\mathfrak{B}(h) = \mathfrak{B}_0$. Этим доказано, что если $h \in C(S)$ и $f \in \mathfrak{B}_0$, то $fh \in \mathfrak{B}_0$. Далее, пусть f — некоторый фиксированный элемент из $\mathfrak{B}_0$, и пусть $\mathfrak{B}(f) = \{g \in \mathfrak{B}_0 \mid fg \in \mathfrak{B}_0\}$. Мы только что доказали, что $C(S) \subseteq \mathfrak{B}(f)$, и ясно, что условие (II) тоже выполнено. Как и прежде, это означает, что $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B}(f)$, так что $\mathfrak{B}_0$ является алгеброй.

Обозначая через χ_E характеристическую функцию множества E, предположим, что $\mathscr{B}_0 = \{E \in \mathscr{B} \mid \chi_E \in \mathfrak{B}_0\}$. Так как $\mathfrak{B}_0$ есть алгебра, удовлетворяющая условию (II), то легко видеть, что $\mathscr{B}_0$ является σ-алгеброй, содержащейся в $\mathscr{B}$. Мы покажем, что $\mathscr{B}_0 = \mathscr{B}$, доказав, что $\mathscr{B}_0$ содержит все замкнутые множества.

Пусть F — произвольное замкнутое множество в S. Так как S, по предположению, есть бикомпактное метрическое пространство, то в S найдется такая возрастающая последовательность открытых множеств $\{G_n\}$, что $F' = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ и $\overline{G}_n \cap F = \varnothing$. По теореме Урысона (I.5.2), найдется такое $f_n \in C(S)$, что $|f_n| = 1$, $f_n(F) = 1$ и $f_n(\overline{G}_n) = 0$. Ясно, что $f_n(s) \to \chi_F(s)$ при $s \in S$, и следовательно, $\chi_F \in \mathfrak{B}_0$.

Теперь мы покажем, что $\mu(E) \in \mathfrak{X}$ для $E \in \mathscr{B}$. Рассмотрим совокупность $\mathfrak{B}_1$ всех таких $f \in B(S, \mathscr{B})$, что

$$\int_S f(s)\,\mu(ds) \in \mathfrak{X}.$$

Множество $\mathfrak{B}_1$ представляет собой линейное многообразие, содержащее $C(S)$. То, что $\mathfrak{B}_1$ удовлетворяет условию (II), вытекает из соотношения

$$\left(\int_S f(s)\,\mu(ds) \right) x^* = \lim_{n \to \infty} x^* \int_S f_n(s)\,\mu(ds), \quad x^* \in \mathfrak{X}^*,$$

и слабой полноты пространства $\mathfrak{X}$. Следовательно, $\mathfrak{B}_0 \subseteq \mathfrak{B}_1$. Так как

$$\mu(E) = \int\limits_E \chi(s)\, \mu(ds) \in \mathfrak{X}$$

для $E \in \mathscr{B} = \mathscr{B}_0$, то, действительно, μ отображает $\mathscr{B}$ в $\mathfrak{X}$. Этим наша теорема доказана при дополнительном предположении, что S есть бикомпактное метрическое пространство.

Чтобы завершить доказательство, предположим, что S есть бикомпактное хаусдорфово пространство. Пусть $\{f_n\}$ — произвольная последовательность элементов единичной сферы пространства $C(S)$. Обозначим через S_0 множество классов эквивалентности в S, определяемое отношением: $s \sim s'$ в том и только в том случае, если $f_n(s) = f_n(s')$, $n = 1, 2, \ldots$. Мы превратим S_0 в метрическое пространство, задавая метрику

$$\varrho(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |f_n(s) - f_n(t)|, \quad s, t \in S_0.$$

Пусть $\pi: s \to s_0$ — каноническое отображение точки в ее класс эквивалентности. Из непрерывности f_n вытекает непрерывность π. Следовательно, S_0 есть бикомпактное метрическое пространство. Рассмотрим пространство $C(S_0)$; заметим, что если $\varphi \in C(S_0)$, то функция f, определяемая равенством $f(s) = \varphi(\pi(s))$, принадлежит $C(S)$; определим теперь отображение T_0: $C(S_0) \to \mathfrak{X}$, полагая $T_0\varphi = Tf$. Ясно, что T_0 есть линейное преобразование и что $|T_0| \leqslant |T|$. Заметим, кроме того, что каждое f_n однозначно определяет функционал $\varphi_n \in C(S_0)$ такой, что $f_n(s) = \varphi_n(\pi(s))$. Согласно первой части доказательства, T_0 слабо вполне непрерывен. Найдется, следовательно, такая подпоследовательность $\{\varphi_{n_k}\}$, что $\{T_0\varphi_{n_k}\}$ слабо сходится в $\mathfrak{X}$. Так как $Tf_n = T_0\varphi_n$, то подпоследовательность $\{Tf_{n_k}\}$ будет слабо сходящейся, так что T—слабо вполне непрерывный оператор, что нам и оставалось доказать.

Поскольку вполне непрерывный оператор является и слабо вполне непрерывным, он может быть представлен векторной мерой по теореме 3. Как и следует ожидать, эта мера особого рода.

7. Теорема. *Оператор $T: C(S) \to \mathfrak{X}$ в том и только в том случае является вполне непрерывным, если векторная мера $\mu: B \to \mathfrak{X}$, соответствующая ему по теореме* 3, *принимает значения из некоторого бикомпактного подмножества* $\mathfrak{X}$.

Доказательство. Если T — вполне непрерывен, то, по теоремам 4.2 и 5.2, T^{**} является вполне непрерывным оператором, отображающим $C^{**}(S)$ в $\mathfrak{X}$, и из построения μ следует, что ее значения принадлежат некоторому бикомпактному подмножеству $\mathfrak{X}$.

Для того чтобы доказать обратное, достаточно, очевидно, показать, что совокупность K всевозможных сумм вида

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i),$$

где множества $\{E_i\}$ попарно не пересекаются и $|\alpha_i| \leqslant 1$, есть вполне ограниченное подмножество $\mathfrak{X}$. Пусть задано $\varepsilon > 0$, и пусть M равно полувариации μ на S. Выберем такое множество комплексных чисел $\{\beta_1, \ldots, \beta_p\}$, что $|\beta_i| \leqslant 1$ и что если $|\alpha| \leqslant 1$, то найдется $\beta_i = \beta(\alpha)$ такое, что $|\beta(\alpha) - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2M}$. Обозначим через $\mathscr{B}$ алгебру борелевских множеств из S, и пусть $\{F_1, \ldots, F_q\} \subset \mathscr{B}$ таково, что если $E \in \mathscr{B}$, то найдется такое $F_k = F(E)$, что $|\mu(F(E) - \mu(E)| < \frac{\varepsilon}{2p}$. Тогда, из определения полувариации,

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i) - \sum_{i=1}^{n} \beta(\alpha_i) \mu(E_i) \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} \{\alpha_i - \beta(\alpha_i)\} \mu(E_i) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2M} \cdot M = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Далее, $\sum_{i=1}^{n} \beta(\alpha_i) \mu(E_i)$ может быть записана в виде суммы $\sum_{j=1}^{p} \beta_j \mu(E_j^+)$, где $\{E_j^+\}$ — семейство попарно не пересекающихся множеств из $\mathscr{B}$. Таким образом,

$$\left| \sum_{j=1}^{p} \beta_j \mu(E_j^+) - \sum_{j=1}^{p} \beta_j \mu(F(E_j^+)) \right| \leqslant \sum_{j=1}^{p} |\mu(E_j^+) - \mu(F(E_j^+))| < p \frac{\varepsilon}{2p} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Мы доказали, что каждый элемент из K может быть аппроксимирован с точностью до произвольного положительного расстояния ε суммами вида $\sum_{j=1}^{p} \beta_j \mu(F_{k_j})$. Этим доказано, что K вполне ограничено. Следовательно, оператор T, определяемый равенством $Tf = \int_S f(s) \mu(ds)$, $f \in C(S)$, вполне непрерывен, ч. т. д.

Мы уже видели (IV.6.18, IV.7.6 и V.8.11), что пространства $B(S)$, $B(S, \Sigma)$, AP и $L_\infty(S, \Sigma, \mu)$ изометрически изоморфны пространству $C(S_1)$, где S_1 есть некоторое бикомпактное хаусдорфово пространство. То же самое справедливо (IV.6.22) и для пространства ограниченных непрерывных функций, заданных на вполне регулярном пространстве, а также для пространств c и l_∞. Следовательно, каждый оператор, определенный на одном из этих пространств и с областью значений в некотором слабо полном пространстве, автоматически будет слабо вполне непрерывным. Далее, каждый слабо вполне непрерывный оператор, определенный на одном из этих пространств, отображает слабо фундаментальную последовательность в сильно сходящуюся, а квадрат такого оператора, заданного на одном из этих пространств, вполне непрерывен.

Дополнительная информация и специальные случаи содержатся в упражнениях § 9.

8. Общий вид линейных операторов в лебеговом пространстве

Содержание этого параграфа параллельно содержанию предыдущего. Прежде всего здесь приведены аналитические выражения для произвольного линейного и для слабо вполне непрерывного операторов, отображающих произвольное B-пространство в L_1. Затем рассматривается вопрос об общем виде оператора, областью значений которого служит L_1. Вполне непрерывные и слабо вполне непрерывные операторы задаются с помощью некоторого ядра, и топологические свойства оператора формулируются эквивалентным образом в терминах этого ядра. Как и в пространстве $C(S)$, слабо вполне непрерывные операторы обладают свойством переводить слабо сходящуюся последовательность в сильно сходящуюся (ср. теорему 7.4).

1. Теорема. *Пусть* (S, Σ, μ) — *пространство с мерой, а* T — *непрерывное линейное отображение* B-*пространства* $\mathfrak{X}$ *в* $L_1(S, \Sigma, \mu)$. *Тогда существует такая однозначно определенная функция* $x^*(\cdot)$, *отображающая* Σ *в* $\mathfrak{X}^*$, *что*

(I) *для каждого* x *из* $\mathfrak{X}$ *функция множества* $x^*(\cdot)\,x$ *абсолютно непрерывна относительно* μ *и счетно аддитивна на* Σ *и*

$$\text{(II)}\quad Tx = \frac{dx^*(\cdot)\,x}{d\mu}, \quad x \in \mathfrak{X}.$$

Норма преобразования T *удовлетворяет соотношениям*

$$\text{(III)}\quad \sup_{E \in \Sigma} |x^*(E)| \leqslant |T| \leqslant 4 \sup_{E \in \Sigma} |x^*(E)|.$$

Обратно, если функция $x^*(\cdot)$, *отображающая* Σ *в* $\mathfrak{X}^*$, *обладает свойством* (I), *то равенством* (II) *определяется оператор* T, *отображающий* $\mathfrak{X}$ *в* $L_1(S, \Sigma, \mu)$, *норма которого удовлетворяет неравенству* (III).

Кроме того, для слабой полной непрерывности оператора T *необходимо и достаточно, чтобы функция множества* $x^*(\cdot)$ *была счетно аддитивной на* Σ *в сильной топологии пространства* $\mathfrak{X}^*$.

Доказательство. Если для каждого E из Σ определить функционал $x^*(E)$ в $\mathfrak{X}^*$ равенством

$$x^*(E)\,x = \int_E (Tx)(s)\,\mu(ds),$$

то справедливость утверждений (I) и (II) очевидна. Согласно теоремам III.2.20(а) и III.1.5, для каждого E из Σ

$$|x^*(E)| = \sup_{|x|\leqslant 1} |x^*(E)x| \leqslant \sup_{|x|\leqslant 1} \int_S |(Tx)(s)|\, v(\mu, ds) =$$

$$= |T| = \sup_{|x|\leqslant 1} v(x^*(\cdot)x, S) \leqslant 4 \sup_{|x|\leqslant 1} \sup_{E\in\Sigma} |x^*(E)x| = 4 \sup_{E\in\Sigma} |x^*(E)|.$$

Обратно, если функция $x^*(\cdot)$, отображающая Σ в $\mathfrak{X}^*$, обладает свойством (I), то оператор T, определяемый равенством (II) (см. замечание, следующее за теоремой III.10.7), будет, очевидно, линейным. Для того чтобы убедиться в его непрерывности, достаточно, следовательно, показать, что он замкнут (II.2.4). Если $x_n \to x$ и $Tx_n \to f$, то для каждого E из Σ

$$\int_E f(s)\,\mu(ds) = \lim_n \int_E (Tx_n)(s)\,\mu(ds) =$$

$$= \lim_n x^*(E)\,x_n = x^*(E)\,x = \int_E (Tx)(s)\,\mu(ds),$$

откуда следует, что $Tx = f$, т. е. что T замкнут и, следовательно, непрерывен. Для того чтобы доказать последнее утверждение теоремы, рассмотрим подпространство $ca(S, \Sigma, \mu)$ пространства $ca(S, \Sigma)$, состоящее из всех абсолютно непрерывных относительно μ функций из $ca(S, \Sigma)$. Согласно комплексной форме теоремы Радона — Никодима (III.10.7) и теореме III.2.20(а), пространство $ca(S, \Sigma, \mu)$ эквивалентно пространству $L_1(S, \Sigma, \mu)$. В силу этой эквивалентности, T определяет оператор $x \to x^*(\cdot)x$, отображающий $\mathfrak{X}$ в $ca(S, \Sigma, \mu)$. Таким образом, оператор T в том и только в том случае является слабо вполне непрерывным, если совокупность всех функций множества $x^*(\cdot)x$ относительно слабо бикомпактна в $ca(S, \Sigma, \mu)$ при $|x| \leqslant 1$. Согласно теореме IV.9.1 это будет в том и только в том случае, если счетная аддитивность $x^*(\cdot)x$ равномерна относительно $|x| \leqslant 1$. Таким образом, для слабой бикомпактности T необходимо и достаточно, чтобы $x^*(\cdot)$ было счетно аддитивно в сильной топологии пространства $\mathfrak{X}^*$, ч. т. д.

2. Теорема. *Пусть* (S, Σ, μ) — *пространство с* σ-*конечной положительной мерой, а* T — *непрерывное линейное отображение пространства* $L_1(S, \Sigma, \mu)$ *в линейное топологическое пространство* $\mathfrak{X}$. *Предположим, что* T *отображает замкнутую единичную сферу пространства* $L_1(S, \Sigma, \mu)$ *на некоторое множество, замыкание которого* K *бикомпактно и имеет счетный базис. Тогда существует функция* $x(\cdot)$, *отображающая* S *в* K, *такая, что* $x^*x(\cdot)$ *принадлежит*

$L_\infty(S, \Sigma, \mu)$ *для каждого* x^* *из* $\mathfrak{X}^*$ *и что*

$$\int\limits_S x^*x(s)f(s)\mu(ds) = x^*Tf, \quad f \in L_1(S, \Sigma, \mu).$$

Эта теорема сначала будет доказана в предположении, что $\mu(S) < \infty$. Ее доказательство будет основано на трех нижеследующих леммах, для формулировки которых придется ввести такое обозначение: если $\pi = \{E_1, \ldots, E_n\}$ и $\pi' = \{F_1, \ldots, F_m\}$ — два разбиения множества S на попарно непересекающиеся множества из Σ положительной меры, то мы пишем $\pi' \geqslant \pi$ в том и только в том случае, если для каждого $F_j \in \pi'$ найдется такое $E_k \in \pi$, что $\mu(F_j - E_k) = 0$. Непосредственно доказывается, что при этом упорядочении совокупность всевозможных разбиений множества S является направленным множеством (I.7.1). Для любого разбиения $\pi = \{E_1, \ldots, E_n\}$ множества S и любой определенной на S ограниченной измеримой функции h определим функцию h_π, полагая

$$h_\pi(t) = \sum_{i=1}^{n} \left\{\frac{1}{\mu(E_i)} \int\limits_{E_i} h(s)\mu(ds)\right\} \chi_{E_i}(t).$$

Определим также

$$x_\pi(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{T(\chi_{E_i})}{\mu(E_i)} \chi_{E_i}(t).$$

3. Лемма. *Пусть* (S, Σ, μ) — *пространство с конечной положительной мерой и* h — *определенная на* S *ограниченная измеримая функция. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое разбиение* π_0 *множества* S, *что если* $\pi \geqslant \pi_0$, *то*

$$|h_\pi(s) - h(s)| < \varepsilon$$

для всех s, *не принадлежащих некоторому зависящему от* π *нуль-множеству* $E(\pi)$.

Доказательство. Пусть область значений функции h представлена в виде суммы попарно не пересекающихся борелевских множеств $A_1, \ldots, A_k$ диаметра меньше ε. По крайней мере одно из подмножеств $G_i = h^{-1}(A_i)$, $i = 1, \ldots, k$, множества S имеет положительную меру; мы предположим, что это G_1. Множества $E_1, \ldots, E_n$ разбиения π_0 получаются следующим образом. Мы присоединим к G_1 множества G_j, имеющие меру нуль, получим E_1. Остальные множества G_j положительной меры обозначим $E_2, \ldots, E_n$. Существует, таким образом, такое нуль-множество E_0, что

$$|h(s) - h(t)| < \varepsilon, \quad s, t \in E_i - E_0, \quad i = 1, \ldots, r.$$

Далее, если $\pi \geqslant \pi_0$, $\pi=(F_1, \ldots, F_m)$, то найдется такое зависящее от π нуль-множество F_0, что каждое из множеств $F_i - F_0$ содержится в одном из множеств E_j. Таким образом, при $s \notin E_0 \cup F_0$

$$|h_\pi(s) - h(s)| = \frac{1}{\mu(F_i)} \left| \int_{F_i} \{h(s) - h(t)\} \mu(dt) \right| =$$

$$= \frac{1}{\mu(E_j \cap F_i)} \left| \int_{E_j \cap F_i} \{h(t) - h(s)\} \mu(dt) \right| < \varepsilon,$$

ч. т. д.

4. Лемма. *Если бикомпактное хаусдорфово пространство S имеет счетный базис, то $C(S)$ сепарабельно.*

Доказательство. Согласно теоремам I.6.19 и I.6.12, S является сепарабельным метрическим пространством. Пусть $\varrho(x, y)$ — метрика в S; положим $f_n(x)=\varrho(x, x_n)$, где $\{x_n\}$ — есть некоторое счетное всюду плотное подмножество S. По лемме I.5.10, f_n — ограниченная функция и, следовательно, принадлежит $C(S)$. По теореме IV.6.16 (или IV.6.17), замкнутая алгебра, порождаемая счетным множеством $\{f_n\}$, совпадает со всем $C(S)$. Таким образом, пространство $C(S)$ сепарабельно, ч. т. д.

Обозначим через U замкнутую единичную сферу пространства $L_1(S, \Sigma, \mu)$. Поскольку множество $K=\overline{TU}$ бикомпактно и имеет счетный базис, то в силу последней леммы пространство $C(K)$ сепарабельно. Так как подпространство сепарабельного метрического пространства сепарабельно (I.6.12), то найдется такая последовательность $\{x_i^*\} \subseteq \mathfrak{X}^*$, что для каждого x^* из $\mathfrak{X}^*$ и $\varepsilon > 0$

$$\text{(I)} \qquad |x^*(k) - x_j^*(k)| < \varepsilon, \quad k \in K,$$

для некоторого натурального j.

Так как мы предположили, что $\mu(S) < \infty$, то функция множества $x^*T\chi_E$ для каждого x^* из $\mathfrak{X}^*$ абсолютно непрерывна и, следовательно, по теореме III.10.2, в $L_1(S, \Sigma, \mu)$ найдется такая функция $\alpha(\cdot, x^*)$, что

$$\text{(II)} \qquad x^*T\chi_E = \int_E \alpha(t, x^*) \mu(dt), \quad E \in \Sigma.$$

Так как x^*T является непрерывным линейным функционалом на $L_1(S, \Sigma, \mu)$, то справедливо неравенство

$$|x^*T\chi_E| \leqslant |x^*T| \mu(E), \quad E \in \Sigma,$$

из которого следует, что функция $\alpha(\cdot, x^*)$ существенно ограничена. Таким образом, функционалы $\int_S \alpha(t, x^*) f(t) \mu(dt)$ и x^*Tf определены и непрерывны относительно f из $L_1(S, \Sigma, \mu)$. Так как в силу равенства (II) они совпадают на характеристических функциях, то они должны совпадать всюду на $L_1(S, \Sigma, \mu)$ т. е.

$$\text{(III)} \quad x^*Tf = \int_S \alpha(t, x^*) f(t) \mu(dt), \quad f \in L_1(S, \Sigma, \mu).$$

5. Лемма. *Существует такая последовательность* $\{\pi_n\}$ *разбиений множества* S *на множества положительной меры и такое нуль-множество* E_0, *что*

$$\lim_{n\to\infty} x_i^* x_{\pi_n}(t) = \alpha(t, x_i^*), \quad i = 1, 2, \ldots,$$

равномерно относительно t *из* $S - E_0$.

Доказательство. Заметим прежде всего, что для каждого разбиения $\pi = \{E_1, \ldots, E_n\}$

$$\alpha_\pi(t, x^*) = \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{1}{\mu(E_j)} \int_{E_j} \alpha(s, x^*) \mu(ds)\right] \chi_{E_j}(t) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{x^*T(\chi_{E_j})}{\mu(E_j)} \chi_{E_j}(t) = x^* x_\pi(t).$$

Разбиение π_n будет выбираться по индукции. По лемме 3, существует такое разбиение π_1 и такое множество E_1, что $\mu(E_1) = 0$ и

$$|x_1^* x_{\pi_1}(t) - \alpha(t, x_1^*)| < 1, \quad t \in S - E_1.$$

Предположим теперь, что при $i \leqslant k$ разбиение π_i и множество E_i, для которого $\mu(E_i) = 0$, уже выбраны таким образом, что

$$|x_i^* x_{\pi_k}(t) - \alpha(t, x_i^*)| < \frac{1}{k}, \quad 1 \leqslant i \leqslant k, \quad t \in S - E_k.$$

Пользуясь леммой 3 по отношению к каждой из функций $\alpha(t, x_i^*)$, $i = 1, \ldots, k+1$, с ε, равным $\frac{1}{k+1}$, получим такое разбиение $\pi_{k+1} \geqslant \pi_k$, что

$$|x_i^* x_{\pi_{k+1}}(t) - \alpha(t, x_i^*)| < \frac{1}{k+1}, \quad 1 \leqslant i \leqslant k+1, \quad t \in S - E_{k+1},$$

для некоторого нуль-множества E_{k+1}. Наша лемма будет доказана, если положить $E_0 = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, ч. т. д.

Доказательство теоремы 2. Заметим, что для каждого t_0 из S последовательность $\{x_{\pi_n}(t_0)\}$ принадлежит K. Так как K есть бикомпактное хаусдорфово пространство со счетным базисом, то оно является метрическим пространством (I.6.19) и, следовательно, некоторая подпоследовательность этой последовательности сходится к некоторому вектору $x(t_0)$ из K (I.6.13). Обозначим через $x(t)$ для каждого t из S произвольным образом определенный предел такой подпоследовательности. Тогда для $i = 1, 2, \ldots$

$$\lim_{n\to\infty} x_i^* x_{\pi_n}(t) = \alpha(t, x_i^*) = x_i^* x(t), \quad t \in S - E_0,$$

так что функции $x_i^* x(\cdot)$ ограничены и измеримы и

$$x_i^* Tf = \int_S x_i^* x(t) f(t) \mu(dt), \quad i = 1, 2, \ldots, \quad f \in L_1(S, \Sigma, \mu).$$

Так как $x(S) \subseteq K$, то из неравенства (I) мы видим, что для каждого x^* из $\mathfrak{X}^*$ и каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное j, что

$$|x^* x(t) - x_j^* x(t)| < \varepsilon, \quad t \in S.$$

Так как функция $x^* x(\cdot)$ является пределом равномерно сходящейся последовательности ограниченных измеримых функций, то она ограничена и измерима. Кроме того, если $|f| \leqslant 1$, то

$$|x^* Tf - \int_S x^* x(t) f(t) \mu(dt)| \leqslant$$
$$\leqslant |x^* Tf - x_j^* Tf| + \int_S |x^* x(t) - x_j^* x(t)| |f(t)| \mu(dt) < 2\varepsilon,$$

что и доказывает нашу теорему в предположении, что $\mu(S) < \infty$.

В случае, когда $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$, где $\mu(S_n) < \infty$ и $S_n \subset S_{n+1}$, мы можем применить уже доказанный результат к пространству $L_1(S_n, \Sigma_n, \mu)$, где Σ_n состоит из таких множеств из Σ, которые являются подмножествами S_n. Функция $x(\cdot)$, отображающая S в K, определяется естественным образом как предел последовательности функций $x_n(\cdot)$, полученных для (S_n, Σ_n, μ), ч. т. д.

Ниже мы дадим некоторые приложения теоремы 2. Прежде всего, пользуясь установленным в следствии V.4.3 критерием бикомпактности, мы получим общий вид отображения пространства $L_1(S, \Sigma, \mu)$ в пространство, сопряженное к некоторому сепарабельному пространству.

6. Теорема. *Пусть (S, Σ, μ) — пространство с σ-конечной положительной мерой, а T — непрерывное линейное отображение пространства $L_1(S, \Sigma, \mu)$ в пространство $\mathfrak{X}^*$, сопряженное к сепарабельному B-пространству $\mathfrak{X}$. Тогда найдется единственная с точностью до функции, эквивалентной нулю, функция $x^*(\cdot)$: $S \to \mathfrak{X}^*$,*

такая, что $x^*(\cdot)x$ *существенно ограничено для каждого* x *из* $\mathfrak{X}$ *и*

$$[*] \qquad (Tf)(x) = \int_S x^*(s)xf(s)\mu(ds), \quad f \in L_1(S, \Sigma, \mu), \quad x \in \mathfrak{X}.$$

Кроме того, $|T| = \operatorname{vrai}\sup_{s \in S} |x^*(s)|$. *Обратно, если* $x^*(\cdot)$ — *произвольная функция, отображающая* S *в* $\mathfrak{X}^*$, *такая, что* $x^*(\cdot)x$ *измеримо для каждого* x *из* $\mathfrak{X}$ *и что*

$$\operatorname{vrai}\sup_{s \in S} |x^*(s)| = M < \infty,$$

то равенством [*] *определяется непрерывное линейное отображение* T *пространства* $L_1(S, \Sigma, \mu)$ *в* $\mathfrak{X}^*$ *с нормой, равной* M.

Доказательство. Если T есть ограниченный оператор, отображающий $L_1(S, \Sigma, \mu)$ в $\mathfrak{X}^*$, а U — единичная сфера пространства $L_1(S, \Sigma, \mu)$, то множество $K = \overline{TU}$ бикомпактно в $\mathfrak{X}$-топологии (V.4.3) и имеет в этой топологии счетный базис (V.5.1). По теореме 2, существует такое отображение $s \to x^*(s)$ множества S в $K \subset \mathfrak{X}^*$, что выполняется равенство [*], причем $|x^*(s)| \leqslant |T|$. С другой стороны, из равенства [*] вытекает, что $|T| \leqslant \operatorname{vrai}\sup |x^*(s)|$, так что $|T| = \operatorname{vrai}\sup |x^*(s)|$. Теперь мы докажем, что с точностью до функции, эквивалентной нулю, функция $x^*(s)$ определена однозначно. Если $x^*(s)x \in L_\infty(S, \Sigma, \mu)$ для каждого $x \in \mathfrak{X}$ и $\int x^*(s)xf(s)\mu(ds) = 0$ для любых $x \in \mathfrak{X}$ и $f \in L_1(S, \Sigma, \mu)$, то, ввиду доказанной в теореме IV.8.5 единственности, для каждого $x \in \mathfrak{X}$ найдется такое измеримое множество E_x меры нуль, что $x^*(s)x = 0$ для $s \in S$, $s \notin E_x$. Пусть X_1 — счетное всюду плотное подмножество $\mathfrak{X}$ и $E = \bigcup_{x \in X_1} E_x$. Тогда ясно, что $x^*(s)x = 0$ для $x \in \mathfrak{X}$, $s \in S$, $s \notin E$. Следовательно, $x^*(s) = 0$ для $s \notin E$.

Обратно, пусть $x^*(\cdot)$ — отображение S в $\mathfrak{X}^*$, $\operatorname{vrai}\sup |x^*(s)| = M < \infty$ и функция $x^*(\cdot)x$ измерима для каждого $x \in \mathfrak{X}$. Определим отображение T пространства L_1 равенством [*]. Так как $|(Tf)x| \leqslant M|f||x|$, то $Tf \in \mathfrak{X}^*$. Следовательно, $T \in B(L_1(S, \Sigma, \mu), \mathfrak{X}^*)$. Утверждение относительно нормы T вытекает из первой части теоремы, ч. т. д.

7. Следствие. *Теорема* 6 *остается справедливой, если предположение о том, что* $\mathfrak{X}^*$ *является пространством, сопряженным к некоторому сепарабельному пространству, заменить предположением, что* $\mathfrak{X}^*$ *сопряжено к произвольному* B-*пространству, а оператор* T *имеет сепарабельную область значений.*

Для доказательства этого следствия, помимо теоремы 6, понадобится следующая лемма.

8. Лемма. *Пусть $\mathfrak{X}^*$ сопряжено к B-пространству $\mathfrak{X}$. Предположим, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{X}^*$ — сепарабельное линейное многообразие. Тогда найдется такое замкнутое сепарабельное подпространство $\mathfrak{Y}$ пространства $\mathfrak{X}$, что $\mathfrak{M}$ эквивалентно некоторому подпространству пространства $\mathfrak{Y}^*$.*

Доказательство. Пусть $\{x_n^*\}$ — счетное всюду плотное подмножество $\mathfrak{M}$, а $\{x_{mn}\}$, $m, n = 1, 2, \ldots$, принадлежит $\mathfrak{X}$ и удовлетворяет соотношениям $|x_{mn}| = 1$ и

$$|x_n^*(x_{mn})| \geqslant \left(1 - \frac{1}{m}\right)|x_n^*|.$$

Подпространство $\mathfrak{Y} = \overline{\text{sp}}\,\{x_{mn}\}$ сепарабельно. Отображение $V\colon \mathfrak{X}^* \to \mathfrak{Y}^*$, определяемое равенством

$$Vx^*(y) = x^*(y), \quad y \in \mathfrak{Y}, \quad x^* \in \mathfrak{X}^*,$$

удовлетворяет условию $|V| \leqslant 1$. Однако поскольку

$$|Vx_n^*| \geqslant \sup_m |x_n^*(x_{mn})| = |x_n^*|, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

то отображением V определяется некоторое изометрическое отображение множества $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{Y}^*$, ч. т. д.

Доказательство следствия 7. Обозначим через $\mathfrak{M}$ замыкание области значений оператора T. По лемме, $\mathfrak{M}$ эквивалентно некоторому подпространству пространства $\mathfrak{Y}^*$, сопряженного к некоторому сепарабельному подпространству $\mathfrak{Y}$ пространства $\mathfrak{X}$. По теореме 6, найдется единственная с точностью до функции, эквивалентной нулю, функция $x^*(\cdot)$, отображающая S в $\mathfrak{M}$, такая, что $|T| = \text{vrai}\sup|x^*(s)|$ и что для каждого x из $\mathfrak{Y}$ функция $x^*(\cdot)x$ μ-измерима и

$$\text{(I)} \qquad \int_S x^*(s)\,xf(s)\,\mu(ds) = (Tf)\,x, \quad f \in L_1(S, \Sigma, \mu).$$

Для того чтобы завершить доказательство следствия, остается показать, что и для произвольного x из $\mathfrak{X}$ функция $x^*(\cdot)x$ μ-измерима и справедливо равенство (I). Итак, пусть x_0 обозначает некоторый фиксированный элемент из $\mathfrak{X}$, а $\mathfrak{Y}_0$ — замкнутое подпространство, натянутое на x_0 и $\mathfrak{Y}$. Тогда, как и прежде, найдется такая существенно ограниченная функция $x_0^*(\cdot)$, отображающая S в $\mathfrak{M}$, что $x_0^*(\cdot)x$ μ-измерима для каждого x из $\mathfrak{Y}_0$ и для таких x

$$\text{(II)} \qquad \int_S x_0^*(s)\,xf(s)\,\mu(ds) = (Tf)\,x, \quad f \in L_1(S, \Sigma, \mu).$$

Таким образом, так как $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{Y}_0$, из равенства (I) вытекает что

$$\int_E \{x_0^*(s) - x^*(s)\}\,x\mu(ds) = 0, \quad E \in \Sigma,$$

для x из $\mathfrak{Y}$. Таким образом, существует такое нуль-множество E_x, что $x_0^*(s)x = x^*(s)x$ для x из $\mathfrak{Y}$ и $s \notin E_x$. Так как $\mathfrak{Y}$ сепарабельно, то найдется такое нуль-множество E, что для всех x из $\mathfrak{Y}$

$$\{x_0^*(s) - x^*(s)\}x = 0, \quad s \notin E.$$

Так как единственным вектором из $\mathfrak{M}$, обращающимся в нуль на $\mathfrak{Y}$, является нулевой вектор и так как $x_0^*(s) - x^*(s)$ принадлежит $\mathfrak{M}$, то из предыдущего равенства вытекает, что $x_0^*(s) = x^*(s)$ для почти всех относительно μ точек s из S. Равенство (II) выполняется для x_0, а значит, выполняется также и равенство (I), ч. т. д.

В следующей теореме показано, что если областью значений оператора, определенного на $L_1(S, \Sigma, \mu)$, служит другое L_1-пространство, то можно представить оператор T в виде интегрального оператора со скалярным ядром, вместо того, чтобы представлять его посредством некоторого векторнозначного интеграла. В формулировке этой теоремы обозначение производной $d\lambda/d\mu$ вводится в связи с использованием теоремы Радона — Никодима (III.10.7). Напомним, что для абсолютно непрерывной относительно μ комплексной меры λ существует однозначно определенная μ-интегрируемая функция $d\lambda/d\mu$ такая, что

$$\lambda(E) = \int_E \left(\frac{d\lambda}{d\mu}\right)(s)\,\mu(ds), \quad E \in \Sigma.$$

9. Следствие. *Пусть* (S, Σ, μ) — *пространство с* σ-*конечной положительной мерой, а* λ — *положительная регулярная мера, определенная на борелевских множествах* $\mathscr{B}$ *бикомпактного хаусдорфова пространства* W. *Обозначим через* T *непрерывное линейное отображение пространства* $L_1(S, \Sigma, \mu)$ *в* $L_1(W, \mathscr{B}, \lambda)$. *Предположим, что либо* (a) W *является метрическим пространством, либо* (b) T *имеет сепарабельную область значений. Тогда существует такая скалярная функция* K, *определенная на* $\mathscr{B} \times S$ *и обладающая следующими свойствами:*

(I) *Для каждого* $s \in S$ *функция множества* $K(\cdot, s)$, *определенная на* $\mathscr{B}$, *является регулярной мерой такой, что*

$$\operatorname*{vrai\,sup}_s v(K(\cdot, s), S) = M < \infty.$$

(II) *Для каждого* E *из* $\mathscr{B}$ *функция* $K(E, \cdot)$ *измерима на* S.

(III) *Для каждого* A *из* Σ *такого, что* $\mu(A) < \infty$, *мера* $\int_A K(E, s)\,\mu(ds)$, *определенная для* E *из* $\mathscr{B}$, *регулярна и абсолютно непрерывна относительно* λ.

(IV) $$Tf = \frac{d}{d\lambda}\int_S K(\cdot, s) f(s)\,\mu(ds), \quad f \in L_1(S, \Sigma, \mu).$$

(V) $$|T| = M.$$

Обратно, если функция K, определенная на $\mathscr{B} \times S$, удовлетворяет условиям (I), (II) *и* (III), *то равенством* (IV) *определяется некоторое непрерывное линейное отображение пространства* $L_1(S, \Sigma, \mu)$ *в* $L_1(W, \mathscr{B}, \lambda)$, *норма которого определяется равенством* (V).

Доказательство. Пусть $\mathfrak{X} = C(W)$, так что $\mathfrak{X}^*$ будет пространством определенных на W регулярных мер (теорема IV.6.3). Пространство $L_1(W, \mathscr{B}, \lambda)$ изометрически изоморфно множеству абсолютно непрерывных относительно λ регулярных мер (см. III.10.7 и III.2.20 (a)). Таким образом, пространство $L_1(W, \mathscr{B}, \lambda)$ можно рассматривать как подпространство в $\mathfrak{X}^*$. Если условие (a) выполнено, то пространство $\mathfrak{X} = C(W)$, по лемме 4, сепарабельно, и мы можем, пользуясь теоремой 6, получить функцию K. В случае условия (b) применяем следствие 7, ч. т. д.

Вернемся теперь к случаю, когда область значений оператора T лежит в произвольном B-пространстве. Мы покажем, что если T — слабо вполне непрерывный оператор с сепарабельной областью значений, то его интегральное представление можно завершить определением векторнозначного ядра, обладающего многими свойствами, не разделяемыми ядрами, фигурирующими в теоремах 2, 6 и 7. В этом случае ядром служит ограниченная μ-измеримая функция $x(\cdot)$ и, значит, векторная функция $x(\cdot) f(\cdot)$ μ-интегрируема для каждого f из $L_1(S, \Sigma, \mu)$. Оператор T в этом случае может быть представлен в виде

$$Tf = \int_S x(s) f(s) \mu(ds), \quad f \in L_1(S, \Sigma, \mu),$$

что легко доказывается без использования функционалов x^* из $\mathfrak{X}^*$. Так как ограниченные множества в рефлексивном пространстве слабо компактны, то можно заметить, что следующая теорема применима к каждому непрерывному линейному отображению пространства $L_1(S, \Sigma, \mu)$ в сепарабельное рефлексивное пространство.

10. Теорема. *Пусть (S, Σ, μ) — пространство с σ-конечной положительной мерой, а T — слабо вполне непрерывный оператор, отображающий $L_1(S, \Sigma, \mu)$ в сепарабельное подмножество B-пространства $\mathfrak{X}$. Тогда существует единственная с точностью до функции, эквивалентной нулю, ограниченная измеримая функция $x(\cdot)$, отображающая S в некоторое слабо бикомпактное подмножество $\mathfrak{X}$, такая, что*

$$[*] \qquad Tf = \int_S x(s) f(s) \mu(ds), \quad f \in L_1(S, \Sigma, \mu);$$

и

$$|T| = \operatorname{vrai\,sup} |x(s)|.$$

Обратно, если $x(\cdot)$ — измеримая существенно ограниченная функция, определенная на S и такая, что почти все ее значения принадлежат некоторому слабо бикомпактному подмножеству $\mathfrak{X}$, то равенством [*] *определяется слабо вполне непрерывное отображение пространства $L_1(S, \Sigma, \mu)$ в $\mathfrak{X}$, имеющее сепарабельную область значений.*

Доказательство. Обозначим через U замкнутую единичную сферу пространства $L_1(S, \Sigma, \mu)$. Если T — слабо вполне непрерывный оператор с сепарабельной областью значений, то существование такой определенной на S функции $x(\cdot)$, что все ее значения $x(s)$ принадлежат сепарабельному слабо бикомпактному множеству $\overline{T(U)}$, вытекает из теоремы V.6.3 и теоремы 2. По теореме III.6.11, $x(s)$ измерима, и, значит, равенство [*] имеет место. Так как $x(s) \in \overline{TU}$, то $\sup\limits_s |x(s)| \leqslant |T|$. С другой стороны, из равенства [*] вытекает, что $|T| \leqslant \operatorname{vrai}\sup |x(s)|$ и, следовательно, $|T| = \operatorname{vrai}\sup |x(s)|$.

При доказательстве обратного утверждения нашей теоремы можно, очевидно, без ограничения общности предположить, что область значений функции $x(\cdot)$ лежит в слабо бикомпактном множестве K. Положим

$$K_1 = \overline{\text{co}}(K \cup -K \cup iK \cup -iK).$$

Согласно теореме V.6.4, K_1 слабо бикомпактно. Легко видеть, что $Tf \in K_1$ для любой конечнозначной функции f из $L_1(S, \Sigma, \mu)$, для которой $|f| \leqslant 1$, следовательно, $TU \subseteq K$. Таким образом, T слабо вполне непрерывен. По теореме III.6.11, существует такое сепарабельное подпространство $\mathfrak{X}_1$ пространства $\mathfrak{X}$ и такое нуль-множество $F \in \Sigma$, что $x(s) \in \mathfrak{X}_1$, если $s \in S - F$. Так как $Tf \in \mathfrak{X}_1$ для конечнозначных функций f, то область значений оператора T сепарабельна. Наконец, единственность $x(\cdot)$ непосредственно вытекает из леммы III.6.8, ч. т. д.

Так как каждый вполне непрерывный оператор слабо вполне непрерывен и имеет сепарабельную область значений, то из теоремы 10 вытекает такое следствие:

11. Следствие. *Для того, чтобы оператор T, фигурирующий в теореме* 10, *был вполне непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое нуль-множество E и такое бикомпактное множество K в $\mathfrak{X}$, что $x(s)$ принадлежит K для каждого s из дополнения множества E.*

Доказательство. Обозначим через U единичную сферу пространства $L_1(S, \Sigma, \mu)$. Если T вполне непрерывен, то $K = \overline{TU}$ является бикомпактным подмножеством сепарабельного пространства $\overline{T(L_1)}$, и из доказательства теоремы 10 вытекает, что $x(s) \in \overline{TU}$ для $s \in S$.

Обратно, пусть K бикомпактно, а E — подмножество множества S, имеющее меру нуль и такое, что $x(s) \in K$ для $s \notin E$. Из доказательства теоремы 10 вытекает, что

$$x(s) \in \overline{TU} \subseteq \overline{\mathrm{co}}(K \cup -K \cup iK \cup -iK).$$

Следовательно, по теореме V.2.6, T вполне непрерывен, ч. т. д.

Замечание. Из теоремы 10 с помощью теоремы III.11.17 легко вытекает следующее утверждение.

Пусть (S, Σ, μ) и (S_1, Σ_1, μ_1) — пространства с σ-конечной положительной мерой. Рассмотрим слабо вполне непрерывное отображение T пространства $L_1(S, \Sigma, \mu)$ в некоторое сепарабельное подпространство пространства $L_1(S_1, \Sigma_1, \mu_1)$. Тогда существует такая определенная на $S \times S_1$ единственная с точностью до функции, эквивалентной нулю, $\mu \times \mu_1$-измеримая функция K, что

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{\mu} \int_{S_1} |K(s, s_1)| \mu_1(ds_1) < \infty$$

и

$$(Tf)(s_1) = \int_S K(s, s_1) f(s) \mu(ds), \quad f \in L_1(S, \Sigma, \mu).$$

Кроме того,

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{\mu} \int_{S_1} |K(s, s_1)| \mu_1(ds_1) = |T|.$$

В конце предыдущего параграфа на основании теоремы 7.4 было отмечено, что слабо вполне непрерывный оператор, определенный на любом из пространств $B(S)$, $B(S, \Sigma)$, AP, $C(S)$ или $L_\infty(S, \Sigma, \mu)$, отображает каждую слабо фундаментальную последовательность в сильно сходящуюся. Следующая теорема показывает, что лебеговы пространства $L_1(S, \Sigma, \mu)$ также обладают этим свойством.

12. Теорема. *Пусть (S, Σ, μ) — пространство с положительной мерой, а T — слабо вполне непрерывное линейное отображение пространства $L_1(S, \Sigma, \mu)$ в некоторое B-пространство. Тогда оператор T отображает слабо фундаментальные последовательности в сильно сходящиеся. Следовательно, T отображает относительно слабо бикомпактные множества в относительно сильно бикомпактные множества.*

Доказательство. Пусть $\{f_n\}$ — слабо фундаментальная последовательность в $L_1(S, \Sigma, \mu)$. По лемме III.8.5, существует такое множество $S_1 \in \Sigma$ и такая σ-алгебра $\Sigma_1 \subseteq \Sigma(S_1)$, что сужение μ_1 функции μ на Σ_1 σ-конечно, а пространство $L_1(S_1, \Sigma_1, \mu_1)$ является сепарабельным подпространством $L_1(S, \Sigma, \mu)$, содержащим последовательность $\{f_n\}$. Таким образом, по теореме 10, существует такая μ_1-измеримая существенно ограниченная относительно μ_1 функция $x(\cdot)$, отображающая S_1 в сепарабельное замкнутое линейное многообразие $\mathfrak{X}_1$, натянутое на множество $TL_1(S_1, \Sigma_1, \mu_1)$, и такая, что

$$Tf_n = \int_{S_1} x(s) f_n(s) \mu_1(ds).$$

Предположим, что множество $\{z_k\}$ всюду плотно в $\mathfrak{X}_1$, и пусть

$$B_1 = S(z_1, \varepsilon), \quad B_k = S(z_k, \varepsilon) - \bigcup_{i=1}^{k-1} B_i, \quad k > 1.$$

Тогда множества $A_k = x^{-1}(B_k)$ попарно не пересекаются, а функция $x_\varepsilon(\cdot)$, определяемая равенством $x_\varepsilon(s) = z_k$ для x из A_k, удовлетворяет соотношению

$$\text{(I)} \qquad |x_\varepsilon(s) - x(s)| \leqslant \varepsilon, \quad s \in S_1.$$

Для каждого $k = 1, 2, \ldots$ положим $x_k(s) = x_\varepsilon(s)$, если s принадлежит $A_1 \cup \ldots \cup A_k$, и $x_k(s) = 0$ в противном случае. По теореме III.6.10, множества A_k принадлежат лебеговскому расширению Σ_1^* σ-алгебры Σ_1. Мы можем и будем предполагать, что $\Sigma_1^* = \Sigma_1$, так что функции x_ε и x_k μ_1-измеримы. Далее,

$$\text{(II)} \qquad \left| \int_{S_1} (x_k(s) - x_\varepsilon(s)) f_n(s) \mu_1(ds) \right| =$$

$$= \left| \int_{C_{k+1}} x_\varepsilon(s) f_n(s) \mu_1(ds) \right| \leqslant M \int_{C_{k+1}} |f_n(s)| \mu_1(ds),$$

где $M = \operatorname{vrai\,sup} |x(s)|$ и $C_k = \bigcup_{i=k}^{\infty} A_i$. Так как пространство $L_1(S_1, \Sigma_1, \mu_1)$ слабо полно (IV.8.6), то последовательность $\{f_n\}$ слабо бикомпактна и, следовательно, последовательность $\{|f_n(\cdot)|\}$ также слабо бикомпактна (IV.8.9). Из теоремы IV.8.8 вытекает поэтому, что

$$\lim_{k \to \infty} \int_{C_{k+1}} |f_n(s)| \mu_1(ds) = 0$$

равномерно относительно $n = 1, 2, \ldots$. Из соотношения (II) вытекает, что

$$\text{(III)} \qquad \lim_{k \to \infty} \int_{S_1} x_k(s) f_n(s) \mu_1(ds) = \int_{S_1} x_\varepsilon(s) f_n(s) \mu_1(ds)$$

равномерно относительно $n=1, 2, \ldots$. Так как последовательность $\{f_n\}$ слабо сходится, то предел $\lim_n \int_E f_n(s)\mu_1(ds)$ существует для каждого E из Σ_1, а поэтому и для простых функций x_k пределы

$$\lim_n \int_{S_1} x_k(s) f_n(s) \mu_1(ds), \quad k=1, 2, \ldots$$

существуют. Так как предел (III) существует равномерно относительно $n=1, 2, \ldots$, то, по лемме I.7.6, предел

$$\lim_{n\to\infty} \int_{S_1} x_\varepsilon(s) f_n(s) \mu_1(ds), \quad \varepsilon > 0$$

существует. Так как последовательность $\{f_n\}$ ограничена (II.3.27), то из неравенства (I) вытекает, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{S_1} x_\varepsilon(s) f_n(s) \mu_1(ds) = \int_S x(s) f_n(s) \mu_1(ds)$$

равномерно относительно $n=1, 2, \ldots$. Снова пользуясь леммой I.7.6, получаем существование предела

$$\lim_n \int_{S_1} x(s) f_n(s) \mu_1(ds) = \lim_n Tf_n, \quad \text{ч. т. д.}$$

13. Следствие. *Пусть (S, Σ, μ) — пространство с положительной мерой. Тогда произведение двух слабо вполне непрерывных операторов в $L_1(S, \Sigma, \mu)$ вполне непрерывно. В частности, квадрат слабо непрерывного оператора в $L_1(S, \Sigma, \mu)$ является вполне непрерывным оператором.*

Необходимо отметить, что предположение о слабой полной непрерывности в предыдущем доказательстве использовалось только для того, чтобы показать, что оператор T имеет вид $\int_S x(s) f(s) \mu(ds)$, где функция $x(\cdot)$ μ-измерима и ограничена. То обстоятельство, что ядро $x(\cdot)$, определяющее слабо вполне непрерывный оператор, принимает значения из некоторого слабо бикомпактного множества, не использовалось. Таким образом, предыдущее доказательство применимо также и для доказательства следующей теоремы.

14. Теорема. *Пусть (S, Σ, μ) — пространство с положительной мерой, а x — μ-измеримая ограниченная функция, отображающая S в B-пространство $\mathfrak{X}$. Тогда оператор*

$$Tf = \int_S x(s) f(s) \mu(ds), \quad f \in L_1(S, \Sigma, \mu),$$

отображает слабо фундаментальные последовательности в сильно сходящиеся.

В § IV.16 уже упоминалось, что абстрактные L-пространства эквивалентны конкретным L-пространствам, и, следовательно, теорема 12 и следствие 13 остаются справедливыми и для этих пространств. Эта эквивалентность, необходимая для того, чтобы доказать наше утверждение для каждого из L-пространств списка, приведенного в § IV.2, легко может быть установлена на основании исследования, проведенного в гл. IV; частично это сделано в упражнениях из § IV.13. Таким образом, теорема 12 и следствие 13 остаются справедливыми, если пространство L_1 заменить одним из пространств l_1, bv, bv_0, $ba(S, \Sigma)$, $rba(S, \Sigma)$, $ca(S, \Sigma)$, $rca(S, \Sigma)$, $BV(I)$ или $AC(I)$. Эти пространства вместе с такими пространствами, которые по модулю конечномерного пространства эквивалентны пространствам $C(S)$ непрерывных функций [1]) и для которых известно, что теорема 12 справедлива (7.4), практически исчерпывают список параграфа IV.2. Действительно, единственным оставшимся B-пространством этого списка, кроме рефлексивных пространств $\mathfrak{H}$, l_p, L_p, $1 < p < \infty$, является пространство $A(D)$ аналитических функций.

9. Упражнения

1. Пространство $B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ алгебраически изоморфно подпространству произведения $\prod_{x \in \mathfrak{X}} \mathfrak{Y}_x$, где $\mathfrak{Y}_x = \mathfrak{Y}$, при отображении $T \to \prod_{x \in \mathfrak{X}} Tx$. Показать, что сильная операторная топология в $B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ тождественна с обычным произведением топологий, определяемым сильной топологией каждого из $\mathfrak{Y}_x$, и что слабая операторная топология определяется тем, что каждый из множителей берется с его $\mathfrak{Y}^*$-топологией.

2. Для того чтобы множество $A \subseteq B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ было бикомпактным в слабой операторной топологии, необходимо и достаточно, чтобы оно было замкнутым в этой топологии и чтобы слабое замыкание множества Ax было слабо бикомпактным для каждого $x \in \mathfrak{X}$. Для того чтобы множество $A \subseteq B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ было бикомпактным в сильной операторной топологии, необходимо и достаточно, чтобы оно было замкнутым в этой топологии и чтобы множество Ax было относительно бикомпактным для каждого $x \in \mathfrak{X}$.

3. Пусть $A \subseteq B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$. Тогда если A бикомпактно в слабой (сильной) операторной топологии, то таким же будет и замыкание множества $\operatorname{co}(A)$ в этой топологии.

---

[1]) То есть пространствами $\mathfrak{X}$ такими, что $\mathfrak{X}/\mathfrak{M} \sim C(S)$, где $\mathfrak{M}$ — конечномерное подпространство в $\mathfrak{X}$. — *Прим. ред.*

4. Если множество $A \subset B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ компактно в слабой (сильной) операторной топологии, то его слабое (сильное) операторное замыкание бикомпактно в слабой (сильной) операторной топологии.

5. Пусть U — подмножество топологического пространства; обозначим через $\widetilde{U}$ совокупность пределов всевозможных последовательностей точек из U. Если пространство $\mathfrak{X}$ сепарабельно, то для компактности множества $A \subseteq B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ в сильной операторной топологии необходимо и достаточно, чтобы $\breve{A}$ было бикомпактно в сильной операторной топологии. Если и пространство $\mathfrak{Y}$ сепарабельно, то для компактности множества A в слабой операторной топологии необходимо и достаточно, чтобы $\widetilde{A}$ было бикомпактным в слабой операторной топологии.

6. Если $\mathfrak{Y}$ рефлексивно, то замкнутая единичная сфера пространства $B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ бикомпактна в слабой операторной топологии, и обратно.

7. Определим BWO-топологию пространства $B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ как сильнейшую топологию, совпадающую со слабой топологией на каждом положительном кратном aS замкнутой единичной сферы S пространства $B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$. Пользуясь методом доказательства леммы V.5.4, показать, что если $\mathfrak{Y}$ рефлексивно, то фундаментальное множество окрестностей нуля в BWO-топологии состоит из окрестностей

$$\{T \mid T \in B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}),\ |y_i^* T x_i| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \ldots\},$$

где $y_i^* \in \mathfrak{Y}^*$ и $y_i^* \to 0$; $x_i \in \mathfrak{X}$ и $x_i \to 0$.

8. Предположим, что $\mathfrak{Y}$ рефлексивно. Показать, что определенный на $B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ линейный функционал, непрерывный в BWO-топологии этого пространства, должен иметь вид $T \to \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i y_i^* T x_i$, где $\{\alpha_i\}$ — абсолютно сходящийся ряд скаляров, $\{y_i^*\}$ — ограниченная последовательность в $\mathfrak{Y}^*$ и $\{x_i\}$ — ограниченная последовательность в $\mathfrak{X}$. Обратно, показать, что определенный на $B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ функционал указанного вида непрерывен в BWO-топологии.

9. Определим BSO-топологию пространства $B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ как сильнейшую топологию, совпадающую с сильной операторной топологией на каждом положительном кратном aS единичной сферы S пространства $B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$. Показать, что, для того чтобы выпуклое подмножество пространства $B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ было BWO-замкнутым, необходимо и достаточно, чтобы оно было BSO-замкнутым, и, что для того чтобы линейный функционал был BSO-непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы он был BWO-непрерывным.

10. Показать, что, для того чтобы каждый определенный на $B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ и BWO-непрерывный линейный функционал был непрерывным в слабой операторной топологии, необходимо и достаточно, чтобы либо $\mathfrak{X}$, либо $\mathfrak{Y}$ было конечномерным.

11. Пусть A, $B \in B(\mathfrak{X})$. Тогда отображение $(A,B) \to AB$ будет непрерывной функцией по каждому переменному в отдельности, если пространство $B(\mathfrak{X})$ рассматривается в равномерной, сильной или слабой топологиях. Это отображение непрерывно по обоим переменным в равномерной топологии, а также в сильной топологии при условии, что A пробегает некоторое ограниченное множество из $B(\mathfrak{X})$. Пусть $\mathfrak{X} = l_2$ и $\{A_n\}$ определяется равенством $A_n[x_1, \ldots, x_n, \ldots] = [x_{n+1}, \ldots]$; показать, что обе последовательности $\{A_n\}$ и $\{A_n^*\}$ сходятся к нулю в слабой операторной топологии, но что последовательность $\{A_n A_n^*\}$ не сходится к нулю в этой топологии, хотя $\{A_n^* A_n\}$ сходится к нулю в сильной операторной топологии.

12. Если $\mathfrak{H}$ есть гильбертово пространство, то отображение $T \to T^*$ пространства $B(\mathfrak{H})$ в себя непрерывно и в равномерной и в слабой операторной топологиях. Рассматривая последовательность $\{A_n\}$, определенную в упражнении 11, показать, что это отображение не является непрерывным в сильной операторной топологии.

13. Если $U : \mathfrak{Y}^* \to \mathfrak{X}^*$ есть линейное отображение, непрерывное в $\mathfrak{Y}$-топологии пространства $\mathfrak{Y}^*$ и $\mathfrak{X}$-топологии пространства $\mathfrak{X}^*$, то найдется такой ограниченный линейный оператор $T : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, что $T^* = U$.

14. Пусть T — линейное, но не обязательно непрерывное отображение B-пространства $\mathfrak{X}$ в B-пространство $\mathfrak{Y}$. Пусть T^* определено на множестве $\mathfrak{D}(T^*)$ таких $y^* \in \mathfrak{Y}^*$, для которых y^*Tx непрерывно относительно x, равенством $T^*y^* = y^*T$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(I) T^* определено на всем $\mathfrak{Y}^*$;

(II) T непрерывно в сильных топологиях пространств $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$;

(III) T непрерывно в $\mathfrak{X}^*$- и $\mathfrak{Y}^*$-топологиях пространств $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$.

15. Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ являются B-пространствами, а U — непрерывное линейное отображение $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{Y}$.

(I) Если оператор U имеет непрерывный обратный, то область его значений замкнута.

(II) Область значений оператора U замкнута, если существует такая константа K, что для каждого y из этой области значений существует такое решение x уравнения $y = Tx$, для которого $|x| \leqslant K|y|$.

(III) Отображение U взаимно однозначно, если область значений оператора U^* всюду плотна в $\mathfrak{X}^*$.

(IV) Отображение U^* в том и только в том случае взаимно однозначно, если область значений оператора U всюду плотна в $\mathfrak{Y}$.

(V) Если оператор U отображает $\mathfrak{X}$ на все $\mathfrak{Y}$, то оператор U^* имеет непрерывный обратный.

(VI) Если оператор U^* отображает $\mathfrak{Y}^*$ на все $\mathfrak{X}^*$, то оператор U имеет непрерывный обратный.

16. Если $\mathfrak{Y}$ — замкнутое, а $\mathfrak{N}$ — конечномерное подпространства некоторого B-пространства, то подпространство $\mathfrak{Y} \oplus \mathfrak{N}$ замк-

нуто. Если же $\mathfrak{Y} \oplus \mathfrak{N}$ — замкнутое подпространство, а $\mathfrak{N}$ конечномерно, то отсюда не следует замкнутость $\mathfrak{Y}$.

17. Пусть $\mathfrak{X}$ является B-пространством и $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y} \oplus \mathfrak{N}$, где $\mathfrak{Y}$ замкнуто, а $\mathfrak{N}$ конечномерно. Предположим, что $T : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Z}$ есть ограниченное линейное отображение $\mathfrak{X}$ в другое B-пространство. Тогда для замкнутости $T(\mathfrak{X})$ необходима и достаточна замкнутость $T(\mathfrak{Y})$.

18. Для каждого ненулевого конечномерного собственного подпространства B-пространства существует бесчисленное множество проекторов, отображающих $\mathfrak{X}$ на него.

19. Если E — проектор с n-мерной областью значений, то и E^* является проектором с n-мерной же областью значений.

20. Для того чтобы проектор имел конечномерную область значений, необходимо и достаточно, чтобы он был вполне непрерывным.

21. Линейное отображение E, такое, что $E^2 = E$, является проектором (т. е. ограничено) в том и только в том случае, если области значений операторов E и $I - E$ замкнуты.

22. Пусть E — проектор в B-пространстве $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{M} = E(\mathfrak{X})$ и $\mathfrak{N} = (I - E)(\mathfrak{X})$. Положим $\mathfrak{M}^\perp = \{x^* \mid x^*x = 0,\ x \in \mathfrak{M}\}$ и аналогично определим $\mathfrak{N}^\perp$. Показать, что $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{M}^\perp \oplus \mathfrak{N}^\perp$ и что $E^*(\mathfrak{X}^*) = \mathfrak{N}^\perp$, $(I - E)^*(\mathfrak{X}^*) = \mathfrak{M}^\perp$.

23. Обозначения $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ имеют тот же смысл, что и в предыдущем упражнении.

(I) Если E_1 и E_2 — проекторы, то $E_1E_2 = E_2$ в том и только в том случае, если $\mathfrak{M}_2 \subseteq \mathfrak{M}_1$. Точно так же $E_2E_1 = E_2$ в том и только в том случае, если $\mathfrak{N}_1 \subseteq \mathfrak{N}_2$.

(II) Если E_i — ортогональные проекторы в гильбертовом пространстве, то $E_1E_2 = 0$ в том и только в том случае, если $E_2E_1 = 0$.

(III) Если $E_1, \ldots, E_n$ — проекторы, то $E = E_1 + \ldots + E_n$ будет проектором, если $E_iE_j = 0$ для $i \neq j$. В этом случае $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{M}_n$ и $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{N}_n$.

(IV) Если операторы E_i из п. (III) являются ортогональными проекторами в гильбертовом пространстве, то условие $E_iE_j = 0$, $i \neq j$, необходимо и достаточно для того, чтобы E было проектором.

24. (I) $E = E_1 - E_2$ является проектором в том и только в том случае, если $E_1E_2 = E_2E_1 = E_2$. При этом $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{N}_2$ и $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{M}_2$.

(II) E_1E_2 является проектором в том и только в том случае, если $E_1(\mathfrak{M}_2) \subseteq \mathfrak{M}_2 \oplus \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2$.

(III) Если $E = E_1E_2 = E_2E_1$, то E является проектором, $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{N} = \mathrm{sp}(\mathfrak{N}_1 \cup \mathfrak{N}_2)$ и, следовательно, замкнуты.

(IV) $E_1E_2 = E_2E_1$ в том и только в том случае, если $\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_2 \cap \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \cap \mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2 = \mathfrak{N}_2 \cap \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{N}_2 \cap \mathfrak{N}_1$.

(V) Если $E_1E_2 = E_2E_1$, то $E_1 + E_2 - E_1E_2$ будет проектором с областью значений $\mathrm{sp}(\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2)$ и нулевым многообразием $\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2$.

25. Слабо вполне непрерывный проектор в пространстве $C(S)$ или в пространстве $B(S)$ имеет конечномерную область значений.

26. Показать, что линейный оператор T в конечномерном пространстве можно представить некоторой матрицей. Как связана с этой матрицей матрица сопряженного оператора T^*?

27. В этом упражнении $\mathfrak{X}$ — n-мерное евклидово пространство, а $e_1, \ldots, e_n$ — его базисные векторы.

(I) Пусть E — ортогональный проектор; показать, что его матричное представление имеет вид $(a_{ij}) = \sum_{k=1}^{r} \overline{p}_{ik} p_{jk}$, где $g_k = \sum_{i=1}^{n} p_{ik} e_k$, $k = 1, \ldots, r$, — произвольный ортонормированный базис подпространства $\mathfrak{M} = E(\mathfrak{X})$.

(II) Пусть подпространства $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ имеют соответственно базисы $\{a_1, \ldots, a_r\}$ и $\{b_1, \ldots, b_{n-r}\}$. Обозначим через T преобразование, определяемое равенствами

$$Te_i = a_i, \qquad i = 1, \ldots, r;$$
$$Te_{i+r} = b_i, \qquad i = 1, \ldots, n-r.$$

Пусть $T = (t_{ij})$ и $T^{-1} = (s_{ij})$; показать, что $E = \left(\sum_{k=1}^{r} s_{ik} t_{kj}\right)$.

28. Определим след матрицы $A = (a_{ij})$, полагая $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Показать, что $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$ и $tr(AB) = tr(BA)$. Пусть E — проектор в евклидовом пространстве; показать, что $tr(E) = \dim \mathfrak{M}$.

29. Пусть $E_1, \ldots, E_p$ — проекторы в конечномерном пространстве. Пусть $E = E_1 + \ldots + E_p$ также является проектором; показать, что многообразия $\{\mathfrak{M}_i\}$ линейно независимы, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{M}_p$ и что $E_i E_j = 0$ для $i \neq j$. (Указание: воспользоваться упражнением 28.)

30. Вполне непрерывный оператор $T \in B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ отображает каждую слабо сходящуюся последовательность на сильно сходящуюся последовательность из $\mathfrak{Y}$. Если $\mathfrak{X}$ рефлексивно, то верно и обратное.

31. Предположим, что $T \in B(\mathfrak{X})$—вполне непрерывный оператор и $\lambda \neq 0$. Тогда для того, чтобы уравнение $(\lambda I - T)x = y$ для каждого $y \in \mathfrak{Y}$ имело единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы уравнение $(\lambda I - T)x = 0$ не имело решения, отличного от $x = 0$.

32. Если пространство $\mathfrak{Y}$ имеет базис, то каждый вполне непрерывный оператор из $B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ является пределом в равномерной топологии последовательности операторов с конечномерными областями значений.

33. Если (S, Σ, μ) — пространство с положительной мерой, то слабо вполне непрерывные проекторы в $L_1(S, \Sigma, \mu)$ имеют конечномерные области значений.

34. Непрерывное линейное отображение рефлексивного пространства в l_1 вполне непрерывно.

35. Непрерывное линейное отображение пространства c в слабо полное пространство вполне непрерывно.

36. Пусть φ — функция, отображающая множество S в себя, а T — ограниченный линейный оператор в $B(S)$, определяемый равенством $Tf(s) = f(\varphi(s))$; найти сопряженный оператор T^*.

37. Пусть φ — непрерывная функция, отображающая бикомпактное хаусдорфово пространство S в себя. Обозначим через T ограниченный линейный оператор в $C(S)$, определяемый равенством $Tf(s) = f(\varphi(s))$. Найти сопряженный оператор T^*.

38. (Марков.) Пусть S — некоторое непустое множество, а φ — функция, отображающая S в себя. Функция μ, определенная на семействе подмножеств множества S, называется φ-инвариантной, если $\mu(E) = \mu(\varphi^{-1}(E))$, $E \subseteq S$, где $\varphi^{-1}(E) = [s \mid \varphi(s) \in E]$. Показать, что существует неотрицательная ограниченная аддитивная функция μ, определенная для всех подмножеств множества S, не равная тождественно нулю и φ-инвариантная.

39. Пусть S — бикомпактное хаусдорфово пространство, а φ — непрерывная функция, отображающая S в себя. Показать, что существует регулярная счетно аддитивная неотрицательная мера μ, определенная для всех борелевских множеств из S, не равная тождественно нулю и φ-инвариантная.

40. Пусть S — некоторое непустое множество, а G — семейство функций φ, отображающих S в себя. Предположим, что $\varphi_1(\varphi_2(s)) = \varphi_2(\varphi_1(s))$, $s \in S$, $\varphi_1, \varphi_2 \in G$. Показать, что существует неотрицательная аддитивная функция множества μ, определенная для всех подмножеств множества S, не равная тождественно нулю и φ-инвариантная для каждого $\varphi \in G$.

41. Пусть S — бикомпактное хаусдорфово пространство, а G — совокупность непрерывных отображений φ пространства S в себя, таких, что $\varphi_1\varphi_2 s = \varphi_2\varphi_1 s$, $s \in S$, $\varphi_1\varphi_2 \in G$. Показать, что существует счетно аддитивная неотрицательная мера, определенная на борелевских множествах из S, не равная тождественно нулю и φ-инвариантная для каждого $\varphi \in G$.

42. Показать, что в упражнении 38 функция множества μ единственна с точностью до положительного постоянного множителя в том и только в том случае, если $n^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} f(\varphi^i(s))$ для каждого $f \in B(S)$ равномерно сходится к некоторой константе.

43. Показать, что в упражнении 39 мера μ единственна с точностью до положительного постоянного множителя в том и только

в том случае, если $n^{-1}\sum_{i=0}^{n-1} f(\varphi^i(s))$ для каждого $f\in C(S)$ равномерно сходится к некоторой константе.

44. Пусть S — бикомпактное метрическое пространство и $\varphi: S\to S$ такое отображение, что $\varrho(\varphi(x), \varphi(y))\leqslant\varrho(x, y)$. Предположим, что в S найдется такое s_0, что множество $\{\varphi^n(s_0)\,|\,n\geqslant 0\}$ всюду плотно. Показать, что существует единственная регулярная мера μ, определенная на борелевских подмножествах множества S и такая, что $\mu(\varphi^{-1}(E))=\mu(E)$ для каждого борелевского подмножества из S и что $\mu(S)=1$. (Указание: воспользоваться упражнением 43 и тем обстоятельством, что уравнению $f(\varphi(s))=f(s)$ удовлетворяют только функции-константы.)

45. Пусть S — бикомпактное хаусдорфово пространство, K — определенная на $S\times S$ непрерывная функция и $\mu\in rca(S)$. Определим оператор $g=Tf$ равенством

$$g(s)=\int_S K(s, t) f(t)\,\mu(dt).$$

Показать, что T является вполне непрерывным оператором, отображающим $C(S)$ в себя, и что сопряженный к нему оператор представляется формулой

$$T^*x^*(E)=\int_E\left[\int_S K(s, t)\,x^*(ds)\right]\mu(dt)$$

для каждого борелевского множества E.

46. Пусть $C=C[0, 1]$ и $T\in B(C, C)$. Тогда существует такая определенная на $[0, 1]\times[0, 1]$ скалярная функция K, что

(I) для каждого $s\in[0, 1]$ функция $K(s, \cdot)$ является нормированной функцией ограниченной вариации на отрезке $[0, 1]$;

(II) $T(f, s)=\int_0^1 f(t)\,K(s, dt),\quad 0\leqslant s\leqslant 1,\ f\in C;$

(III) $K(s, 1)$ и $\int_0^r K(s, t)\,dt$ непрерывны относительно s для каждого $r\in[0, 1]$;

(IV) $\sup_s \operatorname*{var}_{0\leqslant t\leqslant 1} K(s, t)=M<\infty;$

(V) $M=|T|$.

Обратно, если функция K удовлетворяет условиям (I), (III) и (IV), то равенством (II) определяется оператор $T\in B(C, C)$, норма которого определяется равенством (V).

47. Сформулировать и доказать теоремы, аналогичные теореме предыдущего упражнения для представления линейных операторов

общего вида в пространствах $B(L_p, C)$, $B(B(S), C)$, $B(c, C)$ и $B(C, c)$, где $C = C[0, 1]$ и $L_p = L_p[0, 1]$.

48. Найти общий вид вполне непрерывного оператора в пространствах $B(L_p, C)$, $B(B(S), C)$, $B(c, C)$, где $C = C[0, 1]$ и $L_p = L_p[0, 1]$.

49. Показать, что оператор, сопряженный к оператору T в упражнении 46, определяется формулой

$$T^*(g, t) = \int_0^1 K(s, t)\,dg(s), \quad g \in NBV[0, 1].$$

50. Пусть $1 \leqslant p$, $q < \infty$ и $T \in B(L_p[0, 1], L_q[0, 1])$. Показать, что существует такая определенная на $[0, 1] \times [0, 1]$ функция K, что

$$T(f, s) = \frac{d}{ds} \int_0^1 K(s, t) f(t)\,dt, \quad f \in L_p[0, 1].$$

51. Пусть (S, Σ, μ) — пространство с положительной мерой и K — измеримая функция, отображающая S в B-пространство $\mathfrak{X}$. Пусть

$$\left(\int_S |K(s)|^{p'} \mu(ds) \right)^{\frac{1}{p'}} = M < \infty,$$

где $1 < p < \infty$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Тогда оператор T, отображающий $L_p(S, \Sigma, \mu)$ в $\mathfrak{X}$ и определяемый формулой

$$Tf = \int_S K(s) f(s)\,ds,$$

является вполне непрерывным оператором с нормой, не превосходящей M.

52. Пусть $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Пусть (S, Σ, μ) — пространство с положительной мерой и K — скалярная измеримая функция, определенная на $S \times S$ и удовлетворяющая условию

$$\left[\int_S \left(\int_S |K(s, t)|^p \mu(ds) \right)^{\frac{p'}{p}} \mu(dt) \right]^{\frac{1}{p'}} = M < \infty.$$

Пусть $g = Tf$ определяется равенством

$$g(s) = \int_S K(s, t) f(t)\,dt.$$

Тогда T является вполне непрерывным оператором в $L_p(S, \Sigma, \mu)$ с нормой, не превосходящей M.

53. Пусть $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ и (S, Σ, μ) — пространство с положительной конечной мерой. Пусть K — определенная на $S \times S$ измеримая функция, для которой

$$\sup_s \int_S |K(s, t)|^{p'} dt < \infty.$$

Тогда оператор $g = Tf$, определяемый равенством

$$g(s) = \int_S K(s, t) f(t) dt,$$

является вполне непрерывным оператором в $L_p(S, \Sigma, \mu)$.

54. Пусть (S, Σ, μ) — пространство с положительной мерой $L_p = L_p(S, \Sigma, \mu)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, и K — определенная на $S \times S$ измеримая функция, для которой

$$\operatorname{vrai}\sup_s \int_S |K(s, t)| \mu(dt) \leqslant M,$$

$$\operatorname{vrai}\sup_t \int_S |K(s, t) \mu(ds) \leqslant M.$$

Тогда оператор $g = Tf$, определяемый равенством

$$g(s) = \int_S K(s, t) f(t) dt,$$

является непрерывным линейным отображением пространства L_p в себя и $|T| \leqslant M$

55. Пусть K — измеримая по Лебегу скалярная функция периода 2π и

$$|K| = \int_0^{2\pi} |K(s)| ds < \infty.$$

Тогда для $1 \leqslant p < \infty$ оператор $g = Tf$, определяемый равенством

$$g(s) = \int_0^{2\pi} K(s-t) f(t) dt,$$

является вполне непрерывным линейным оператором в $L_p(0, 2\pi)$, норма которого не превосходит $|K|$.

56. Пусть (S, Σ, μ) — пространство с конечной мерой, причем S — бикомпактное хаусдорфово пространство. Пусть $1 < p < \infty$; показать, что каждый непрерывный линейный оператор, отобра-

жающий $L_p(S, \Sigma, \mu)$ в $C(S)$, является вполне непрерывным оператором, если его рассматривать как отображение в $L_p(S, \Sigma, \mu)$.

57. Пусть (S, Σ, μ) — пространство с положительной конечной мерой, а функция $K(s, t)$ ограничена и измерима на $S \times S$. Пусть оператор T в $B(L_1(S, \Sigma, \mu))$ определяется равенством

$$T(f, s) = \int_S K(s, t) f(t) \mu(dt).$$

Показать, что оператор T^* в $L_\infty(S, \Sigma, \mu)$ определяется равенством

$$T^*(g, t) = \int_S g(s) K(s, t) \mu(ds).$$

Показать, что оператор T, рассматриваемый как оператор, действующий в $L_\infty(S, \Sigma, \mu)$, слабо вполне непрерывен, а его квадрат вполне непрерывен.

58. Пусть (S, Σ, μ) — пространство с положительной конечной мерой, а K — существенно ограниченная измеримая функция, определенная на $S \times S$. Пусть ν — ограниченная аддитивная функция, определенная на Σ и обращающаяся в нуль на множествах нулевой меры μ. Показать, что

$$\lambda(E) = \int_S \left[\int_E K(s, t) \mu(ds) \right] \nu(dt)$$

счетно аддитивна для $E \in \Sigma$. Пусть мера μ только σ-конечна; какие условия на K эквивалентны счетной аддитивности λ?

59. Пусть (S, Σ, μ) и (S', Σ', μ') — пространства с положительной σ-конечной мерой. Пусть $L = L(S, \Sigma, \mu)$ и $L_p = L_p(S', \Sigma', \mu')$. Если $p > 1$ и T — сепарабельное ограниченное линейное отображение L в L_p, то существует определенная на $S \times S'$ скалярная функция K, измеримая по отношению к $\Sigma \times \Sigma'$, и такая, что

(I) $T(f, s) = \int_S K(s, t) f(s) \mu(ds), \quad f \in L;$

(II) $\operatorname{vrai\,sup}_s \left(\int_{S'} |K(s, t)|^p \mu'(ds) \right)^{\frac{1}{p}} = M < \infty;$

(III) $|T| = M$.

Обратно, если K — измеримая функция, удовлетворяющая условию (II), то равенством (I) определяется оператор $T \in B(L, L_p)$, норма которого определяется равенством (III).

60. Пусть L обозначает пространство функций, интегрируемых по Лебегу на отрезке $[0, 1]$. Найти аналитическое выражение

линейного оператора общего вида в пространствах $B(L, L)$, $B(L, l_1)$, $B(l_1, L)$ и $B(l_1, l_1)$. В каждом из этих случаев выразить норму оператора в терминах ядра.

10. Теорема Рисса о выпуклости

В этом параграфе мы докажем глубокую и важную теорему М. Рисса о выпуклости методом, принадлежащим Торину. Это доказательство представляет собой превосходный пример приложения теории функций комплексного переменного к, казалось бы, не связанной с ней проблеме из теории линейных пространств.

На протяжении этого параграфа через $\mathfrak{B}$ обозначается *комплексное* B-пространство, а через E^k — k-мерное *вещественное* евклидово пространство. Читатель должен заметить, что одна и та же буква M повторно используется для различных функций, причем каждый раз в формулировке данной теоремы или в ее доказательстве точно определяется, какую функцию она обозначает.

1. Определение. Пусть C — выпуклое подмножество пространства E^k и M — определенная на C функция, значения которой либо вещественные числа, либо $+\infty$. Мы говорим, что функция M *выпукла*, если для любых u, $v \in C$ и каждого $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$

$$M(\alpha u + (1-\alpha) v) \leqslant \alpha M(u) + (1-\alpha) M(v).$$

2. Лемма. *Пусть $\{M_\pi\}$ — семейство выпуклых функций, определенных на выпуклом множестве $C \subseteq E^k$. Тогда функция M, определяемая равенством*

$$M(x) = \sup_\pi M_\pi(x),$$

выпукла.

Доказательство. Для каждого π

$$M_\pi(\alpha u + (1-\alpha) v) \leqslant \alpha M_\pi(u) + (1-\alpha) M_\pi(v),$$

каковы бы ни были u, $v \in C$ и $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Беря здесь верхнюю грань по всем π, мы и получим требуемый результат, ч. т. д.

Следующий результат часто называют «теоремой о трех прямых».

3. Теорема. *Пусть f — аналитическая функция комплексного переменного $z = x + iy$ со значениями в $\mathfrak{B}$. Предположим, что функция f определена и ограничена в полосе $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, $-\infty < y < +\infty$. Пусть функция M определена на отрезке $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$ равенством*

$$M(x) = \sup_{-\infty < y < \infty} |f(x+iy)|.$$

Тогда $\log M(x)$ *— выпуклая функция вещественного переменного x.*

Доказательство. Пусть $x_0 \leqslant a \leqslant c \leqslant x_1$ и $b = \alpha a + (1 - \alpha) c$ для некоторого α, такого, что $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Для каждого вещественного числа r функция $e^{rz} f(z)$ аналитична и ограничена в полосе $a \leqslant x \leqslant c$. Согласно принципу максимума модуля для полосы (см. III. 14),

$$e^{rb} M(b) \leqslant \max \{e^{ra} M(a),\ e^{rc} M(c)\}.$$

Выберем теперь r так, что $e^{ra} M(a) = e^{rc} M(c)$; т. е.

$$r = \frac{\log M(c) - \log M(a)}{a - c}.$$

Подставляя это значение r в неравенство

$$rb + \log M(b) \leqslant rc + \log M(c)$$

и пользуясь тем, что $c - b = -\alpha(a - c)$, мы находим после соответствующих упрощений, что

$$\log M(b) \leqslant \alpha \log M(a) + (1 - \alpha) \log M(c).$$

Таким образом, $\log M(x)$, как и утверждалось, является выпуклой функцией, ч. т. д.

Теперь мы обобщим этот результат на случай k переменных.

4. Следствие. *Пусть f — ограниченная аналитическая функция комплексных переменных $z_1, \ldots, z_k$, где $z_j = x_j + iy_j$, определенная для $x = [x_1, \ldots, x_n]$, принадлежащих выпуклому множеству $C \subseteq E^k$, и произвольных $y = [y_1, \ldots, y_n]$. Предположим, что значения функции f принадлежат $\mathfrak{W}$ и что M определяется на C равенством*

$$M(x) = \sup \{|f(x + iy)| \mid -\infty < y_j < \infty, \quad j = 1, \ldots, k\}.$$

Тогда $\log M(x)$ является выпуклой функцией векторного переменного x в C.

Доказательство. Зафиксируем $x', x'' \in C$, и пусть $y = [y_1, \ldots, y_k]$ произвольно. Пусть $\lambda = \alpha + i\beta$ — комплексное переменное; определим g равенством

$$g(\lambda) = f(\lambda x' + (1 - \lambda) x'' + iy) = f(u_1, \ldots, u_k),$$

где

$$u_j = \alpha x'_j + (1 - \alpha) x''_j + i[\beta x'_j + (1 - \beta) x''_j + y_j], \quad j = 1, \ldots, k.$$

Применяя теперь теорему 3 к функции g на полосе $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $-\infty < \beta < +\infty$, получим

$$\log |g(\alpha)| \leqslant \log \{\sup_\beta |g(\alpha + i\beta)|\} \leqslant$$
$$\leqslant \alpha \log \{\sup_\beta |g(1 + i\beta)|\} + (1 - \alpha) \log \{\sup_\beta |g(0 + i\beta)|\} \leqslant$$
$$\leqslant \alpha \log M(x') + (1 - \alpha) \log M(x'').$$

Мы показали, что для произвольным образом выбранного $y=[y_1, \ldots, y_k]$

$$\log|f(\alpha x'+(1-\alpha)x''+iy)|=\log|g(\alpha)|\leqslant \leqslant \alpha\log M(x')+(1-\alpha)\log M(x'').$$

Беря верхнюю грань по всевозможным y, мы находим, что

$$\log M(\alpha x'+(1-\alpha)x'')\leqslant \alpha\log M(x')+(1-\alpha)\log M(x'');$$

это неравенство и доказывает наше утверждение.

5. Определение. Пусть $\mathfrak{Z}$ — комплексное векторное пространство; функция $G:\mathfrak{Z}\to\mathfrak{W}$ называется *аналитической*, если $G(\lambda_1 z_1+\ldots+\lambda_p z_p)$ является аналитической функцией комплексных переменных $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ в смысле § III.14 для каждого конечного множества $\{z_1, \ldots, z_p\}\subset\mathfrak{Z}$. Пусть $\mathfrak{Z}_1, \ldots, \mathfrak{Z}_k$ — комплексные векторные пространства, а $\mathfrak{Z}$ — их прямая сумма (см. I.11), тогда только что предложенное определение дает понятие аналитичности и для функции $G:\mathfrak{Z}=\mathfrak{Z}_1\oplus\ldots\oplus\mathfrak{Z}_k\to\mathfrak{W}$.

Для того чтобы облегчить формулировку следующего результата, удобно ввести такое обозначение:

6. Определение. Пусть (S_j, Σ_j, μ_j) для каждого $j=1, \ldots, k$ является пространством с положительной мерой. Обозначим через $\mathfrak{Z}_j$ пространство всех определенных на $\mathfrak{Z}_j$ комплексных μ_j-интегрируемых простых функций. Если $a=[a_1, \ldots, a_k]\in E^k$ и $a_j>0$,то, по определению, $A(a)=A(a_1, \ldots, a_k)$ является множеством всех $f=[f_1, \ldots, f_k]$, где $f_j\in\mathfrak{Z}_j$, и

$$[*]\qquad \int\limits_{S_j}|f_j(s)|^{\frac{1}{a_j}}\mu_j(ds)\leqslant 1,\quad j=1, \cdots, k.$$

Если для соответствующего значения j $a_j=0$, то условие [*] заменяется требованием

$|f_j(s)|\leqslant 1$ почти всюду относительно μ_j.

7. Лемма. *Пусть, в терминологии предыдущих определений, G — определенная на $\mathfrak{Z}=\mathfrak{Z}_1\oplus\ldots\oplus\mathfrak{Z}_k$ аналитическая функция со значениями в $\mathfrak{W}$ и*

$$M(a)=\sup_{A(a)}|G(f)|.$$

Тогда $\log M(a)$ является выпуклой функцией от $a=[a_1, \ldots, a_k]$ для $a_j\geqslant 0$, $j=1, \ldots, k$.

Доказательство . Обозначим через $A^+(1)$ совокупность всех $f=[f_1, \ldots, f_k]$ из $A(1, \ldots, 1)$, таких, что каждое $f_j\geqslant 0$. Пусть $a=[a_1, \ldots, a_k]$, где $a_j\geqslant 0$; тогда если $f\in A^+(1)$ и $g\in A(0)=A(0, \ldots, 0)$, то

$$f^a g=[f_1^{a_1}g_1, \ldots, f_k^{a_k}g_k]$$

является элементом $A(a)$. Нетрудно видеть, что произвольный элемент из $A(a)$ можно получить таким образом. Далее, если $b=[b_1, \ldots, b_k] \in E^k$ произвольно, то

$$f^{a+ib}g=[f_1^{a_1+ib_1}g_1, \ldots, f_k^{a_k+ib_k}g_k]$$

принадлежит $A(a)$. Следовательно

$$M(a)=\sup_{A^+(1),\,A(0)} |G(f^a g)| = \sup_b \sup_{A^+(1),\,A(0)} |G(f^{a+ib}g)| = \sup_{A^+(1),\,A(0)} \sup_b |G(f^{a+ib}g)|.$$

Пусть $\lambda_j=a_j+ib_j$, $a_j \geqslant 0$; тогда так как f_j и g_j — простые функции, то $f_j^{\lambda_j} g_j$ можно представить в виде суммы $\sum_{m=1}^{n_j} p_{jm}^{\lambda_j} z_{jm}$, $z_{jm} \in \mathfrak{Z}_j$, а p_{jm} — есть положительное вещественное число. Так как мы предположили, что G аналитическая функция, то и $G(f^\lambda g)=G(f^{a+ib}g)$ является аналитической функцией комплексных переменных $\lambda=[\lambda_1, \ldots, \lambda_k]$ и ограничена на каждой полосе $0 \leqslant \operatorname{Re}(\lambda_j) \leqslant c_j < \infty$. Ввиду следствия 4, леммы 2 и монотонности логарифма убеждаемся в том, что

$$\log M(a) = \sup_{A^+(1),\,A(0)} \log\{\sup_b |G(f^{a+ib}g)|\}$$

есть выпуклая функция векторного переменного $a=[a_1, \ldots, a_k]$ для $a_j \geqslant 0$, ч. т. д.

8. Теорема. *Пусть (S, Σ, μ) — пространство с положительной мерой, а L_0 — пространство всех μ-интегрируемых простых функций. Обозначим через T линейное отображение L_0 в комплексное B-пространство $\mathfrak{X}$. Если T можно продолжить до ограниченного линейного преобразования пространства $L_p(S, \Sigma, \mu)$ в $\mathfrak{X}$, то $|T|_p$ — норма такого продолжения; если же такого продолжения не существует, положим $|T|_p=+\infty$. Тогда $\log|T|_{1/a}$ является выпуклой функцией a при $0 \leqslant a \leqslant 1$.*

Доказательство. Так как множество L_0 всюду плотно в $L_p(S, \Sigma, \mu)$ при $1 \leqslant p < \infty$, то ясно, что для $0 < a \leqslant 1$

[*] $$|T|_{1/a}=\sup\{|Tf| \quad |f \in L_0, |f|_{1/a} \leqslant 1\}.$$

Ясно также, что

$$|T|_\infty \geqslant \sup\{|Tf| \quad |f \in L_0, |f|_\infty \leqslant 1\}.$$

Таким образом, если через $M(a)$, $0 \leqslant a \leqslant 1$, обозначить правую часть в равенстве [*] и N определить равенствами $N(0)=|T|_\infty$ и $N(a)=0$ для $0 < a \leqslant 1$, то $|T|_{1/a}=\max\{M(a), N(a)\}$. Так как линейное отображение, очевидно, аналитично, то наша теорема вытекает из лемм 7 и 2 и того обстоятельства, что логарифм максимума равен максимуму логарифмов, ч. т. д.

9. Лемма. *Пусть (S, Σ, μ) — пространство с положительной мерой, а f — определенная на S μ-измеримая функция. Если $f \in L_p(S, \Sigma, \mu)$, то обозначим через $|f|_p$ его норму как элемента этого пространства; в противном случае положим $|f|_p = +\infty$. Тогда $\log |f|_{1/a}$ является выпуклой функцией a при $0 \leqslant a \leqslant 1$.*

Доказательство. Если $|f|_{1/a} = +\infty$ для всех a, $0 < a \leqslant 1$, наше утверждение тривиально, так что мы предположим, что $f \in L_{p_0}(S, \Sigma, \mu)$ для некоторого p_0. По лемме III.8.5, можно предполагать, что мера в пространстве S является σ-конечной. Пусть L_0 — класс μ-интегрируемых простых функций и $g \in L_0$; тогда из неравенства Гёльдера (III.3.2) следует, что функция fg μ-интегрируема. Пусть

$$M(a) = \sup \left\{ \left| \int_S f(s) g(s) \mu(ds) \right| \middle| g \in L_0, |g|_{\frac{1}{1-a}} \leqslant 1 \right\}.$$

Если f принадлежит $L_{1/a}(S, \Sigma, \mu)$, то ввиду неравенства Гёльдера $M(a) \leqslant |f|_{1/a}$. Обратно, мы покажем, что если $M(a) < \infty$, $0 < a < 1$, то f принадлежит $L_{1/a}(S, \Sigma, \mu)$ и $|f|_{1/a} \leqslant M(a)$. Этим наша лемма будет доказана, так как если $N(1) = |f|_1$, $N(0) = |f|_\infty$ и $N(a) = 0$ для $0 < a < 1$, то $|f|_{1/a} = \max \{M(a), N(a)\}$, и наше утверждение будет вытекать из лемм 7 и 2.

Предположим, что $M(a) < \infty$ для некоторого $a \in (0, 1)$. Из того, что множество L_0 всюду плотно в $L_{1/(1-a)}(S, \Sigma, \mu)$, вытекает, что

$$x^*(g) = \int_S f(s) g(s) \mu(ds)$$

можно продолжить до непрерывного линейного функционала нормы $M(a)$ на все $L_{1/(1-a)}$. По теореме IV.8.1, существует такое $\bar{f} \in L_{1/a}(S, \Sigma, \mu)$, что $|\bar{f}|_{1/a} = M(a)$ и

$$\int_S f(s) g(s) \mu(ds) = \int_S \bar{f}(s) g(s) \mu(ds), \qquad g \in L_0.$$

В частности, если $\mu(E) < \infty$, то

$$\int_E f(s) \mu(ds) = \int_E \bar{f}(s) \mu(ds).$$

По лемме III.6.8, отсюда следует, что $f(s)=\bar{f}(s)$ почти всюду на каждом множестве из Σ конечной меры. Так как мы предположили, что мера в пространстве S σ-конечна, то $f(s)=\bar{f}(s)$ почти всюду. Следовательно, $f \in L_{1/a}(S, \Sigma, \mu)$ и $|f|_{1/a}=M(a)$, ч. т. д.

Следующая теорема аналогична теореме 8.

10. Теорема. *Пусть* (S, Σ, μ) — *пространство с положительной мерой,* $\mathfrak{X}$ — *комплексное B-пространство и* $M=M(S,\Sigma, \mu)$ — *пространство всех определенных на* S *комплексных* μ-*измеримых функций. Обозначим через* T *линейное отображение пространства* $\mathfrak{X}$ *в* M. *Если* T *является ограниченным линейным отображением* $\mathfrak{X}$ *в* $L_p(S, \Sigma, \mu)$, *то обозначим через* $|T|_p$ *норму этого оператора, в противном случае положим* $|T|_p=+\infty$. *Тогда* $\log|T|_{1/a}$ *является выпуклой функцией* a *при* $0 \leqslant a \leqslant 1$.

Доказательство. Если $x \in \mathfrak{X}$, то из предшествующей леммы вытекает, что $\log|Tx|_{1/a}$ является выпуклой функцией a при $0 \leqslant a \leqslant 1$. По лемме 2,

$$\log|T|_{1/a}=\log \sup_{|x|\leqslant 1}|Tx|_{1/a}=\sup_{|x|\leqslant 1}\log|Tx|_{1/a}$$

также является выпуклой функцией a в указанных пределах, ч. т. д.

→ 11. Теорема (*теорема Рисса о выпуклости*). *Пусть* (S_1, Σ_1, μ_1) *и* (S_2, Σ_2, μ_2) — *пространства с положительной мерой. Обозначим через* L_0 *множество всех комплексных* μ_1-*интегрируемых простых функций, через* M — *множество всех комплексных* μ_2-*интегрируемых функций и через* T — *линейное отображение* L_0 *в* M. *Если для заданной пары чисел* (p, q) T *продолжается до ограниченного линейного отображения пространства* $L_p(S_1, \Sigma_1, \mu_1)$ *в* $L_q(S_2, \Sigma_2, \mu_2)$, *то обозначим через* $|T|_{p,q}$ *норму этого продолжения; если же такого продолжения не существует, положим* $|T|_{p,q}=+\infty$. *Тогда* $\log|T|_{1/a,1/b}$ *является выпуклой функцией от* (a, b) *в прямоугольнике* $0 \leqslant a, b \leqslant 1$.

Доказательство. Если $|T|_{p,q}=+\infty$ для (p, q) из области $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, то наше утверждение вытекает из теоремы 8, если положить $\mathfrak{X}=L_\infty(S_2, \Sigma_2, \mu_2)$. Мы можем, следовательно, предположить, что для некоторой пары (p_0, q_0) в указанных пределах $|T|_{p_0,q_0}$ конечно. Следовательно, если $f_1 \in L_0^{(1)}=L_0$, то Tf_1 принадлежит некоторому пространству $L_{q_0}(S_2, \Sigma_2, \mu_2)$. Из неравенства Гёльдера вытекает, что для произвольной функции f_2, из пространства $L_0^{(2)}$ всех μ_2-интегрируемых простых функций интеграл

$$[*] \qquad (f_1, f_2)=\int_{S_2}(Tf_1)(s)f_2(s)\mu_2(ds)$$

существует. Таким образом, в предположении, что некоторое $|T|_{p_0, q_0}$ конечно, интеграл в равенстве [*] существует для любого $f_1 \in L_0^{(1)}$ и произвольного $f_2 \in L_0^{(2)}$.

Пусть $a = \frac{1}{p}$, $b = \frac{1}{q}$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ и $M(a, b) = \sup |G(f_1, f_2)|$, где верхняя грань берется по всем $f_1 \in L_0^{(1)}$, $|f_1|_p \leqslant 1$, и всем $f_2 \in L_0^{(2)}$, $|f_2|_{q'} \leqslant 1$. Ясно, что $M(a, b) \leqslant |T|_{p, q}$.

Обратно, предположим, что $0 < a$, $b < 1$ и $M(a, b) < \infty$. Мы покажем, что $|T|_{p, q} \leqslant M(a, b)$. Чтобы убедиться в этом, заметим, что для каждого $f_1 \in L_0^{(1)}$ равенством [*] определяется некоторый линейный функционал на всюду плотном подмножестве пространства $L_{q'}(S_2, \Sigma_2, \mu_2)$ с нормой, не превосходящей $M(a, b)\ |f_1|_p$. Следовательно, его можно единственным образом продолжить на все $L_{q'}$, и, по теореме IV.8.1, существует такое $g \in L_q(S_2, \Sigma_2, \mu_2)$, что $|g|_q \leqslant M(a, b) |f_1|_p$ и что

$$\int_{S_2} (Tf_1)(s) f_2(s) \mu_2(ds) = \int_{S_2} g(s) f_2(s) \mu_2(ds), \quad f_1 \in L_0^{(1)}, \ f_2 \in L_0^{(2)}.$$

Пользуясь леммами III.6.8 и III.8.5, мы заключаем, что $Tf_1(s) = g(s)$ почти всюду относительно μ_2; следовательно, $Tf_1 \in L_q(S_2, \Sigma_2, \mu_2)$ и

$$|Tf_1|_q \leqslant M(a, b) |f_1|_p.$$

Так как это неравенство выполняется на всюду плотном подмножестве $L_0^{(1)}$ пространства $L_p(S_1, \Sigma_1, \mu_1)$, то T можно продолжить до некоторого отображения этого пространства в $L_q(S_2, \Sigma_2, \mu_2)$ с нормой, не превосходящей $M(a, b)$. Следовательно, $|T|_{p, q} \leqslant M(a, b)$.

Вспомним теперь, что G есть комплексная билинейная функция, определенная на $L_0^{(1)} \times L_0^{(2)}$; следовательно, она аналитична. По лемме 7, $\log M(a, b)$ является выпуклой функцией на прямоугольнике. Кроме того, мы показали, что $M(a, b) \leqslant |T|_{1/a, 1/b}$ для всех a, b и что если $0 < a$, $b < 1$, то $M(a, b) = |T|_{1/a, 1/b}$. Пусть N определено на этом прямоугольнике равенством $N(a, b) = |T|_{1/a, 1/b}$, если либо a, либо b равны 0 или 1, и $N(a, b) = 0$ для всех остальных пар чисел. По теоремам 8 и 10, $\log N(a, b)$ является выпуклой функцией. Так как $|T|_{1/a, 1/b} = \max \{M(a, b), N(a, b)\}$, то справедливость нашей теоремы вытекает из леммы 2, ч.т.д.

В заключение этого параграфа мы дадим очень простое приложение теоремы Рисса о выпуклости; оно будет использовано в дальнейшем.

12. Следствие. *Пусть (S, Σ, μ) — пространство с положительной мерой и T — линейное отображение, переводящее каждое комплексное пространство $L_p(S, \Sigma, \mu)$ при $1 \leqslant p \leqslant \infty$ в себя. Если*

известно, что при $p=1$ *и* $p=\infty$ T *непрерывно и имеет норму, не превосходящую* C, *то отображение* T: $L_p \to L_p$ *при всех* p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *непрерывно и норма его не превосходит* C.

Доказательство этого утверждения, легко вытекающего из теоремы 11, предоставляется читателю.

11. Упражнения на неравенства

Основанные на свойстве выпуклости методы предыдущего параграфа вместе с несколькими элементарными схемами доказательства можно использовать для получения большого числа наиболее известных и важных неравенств анализа. В настоящем параграфе мы дадим группу связанных между собой упражнений на неравенства с целью продемонстрировать это утверждение.

А. *Неравенства, получаемые из теоремы о выпуклости и известных экстремальных случаев.*

1. Пусть (S, Σ, μ) — пространство с положительной мерой. Пользуясь свойствами выпуклости, показать, что отображение $[f, g] \to h$, определяемое равенством $h(s) = f(s) g(s)$, является непрерывным отображением $L_p(S, \Sigma, \mu) \times L_q(S, \Sigma, \mu)$ в $L_r(S, \Sigma, \mu)$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, и что $|h_r| \leqslant |f|_p |g|_q$; вывести отсюда неравенство Гёльдера как частный случай, в котором $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ $(p, q, r \geqslant 1)$.

2. Обобщить результат упражнения 1, показав, что если

$$h(s) = f_1(s) \ldots f_n(s), \quad f_i \in Z_{p_i}(S, \Sigma, \mu) \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} = \frac{1}{r},$$

то h принадлежит $L_r(S, \Sigma, \mu)$ и $|h|_r \leqslant |f_1|_{p_1} \ldots |f_n|_{p_n}$ $(p_1, \ldots, p_n, r \geqslant 1)$.

3. Пусть (S_1, Σ_1, μ_1) и (S_2, Σ_2, μ_2) — два пространства с положительной мерой. Пусть K — определенная на $S_1 \times S_2$ $\mu_1 \times \mu_2$-измеримая функция; предположим, что $\int_{S_1} |K(s_1, s_2)| \mu_1(ds_1) \leqslant M_1 < \infty$ для почти всех относительно μ_2 точек s_2 из S_2 и $\int_{S_2} |K(s_1, s_2)| \mu_2(ds_2) \leqslant M_2 < \infty$ для почти всех относительно μ_1 точек s_1 из S_1. Показать, что если f принадлежит $L_p(S_2, \Sigma_2, \mu_2)$, то интеграл

$$\int_{S_2} K(s_1, s_2) f(s_2) \mu(ds_2)$$

существует для почти всех относительно μ_1 точек s_1 и определяет некоторую функцию из $L_p(S_1, \Sigma_1, \mu_1)$, по норме не превосходящую $M_2^{\frac{1}{p}} M_1^{1-\frac{1}{p}} |f|_p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$

4. Пусть (S_1, Σ_1, μ_1) и (S_2, Σ_2, μ_2) — два пространства с положительной мерой, а K—определенная на $S_1 \times S_2$ $\mu_1 \times \mu_2$-измеримая функция; предположим, что $\int\limits_{S_2} |K(s_1, s_2)|^{p_2} \mu_2(ds_2) \leqslant M_2 < \infty$ для почти всех относительно μ_1 точек s_1 и $\int\limits_{S_1} |K(s_1, s_2)|^{p_1} \mu_1(ds_1) \leqslant$ $\leqslant M_1 < \infty$ для почти всех относительно μ_2 точек s_2. Показать, что для каждого f из $L_q(S_2, \Sigma_2, \mu_2)$ интеграл

$$\int\limits_{S_2} K(s_1, s_2) f(s_2) \mu_2(ds_2)$$

существует для почти всех относительно μ_1 точек s_1 и определяет некоторую функцию из $L_r(S_1, \Sigma_1, \mu_1)$, по норме не превосходящую $|f|_q M_1^{\frac{1}{p_1} - \frac{p_2}{pp_1}} M_2^{\frac{1}{p}}$. Здесь $1 \leqslant p_1, p_2 < \infty$, $\frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2} = 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 \leqslant q \leqslant q_2$ и $r = pp_1(p - p_2)^{-1}$.

5. Пусть (S_1, Σ_1, μ_1) и (S_2, Σ_2, μ_2) — два пространства с положительной мерой. Пусть K — определенная на $S_1 \times S_2$ $\mu_1 \times \mu_2$-измеримая функция; предположим, что

$$\int\limits_{S_1} \left\{ \int\limits_{S_2} |K(s_1, s_2)|^{p_1} \mu_2(ds_2) \right\}^{r_1} \mu_1(ds_1) = M_1 < \infty,$$

$$\int\limits_{S_2} \left\{ \int\limits_{S_1} |K(s_1, s_2)|^{p_2} \mu_1(ds_1) \right\}^{r_2} \mu_2(ds_2) = M_2 < \infty.$$

Показать, что для каждого $f \in L_q(S_2, \Sigma_2, \mu_2)$ интеграл

$$\int\limits_{S_2} K(s_1, s_2) f(s_2) \mu_2(ds_2)$$

существует для почти всех относительно μ_1 точек s_1 и определяет некоторую функцию из $L_t(S_1, \Sigma_1, \mu_1)$, по норме не превосходящую $|f|_q M^{\frac{\alpha}{r_1 p_1}} M_2^{\frac{1-\alpha}{r_2 p_2}}$. Здесь q заключено между q_2 и $r_2 p_2 (r_2 p_2 - 1)^{-1}$,

$$\alpha = \frac{q r_2 p_2 - q - r_2 p_2}{q - q r_2}$$

и

$$t = \frac{r_1 s_1 p_1}{\alpha(p_1 + r_1 s_1) + r_1 s_1 p_1 - r_1 s_1}.$$

Аналогичные утверждения можно сделать и для полилинейных форм вида

$$\int_{S_1} \dots \int_{S_n} K(s_1, \dots, s_n) f_1(s_1) \dots f_n(s_n) \mu_1(ds_1) \dots \mu_n(ds_n),$$

однако мы предоставляем это читателю.

В лемме VIII.1.24 будет показано, что если функция f, определенная на вещественной прямой, измерима по Лебегу, то функция g двух вещественных переменных, определяемая равенством

$$g(x, y) = f(x-y),$$

измерима относительно двумерной меры Лебега. В нижеследующих упражнениях на интегралы типа «свертки» свободно можно использовать этот факт. (В следующих четырех упражнениях через L_p обозначается пространство функций, интегрируемых с p-й степенью относительно меры Лебега на вещественной прямой.)

6. Пусть $f \in L_1$, $g \in L_p$, $p \geqslant 1$. Тогда интеграл

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y) g(y)\, dy$$

существует для почти всех x и определяет некоторую функцию из L_p. Кроме того, $|h|_p \leqslant |g|_p |f|_1$.

7. Пусть $f \in L_p$ и $g \in L_r$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} \geqslant 1$, $p \geqslant 1$ $r \geqslant 1$. Показать, что интеграл $h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y) g(y)\, dy$ существует для почти всех x и определяет некоторую функцию из L_s, где $s^{-1} = r^{-1} + p^{-1} - 1$. Кроме того, $|h_s| \leqslant |f|_p |g|_r$.

8. Пусть $f_i \in L_{p_i}$, $p_i \geqslant 1$, $i = 1, \dots, n$; предположим, что $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} \geqslant$ $\geqslant n-1$. Показать, что интеграл

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-y_1) f_2(y_1-y_2) \dots f_{n-1}(y_{n-2}-y_{n-1}) \times$$
$$\times f_n(y_{n-1})\, dy_1, \dots dy_{n-1}$$

существует для почти всех x и определяет некоторую функцию $h \in L_r$, $\frac{1}{r} = \sum_{i=1}^{n} p_i^{-1} - n + 1$. Кроме того, $|h|_r \leqslant |f_1|_{p_1} \dots |f_n|_{p_n}$.

9. (Хаусдорф — Юнг). Пусть k — натуральное число $\geqslant 1$ и пусть $p=\frac{2k+1}{2k}$. Пусть $f \in L_p$. Показать, что кратный интеграл

$$h(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y_1) f(y_1-y_2) \ldots$$

$$\ldots f(y_{n-2}-y_{n-1}) f(y_{n-1}) dy_1 \ldots dy_{n-1}$$

существует для почти всех x и определяет некоторую функцию из L_2. Показать, что $|h|_2 \leqslant |f|_p^k$.

10. Показать, что если $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — (двусторонние) последовательности комплексных чисел, такие, что $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n| < \infty$ и $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |b_n|^p$ сходится при $p \geqslant 1$, то $c_n=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{n-m} b_m$ определено для каждого n и

$$\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n| \left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |b_n|^p\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

11. Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — (двусторонние) последовательности комплексных чисел, такие, что $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n|^p < \infty$, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |b_n|^r < \infty$, $1 \leqslant p < \infty$, $1 \leqslant r < \infty$, где $\frac{1}{p}+\frac{1}{r} \geqslant 1$. Показать, что $c_n = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{n-m} b_m$ определено для всех n и что

$$\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^s\right\}^{\frac{1}{s}} \leqslant \left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |b_n|^r\right\}^{\frac{1}{r}},$$

где $\frac{1}{r}+\frac{1}{p}=\frac{1}{s}+1$.

12. Пусть $\{a_n^{(i)}\}$, $-\infty < n < +\infty$, $i=1, \ldots, k+1$, — семейство последовательностей (двусторонних) комплексных чисел, таких, что $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n^{(i)}|^{p_i} < \infty$, $p_i \geqslant 1$, $i=1, \ldots, k+1$, и $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i} \geqslant n-1$. Показать, что кратные ряды

$$c_n=\sum_{m_1=-\infty}^{+\infty} \ldots \sum_{m_k=-\infty}^{+\infty} a_{n-m_1}^{(1)} a_{m_1-m_2}^{(2)} \ldots a_{m-m_k}^{(k)} a_{m_k}^{(k+1)}$$

абсолютно сходятся для каждого n и что

$$\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^r\right\}^{\frac{1}{r}} \leqslant \prod_{i=1}^{k+1} \left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n^{(i)}|^{p_i}\right\}^{\frac{1}{p_i}}.$$

В. *Обобщения неравенств Гёльдера и Минковского.*

Часто известное неравенство, примененное к векторнозначным функциям, принимает интересный, но менее известный вид. Так, неравенство Минковского непосредственно приводит к формуле

$$\int_S |f(s)|\,\mu(ds) \geqslant \left| \int_S f(s)\,\mu(ds) \right|,$$

для функций со значениями в B-пространстве L_p. Это дает следующие неравенства:

13. Пусть (S_1, Σ_1, μ_1) и (S_2, Σ_2, μ_2) — пространства с положительной мерой и K — $\mu_1 \times \mu_2$-интегрируемая функция, определенная на $S_1 \times S_2$. Тогда для $p \geqslant 1$

$$\int_{S_1} \left\{ \int_{S_2} |K(s_1, s_2)|^p \mu_2(ds_2) \right\}^{\frac{1}{p}} \mu_1(ds_1) \geqslant$$

$$\geqslant \left\{ \int_{S_2} \left[\int_{S_1} |K(s_1, s_2)|\,\mu_1(ds_1) \right]^p \mu_2(ds_2) \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

14. (Йессен.) В предположениях упражнения 13, для $r \geqslant s > 0$

$$\left\{ \int_{S_1} \left[\int_{S_2} |K(s_1 s_2)|^r \mu_2(ds_2) \right]^{\frac{s}{r}} \mu_1(ds_1) \right\}^{\frac{1}{s}} \geqslant$$

$$\geqslant \left\{ \int_{S_2} \left[\int_{S_1} K(s_1, s_2)^s \mu_1(ds_1) \right]^{\frac{r}{s}} \mu_2(ds_2) \right\}^{\frac{1}{r}}.$$

(Указание: положить в упражнении 13 $p = \frac{r}{s}$.)

Точно так же и неравенство Гёльдера, примененное к векторнозначным функциям, может привести к необычно выглядящим неравенствам.

15. Пусть (S, Σ, μ) — пространство с положительной мерой, $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ — B-пространства, f — μ-измеримая функция со значениями в $\mathfrak{X}$, g — μ-измеримая функция со значениями в $B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$. Показать, что если $f \in L_p(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$, $g \in L_q(S, \Sigma, \mu, B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}))$ $p, q \geqslant 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то функция h, определяемая равенством $h(s) = g(s) f(s)$, принадлежит $L_1(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{Y})$ и $|h|_1 \leqslant |f|_p |g|_q$.

16. Пусть (S_1, Σ_1, μ_1) и (S_2, Σ_2, μ_2) — пространства с положительной мерой. Пусть K_1 и K_2 — определенные на $S_1 \times S_2$ $\mu_1 \times \mu_2$-измеримые функции. Предположим, что $p_1, p_2 \geqslant 1$, $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = 1$,

$\frac{1}{p_2}+\frac{1}{q_2}=1$. Показать, что если

$$\left\{\int\limits_{S_2}\left[\int\limits_{S_1}|K_1(s_1, s_2)|^{p_1}\mu_1(ds_1)\right]^{\frac{p_2}{p_1}}\mu_2(ds_2)\right\}^{\frac{1}{p_2}}=M_1<\infty$$

и

$$\left\{\int\limits_{S_2}\left[\int\limits_{S_1}|K_2(s_1, s_2)|^{q_1}\mu_1(ds_1)\right]^{\frac{q_2}{q_1}}\mu_2(ds_2)\right\}^{\frac{1}{q_2}}=M_2<\infty,$$

то

$$\int\limits_{S_1}\int\limits_{S_2}K_1(s_1, s_2)K_2(s_1, s_2)\mu_1(ds_1)\mu_2(ds_2)$$

существует и по абсолютной величине не превосходит M_1M_2.

17. Пусть (S, Σ, μ) — пространство с мерой, $p\geqslant 1$ и $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, и пусть $\{K_n\}$ и $\{L_n\}$ — последовательности определенных на S μ-измеримых функций. Показать, что

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_S K_n(s)L_n(s)\mu(ds)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left[\int\limits_S\left\{\sum_{n=0}^{\infty}|K_n(s)|^p\right\}^{\frac{1}{p}}\mu(ds)\right]\left[\int\limits_S\left\{\sum_{n=0}^{\infty}|L_n(s)|^q\right\}^{\frac{1}{q}}\mu(ds)\right],$$

причем ряд в левой части неравенства вполне определен и сходится абсолютно, если только интегралы в правой части равенства конечны.

18. Пусть f и g — измеримые по Лебегу функции двух вещественных переменных, $p\geqslant 1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Показать, что

$$\left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x, y-z)g(x, z)\,dz\right|dx\right]^p dy\right\}^{\frac{1}{p}}\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|g(x, y)^p\,dx\,dy\right\}^{\frac{1}{p}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(x, y)|^q\,dx\right]^{\frac{1}{q}}dy,$$

причем левая часть определена, если правая часть конечна. (Указание: это векторная форма упражнения 6.)

C. *Неравенства типа неравенства Харди — Гильберта.*

Все неравенства этой группы представляют собой вариации на удивительно простую тему, предложенную в упражнении 15 и приводящую к удивительно разнообразным результатам. В качестве вводного примера предлагается упражнение.

19. Пусть функция f определена на вещественной оси, измерима по Лебегу и принадлежит L_p. Определим отображение $T_t : L_p \to L_p$, полагая $(T_t f)(x) = f(x-t)$. Показать, что $T_t f$ является непрерывной функцией t со значениями в L_p для каждого f из L_p и что $|T_t f| = |f|$. Показать, что если $g \in L_1$, то

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} (T_t f) g(t)\, dt\right)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) g(t)\, dt$$

для почти всех x, и, таким образом, вывести результат упражнения 6 из упражнения 15 (или из соображений, упомянутых в начале п. B).

В нижеследующих упражнениях нам еще придется иметь дело с мерой Лебега, на сей раз на положительной вещественной полуоси. Через p всегда будет обозначаться число, заключенное между 1 и ∞.

20. (Харди — Литлвуд — Пойя.) Предположим, что функция K измерима по Лебегу. Показать, что отображение T, определяемое равенством

$$(Tf)(x) = \int_0^\infty K(y) f(xy)\, dy = \frac{1}{x}\int_0^\infty K\left(\frac{y}{x}\right) f(y)\, dy, \quad x > 0,$$

есть отображение пространства $L_p(0, \infty)$ в себя, по норме не превосходящее $\int_0^\infty |K(y)|\, y^{-\frac{1}{p}}\, dy$. Показать, что если $K(x) \geqslant 0$ для почти всех x, то это выражение равно $|T|$.

21. Показать, что отображение T, определяемое равенством

(a) (Харди) $(Tf)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(y)\, dy$,

является отображением в $L_p(0, \infty)$ с нормой $\frac{p}{p-1}$, $p > 1$;

(b) (Гильберт, Шур, Харди, М. Рисс)

$$(Tf)(x) = \int_0^\infty \frac{f(y)}{x+y}\, dy$$

есть отображение в $L_p(0, \infty)$ с нормой $\pi\left(\sin\frac{\pi}{p}\right)^{-1}$, $p > 1$;

(с) (Харди, Литлвуд, Пойя)

$$(Tf)(x)=\int_0^\infty \frac{f(y)}{\max(x,\ y)}\,dy$$

есть отображение в $L_p(0,\ \infty)$ с нормой $p^2(p-1)^{-1}$, $p>1$.

22. Показать, что отображение $T:\{a_n\}\to\{b_n\}$ последовательностей, определяемое условием

(a) $$b_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k,$$

есть отображение в l_p с нормой $\frac{p}{p-1}$, $p>1$;

(b) $$b_n=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{a_j}{n+j},$$

есть отображение в l_p с нормой $\pi\left(\sin\frac{\pi}{p}\right)^{-1}$, $p>1$;

(c) $$b_n=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{a_j}{\max(j,\ n)}$$

есть отображение в l_p с нормой $p^2(p-1)^{-1}$, $p>1$.

23. Предположим, что функция K измерима по Лебегу, и пусть $\int_0^\infty |K(y)|\,y^{-\frac{1}{p}}\,dy<\infty$. Пусть $p\geqslant 1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Показать, что преобразованием, сопряженным к преобразованию $T:L_p(0,\ \infty)\to L_p(0,\ \infty)$ упражнения 20, будет отображение $S:L_q(0,\ \infty)\to L_q(0,\ \infty)$, определяемое формулой

$$(Sg)(x)=\int_0^\infty K\left(\frac{x}{y}\right)g(y)\,y^{-1}\,dy.$$

Если $K(x)\geqslant 0$ для всех x, то какова будет норма S?

24. (a) (Харди.) Показать, что отображение S, определяемое равенством

$$(Sf)(x)=\int_x^\infty f(y)\,y^{-1}\,dy,$$

есть отображение в $L_p(0,\ \infty)$ с нормой p.

(b) (Харди.) Показать, что отображение $S:\{a_n\}\to\{b_n\}$, определяемое равенством

$$b_n=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{a_k}{k},$$

есть отображение в l_p с нормой p.

25. Пусть K — функция n вещественных переменных, определенная для положительных значений всех этих переменных и измеримая по отношению к n-мерной мере Лебега. Пусть $p_i\geqslant 1$, $i=1, \ldots, n$, $q\geqslant 1$ и $q^{-1}=\sum_{i=1}^{n}p_i^{-1}$. Предположим, что

$$\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty |K(x_1, \ldots, x_n)|\, x_1^{-\frac{1}{p_1}}\ldots x_n^{-\frac{1}{p_n}}dx_1\ldots dx_n=c<\infty.$$

Показать, что если f_i принадлежит $L_{p_i}(0, \infty)$, то интеграл

$$I(x)=\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty K\left(\frac{y_1}{x}, \ldots, \frac{y_n}{x}\right)f_1(y_1)\ldots f_n(y_n)\,dy_1\ldots dy_n$$

существует для почти всех $x\geqslant 0$ и что

$$\left\{\int_0^\infty\left|\frac{1}{x^n}I(x)\right|^q dx\right\}^{\frac{1}{q}}\leqslant c\,|f_1|_{p_1}\ldots|f_n|_{p_n}.$$

Показать, что если функция K неотрицательна, то константа c в этом неравенстве — наилучшая из возможных.

26. Пусть $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ — гильбертовы пространства. Пусть T_1 отображает некоторое всюду плотное подмножество D_1 пространства $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_2$ и T_2 отображает всюду плотное подмножество D_2 пространства $\mathfrak{H}_2$ в $\mathfrak{H}_1$. Предположим, что T_1 и T_2 сопряжены в том смысле, что $(T_1x, y)=(x, T_2y)$ для $x\in D_1$ и $y\in D_2$. Показать, что если одно из преобразований T_2, T_1T_2, T_2T_1 и T_1 продолжаемо до всюду определенного ограниченного оператора, то такими же будут и остальные три. Каковы будут нормы соответствующих продолжений?

27. (Харди.) Рассмотрим отображение T, определяемое равенством

$$(Tf)(x)=\int_0^\infty e^{-xt}f(t)\,dt.$$

Показать, что T есть ограниченный оператор в $L_2(0, \infty)$ нормы $\sqrt{\pi}$ и что преобразование TT^* определяется формулой

$$(TT^*f)(x)=\int_0^\infty f(t)(x+t)^{-1}\,dt.$$

Показать, что если $1 \leqslant p \leqslant 2, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, то $|Tf|_q \leqslant \pi^{\frac{1}{q}} |f|_p$ для $f \in L_p(0, \infty)$.

28. Показать, что отображение T, переводящее определенную на интервале $(0, 1)$ и интегрируемую по Лебегу функцию f в последовательность $\{a_n\}$, определяемую равенством

$$a_n = \int_0^1 x^n f(x)\, dx, \qquad n \geqslant 0,$$

есть ограниченное отображение пространства L_2 в l_2; оператор TT^* отображает последовательности $\{a_n\}$ в последовательности $\{b_n\}$, где

$$b_n = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{n+j+1}.$$

Показать, что норма T равна $\sqrt{\pi}$. Показать, что норма отображения S пространства $L_2(0, 1)$ в себя, определяемого равенством

$$(Sf)(x) = \int_0^1 f(y)(1-xy)^{-1}\, dy,$$

равна π.

29. Пусть функция K определена на положительной вещественной полуоси и измерима по Лебегу. Показать, что отображение T, определяемое равенством

$$(Tf)(x) = \int_0^{\infty} K(xy)\, y^{\frac{2}{p}-1} f(y)\, dy,$$

есть преобразование $L_p(0, \infty)$ в себя, по норме не превосходящее $\int_0^{\infty} |K(x)|\, x^{\frac{1}{p}-1}\, dx$, и что это есть точное значение его нормы, если $K(x) \geqslant 0$ для всех $x > 0$. Показать, что сопряженным отображением будет

$$(T^*f)(x) = x^{\frac{2}{p}-1} \int_0^{\infty} K(xy) f(y)\, dy.$$

(Указание: положить $y = y_1^{-1}$.)

D. *Общие свойства L_p-норм.*

В этой группе задач (S, Σ, μ) является пространством с положительной мерой и $L_p(S, \Sigma, \mu)$ определено при $0 < p < \infty$ как совокупность всех μ-измеримых функций, удовлетворяющих условию

$$|f|_p = \left\{ \int_S |f(s)|^p \mu(ds) \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty;$$

$L_\infty(S, \Sigma, \mu)$ имеет обычный смысл; мы увидим также, как определить $L_0(S, \Sigma, \mu)$.

Для $1 \leqslant p \leqslant \infty$ пространство L_p является B-пространством, но при $0 < p < 1$ оно будет только F-пространством (см. упражнение III.9.30, где, однако, символ $|f|_p$ при $0 < p < 1$ имеет несколько иное значение). Тем не менее имеется несколько интересных свойств функции $|f|_p$, справедливых в расширенной области $0 < p \leqslant \infty$.

30. Если $\infty \geqslant p_1 \geqslant p \geqslant p_2 > 0$ и f принадлежит $L_{p_1}(S, \Sigma, \mu) \cap L_{p_2}(S, \Sigma, \mu)$, то f принадлежит $L_p(S, \Sigma, \mu)$ и $\log |f|_p$ является непрерывной выпуклой функцией от $\frac{1}{p}$. (Указание: доказать эквивалентное утверждение, что $p \log |f|_p$ есть непрерывная выпуклая функция p.)

31. Если $\mu(S) = 1$ и если $0 < p_1 \leqslant p_2$, то $L_{p_1}(S, \Sigma, \mu)$ содержится в $L_{p_2}(S, \Sigma, \mu)$ и $|f|_p$ есть возрастающая функция p.

32. Предположим, что f принадлежит $L_p(S, \Sigma, \mu)$ для некоторого $p > 0$. Показать, что если только f не обращается в нуль вне некоторого множества E из Σ такого, что $\mu(E) \leqslant 1$, то $|f|_p \to \infty$ при $p \to 0$. Показать, что в противном случае $|f_p|$ есть убывающая функция, стремящаяся к

$$\exp \left\{ \int_E \log |f(x)| \mu(dx) \right\} = |f|_0.$$

33. Предположим, что $\mu(S) = 1$. Показать, что совокупность $L_0(S, \Sigma, \mu)$ всех функций f, таких, что

$$-\infty \leqslant \int_S \log |f(x)| \mu(dx) < \infty,$$

является линейным пространством и что результат упражнения 31 справедлив в расширенной области $0 \leqslant p \leqslant \infty$.

34. (Неравенство, связывающее среднее арифметическое и среднее геометрическое.) Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — комплексные числа; показать, что

$$|a_1 \ldots a_n|^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n} (|a_1| + \ldots + |a_n|).$$

35. Пусть $\mu(S) = 1$. Положим

$$\exp \left\{ \int_S \log |f(s)| \mu(ds) \right\} = |f|_0$$

для $f \in L_0(S, \Sigma, \mu)$. Показать, что если f и g — неотрицательные функции из $L_0(S, \Sigma\, \mu)$, то $|f+g|_0 \geqslant |f|_0 + |g|_0$. (Указание: воспользоваться результатом упражнения III.9.29.)

36. Пусть (S, Σ, μ) и (S_1, Σ_1, μ_1) — пространства с положительной мерой. Предположим, что $\mu(S)=1$. Показать, что если K есть $\mu \times \mu_1$-измеримая функция, определенная на $S \times S_1$, то

$$\int_{S_1} \exp\left\{\int_S \log|K(s, s_1)|\,\mu(ds)\right\} \mu_1(ds_1) \leqslant$$
$$\leqslant \exp\left\{\int_S \left[\log\left(\int_{S_1} |K(s, s_1)|\,\mu_1(ds_1)\right)\right] \mu(ds)\right\}.$$

(Указание: воспользоваться результатом упражнения 14.)

37 (a). Показать, что если функции f и K определены на положительной вещественной полуоси и измеримы по Лебегу, причем K неотрицательна и $\int_0^\infty K(x)\,dx = 1$, то

$$\int_0^\infty \exp\left\{\int_0^\infty K(x)\log|f(xy)|\,dx\right\} dy \leqslant$$
$$\leqslant \exp\left\{-\int_0^\infty K(x)\log x\,dx\right\} \cdot \int_0^\infty |f(y)|\,dy.$$

(b) (Кнопп.) Показать, что если функция f определена на положительной вещественной полуоси и интегрируема по Лебегу, то

$$\int_0^\infty \exp\left\{\frac{1}{x}\int_0^x \log|f(y)|\,dy\right\} dx \leqslant e \int_0^\infty |f(y)|\,dy,$$

причем константа e — наилучшая из возможных.

(c) (Карлеман.) Показать, что $\sum_{n=1}^\infty |a_1 \ldots a_n|^{\frac{1}{n}} \leqslant e \sum_{n=1}^\infty |a_n|$ для каждой последовательности $\{a_n\}$, причем константа e — наилучшая из возможных.

E. *Обобщения теоремы о выпуклости.*

38. Пусть (S, Σ, μ) — пространство с σ-конечной мерой и f — μ-измеримая функция, определенная на S и со значениями в B-пространстве $\mathfrak{X}$; предположим, что f μ-интегрируема на каждом множестве E из Σ, таком, что $\mu(E) < \infty$. Показать, что если $1 \leqslant p \leqslant \infty$, то для того, чтобы функция f принадлежала $L_p(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$, необходимо и достаточно, чтобы

$$[*] \qquad \left|\int_S g(s) f(s)\,\mu(ds)\right| < \infty, \quad g \in \mathfrak{L}, \quad |g|_q \leqslant 1,$$

где $\mathfrak{L}$ — подпространство μ-простых функций в $L_q(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X}^*)$ и $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Показать, что в этом случае $|f|_p$ равно верхней грани левой части неравенства [*].

39. Показать, что лемма 10.7, теорема 10.8, лемма 10.9, теорема 10.10 и теорема 10.11 справедливы даже и в том случае, если пространство комплексных функций заменяется соответствующим пространством векторнозначных функций (т. е. если $L_p(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$ заменяет $L_p(S, \Sigma, \mu)$ и т. д.).

40. Пусть (S_1, Σ_1, μ_1) и (S_2, Σ_2, μ_2) — пространства с положительной мерой. Пусть $z=x+iy$ — комплексный параметр, изменяющийся в полосе $c_1 \leqslant x \leqslant c_2$. Предположим, что $T(z)$ для каждого z есть линейное отображение пространства $L^{(1)}$ всех μ_1-интегрируемых простых функций в пространство $L^{(2)}$ всех μ_2-измеримых функций, интегрируемых на каждом множестве конечной меры, и что для каждого f_1 из $L^{(1)}$ и E из Σ_2, такого, что $\mu_2(E)<\infty$, интеграл $\int\limits_E (T(z)f_1)(s)\,\mu_2(ds)$ является аналитической функцией и равномерно ограничен. Пусть $|T(z)|_{p,q}$ для каждого z определено так же, как в формулировке теоремы 11. Показать, что $\max\limits_{-\infty<y<+\infty} \log|T(x+iy)|_{\frac{1}{a},\frac{1}{b}}$ является выпуклой функцией от $[x, a, b]$ в области $c_1 \leqslant x \leqslant c_2$, $0 \leqslant a \leqslant 1$, $0 \leqslant b \leqslant 1$.

41. Пусть (S_1, Σ_1, μ_1) и (S_2, Σ_2, μ_2) — пространства с положительной мерой, а K — определенная на $S_1 \times S_2$ неотрицательная $\mu_1 \times \mu_2$-измеримая функция. Предположим, что $\int\limits_{E_1}\int\limits_{E_2} K(s_1, s_2)\,\mu_1(ds_1)\,\mu_2(ds_2)<\infty$, если E_i принадлежит Σ_i, $i=1, 2$ и $\mu_i(E_i)<\infty$, $i=1, 2$. Показать, что норма отображения T пространства $L_p(S_2, \Sigma_2, \mu_2)$ в $L_q(S_1, \Sigma_1, \mu_1)$, определяемого формулой

$$[*] \qquad (Tf)(s_1)=\int\limits_{S_2} \{K(s_1, s_2)\}^{\alpha} f(s_2)\,\mu_2(ds_2)$$

(в том смысле, что этот интеграл существует почти всюду относительно μ_1 для каждого $f \in L_p(S_2, \Sigma_2, \mu_2)$ и принадлежит $L_q(S_1, \Sigma_1, \mu_1)$), является выпуклой функцией от α, $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{q}$. (Разумеется, в тех случаях, когда равенством [*] не определяется ограниченное отображение $L_p \to L_q$, мы полагаем эту норму равной $+\infty$.)

42. Пусть функция f измерима по Лебегу на $(0, \infty)$, $p>1$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ и $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Показать, что если f принадлежит $L_{q/(q-\lambda)}(0, \infty)$, то интеграл $\int\limits_0^{\infty} \frac{f(x)}{(x+y)^{\lambda}}\,dx$ существует для почти всех y и определяет

некоторую функцию из $L_{p/\lambda}(0, \infty)$. Найти верхнюю границу для нормы этой функции.

F. *Неравенства из теории ортогональных рядов.*

В этой группе упражнений мы воспользуемся понятием и определениями из параграфа IV.14, в частности определением 1.

43. Пусть $\{\varphi_n\}$, $-\infty < n < +\infty$, — равномерно ограниченная замкнутая ортонормированная система, и пусть $1 \leqslant p \leqslant 2$. Показать, что если $f \in L_p$ и $a_n = \int\limits_0^{2\pi} f(x)\overline{\varphi_n(x)}\,dx$, то $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} |a_n|^q < \infty$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

44. Пусть $\{\varphi_n\}$, $-\infty < n < +\infty$, — равномерно ограниченная замкнутая ортонормированная система. Предположим, что $1 \leqslant p \leqslant 2$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ и $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n|^p < \infty$. Показать, что существует такое f из L_q, что $a_n = \int\limits_0^{2\pi} f(x)\overline{\varphi_n(x)}\,dx$.

45. В предположениях упражнения 43 и дополнительном предположении, что $\{\beta_n\}$ есть последовательность комплексных чисел, такая, что $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} |\beta_n| < \infty$, показать, что $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} |\beta_n|^{2-p} |a_n|^p < \infty$ для всех f из L_p.

46. Пусть T_n — оператор, определенный в абзаце, предшествующем упражнению IV.14.34. Показать, что если $T_n f \to f$ по норме пространства C для каждого $f \in C$, то $T_n f \to f$ по норме пространства L_p для каждого f из L_p.

47. Пусть $\{\lambda_n\}$ — вещественная фактор-последовательность типа (C, C) в смысле определения, предшествующего упражнению IV.14.64. Показать, что $\{\lambda_n\}$ будет, кроме того, и типа (L_p, L_p) при $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

G. *Различные другие неравенства, связанные с выпуклостью.*

48. (Теорема Адамара о трех кругах.) Пусть аналитическая функция f определена в кольце $a < |z| < b$ и принимает значения из B-пространства $\mathfrak{X}$. Показать, что если $M(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$, то $\log M(r)$ является выпуклой функцией от $\log r$, $a < r < b$.

49. (Харди.) Пусть комплексная аналитическая функция f определена в кольце $a < |z| < b$, и пусть $1 \leqslant p < \infty$. Показать, что если $M_p(r) = \left\{\int\limits_0^{2\pi} |f(re^{i\vartheta})|^p\,d\vartheta\right\}^{\frac{1}{p}}$, то $\log M_p(r)$ является выпуклой функ-

цией от $\log r$ при $a < r < b$. (Указание: применить результат упражнения 48 к функции $F(z)$, определяемой равенством $(F(z))(\vartheta) = f(ze^{i\vartheta})$.)

50. Пусть комплексная аналитическая функция определена в кольце $a < |z| < b$. Пусть $0 < \alpha < 1$ и

$$M_\alpha(r) = \max_{|z_1|=|z_2|=r} \left[\frac{f(z_1) - f(z_2)}{|z_1 - z_2|^\alpha} \right].$$

Показать, что $\log M_\alpha(r)$ является выпуклой функцией от $\log r$ при $a < r < b$.

12. Примечания и добавления

Топологии, сопряженные операторы и проекторы. Сильная и слабая операторные топологии для ограниченных операторов на гильбертовом пространстве были введены и систематически изучались Дж. Нейманом [2]. Понятия сильной и слабой сходимостей последовательностей операторов использовались, однако, и раньше (см. Гильберт [1]), Ф. Рисс [6, стр. 107, 111]. Последняя из топологий, упоминавшихся в § 1, иногда называемая «сильнейшей» операторной топологией, была введена Дж. Нейманом [5]. Вопрос об определении вида линейных функционалов, определенных на $B(\mathfrak{H})$ и непрерывных в этой и других топологиях, рассматривал Диксмье [2], который доказал теорему 1.4 для этого случая; в общем виде теорема 1.4 была доказана Бейдом [3]. Смежные результаты были получены Майклом [1]. (См. также Тейлор и Халбери [1*]. *Ред.*)

Формальное определение сопряженного оператора берет свое начало в теории матриц и теориях дифференциальных и интегральных уравнений. Ф. Рисс [2, стр. 478; 6, стр. 85] пользовался этим понятием в пространствах L_p, $p > 1$ и l_2 и доказал для них лемму 2.2. Банах [4, стр. 235] ввел понятие сопряженного оператора для общего B-пространства и доказал для этого случая леммы 2.7 и 2.8. Важная роль понятия проекционного оператора была отчетливо понята Шмидтом [1], которому и принадлежит геометрическая терминология в теории линейных пространств.

Вполне непрерывные и слабо вполне непрерывные операторы. Понятие вполне непрерывного (или бикомпактного) оператора, по существу, принадлежит Гильберту [1, IV], определившему его для билинейных форм в l_2. В терминах операторов Гильберт требует, чтобы этот оператор отображал слабо сходящиеся последовательности в сильно сходящиеся. В рефлективных пространствах это эквивалентно определению 5.1, принадлежащему Ф. Риссу [4], который подробно исследовал эти операторы.

Начало изучения слабо вполне непрерывных операторов было положено в работах Какутани [13] и Иосиды [4] в связи с эргодической теорией. В. Р. Гантмахер [1] доказала теорему 4.8, а также теоремы 4.2 и 4.7 для сепарабельных пространств. Эти теоремы без предположения о сепарабельности были доказаны Накамурой [3].

Теорема 5.2 принадлежит Шаудеру [6], а теорема 5.6 для обычных последовательностей, справедливая для сепарабельных пространств,— Гельфанду [2, стр. 269]. Какутани [11] дал симметричное доказательство теоремы 5.2; аналогичное рассуждение для слабо вполне непрерывных операторов имеется в работе Бартла [2].

Операторы с замкнутой областью значений. Некоторые частные случаи этих теорем были доказаны Хеллингером и Теплицем [1] для l_2 и Ф. Риссом [2, 6] для L_p и l_p при $p > 1$. Относящиеся к этому вопросу абстрактно формулируемые результаты были получены Ханом [3]. В том виде, как это дано у нас, они, по существу, принадлежат Банаху [4, стр. 234—239; 1, стр. 145—152], хотя его доказательства были иными. Дополнительные результаты такого рода читатель может найти у Хаусдорфа [3] и Дьёдонне [3].

Общий вид линейных операторов в C. Аналитическое выражение для оператора общего вида с областью определения и областью значений в $C[0, 1]$ было дано Радоном [1]. В работах К. Фишера [1] и Ра̀дона [1] рассматривался вполне непрерывный оператор, отображающий $C[0, 1]$ в себя. Гельфанд [2] нашел общий вид вполне непрерывного или только ограниченного операторов, отображающих в $C[0, 1]$ произвольное B-пространство. Сирвинт [2, 3] получил аналогичное представление для слабо вполне непрерывных операторов, отображающих $\mathfrak{X}$ в $C[0, 1]$. Бартл [2] показал, что то же самое представление справедливо для каждого из этих трех типов операторов, отображающих $\mathfrak{X}$ в B-пространство ограниченных непрерывных функций, заданных на произвольном топологическом пространстве.

В случае когда $C[0, 1]$ служит областью определения, а $\mathfrak{X}$ — областью значений, Гельфанд [2] представил посредством интеграла Стильтьеса как вполне непрерывный оператор, так и оператор, областью значений которого служит некоторое слабо полное пространство $\mathfrak{X}$. Слабо вполне непрерывные операторы, отображающие $C[0, 1]$ в $\mathfrak{X}$, изучались Сирвинтом [3]. Весьма глубокое исследование слабо вполне непрерывных операторов с областью определения $C(S)$ принадлежит Гротендику [4], доказавшему теоремы 7.4—7.6 иными методами. Гротендик показал, что существует взаимно однозначное соответствие между слабо вполне непрерывными операторами, отображающими $C(S)$ в $\mathfrak{X}$, и некоторыми векторными мерами, однако он не использовал этого соответствия для их представления. Такое интегральное представление применялось Бартлом, Данфордом и Шварцем [1] для доказательства этих теорем, по существу, так, как это сделано у нас.

В §§ 7 и 8 было показано, что произвольный слабо вполне непрерывный оператор, отображающий B-пространство $\mathfrak{X}$ в B-пространство $\mathfrak{Y}$, переводит слабо сходящиеся последовательности в сильно сходящиеся при условии, что $\mathfrak{X}$ является либо C-, либо L_1-пространством, либо одним из многих пространств, изометрически эквивалентных C- или L_1-пространству. Абстрактное изучение этого свойства пространства $\mathfrak{X}$ независимо друг от друга предпринималось Брейсом [1] и Гротендиком [4]. Брейс налагал на B-пространство $\mathfrak{X}$ следующее условие: если $\{x_n\}$ слабо сходится к x_0 и $\{x_n^*\}$ слабо сходится к x_0^*, то $\{x_n^* x_n\}$ сходится к $x_0^* x_0$. Брейс [1, стр. 18] доказал, что если это условие выполнено в $\mathfrak{X}$, то каждый слабо вполне непрерывный оператор $T: \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ отображает слабо сходящиеся последовательности из $\mathfrak{X}$ в сильно сходящиеся последовательности из $\mathfrak{Y}$. Утверждение, обратное этому, было доказано Гротендиком [4, стр. 138]. В этих же двух работах можно найти и другие относящиеся сюда результаты.

Общий вид линейных операторов в лебеговом пространстве. Представление общего оператора в том виде, как это сделано в теореме 8.1, было дано Канторовичем и Вулихом [1, стр. 138]. Оценка нормы оператора для случая, когда $\mathfrak{X}=L_p$, была найдена Фуллертоном [3]. Относящиеся к этому вопросу теоремы были получены также Бохнером и Тейлором [1, стр. 941—943].

Общий вид линейного оператора, отображающего $L_1[0, 1]$ в некоторое равномерно выпуклое пространство $\mathfrak{X}$ или в пространство с некоторого рода базисом, был найден Данфордом [8], изучавшим также общий и вполне непрерывный операторы, отображающие $L_1[0, 1]$ в $L_p[0, 1]$. Гельфандом [2] было дано представление вполне непрерывного оператора, отображающего $L_1[0, 1]$ в общее B-пространство, а также общего оператора, отображающего $L_1[0, 1]$ в некоторое пространство, являющееся рефлексивным или сепарабельным сопряженным пространством. Эти последние результаты Данфордом и Петтисом [1] были обобщены на пространство с мерой. Для случая, когда S есть конечный или бесконечный евклидов интервал, ими получено конкретное представление для слабо вполне непрерывного и вполне непрерывного операторов, отображающих $L_1(S)$ в произвольное пространство $\mathfrak{X}$. Филлипс [3], рассматривая тот же случай для произвольного пространства с σ-конечной мерой $\mathfrak{X}$, получил представление общего оператора в виде некоторого интеграла относительно векторной меры Липшица и нашел ядро этих представлений для слабо вполне непрерывного и сильно вполне непрерывного операторов. См. также работу Филлипса [1]. Сирвинт [1] построил пример (слабо вполне непрерывного) оператора в $L_1[0, 1]$, не являющегося вполне непрерывным, но квадрат которого вполне непрерывен. Почти точно такой же пример дали Иосида, Мимура и Какутани [1]. В случае когда S—евклидово пространство, Данфордом и Петтисом [1] показано, что квадрат любого слабо вполне непрерывного оператора в $L_1(S)$ является сильно вполне непрерывным оператором. Для пространства с мерой это было доказано Филлипсом [3].

Тесно связана с проблемой представления операторов, заданных на $L_1(S)$, и векторная форма теоремы Радона — Никодима. Данфорд и Петтис [1] показали, что если (S, Σ, α) — пространство с σ-конечной положительной мерой, а μ — определенная на Σ мера со значениями в сепарабельном сопряженном пространстве $\mathfrak{X}$, такая, что $|\mu(E)| \leqslant K\alpha(E)$, $E \in \Sigma$, то существует такая измеримая функция x, отображающая S в $\mathfrak{X}$, что $\operatorname{vrai\,sup} |x(s)| \leqslant K$ и $\mu(E) = \int_E x(s)\alpha(ds)$. Филлипсу [1] принадлежит аналогичная теорема для случая, когда $\mathfrak{X}$ есть произвольное B-пространство, а множество

$$\left\{\frac{\mu(E)}{\alpha(E)} \middle| E \in \Sigma,\ 0 < \alpha(E) < \infty\right\}$$

слабо бикомпактно. Дьёдонне [9, 10, 14] дал другие обобщения теоремы Данфорда — Петтиса. Риккарту [2] принадлежит теорема несколько более общая, чем теорема Радона — Никодима; в его случае интегрируемая функция, вообще говоря, не является однозначной.

Теорема Рисса о выпуклости. Принадлежащий М. Риссу [1] основной результат этого параграфа имеет несколько важных приложений (см., например, монографии Харди, Литлвуда и Пойя [1, гл. VIII] и Зигмунда [1, гл. IX]). Приводимое нами доказательство, по существу, принадлежит Торину [1], хотя его рассуждение относилось в основном к пространствам $l_{p,n}$. Кальдерон и Зигмунд [1, 2] обобщили эту теорему на случай полосы $0 \leqslant a \leqslant 1, 0 \leqslant b < \infty$, включив посредством этого пространства L_p, $0 < p < 1$, и приспособив их к тому, чтобы сделать некоторые приложения к пространствам H_p. Эта теорема может быть обобщена также и на полилинейные функции. (См. также Торин [3*]. *Ред.*)

В дополнение к упомянутым выше работам читатель найдет другие доказательства (иногда лишь для $l_{p,n}$) и приложения в работах Пэли [1, 2] (дополненных работами Зигмунда [1]), Салема [1], Салема и Зигмунда [1], Тамаркина и Зигмунда [1] и Юнга [1].

Мы рассмотрели случай комплексных пространств. В вещественном случае выпуклость имеет место только в треугольнике $0 \leqslant a$, $b \leqslant 1$, $a + b \geqslant 1$. Исследование этого случая читатель может найти в вышеупомянутых работах, например в работе Торина [1].

Как указывалось в § 11, многие из наиболее важных неравенств анализа легко могут быть выведены из теоремы Рисса о выпуклости и нескольких элементарных идей относительно векторных функций. Имеется класс и более глубоких неравенств, которые будут рассматриваться в гл. XI, в завершающем эту главу параграфе «*Примечания и дополнения*».

Общий вид линейных операторов. В приложении абстрактной теории линейных операторов к конкретным пространствам довольно важно знать выражение оператора в терминах его области определения и области значений. Для пространств C и L_1 конкретные представления были даны в параграфах 7,8. Для удобства читателя мы приводим здесь таблицы ссылок на литературу, в которой явно сформулированы такие теоремы о представлении. Всего дано четыре таблицы: одна для общего оператора, по одной для вполне непрерывного и для слабо вполне непрерывного операторов и одна для представления операторов с различными свойствами упорядоченности.

Эти результаты в некотором смысле можно рассматривать как полные для заданного пространства, если известен вид оператора, отображающего произвольное B-пространство в это пространство, и вид оператора, отображающего это пространство в произвольное B-пространство. На самом деле, однако, часто случается, что если дело касается двух определенных пространств, то эти общие результаты могут быть либо улучшены, либо сформулированы в виде, более легко доказываемом.

Читатель, пользующийся этими таблицами, найдет в них и повторения и различные множества условий. Иногда, например, в предположениях сепарабельности, рефлексивности и т. д. могут быть получены более подробные сведения; такие случаи отмечены. Не делается никакой попытки различать между собой теоремы, относящиеся к L_p [0, 1] и $L_p(S)$, где мера в S, например, σ-конечна или произвольна, хотя и не все из этих результатов, установленных для [0, 1], обобщены.

Далее, в большинстве из этих пространств имеются и другие понятия сходимости, такие, как поточечная сходимость, сходимость по мере и т. д.; таблица на стр. 593 относится к теоремам о представлении операторов, обладающих различными свойствами упорядоченности.

Хотя эти таблицы заполнялись с некоторой осторожностью, авторы вполне отдают себе отчет в их неполноте и некоторой неаккуратности и охотно примут поэтому и добавления и поправки.

Особенно важно иметь выражения нормы оператора в терминах объектов, использованных в представлении. Читатель, пользующийся таблицами, заметит, что подобные выражения не всегда известны.

Дополнительные замечания к таблицам VI

1. Отыскание общего вида линейных операторов — это вопрос о представлении линейных функций, определенных на некоторых пространствах и со значениями в B-пространстве. Гаврин дал некоторое представление для общего ограниченного линейного функционала, на пространстве непрерывных функций, определенных на отрезке $[a, b]$ и со значениями в $\mathfrak{X}$. Бохнер и Тейлор рассматривали это пространство, а также аналогичные пространства, соответствующие L_p, $1 \leqslant p < \infty$.

2. Работа Гротендика не относится специально к изучению общего вида операторов, однако им доказано несколько глубоких теорем о слабо вполне непрерывных операторах, определенных на C и на L_∞.

3. Идзуми и Суноути нашли вид операторов, отображающих произвольное B-пространство в B-пространство функций, удовлетворяющих некоторым специальным условиям.

4. Меддаус дал условия, достаточные для того, чтобы вполне непрерывный оператор служил пределом некоторой последовательности операторов с конечномерными областями значений.

5. Для отображений между L_p-пространствами трудно получить явное выражение для нормы. Нижняя граница для нее была получена Фуллертоном [1]

Билинейные функционалы. Легко видеть, что совокупность всех скалярных билинейных функций, определенных на произведении $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ двух B-пространств, находится во взаимно однозначном соответствии с совокупностью линейных отображений пространства $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{Y}^*$ (или пространства $\mathfrak{Y}$ в $\mathfrak{X}^*$). Так проблемы относительно линейных операторов можно выразить в терминах билинейных функционалов, и обратно.

Конкретное представление для билинейных функционалов на $C \times C$ было дано много лет назад Фреше [10]. Недавно Морс и Трансю провели полное исследование билинейных функций, заданных на функциональных пространствах весьма общего вида, включающих c, C, l_p, L_p, $1 \leqslant p < \infty$, и другие пространства. (Мы упомянем лишь их работы [1—3]; дополнительные библиографические указания можно найти в работах Морса [1] и Морса и Трансю [4].) В работе Морса и Трансю [2, 1] показано, что при некоторых условиях билинейные функционалы можно представить некоторым каноническим образом посредством кратных интегралов Лебега — Стильтьеса.

В их более поздних работах даются многочисленные приложения к различным вопросам, в том числе и к вопросу о сходимости двойных рядов Фурье.

Идеалы кольца операторов. Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторое B-пространство, $\mathfrak{F} \subseteq B(\mathfrak{X})$ — совокупность всевозможных операторов с конечномерной областью значений, $\mathfrak{C} \subseteq B(\mathfrak{X})$ — множество вполне непрерывных операторов, $\mathfrak{W}$ — множество слабо вполне непрерывных операторов и $\mathfrak{P}$ — совокупность операторов, отображающих слабо сходящиеся последовательности в сильно сходящиеся. Нетрудно видеть, что каждый из этих четырех классов операторов является двусторонним идеалом; замкнутость $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{W}$ в равномерной топологии пространства $B(\mathfrak{X})$ была установлена в следствиях 5.4 и 4.6, и читатель без труда может проверить, что и $\mathfrak{P}$ тоже замкнуто. Всегда имеют место включения

$$\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{P}, \quad \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{W}.$$

Для конечномерного пространства все эти множества совпадают с $B(\mathfrak{X})$. В рефлексивном пространстве $\mathfrak{C} = \mathfrak{P}$ и $\mathfrak{W} = B(\mathfrak{X})$. В гильбертовом пространстве или в B-пространстве с базисом идеал $\mathfrak{C}$ служит замыканием $\mathfrak{F}$. Калкин [2, стр. 841] показал, что в гильбертовом пространстве идеал $\mathfrak{C}$ является максимальным двусторонним идеалом. В теоремах 7.4 и 8.12 мы видели, что в пространствах C и L_1

$$\mathfrak{F} \subset \mathfrak{C} \subset \mathfrak{W} \subseteq \mathfrak{P}.$$

Гротендик [4, стр. 153] доказал, что в C идеалы $\mathfrak{W}$ и $\mathfrak{P}$ совпадают. Этого не будет, однако, в случае L_1, действительно, так как L_1 не рефлексивно, в нем имеются ограниченные подмножества, не являющиеся слабо бикомпактными. То обстоятельство, что $\mathfrak{W} \subset \mathfrak{P}$, вытекает из этого замечания и теорем 8.10 и 8.14.

Другие идеалы, тесно связанные с вполне непрерывными операторами, были введены в работе Клейнекке [1] и вкратце рассматриваются в п. VII.11 (стр. 611).

Взаимно дополнительные многообразия и проекторы. Два многообразия $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ в B-пространстве $\mathfrak{X}$ называются *взаимно дополнительными*, если $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N} = 0$ и $\mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N} = \mathfrak{X}$. При этом одно из них называется *дополнением* к другому. Мы уже говорили о связи между *замкнутыми* дополнениями и существованием ограниченных проекционных операторов. Для конечномерных подмногообразий всегда существует бесчисленное множество проекторов и, следовательно, замкнутых дополнений. В случае бесконечномерных подпространств это не всегда верно, как показал Меррей [1] для некоторых подпространств в l_p, $1 < p \neq 2$. Другие подпространства, не имеющие дополнений, были построены Коматудзаки [1, 2], Филлипсом [3] и Собчиком [1, 2]; см. также упражнения в § 9.

Если мы требуем только чтобы $\mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}$ было всюду плотно в $\mathfrak{X}$, то $\mathfrak{N}$ называется *квазидополнением* $\mathfrak{M}$. В этом случае «проектирование» на $\mathfrak{M}$ уже не будет ограниченным оператором. То, что для каждого замкнутого подпространства имеется (бесчисленное множество) квазидополнений, было показано Меррейем [2] для случая, когда $\mathfrak{X}$ есть сепарабельное рефлексивное пространство, и Макки [3] — без предположения о рефлексивности.

Библиография. Боненблуст [3, 4], Гуднер [1], Данфорд [2], Кобер [1], Коматудзаки [1, 2], Лорх [2], Макки [3], Меррей [1,2], Собчик [1—3], Филлипс [3].

Продолжение линейного преобразования. Тейлор [1] изучал условия, при которых продолжение линейных функционалов является однозначно определенной операцией. Какутани [6] показал, что, для того чтобы эта операция была линейной и изометричной для каждого замкнутого линейного многообразия, необходимо и достаточно, чтобы пространство было гильбертовым.

Ясно, что замкнутое подпространство $\mathfrak{X}_0 \subset \mathfrak{X}$ обладает следующим свойством: для того чтобы каждый ограниченный оператор

$T: \mathfrak{X}_0 \to \mathfrak{Y}_T$ имел продолжение (той же самой нормы) $\overline{T}: \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}_T$, необходимо и достаточно, чтобы существовало проектирование (нормы 1) пространства $\mathfrak{X}$ на $\mathfrak{X}_0$. Подобным же образом Какутани [6] доказал, что, для того чтобы $\mathfrak{X}$ было гильбертовым пространством, необходимо и достаточно, чтобы произвольный ограниченный оператор, определенный на подпространстве пространства $\mathfrak{X}$, имел продолжение на все $\mathfrak{X}$ той же самой нормы.

Расширяя область значений, Филлипс [3] и Собчик [3] показали, что всегда можно найти продолжение без увеличения нормы. Собчик [3] доказал, что если $\mathfrak{X}_0$ замкнуто в $\mathfrak{X}$ и T есть взаимно однозначный ограниченный линейный оператор, отображающий (Текст продолжается на стр. 594)

Таблица VI

Общий вид линейных операторов

Пояснения

Строки обозначают фиксированную область определения, а столбцы—фиксированную область значений. Перечисленные ниже работы обозначены в таблицах посредством буквенного кода, причем обычно указывается и номер страницы, на которой имеется соответствующая теорема, кроме тех случаев, когда работа короткая. При этом используются следующие сокращения:

b—некоторые ограничения на базис,
c—сопряженное пространство,
p—положительный оператор,
r—рефлексивное пространство,
s—сепарабельное пространство,
u—равномерно выпуклое пространство,
w—слабо полное пространство.

[А] Алексевич [2]
[Б] Бартл [2]
[БДШ] Бартл, Данфорд и Шварц [1]
[БТ] Бохнер и Тейлор [1]
[В] Вулих [12]
[Ву] Вулих [13]
[Вул] Вулих [14]
[Г] Гельфанд [2]
[Га] Гавурин [1]
[Гр] Гротендик [4]
[Д] Данфорд [8]
[ДП] Данфорд и Петтис [1]
[ИС] Идзуми и Суноути [1]
[К] Канторович [3]
[Ка] Канторович [4]
[КВ] Канторович и Вулих [1]
[КаВ] Канторович и Вулих [2]
[Ко] Коэн Л. [1]
[КоД] Коэн и Данфорд [1]
[Кр] Кристиан [1]
[Л] Лоренц [4]
[М] Меддаус [2]
[О] Орлич [5]
[П] Петтис [1]
[Ра] Радон [1]
[Р] Риккарт [2]
[С] Сирвинт [3]
[См] Смитис [2]
[Фл] Филлипс [3]
[Фп] Филлипс [1]
[Ф] Фихтенгольц [3]
[Фи] Фихтенгольц [2]
[ФК] Фихтенгольц и Канторович [1]
[Фш] Фишер К. [1]
[Фт] Фуллертон [2]
[Фу] Фуллертон [3]
[Фул] Фуллертон [4]
[ХТ] Хилле и Тамаркин [2]
[Э] Эзрохи [1]

Таблица VIA

Общий вид линейного оператора

	Общее B-пространство	C	L_1	L_p, $1 < p < \infty$
Общее B-пространство	[КоД,689]b [Э]b	[Б] [ИС] [БТ,943]s [Г,267]	[БТ,943] [КВ,138]	[БТ,941] [КВ,138]
C	[БДШ] [Г,280]w [Фл,531]	[БДШ] [Ф] [Ф]p [Ра]	[С,93]	
L_1	[Д,482,5]b [Г,275]r [Д,482]u [Г,276]sc [ДП,369]r [П,428]r [ДП,345—346]sc [Р,65]	[В,279]	[Д,483] [ДП,358] [КВ,146] [В,286] [Фул]	[Д,483,5] [Фул] [ДП,347] [КаВ] [ДР,367] [К,264] [ДП,379] [Вул]
L_p $1 < p < \infty$	[Д,476] [Д,482]b [Фл,528]	[Г,267]	[Д,483] [Фу] [Фул]	[Д,483] [Фул] [К,275] [Вул]
L_∞	[Д,482]b [К,238] [Фл,528] [А,146]	[ФК,90]	[Д,483]	[Д,483]
l_1	[Э] [Г,270] [Фл,530]			
l_p, $1<p<\infty$	[Э] [Фл,530]			
l_∞	[Фл,530]			
c	[Э] [Г,273]			
c_0	[Гр,168]*			
$B(S)$	[А,146] [Га] [К,238]	[ФК,90] [В,295]	[В,300]	
$B(S, \Sigma)$	[А,146] [Га]	[ФК,90] [В,295]	[В,300]	

Таблица VIA

Общий вид линейного оператора (продолжение)

	L_∞	l_1	l_p, $1 < p < \infty$	l_∞	c
Общее B-пространство	[БТ,942–943] [Г,279]	[Э] [КВ,128] [КоД,698]*b* [ИС] [Фл,531] [Г,271] [П,424]*r*	[Э] [ИС] [КВ,128] [Фл,531]	[ИС]	[Э] [ИС]
C					
L_1	[ДП,348–350] [Г,279] [В,288]	[Д,486]	[Д,486] [Ву,42]		
L_p, $1<p<\infty$		[П,425]	[КВ,131]		
L_∞					
l_1		[Г,270] [Л,85]	[КоД,697]		
l_p, $1<p<\infty$		[КоД,699] [П,425]	[К,272] [Вул]		
l_∞				[Ко,334]	
c					
c_0		[КоД,699]			
$B(S)$	[В,300]				
$B(S, \Sigma)$	[В,300]				

	$B(S)$	$B(S, \Sigma)$	BV	C^n
Общее B-пространство	[Б] [ИС] [Фл,538]			[Фт,270] [Фт,272]*r*
C				
L_1		[В,278]	[ДП,352—357] [Г,278] [В,279] [К,262] [Ка,106]	[Фт,277]
L_p				[Фт,277]
L_∞				
l_1				[Фт,274]
l_p, $1 < p < \infty$				[Фт,274]
l_∞				
c				[Фт,274]
c_0				
$B(S)$			[В,296]	
$B(S, \Sigma)$		[В,294]	[В,296]	

Таблица VIB

Общий вид вполне непрерывного оператора

	Общее B-пространство	C	L_1	L_p, $1<p<\infty$	L_∞
Общее B-пространство	[КоД,693]b [М]b	[Б] [Г,267]			
C	[БДШ] [Г,282] [Фл,537]	[БДШ] [Фш] [Ра]			
L_1	[ДП,369]r [ДП,369] [Г,277] [Фл,529] [Фл,534] [Фл,536]		[ДП,370] [ДП,379] [Г,278]	[Д,490] [ДП,369—370] [ДП,379—380] [Г,278]	[ДП,370] [ДП,379] [ДП,381]
L_p $1<p<\infty$	[ДП,383] [Фл,529] [Фл,536]	[Г,268]	[Д,487] [ДП,384]	[Д,487] [ДП,384] [ХТ,446] [См]	[Д,492] [ДП,384]
L_∞	[Фл,529] [Фл,537]		[Д,487]	[Д,487]	
l_1	[Г,270] [Фл,530] [Фл,536]				
l_p $1<p<\infty$	[Фл,530] [Фл,536]			[См]	
l_∞	[Фл,530] [Фл,536]				
c					
c_0					

Общий вид вполне непрерывного оператора (продолжение)

	l_1	l_p, $1 < p < \infty$	l_∞	c	c_0	BV	C^n
Общее B-пространство C	[Г,271] [Фл,531] [П,424]r	[Фл,531]				[Г,284]	[Фт,272]
L_1	[КоД,700]	[КоД,700]					[Фт,280]
L_p $1<p<\infty$	[П,425]	[См]					[Фт,280]
L_∞							
l_1	[Ко,327–329] [Г,271] [Л,85]	[Ко,327] [КоД,697]			[КоД,697]		
l_p $1<p<\infty$		[Ко,327–328] [КоД,694—695] [См]					[Фт,275]
l_∞							
c				[КоД,692]	[Ко,329]		[Фт,275]
c_0							

Таблица VIC

Общий вид линейных операторов в упорядоченных пространствах

	Общее B-пространство	Упорядоченное пространство	C	L_1	L_p, $1 < p < \infty$
Упорядоченное пространство				[КВ,138—139]	[ИС] [КВ,138—139] [КВ,151]s
C		[Кр]p [К,241]		[КВ,154]	[КВ,154]
L_1		[Ка,103] [К,255—256] [КВ,140]	[КВ,154]	[К,259] [КВ,154] [В,286]	[К,259] [К,264]
L_p $1 < p < \infty$		[К,273] [Ка,104]		[КВ,153]	[К,275] [КВ,153]
L_∞	[А,147]	[Ка,104] [К,247] [К,250]		[К,252—253] [КВ,148]	[К,252]
l_1		[Ка,102]			
l_p $1 < p < \infty$		[К,269] [Ка,102]			
$B(S)$	[А,147] [К,254]	[К,237]			
$B(S, \Sigma)$	[А,147]	[К,237]			

	L_∞	l_1	l_p, $1 < p < \infty$	$B(S)$	BV
Упорядоченное пространство	[КВ,157] [КВ,158] [КВ,161]		[КВ,128] [КВ,130]		
C	[КВ,163]	[КВ,133]	[КВ,133]		
L_1			[К,258] [Ка,105]		[К,262] [В,279]
L_p $1 < p < \infty$	[КВ,162]				[Ка,106]
L_∞	[Фи,218] [К,245] [КВ,158] [О,76]				
l_1					
l_p $1 < p < \infty$		[КВ,132]	[К,272] [КВ,132]		
$B(S)$				[К,245]	
$B(S, \Sigma)$					

Таблица VID

Общий вид слабо вполне непрерывного оператора

	Общее B-пространство	C	L_1	L_∞
Общее B-пространство		[Б] [С,87]		
C	[БДШ] [Гр,167—168]* [Гр,173]* [С,93]s	[БДШ] [С,88]	[С,93]	
L_1	[ДП,368—369] [ДП,375]s [Фл,534] [Фп,131]	[С,88]	[ДП,378]	[ДП,381]
L_∞	[Гр,140]* [Гр,155]*			
l_1	[ДП,368]	[С,88]		

$\mathfrak{X}_0$ в $\mathfrak{Y}$, то найдется пространство $\mathfrak{W} \supset \mathfrak{X}$ и продолжение $\overline{T} : \mathfrak{X} \to \mathfrak{W}$, тоже взаимно однозначное и имеющее ту же самую норму, что и T.

Келли [2] рассматривал двойственную проблему: чем характеризуется вещественное B-пространство $\mathfrak{X}$, обладающее тем свойством, что ограниченный линейный оператор, отображающий замкнутое подпространство произвольного B-пространства $\mathfrak{Y}$ в $\mathfrak{X}$, без увеличения нормы продолжается на все $\mathfrak{Y}$? Он показал, что $\mathfrak{X}$ эквивалентно $C(S)$, где S — вполне разрывное бикомпактное хаусдорфово пространство. Это обобщает ранее полученный результат Нахбина [3] и Гуднера [1].

Библиография. Акилов [1, 2], Гуднер [1], Какутани [6], Келли [2], Нахбин [3], Собчик [3], Тейлор [1], Филлипс [3].

ГЛАВА VII

Общая спектральная теория

В первом параграфе этой главы мы увидим, что изучение многочленов от оператора в конечномерном унитарном пространстве приводит к довольно полному описанию аналитической структуры оператора и в то же время дает ясную геометрическую картину того, как оператор преобразует унитарное пространство, в котором он действует. При попытке провести аналогичное изучение оператора T в бесконечномерном комплексном B-пространстве мы сразу же сталкиваемся с необходимостью введения более широкой алгебры, чем алгебра многочленов от T. Теория конечномерного случая подсказывает нам, что полезное определение функции $f(T)$ от оператора T дается формулой Коши

$$f(T)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\lambda)}{\lambda - T}\,d\lambda,$$

где f — аналитическая скалярная функция, а C — соответственно выбранный контур. Придавая смысл этой формуле, мы, естественно, приходим к изучению вопросов о существовании и свойствах функции $(\lambda I - T)^{-1}$. Будет показано, что $(\lambda I - T)^{-1}$ определена и аналитична всюду в λ-плоскости, кроме некоторого компактного множества, которое называется *спектром оператора* T. Все общие понятия и методы, вводимые в этой главе, сосредоточены вокруг понятия спектра оператора. Именно по этой причине термин «спектральная теория» используется в названии главы.

Настоящая глава — коренной поворотный пункт в нашем исследовании. До сих пор наши усилия были направлены на топологическую сторону теории операторов. Теоретико-функциональный и алгебраический аппарат, вводимый здесь, сделает возможным дальнейший детальный анализ операторов.

1. Спектральная теория в конечномерном пространстве

На протяжении всего этого параграфа $\mathfrak{X}$ будет обозначать конечномерное комплексное B-пространство, а T — линейный оператор из $B(\mathfrak{X})$. Наша цель — изучить алгебраические и топологические свойства T. Это достигается — здесь и в более общей теории следующих параграфов — изучением некоторого класса функций оператора T. Символ I обозначает единичный оператор в $\mathfrak{X}$; T^0, по определению, равно I.

1. Определение. Если $P(\lambda)=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i\lambda^i$ — многочлен с комплексными коэффициентами, то символом $P(T)$ обозначается сумма

$$\sum_{i=0}^{n}\alpha_i T^i=\alpha_n T^n+\ldots+\alpha_1 T+\alpha_0 I.$$

Наша первая задача — выяснить, когда два многочлена определяют одну и ту же функцию T.

2. Определение. *Спектром* $\sigma(T)$ оператора T в конечномерном B-пространстве называется множество комплексных чисел λ, таких, что оператор $\lambda I—T$ отображает B-пространство не взаимно однозначно. *Индекс* $\nu(\lambda)$ комплексного числа λ есть наименьшее неотрицательное целое число ν, такое, что $(\lambda I—T)^{\nu}x=0$ для любого вектора x, для которого $(\lambda I-T)^{\nu+1}x=0$.

Отсюда следует, что если $\lambda_0\in\sigma(T)$, то существует $x_0\neq 0$, такой, что $(T—\lambda_0 I)x_0=0$. Число λ_0 часто называют *собственным значением* T, а любой такой вектор x_0 называют *собственным вектором*.

Для каждого неотрицательного целого числа n и комплексного числа λ определим линейное многообразие $\mathfrak{N}_\lambda^n=\{x\mid (T-\lambda I)^n x=0\}$. Тогда индекс $\nu(\lambda)$ есть наименьшее целое число ν, такое, что $\mathfrak{N}_\lambda^{\nu+1}=\mathfrak{N}_\lambda^{\nu}$. Заметим, что $\mathfrak{N}_\lambda^n=\mathfrak{N}_\lambda^{\nu(\lambda)}$ для $n\geqslant\nu(\lambda)$. Так как $\mathfrak{X}$ имеет конечную размерность, то в последовательности $\mathfrak{N}_\lambda^0\subseteq\mathfrak{N}_\lambda^1\subseteq\mathfrak{N}_\lambda^2\subseteq\ldots$ может быть только конечное число собственных включений, и, следовательно, $\nu(\lambda)\leqslant\dim\mathfrak{X}$ для всех λ. Заметим, что $\lambda\in\sigma(T)$ тогда и только тогда, когда $\nu(\lambda)>0$. Например, оператор T в двумерном пространстве, задаваемый матрицей $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, имеет спектр $\sigma(T)=\{0\}$ и индекс $\nu(0)=2$.

3. Теорема. *Если P и Q — многочлены, то $P(T)=Q(T)$ тогда и только тогда, когда $P—Q$ имеет нуль порядка $\geqslant\nu(\lambda)$ в каждой точке λ из $\sigma(T)$.*

Доказательство. Ясно, что достаточно рассмотреть случай $Q=0$. Пусть $\mathfrak{X}$ k-мерно и $\{x_1, \ldots, x_k\}$ — его базис. Тогда $k+1$ векторов $x_1, Tx_1, \ldots, T^k x_1$ должны быть линейно зависимы, так что существует ненулевой многочлен S_1, такой, что $S_1(T)x_1=0$. Точно так же существуют ненулевые многочлены S_i, $i=2, \ldots, k$, такие, что

$S_i(T)x_i=0$. Если $R=S_1\cdot S_2\ldots S_k$, то $R(T)x_i=0$ и, следовательно, $R(T)x=0$ для всех $x\in\mathfrak{X}$. Таким образом, существует ненулевой многочлен R, такой, что $R(T)=0$. Пусть $R(\lambda)=\beta\prod_{i=1}^{m}(\lambda-\lambda_i)^{\alpha_i}$ — разложение многочлена R на множители. Если $\lambda_i\notin\sigma(T)$, то соотношение $(T-\lambda_i I)x=0$ влечет равенство $x=0$. Следовательно, для произведения R_1 всех множителей $(\lambda-\lambda_i)^{\alpha_i}$ в R, таких, что $\lambda_i\in\sigma(T)$, все еще выполнено равенство $R_1(T)=0$. Аналогично равенство $R_2(T)=0$ все еще выполнено для произведения R_2 всех множителей $(\lambda-\lambda_i)^{\beta_i}$, где $\beta_i=\min(\alpha_i,\nu(\lambda_i))$. Так как любой многочлен P, имеющий нуль порядка $\geqslant\nu(\lambda)$ при всех $\lambda\in\sigma(T)$, делится на R_2, то для любого такого многочлена выполнено равенство $P(T)=0$.

Чтобы доказать обратное утверждение, предположим, что $P(T)=0$, где $P(\lambda)=\beta\prod_{i=1}^{p}(\lambda-\lambda_i)^{\alpha_i}$. Как и в первой части теоремы, можно считать, что все $\lambda_i\in\sigma(T)$. Покажем теперь, что $\sigma(T)=\{\lambda_1,\ldots,\lambda_p\}$. Действительно, если $\lambda_0\in\sigma(T)$, то $Ty=\lambda_0 y$ для некоторого вектора $y\neq 0$. Тогда $P(T)y=P(\lambda_0)y$, и так как $P(T)=0$, то $P(\lambda_0)=0$. Чтобы доказать, что $\alpha_1\geqslant\nu(\lambda_1)$, допустим, напротив, что $\alpha_1<\nu(\lambda_1)$, так что существует такой вектор $x_1\neq 0$, что $(T-\lambda_1 I)^{\alpha_1+1}x_1=0$ и $y_1=(T-\lambda_1 I)^{\alpha_1}x_1\neq 0$. Пусть $P(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{\alpha_1}Q(\lambda))$, где $Q(\lambda_1)\neq 0$. Так как $Ty_1=\lambda_1 y_1$, $P(T)x_1=Q(T)y_1=Q(\lambda_1)y_1\neq 0$, что противоречит условию $P(T)=0$. Аналогично $\alpha_i\geqslant\nu(\lambda_i)$, $i=2,\ldots,p$, так что P имеет корни порядка $\geqslant\nu(\lambda)$ при всех $\lambda\in\sigma(T)$, ч. т. д.

4. Следствие. *Спектр оператора в конечномерном пространстве есть непустое конечное множество точек.*

Доказательство. Это утверждение следует из теоремы 3. Мы видели, что T всегда удовлетворяет уравнению $P(T)=0$, где $P(\lambda)$ — ненулевой многочлен, корни которого суть точки спектра оператора T, ч. т. д.

Теорема 3 позволяет нам определить оператор $f(T)$ для функций f более общей природы, чем многочлены. Пусть $\mathcal{F}(T)$ — класс всех функций комплексного переменного λ, аналитических в некотором открытом множестве, содержащем $\sigma(T)$. Это открытое множество не обязано быть связным и может меняться вместе с функцией из $\mathcal{F}(T)$. Пусть $f\in\mathcal{F}(T)$, и пусть P — такой многочлен, что $f^{(m)}(\lambda)=P^{(m)}(\lambda)$, $m\leqslant\nu(\lambda)-1$; для всех $\lambda\in\sigma(T)$. Положим $f(T)=P(T)$. Из теоремы 3 следует, что такое определение оператора $f(T)$ однозначно. Следующая теорема немедленно вытекает из соответствующих результатов для многочленов.

5. Теорема. *Если* $f,\ g \in \mathcal{F}(T)$ *и* $\alpha,\ \beta$ — *комплексные числа, то*

(a) $\alpha f + \beta g$ *принадлежит* $\mathcal{F}(T)$ *и* $(\alpha f + \beta g)(T) = \alpha f(T) + \beta g(T)$;

(b) $f \cdot g$ *принадлежит* $\mathcal{F}(T)$ *и* $(f \cdot g)(T) = f(T)\,g(T)$;

(c) *если* $f(\lambda) = \sum_{n=0}^{m} \alpha_n \lambda^n$, *то* $f(T) = \sum_{n=0}^{m} \alpha_n T^n$;

(d) $f(T) = 0$ *тогда и только тогда, когда*

$$f^{(m)}(\lambda) = 0,\quad \lambda \in \sigma(T),\quad 0 \leqslant m \leqslant \nu(\lambda) - 1.$$

Заметим, что из (b) вытекает соотношение $f(T)\,g(T) = g(T)\,f(T)$ для всех $f,\ g \in \mathcal{F}(T)$.

Пусть λ_0 — комплексное число, и пусть функция $e_{\lambda_0}(\lambda)$ тождественно равна единице в некоторой окрестности точки λ_0 и тождественно равна нулю в некоторой окрестности каждой точки из $\sigma(T) \cap \{\lambda_0\}'$. Положим $E(\lambda_0) = e_{\lambda_0}(T)$. Следующая теорема непосредственно вытекает из теоремы 5.

6. Теорема. (a) $E(\lambda_0) \neq 0$ *тогда и только тогда, когда* $\lambda_0 \in \sigma(T)$;

(b) $E(\lambda_0)^2 = E(\lambda_0)$ *и* $E(\lambda_0)\,E(\lambda_1) = 0$ *для* $\lambda_0 \neq \lambda_1$;

(c) $I = \sum_{\lambda \in \sigma(T)} E(\lambda)$.

Пусть $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ — некоторая нумерация точек спектра $\sigma(T)$, и пусть $\mathfrak{X}_i = E(\lambda_i)\,\mathfrak{X}$. Из утверждений (b) и (c) теоремы 6 вытекает, что

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{X}_k.$$

Более того, так как $TE(\lambda_i) = E(\lambda_i)\,T$, то $T\mathfrak{X}_i \subseteq \mathfrak{X}_i$, $i = 1, \ldots, k$. Таким образом, разложению спектра $\sigma(T)$ на k точек соответствует разложение $\mathfrak{X}$ в прямую сумму k подпространств, каждое из которых отображается в себя оператором T. Поэтому изучение отображения T во всем $\mathfrak{X}$ может быть сведено к изучению T в каждом из подпространств $\mathfrak{X}_i$. Так как функция $(\lambda_i - \lambda)^{\nu(\lambda_i)}\,e_{\lambda_i}(\lambda)$ имеет нуль порядка $\nu(\lambda)$ в каждой точке λ из $\sigma(T)$, то оператор $(\lambda_i I - T)^{\nu(\lambda_i)}\,E(\lambda_i) = 0$. Таким образом, в каждом пространстве $\mathfrak{X}_i$ оператор T равен сумме оператора $\lambda_i I$, кратного единичному, и нильпотентного оператора $T - \lambda_i I$. Такое разложение пространства $\mathfrak{X}$ в прямую сумму может быть весьма полезным при изучении различных свойств оператора T. Теорема 7 выясняет соотношение между индексом $\nu(\lambda)$ точки из $\sigma(T)$ и соответствующим проектором $E(\lambda)$.

7. Теорема. *Если* $\lambda \in \sigma(T)$, *то*

$$E(\lambda)\,\mathfrak{X} = \mathfrak{N}_\lambda^{\nu(\lambda)} = \{x \mid (T - \lambda I)^{\nu(\lambda)}\,x = 0\}.$$

Доказательство. В предыдущем абзаце было доказано, что если $\lambda \in \sigma(T)$, то $(\lambda I - T)^{\nu(\lambda)}\,E(\lambda) = 0$. Поэтому $E(\lambda)\,\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{N}_\lambda^{\nu(\lambda)}$.

Так как $\sum_{\lambda\in\sigma(T)} E(\lambda)=I$, то для доказательства обратного включения достаточно проверить, что $\mathfrak{N}_\lambda^{\nu(\lambda)}\cap\mathfrak{N}_\mu^{\nu(\mu)}=\{0\}$ для $\lambda\neq\mu$, $\lambda,\mu\in\sigma(T)$.

Предположим, что существует $x\neq 0$, $x\in\mathfrak{N}_\lambda^{\nu(\lambda)}\cap\mathfrak{N}^{<(\mu)}$. Пусть α, $0\leqslant\alpha<\nu(\lambda)$, — наибольшее целое число, такое, что $z=(T-\lambda I)^\alpha x\neq 0$. Тогда $Tz=\lambda z$ и $(T-\mu I)^{\nu(\mu)}z=(\lambda-\mu)^{\nu(\mu)}z\neq 0$. С другой стороны,

$$(T-\mu I)^{\nu(\mu)}z=(T-\mu I)^{\nu(\mu)}(T-\lambda I)^\alpha x=(T-\lambda I)^\alpha(T-\mu I)^{\nu(\mu)}x=0,$$

так как $x\in\mathfrak{N}_\mu^{\nu(\mu)}$. Следовательно, x должен быть нулем, ч. т. д.

Проекторы $E(\lambda)$ определяют очень полезное разложение $\mathfrak{X}$ в прямую сумму и позволяют нам дать простое аналитическое выражение для функций оператора T.

8. Теорема. *Если* $f\in\mathcal{F}(T)$, *то*

$$f(T)=\sum_{\lambda\in\sigma(T)}\sum_{i=0}^{\nu(\lambda)-1}\frac{(T-\lambda I)^i}{i!}f^{(i)}(\lambda)E(\lambda).$$

Доказательство. Эта формула непосредственно вытекает из теоремы 5, так как f и функция $g\in\mathcal{F}(T)$, определенная равенством

$$g(\mu)=\sum_{\lambda\in\sigma(T)}\sum_{i=0}^{\nu(\lambda)-1}\frac{(\mu-\lambda)^i}{i!}f^{(i)}(\lambda)e_\lambda(\mu),$$

удовлетворяют соотношениям $f^{(m)}(\lambda)=g^{(m)}(\lambda)$, $m\leqslant\nu(\lambda)-1$, для $\lambda\in\sigma(T)$, ч. т. д.

Теорема 8 дает удобный способ явного вычисления функций от T и имеет ряд интересных теоретических приложений.

9. Теорема. *Пусть* $f_n\in\mathcal{F}(T)$. *Для того чтобы последовательность* $\{f_n(T)\}$ *сходилась, необходимо и достаточно, чтобы последовательности* $\{f_n^{(m)}(\lambda)\}$, $0\leqslant m\leqslant\nu(\lambda)-1$, *сходились в точках* $\lambda\in\sigma(T)$. *Если* $f\in\mathcal{F}(T)$, *то* $f_n(T)\to f(T)$ *в том и только в том случае, когда* $f_n^{(m)}(\lambda)\to f^{(m)}(\lambda)$, $0\leqslant m\leqslant\nu(\lambda)-1$, для $\lambda\in\sigma(T)$.

Доказательство. Достаточность первого условия непосредственно вытекает из теоремы 8. Обратно, предположим, что $\{f_n(T)\}$ сходится, и пусть $\lambda\in\sigma(T)$. Так как $(T-\lambda I)^{\nu(\lambda)-1}E(\lambda)\neq 0$, найдется x, такой, что $(T-\lambda I)^{\nu(\lambda)-1}E(\lambda)x\neq 0$. Пусть $y=E(\lambda)x$ и $y_k=(T-\lambda I)^k y$ для $0\leqslant k\leqslant\nu(\lambda)-1$. Положим $\nu(\lambda)-1=r$. Тогда $f_n(T)y_r=f_n(\lambda)y_r$, так что последовательность $\{f_n(\lambda)\}$ сходится. Аналогично $f_n(T)y_{r-1}=$ $=f_n(\lambda)y_{r-1}+f_n'(\lambda)y_r$, так что и $\{f_n'(\lambda)\}$ сходится. По индукции мы устанавливаем, что $\{f_n^{(m)}(\lambda)\}$ сходится при каждом $m\leqslant\nu(\lambda)-1$. Второе утверждение доказывается таким же способом, ч. т. д.

10. Теорема. *Пусть f из $\mathscr{F}(T)$ аналитична в области, содержащей замыкание открытого множества U, содержащего $\sigma(T)$; предположим, что B — граница U — состоит из конечного числа замкнутых спрямляемых жордановых кривых, положительно ориентированных в обычном смысле теории функций комплексного переменного. Тогда $f(T)$ может быть выражена интегралом по контуру B следующим образом*:

$$f(T)=\frac{1}{2\pi i}\int_B f(\lambda)(\lambda I-T)^{-1}\,d\lambda.$$

Доказательство. Пусть $\lambda\notin\sigma(T)=\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$, и пусть $r(\xi)=(\lambda-\xi)^{-1}$. Согласно теоремам 5 и 8,

$$(\lambda I-T)^{-1}=r(T)=\sum_{j=1}^{k}\sum_{\nu=0}^{\nu(\lambda_j)-1}\frac{(T-\lambda_j I)^{\nu}}{(\lambda-\lambda_j)^{\nu+1}}E(\lambda_j).$$

Таким образом, если $f\in\mathscr{F}(T)$, то

$$\frac{1}{2\pi i}\int_B f(\lambda)(\lambda I-T)^{-1}\,d\lambda=\sum_{j=1}^{k}\sum_{\nu=0}^{\nu(\lambda_j)-1}(T-\lambda_j I)^{\nu}\frac{f^{(\nu)}(\lambda_j)}{\nu!}E(\lambda_j)=f(T),$$

ч. т. д.

Проиллюстрируем несколькими примерами предыдущие теоремы.

(a) Положим $f_n(\lambda)=n^{-1}\sum_{m=0}^{n-1}\lambda^m$ и $g_n(\lambda)=\lambda^n/n$. Последовательность $\{f_n(\lambda)\}$ сходится тогда и только тогда, когда $|\lambda|\leqslant 1$, в то время как для $j>0$ $\{f_n^{(j)}(\lambda)\}$ сходится тогда и только тогда, когда $|\lambda|<1$. Очевидно, что ограничения на λ, при которых $g_n(\lambda)\to 0$ и $g_n^{(j)}(\lambda)\to 0$ при $j>0$, точно те же. Поэтому из теоремы 9 вытекает, что для сходимости последовательности $\{n^{-1}\sum_{m=0}^{n-1}T^m\}$ необходимо и достаточно, чтобы $\{T^n/n\}$ стремилась к нулю, и что этот случай имеет место тогда и только тогда, когда $|\sigma(T)|\leqslant 1$ и $\nu(\lambda_0)=1$, если $\lambda_0\in\sigma(T)$ и $|\lambda_0|=1$.

(b) Пусть механическая тасовка колоды карт проводится так, что существует определенная вероятность p_{ij} того, что карта, первоначально находившаяся на i-м месте, после тасовки окажется на j-м месте. Предположим, что эта вероятность p_{ij} не зависит от предыдущих тасовок. Пусть $p_{ij}^{(n)}$ — вероятность того, что карта, первоначально находившаяся на i-м месте, окажется на j-м месте после n тасовок, и пусть $p_{ij}^{(0)}=\delta_{ij}$. Мы докажем существование предела

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{\nu=0}^{n-1}p_{ij}^{(\nu)},\quad i, j=1, 2, \ldots, 52.$$

Имеется 52 различных пути, по которым карта, первоначально находившаяся на i-м месте, может перейти на j-е место за две тасовки; она может попасть на первое место после первой тасовки и потом с первого места на j-е, или она может попасть на второе место и потом на j-е, и т. д. Таким образом,

$$p_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^{52} p_{ik} p_{kj}.$$

Подобное индуктивное рассуждение показывает, что $p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{52} p_{ik}^{(n)} p_{kj}$ для $n = 0, 1, \ldots$. Матрица $P = (p_{ij})$ определяет в E^{52} линейное преобразование, ее n-я степень $P^n = (p_{ij}^{(n)})$. Поскольку $0 \leqslant p_{ij}^{(n)} \leqslant 1$, то $P^n/n \to 0$. Предыдущий пример показывает, что $n^{-1} \sum_{\nu=0}^{n-1} p_{ij}^{(\nu)}$ сходится.

(c) Для любого числа t функция $e^{\lambda t}$ — целая функция по λ и потому принадлежит $\mathcal{F}(T)$. Более того,

$$\lim_{h \to 0} \frac{d^n}{d\lambda^n} \frac{e^{\lambda(t+h)} - e^{\lambda t}}{h} = \frac{d^n}{d\lambda^n} (\lambda e^{\lambda t}), \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Следовательно, по теореме 9, $(d/dt) e^{tA} = A e^{tA}$ для всех матриц A в E^m. Так как $e^{-tA} e^{tA} = I$, то столбцы матрицы e^{tA} образуют систему m линейно независимых решений уравнения $dy/dt = Ay$.

(d) Если оператор T таков, что $\nu(\lambda) = 1$ для $\lambda \in \sigma(T)$, то из теоремы 8 находим

$$f(T) = \sum_{i=1}^{k} f(\lambda_i) E(\lambda_i).$$

Мы покажем теперь, что $\nu(\lambda) = 1$ для $\lambda \in \sigma(T)$, если T — *эрмитова матрица* в конечномерном гильбертовом пространстве E^n, то есть если T удовлетворяет тождеству $(Tx, y) = (x, Ty)$ для всех $x, y \in E^n$. Действительно, если матрица T эрмитова и $(T - \lambda I) x = 0$ для некоторого $x \neq 0$, то $(Tx, x) = \lambda (x, x)$. Так как $(Tx, x) = (x, Tx) = \overline{(Tx, x)}$, то отсюда следует, что λ вещественно; поэтому $\sigma(T)$ — подмножество вещественной оси. Пусть теперь $\lambda \in \sigma(T)$, и пусть $(T - \lambda I)^2 y = 0$. Так как λ вещественно, то $((T - \lambda I)^2 y, y) = ((T - \lambda I) y, (T - \lambda I) y) = |(T - \lambda I) y|^2 = 0$, так что $(T - \lambda I) y = 0$. Следовательно, $\nu(\lambda) = 1$ для всех $\lambda \in \sigma(T)$.

2. Упражнения

1. Пусть T — матрица и $\Delta(\lambda)$ — определитель матрицы $\lambda I - T$. Показать, что $\lambda \in \sigma(T)$ тогда и только тогда, когда λ есть корень алгебраического уравнения $\Delta(\lambda) = 0$. Многочлен $\Delta(\lambda)$ называется *характеристическим многочленом* матрицы T.

2. Пусть T — линейный оператор в конечномерном пространстве; показать, что два любых матричных представления T имеют один и тот же характеристический многочлен. Это позволит нам говорить вполне определенно о характеристическом многочлене линейного оператора.

3. Пусть T — линейный оператор в конечномерном пространстве и $\mu \in \sigma(T)$; обозначим через T_μ сужение T на подпространство $\mathfrak{N}_\mu^{\nu(\mu)}$. Пусть $\Delta_\mu(\lambda)$ — характеристический многочлен оператора T_μ. Показать, что

(a) $\Delta_\mu(\lambda) = (\lambda - \mu)^{n(\mu)}$, где $n(\mu) = \dim \mathfrak{N}_\mu^{\nu(\mu)}$;

(b) $\nu(\mu) \leqslant n(\mu)$;

(c) $\Delta(\lambda) = \prod\limits_{\mu \in \sigma(T)} \Delta_\mu(\lambda)$.

4. (Гамильтон — Кэли.) Показать, что любое линейное преобразование в конечномерном пространстве удовлетворяет своему характеристическому уравнению, т. е. $\Delta(T) = 0$.

5. Пусть

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицы A и B, для которых выполнены соотношения:

$$A^4 = T^3, \quad T = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n}{n!}.$$

Сколько таких матриц можно найти?

6. Пусть $\sigma(T) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$. Показать, что если $\nu(\lambda_i) = 1$, $i = 1, \ldots, k$, и $f \in \mathcal{F}(T)$, то

$$f(T) = \sum_{i=1}^{k} \frac{f(\lambda_i)}{m'(\lambda_i)} \prod_{j \neq i} (T - \lambda_j I),$$

где $m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \ldots (\lambda - \lambda_k)$.

7. Пусть $\mathfrak{N}_\lambda^j = \{x \mid (T - \lambda I)^j x = 0\}$. Показать, что $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}_\lambda^j \oplus \oplus (T - \lambda I)^j \mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда $j \geqslant \nu(\lambda)$.

8. Пусть $E = \lim\limits_n n^{-1} \sum\limits_{i=0}^{n-1} T^i$; показать, что $E^2 = E$, $ET = TE$, $E(\mathfrak{X}) = \{x \mid x \in \mathfrak{X},\ Tx = x\}$ и $(I - E)(\mathfrak{X}) = \{x \mid x \in \mathfrak{X},\ x = (I - T) y\}$.

9. Показать, что функция $|(\lambda - \lambda_0)^j (\lambda I - T)^{-1}|$ ограничена в окрестности λ_0 тогда и только тогда, когда $j \geqslant \nu(\lambda_0)$.

10. Пусть $f \in \mathcal{F}(T)$, $g \in \mathcal{F}(f(T))$ и $F(\xi) = g(f(\xi))$. Тогда $F \in \mathcal{F}(T)$ и $F(T) = g(f(T))$.

11. Пусть $f \in \mathcal{F}(T)$ и $f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \lambda^n$. Найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы $f(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n T^n$.

12. Если для некоторого действительного числа $r < 2$ элементы матрицы $\lambda^r (\lambda I - T)^{-1}$ ограничены при $0 \neq |\lambda| < \varepsilon$, то что можно сказать о существовании предела $\lim_{\lambda \to 0} \lambda (\lambda I - T)^{-1}$?

13. Спектры $\sigma(T)$ и $\sigma(T^*)$ совпадают. Кроме того, $f(T^*) = f(T)^*$ для $f \in \mathcal{F}(T)$.

14. Оператор T в конечномерном гильбертовом пространстве называется *нормальным*, если $TT^* = T^*T$, где T^* — гильбертов сопряженный к T оператор, определяемый тождеством $(Tx, y) = (x, T^*y)$. Показать, что если оператор T нормален, то $\nu(\lambda) = 1$ для $\lambda \in \sigma(T)$.

15. Если $\lambda \notin \sigma(T)$, то область определения оператора $(\lambda I - T)^{-1}$ есть все $\mathfrak{X}$.

16. Пусть $\mathfrak{X}$ имеет размерность n. Пусть для T выполнено соотношение $T^n = 0$; показать, что существуют базис $\{x_1, \ldots, x_n\}$ в $\mathfrak{X}$ и множество целых чисел $n_0, \ldots, n_k$, $1 \leqslant n_0 < n_1 < \ldots < n_k = n$, такие, что $Tx_i = x_{i+1}$, если i не равно одному из чисел n_j, и $Tx_i = 0$ в противном случае.

17. (Жордан.) Пусть $\mathfrak{X}$ имеет размерность n. Показать, что существуют базис $\{x_1, \ldots, x_n\}$ в $\mathfrak{X}$, множество целых чисел $n_0, \ldots, n_k$, $0 = n_0 < n_1 < \ldots < n_k = n$, и перенумерация (с возможными повторениями) $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ спектра $\sigma(T)$, такие, что $Tx_i = \lambda_j x_i + x_{i+1}$ для $n_{j-1} < i < n_j$, $Tx_{n_j} = \lambda_j x_{n_j}$.

18. Пусть B — булевская алгебра множеств комплексной плоскости, а B_1 — булевская алгебра проекторов, порожденная проекторами $E(\lambda_1), \ldots, E(\lambda_k)$. Определим отображение $E: B \to B_1$, полагая $E(\sigma) = 0$, если $\sigma \cap \sigma(T)$ пусто, а в противном случае приравнивая $E(\sigma)$ сумме всех $E(\lambda_i)$, таких, что $\lambda_i \in \sigma$. Показать, что

(I) E есть гомоморфизм и $E(\sigma(T)) = I$;

(II) $E(\sigma)T = TE(\sigma)$, $\sigma \in B$;

(III) спектр T, рассматриваемого как оператор в $E(\sigma)\mathfrak{X}$, содержится в σ.

Кроме того, показать, что никакое другое отображение E алгебры B в B_1 не удовлетворяет условиям (I), (II) и (III).

19. Найти общее решение дифференциального уравнения $y' = Ty$, где T — матрица упражнения 5.

Следующие десять упражнений посвящены теории устойчивости систем n линейных однородных дифференциальных уравнений $dy(t)/dt = A(t)y$. Здесь $A(t) = (a_{ij}(t))$ есть комплексная $n \times n$ матрица, непрерывно зависящая от вещественного переменного $t \in I$: $-\infty \leqslant \alpha < t < \beta \leqslant +\infty$, а решение является комплексным вектором (столбцом) $y(t) \in E^n$, дифференцируемым и удовлетворяющим системе дифференциальных уравнений при всех $t \in I$. Теория дифференциальных уравнений обеспечивает нам для каждого $t_0 \in I$ и каждого $y_0 \in E^n$ существование единственного решения $y(t)$, такого, что $y(t_0) = y_0$.

20. Показать, что решения системы дифференциальных уравнений $dy/dt = A(t)\, y$ образуют n-мерное комплексное линейное векторное пространство.

21. Рассмотреть матричное дифференциальное уравнение $dY/dt = A(t)\, Y$, решение которого есть комплексная $n \times n$ матрица $Y(t)$, дифференцируемая и удовлетворяющая дифференциальному уравнению при всех $t \in I$. Показать, что для всех $t_0 \in I$ и всех комплексных (постоянных) матриц Y_0 существует единственное матричное решение $Y(t)$, такое, что $Y(t_0) = Y_0$. Показать, что множество векторных решений $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ уравнения $dy/dt = A(t)\, y$ образует базис в пространстве решений тогда и только тогда, когда они являются столбцами матричного решения $Y(t)$ уравнения $dY/dt = A(t)\, Y$, соответствующего *невырожденной* начальной матрице Y_0.

22. Показать, что если $\int_{t_0}^{t} A(s)\, ds$ и $A(t)$ коммутируют при всех $t \in I$, то матричное решение уравнения $dY/dt = A(t)\, Y$ с начальным условием $Y(t_0) = Y_0$ дается формулой $Y(t) = \left[\exp \int_{t_0}^{t} A(s)\, ds\right] Y_0$. Показать, что если матричная функция $A(t)$ постоянна или диагональна (т. е. все элементы, лежащие вне главной диагонали, равны нулю), то приведенная выше формула для $Y(t)$ верна.

23. Система дифференциальных уравнений $dy/dt = A(t)\, y$, где $\alpha < t < \beta = \infty$, называется устойчивой, если каждое ее решение ограничено при $t \to \infty$, т. е. $\overline{\lim\limits_{t \to \infty}} |y(t)| < \infty$. Показать, что если матричная функция $A(t) = A$ постоянна, то система устойчива тогда и только тогда, когда ни одна точка $\sigma(A)$ не имеет положительной вещественной части и в то же время для всех чисто мнимых $\lambda \in \sigma(A)$ выполнено условие $\nu(\lambda) = 1$. Показать, что $\overline{\lim\limits_{t \to \infty}} |y(t)| = 0$ для всех решений в том и только в том случае, если $\operatorname{Re} \sigma(A) < 0$.

24. Пусть $Y(t)$ — матричное решение уравнения $dY/dt = A(t)\, Y$; показать, что

$$(d/dt)[\det Y(t)] = [\det Y(t)][\operatorname{tr} A(t)]$$

при всех $t \in I$, где $\operatorname{tr} A(t)$ равен сумме элементов главной диагонали. Показать, что матричное решение $Y(t)$ невырождено нигде на I, если оно невырождено в одной точке I.

25. Пусть $Y(t)$ — невырожденное матричное решение уравнения $dY/dt = A(t)Y$. Показать, что множество всех невырожденных матричных решений совпадает с совокупностью матриц вида $Y(t)C$, где C — любая $n \times n$ постоянная невырожденная матрица.

26. Пусть матричная функция $A(t)$ имеет период $p > 0$, т. е. $A(t+p) = A(t)$ для всех t, $-\infty < t < \infty$. Показать, что для любого невырожденного матричного решения $Y(t)$ уравнения $dY/dt = A(t)Y$ существует такая невырожденная постоянная матрица C, что $Y(t+p) = Y(t)C$. Показать, что соответствие $y(t) \to y(t+p)$ определяет невырожденное линейное преобразование T пространства решений уравнения $dy/dt = A(t)y$ на себя и что матрица преобразования T в базисе, образованном столбцами $Y(t)$, равна C.

27. Пусть A, Y и C те же, что и в упражнении 26, и пусть $P(t) = Y(t)\exp(-t/p \log C)$, $K = p^{-1}\log C$. Показать, что $X(t)$ есть невырожденное матричное решение уравнения $dX/dt = KX$ тогда и только тогда, когда $Z(t) = P(t)X(t)$ есть невырожденное матричное решение уравнения $dZ/dt = A(t)Z$. Показать, что вещественные части точек $\sigma(K)$ не зависят от определения $\log C$. Эти значения $\operatorname{Re}\sigma(K)$ называются характеристическими показателями матричной функции $A(t)$. Показать, что система $dy/dt = A(t)y$ устойчива в том и только в том случае, когда характеристические показатели $A(t)$ неположительны и в то же время для всех чисто мнимых $\lambda \in \sigma(K)$ выполнено условие $\nu(\lambda) = 1$. Для того чтобы каждое решение $y(t) \to 0$, необходимо и достаточно, чтобы все характеристические показатели $A(t)$ были отрицательны.

28. Предположим, что матричная функция $A(t)$ непрерывна и $\sup|a_{ij}(t)| < B$ для всех $\alpha < t < \infty$ при некоторой постоянной B. Показать, что $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\, t^{-1}\log|y_i(t)| = \lambda_i$, $|\lambda_i| < Bn$ для каждого векторного решения $y_i(t)$ уравнения $dy/dt = A(t)y$. Действительные числа λ_i, полученные таким образом, называются обобщенными характеристическими показателями $A(t)$ (характеристичными числами Ляпунова). Показать, что существует самое большее n различных обобщенных характеристических показателей и что дифференциальная система устойчива, если все λ отрицательны.

29. Пусть $A(t)$ постоянная или периодическая матрица; показать, что действительные части $\sigma(A)$ или характеристические показатели $A(t)$ соответственно совпадают с обобщенными характеристическими показателями $A(t)$.

3. Функции оператора

Во всей оставшейся части этой главы $\mathfrak{X}$ будет обозначать комплексное B-пространство, а T — ограниченный линейный оператор в $\mathfrak{X}$. *Мы исключаем тривиальный случай* $\mathfrak{X} = \{0\}$.

Если пространство $\mathfrak{X}$ бесконечномерно, то T не обязан удовлетворять уравнению $P(T)=0$, где P — ненулевой многочлен. Тем не менее построения теоремы 1.10 позволят нам обобщить многие результаты § 1 на бесконечномерный случай. Мы начнем с изучения функции $(\lambda I-T)^{-1}$.

1. Определение. *Резольвентное множество* $\varrho(T)$ оператора T есть множество комплексных чисел λ, для которых $(\lambda I-T)^{-1}$ существует и является ограниченным оператором, определенным на всем $\mathfrak{X}$. *Спектром* $\sigma(T)$ оператора T называется дополнение к множеству $\varrho(T)$. Функция $R(\lambda;\ T)=(\lambda I-T)^{-1}$, определенная на множестве $\varrho(T)$, называется *резольвентной функцией* T или просто *резольвентой* T.

→ 2. Лемма. *Резольвентное множество* $\varrho(T)$ *открыто. Функция* $R(\lambda;\ T)$ *аналитична в* $\varrho(T)$.

Доказательство. Пусть λ — фиксированная точка в $\varrho(T)$ и μ — любое комплексное число, такое, что $|\mu|<|R(\lambda;\ T)|^{-1}$. Покажем, что $\lambda+\mu\in\varrho(T)$. Эвристические соображения, основанные на аналогии с геометрической прогрессией, заставляют думать, что если оператор $(\lambda+\mu)I-T=\mu I+(\lambda I-T)$ имеет обратный, то он представим рядом

$$S(\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}(-\mu)^k(\lambda I-T)^{-(k+1)}=\sum_{k=0}^{\infty}(-\mu)^kR(\lambda;\ T)^{k+1}.$$

Так как $|\mu R(\lambda;\ T)|<1$, этот ряд сходится. Но, поскольку $S(\mu)$ коммутирует с T и

$$\begin{aligned}((\lambda+\mu)I-T)S(\mu)&=(\lambda I-T)S(\mu)+\mu S(\mu)=\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\{(-\mu R(\lambda;\ T))^k-(-\mu R(\lambda;\ T))^{k+1}\}=\\&=I,\end{aligned}$$

отсюда следует, что $\lambda+\mu\in\varrho(T)$ и что $R(\lambda+\mu;\ T)=S(\mu)$ аналитична в точке $\mu=0$, ч. т. д.

3. Следствие. *Если* $d(\lambda)$ *равно расстоянию от* λ *до спектра* $\sigma(T)$, *то*

$$|R(\lambda;\ T)|\geqslant\frac{1}{d(\lambda)},\quad \lambda\in\varrho(T)$$

Таким образом, $|R(\lambda;\ T)|\to\infty$ *при* $d(\lambda)\to0$ *и резольвентное множество есть естественная область аналитичности* $R(\lambda;\ T)$.

Доказательство. Мы видели в доказательстве леммы 2, что если $|\mu|<|R(\lambda;\ T)|^{-1}$, то $\lambda+\mu\in\varrho(T)$. Следовательно, $d(\lambda)\geqslant|R(\lambda;\ T)|^{-1}$, откуда и следуют доказываемые утверждения, ч. т. д.

→ 4. Лемма. *Замкнутое множество* $\sigma(T)$ *ограничено и непусто. Кроме того,* $\sup|\sigma(T)| = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|T^n|} \leqslant |T|$. *При* $|\lambda| > \sup|\sigma(T)|$ *ряд* $R(\lambda; T) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} T^n/\lambda^{n+1}$ *сходится в равномерной операторной топологии.*

Доказательство. Пусть $f(\lambda) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} T^n/\lambda^{n+1}$. Из параграфа III.14 видно, что ряд $f(\lambda)$ имеет область сходимости $D = \{\lambda \mid |\lambda| > \overline{\lim} \sqrt[n]{|T^n|}\}$. Как и в доказательстве леммы 2, проверяем, что $f(\lambda)(\lambda I - T) = (\lambda I - T) f(\lambda) = I$ для $\lambda \in D$, так что $\varrho(T) \supseteq D$, и, следовательно, множество $\sigma(T)$ ограничено. Так как в силу следствия 3 множество $\varrho(T)$ является естественной областью аналитичности $R(\lambda; T)$, то ряд Лорана для $R(\lambda; T)$ имеет область сходимости $|\lambda| > \sup|\sigma(T)|$. Таким образом, $\sup|\sigma(T)| = \overline{\lim} \sqrt[n]{|T^n|}$. Теперь будет показано, что $\sup|\sigma(T)| \leqslant \underline{\lim} \sqrt[n]{|T^n|}$. Заметим, что если λ — произвольная точка спектра $\sigma(T)$, то $\lambda^n \in \sigma(T^n)$; действительно, разложение на множители

$$(\lambda^n I - T^n) = (\lambda I - T) P_n(T) = P_n(T)(\lambda I - T)$$

показывает, что если оператор $(\lambda^n I - T^n)$ имеет ограниченный обратный, то то же верно и для оператора $(\lambda I - T)$. Таким образом, $|\lambda|^n \leqslant |T^n|$, и, следовательно,

$$\sup|\sigma(T)| \leqslant |T^n|^{1/n}.$$

Остается показать, что спектр $\sigma(T)$ непуст. Если $\sigma(T) = \varnothing$, то $R(\lambda; T)$ является целой функцией и, как видно из ее разложения Лорана, аналитична на бесконечности; из теоремы Лиувилля (III.14) следует, что функция $R(\lambda; T)$ постоянна. Следовательно, коэффициент при λ^{-1} в разложении Лорана $R(\lambda; T)$ обращается в нуль, так что $I = 0$, а это противоречит предположению $\mathfrak{X} \neq \{0\}$, ч. т. д.

5. Определение. Величина

$$r(T) = \sup|\sigma(T)| = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|T^n|}$$

называется *спектральным радиусом* оператора T.

6. Лемма. *Следующее тождество, известное под названием тождества Гильберта, справедливо для любой пары точек* λ, μ *из множества* $\varrho(T)$:

$$R(\lambda; T) - R(\mu; T) = (\mu - \lambda) R(\lambda; T) R(\mu; T).$$

Доказательство. Доказываемое тождество получается, если обе стороны равенства

$$(\mu I - T)(\lambda I - T)\{R(\lambda;\ T) - R(\mu;\ T)\} = (\mu I - T) - (\lambda I - T) = (\mu - \lambda) I$$

умножить на $R(\lambda;\ T)\,R(\mu;\ T)$, ч. т. д.

7. Лемма. *Спектр сопряженного оператора T^* совпадает со спектром оператора T. Кроме того, $R(\lambda;\ T^*) = R(\lambda;\ T)^*$ для чисел λ из множества $\varrho(T) = \varrho(T^*)$.*

Доказательство. Это утверждение непосредственно вытекает из VI.2.7, ч. т. д.

8. Определение. Через $\mathcal{F}(T)$ обозначим семейство всех функций f, которые аналитичны в некоторой окрестности $\sigma(T)$. [Эта окрестность не обязана быть связной и может зависеть от $f \in \mathcal{F}(T)$.]

9. Определение. Пусть $f \in \mathcal{F}(T)$ и U — открытое множество, граница B которого состоит из конечного числа спрямляемых жордановых кривых, положительно ориентированных в обычном смысле теории функций комплексного переменного. Предположим, что $U \supseteq \sigma(T)$ и множество $U \cup B$ содержится в области аналитичности функции f. Тогда оператор $f(T)$ определяется равенством

$$f(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_B f(\lambda)\, R(\lambda;\ T)\, d\lambda.$$

Из леммы 2 и интегральной теоремы Коши следует, что $f(T)$ зависит только от функции f, но не зависит от области U.

→ 10. Теорема. *Если $f, g \in \mathcal{F}(T)$, а α, β — комплексные числа, то*
(a) $\alpha f + \beta g \in \mathcal{F}(T)$ и $\alpha f(T) + \beta g(T) = (\alpha f + \beta g)(T)$;
(b) $f \cdot g \in \mathcal{F}(T)$ и $f(T) \cdot g(T) = (f \cdot g)(T)$;
(c) если функция f представлена степенным рядом $f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \lambda^k$, сходящимся в некоторой окрестности спектра $\sigma(T)$, то $f(T) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k T^k$;
(d) $f \in \mathcal{F}(T^*)$ и $f(T^*) = f(T)^*$.

Доказательство. Утверждение (a) очевидно. Ясно, что $f \cdot g \in \mathcal{F}(T)$; пусть U_1 и U_2 — две окрестности множества $\sigma(T)$, границы B_1 и B_2 которых состоят из конечного числа спрямляемых жордановых кривых, причем $U_1 \cup B_1 \subseteq U_2$. Предположим также, что $U_2 \cup B_2$

содержится в общей области аналитичности функций f и g. Тогда, по лемме 6 и интегральной формуле Коши,

$$
\begin{aligned}
f(T)g(T) &= -\frac{1}{4\pi^2}\left\{\int_{B_1} f(\lambda)R(\lambda;\ T)\,d\lambda\right\}\left\{\int_{B_2} g(\mu)R(\mu;\ T)\,d\mu\right\} = \\
&= -\frac{1}{4\pi^2}\int_{B_1}\int_{B_2} f(\lambda)g(\mu)R(\lambda;\ T)R(\mu;\ T)\,d\mu\,d\lambda = \\
&= -\frac{1}{4\pi^2}\int_{B_1}\int_{B_2}\frac{f(\lambda)g(\mu)(R(\lambda;\ T)-R(\mu;\ T))}{(\mu-\lambda)}\,d\mu\,d\lambda = \\
&= -\frac{1}{4\pi^2}\int_{B_1} f(\lambda)R(\lambda;\ T)\left\{\int_{B_2}\frac{g(\mu)}{\mu-\lambda}\,d\mu\right\}d\lambda + \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{4\pi^2}\int_{B_2} g(\mu)R(\mu;\ T)\left\{\int_{B_1}\frac{f(\mu)}{\mu-\lambda}\,d\lambda\right\}d\mu = \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{B_1} f(\lambda)g(\lambda)R(\lambda;\ T)\,d\lambda = \\
&= (f\cdot g)(T).
\end{aligned}
$$

Это доказывает утверждение (b). Чтобы доказать предложение (c), заметим, что степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\lambda^k$ сходится равномерно в круге $C=\{\lambda\,|\,|\lambda|\leqslant r(T)+\varepsilon\}$ при достаточно малом ε. Поэтому

$$
\begin{aligned}
f(T) &= \frac{1}{2\pi i}\int_C\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\lambda^k\right\}R(\lambda;\ T)\,d\lambda = \\
&= \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\int_C\lambda^k R(\lambda;\ T)\,d\lambda = \\
&= \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\int_C\lambda^k\left\{\sum_{j=0}^{\infty}T^j/\lambda^{j+1}\right\}d\lambda = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k T^k
\end{aligned}
$$

в силу леммы 4 и интегральной формулы Коши. Утверждение (d) является очевидным следствием леммы 7, ч. т. д.

→ 11. Теорема. (*Теорема об отображении спектра.*) *Если функция* $f\in\mathcal{F}(T)$, *то* $f(\sigma(T))=\sigma(f(T))$.

Доказательство. Пусть $\lambda\in\sigma(T)$; определим в области задания функции f функцию g формулой

$$g(\xi)=(f(\lambda)-f(\xi))/(\lambda-\xi).$$

Согласно теореме 10, $f(\lambda)I - f(T) = (\lambda I - T)g(T)$. Поэтому если бы для $f(\lambda)I - f(T)$ существовал ограниченный обратный оператор A, определенный на всем $\mathfrak{X}$, то оператор $g(T)A$ был бы ограниченным всюду определенным обратным оператором для оператора $\lambda I - T$. Следовательно, $f(\lambda) \in \sigma(f(T))$.

Обратно, предположим, что $\mu \in \sigma(f(T))$, но $\mu \notin f(\sigma(T))$. Тогда функция $h(\xi) = (f(\xi) - \mu)^{-1}$ принадлежит $\mathcal{F}(T)$. По теореме 10, $h(T)(f(T) - \mu I) = I$, что противоречит предположению $\mu \notin \sigma(f(T))$, ч. т. д.

→ 12. Теорема. *Пусть $f \in \mathcal{F}(T)$, $g \in \mathcal{F}(f(T))$ и $F(\xi) = g(f(\xi))$. Тогда $F \in \mathcal{F}(T)$ и $F(T) = g(f(T))$.*

Доказательство. Утверждение $F \in \mathcal{F}(T)$ непосредственно вытекает из теоремы 11. Пусть U — окрестность $\sigma(f(T))$, граница B которой состоит из конечного числа спрямляемых жордановых кривых, причем $U \cup B$ содержится в области аналитичности функции g. Аналогично пусть V — окрестность спектра $\sigma(T)$, граница C которой состоит из конечного числа спрямляемых жордановых кривых, и $V \cup C$ содержится в области аналитичности функции f. Предположим, кроме того, что $f(V \cup C) \subseteq U$.

Согласно теореме 10, оператор

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{R(\xi; T)}{\lambda - f(\xi)} d\xi$$

удовлетворяет равенствам $(\lambda I - f(T))A(\lambda) = A(\lambda)(\lambda I - f(T)) = I$. Таким образом, $A(\lambda) = R(\lambda; f(T))$. Следовательно, по интегральной формуле Коши

$$\begin{aligned} g(f(T)) &= \frac{1}{2\pi i} \int_B g(\lambda) R(\lambda; f(T)) d\lambda = \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_B \int_C \frac{g(\lambda) R(\xi; T)}{\lambda - f(\xi)} d\xi \, d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C R(\xi; T) g(f(\xi)) d\xi = F(T), \end{aligned}$$

ч. т. д.

Элементарные алгебраические правила операций, даваемые теоремами 10 и 12, будут использоваться в оставшейся части этой главы без явных ссылок на эти теоремы.

13. Лемма. *Пусть $f_n \in \mathcal{F}(T)$, $n = 1, \ldots$, причем все функции f_n аналитичны в фиксированной окрестности V спектра $\sigma(T)$. Если последовательность f_n сходится равномерно к функции f на V, то f_n $T)$ сходится к $f(T)$ в равномерной топологии операторов.*

Доказательство. Пусть U — окрестность спектра $\sigma(T)$, граница B которой состоит из конечного числа спрямляемых жордановых кривых, и $U \bigcup B \subseteq V$. Тогда $f_n \to f$ равномерно на B и, следовательно, последовательность операторов

$$\frac{1}{2\pi i} \int_B f_n(\lambda) R(\lambda; T) d\lambda$$

сходится в равномерной операторной топологии к оператору

$$\frac{1}{2\pi i} \int_B f(\lambda) R(\lambda; T) d\lambda, \qquad \text{ч. т. д.}$$

Следующая лемма может быть доказана таким же способом.

14. Лемма. *Пусть V — окрестность спектра $\sigma(T)$, а U — открытое множество в комплексной плоскости. Предположим, что f — аналитическая функция двух комплексных переменных λ, μ в области $V \times U$. Тогда $f(T, \mu)$ есть $B(\mathfrak{X})$-значная функция, аналитическая при $\mu \in U$.*

15. Определение. Точка $\lambda_0 \in \sigma(T)$ называется *изолированной* точкой спектра $\sigma(T)$, если существует окрестность U точки λ_0, такая, что $\sigma(T) \bigcap U = \{\lambda_0\}$. Изолированная точка λ_0 спектра $\sigma(T)$ называется *полюсом* оператора T или *полюсом* спектра, если функция $R(\lambda; T)$ имеет полюс в точке λ_0. Под *порядком* $\nu(\lambda_0)$ полюса λ_0 понимается порядок λ_0 как полюса $R(\lambda; T)$.

Следующая теорема, будучи аналогом теоремы 1.3, принимает в общем случае несколько иную форму.

16. Теорема. *Пусть $f, g \in \mathcal{F}(T)$. Равенство $f(T) = g(T)$ имеет место в том и только в том случае, когда $f(\lambda) = g(\lambda)$ в открытом множестве, содержащем весь спектр $\sigma(T)$, кроме конечного числа полюсов $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$, и при всех i, $1 \leqslant i_i \leqslant k$, функция $f-g$ в точке λ_i имеет нуль порядка не ниже $\nu(\lambda_i)$.*

Доказательство. Ясно, что достаточно рассмотреть случай, когда функция $g=0$. Пусть f равна тождественно нулю на открытом множестве V, содержащем весь спектр $\sigma(T)$, кроме полюсов $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Из определения 9 вытекает, что

$$f(T) = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_j} f(\lambda) R(\lambda; T) d\lambda,$$

где C_j достаточно малая окружность с центром в точке λ_j. Если $f(\lambda)$ имеет в точке $\lambda = \lambda_j$ нуль порядка не ниже $\nu(\lambda_j)$, то, так как $R(\lambda; T)$ имеет в точке $\lambda = \lambda_j$ полюс порядка $\nu(\lambda_j)$, отсюда следует, что $f(\lambda)R(\lambda; T)$ регулярна внутри C_k. Тогда, по интегральной формуле Коши, $f(T)=0$.

Обратно, пусть $f(T)=0$; тогда, по теореме 11, $f(\sigma(T))=0$. Пусть f аналитична в окрестности U спектра $\sigma(T)$. Для каждого $\alpha\in\sigma(T)$ существует $\varepsilon(\alpha)>0$, такое, что круг $S(\alpha, \varepsilon(\alpha))\subseteq U$. Так как множество $\sigma(T)$ компактно, то оно может быть покрыто конечным числом кругов $S(\alpha_1, \varepsilon(\alpha_1)), \ldots, S(\alpha_n, \varepsilon(\alpha_n))$. Если некоторый круг $S(\alpha_j, \varepsilon(\alpha_j))$ содержит бесконечное число точек спектра $\sigma(T)$, то из теории функций комплексного переменного следует, что функция f на нем тождественно равна нулю.

Таким образом, если U_1— объединение тех кругов $S(\alpha_j, \varepsilon(\alpha_j))$, которые содержат бесконечное число точек спектра $\sigma(T)$, то функция f тождественно равна нулю на U_1. Следовательно, U_1 содержит весь спектр $\sigma(T)$, кроме конечного числа изолированных точек $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$.

Предположим, что функция f не равна тождественно нулю ни в какой окрестности точки λ_1. Тогда, так как $f(\sigma(T))=0$, функция f имеет в точке λ_1 нуль конечного порядка n. Следовательно, функция g_1, определяемая формулой $g_1(\xi)=(\lambda_1-\xi)^n/f(\xi)$, аналитична в окрестности точки λ_1. Пусть e — функция, тождественно равная единице в окрестности точки λ_1 и нулю в окрестности любой другой точки из спектра $\sigma(T)$, и пусть $g=g_1e$. Тогда выполнено соотношение $(\lambda_1I-T)^n\, e(T)=f(T)g(T)=0$. Разложение Лорана для резольвенты $R(\xi; T)$ в окрестности $0<|\xi-\lambda_1|<\varepsilon$ точки λ_1 дается формулой

$$R(\xi;\ T)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m(\lambda_1-\xi)^m,$$

где

$$A_{-m}=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1}(\lambda_1-\xi)^{m-1}R(\xi;\ T)\,d\xi=-(\lambda_1I-T)^{m-1}e(T),$$

а C_1— достаточно малая окружность с центром в точке λ_1. Таким образом, $A_{-(m+1)}=-(\lambda_1I-T)^m e(T)=0$ при $m\geqslant n$, и, следовательно, точка λ_1—полюс порядка не выше n. Так же мы видим, что функция f либо равна тождественно нулю в окрестности λ_i, $i=2, \ldots, r$, либо точка λ_i — полюс спектра $\sigma(T)$ и функция f имеет в точке λ_i нуль порядка не ниже $\nu(\lambda_i)$, ч. т. д.

17. Определение. Подмножество спектра $\sigma(T)$, одновременно открытое и замкнутое в $\sigma(T)$, называется *спектральным множеством*.

Очевидно, что спектральные множества образуют булевскую алгебру подмножеств спектра $\sigma(T)$. Если σ — спектральное множество, то существует функция $f\in\mathcal{F}(T)$, которая тождественно равна единице на множестве σ и нулю на остальной части спектра $\sigma(T)$. Положим $E(\sigma; T)=f(T)$. Если оператор T подразумевается, то можно писать вместо $E(\sigma; T)$ просто $E(\sigma)$. Из теоремы 16 ясно, что оператор $E(\sigma)$ зависит только от множества σ, но не от конкретного выбора функции $f \in \mathcal{F}(T)$ для его определения. Если спектральное множество σ состоит из единственной точки λ, то иногда может употребляться вместо $E(\{\lambda\}; T)$ обозначение $E(\lambda; T)$. Иногда будет удобно использовать обозначение $E(\sigma)$ для любого множества σ комплексных чисел, для которого $\sigma \cap \sigma(T)$ является спектральным множеством. В этом случае, по определению,

$$E(\sigma) = E(\sigma \cap \sigma(T)).$$

Таким образом, $E(\sigma) = 0$, если $\sigma \cap \sigma(T)$ пусто.

Сравнение теоремы 16 с теоремой 1.3 наводит на мысль, что существует связь между порядком полюса и его индексом в смысле определения 1.2. Следующая теорема устанавливает такую связь. Хотя понятие индекса было введено для операторов в конечномерном пространстве, его определение сохраняет смысл и в общем случае.

18. Теорема. *Если λ — полюс оператора T порядка ν, то λ имеет индекс ν. Кроме того, изолированная точка λ спектра T является полюсом порядка ν в том и только в том случае, когда*

$$(\lambda I - T)^{\nu} E(\lambda; T) = 0, \quad (\lambda I - T)^{\nu-1} E(\lambda; T) \neq 0.$$

Доказательство. В ходе доказательства теоремы 16 было показано, что разложение Лорана $R(\xi; T)$ в окрестности $0 < |\xi - \lambda| < \varepsilon$ изолированной точки λ дается формулой

$$R(\xi; T) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n (\lambda - \xi)^n,$$

где

$$A_{-(m+1)} = -(\lambda I - T)^m E(\lambda; T).$$

Таким образом, λ является полюсом порядка ν в том и только в том случае, когда выполнены соотношения

$$(\lambda I - T)^{\nu} E(\lambda; T) = 0, \quad (\lambda I - T)^{\nu-1} E(\lambda; T) \neq 0.$$

Чтобы доказать первое утверждение теоремы, положим, что λ — полюс порядка ν. Тогда существует вектор x, такой, что

$$(\lambda I - T)^{\nu} x = 0, \quad (\lambda I - T)^{\nu-1} x \neq 0;$$

это показывает, что индекс λ не меньше ν. Предположим теперь, что индекс λ равен n. Тогда для некоторого вектора x выполнены соотношения $(\lambda I - T)^n x = 0$, $(\lambda I - T)^{n-1} x \neq 0$. Так как

$$R(\xi; T) = -\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda I - T)^j}{(\lambda - \xi)^{j+1}}, \quad |\lambda - \xi| > |\lambda I - T|,$$

то после умножения обеих сторон этого равенства на оператор $(\xi I - T) = (\xi - \lambda) I + (\lambda I - T)$ видно, что функция

$$R(\xi;\ T)\,x = -\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\lambda I - T)^j x}{(\lambda - \xi)^{j+1}}$$

регулярна на всей плоскости, кроме, быть может, точки $\xi = \lambda$. Таким образом, если K — любой спрямляемый контур, окружающий спектр $\sigma(T)$, и C — малая окружность с центром в точке λ, то

$$x = \frac{1}{2\pi i} \int_K R(\xi;\ T)\,x\,d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_C R(\xi;\ T)\,x\,d\xi = e(T)\,x.$$

Это приводит к соотношению $(\lambda I - T)^\nu x = (\lambda I - T)^\nu e(T)\,x = 0$ и доказывает, что индекс $n \leqslant \nu$, ч. т. д.

19. Теорема. *Пусть $f \in \mathcal{F}(T)$ и τ — спектральное множество $f(T)$. Тогда $\sigma(T) \cap f^{-1}(\tau)$ — спектральное множество оператора T и*

$$E(\tau;\ f(T)) = E(f^{-1}(\tau);\ T).$$

Доказательство. Пусть $e_\tau(\mu) = 1$ для всех точек μ из некоторой окрестности множества τ и $e_\tau(\mu) = 0$ для всех точек μ из некоторой окрестности остальной части спектра $\sigma(f(T))$. Тогда $e_\tau(f(T)) = E(\tau; f(T))$. Если τ' — дополнение τ в спектре $\sigma(f(T))$, то теорема 11 показывает, что спектр $\sigma(T)$ есть объединение непересекающихся множеств $f^{-1}(\tau)$ и $f^{-1}(\tau')$. Так как функция f непрерывна, то эти два множества и открыты и замкнуты. Отсюда следует, что $\sigma = \sigma(T) \cap f^{-1}(\tau)$ есть спектральное множество оператора T. Если $e_\sigma(\lambda) = e_\tau(f(\lambda))$, то $E(\sigma;\ T) = e_\sigma(T)$ и теорема 12 показывает, что

$$E(\tau;\ f(T)) = E(\sigma;\ T) = E(f^{-1}(\tau);\ T), \qquad \text{ч. т. д.}$$

Для любого множества σ, для которого определен оператор $E(\sigma)$, положим $\mathfrak{X}_\sigma = E(\sigma)\,\mathfrak{X}$. Тогда $T\mathfrak{X}_\sigma \subseteq \mathfrak{X}_\sigma$, и мы будем обозначать сужение оператора T на подпространство $\mathfrak{X}_\sigma$ символом T_σ.

20. Теорема. *Пусть σ — спектральное множество спектра $\sigma(T)$. Тогда $\sigma(T_\sigma) = \sigma$. Если $f \in \mathcal{F}(T)$, то $f \in \mathcal{F}(T_\sigma)$ и $f(T_\sigma) = f(T)_\sigma$. Точка λ из σ есть полюс оператора T порядка ν тогда и только тогда, когда она есть полюс оператора T_σ порядка ν.*

Доказательство. Пусть $\lambda \in \sigma$; предположим, что $\lambda \notin \sigma(T_\sigma)$. Тогда существует ограниченный линейный оператор A в пространстве $\mathfrak{X}_\sigma$, такой, что $(\lambda I - T)\,Ax = A\,(\lambda I - T)\,x = x$ для $x \in \mathfrak{X}_\sigma$. Пусть функция g равна нулю во всех точках μ из некоторой окрестности множества σ и равна $(\lambda - \mu)^{-1}$ во всех точках μ из некоторой окрестности оставшихся точек спектра $\sigma(T)$. Тогда $g(T)(\lambda I-T)=(\lambda I-T)g(T)=I-E(\sigma)$. Если мы определим оператор A_1: $\mathfrak{X}\to\mathfrak{X}$ формулой $A_1x=AE(\sigma)x$, то

$$(\lambda I-T)(A_1+g(T))=(A_1+g(T))(\lambda I-T)=I.$$

Следовательно, $\lambda\in\varrho(T)$, что противоречит предположению $\lambda\in\sigma$. Тем самым $\sigma\subseteq\sigma(T_\sigma)$.

Обратно, пусть $\lambda\notin\sigma$. Рассмотрим функцию h, равную $(\lambda-\mu)^{-1}$ в точках μ из некоторой окрестности множества σ, не содержащей λ, и равную тождественно нулю в некоторой окрестности оставшейся части $\sigma(T)$. Тогда $h(T)(\lambda I-T)=(\lambda I-T)h(T)=E(\sigma)$. Следовательно, для сужения $h(T)_\sigma$ оператора $h(T)$ на пространство $\mathfrak{X}_\sigma$ выполнено соотношение $h(T)_\sigma(\lambda I_\sigma-T_\sigma)=(\lambda I_\sigma-T_\sigma)h(T_\sigma)=I_\sigma$, так что $\lambda\notin\sigma(T_\sigma)$. Это доказывает, что $\sigma(T_\sigma)\subseteq\sigma$ и что $R(\lambda;T_\sigma)=R(\lambda;T)_\sigma$.

Пусть $f\in\mathcal{F}(T)$, и пусть U — окрестность спектра $\sigma(T)$, граница B которой состоит из конечного числа спрямляемых жордановых кривых, причем $U\cup B$ входит в область аналитичности функции f. Тогда

$$f(T)_\sigma=\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_B f(\lambda)R(\lambda;\ T)\,d\lambda\right\}_\sigma=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_B f(\lambda)R(\lambda;\ T)_\sigma\,d\lambda=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_B f(\lambda)R(\lambda;\ T_\sigma)\,d\lambda=f(T_\sigma).$$

По теореме 18, λ является полюсом порядка ν оператора T в том и только в том случае, когда

$$(\lambda I-T)^\nu E(\lambda)=0,\quad (\lambda I-T)^{\nu-1}E(\lambda)\neq 0.$$

Так как $\lambda\in\sigma$, то $E(\lambda)E(\sigma)=E(\lambda)$ и, таким образом,

$$(\lambda I-T)^m E(\lambda)=(\lambda I_\sigma-T_\sigma)^m E(\lambda),\quad m=1,\ 2,\ \ldots .$$

Следовательно, точка λ есть полюс оператора T порядка ν тогда и только тогда, когда она есть полюс оператора T_σ порядка ν, ч. т. д.

21. Следствие. *Отображение $\sigma\to E(\sigma)$ есть изоморфизм булевской алгебры спектральных множеств на булевскую алгебру всех проекторов вида $E(\sigma)$, где σ — спектральное множество.*

Доказательство. Из теоремы 10 следует, что отображение $\sigma\to E(\sigma)$ есть гомоморфизм. Чтобы проверить, что оно является изоморфизмом, достаточно показать, что $E(\sigma)=0$ только тогда, когда σ есть пустое множество $\varnothing$. Но если $E(\sigma)=0$, то $\mathfrak{X}_\sigma=\{0\}$ и $\sigma(T_\sigma)=\varnothing$. Из теоремы 20 следует, что $\sigma=\sigma(T_\sigma)=\varnothing$, ч. т. д.

22. Теорема. *Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — полюса оператора T, $\nu_1, \ldots, \nu_k$ — их порядки, и пусть $\sigma = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$. Тогда для $f \in \mathcal{F}(T)$*

$$f(T)E(\sigma) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{m=0}^{\nu_i - 1} \frac{f^{(m)}(\lambda_i)}{m!} (T - \lambda_i I)^m E(\lambda_i).$$

Доказательство. Если

$$g(\lambda) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{m=0}^{\nu_i - 1} \frac{f^{(m)}(\lambda_i)}{m!} (\lambda - \lambda_i)^m,$$

то $g^{(m)}(\lambda_i) = f^{(m)}(\lambda_i)$, $1 \leqslant i \leqslant k$ и $0 \leqslant m < \nu_i$. Таким образом, равенство $f(T)E(\sigma) = g(T)E(\sigma)$ следует из теоремы 16, ч. т. д.

23. Следствие. *Пусть функции $f, f_n, n = 1, 2, \ldots$, принадлежат $\mathcal{F}(T)$; предположим, что $f_n(T)$ сходится к $f(T)$ в слабой операторной топологии. Тогда для любого полюса λ оператора T порядка ν*

$$f^{(m)}(\lambda) = \lim_{n \to \infty} f_n^{(m)}(\lambda), \quad 0 \leqslant m < \nu.$$

Доказательство. Если T_λ — сужение оператора T на $E(\lambda)\mathfrak{X}$, $0 \leqslant m < \lambda$, то, по теореме 20, λ — полюс порядка ν для оператора T_λ. Теорема 18 показывает, что T_λ имеет индекс ν. Теперь можно вывести доказываемое следствие из теоремы 22 теми же рассуждениями, которые были использованы, чтобы получить теорему 1.9 из теоремы 1.8, ч. т. д.

24. Теорема. *Пусть λ — полюс порядка ν оператора T и σ_1 — дополнение в $\sigma(T)$ множества $\{\lambda\}$. Тогда*

$$\mathfrak{X}_\lambda = \{x \mid (T - \lambda I)^\nu x = 0\}$$

и

$$\mathfrak{X}_{\sigma_1} = (T - \lambda I)^\nu \mathfrak{X}.$$

Доказательство. По теореме 20, $(T - \lambda I)^\nu \mathfrak{X}_{\sigma_1} = \mathfrak{X}_{\sigma_1}$. По теореме 18,

$$(T - \lambda I)^\nu \mathfrak{X}_\lambda = 0, \tag{I}$$

и, таким образом,

$$(T - \lambda I)^\nu \mathfrak{X} = (T - \lambda I)^\nu \{\mathfrak{X}_\lambda \oplus \mathfrak{X}_{\sigma_1}\} = \mathfrak{X}_{\sigma_1}.$$

В силу (I), имеем

$$\mathfrak{X}_\lambda \subseteq \{x \mid (T - \lambda I)^\nu x = 0\}. \tag{II}$$

С другой стороны, если $(T - \lambda I)^\nu x = 0$, то, в силу (I),

$$0 = (T - \lambda I)^\nu \{E(\lambda)x + E(\sigma_1)x\} = (T - \lambda I)^\nu E(\sigma_1)x.$$

Так как, по теореме 20, оператор $(T-\lambda I)$ взаимно однозначен на пространстве $\mathfrak{X}_{\sigma_1}$, то $E(\sigma_1)x=0$ и потому $E(\lambda)x=x$. Это доказывает, что $\{x \mid (T-\lambda I)^\nu x=0\}\subseteq\mathfrak{X}_\lambda$; последнее соотношение вместе с соотношением (II) завершает доказательство теоремы.

4. Спектральная теория вполне непрерывных операторов

В некоторых упражнениях параграфа VI.9 было отмечено, что многие из линейных операторов, важных в анализе, либо вполне непрерывны, либо имеют вполне непрерывные квадраты. Структура спектра такого оператора особенно проста. Спектральная теория вполне непрерывных операторов в том виде, как она излагается в этом параграфе, была заложена Ф. Риссом и представляет собою обобщение некоторых результатов из работ Фредгольма по теории линейных интегральных уравнений.

1. Лемма. *Пусть T — вполне непрерывный оператор и λ — ненулевое комплексное число. Если отображение $\lambda I-T$ взаимно однозначно, то его область значений замкнута.*

Доказательство. Пусть $y=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$, где $y_n=(\lambda I-T)x_n$. Если последовательность $\{x_n\}$ содержит ограниченную подпоследовательность, то, так как оператор T отображает ограниченные множества в относительно бикомпактные множества, $\{x_n\}$ содержит подпоследовательность $\{x_{n_i}\}$, такую, что последовательность $\{Tx_{n_i}\}$ сходится. Так как $x_{n_i}=(y_{n_i}+Tx_{n_i})/\lambda$, то последовательность $\{x_{n_i}\}$ сходится к некоторому элементу $x\in\mathfrak{X}$ и $y=(\lambda I-T)x$.

Если $\{x_n\}$ не содержит ограниченной подпоследовательности, то $|x_n|\to\infty$. Положим $z_n=x_n/|x_n|$, так что $(\lambda I-T)z_n\to 0$ и $|z_n|=1$. Так как оператор T вполне непрерывен, то существует подпоследовательность $\{z_{n_i}\}$ последовательности $\{z_n\}$, такая, что последовательность $\{Tz_{n_i}\}$ сходится. Но поскольку $z_{n_i}-\lambda^{-1}Tz_{n_i}\to 0$, то и последовательность $\{z_{n_i}\}$ сходится. Пусть $z=\lim z_{n_i}$. Тогда $|z|=1$, и $(\lambda I-T)z=0$; следовательно, в противоречии с предположением отображение $\lambda I-T$ не взаимно однозначно, ч. т. д.

2. Следствие. *Пусть T — вполне непрерывный оператор и $0\neq\lambda\in\sigma(T)$. Тогда существует либо ненулевой вектор x в $\mathfrak{X}$, такой, что $Tx=\lambda x$, либо ненулевой функционал x^* в $\mathfrak{X}^*$, такой, что $T^*x^*=\lambda x^*$.*

Доказательство. Если отображение $\lambda I-T$ взаимно однозначно и если $(\lambda I-T)\mathfrak{X}$ плотно в $\mathfrak{X}$, то, по лемме 1, $(\lambda I-T)\mathfrak{X}=\mathfrak{X}$ и оператор $\lambda I-T$ имеет всюду определенный обратный. По теореме

II.2.2, этот обратный оператор ограничен; следовательно, $\lambda \in \rho(T)$, что противоречит предположению $\lambda \in \sigma(T)$. Отсюда вытекает, что $(\lambda I - T)\mathfrak{X}$ не плотно в $\mathfrak{X}$. По следствию II.3.13, в $\mathfrak{X}^*$ существует функционал $x^* \neq 0$, такой, что $x^*(\lambda I - T)\mathfrak{X} = 0$. Следовательно, $(\lambda x^* - T^* x^*)\mathfrak{X} = 0$ и $\lambda x^* = T^* x^*$, ч. т. д.

Из теоремы 5 этого параграфа вытекает, что если $0 \neq \lambda \in \sigma(T)$, то ни оператор $(\lambda I - T)$, ни оператор $(\lambda I - T^*)$ не взаимно однозначны.

3. Лемма. *Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — замкнутые подпространства в $\mathfrak{X}$; предположим, что $\mathfrak{A}$ — собственное подпространство $\mathfrak{B}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует вектор $y \in \mathfrak{B}$, такой, что $|y| = 1$ и $|x - y| > 1 - \varepsilon$ для всех векторов x из $\mathfrak{A}$.*

Доказательство. Пусть $b \in \mathfrak{B}$, $b \notin \mathfrak{A}$ и $\delta = \inf_{a \in \mathfrak{A}} |b - a|$. Так как $\mathfrak{A}$ замкнуто, то $\delta > 0$ и существует вектор $a_0 \in \mathfrak{A}$, такой, что $|b - a_0| < \delta(1 + \varepsilon)$. Если $b_1 = b - a_0$, то

$$(1 + \varepsilon) \inf_{a \in \mathfrak{A}} |b_1 - a| = (1 + \varepsilon)\delta > |b_1|.$$

Если $y = b_1/|b_1|$, то $|y| = 1$ и

$$|y - a| = \left| \frac{b_1}{|b_1|} - a \right| = \frac{1}{|b_1|} |b_1 - a'| >$$

$$> \frac{1}{\delta(1+\varepsilon)} |b_1 - a'| \geqslant \frac{1}{1+\varepsilon} > 1 - \varepsilon, \qquad \text{ч. т. д.}$$

4. Лемма. *Пусть T — вполне непрерывный оператор, $\{\lambda_n\}$ — последовательность попарно различных чисел и $\{x_n\}$ — последовательность ненулевых векторов, такие, что $(T - \lambda_n I)x_n = 0$ при всех $n = 1, 2, \ldots$. Тогда λ_n стремится к нулю.*

Доказательство. Если λ_n не стремится к нулю, то существуют $\varepsilon > 0$ и подпоследовательность $\{\lambda_{n_i}\}$, такие, что $|\lambda_{n_i}| > \varepsilon$. Можно считать, что $\lambda_{n_i} = \lambda_i$. Пусть $\mathfrak{A}_n = \operatorname{sp}\{x_1, \ldots, x_n\}$. Согласно следствию IV.3.2, $\mathfrak{A}_n$ — замкнутое подпространство $\mathfrak{X}$. Чтобы проверить, что $\mathfrak{A}_n$ содержится в $\mathfrak{A}_{n+1}$, но не совпадает с ним, покажем, что при любом n векторы $x_1, \ldots, x_n$ линейно независимы. Предположим, что $x_1, \ldots, x_{n-1}$ линейно независимы, но $x_n = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_{n-1} x_{n-1}$. Тогда

$$0 = (T - \lambda_n I)\, x_n = \alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_n) x_1 + \ldots + \alpha_{n-1} (\lambda_{n-1} - \lambda_n) x_{n-1},$$

и так как $\lambda_i - \lambda_n \neq 0$ при $i \neq n$, то $\alpha_i = 0$, $i = 1, \ldots, n-1$, и $x_n = 0$, что противоречит условию. Таким образом, включение $\mathfrak{A}_n \subset \mathfrak{A}_{n+1}$ собственное, и, по лемме 3, в $\mathfrak{A}_n$ существует вектор y_n, такой, что $|y_n| = 1$ и $|y_n - x| > 1/2$ для всех векторов x из $\mathfrak{A}_{n-1}$. Вектор

y_n имеет вид $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$, так что $(T-\lambda_n I)\, y_n \in \mathfrak{A}_{n-1}$. Таким образом, если $n > m$, вектор $z_{n,m} = (y_n - \lambda_n^{-1} T y_n) + \lambda_m^{-1} T y_m$ принадлежит $\mathfrak{A}_{n-1}$ и, следовательно,

$$\left| T\left(\frac{1}{\lambda_n} y_n\right) - T\left(\frac{1}{\lambda_m} y_m\right) \right| = |y_n - z_{n,m}| > \frac{1}{2}.$$

Поэтому никакая подпоследовательность последовательности $\{T(y_n/\lambda_n)\}$ не сходится. Так как $|y_n/\lambda_n| \leqslant 1/\varepsilon$, это противоречит полной непрерывности оператора T, ч. т. д.

→ 5. Теорема. *Если T — вполне непрерывный оператор, то его спектр не более чем счетен и не имеет точек накопления в комплексной плоскости, кроме, быть может, $\lambda=0$. Каждое ненулевое число из $\sigma(T)$ является полюсом оператора T и имеет конечный положительный индекс. Для такого числа λ проектор $E(\lambda)$ имеет ненулевую конечномерную область изменения, определяемую формулой*

$$E(\lambda)\,\mathfrak{X} = \{x \mid (T-\lambda I)^{\nu} x = 0\},$$

где ν — порядок полюса.

Доказательство. Так как множество $\sigma(T)$ компактно, то для доказательства первой части теоремы достаточно убедиться в том, что каждое ненулевое $\lambda \in \sigma(T)$ изолировано. Но если $\lambda \neq 0$ не изолировано, то можно найти последовательность различных точек $\lambda_n \in \sigma(T)$, такую, что $\lambda_n \to \lambda$. Согласно лемме 4, только конечное число отображений $\lambda_n I - T$ не взаимно однозначно. Тогда, по следствию 2, только конечное число отображений $\lambda_n I^* - T^*$ взаимно однозначно. Однако оператор T^* вполне непрерывен (в силу VI.5.2) и лемма 4, примененная к T^*, приводит к противоречию. Это доказывает, что каждое ненулевое $\lambda \in \sigma(T)$ изолировано.

Пусть T_λ — сужение T на $\mathfrak{X}_\lambda = E(\lambda)\,\mathfrak{X}$. Из теоремы 3.20 видно, что $0 \neq \lambda = \sigma(T_\lambda)$ и, следовательно, T_λ имеет ограниченный обратный. Таким образом, если S — замкнутый единичный шар в $\mathfrak{X}_\lambda$, то множество $T_\lambda^{-1} S$ ограничено, и так как T_λ вполне непрерывен, то шар $S = T_\lambda T_\lambda^{-1} S$ — бикомпактен. В силу теоремы IV.3.5, $E(\lambda)\,\mathfrak{X}$ конечномерно. В силу теоремы 1.3, существует целое число ν, такое, что $(T_\lambda - \lambda I_\lambda)^\nu = 0$. По теореме 3.18, λ — полюс оператора T_λ, и, по теореме 3.20, оно является полюсом и оператора T. Теорема 3.18 показывает, что индекс точки λ есть положительное конечное число. Заключительное утверждение следует из теоремы 3.24, ч. т. д.

6. Теорема. *Все утверждения теоремы 5 остаются справедливыми, если предположить только, что оператор T^n вполне непрерывен при некотором положительном целом числе n.*

Доказательство. Согласно теореме 3.11, $\{\sigma(T)\}^n = \sigma(T^n)$, и, как показывает теорема 5, множество $\sigma(T^n)$ либо конечно, либо образует счетную последовательность, сходящуюся к нулю. Пусть $\lambda \neq 0$ — точка в $\sigma(T)$ и $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — множество всех точек в $\sigma(T)$, для которых $\lambda_i^n = \lambda^n$. По теореме 3.19,

$$E(\lambda^n; T^n) = \sum_{i=1}^{k} E(\lambda_i; T);$$

это показывает, что

$$E(\lambda; T)\mathfrak{X} \subseteq E(\lambda^n; T^n)\mathfrak{X}.$$

Согласно теореме 5, оператор $E(\lambda^n; T^n)$ имеет конечномерную область значений, и приведенное выше соотношение показывает, что тем же свойством обладает и оператор $E(\lambda; T)$. Доказательство теоремы 6 теперь может быть завершено аналогично доказательству теоремы 5, ч. т. д.

Слабо вполне непрерывные операторы в пространствах $C(S)$, AP, $B(S)$, $L_1(S)$, $rca(S)$, $ca(S)$, $ba(S)$, $rba(S)$ и т. д., которые были рассмотрены в параграфах 7 и 8 главы VI, дают примеры операторов, к которым может быть применена теорема 6, хотя теорема 5 к ним не всегда применима.

5. Упражнения

По многим причинам удобно ввести грубую классификацию точек спектра $\sigma(T)$.

1. Определение. (а) Множество точек $\lambda \in \sigma(T)$, таких, что отображение $\lambda I - T$ не взаимно однозначно, называется *точечным спектром* оператора T и обозначается через $\sigma_p(T)$. Таким образом, $\lambda \in \sigma_p(T)$ тогда и только тогда, когда $Tx = \lambda x$ для некоторого ненулевого $x \in \mathfrak{X}$.

(b) Множество всех $\lambda \in \sigma(T)$, для которых отображение $\lambda I - T$ взаимно однозначно и многообразие $(\lambda I - T)\mathfrak{X}$ плотно в $\mathfrak{X}$, но таких, что $(\lambda I - T)\mathfrak{X} \neq \mathfrak{X}$, называется *непрерывным спектром* оператора T и обозначается через $\sigma_c(T)$.

(c) Множество всех $\lambda \in \sigma(T)$, для которых отображение $\lambda I - T$ взаимно однозначно, но таких, что многообразие $(\lambda I - T)\mathfrak{X}$ не плотно в $\mathfrak{X}$, называется *остаточным спектром* T и обозначается через $\sigma_r(T)$.

2. Доказать, что $\sigma_r(T)$, $\sigma_c(T)$ и $\sigma_p(T)$ не пересекаются и $\sigma(T) = \sigma_r(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_p(T)$.

3. Найти точечный, остаточный и непрерывный спектры оператора $y = Tx$ в $C[0, 1]$, определяемого равенством $y(s) = \int_0^s x(t)\,dt$. Изменится ли ответ, если T рассматривать как опера-

тор в $L[0, 1]$, или в $C_0[0, 1]$ — пространстве всех непрерывных функций на $[0, 1]$, обращающихся в нуль в точке 0?

4. Пусть $y = Tx$ — оператор в $C[0, 1]$, определяемый равенством $y(t) = tx(t)$. Найти $\sigma_r(T)$, $\sigma_p(T)$, $\sigma_c(T)$. Найти $f(T)$ для $f \in \mathcal{F}(T)$.

5. Пусть $\{\alpha_i\}$ — ограниченная последовательность комплексных чисел. Пусть T — отображение в l_2, определяемое равенством $T[\xi_i] = [\alpha_i \xi_i]$. Найти $\sigma_p(T)$, $\sigma_c(T)$ и $\sigma_r(T)$.

6. Показать, что любое компактное множество на плоскости может быть спектром некоторого оператора.

7. Пусть T — отображение в l_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, определяемое равенством $T[\xi_1, \xi_2, \ldots] = [\xi_2, \xi_3, \ldots]$. Найти $\sigma_p(T)$, $\sigma_r(T)$, $\sigma_c(T)$.

8. Пусть E — проекционный оператор; выразить резольвенту $R(\lambda; E)$ явно через E и λ. Каков спектр $\sigma(E)$? Найти $f(E)$ для $f \in \mathcal{F}(E)$.

9. Показать, что для любого ограниченного линейного оператора T выполнены соотношения

$$\sigma_r(T) \subseteq \sigma_p(T^*) \subseteq \sigma_r(T) \cup \sigma_p(T).$$

10. Если существует число λ на окружности $|\lambda| = |T|$, принадлежащее точечному спектру оператора T, то λ также принадлежит к точечному спектру оператора T^*.

11. Показать, что если для операторов T_1 и T_2 из $B(\mathfrak{X})$ выполнено соотношение $T_1 T_2 = T_2 T_1$, то $r(T_1 + T_2) \leqslant r(T_1) + r(T_2)$ (см. 3.5), но если $T_1 T_2 \neq T_2 T_1$, то это неравенство не обязательно имеет место, даже если $\mathfrak{X}$ двумерно.

12. Определение. Оператор T называется *квазинильпотентным*, если $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|T^n|} = 0$.

13. Показать, что оператор T квазинильпотентен тогда и только тогда, когда $\sigma(T) = \{0\}$.

14. Пусть $\sigma = \{\lambda_n\}$ — счетное компактное множество в комплексной плоскости, такое, что $\lambda_n \to 0$. Показать, что в некотором B-пространстве существует вполне непрерывный оператор T со спектром $\sigma(T) = \sigma$.

15. Пусть (S, Σ, μ) — пространство с положительной σ-конечной мерой и функция h существенно ограничена на S. Пусть T — преобразование в $L_p(S, \Sigma, \mu)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, определяемое равенством $Tx(t) = h(t)\,x(t)$. Показать, что спектр $\sigma(T)$ есть множество всех точек, для всех окрестностей M которых выполнено неравенство $\mu(h^{-1}(M)) > 0$. Найти $f(T)$ для $f \in \mathcal{F}(T)$.

16. Показать, что e^{tT} — дифференцируемая операторнозначная функция действительной переменной t и что

$$\frac{d}{dt} e^{tT} = T e^{tT}.$$

Пусть $y \in \mathfrak{X}$. Решить дифференциальное уравнение

$$\frac{dy(t)}{dt} = Ty(t), \qquad y(0) = y,$$

и показать, что решение единственно.

17. Оператор T удовлетворяет уравнению $P(T) = 0$, где $P(\lambda)$ — ненулевой многочлен, тогда и только тогда, когда $\sigma(T)$ состоит из конечного числа полюсов.

18. Пусть α — спектральное подмножество спектра $\sigma(T)$. Тогда

$$\sigma_p(T_\alpha) = \alpha \bigcap \sigma_p(T), \qquad \sigma_c(T_\alpha) = \alpha \bigcap \sigma_c(T), \qquad \sigma_r(T_\alpha) = \alpha \bigcap \sigma_r(T).$$

19. Пусть $f \in \mathcal{F}(T)$ и σ — спектральное подмножество спектра $\sigma(T)$. Пусть $\alpha = \sigma(T) \bigcap \sigma'$ и функция f не равна тождественно нулю на σ. Если $f(T)x = 0$ для некоторого $x \in \mathfrak{X}$, то x принадлежит $\mathfrak{X}_\alpha$.

20. Пусть λ — полюс спектра $\sigma(T)$. Показать, что разложение

$$\mathfrak{X} = (\lambda I - T)^k \mathfrak{X} \oplus \{x \mid x \in \mathfrak{X},\ (\lambda I - T)^k x = 0\}$$

имеет место в том и только в том случае, когда $k \geqslant \nu(\lambda)$.

21. Пусть $f \in \mathcal{F}(T)$ и μ — комплексное число; предположим, что множество $f^{-1}(\mu) \bigcap \sigma(T)$ конечно. Показать, что μ является полюсом спектра $\sigma(f(T))$ тогда и только тогда, когда каждая точка множества $f^{-1}(\mu) \bigcap \sigma(T)$ — полюс спектра $\sigma(T)$.

22. Пусть $f \in \mathcal{F}(T)$; предположим, что $f^{-1}(0) \bigcap \sigma(T)$ — конечное множество $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ комплексных чисел. Показать, что следующие утверждения эквивалентны:

(a) $f(T)\mathfrak{X}$ замкнуто и $\mathfrak{X} = f(T)\mathfrak{X} \oplus \{x \mid x \in \mathfrak{X},\ f(T)x = 0\}$;

(b) каждая точка λ_i, $i = 1, \ldots, k$, есть полюс спектра $\sigma(T)$ порядка меньшего, чем порядок λ_i как нуля функции f;

(c) множество $\sigma = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ — спектральное множество, $f(T)\mathfrak{X} = E(\sigma(T) \bigcap \sigma')\mathfrak{X}$ и $\{x \mid x \in \mathfrak{X}, f(T)x = 0\} = E(\sigma)\mathfrak{X}$.

23. Пусть T — оператор в B-пространстве $\mathfrak{X}$ и T^* — его сопряженный. Пусть σ_1 и σ_2 — непересекающиеся спектральные множества оператора T. Показать, что $x_2^*(x_1) = 0$ для $x_2^* \in \mathfrak{X}_{\sigma_2}^*$ и $x_1 \in \mathfrak{X}_{\sigma_1}$.

24. (Ф. Рисс и Секефальви-Надь.) Пусть $|T| \leqslant r' < r$, функция f аналитична при $|\lambda| \leqslant r$ и $|f(\lambda)| \leqslant R$ на окружности $|\lambda| = r$; показать, что

$$|f(T)| \leqslant \frac{rR}{r - r'}.$$

25. (Ф. Рисс и Секефальви-Надь.) Пусть σ — спектральное множество оператора T, лежащее внутри окружности $|\lambda - \lambda_0| = r$. Пусть $\sigma(T) \bigcap \sigma'$ лежит вне этой окружности. Показать, что $x \in \mathfrak{X}_\sigma$ в том и только в том случае, когда

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} |(\lambda_0 I - T)^n x|^{1/n} < r.$$

26. Пусть $\lambda \in \sigma_c(T)$.

(a) Показать, что существует последовательность $\{x_n\}$, такая, что $|x_n| = 1$ и $|(\lambda I - T) x_n| \to 0$;

(b) пусть σ — спектральное множество и $\lambda \in \sigma$; показать, что для последовательности в п. (а) выполнено соотношение

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - E(\sigma) x_n| = 0.$$

27. Пусть $\mathfrak{X} = C[0, 1]$ и T — оператор в $\mathfrak{X}$, определяемый равенством

$$Tx(t) = \int_0^t x(s)\,ds.$$

Вычислить $R(\lambda; T)$ и показать, что дифференциальное уравнение

$$x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n x(t) = y(t),$$
$$x(0) = x'(0) = \ldots = x^{(n-1)}(0) = 0$$

имеет решение

$$x = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\lambda^n R(\lambda; T)\, y\, d\lambda}{1 + a_1\lambda + \ldots + a_n\lambda^n},$$

где C — окружность с центром в начале координат, не содержащая внутри себя корней знаменателя, или (полагая $z = 1/\lambda$)

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^t y(s)\,ds \int_K \frac{e^{z(t-s)}\,dz}{z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n},$$

где контур K охватывает корни знаменателя.

28. Пусть спектр $\sigma(T)$ лежит в полуплоскости $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$; показать, что

$$\exp(\xi T) = \lim_{w\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-iw}^{+iw} e^{\lambda\xi} R(\lambda; T)\, d\lambda, \quad \xi > 0.$$

29. Предполагая, что спектр $\sigma(T)$ лежит в полуплоскости $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$, показать, что

$$R(\lambda; T) = \int_0^\infty e^{-\lambda} \exp(\xi T)\, d\xi,$$

где интеграл сходится при $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$.

30. Показать, что

$$\sup_{\lambda \in \sigma(T)} \operatorname{Re}(\lambda) = \lim_{\xi\to\infty} \frac{1}{\xi} \log|\exp(\xi T)|.$$

31. Пусть T — оператор в B-пространстве $\mathfrak{X}$; предположим, что спектр $\sigma(T)$ не пересекается с лучом $re^{i\vartheta}$, $r > 0$. Если $|R(re^{i\vartheta}, T)| = O(r^{-3/2+\varepsilon})$ для некоторого $\varepsilon > 0$ при $r \to 0$, то существует последовательность функций $\{f_n\} \subset \mathcal{F}(T)$ и оператор U, такие, что $f_n(T) \to U$ и $U^2 = T$.

32. Пусть $f_n \in \mathcal{F}(T)$; предположим, что последовательность операторов $f_n(T)$ сходится в равномерной операторной топологии. Тогда последовательность функций f_n сходится равномерно на спектре $\sigma(T)$.

33. Пусть U — открытое множество в комплексной плоскости. Предположим, что $f(\lambda, \cdot) \in \mathcal{F}(T)$ при всех $\lambda \in U$ и что $f(\lambda, T)$ — аналитическая функция со значениями в $B(\mathfrak{X})$. Тогда $f(\lambda, \mu)$ — аналитическая функция λ при всех $\mu \in \sigma(T)$.

34. Если спектральное подмножество σ спектра $\sigma(T)$ таково, что $\mathfrak{X}_\sigma$ конечномерно, то σ состоит из конечного числа полюсов.

35. Если $\lambda \in \sigma(T)$ изолирована и $\mathfrak{X}_\lambda$ конечномерно, то $(\lambda I - T)^k \mathfrak{X}$ есть множество таких $x \in \mathfrak{X}$, что $y^*(x) = 0$ при всех $y^* \in \mathfrak{X}^*$, удовлетворяющих условию $(\lambda I^* - T^*)^k y^* = 0$, а $(\lambda I^* - T^*)^k \mathfrak{X}^*$ есть множество таких $x^* \in \mathfrak{X}^*$, что $x^*(y) = 0$ при всех $y \in \mathfrak{X}$, удовлетворяющих условию $(\lambda I - T)^k y = 0$. Множества $\{x \mid x \in \mathfrak{X}, (\lambda I - T)^k x = 0\}$ и $\{x^* \mid x^* \in \mathfrak{X}^*, (\lambda I^* - T^*)^k x^* = 0\}$ имеют одну и ту же размерность.

6. Теория возмущений

Пусть $\mu \to T(\mu)$ — операторнозначная функция комплексного параметра μ, непрерывная (или аналитическая) в равномерной операторной топологии. Цель этого параграфа — исследовать, как меняются спектр и резольвентный оператор при малом изменении μ. Основной результат этого параграфа — теорема, по существу принадлежащая Реллиху, описывающая, как меняются изолированные точки спектра $T(0)$, если $T(\mu)$ аналитически зависит от μ.

1. Лемма. *Множество G элементов $B(\mathfrak{X})$, имеющих в $B(\mathfrak{X})$ обратные, открыто в равномерной топологии $B(\mathfrak{X})$ и содержит вместе с оператором A сферу $\{B \mid |A - B| < |A^{-1}|^{-1}\}$. Если оператор B лежит в этой сфере, то его сбратный представим рядом*

$$B^{-1} = A^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} [(A-B)A^{-1}] .$$

Кроме того, отображение $A \to A^{-1}$ множества Q на себя есть гомеоморфизм в равномерной операторной топологии.

Доказательство. Пусть $|I - B| < 1$, так что ряд $S = \sum_{n=0}^{\infty} (I - B)^n$

сходится. Так как

$$SB = BS = [I-(I-B)]\,S = \sum_{n=0}^{\infty}(I-B)^n - \sum_{n=1}^{\infty}(I-B)^n = I,$$

то множество $\{B \mid |I-B| < 1\} \subseteq G$. Пусть теперь $A \in G$, и пусть $|A-B| < |A^{-1}|^{-1}$. Тогда $|I-BA^{-1}| = |(A-B)A^{-1}| < 1$; следовательно, по только что доказанному, оператор BA^{-1} имеет обратный в $B(\mathfrak{X})$, представимый рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty}(I-BA^{-1})^n = \sum_{n=0}^{\infty}[(A-B)A^{-1}]^n.$$

Таким образом, B имеет обратный в $B(\mathfrak{X})$, представимый формулой, указанной в лемме. Эта формула показывает, что

$$|B^{-1}-A^{-1}| = \left|A^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}[(A-B)A^{-1}]^n\right| \leqslant \frac{|A^{-1}|^2|A-B|}{1-|A-B||A^{-1}|},$$

откуда следует, что отображение $B \to B^{-1}$ множества G на себя является гомеоморфизмом, ч. т. д.

2. Следствие. *Пусть* $T,\ T_1 \in B(\mathfrak{X})$, $\lambda \in \varrho(T)$ *и* $|T-T_1| < |R(\lambda;\ T)|^{-1}$. *Тогда* $\lambda \in \varrho(T_1)$, *и*

$$R(\lambda;\ T_1) = R(\lambda;\ T)\sum_{n=0}^{\infty}[(T_1-T)R(\lambda;\ T)]^n.$$

3. Лемма. *Пусть* $T \in B(\mathfrak{X})$ *и* $\varepsilon > 0$. *Тогда существует* $\delta > 0$, *такое, что если* $T_1 \in B(\mathfrak{X})$ *и* $|T_1-T| < \delta$, *то* $\sigma(T_1) \subseteq S(\sigma(T),\ \varepsilon)$ *и*

$$|R(\lambda;\ T_1)-R(\lambda;\ T)| < \varepsilon,\quad \lambda \notin S(\sigma(T),\ \varepsilon).$$

Доказательство. Согласно лемме 1,

$$\lim_{\lambda\to\infty}|R(\lambda;\ T)| = \lim_{\lambda\to\infty}\left|\lambda^{-1}\left(I-\frac{T}{\lambda}\right)^{-1}\right| = 0,$$

так что $|R(\lambda;\ T)| \leqslant N_\varepsilon$ для λ из дополнения к $S(\sigma(T),\ \varepsilon)$. Таким образом, по следствию 2, из неравенства $\delta_1 = N_\varepsilon^{-1} > |T_1-T|$ вытекает, что $\sigma(T_1) \subseteq S(\sigma(T,\ \varepsilon)$. В силу того же следствия 2,

$$|R(\lambda;\ T_1)-R(\lambda;\ T)| < \frac{N_\varepsilon^2|T_1-T|}{1-|T_1-T|N_\varepsilon} < \varepsilon,$$

если $|T_1-T| < \delta_2 = \varepsilon/(N_\varepsilon^2+\varepsilon N_\varepsilon)$. Таким образом, утверждение леммы будет доказано, если взять за δ наименьшее из чисел δ_1 и δ_2, ч. т. д.

4. Лемма. *Пусть* $T(\mu)$ — *аналитическая операторнозначная функция, определенная при* $|\mu| < \gamma$, $\gamma > 0$, *и пусть* U — *открытое*

множество, такое, что $\overline{U} \subset \rho(T(0))$. *Тогда существует* $\delta > 0$, *такое, что если* $|\mu| < \delta$, *то* $\overline{U} \subset \rho(T(\mu))$ *и* $R(\lambda;\ T(\mu))$ — *аналитическая функция* μ *при всех* $\lambda \in U$.

Доказательство. По лемме 3, существует δ_1, такое, что $\overline{U} \subset \rho(T(\mu))$, если $|\mu| < \delta_1$. Пусть $\delta \leqslant \delta_1$ выбрано так, что $|T(0) - T(\mu)| < \inf_{\lambda \in U} |R(\lambda;\ T(0))|^{-1}$, если $|\mu| < \delta$. Из следствия 2 вытекает, что

$$[*] \qquad R(\lambda;\ T(\mu)) = R(\lambda;\ T(0)) \sum_{n=0}^{\infty} [(T(\mu) - T(0))\, R(\lambda;\ T(0))]^n.$$

Так как ряд сходится абсолютно и равномерно при $|\mu| < \delta$ и функция $T(\mu)$ аналитична, то из общей теории аналитических функций (см § III.14) следует, что $R(\lambda;\ T(\mu))$ — аналитическая функция μ в круге $|\mu| < \delta$ при всех $\lambda \in U$, ч. т. д.

5. Лемма. *Пусть* $T \in B(\mathfrak{X})$, $f \in \mathcal{F}(T)$ *и* $\varepsilon > 0$. *Тогда существует* $\delta > 0$, *такое, что если* $T_1 \in B(\mathfrak{X})$ *и* $|T_1 - T| < \delta$, *то* $f \in \mathcal{F}(T_1)$ *и* $|f(T) - f(T_1)| < \varepsilon$.

Доказательство. Пусть U — окрестность спектра $\sigma(T)$, в которой функция f аналитична. Пусть U_1 — окрестность спектра $\sigma(T)$, граница B которой состоит из конечного числа спрямляемых жордановых кривых, причем $U_1 \cup B \subset U$. Тогда, по лемме 3, существует $\delta_1 > 0$, такое, что $\sigma(T_1) \subset U_1$, если $|T_1 - T| < \delta_1$. Следовательно, $f \in \mathcal{F}(T_1)$, если только $|T_1 - T| < \delta_1$. Согласно той же лемме 3, оператор $R(\lambda,\ T_1)$ близок к оператору $R(\lambda;\ T)$ равномерно по $\lambda \in B$, если $|T_1 - T|$ мало.

Таким образом, при некотором положительном $\delta \leqslant \delta_1$

$$|f(T_1) - f(T)| = \frac{1}{2\pi} \int_B f(\lambda)\, \{R(\lambda;\ T_1) - R(\lambda;\ T)\}\, d\lambda\, | < \varepsilon, \quad \text{ч. т. д.}$$

6. Лемма. *Пусть* $f \in \mathcal{F}(T(0))$, *где* $T(\mu)$ — *аналитическая операторнозначная функция, определенная в круге* $|\mu| < \gamma$, $\gamma > 0$. *Тогда существует положительное* $\delta < \gamma$, *такое, что* $f \in \mathcal{F}(T(\mu))$ *и* $f(T(\mu))$ — *аналитическая операторнозначная функция* μ *при* $|\mu| < \delta$.

Доказательство. Пусть B выбрана так же, как в доказательстве леммы 5. Согласно лемме 4, можно найти такое δ, что ряд [*], используемый в ее доказательстве, сходится абсолютно и равномерно при $\lambda \in B$. Таким образом,

$$f(T(\mu)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_B f(\lambda)\, [T(\mu) - T(0)]^n\, [R(\lambda,\ T(0))]^{n+1}\, d\lambda,$$

и ряд справа сходится к аналитической функции μ, ч. т. д.

Леммы 4 и 6 могут быть заметно улучшены в том важном случае, когда спектр $\sigma(T(0))$ содержит такую изолированную точку λ_0, что пространство $E(\lambda_0;\ T(0))\mathfrak{X}$ конечномерно. Чтобы изучить этот случай, нам понадобится прежде всего следующая лемма:

7. Лемма. *Пусть E, E_1—два проектора в $\mathfrak{X}$, такие, что $|E-E_1|<\min(|E|^{-1},\ |E_1|^{-1})$. Если один из них имеет конечномерную область значений, то же верно и для другого и*

$$\dim E\mathfrak{X}=\dim E_1\mathfrak{X}.$$

Доказательство. Рассмотрим отображение EE_1E, суженное на $E\mathfrak{X}$. Так как E есть тождественный оператор в $E\mathfrak{X}$ и так как по предположению $|EE_1E-E|<1$, то из леммы 1 видно, что EE_1E — взаимно однозначное отображение $E\mathfrak{X}$ на себя, и тем самым $EE_1E\mathfrak{X}=E\mathfrak{X}$. Поэтому $E\mathfrak{X}\supseteq EE_1\mathfrak{X}\supseteq EE_1E\mathfrak{X}=E\mathfrak{X}$ и, следовательно, $E\mathfrak{X}=EE_1\mathfrak{X}$. Это показывает, что $\dim E_1\mathfrak{X}\geqslant\dim E\mathfrak{X}$. Аналогично $\dim E\mathfrak{X}\geqslant\dim E_1\mathfrak{X}$, и, таким образом, $\dim E\mathfrak{X}=\dim E_1\mathfrak{X}$, ч. т. д.

8. Лемма. *Пусть $E(\mu)$ — семейство проекторов, аналитически зависящих от параметра μ в круге $|\mu|<\gamma$, $\gamma>0$, и пусть $E(0)\mathfrak{X}$ имеет конечную размерность m. Тогда существует такое $\delta>0$, что если $\{x_1,\ \ldots,\ x_m\}$ — базис* в $E(0)\mathfrak{X}$, *то при $|\mu|<\delta$ множество $\{E(\mu)x_1,\ \ldots,\ E(\mu)x_m\}$ является базисом в $E(\mu)\mathfrak{X}$.*

Доказательство. Легко видеть, что существует δ, $0<\delta\leqslant\gamma$, такое, что

$$|E(0)-E(\mu)|<\min(|E(0)|^{-1},\ |E(\mu)|^{-1}),\quad |\mu|<\delta.$$

Из доказательства леммы 7 мы знаем, что размерность подпространства $E(\mu)E(0)\mathfrak{X}$ равна m. Так как векторы $\{x_1,\ \ldots,\ x_m\}$ порождают $E(0)\mathfrak{X}$, то множество $\{E(\mu)x_1,\ \ldots,\ E(\mu)x_m\}$ порождает m-мерное пространство $E(\mu)E(0)\mathfrak{X}$. Следовательно, эти векторы линейно независимы и образуют базис в подпространстве $E(\mu)\mathfrak{X}$, которое, по лемме 7, m-мерно, ч. т. д.

9. Теорема. *Пусть $\gamma>0$ и $T(\mu)$ — операторнозначная функция, определенная и аналитическая при $|\mu|<\gamma$. Пусть λ_0 — изолированная точка спектра $\sigma(T(0))$, и пусть подпространство $E(\lambda_0;\ T(0))\mathfrak{X}$ имеет конечную размерность m. Пусть U — открытое множество, такое, что $\bar{U}\cap\sigma(T(0))=\{\lambda_0\}$. Тогда существуют положительное $\delta<\gamma$, целое число $k\leqslant m$ и целое число n, такие, что при $|\mu|<\delta$ множество $U\cap\sigma(T(\mu))$ состоит из конечного числа точек $\{\lambda_1(\mu),\ldots,\lambda_k(\mu)\}$. Каждая функция $\lambda_i(\mu)$ аналитически зависит от главного значения дробной степени $\mu^{1/n}$ переменной μ и удовлетворяет условию $\lambda_i(0)=\lambda_0$. Кроме того, проекторы $E(\lambda_i(\mu);\ T(\mu))$ могут быть разложены в ряд*

Лорана по дробным степеням

$$E(\lambda_i(\mu);\ T(\mu)) = \sum_{j=-N}^{\infty} A_{ij}\mu^{j/n},$$

где A_{ij} — операторы из $B(\mathfrak{X})$.

Доказательство. Для простоты обозначений будем писать $\sigma(\mu)$ вместо $U \cap \sigma(T(\mu))$. Из леммы 6 видно, что $\sigma(\mu)$ при малых μ есть спектральное множество оператора $T(\mu)$. Пусть $E(\mu)$ — проектор $E(\sigma(\mu);\ T(\mu))$. Из леммы 6 следует, что $E(\mu)$ аналитически зависит от μ. Если $\{x_1, \ldots, x_m\}$ — базис в $E(0)\mathfrak{X}$, то, по лемме 8, существует положительное число δ_1, такое, что при $|\mu| < \delta_1$ множество $\{E(\mu)x_1, \ldots, E(\mu)x_m\}$ является базисом в $E(\mu)\mathfrak{X}$.

Пусть функции t_{ij} определяются уравнениями

$$T(\mu)E(\mu)x_i = \sum_{j=1}^{m} t_{ij}(\mu)E(\mu)x_j, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Мы покажем сначала, что t_{ij} — аналитические функции, если μ достаточно мало. Пусть функционалы $x_k^* \in \mathfrak{X}^*$ таковы, что $x_k^*(x_j) = \delta_{kj}$, $k = 1, \ldots, m$. Первое из приведенных выше равенств равносильно m скалярным уравнениям

$$x_k^*T(\mu)E(\mu)x_i = \sum_{j=1}^{m} t_{ij}(\mu)x_k^*E(\mu)x_j, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Так как $x_k^*E(0)x_j = x_k^*x_j = \delta_{kj}$, то определитель $\Delta(\mu)$ матрицы $(x_k^*E(\mu)x_j)$ равен единице при $\mu=0$ и тем самым отделен от нуля при $|\mu| < \delta_2 < \delta_1$. Следовательно, эти уравнения можно разрешить относительно t_{ij} и получить в каждом случае частное от деления аналитической функции на $\Delta(\mu)$. Так как в круге $|\mu| < \delta_2$ функция $\Delta(\mu) \neq 0$, то $\Delta^{-1}(\mu)$, а тем самым и t_{ij} аналитичны в этом круге.

Если мы обозначим через $T_1(\mu)$ сужение $T(\mu)$ на m-мерное пространство $E(\mu)\mathfrak{X}$ при $|\mu| < \delta_2$, то спектр $T_1(\mu)$ будет состоять из корней уравнения

$$[*] \qquad d(\lambda, \mu) = \det(\lambda\delta_{ij} - t_{ij}(\mu)) = 0.$$

По теореме 3.20, $\sigma(\mu) = \sigma(T_1(\mu))$. Функция $d(\lambda, \mu)$ является многочленом от λ степени m, коэффициенты которого — аналитические функции μ; при $\mu=0$ уравнение [*] имеет только m-кратный корень $\lambda=\lambda_0$. Согласно подготовительной теореме Вейерштрасса (III.14), существуют положительное $\delta \leqslant \delta_2$, целое число $k \leqslant m$ и целое число n, такие, что при $|\mu| < \delta$, $\mu \neq 0$ функция $d(\lambda, \mu)$ имеет ровно k различных нулей $\lambda_1(\mu), \ldots, \lambda_k(\mu)$, причем эти нули аналитически зависят от μ и представляются рядом

$$\lambda_j(\mu) = \sum_{p=0}^{\infty} a_{jp}\mu^{p/n}$$

по степеням главного значения $\mu^{1/n}$.

Пусть $E_i(\mu) = E(\lambda_i(\mu);\ T(\mu))$ при $0 < |\mu| < \delta$ и $1 \leqslant i \leqslant k$. Остается показать, что каждый проектор $E_i(\mu)$ имеет в окрестности точки $\mu = 0$ разложение Лорана по степеням $\mu^{1/n}$. Пусть $q(\lambda) = \prod_{i=2}^{k} (\lambda - \lambda_i(\mu))^m$, $r(\lambda) = 1/q(\lambda)$ и

$$p(\lambda) = \sum_{j=0}^{m} \frac{r^{(j)}(\lambda_1(\mu))}{j!}(\lambda - \lambda_1(\mu))^j.$$

Рассмотрим многочлен

$$S(\lambda) = p(\lambda)\,q(\lambda).$$

По правилу Лейбница,

$$S^{(j)}(\lambda) = \sum_{i=0}^{j} (C_j^i)\, p^{(i)}(\lambda)\, q^{(j-i)}(\lambda).$$

Вид многочлена q показывает, что при $0 < |\mu| < \delta$

$$S^{(j)}(\lambda_i(\mu)) = 0, \quad j = 0, \ldots, m-1, \quad i = 2, \ldots, k.$$

Кроме того,

$$p^{(j)}(\lambda_1(\mu)) = r^{(j)}(\lambda_1(\mu)), \quad j = 0, \ldots, m.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} S^{(j)}(\lambda_1(\mu)) &= \sum_{i=0}^{j} (C_j^i)\, q^{(j-i)}(\lambda_1(\mu))\, p^{(i)}(\lambda_1(\mu)) = \\ &= \sum_{i=0}^{j} C_j^i q^{(j-i)}(\lambda_1(\mu))\, r^{(i)}(\lambda_1(\mu)) = \\ &= [q(\lambda)\, r(\lambda)]^{(j)}(\lambda_1(\mu)), \quad 0 < |\mu| < \delta. \end{aligned}$$

Так как $q(\lambda)\, r(\lambda) = 1$, то

$$S^{(j)}(\lambda_1(\mu)) = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant m,$$
$$S(\lambda_1(\mu)) = 1.$$

Следовательно, по теореме 1.8,

$$E_1(\mu) = S(T(\mu))\, E(\mu).$$

Так как коэффициенты многочлена S около точки $\mu = 0$ разлагаются в ряды Лорана по степеням $\mu^{1/n}$, содержащие только конечное число отрицательных степеней, то лорановское разложение проектора $E_1(\mu)$ обладает тем же свойством. Проекторы $E_i(\mu)$, $i = 2, \ldots, k$, рассматриваются аналогично, ч. т. д.

Следующая теорема распространяет теорему Тейлора на функции от оператора.

10. Теорема. *Пусть S и N — коммутирующие операторы. Пусть f — функция, аналитическая в области D, содержащей спектр $\sigma(S)$ оператора S вместе с некоторой его ε-окрестностью. Предположим, что спектр $\sigma(N)$ оператора N лежит внутри открытого круга радиуса ε с центром в начале координат. Тогда функция f аналитична в некоторой окрестности спектра $\sigma(S+N)$, и*

$$f(S+N)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(S)N^n}{n!},$$

причем ряд справа сходится в равномерной операторной топологии.

Мы начнем доказательство теоремы 10 с доказательства следующей леммы.

11. Лемма. *Пусть C — множество, наименьшее расстояние от которого до спектра $\sigma(T)$ оператора T больше некоторого положительного ε. Тогда существует постоянная K, такая, что*

$$|R(\lambda, T)^n|<K\varepsilon^{-n}, \quad n\geqslant 0,\ \lambda\in c.$$

Доказательство. Пусть открытое множество U содержит спектр $\sigma(T)$ и имеет границу, которая состоит из конечного числа спрямляемых жордановых кривых. Предположим также, что для всех $\lambda\in C$ и всех $\alpha\in U\bigcup B$ мы имеем $|\lambda-\alpha|>\varepsilon$. Тогда

$$|R(\lambda;\ T)^n|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_B(\lambda-\alpha)^{-n}R(\alpha;\ T)\,d\alpha\right|\leqslant K\varepsilon^{-n}, \qquad \text{ч. т. д.}$$

Доказательство теоремы 10. Пусть $\delta=\sup\limits_{\lambda\in\sigma(N)}|\lambda|$, по предположению, $\delta<\varepsilon$. Выберем $\vartheta<1$ так, что $\delta<\vartheta\varepsilon<\varepsilon$, и пусть B — окружность $\{\lambda\,|\,|\lambda|=\vartheta\varepsilon\}$. Тогда

$$|N^n|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_B\lambda^nR(\lambda;\ N)\,d\lambda\right|\leqslant K(\vartheta\varepsilon)^{n+1}, \quad n=0,\ 1,\ \ldots$$

Это неравенство вместе с леммой 11 показывает, что ряд

$$V=\sum_{n=0}^{\infty}R(\lambda;\ S)^{n+1}N^n$$

сходится равномерно по λ из любого множества C, минимум расстояния от которого до спектра $\sigma(S)$ больше, чем ε. Так как операторы S и N коммутируют, то после непосредственного умножения видно, что $V(\lambda I-S-N)=(\lambda I-S-N)V=I$. Таким образом если расстояние от точки λ до спектра $\sigma(S)$ больше, чем ε, то λ лежит в резольвентном множестве оператора $S+N$ и

$$R(\lambda;\ S+N)=\sum_{n=0}^{\infty} R(\lambda;\ S)^{n+1} N^n.$$

Таким образом, функция f теоремы 10 аналитична в окрестности $\sigma(S+N)$, как и утверждалось.

Пусть теперь C обозначает объединение конечного набора $C_1, \ldots, C_n$ непересекающихся замкнутых спрямляемых жордановых контуров, которые ограничивают область D, содержащую ε-окрестность спектра $\sigma(T)$, и лежат вместе с D целиком внутри области аналитичности функции f. Предположим, кроме того, что контуры C_i положительно ориентированы в обычном смысле теории функций комплексного переменного. Тогда

$$f(S+N)=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(\lambda) R(\lambda;\ S+N)\,d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\int_C f(\lambda)(R(\lambda;\ S))^{n+1} N^n\,d\lambda.$$

С другой стороны, из тождества Гильберта

$$R(\lambda_1;\ S)-R(\lambda_2;\ S)=(\lambda_2-\lambda_1) R(\lambda_1;\ S) R(\lambda_2;\ S)$$

видно, что $(d/d\lambda) R(\lambda;\ S)=-(R(\lambda;\ S))^2$ и, по индукции, что

$$\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^n R(\lambda;\ S)=(-1)^n n!\,(R(\lambda;\ S))^{n+1}.$$

Следовательно,

$$\int_C f(\lambda)(R(\lambda;\ S))^{n+1}\,d\lambda=\frac{(-1)^n}{n!}\int_C f(\lambda)\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^n R(\lambda;\ S)\,d\lambda.$$

Интегрируя n раз по частям, находим, что

$$\int_C f(\lambda)(R(\lambda;\ S))^{n+1}\,d\lambda=\frac{1}{n!}\int_C\left\{\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^n f(\lambda)\right\} R(\lambda;\ S)\,d\lambda;$$

поэтому

$$f(S+N)=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_C f^{(n)}(\lambda) R(\lambda;\ S)\,d\lambda\right\} N^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(S)\,N^n}{n!},$$

и теорема 10 доказана.

12. Следствие. *Если $\sigma(N)=\{0\}$, где N — оператор, коммутирующий с оператором S, и f — функция, аналитическая в окрест-*

ности спектра $\sigma(S)$, *то* f — *аналитична в окрестности спектра* $\sigma(S+N)$ *и*

$$f(S+N)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(S)\,N^n}{n!},$$

причем ряд справа сходится в равномерной операторной топологии.

Мы закончим этот параграф следующей леммой, которая понадобится в гл. VIII.

13. Лемма. *Если* $\lambda\to T(\lambda)$ — *аналитическая операторнозначная функция, определенная в области* D, *то функция* $\lambda\to T^{-1}(\lambda)$ *определена и аналитична на открытом подмножестве* D. *Если оператор* $T(\lambda)$ *вполне непрерывен при всех* $\lambda\in D$ *и если* D *связно, то либо оператор* $I-T(\lambda)$ *не имеет ограниченного обратного ни в одной точке области* D, *либо этот обратный существует всюду в* D, *кроме, быть может, счетного числа изолированных точек.*

Доказательство. Если в точке $\lambda_0\in D$ оператор $T^{-1}(\lambda_0)$ существует, то из леммы 6 следует, что и в некоторой окрестности точки λ_0 обратный оператор $T^{-1}(\lambda)$ существует и аналитичен по λ. Чтобы доказать вторую часть леммы, предположим, что существуют число $\lambda_0\in D$ и последовательность $\{\lambda_m\}\subset D$, такие, что $1\in\sigma(T(\lambda_m))$, $m\geqslant 0$; $\lambda_m\to\lambda_0$ и $\lambda_m\neq\lambda_0$, $m>0$. Покажем, что $1\in\sigma(T(\lambda))$ при всех $\lambda\in D$. Согласно теоремам 4.5 и 9, при λ, достаточно близких к λ_0, точки спектра $\sigma(T(\lambda))$, лежащие в некоторой окрестности точки $\alpha=1$, определяются рядами дробных степеней

$$\sum_{j=0}^{\infty}a_j(\lambda-\lambda_0)^{j/n},\ \ldots,\ \sum_{j=0}^{\infty}c_j(\lambda-\lambda_0)^{j/n}.$$

Так как $1\in\sigma(T(\lambda_m))$ при $m\geqslant 0$, то один из этих рядов принимает около точки λ_0 единичное значение бесконечное число раз и, следовательно, тождественно равен единице. Таким образом, при λ, достаточно близких к λ_0, $1\in\sigma(T(\lambda))$. Пусть теперь A обозначает множество точек λ_0 в D, таких, что существует последовательность $\{\lambda_m\}\subset D$, удовлетворяющая условиям $1\in\sigma(T(\lambda_m))$, $m\geqslant 0$, $\lambda_m\to\lambda_0$ и $\lambda_m\neq\lambda_0$, $m>0$. Выше показано, что множество A открыто; так как оно также замкнуто в D, а D связно, то либо $A=\varnothing$, либо $A=D$. Это завершает доказательство леммы, ч. т. д.

7. Тауберовы теоремы

Пусть $\{f_n\}$ — последовательность функций в $\mathcal{F}(T)$, $T\in B(\mathfrak{X})$; предположим, что последовательность $\{f_n(T)\}$ сходится в $B(\mathfrak{X})$. Если $f\in\mathcal{F}(T)$, то ясно, что и последовательность $\{f(T)f_n(T)\}$ сходится. Нас интересует обратная задача: при каких условиях на f,

f_n и T сходимость $\{f(T)f_n(T)\}$ влечет за собой сходимость $\{f_n(T)\}$? Теоремы, дающие ответы на подобные вопросы, называются тауберовыми. Прототипом этих теорем является эргодическая теорема, которая получается, когда $f(\lambda)=1-\lambda$ и $f_n(\lambda)=n^{-1}\sum_{j=0}^{n-1}\lambda^j$. В этом случае определяют условия, при которых сходимость $n^{-1}T^n$ влечет сходимость средних арифметических $n^{-1}(I+\ldots+T^{n-1})$.

Мы сначала рассмотрим сформулированную выше обратную задачу для сходимости в равномерной операторной топологии, а потом изучим этот же вопрос, когда $B(\mathfrak{X})$ имеет слабую или сильную операторные топологии.

Заметим, что если $f(\lambda)\neq 0$ при $\lambda\in\sigma(T)$, то оператор $f(T)$ имеет ограниченный обратный, и, следовательно, последовательность $f_n(T)=[f(T)]^{-1}f(T)f_n(T)$ сходится. Однако не очевидно, что сходимость последовательности $\{f_n(T)\}$ может быть получена в том случае, когда функция f обращается в нуль в некоторых точках спектра $\sigma(T)$. Следующая теорема рассматривает такую возможность.

1. Теорема. *Пусть $f, f_n\in\mathcal{F}(T)$ и последовательность $\{f(T)f_n(T)\}$ сходится к нулю в равномерной операторной топологии. Предположим, что функция f обращается в нуль на множестве $\sigma(T)$ только в конечном числе полюсов $R(\lambda; T)$, причем каждый корень λ_0 функции f на $\sigma(T)$ имеет конечный порядок $\alpha(\lambda_0)$. Предположим, что последовательности $\{f_n^{(m)}(\lambda_0)\}$ сходятся при $0\leqslant m<\alpha(\lambda_0)$ и что $\lim_{n\to\infty}f_n(\lambda_0)\neq 0$. Тогда последовательность $\{f_n(T)\}$ сходится в равномерной операторной топологии.*

Доказательство. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — корни функции f на спектре $\sigma(T)$, и пусть α_i и ν_i, $i=1, \ldots, k$, — порядки λ_i как корня f и как полюса $R(\lambda; T)$ соответственно.

Мы сначала покажем, что $\nu_i\leqslant\alpha_i$. Пусть $g_n=f\cdot f_n$; тогда последовательность $\{g_r(T)\}$ сходится к нулю в равномерной операторной топологии. Согласно следствию 3.23, $\{g_n^{(m)}(\lambda_i)\}$ сходится к нулю при $0\leqslant m<\nu_i$. Если $\alpha_i<\nu_i$, то положим $m=\alpha_i$. Поскольку λ_i корень f порядка α_i, то $f^{(k)}(\lambda_i)=0$, $k=0, 1, \ldots, \alpha_i-1$, $f^{(\alpha_i)}(\lambda_i)\neq 0$ и

$$g_n^{(\alpha_i)}(\lambda_i)=f^{(\alpha_i)}(\lambda_i)f_n(\lambda_i)\to 0.$$

Поэтому $f_n(\lambda_i)\to 0$, а это противоречит условию теоремы. Следовательно, $\nu_i\leqslant\alpha_i$.

Пусть теперь σ_1 — дополнение в $\sigma(T)$ множества $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$. В силу теоремы 3.22 справедливо следующее равенство:

$$[*]\qquad f_n(T)=f_n(T)E(\sigma_1)+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{\nu_i-1}\frac{f_n^{(j)}(\lambda_i)}{j!}(T-\lambda_iI)^jE(\lambda_i).$$

Так как функция f не обращается в нуль на σ_1, то существует такая функция $h \in \mathscr{F}(T)$, что fh равна тождественно единице на σ_1 и нулю на $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$. Таким образом, $f(T)\,h(T) = E(\sigma_1)$, так что последовательность $f_n(T)\,E(\sigma_1)$ сходится в равномерной операторной топологии. Из равенства [*] следует, что последовательность $\{f_n(T)\}$ будет сходиться в равномерной топологии, если при $m < \nu_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$, сходятся последовательности $\{f_n^{(m)}(\lambda_i)\}$. Так как $\nu_i \leqslant \alpha_i$, то теорема доказана.

2. Следствие. *Пусть* $|T^n| = o(n)$ *и* $\lambda = 1$ — *полюс* $R(\lambda;\,T)$ *первого порядка. Тогда* $\{n^{-1}\sum_{j=0}^{n-1} T^j\}$ *сходится в равномерной топологии к* $E(1)$.

Доказательство. Пусть $f_n(\lambda) = n^{-1}(1+\lambda+\ldots+\lambda^{n-1})$ и $f(\lambda) = 1-\lambda$. Тогда $f(\lambda)\,f_n(\lambda) = n^{-1}(1-\lambda^n)$ и $f(T)\,f_n(T) = n^{-1}(I - T^n)$. Так как $|T^n| = o(n)$, то $f(T)\,f_n(T) \to 0$. Из теоремы 1 непосредственно следует, что последовательность $\{n^{-1}\sum_{j=0}^{n-1} T^j\}$ сходится в равномерной операторной топологии.

Пусть σ_1 — дополнение в $\sigma(T)$ множества $\{1\}$, и пусть функция $h \in \mathscr{F}(T)$ равна $(1-\lambda)^{-1}$ в окрестности σ_1 и тождественно равна нулю в окрестности $\lambda = 1$. Тогда $h(T)\,f(T) = E(\sigma_1)$. Так как $f(T)\,f_n(T) \to 0$, то

$$f_n(T)\,E(\sigma_1) = E(\sigma_1)\,f_n(T) = h(T)\,f(T)\,f_n(T) \to 0.$$

Из равенства [*] теоремы 1 получаем

$$f_n(T) = f_n(T)\,E(\sigma_1) + f_n(1)\,E(1),$$

так что $f_n(T) \to E(1)$ в равномерной топологии, ч. т. д.

Основным условием в теореме 1 является предположение о том, что каждый нуль функции f есть полюс $R(\lambda;\,T)$. Это предположение не обязательно в аналогах теоремы 1 для слабой и сильной топологии, которые мы далее изучаем.

3. Теорема. *Пусть* $f, f_n \in \mathscr{F}(T)$ *и последовательность* $\{f(T)\,f_n(T)\}$ *сходится к нулю в слабой операторной топологии. Предположим, что множество* $\{f_n(T)\,x\}$ *слабо компактно при всех* x *из* $\mathfrak{X}$ *и что функция* f *обращается в нуль в конечном числе точек спектра* $\sigma(T)$. *Если каждый ее корень* λ_0 *имеет конечный порядок* $\alpha(\lambda_0)$, *если последовательности* $\{f_n^{(m)}(\lambda_0)\}$ *сходятся при* $0 \leqslant m < \alpha(\lambda_0)$ *и если* $\lim_{n\to\infty} f_n(\lambda_0) \neq 0$, *то последовательность* $\{f_n(T)\}$ *сходится в слабой операторной топологии. Кроме того,*

$$\mathfrak{X} = \overline{f(T)\,\mathfrak{X}} \oplus \{x \mid x \in \mathfrak{X},\ f(T)\,x = 0\}.$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{X}_1=\overline{f(T)\mathfrak{X}}$, $\mathfrak{X}_2=\{x \mid x\in\mathfrak{X},\ f(T)x=0\}$ и $\mathfrak{X}_3^*=\{x^* \mid x^*\in\mathfrak{X}^*,\ f(T^*)x^*=0\}$. Если подпространство $\mathfrak{X}_2$ инвариантно относительно оператора $U\in B(\mathfrak{X})$, то через U_2 мы обозначаем сужение U на $\mathfrak{X}_2$. Покажем сначала, что для любого ненулевого вектора x из $\mathfrak{X}_2$ последовательность $\{f_n(T)x\}$ сходится к ненулевому элементу $\mathfrak{X}_2$. Так как $f(T)$ коммутирует с $R(\lambda;\ T)$, $\lambda\in\varrho(T)$, то $R(\lambda;\ T)\mathfrak{X}_2\subseteq\mathfrak{X}_2$, и, следовательно, $R(\lambda;\ T)_2=R(\lambda;\ T_2)$ и $\sigma(T_2)\subseteq\sigma(T)$. Более того, определение 3.9 показывает, что $g(T)_2=g(T_2)$ для $g\in\mathcal{F}(T)$. Так как $f(T_2)=0$, то из теоремы 3.16 следует, что $\sigma(T_2)$ является подмножеством множества $\{\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_k\}$ нулей f и что порядок $\nu(\lambda_i)$ точки λ_i как полюса $R(\lambda;\ T_2)$ не превосходит порядка $\alpha(\lambda_i)$ точки λ_i как нуля f. Пусть g — такая функция из $\mathcal{F}(T_2)$, что $g^{(m)}(\lambda_i)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n^{(m)}(\lambda_i)$ при $1\leqslant i\leqslant k$ и $0\leqslant m<\nu(\lambda_i)$. По теореме 3.22, последовательность $\{f_n(T_2)\}$ сходится к оператору $g(T_2)$ в сильной операторной топологии $\mathfrak{X}_2$. Так как множество $g(\sigma(T_2))$ не содержит точки 0, то оператор $g(T_2)$ имеет обратный в пространстве $\mathfrak{X}_2$. Таким образом, для каждого ненулевого вектора x из $\mathfrak{X}_2$ последовательность $\{f_n(T)x\}$ сходится к ненулевому элементу в $\mathfrak{X}_2$. Мы можем доказать таким же способом, что для каждого ненулевого функционала x^* из $\mathfrak{X}_3^*$ последовательность $\{f_n(T^*)x^*\}$ сходится к ненулевому элементу в $\mathfrak{X}_3^*$.

Докажем далее, что $\mathfrak{X}_1\cap\mathfrak{X}_2=\{0\}$. Так как множество $\{f_n(T)x\}$ слабо компактно при всех x из $\mathfrak{X}$, то из II.3.27 и II.3.21 вытекает, что последовательность $\{|f_n(T)|\}$ ограничена. Так как мы предположили, что $\{f_n(T)x\}$ слабо сходится к нулю при $x\in f(T)\mathfrak{X}$, то из теоремы II.3.6[1]) следует, что $\{f_n(T)x\}$ сходится слабо к нулю при $x\in\mathfrak{X}_1$. Но так как $\{f_n(T)x\}$ сходится сильно к ненулевому элементу при любом ненулевом $x\in\mathfrak{X}_2$, мы заключаем, что $\mathfrak{X}_1\cap\mathfrak{X}_2=\{0\}$.

Далее будет показано, что $\{f_n(T)x\}$ сходится в слабой топологии при всех $x\in\mathfrak{X}$. Если это не так, то, в силу слабой компактности множества $\{f_n(T)x\}$, мы можем выделить две последовательности $\{f_{n_i}(T)x\}$ и $\{f_{m_i}(T)x\}$, такие, что

$$\lim_{i\to\infty}f_{n_i}(T)x=y_1,\quad \lim_{i\to\infty}f_{m_i}(T)x=y_2,\quad y_1\neq y_2,$$

причем оба предела берутся в слабой топологии. Так как $f(T)f_n(T)$ сходится к нулю в слабой операторной топологии, то $f(T)(y_1-y_2)=0$. Таким образом, $y_1-y_2\in\mathfrak{X}_2$ и $y_1-y_2\notin\mathfrak{X}_1$. Согласно II.3.13, существует $x_0^*\in\mathfrak{X}^*$, такой, что $x_0^*(\mathfrak{X}_1)=0$ и $x_0^*(y_1-y_2)\neq 0$. Так как $f(T)\mathfrak{X}\subseteq\mathfrak{X}_1$, то $x_0^*(f(T)\mathfrak{X})=0$, так что

[1]) Теорема II.3.6 относится непосредственно лишь к случаю сильной сходимости. Нетрудно однако убедиться в том, что ее утверждение остается справедливым и для слабой сходимости. — *Прим. ред.*

$f(T)^* x_0^* = f(T^*) x_0^* = 0$; поэтому $x_0^* \in \mathfrak{X}_3^*$. Выше было отмечено, что $\{f_n(T^*) x^*\}$ сходится сильно при всех $x^* \in \mathfrak{X}_3^*$. Таким образом, $\lim_{n\to\infty} x_0^*(f_n(T)x) = \lim_{n\to\infty}(f_n(T^*)x_0^*)x$ существует для всех $x \in \mathfrak{X}$, и

$$x_0^*(y_1) = \lim_{i\to\infty} x_0^*(f_{n_i}(T)x) = \lim_{i\to\infty} x_0^*(f_{m_i}(T)x) = x_0^*(y_2).$$

что противоречит неравенству $x_0^*(y_1 - y_2) \neq 0$. Это доказывает, что последовательность $\{f_n(T)x\}$ сходится в слабой топологии при всех $x \in \mathfrak{X}$.

Чтобы доказать последнее утверждение теоремы, положим

$$T_0 x = \lim_{n\to\infty} f_n(T) x,$$

где предел берется в слабой топологии. Тогда, по II.3.21 и II.3.27, $T_0 \in B(\mathfrak{X})$. Кроме того, $T_0 x = g(T_2) x$ для x из $\mathfrak{X}_2$. Так как $g(T_2)$ имеет обратный на $\mathfrak{X}_2$, то $g(T_2)\mathfrak{X}_2 = \mathfrak{X}_2$ и $T_0\mathfrak{X} \supseteq \mathfrak{X}_2$. Аналогично $T_0^*\mathfrak{X}^* \supseteq \mathfrak{X}_3^*$. Но $T_0 f(T) = f(T) T_0 = 0$, поэтому $T_0\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}_2$ и $T_0\mathfrak{X}_1 = 0$. Таким образом, оператор E, определяемый формулой $Ex = g(T_2)^{-1} T_0 x$, $x \in \mathfrak{X}$, является проектором с областью значений $\mathfrak{X}_2$. Так как мы знаем, что $\mathfrak{X}_1 \cap \mathfrak{X}_2 = 0$, то, чтобы доказать, что $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 \oplus \mathfrak{X}_2$, достаточно проверить, что равенство $Ex = 0$ влечет включение $x \in \mathfrak{X}_1$. Если $Ex = 0$, то $T_0 x = 0$ и поэтому $(T_0^*\mathfrak{X}^*)x = 0$. Но $\{x^* \mid x^*(\mathfrak{X}_1) = 0\} = \mathfrak{X}_3^* \subseteq T_0^*\mathfrak{X}^*$; поэтому $x^*x = 0$ для $x^* \in \mathfrak{X}_3^*$. Из II.3.13 и определения $\mathfrak{X}_3^*$ следует, что $x \in \mathfrak{X}_1$; поэтому $(I - E)\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1$, ч. т. д.

Соответствующий результат для сильной операторной топологии следует из только что доказанного.

4. Теорема. *Пусть $f, f_n \in \mathcal{F}(T)$ и последовательность $\{f(T) f_n(T)\}$ сходится к нулю в сильной операторной топологии. Предположим, что множество $\{f_n(T)x\}$ слабо компактно при всех $x \in \mathfrak{X}$ и что функция f обращается в нуль в конечном числе точек спектра $\sigma(T)$. Если каждый ее корень λ_0 имеет конечный порядок $\alpha(\lambda_0)$, если последовательности $\{f_n^{(m)}(\lambda_0)\}$ сходятся при $0 \leqslant m < \alpha(\lambda_0)$ и если $\lim_{n\to\infty} f_n(\lambda_0) \neq 0$, то последовательность $\{f_n(T)\}$ сходится в сильной операторной топологии. Кроме того,*

$$\mathfrak{X} = \overline{f(T)\mathfrak{X}} \oplus \{x \mid x \in \mathfrak{X},\ f(T)x = 0\}.$$

Доказательство. Все части теоремы 4, кроме сильной сходимости последовательности $\{f_n(T)\}$, вытекают непосредственно из теоремы 3. Доказательство теоремы 3 показывает, что последовательность $\{f_n(T)x\}$ сходится при $x \in \mathfrak{X}_2$ и что последовательность $\{|f_n(T)|\}$ ограничена. Так как мы предполагаем, что $\{f_n(T)x\}$ сходится при $x \in f(T)\mathfrak{X}$, то из II.3.6 следует, что $\{f_n(T)x\}$

сходится при $x \in \mathfrak{X}_1 = \overline{f(T)\mathfrak{X}}$. Наш результат теперь вытекает из разложения $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 \oplus \mathfrak{X}_2$, ч. т. д.

Мы закончим этот параграф следствием теоремы 4, несколько отличным от эргодической теоремы, доказанной в следствии 2. Дальнейшие применения можно найти в упражнениях параграфа 8. В следующей главе теоремы 3 и 4 будут служить основой многочисленных утверждений эргодической теории.

5. Следствие. *Пусть $\mathfrak{X}$ рефлексивно, λ_n — последовательность в $\varrho(T)$, сходящаяся к нулю, и $\sup_n |\lambda_n R(\lambda_n; T)| < \infty$. Тогда*

$$\mathfrak{X} = \overline{T\mathfrak{X}} \oplus \{x \mid x \in \mathfrak{X},\ Tx = 0\},$$

и последовательность $\{\lambda_n R(\lambda_n; T)\}$ сходится в сильной операторной топологии к проектору E, такому, что $\{x \mid Ex = 0\} = \overline{T\mathfrak{X}}$, а область значений — $\{x \mid Tx = 0\}$.

Доказательство. Пусть $f_n(\lambda) = \lambda_n(\lambda_n - \lambda)^{-1}$ и $f(\lambda) = \lambda$. Тогда $f(T) f_n(T) = \lambda_n T R(\lambda_n; T) = \lambda_n^2 R(\lambda_n; T) - \lambda_n I$; поэтому $f(T) f_n(T) \to 0$ в равномерной операторной топологии. Так как $\mathfrak{X}$ рефлексивно, то из II.3.28 следует, что для всех x из $\mathfrak{X}$ последовательность $\{f_n(T)x\}$ слабо компактна. Так как $f_n(0) = 1$ при всех n, то, согласно теореме 4, $\lim_{n\to\infty} \lambda_n R(\lambda_n; T)$ существует в сильной топологии и имеет разложение, указанное выше. Рассмотрение доказательства теоремы 3 показывает, что $\lim_{n\to\infty} \lambda_n R(\lambda_n; T) = E$, ч. т. д.

8. Упражнения

1. Если T_n, $T \in B(\mathfrak{X})$, $T_n \to T$ и $0 \in \varrho(T_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, $0 \in \varrho(T)$ тогда и только тогда, когда $\sup_n |T_n^{-1}| < \infty$.

2. Пусть $g_n \in \mathcal{F}(T)$, $n = 1, 2, \ldots$. Предположим, что последовательность $g_n(T)$ сходится в равномерной операторной топологии к вполне непрерывному оператору. Пусть $\lambda \in \sigma(T)$ и $\lim_{n\to\infty} g_n(\lambda) \neq 0$. Показать, что λ есть полюс $\sigma(T)$ и что $E(\lambda; T)\mathfrak{X}$ имеет положительную конечную размерность. (Указание: см. упражнение VII.5.35.)

3. Показать, что если $g_n \in \mathcal{F}(T)$, $n = 1, 2, \ldots$, и последовательность $\{g_n(T)\}$ сходится в равномерной операторной топологии к проектору E, то существует такое спектральное подмножество σ_1 спектра $\sigma(T)$, что $E = E(\sigma_1)$. (Указание: см. упражнение VII.5.32.)

4. Пусть $T \in B(\mathfrak{X})$, $T_n \in B(\mathfrak{X})$, $n = 1, 2, \ldots$. Предположим, что $T_n \to T$ в равномерной операторной топологии. Пусть λ — изолированная точка спектра $\sigma(T)$, такая, что $E(\lambda; T)\mathfrak{X}$ одномерно. Пусть U — такая окрестность точки λ, что $\overline{U} \cap \sigma(T) = \{\lambda\}$. Показать,

что при достаточно больших n множество $U \cap \sigma(T_n)$ содержит только одну точку λ_n, что $\lambda_n \to \lambda$ и что $E(\lambda_n; T_n) \to E(\lambda; T)$ в равномерной операторной топологии.

5. Пусть $T(\mu)$ — аналитическая функция со значениями в $B(\mathfrak{X})$, определенная в круге $|\mu| < \varepsilon$. Предположим, что λ—изолированная точка спектра $\sigma(T(0))$, такая, что $E(\lambda; T(0))\mathfrak{X}$ одномерно. Пусть U — такая окрестность точки λ, что $\overline{U} \cap \sigma(T(0)) = \{\lambda\}$. Показать, что существует такое положительное число $\delta < \varepsilon$, что при $|\mu| < \delta$ множество $U \cap \sigma(T(\mu))$ состоит из единственной точки $\lambda(\mu)$ и что при $|\mu| < \delta$ $\lambda(\mu)$ и $E(\lambda(\mu); T(\mu))$ суть аналитические функции μ.

6. Пусть $|T| \leqslant 1$ и T слабо вполне непрерывен. Тогда в сильной операторной топологии существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1}(I + \ldots + T^{n-1}) = E$. Оператор E проектирует $\mathfrak{X}$ на подпространство $\{x \mid x \in \mathfrak{X},\ Tx = x\}$.

7. Пусть $\lambda = 0$ — полюс $R(\lambda; T)$. Предположим, что существуют такие действительные постоянные K и ε, что

$$|\lambda R(\lambda; T)| \leqslant K \quad \text{при} \quad 0 < |\lambda| < \varepsilon.$$

Тогда $\lim\limits_{\lambda\to 0} \lambda R(\lambda; T) = E(\{0\})$ в равномерной операторной топологии.

8. Пусть S — компактное метрическое пространство и отображение α: $S \to S$ таково, что $\varrho(x, y) = \varrho(\alpha x, \alpha y)$ для $x, y \in S$. Показать, что последовательность $\left\{n^{-1} \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\alpha^i x)\right\}$ сходится к $f \in C(S)$ равномерно для $x \in S$.

9. Пусть t — иррациональное действительное число и t_n — дробная часть nt. Пусть I — подинтервал $[0, 1)$, и пусть N_k — число точек $\{t_1, \ldots, t_k\}$, которые лежат в I. Показать, что $\lim\limits_{k\to\infty} k^{-1} N_k$ существует и равен длине I.

10. Пусть (S, Σ, μ) — пространство с положительной конечной мерой. Пусть α: $S \to S$ — такое отображение, что $e \in \Sigma$ тогда и только тогда, когда $\alpha(e) \in \Sigma$, и пусть $\mu(e) = \mu(\alpha(e))$. Если $f \in L_p(S, \Sigma, \mu)$ при $p \geqslant 1$, то при $n = 1, 2, \ldots$ положим $f_n(S) = n^{-1} \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\alpha^i(s))$; тогда $f_n \in L_p(S, \Sigma, \mu)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ существует.

11. Пусть $\mathfrak{X}_1$ — такое замкнутое подпространство B-пространства $\mathfrak{X}$, что $T_n \mathfrak{X}_1 \subseteq \mathfrak{X}_1$ для каждого оператора T_n из последовательности $\{T_n, n = 1, 2, \ldots\}$ коммутирующих операторов в $B\mathfrak{X}$. Пусть U_n — сужение T_n на $\mathfrak{X}_1$ и $V_n : \mathfrak{X}/\mathfrak{X}_1 \to \mathfrak{X}/\mathfrak{X}_1$ — отображение, определяемое формулой

$$V_n(x + \mathfrak{X}_1) = T_n x + \mathfrak{X}_1, \ x \in \mathfrak{X}, \ n \geqslant 1.$$

Пусть U_n слабо сходится к нулю и V_n слабо сходится к такому оператору V, что $0 \notin \sigma(V)$. Наконец, пусть $\{T_n x\}$ слабо компактна при всех x из $\mathfrak{X}$. Показать, что (а) последовательность $\{T_n\}$ сходится в слабой операторной топологии, и (b) пространство $\mathfrak{X}$ может быть представлено в виде прямой суммы $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 \oplus \mathfrak{X}_2$, где $T_n \mathfrak{X}_2 \subseteq \mathfrak{X}_2$ при всех $n \geqslant 1$. (Указание: показать сначала, что последовательность $\{T_n\}$ имеет одну и только одну точку накопления в слабой операторной топологии. Сравните с доказательством теоремы 7.3.)

12. Допустим в дополнение к условиям упражнения 11, что $\{U_n\}$ и $\{V_n\}$ сходятся в сильной операторной топологии. Показать, что $\{T_n\}$ сходится в сильной операторной топологии.

13. Пусть $x_n \in \mathfrak{X}$, $n = 1, 2, \ldots$. Предположим, что $|Tx_n - \lambda x_n| \to 0$. Показать, что $|f(T)x_n - f(\lambda)x_n| \to 0$ при всех $f \in \mathcal{F}(T)$.

9. Операторное исчисление для неограниченных замкнутых операторов

Мы покажем теперь, что многие результаты операторного исчисления для ограниченного оператора могут быть распространены на случай замкнутого оператора T с непустым резольвентным множеством.

Напомним, что линейное преобразование T, область определения которого есть линейное многообразие $\mathfrak{D}(T)$, называется замкнутым, если его график замкнут. В эквивалентной форме, если $x_n \in \mathfrak{D}(T)$, $n = 1, 2, \ldots$; $x_n \to x$ и $Tx_n \to y$, то $x \in \mathfrak{D}(T)$ и $Tx = y$. Если оператор T замкнут и всюду определен, то он принадлежит $B(\mathfrak{X})$ (II.2.4); поэтому мы будем предполагать, что его область определения $\mathfrak{D}(T)$ есть собственное подмножество $\mathfrak{X}$. Этот важный случай охватывает многие дифференциальные операторы в различных функциональных пространствах.

Как и в том случае, когда $T \in B(\mathfrak{X})$, мы определяем *резольвентное множество* $\rho(T)$ оператора T как множество таких комплексных чисел λ, что $(\lambda I - T)^{-1} \in B(\mathfrak{X})$, а *спектр* $\sigma(T)$ оператора T — как дополнение $\rho(T)$. Как и раньше (сравните определение 5.1), спектр разделяется на три непересекающиеся множества: точечный спектр, непрерывный спектр и остаточный спектр. Из леммы 2, приведенной ниже, видно что спектр — множество замкнутое. Но в отличие от того случая, когда T — ограниченный оператор, теперь спектр может быть ограниченным множеством, неограниченным множеством, пустым множеством или даже всей плоскостью. Это иллюстрируется упражнением 10.1. Мы исключаем последнюю возможность и предполагаем в течение этого параграфа, что множество $\rho(T)$ непусто.

Мы теперь покажем, как операторное исчисление для замкнутого оператора T может быть построено на основе анализа, уже проведенного для ограниченного оператора.

1. Определение. Через $\mathcal{F}(T)$ мы обозначаем семейство всех функций f, которые аналитичны в некоторой окрестности спектра $\sigma(T)$ и в бесконечности.

Как и в случае ограниченного оператора (определение 3.8), эта окрестность не обязательно связна и может зависеть от функции $f \in \mathcal{F}(T)$.

Пусть α — фиксированная точка $\varrho(T)$; рассмотрим оператор

$$A = (T - \alpha I)^{-1} = -R(\alpha; T).$$

Оператор A определяет взаимно однозначное отображение $\mathfrak{X}$ на $\mathfrak{D}(T)$ и

$$TAx = \alpha Ax + x, \quad x \in \mathfrak{X},$$
$$ATx = \alpha Ax + x, \quad x \in \mathfrak{D}(T).$$

Наша цель — построить операторное исчисление для оператора T, используя понятия, уже введенные в § 3 для ограниченного оператора A.

Пусть K обозначает комплексную сферу с ее обычной топологией; определим гомеоморфизм $\Phi : K \to K$ равенствами

$$\mu = \Phi(\lambda) = (\lambda - \alpha)^{-1}, \quad \Phi(\infty) = 0, \quad \Phi(\alpha) = \infty.$$

2. Лемма. *Если* $\alpha \in \varrho(T)$, *то* $(\sigma(T) \cup \{\infty\}) = \sigma(A)$ *и соотношение*

$$\varphi(\mu) = f(\Phi^{-1}(\mu))$$

определяет взаимно однозначное соответствие между функциями $f \in \mathcal{F}(T)$ *и функциями* $\varphi \in \mathcal{F}(A)$.

Доказательство. Пусть $\lambda \in \varrho(T)$. Тогда $0 \neq \mu = (\lambda - \alpha)^{-1}$ и

$$(T - \alpha I)(T - \lambda I)^{-1} = \left[(T - \lambda I) + \frac{I}{\mu}\right](T - \lambda I)^{-1} = I + \frac{(T - \lambda I)^{-1}}{\mu}.$$

Но с другой стороны,

$$(T - \alpha I)(T - \lambda I)^{-1} = A^{-1}\left[(T - \alpha I) - \frac{I}{\mu}\right]^{-1} =$$
$$= \left\{\left[(T - \alpha I) - \frac{I}{\mu}\right] A\right\}^{-1} =$$
$$= \mu(\mu I - A)^{-1}.$$

Это показывает, что

$$[*] \qquad (T - \lambda I)^{-1} = \mu^2(\mu I - A)^{-1} - \mu I.$$

Таким образом, $\mu \in \varrho(A)$. Обратно, если $\mu \in \varrho(A)$, $\mu \neq 0$, то равенства

$$(\mu I - A)^{-1} A = [A^{-1}(\mu I - A)]^{-1} =$$
$$= (\mu A^{-1} - I)^{-1} =$$
$$= \frac{I}{\mu}(T - \lambda I)^{-1}$$

показывают, что $\lambda \in \varrho(T)$. Точка $\mu = 0$ лежит в спектре $\sigma(A)$, так как $A^{-1} = T - \alpha I$ неограничен. Последнее утверждение очевидно ввиду определения Φ, ч. т. д.

3. Определение. *Для* $f \in \mathcal{F}(T)$, *по определению, полагаем* $f(T) = \varphi(A)$, *где функция* $\varphi \in \mathcal{F}(A)$ *дается формулой* $\varphi(\mu) = f(\Phi^{-1}(\mu))$.

4. Теорема. *Если* $f \in \mathcal{F}(T)$, *то* $f(T)$ *не зависит от выбора* $\alpha \in \varrho(T)$. *Пусть* V — *открытое множество, содержащее спектр* $\sigma(T)$, *граница* Γ *которого состоит из конечного числа спрямляемых жордановых кривых, и такое, что функция* f *аналитична на множестве* $V \bigcup \Gamma$. *Пусть контур* Γ *имеет положительную ориентацию относительно (быть может, неограниченного) множества* V. *Тогда*

$$f(T) = f(\infty) I + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\lambda) R(\lambda;\, T)\, d\lambda.$$

Доказательство. Достаточно установить приведенную выше формулу для $f(T)$, так как интеграл не зависит от α. Заметим сначала, что ввиду аналитичности операторной функции $R(\lambda;\, T)$ данную точку $\alpha \in \varrho(T)$ и множество V мы можем предполагать такими, что $\alpha \notin V \bigcup \Gamma$, так как в противном случае, используя интегральную теорему Коши, мы можем, не меняя при этом значения интеграла, заменить V таким множеством V_1, что $\alpha \notin V_1 \bigcup \Gamma_1$. Тогда $U = \Phi^{-1}(V)$ — открытое множество, содержащее спектр $\sigma(A)$, граница $C = \Phi^{-1}(\Gamma)$ которого положительно ориентирована и состоит из конечного числа спрямляемых жордановых кривых. Кроме того, $\varphi(\mu) = f(\Phi^{-1}(\mu))$ аналитична на $\overline{U}$. Так как $\varphi(0) = f(\infty)$ и $0 \in \sigma(A)$, то из равенства [*], определения 3.9 и того факта, что $d\lambda = -d\mu/\mu^2$, вытекает равенство

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\lambda) R(\lambda;\, T)\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_C \varphi(\mu) [-\mu^{-1} I + R(\mu;\, A)]\, d\mu =$$
$$= \varphi(A) - \varphi(0) I = f(T) - f(\infty) I, \quad \text{ч. т. д.}$$

Теорема 4 вместе с теоремами 3.10—3.12 приводит к следующей теореме.

5. Теорема. *Если* $f,\ g \in \mathcal{F}(T)$, *то*
(a) $(f+g)(T) = f(T) + g(T)$;
(b) $(fg)(T) = f(T)\, g(T)$;
(c) $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T) \bigcup \{\infty\})$;
(d) *если* $f \in \mathcal{F}(T)$, $g \in \mathcal{F}(f(T))$ *и* $F(\xi) = g(f(\xi))$, *то* $F \in \mathcal{F}(T)$ *и* $F(T) = g(f(T))$.

При построении операторного исчисления важно включить в него теорию многочленов от T (которые будут определены только на собственных подмножествах пространства $\mathfrak{X}$) и иметь правила, устанавливающие связь многочленов от T с операторами $f(T)$. Многочлен от T определяется следующим естественным образом.

6. Определение. Для $n=0, 1, \ldots$ оператор T^n определяется по индукции соотношениями $T^0=I$, $T^1=T$ и

$$\mathfrak{D}(T^n)=\{x \mid x \in \mathfrak{D}(T^{n-1}),\ T^{n-1}x \in \mathfrak{D}(T)\},$$
$$T^n x = T(T^{n-1}x), \quad x \in \mathfrak{D}(T^n).$$

В некоторых последующих доказательствах мы будем рассматривать пересечение

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{D}(T^n),$$

для которого мы будем использовать удобное, хотя и не совсем строгое обозначение $\mathfrak{D}(T^{\infty})$. Если $P(\lambda)=\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \lambda^i$ — многочлен степени n, то $P(T)$ будет обозначать оператор $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i T^i$ с областью определения $\mathfrak{D}(T^n)$.

Мы теперь докажем важную теорему.

7. Теорема. *Если T — замкнутый линейный оператор с непустым резольвентным множеством и P — многочлен, то $P(T)$ — замкнутый оператор.*

Доказательство. Предположим, что степень P положительна. Пусть $\alpha \in \varrho(T)$ и

$$P(\lambda)=\sum_{k=0}^{n} b_k (\lambda-\alpha)^{n-k}.$$

Тогда преобразованием Φ многочлен $P(\lambda)$ переводится в функцию $\mu^{-n} p(\mu)$, где

$$(*) \qquad p(\mu)=\sum_{k=0}^{n} b_k \mu^k.$$

Если $x \in \mathfrak{D}(T^n)$, то $p(A)x \in \mathfrak{D}(T^n)$, так как при любых q оператор A^q отображает $\mathfrak{D}(T^n)$ на $\mathfrak{D}(T^{n+q})$. Кроме того,

$$P(T)x=(T-\alpha I)^n p(A)x = p(A)(T-\alpha I)^n x, \quad x \in \mathfrak{D}(T^n).$$

Пусть теперь $x_r \in \mathfrak{D}(T^n)$, $x_r \to x$, $P(T)x_r \to y$. Мы должны показать, что $x \in \mathfrak{D}(T^n)$ и что $P(T)x=y$. Оператор $(T-\alpha I)^n$ замкнут, как обратный ограниченного оператора A^n. Таким образом, так как $p(A)x_r \to p(A)x$, то $p(A)x \in \mathfrak{D}(T^n)$. Чтобы доказать, что $x \in \mathfrak{D}(T^n)$, напишем

$$p(A)x=b_0x+b_1Ax+\ldots+b_nA^nx, \quad b_0 \neq 0,$$

и заметим, что так как $A\mathfrak{X}=\mathfrak{D}(T)$, то все слагаемые, кроме, быть может, b_0x, лежат в $\mathfrak{D}(T)$, следовательно, и $b_0x \in \mathfrak{D}(T)$. Проведем индукцию. Предположим, что $x \in \mathfrak{D}(T^m)$, $1 \leqslant m \leqslant n$. Тогда

$$(T-\alpha I)^m p(A)x = b_0(T-\alpha I)^m x + b_1(T-\alpha I)^{m-1}x + \ldots + b_n A^{n-m}x.$$

По тем же соображениям $(T-\alpha I)^m x \in \mathfrak{D}(T)$, и, следовательно, $x \in \mathfrak{D}(T^{m+1})$. Таким образом, по индукции, $x \in \mathfrak{D}(T^n)$. Это завершает доказательство.

8. Теорема. *Пусть P — многочлен степени n, и пусть функция $f \in \mathscr{F}(T)$ имеет нуль порядка m, $0 \leqslant m \leqslant \infty$ в бесконечности.*

(a) *Если $x \in \mathfrak{D}(T^n)$, то $f(T)x \in \mathfrak{D}(T^{m+n})$, где $m+n=\infty$, если $m=\infty$ и $P(T)f(T)x = f(T)P(T)x$.*

(b) *Если $0 \leqslant n \leqslant m$ и $g(\lambda) = P(\lambda)f(\lambda)$, то $g \in \mathscr{F}(T)$ и $g(T) = P(T)f(T)$.*

Доказательство. Пусть $q=m$, если m конечно, и q равно любому натуральному числу, если $m=\infty$. Пусть $\alpha \in \varrho(T)$ и $\varphi(\mu) = f(\lambda)$, $(\lambda-\alpha)\mu = 1$. Определим функцию $\beta(\mu) = \mu^{-q}\varphi(\mu)$ при $\mu \neq 0$ и $\beta(0) = \lim\limits_{\mu\to 0}\mu^{-q}\varphi(\mu)$, мы видим, что $\beta \in \mathscr{F}(A)$ и что $A^q\beta(A) = \varphi(A) = f(T)$. Таким образом, $f(T)\mathfrak{X} \subseteq A^q\mathfrak{X} = \mathfrak{D}(T^q)$. Пусть теперь $x \in \mathfrak{D}(T^n)$. Тогда $x = A^n y$ для некоторого y из $\mathfrak{X}$ и $f(T)x = A^{n+q}\beta(A)y \in \mathfrak{D}(T^{n+q})$, что доказывает первую часть (a). Чтобы доказать второе утверждение, напишем $x = A^n y$ и определим функцию $p(\mu)$ формулой (*) предыдущей теоремы. Тогда

$$\begin{aligned} P(T)f(T)x &= P(T)A^n\varphi(A)y = \\ &= p(A)\varphi(A)y = \varphi(A)p(A)y = \\ &= f(T)p(A)(T-\alpha I)^n x = f(T)P(T)x. \end{aligned}$$

Наконец, для доказательства (b) положим $\gamma(\mu) = g(\lambda)$. Тогда функция γ имеет при $\mu=0$ устранимую особенность, и $\gamma(\mu) = \mu^{-n}p(\mu)\varphi(\mu)$. Но $A^n\gamma(A) = p(A)\varphi(A)$, и, таким образом, $A^n g(T) = p(A)f(T)$. Действуя с обеих сторон оператором $(T-\alpha I)^n$, мы получим равенство $P(T)f(T) = g(T)$, ч. т. д.

9. Теорема. *Если $f \in \mathscr{F}(T)$ и функция f не имеет нулей в $\sigma(T)$, но имеет нуль конечного порядка n в бесконечности, то $\{f(T)\}^{-1}$ существует и имеет область определения $\mathfrak{D}(T^n)$.*

Доказательство. Положим $g(\lambda) = (\lambda-\alpha)^n f(\lambda)$, $\alpha \in \varrho(T)$. Тогда функции g и $1/g$ лежат в $\mathscr{F}(T)$ и $f(T) = A^n g(T)$. Таким образом, $f(T)\mathfrak{X} = \mathfrak{D}(T^n)$ и $[f(T)]^{-1} = [g(T)]^{-1}(T-\alpha I)^n$, ч. т. д.

В заключение мы распространим теорему об отображении спектра на многочлены от оператора T.

10. Теорема. *Если P — многочлен, то*

$$P(\sigma(T)) = \sigma(P(T)).$$

Доказательство. Пусть P имеет степень n; предположим, что $\lambda \notin P(\sigma(T))$. Если $g(\xi) = [\lambda - P(\xi)]^{-1}$, то функция g лежит в $\mathcal{F}(T)$, не имеет нулей в $\sigma(T)$ и имеет нуль порядка n в бесконечности. Тогда, по теоремам 8 и 9, оператор $[g(T)]^{-1} = \lambda I - P(T)$ с областью определения $\mathfrak{D}(T^n)$. Таким образом, $\lambda \notin \sigma(P(T))$ и $\sigma(P(T)) \subseteq P(\sigma(T))$. Чтобы доказать обратное включение, положим, что Q — многочлен, определенный равенством $P(\lambda) - P(\xi) = (\lambda - \xi) Q(\xi)$. Если $P(\lambda) \notin \sigma(P(T))$, то оператор $P(\lambda) - P(T) = (\lambda I - T) Q(T)$ имеет ограниченный обратный R и, следовательно, $(\lambda I - T)^{-1} = Q(T) R$ есть замкнутый всюду определенный оператор. Таким образом, $\lambda \notin \sigma(T)$, ч. т. д.

Дальнейшие результаты, относящиеся к замкнутым операторам, можно найти в упражнениях.

10. Упражнения

1. Пусть $\mathfrak{X} = C[0, 1]$, $(Tx)(t) = x'(t)$. Показать, что T — замкнутый оператор и определить его спектр, если

(a) $\mathfrak{D}(T) = \{x \mid x' \in C[0, 1],\ x(0) = 0\}$ (нет спектра);

(b) $\mathfrak{D}(T) = \{x \mid x' \in C[0, 1]\}$ (нет резольвентного множества);

(c) $\mathfrak{D}(T) = \{x \mid x' \in C[0, 1],\ x(0) = x(1)\}$

$(\sigma_p(T) = \{2\pi i n,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\},\ \sigma_r(T) = \varnothing,\ \sigma_c(T) = \varnothing)$.

2. Пусть T — оператор дифференцирования $(Tx)(t) = x'(t)$ в пространствах $L_p(-\pi, \pi)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, на единичной окружности с областью определения $\mathfrak{D}(T) = \{x \mid x$ абсолютно непрерывна и $x' \in L_p(-\pi, \pi)\}$. Показать, что T — замкнутый неограниченный оператор со всюду плотной при $p < \infty$ областью определения, спектр которого есть множество $\{\pm in\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, и $\sigma(T) = \sigma_p(T)$.

3. Пусть T — оператор $(Tx)(t) = x'(t)$ в пространствах $L_p(-\infty, \infty)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, с областью определения $\mathfrak{D}(T) = \{x \mid x$ абсолютно непрерывна на каждом конечном интервале, $x' \in L_p(-\infty, \infty)\}$. Показать, что (a) T — замкнутый неограниченный линейный оператор со всюду плотной при $p < \infty$ областью определения, (b) спектр T есть мнимая ось и

$$R(\lambda; T)(x, t) = \int_0^\infty e^{-\lambda\xi} x(t+\xi)\, d\xi, \quad \operatorname{Re}\lambda > 0,$$

$$= -\int_{-\infty}^0 e^{-\lambda\xi} x(t+\xi)\, d\xi, \quad \operatorname{Re}\lambda < 0.$$

4. Известно (Бейд [1, стр. 278]), что функция f аналитична на мнимой оси и в бесконечности тогда и только тогда, когда она имеет

представление

$$f(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda\xi}G(\xi)\,d\xi,$$

где

$$G(\xi)=\begin{cases}F_1(\xi), & \xi>0,\\ F_2(\xi), & \xi\leqslant 0,\end{cases}$$

а F_1 и F_2 — такие целые функции, что при некоторой постоянной $c>0$, $|F_i(z)|=O(e^{c|z|})$, $i=1, 2$, и

$$F_1(\xi)=O(e^{-c\xi})\quad \xi\to+\infty,$$
$$F_2(\xi)=O(e^{+c\xi})\quad \xi\to-\infty.$$

Показать, что для оператора T упражнения 3 и любой $f\in\mathcal{F}(T)$ имеет место равенство

$$f(T)(x, t)=\int_{-\infty}^{\infty} G(\xi)\,x(t-\xi)\,d\xi.$$

5. Пусть A — ограниченный оператор и $\lambda_0\in\sigma_c(A)$ или $\sigma_r(A)$. Тогда $(A-\lambda_0 I)^{-1}$ — замкнутый оператор и $\sigma((A-\lambda_0 I)^{-1})=\{\lambda\,|\,\lambda=(\lambda_0-\xi)^{-1},\ \xi\in\sigma(A)\}$.

6. Пусть T — замкнутый оператор с непустым резольвентным множеством. Показать, что если $\lambda\in\varrho(T)$, α — любое комплексное число и $x\in\mathfrak{D}(T^n)$, то

$$R(\lambda; T)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(T-\alpha I)^i x}{(\lambda-\alpha)^{i+1}}+\frac{(T-\alpha I)^{n+1}}{(\lambda-\alpha)^{n+1}}R(\lambda;\ T)\,x.$$

7. Пусть оператор T удовлетворяет условиям предыдущей задачи, и пусть функция $f\in\mathcal{F}(T)$ имеет нуль порядка n при $\lambda=\infty$ и не имеет нулей на спектре $\sigma(T)$. Показать, что область определения оператора $[f(T)]^{-1}$ совпадает с $\mathfrak{D}(T^n)$, а сам он представим в виде

$$[f(T)]^{-1}x=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{(T-\alpha I)^{n+1}}{f(\lambda)\,(\lambda-\alpha)^{n+1}}R(\lambda;\ T)\,x\,d\lambda,$$

где $x\in\mathfrak{D}(T^n)$ и Γ — подходящий контур.

8. Пусть оператор T удовлетворяет условиям упражнения 6 и неограничен. Показать, что не существует многочлена степени n, $n\geqslant 1$, не равного тождественно нулю, такого, что $P(T)\,x=0$ для всех x из $\mathfrak{D}(T^n)$.

11. Примечания и дополнения

Ссылки общего характера. По поводу общих рассмотрений этой главы и в связи с ней мы отсылаем читателя к обзорным статьям Данфорда [6] и Тейлора [10]. Дополнительно многие результаты можно найти в монографиях Хилле [1, гл. 5], Рисса и Секефальви-Надя [1, гл. 11] и Стоуна [3, гл. 4]; последняя посвящена теории операторов в гильбертовом пространстве.

Конечномерное пространство. Спектральная теория в конечномерном пространстве есть часть теории матриц. По поводу многих других вопросов этой теории, которые мы не рассматриваем, читателю следует обращаться к книгам Мак-Даффи [1] или Веддерберна [1] — последняя особенно рекомендуется в виду обилия в ней литературных ссылок[1]). Книги Халмоша [7], Гамбургера и Гримшоу [1] и Швердтфегера [1] по духу близки к изложению этого параграфа и могут оказаться полезными. Мы ограничимся в основном замечаниями к теоремам 1.8 — 1.10.

Число λ_0 называется (1.2) *собственным значением* (eigenvalue) линейного оператора T, если существует вектор $x_0 \neq 0$, такой, что $Tx_0 = \lambda_0 x_0$. Иногда разными авторами употребляются термины «собственное значение» (proper value), «характеристическое значение» (characteristic value), «секулярное значение» (secular value) и «латентное значение» (latent value)[2]) или «латентный корень» (latent root). Последний термин употреблялся Сильвестром [2], так как такие числа «скрыты в операторе в таком же смысле, в каком пар может быть назван скрытым в воде, а дым — в листьях табака». Мы не придерживаемся его терминологии. Термин «спектр» принадлежит Гильберту.

Матричные многочлены использовались почти с самого начала возникновения теории, а в 1867 г. Лагерр [1] рассматривал бесконечные степенные ряды матриц при построении показательной функции матрицы. Сильвестр [1, 2] при помощи интерполяционной формулы Лагранжа построил произвольные функции матрицы с различными собственными значениями. Его метод был обобщен Бухгеймом [1] на случай кратных собственных значений, хотя Бухгейм не придал своему результату форму теоремы 1.8. В приведенной нами формулировке это утверждение впервые встречается у Джорджи [1]. Даже еще раньше Сильвестра Фробениус [1, стр. 54; 2] получил выражение для резольвенты $(\lambda I - T)^{-1}$ в окрестности полюса.

Частный случай теоремы 1.9 принадлежит Вейру [1]; в полной общности она была доказана Хензелем [1].

Что касается теоремы 1.10, Фробениус [3, стр. 11] установил, что если функция f аналитическая, то оператор $f(T)$ может быть получен

---

[1]) См. также Ф. Р. Гантмахер [1*]. — *Прим. ред.*

[2]) Latent — в скрытом состоянии, связанный. — *Прим. ред.*

как сумма вычетов функции $(\lambda I - T)^{-1}f(\lambda)$ относительно всех собственных значений оператора T. Он указал, что это замечание использовалось в диссертации Штиккельбергера (1881), но Фробениус не развил точного исчисления. Первым, кто извлек явную пользу из этого совета, был Пуанкаре [1], который воспользовался им, когда все корни различны. В случае кратных корней формула, эквивалентная теореме 1.10, была получена Фантапье [3] на основе некоторых требований, включающих соотношения теоремы 1.5, каких следовало бы ожидать при «разумном» операторном исчислении. По предложению Э. Картана, который, несомненно, был знаком с работой Пуанкаре, формула теоремы 1.10 была использована Джорджи [1] как определение оператора $f(T)$.

Другие замечания в связи с этими вопросами смотрите в книге Мак-Даффи [1, гл. 9, 10]. Интересный список различных функций матриц приведен у Райнхарта [1]. [Большое число интересных фактов, связанных с функциями от матриц, приведено в книге Ф. Р. Гантмахера [11*[1]).]

Функции оператора. Результаты параграфов 3 и 4 можно рассматривать как объединение двух исторически сложившихся направлений. С одной стороны, эти результаты обобщают соответствующие результаты теории матриц, а с другой — дают абстрактное выражение результатов теории интегральных уравнений. Поэтому едва ли можно дать полный и точный набор ссылок по поводу многих из этих понятий. Например, резольвентный оператор, его функциональное уравнение и представление применялись в обеих этих теориях.

Важная роль принадлежит Гильберту [1] и Э. Муру [1, 2], которые осознали и установили это единство. Однако, справедливости ради, следует сказать, что лишь Ф. Рисс вскрыл и развил это единство по всем линиям, представленным нами. Читатель его книги (Ф. Рисс [3, особенно §§ 72—81]) найдет при ближайшем рассмотрении многие из его понятий и результатов удивительно «современными». Хотя Рисс имел дело в основном с вполне непрерывными операторами в l_2, он установил, что резольвентное множество открыто, резольвентный оператор есть аналитическая функция, и указал, что, по крайней мере в случае полюса, интегральная теорема Коши может быть использована для получения проекционных операторов, коммутирующих с данным.

В случае ограниченного или неограниченного нормального оператора в гильбертовом пространстве многие из результатов этого параграфа становятся проще и могут быть доказаны более непосредственно другими методами. При этих предположениях возможно значительное расширение теории. За уточнениями этих замечаний мы отсылаем читателя ко второму тому нашей книги или к книгам

[1]) *Прим. ред.*

Стоуна [3], Халмоша [6] или Рисса и Секефальви-Надя [1]. Дальнейшие замечания будут относиться только к случаю B-пространства.

Выражение для резольвенты принадлежит К. Нейману, который получил его в теории потенциала. В более общем контексте оно встречается у Гильба [1].

Тот факт, что замкнутый линейный оператор в произвольном комплексном B-пространстве имеет непустой спектр, был доказан Тейлором [12]. Частный случай равенства $\max|\sigma(T)| = \lim\limits_{n\to\infty}|T^n|^{1/n}$ был доказан Берлингом, а общий — Гельфандом [1].

В 1923 г. Винер [2] заметил, что интегральная теорема Коши и теорема Тейлора остаются справедливыми для аналитических функций комплексной переменной со значениями в комплексном B-пространстве. Может показаться удивительным, что этот факт не получил сначала большого применения и лишь через 20 лет ряд исследователей независимо друг от друга нашли его весьма полезным. В 1936 г. Нагумо [1] изучал с теоретико-функциональной точки зрения B-алгебры и доказал наряду с другими результатами несколько теорем Рисса о вполне непрерывных операторах. Позже Тейлор [13] изучал некоторые абстрактные аналитические функции, а Хилле [2] пользовался близкими методами при изучении полугрупп. В 1941 г. появилась знаменитая статья Гельфанда [1], в которой, хотя она частично перекрывается с работой Нагумо, развита теория идеалов B-алгебр. Кроме того, Гельфанд использовал контурные интегралы для получения идемпотентных элементов в B-алгебрах. Лорх [6] независимо пользовался тем же приемом и начал изучение «спектральных множеств».

Теорема 3.10 принадлежит Гельфанду [1]. Теоремы 3.11, 3.16 и 3.19 были получены Данфордом в статье [7], которая содержит и некоторый дополнительный материал.

Спектральная теория вполне непрерывных операторов. Как мы уже говорили, эта теория обобщает работу Фредгольма [1] об интегральных уравнениях. Метод самого Фредгольма состоял в раскрытии определителей, что приводило, правда после сложных вычислений, к явному представлению резольвенты в виде отношения двух целых функций. (Более подробные ссылки смотрите в статье Хеллингера и Теплица [3, §§ 9, 10] и гл. XI нашей книги.) Из других методов мы упомянем метод Шмидта [2], обусловленный возможностью (в гильбертовом пространстве) аппроксимации вполне непрерывных операторов конечномерными.

Быть может, наиболее остроумный и элементарный подход принадлежит Ф. Риссу [4]; этот подход возможен в любом вещественном или комплексном пространстве. Некоторые результаты Рисса о сопряженном операторе не имели полной общности, но потом были доведены до конца Гильдебрандтом [6] и Шаудером [6]. Подробный разбор этого метода смотрите у Рисса и Секефальви-Надя [1, гл. 4] или Заанена [5, гл. 11]. Аналогичное изложение дается у Банаха [1, гл. 10].

Ход рассуждений, проведенных нами, близок к работе Нагумо [1], и есть частный случай некоторых построений Данфорда [7, стр. 208].

Результаты этого параграфа были обобщены на локально выпуклые топологические линейные пространства над полем комплексных чисел Лере [2], который использовал глубокую теорему об области инвариантности. Другие расширения теории на пространства более общие, чем B-пространства, были даны Альтманом [3, 5], Вильямсоном [3], Маринеску [1] и Хайерсом [2].

Следующая теорема, называемая *альтернативой Фредгольма*, есть следствие теорем этого параграфа.

Теорема. *Пусть T — вполне непрерывный оператор в комплексном B-пространстве $\mathfrak{X}$ и λ — фиксированное отличное от нуля комплексное число. При этих условиях неоднородные уравнения*

$$(N) \qquad (\lambda I - T)\, x = y,$$

$$(N^*) \qquad (\lambda I - T^*)\, x^* = y^*$$

при любых $y \in \mathfrak{X}$ или $y^* \in \mathfrak{X}^*$ имеют единственные решения тогда и только тогда, когда однородные уравнения

$$(H) \qquad (\lambda I - T)\, x = 0,$$

$$(H^*) \qquad (\lambda I - T^*)\, x^* = 0$$

имеют лишь нулевые решения. Кроме того, если одно из однородных уравнений имеет ненулевое решение, то они оба имеют одно и то же число линейно независимых решений. В этом случае уравнения (N) и (N^*) имеют решения тогда и только тогда, когда векторы y и y^* ортогональны ко всем решениям уравнений (H^*) и (H) соответственно. Кроме того, общее решение уравнения (N) может быть найдено прибавлением частного решения уравнения (N) к общему решению уравнения (H).

Результаты Фредгольма о представлении резольвенты и фредгольмовские определители изучались Альтманом [5], Р. Л. Грейвсом [1], Лежанским [1, 2], Майкалом и Мартином [1], Смитисом [1], Сикорским [1, 2], Растоном [2, 3, 5, 6]. Смотрите также работы Гротендика [3,7*] и Заанена [5, гл. 9]. [Сильные результаты были получены в этом направлении недавно В. Б. Лидским [2*].—*Ред.*]

Для приложений важно уметь вычислять собственные значения операторов; это особенно верно для самосопряженных, вполне непрерывных операторов в гильбертовом пространстве. По поводу этих вопросов мы отсылаем читателя к работам Ароншайна [3, 4] и Коллатца [1]. Столь же важно знать распределение собственных значений. Случай интегральных операторов читатель может найти в работах Хилла и Тамаркина [1] и Чана [1]. Результаты для абстрактных пространств смотрите в работах Фань Ку [3, 5], Горна [1], Зильберштейна [1], Виссера и Заанена [1], Вайнбергера [1, 2] и Г. Вейля [1].

Из теоремы 4.5 вытекает, что если T — вполне непрерывный оператор и его спектр $\sigma(T)$ содержит по крайней мере одно ненулевое число, то оператор T имеет инвариантное подпространство, т. е. существует собственное замкнутое линейное многообразие $\mathfrak{X}_0 \subset \mathfrak{X}$, такое, что $T(\mathfrak{X}_0) \subseteq \mathfrak{X}_0$. Интересным и нетривиальным фактом является то, что это верно и в общем случае; именно Ароншайном и Смитом [1] была доказана следующая

Теорема. *Любой вполне непрерывный оператор в B-пространстве имеет собственное инвариантное подпространство.*

Юд [2] исследовал некоторые свойства оператора, сохраняющиеся при прибавлении вполне непрерывного оператора, и получил результаты, приведенные в этом параграфе. Аткинсон [2], Гохберг [1—3] и Талдыкин [1] также рассматривали аналогичные вопросы. Используя их методы, Клейнекке [1] доказал следующую теорему.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{X}$ — B-пространство, а $\mathfrak{R} \subseteq B(\mathfrak{X})$ — пересечение всех максимальных односторонних идеалов в $B(\mathfrak{X})$, содержащих все равномерные пределы конечномерных операторов. Тогда спектр любого оператора из $\mathfrak{R}$ есть счетное множество изолированных собственных значений конечной кратности, не имеющее никаких предельных точек, кроме, быть может, $\lambda = 0$. Кроме того, $\mathfrak{R}$ содержится в любом другом идеале в $B(\mathfrak{X})$, операторы которого имеют спектр с указанным выше свойством.*

Мы видели, что в некоторых пространствах, например в C или L_1, существуют операторы, не вполне непрерывные, но спектр которых такой же, как и у вполне непрерывных операторов. Это не так для нормальных операторов в гильбертовом пространстве (смотрите Секефальви-Надь [3, стр. 55]). Аналогично Дж. Нейман [6, стр. 16] показал, что если (необязательно ограниченный) самосопряженный оператор T в $L_2(-\infty, \infty)$ имеет счетное множество собственных значений конечной кратности с единственной возможной предельной точкой $\lambda = 0$ спектра $\sigma(T)$, то T унитарно эквивалентен интегральному оператору вполне определенного классического типа (Карлемана). [Ю. М. Березанский [3] доказал, что вообще всякий ограниченный оператор в L_2 есть интегральный, ядро которого есть обобщенная функция [1])]. Л. Грейвс [6] распространил некоторые результаты теории Рисса на отображения вида $E+T$, где E отображает B-пространство $\mathfrak{X}$ на B-пространство $\mathfrak{Y}$, а $T: \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$

---

[1]) *Прим. ред.*

вполне непрерывно. Смотрите также работу Л. Шварца [4], где некоторые из этих результатов доказаны для локально выпуклых пространств.

Дополнительные сведения о вполне непрерывных операторах читатель может найти у Аткинсона [2—4], Гамбургера [4], Гольдмана и Крачковского [1], Гохберга [1—4], Заанена [6, 9], Келдыша [1], Крачковского [1, 2], Крачковского и Гольдмана [1—3], Крейна и Красносельского [1], Лившица [2, 3], С. Н. Никольского [1], Одэна [1], Секефальви-Надя [12, 13], Харазова [1—3].

Теория возмущений. Вопросы теории возмущений возникали в работах лорда Рэлея и Э. Шрёдингера, но лишь Реллих развил теорию в том направлении, какое изложено нами. (Смотрите по этой теории обзорную статью Реллиха [1].) Основной результат этого параграфа есть обобщение теоремы Реллиха [2; I] на случай, допускающий наличие жордановых клеток. Способ доказательства по существу тот же, что и у Реллиха.

В серии из пяти статей Реллих [2] изучал структуру спектра возмущенного оператора в основном в окрестности изолированного собственного значения невозмущенного оператора. В первой заметке Реллиха [2; I] рассматриваются ограниченные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве, в третьей заметке предположение ограниченности отброшено; в обоих случаях возмущение зависит от параметра аналитически.

Секефальви-Надь [2, 4] дал иные доказательства некоторых из этих результатов и распространил их на случай B-пространств; дальнейшие результаты в этом общем случае были получены Като [1, 2] и Вульфом [1].

В своей второй статье Реллих [2; II] рассматривал непрерывное возмущение неограниченных самосопряженных операторов; эти исследования были завершены Гайнцем [1].

Большинство этих результатов относится к точечному спектру. Непрерывный спектр исследовать намного труднее, но и этот случай рассматривался Фридрихсом [1, 2].

При возмущении могут происходить неожиданные явления. Например, Вейль [2] показал, что если T — самосопряженный оператор (у которого точечный спектр может отсутствовать) в сепарабельном гильбертовом пространстве, то можно найти такой самосопряженный вполне непрерывный оператор K, что оператор $T+K$ имеет полную систему собственных векторов. Этот результат был обобщен на неограниченный оператор T Дж. Нейманом [6, стр. 11], который показал, что норма оператора K может быть сколь угодно малой.

Теория возмущений находит особенно плодотворные применения в теории дифференциальных уравнений и часто изучается в связи с ними. По этому поводу смотрите статьи Титчмарша [2] и Мозера [1].

Теорема 6.10 принадлежит Дж. Шварцу [3].

В дополнение к названным статьям мы отсылаем читателя к работам Гавурина [1, 2], Гёльдера [1], Джемисона [1, 2], Като [3, 4], Клейнекке [2, 3], В. Крамера [1], Г. Крамера [1], Крейна [8], Лифшица [1—4], Рабиновича [1], Розенблюма [2], Соломяка [1], Шефке [3], Ю. Л. Шмульяна [3], Шрёдера [1], Филлипса [6].

Тауберовы теоремы и неограниченные операторы. Результаты параграфа 7 получены Данфордом [7] и находят применения в эргодической теории. Мы приведем ссылки на соответствующую литературу по эргодической теории в замечаниях к гл. VIII.

Результаты параграфа 9 принадлежат Тейлору [11], который описал приведенный нами метод построения теории неограниченных операторов на базе теории ограниченного оператора, а также непосредственно развил теорию для неограниченного оператора. Некоторые более подробные вычисления для более узкого класса неограниченных операторов были даны Хилле [1; гл. 15, § 1]. Аналогичная программа была осуществлена Бейдом [1].

ГЛАВА VIII

Приложения общей теории

1. Полугруппы операторов

Хорошо известно, что показательная функция $f(t)=\exp(ta)$ — наиболее общая непрерывная вещественная (или комплексная) функция f неотрицательной вещественной переменной t, которая удовлетворяет функциональным уравнениям $f(0)=1$, $f(t+u)=f(t)f(u)$. Соответствующая задача для операторов состоит в нахождении наиболее общей непрерывной операторнозначной функции, определенной в области $t \geqslant 0$ и удовлетворяющей уравнениям

$$\text{(I)} \qquad T(t+u)=T(t)T(u), \quad T(0)=I, \quad t,\ u \geqslant 0.$$

Операторнозначная функция $T(t)$, удовлетворяющая этим уравнениям, называется полугруппой операторов. В этом параграфе мы приводим основные факты аналитической теории таких полугрупп в той форме, как она была развита Э. Хилле, Р. С. Филлипсом и К. Иосидой. По аналогии с числовым случаем мы можем ожидать, что полугруппа $T(t)$ в некотором смысле является показательной функцией. Если мы предположим, что $T(t)$ непрерывна в равномерной операторной топологии, то, как показано ниже в теореме 2, существует ограниченный оператор A, такой, что $T(t)=e^{tA}$. Если же предположить только, что $T(t)$ непрерывна в сильной операторной топологии, то задача становится намного труднее. Тем не менее мы увидим, что $T(t)$ можно рассматривать в некотором смысле как e^{tA}, где теперь A — неограниченный оператор, называемый инфинитезимальным оператором полугруппы. Мы изучим также важную задачу определения тех неограниченных замкнутых операторов, которые являются инфинитезимальными операторами сильно непрерывных полугрупп. Решение этой задачи, которое будет дано ниже, позволит нам рассмотреть «абстрактную задачу Коши»: найти для данного замкнутого неограниченного оператора A функцию, определенную при $t \geqslant 0$, со значениями, принадлежащими области определения A, которая удовлетворяет уравнениям

$$\text{(II)} \qquad \frac{dx}{dt}=Ax, \quad x(0)=x_0,$$

где x_0 — заданный вектор. Теория будет проиллюстрирована решением абстрактной задачи Коши для специального случая интегро-дифференциального оператора вида

$$(Ax)(s) = x''(s) + h(s)\,x(s) + \int_0^\infty K(s, u)\,x(u)\,du.$$

Это равносильно решению обычной задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения вида

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + h(s)\,x + \int_0^\infty K(s, u)\,x(u, t)\,du,$$

$$x(s, 0) = x_0(s),$$

где h, K и x_0 — заданные функции. Общая теория может быть аналогично использована для решения многих других задач Коши для уравнений с частными производными и интегро-дифференциальных уравнений.

Во всем этом параграфе $\mathfrak{X}$ будет обозначать комплексное B-пространство, а $\{T(t)\}$ — сильно непрерывную полугруппу операторов в $\mathfrak{X}$, т. е. семейство операторов, удовлетворяющее условиям следующего определения.

1 Определение. Семейство $\{T(t)\}$, $0 \leqslant t < \infty$, ограниченных линейных операторов в $\mathfrak{X}$ будем называть *сильно непрерывной полугруппой*, если

(I) $\qquad T(s+t) = T(s)\,T(t), \quad s, t \geqslant 0;$

(II) $\qquad T(0) = I;$

(III) при любом $x \in \mathfrak{X}$ функция $T(t)\,x$ непрерывна по t на $[0, \infty)$.

Если, кроме того, отображение $t \to T(t)$ непрерывно в равномерной операторной топологии, то семейство $\{T(t), t \geqslant 0\}$ называется *полугруппой* в $B(\mathfrak{X})$, *непрерывной в равномерной топологии.*

Из теории операторного исчисления, развитой в § VII.3, видно, что для любого оператора A из $B(\mathfrak{X})$ семейство e^{tA} является полугруппой, непрерывной в равномерной топологии. Следующая теорема показывает, что каждая такая полугруппа может быть представлена подобным образом.

2 Теорема. *Пусть $\{T(t)\}$ — полугруппа, непрерывная в равномерной топологии. Тогда существует ограниченный оператор A, такой, что $T(t) = e^{tA}$ при $t \geqslant 0$. Оператор A определяется формулой $A = \lim_{h \to 0} (T(h) - I)/h$. При $\operatorname{Re}(\lambda)$ достаточно больших резольвента A*

может быть выражена через элементы полугруппы по формуле

$$R(\lambda;\ A)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)\,dt.$$

Доказательство. Так как $T(0)=I$, из VII.6.5 следует, что для некоторого $\varepsilon>0$ функция $U(t)=\log(T(t))$ определена и непрерывна при $0\leqslant t\leqslant\varepsilon$. Если $nt\leqslant\varepsilon$, то

$$U(nt)=\log(T(t)^n)=n\log(T(t))=nU(t).$$

Таким образом, $(1/n)U(t)=U(t/n)$ при всех t, $0\leqslant t\leqslant\varepsilon$, и, следовательно,

$$\frac{m}{n}U(t)=mU(t/n)=U(mt/n)$$

для всех рациональных чисел m/n, $0\leqslant m/n\leqslant 1$, и всех t в интервале $0\leqslant t\leqslant\varepsilon$. В частности, $(m/n)U(\varepsilon)=U(\varepsilon m/n)$, так что, в силу непрерывности, $tU(\varepsilon)=U(\varepsilon t)$ при $0\leqslant t\leqslant 1$ и $U(t)=(t/\varepsilon)U(\varepsilon)$ при $0\leqslant t\leqslant\varepsilon$. Если положить $A=(1/\varepsilon)U(\varepsilon)$, то

$$[*]\qquad T(t)=e^{tA}$$

при $0\leqslant t\leqslant\varepsilon$. Если $t>0$ произвольно, то $t/n<\varepsilon$ при некотором достаточно большом натуральном n, и потому $e^{tA}=(e^{(t/n)A})^n=\{T(t/n)\}^n=T(t)$. Таким образом, равенство [*] выполнено при $0\leqslant t<\infty$. Так как $\lim_{h\to 0}(e^{zh}-1)/h\to z$ равномерно в любом ограниченном множестве z-плоскости, формула для определения A является непосредственным следствием леммы VII.3.13.

Аналогично доказывается, что $d/dtT(t)=AT(t)$ при всех $t\geqslant 0$, и, следовательно, $T(t)$ непрерывна и имеет непрерывную производную. Так как $T(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(tA)^n/n!$, то

$$|T(t)|\leqslant e^{t|A|}.$$

Таким образом, при условии $\operatorname{Re}(\lambda)>|A|$ интеграл $\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)\,dt$ существует. Так как ограниченный линейный оператор коммутирует с интегралом (III.2.19 (c)), то

$$(\lambda I-A)\int_0^s e^{-\lambda t}T(t)\,dt=\int_0^s(\lambda I-A)\,e^{-\lambda t}e^{tA}\,dt=$$

$$=-\int_0^s\frac{d}{dt}(e^{-\lambda t}e^{tA})\,dt=$$

$$=I-e^{-\lambda s}e^{sA}.$$

Так как $\mathrm{Re}(\lambda) > |A|$, то $|e^{-\lambda s} e^{sA}| \leqslant e^{(-\lambda + |A|)s} \to 0$ при $s \to \infty$ и, таким образом, по теореме Лебега (III.6.16) имеем

$$(\lambda I - A) \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)\, dt = I.$$

Но оператор $(\lambda I - A)^{-1}$ существует при $|\lambda| > |A|$, согласно лемме VII.3.4; поэтому

$$(\lambda I - A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)\, dt, \quad \mathrm{Re}(\lambda) > |A|, \text{ ч. т. д.}$$

Оставшаяся часть настоящего параграфа будет посвящена преимущественно изучению сильно непрерывных полугрупп. Теоремы 10 и 11 являются аналогом теоремы 2 в этом случае.

3. Лемма. *Пусть $\{T(t)\}$ — семейство ограниченных операторов, определенное на конечном замкнутом интервале $[\alpha, \beta]$, такое, что $T(t)x$ непрерывна по t при всех $x \in \mathfrak{X}$; тогда $|T(\cdot)|$ измерима и ограничена на $[\alpha, \beta]$. Обратно, если $\{T(t), 0 \leqslant t\}$ — полугруппа ограниченных линейных операторов в $\mathfrak{X}$ и если $T(\cdot)x$ измерима на $(0, \infty)$ при всех $x \in \mathfrak{X}$, то $T(\cdot)x$ непрерывна в каждой точке из $(0, \infty)$.*

Доказательство. Так как $T(\cdot)x$ непрерывна при всех x из $\mathfrak{X}$, то она ограничена на $[\alpha, \beta]$. Таким образом, ограниченность $|T(\cdot)|$ следует из принципа равномерной ограниченности II.1.11. Чтобы доказать, что $|T(\cdot)|$ измерима, положим $\delta > 0$ и $U = \{t \mid |T(t)| > \delta\}$. Если $t_0 \in U$, то мы можем найти такой вектор x, что $|x| = 1$ и $|T(t)x| > \delta$ при всех t из некоторого интервала, содержащего t_0. Таким образом, U открыто в $[\alpha, \beta]$, и первое утверждение следует из теоремы III.6.10.

Теперь мы докажем, что если $\{T(t)\}$, $0 \leqslant t < \infty$, — полугруппа, если $T(\cdot)x$ измерима на $(0, \infty)$ при всех $x \in \mathfrak{X}$ и если $|T(\cdot)|$ ограничена в каждом интервале $[\delta, 1/\delta]$, $\delta > 0$, то $T(\cdot)x$ непрерывна в каждой точке $t_0 > 0$ при любом $x \in \mathfrak{X}$. Пусть $0 < \alpha < \beta < t_0$ и $\delta > 0$ таково, что 2δ меньше чем 1, α, $t_0 - \beta$ и $(t_0 + 1)^{-1}$. Так как $T(t_0)x = T(t) \times [T(t_0 - t)x]$, $t < t_0$, и так как правая часть не зависит от t, то она интегрируема на $[\alpha, \beta]$. Если $|\varepsilon| < \delta$, то

$$(\beta - \alpha)[T(t_0 + \varepsilon) - T(t_0)]x = \int_\alpha^\beta T(t)\,[T(t_0 + \varepsilon - t) - T(t_0 - t)]\,x\,dt.$$

По предположению, существует $M > 0$, такое, что $|T(t)| < M$ при $t \in [\alpha, \beta]$; кроме того, $|[T(t_0 + \varepsilon - t) - T(t_0 - t)]x|$ — ограниченная измеримая функция при $t \in [\alpha, \beta]$. Следовательно,

$$(\beta-\alpha)|[T(t_0+\varepsilon)-T(t_0)]x| \leqslant M \int_\alpha^\beta |[T(t_0+\varepsilon-t)-T(t_0-t)]x|\,dt = $$
$$= M \int_{t_0-\beta}^{t_0-\alpha} |[T(s+\varepsilon)-T(s)]x|\,ds.$$

Применяя теорему IV.8.20 или проверяя непосредственно, убеждаемся, что при $\varepsilon \to 0$ последний интеграл стремится к нулю, и, следовательно, $T(\cdot)x$ непрерывна при $t=t_0$.

Чтобы завершить доказательство второй части леммы, остается показать, что из измеримости $T(\cdot)x$ на $(0, \infty)$ при всех $x \in \mathfrak{X}$ вытекает ограниченность $|T(\cdot)|$ в каждом интервале $[\delta, 1/\delta]$, $\delta > 0$. Мы сначала покажем, что

(I) если $x_0 \in \mathfrak{X}$, то существует сепарабельное замкнутое линейное многообразие $\mathfrak{X}_0$ в $\mathfrak{X}$, содержащее x_0, и множество меры нуль E_0 интервала $(0, \infty)$, такое, что $T(t)x \in \mathfrak{X}_0$ для любого $x \in \mathfrak{X}_0$ и $t \notin E_0$.

По лемме III.6.9, существует множество меры нуль F_0, такое, что $\{T(t)x_0 \mid t \notin F_0\}$ сепарабельно. Поэтому $\mathfrak{X}_0 = \overline{\mathrm{sp}}\,\{x_0, T(t)x_0, t \notin F_0\}$ — сепарабельное замкнутое линейное подпространство $\mathfrak{X}$, и существует последовательность $\{t_n\}$, $t_n \notin F_0$, $n=1, 2, \ldots$, такая, что множество $\{x_0, T(t_n)x_0, n=1, 2, \ldots\}$ фундаментально (II.1.4) в $\mathfrak{X}_0$. Если $t \notin F_0$ и $t+t_n \notin F_0$, $n=1, 2, \ldots$, то $T(t)x_0$ и $T(t)[T(t_n)x_0] = T(t+t_n)x_0$ принадлежат к $\mathfrak{X}_0$. Пусть $E_0 = F_0 \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (F_0 - t_n)$, так что E_0 имеет меру нуль. Из ограниченности оператора $T(t)$ следует, что $T(t)\mathfrak{X}_0 \subseteq \mathfrak{X}_0$ для $t \notin E_0$; это доказывает предложение (I).

Предположим, что существует интервал $[\delta, 1/\delta]$, на котором $|T(\cdot)|$ не ограничена. Тогда существуют $s_n \in [\delta, 1/\delta]$ и $x_n \in \mathfrak{X}$, $|x_n|=1$, такие, что $|T(s_n)x_n| > n$, $n=1, 2, \ldots$. Применяя свойство (I) при каждом n, получим, что существует сепарабельное подпространство $\mathfrak{X}_n$, содержащее x_n и множество меры нуль E_n, такие, что $T(t)\,\mathfrak{X}_n \subseteq \mathfrak{X}_n$ при $t \notin E_n$. Положим $\mathfrak{X}_\infty = \overline{\mathrm{sp}}\,\{\mathfrak{X}_n, n=1, 2, \ldots\}$ и $E_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Ясно, что $\mathfrak{X}_\infty$ сепарабельно, E_∞ имеет меру нуль и $T(t)\mathfrak{X}_\infty \subseteq \mathfrak{X}_\infty$ при $t \notin E_\infty$. Для каждого t положим

$$|T(t)|' = \sup\{|T(t)x|, \quad x \in \mathfrak{X}_\infty, \quad |x| \leqslant 1\};$$

так как $x_n \in \mathfrak{X}_\infty$, то $|T(s_n)|' > n$, $n=1, 2, \ldots$. Пусть $\{z_n\}$ — счетное множество, плотное на единичной сфере $\mathfrak{X}_\infty$; поскольку $|T(\cdot)z_n|$ — измеримая вещественная функция, то из III.6.10 следует, что функция $|T(\cdot)|' = \sup_n |T(\cdot)z_n|$ также измерима. Кроме того, если $t_2 \notin E_\infty$, то для любого $x \in \mathfrak{X}_0$ $T(t_2)x \in \mathfrak{X}_\infty$ и $|T(t_2)x| \leqslant$

$\leqslant |T(t_2)|' \, |x|$. Итак, мы видим, что

$$\begin{aligned}|T(t_1+t_2)|' &= \sup\{|T(t_1)[T(t_2)x]|,\ x \in \mathfrak{X}_\infty,\ |x| \leqslant 1\} \leqslant \\ &\leqslant \sup\{|T(t_1)y|,\ y \in \mathfrak{X}_\infty,\ |y| \leqslant |T(t_2)|'\} \leqslant \\ &\leqslant |T(t_1)|' \, |T(t_2)|',\end{aligned}$$

если $t_2 \notin E_\infty$. Определим теперь на $(0, \infty)$ функцию ω равенством $\omega(t) = \log|T(t)|'$. Из изложенного выше мы знаем, что ω — измеримая функция, которая нигде не принимает значения $+\infty$, что $\omega(t_1+t_2) \leqslant \omega(t_1) + \omega(t_2)$, если по крайней мере одна из точек $t_i \notin E_\infty$, и что $\omega(s_n) > \log n$, где s_n — точки из $[\delta, 1/\delta]$. Противоречивость такого положения вытекает из следующего утверждения:

(II) если ω — измеримая функция на $(0, \infty)$ со значениями из расширенной области вещественных чисел, $\omega(t) < \infty$ при всех $t > 0$ и $\omega(t_1+t_2) \leqslant \omega(t_1) + \omega(t_2)$, когда одно из t_i не лежит в множестве E нулевой меры, то ω ограничена сверху на любом замкнутом интервале.

Чтобы убедиться в этом, возьмем $a > 0$ и положим $A = \omega(a)$. Тогда если $t_1 + t_2 = a$ и $t_2 \notin E$, то $A = \omega(a) \leqslant \omega(t_1) + \omega(t_2)$. Таким образом, если $F = \{t \mid 0 < t < a,\ \omega(t) > A/2\}$ и если $a - F$ — множество всех точек вида $a - t$, $t \in F$, то $E \bigcup F \bigcup (a - F) \supseteq [0, a]$. Следовательно, $\mu(F) + \mu(a - F) \geqslant a$, где μ обозначает меру Лебега. Так как $\mu(F) = \mu(a - F)$, то $\mu(F) \geqslant a/2$. Это показывает, что если s_n — точка конечного интервала $[\alpha, \beta]$, в которой $\omega(s_n) \geqslant 2n$, то множество $\{t \mid 0 < t < \beta,\ \omega(t) \geqslant n\}$ имеет меру не меньше $\alpha/2$. Поэтому если ω не ограничена сверху на $[\alpha, \beta]$, то $\omega(t) = \infty$ на множестве с мерой не меньше $\alpha/2$, но это противоречит предположению, что $\omega(t) < \infty$ при $t \in (0, \infty)$, и тем самым завершает доказательство леммы.

Наша дальнейшая задача — описать поведение $|T(t)|$ при t, стремящемся к ∞. Для этого нам потребуется следующая лемма о *полуаддитивных функциях*, т. е. о функциях ω, таких, что $\omega(t_1+t_2) \leqslant \omega(t_1) + \omega(t_2)$.

4. Лемма. *Пусть* ω — *полуаддитивная функция, определенная на* $[0, \infty)$ и *ограниченная на каждом конечном подинтервале. Тогда* $\omega_0 = \inf\limits_{t<0} \omega(t)/t$ *конечно или равно* $-\infty$, *и*

$$\omega_0 = \lim_{t\to\infty} \frac{\omega(t)}{t}.$$

Доказательство. Для любого данного $\delta > \omega_0$ существует точка t_0, такая, что

$$\frac{\omega(t_0)}{t_0} < \delta.$$

Любое t можно представить в виде $t=n(t)\,t_0+r$, где $n(t)$ — целое число и $0\leqslant r<t_0$. Тогда

$$\frac{\omega(t)}{t}\leqslant\frac{\omega(n(t)\,t_0)}{t}+\frac{\omega(r)}{t}\leqslant\frac{n(t)\,\omega(t_0)}{t}+\frac{\omega(r)}{t}\leqslant\frac{\omega(t_0)}{t_0+r/n(t)}+\frac{\omega(r)}{t}.$$

Таким образом,

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\omega(t)}{t}\leqslant\frac{\omega(t_0)}{t_0}<\delta.$$

Так как $\omega_0\leqslant\lim\limits_{t\to\infty}[\omega(t)/t]$, то $\lim\limits_{t\to\infty}[\omega(t)/t]$ существует и равен ω_0.

5. Следствие. *Предел* $\omega_0=\lim\limits_{t\to\infty}\log|T(t)|/t$ *существует. Для каждого* $\delta>\omega_0$ *существует постоянная* M_δ, *такая, что* $|T(t)|<$ $<M_\delta e^{\delta t}$ *при* $t\geqslant 0$.

Доказательство. Определим $\omega(t)=\log|T(t)|$ $t\geqslant 0$. Так как $\omega(t_1+t_2)=\log|T(t_1+t_2)|\leqslant\log(|T(t_1)|\,|T(t_2)|)=\omega(t_1)+\omega(t_2)$, то ω полуаддитивна. Доказываемое утверждение теперь следует из лемм 3 и 4, ч. т. д.

6. Определение. Для $h>0$ определим линейный оператор A_h равенством

$$A_hx=\frac{T(h)\,x-x}{h},\quad x\in\mathfrak{X}.$$

Пусть $\mathfrak{D}(A)$ — множество всех x из $\mathfrak{X}$, для которых существует предел $\lim\limits_{h\to\infty}A_hx$; определим на $\mathfrak{D}(A)$ оператор A равенством

$$Ax=\lim_{h\to 0}A_hx,\quad x\in\mathfrak{D}(A).$$

Оператор A с областью определения $\mathfrak{D}(A)$ называется *инфинитезимальным оператором полугруппы* $T(\cdot)$[1].

7. Лемма. (a) *Множество* $\mathfrak{D}(A)$ — *линейное многообразие, и* A *линеен на* $\mathfrak{D}(A)$;

(b) *если* $x\in\mathfrak{D}(A)$, *то* $T(t)\,x\in\mathfrak{D}(A)$, $0\leqslant t<\infty$, *и* $d/dt\,T(t)\,x=$ $=AT(t)\,x=T(t)\,Ax$;

(c) *если* $x\in\mathfrak{D}(A)$, *то* $[T(t)-T(s)]\,x=\int\limits_s^t T(u)\,Ax\,du$ *при* $0\leqslant s<$ $<t<\infty$;

[1] Часто называют такой оператор порождающим или производящим оператором полугруппы. — *Прим. ред.*

(d) *если* $t \geqslant 0$ *и* g — *интегрируемая по Лебегу функция, непрерывная в точке* t, *то*

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} g(u) T(u) x \, du = g(t) T(t) x.$$

Доказательство. Утверждение (a) ясно из определений. Для доказательства (b) положим $h > 0$, $t \geqslant 0$ и $x \in \mathfrak{D}(A)$. Тогда $T(t) A_h x = A_h T(t) x$, так что $\lim_{h \to 0} A_h T(t) x = \lim_{h \to 0} T(t) A_h x$ и, следовательно, $T(t) x \in \mathfrak{D}(A)$. По определению,

$$A(T(t) x) = \lim_{h \to 0} A_h T(t) x.$$

Таким образом, $T(t) Ax = AT(t) x$ для $x \in \mathfrak{D}(A)$. Если $t > 0$ и $h > 0$, то

$$\lim_{h \to 0} \left\{ \frac{T(t) x - T(t-h) x}{h} - T(t) Ax \right\} =$$
$$= \lim_{h \to 0} T(t-h)(A_h x - Ax) + \lim_{h \to 0} [T(t-h) - T(t)] Ax = 0,$$

согласно п. (III) определения 1 и лемме 3. С другой стороны,

$$\frac{T(t+h) x - T(t) x}{h} = T(t) A_h x \to T(t) Ax,$$

так что равенство $d/dt\, T(t) x = T(t) Ax$ установлено для $x \in \mathfrak{D}(A)$.

Утверждение (c) получается после применения линейных функционалов к обеим частям (b) и интегрирования. По поводу (d) смотрите III.12.8, ч. т. д.

8. Лемма. *Линейное многообразие* $\mathfrak{D}(A)$ *плотно в* $\mathfrak{X}$, *и* A — *замкнутый на* $\mathfrak{D}(A)$ *оператор.*

Доказательство. Пусть x — любой вектор из $\mathfrak{X}$. Тогда если t, $h > 0$, то

$$A_h \int_0^t T(s) x \, ds = \frac{1}{h} \int_0^t (T(h+s) x - T(s) x) \, ds =$$
$$= \frac{1}{h} \int_h^{t+h} T(s) x \, ds - \frac{1}{h} \int_0^t T(s) x \, ds =$$
$$= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s) x \, ds - \frac{1}{h} \int_0^h T(s) x \, ds \to T(t) x - x$$

при $h \to 0$ согласно лемме 7 (d). Таким образом, $\int_0^t T(s)\,x\,ds \in \mathfrak{D}(A)$.

Однако $x = \lim_{t \to 0} 1/t \int_0^t T(s)\,x\,ds$, так что $\mathfrak{D}(A)$ плотно в $\mathfrak{X}$. Чтобы убедиться в замкнутости оператора A, предположим, что $x_n \in \mathfrak{D}(A)$, $n = 1, 2, \ldots$, $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ и $\lim_{n \to \infty} Ax_n = y_0$. Используя лемму 7 (c), находим

$$T(t)\,x_0 - x_0 = \lim_{n \to \infty} T(t)\,x_n - x_n =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \int_0^t T(s)\,Ax_n\,ds = \int_0^t T(s)\,y_0\,ds,$$

так как $\lim_{n \to \infty} T(s)\,Ax_n = T(s)\,y_0$ равномерно на $[0, t]$. Таким образом,

$$\lim_{t \to 0} A_t\,x_0 = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)\,y_0\,ds = y_0$$

по лемме 7 (d). Следовательно, $x_0 \in \mathfrak{D}(A)$ и $Ax_0 = y_0$, т. е. оператор A замкнут, ч. т. д.

9. Следствие. *Полугруппа имеет ограниченный инфинитезимальный оператор тогда и только тогда, когда она непрерывна в равномерной топологии.*

Доказательство. Если полугруппа $T(\cdot)$ непрерывна в равномерной топологии, то, по теореме 2, она имеет ограниченный инфинитезимальный оператор. Обратно, предположим, что $T(\cdot)$ имеет ограниченный инфинитезимальный оператор A. Из предыдущей леммы вытекает, что A всюду определен. Таким образом, лемма 3 и принцип равномерной ограниченности (II.3.21 (II)) показывают, что

$$\sup_{0 \leqslant h \leqslant 1} |A_h| = K < \infty.$$

По лемме 3 для каждого $s \geqslant 0$ мы имеем постоянную M_s такую, что

$$|T(t)| \leqslant M_s,\ 0 \leqslant t,\ |t - s| \leqslant 1.$$

Далее,

$$\begin{aligned} T(t) - T(s) &= T(s)\,[T(t-s) - I],\ t > s, \\ &= -T(t)\,[T(s-t) - I],\ s > t. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$|T(t)-T(s)|\leqslant M_s\cdot K\cdot|t-s|,\quad 0\leqslant t,\quad |t-s|<1,$$

чем доказано, что полугруппа $T(\cdot)$ непрерывна в равномерной топологии, ч. т. д.

10. Теорема. *Пусть $T(t), t\geqslant 0$, — сильно непрерывная полугруппа операторов и $A_h=(T(h)-I)/h$. Тогда*

$$T(t)x=\lim_{h\to 0} e^{tA_h}x,\quad x\in\mathfrak{X},$$

равномерно по t из любого конечного интервала.

Доказательство. Заметим сначала, что

$$e^{tA_h}=e^{-t/h}e^{t/hT(h)}=e^{-t/h}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^nT(nh)}{n!h^n}.$$

Если $\delta>\omega_0$, то, по следствию 5,

$$|e^{tA_h}|\leqslant e^{-t/h}M_\delta\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^ne^{n\delta h}}{n!h^n}=M_\delta\exp\left\{t\left(\frac{e^{\delta h}-1}{h}\right)\right\}.$$

Следовательно, существует постоянная K_t такая, что $|e^{sA_h}|\leqslant K_t$, $0\leqslant s\leqslant t$, $0<h\leqslant 1$. Если $x\in\mathfrak{D}(A)$ и $t\leqslant t_0$, то (см. лемму 7)

$$|T(t)x-e^{tA_h}x|=\left|\int_0^t\frac{d}{ds}(e^{(t-s)A_h}T(s)x)\,ds\right|=$$

$$=\left|\int_0^t e^{(t-s)A_h}T(s)(Ax-A_hx)\,ds\right|\leqslant t_0K_{t_0}M_\delta e^{\delta t_0}|Ax-A_hx|\to 0$$

при $h\to 0$. Так как, по лемме 8, $\mathfrak{D}(A)$ плотно в $\mathfrak{X}$, то доказываемое утверждение следует из теоремы II.3.6, ч. т. д.

Эта и следующая теоремы вместе дают аналог теоремы 2 для сильно непрерывных полугрупп.

11. Теорема. *Если $\omega_0=\lim\limits_{t\to\infty}\log|T(t)|/t$ и $\operatorname{Re}(\lambda)>\omega_0$, то $\lambda\in\varrho(A)$ и*

$$R(\lambda;A)x=\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\,dt,\quad x\in\mathfrak{X}$$

Доказательство. Предположим, что $\omega_0<\delta<\operatorname{Re}(\lambda)$. Согласно следствию 5, существует такая постоянная M_δ, что $|T(t)|\leqslant M_\delta e^{\delta t}$,

$t \geqslant 0$. Таким образом, если $\operatorname{Re}(\lambda) > \omega_0$, то интеграл $\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)\, x\, dt$ существует и определяет ограниченный оператор. Пусть

$$R(\lambda)\, x = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)\, x\, dt, \quad x \in \mathfrak{X}, \operatorname{Re}(\lambda) > \omega_0.$$

Тогда

$$A_h R(\lambda)\, x = \frac{1}{h} \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} T(t+h)\, x\, dt - \frac{1}{h} \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)\, x\, dt =$$

$$= \frac{(e^{\lambda h} - 1)}{h} \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)\, x\, dt - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int\limits_0^h e^{-\lambda t} T(t)\, x\, dt \to \lambda R(\lambda)\, x - x$$

при $h \to 0$ по лемме 7 (d). Таким образом, $R(\lambda)\, x \in \mathfrak{D}(A)$ и

$$\text{(I)} \qquad (\lambda I - A)\, R(\lambda)\, x = x, \quad x \in \mathfrak{X}.$$

Если мы сможем показать, что

$$\text{(II)} \qquad R(\lambda)(\lambda I - A)\, x = x, \quad x \in \mathfrak{D}(A),$$

то $R(\lambda) = R(\lambda; A)$. Таким образом, ввиду (I) остается доказать, что $R(\lambda)\, Ax = AR(\lambda)\, x$, $x \in \mathfrak{D}(A)$. Однако если $x \in \mathfrak{D}(A)$, то $T(t)\, x \in \mathfrak{D}(A)$ при $t \geqslant 0$ и, по лемме 7, выполнено равенство $AT(t)\, x = T(t)\, Ax$. Следовательно, теорема III.6.20 показывает, что $R(\lambda)\, x \in \mathfrak{D}(A)$ и

$$A \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)\, x\, dt = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)\, Ax\, dt, \qquad \text{ч. т. д.}$$

Нашим следующим шагом будет отыскание достаточных условий на неограниченный оператор A, при которых он является инфинитезимальным оператором полугруппы.

12. Лемма. *Пусть A — замкнутый оператор со всюду плотной областью определения, спектр которого лежит в полуплоскости* $\operatorname{Re}(\lambda) \leqslant \omega$. *Пусть $S(t)$, $t \geqslant 0$ сильно непрерывна в точке t и удовлетворяет соотношениям*

$$|S(t)| \leqslant M e^{\omega t}, \quad t \geqslant 0,$$

$$R(\lambda; A)\, x = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)\, x\, dt, \quad x \in \mathfrak{X}.$$

Тогда

$$|R(\lambda; A)^n| \leqslant M (\operatorname{Re}(\lambda) - \omega)^{-n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Доказательство. Мы установим сначала формулу

$$[*] \qquad R(\lambda;\, A)^n x = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty e^{-\lambda t} t^{n-1} S(t)\, x\, dt, \quad \mathrm{Re}(\lambda) > \omega.$$

Из тождества Гильберта (см. VII.3.6)

$$R(\lambda;\, A) - R(\mu;\, A) = (\mu - \lambda) R(\lambda;\, A) R(\mu;\, A).$$

Полагая $\lambda \to \mu$, получаем, что

$$\frac{d}{d\lambda} R(\lambda;\, A) = -R^2(\lambda;\, A)$$

и, по индукции, что

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda;\, A) = (-1)^n n!\, R(\lambda;\, A)^{n+1}, \quad \lambda \in \varrho(A).$$

Предположим теперь, что $\omega < \delta < \mathrm{Re}(\lambda),\ \mathrm{Re}(\mu)$. Если

$$f(\lambda,\, \mu,\, t) = (e^{-\lambda t} - e^{-\mu t})(\lambda - \mu)^{-1},$$

то

$$|f(\lambda,\, \mu,\, t)| = \left| e^{-\mu t} \int_0^t e^{-(\lambda-\mu)s} ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant e^{-\mathrm{Re}(\mu)t} \int_0^t e^{-\mathrm{Re}(\lambda-\mu)s} ds < t e^{-\delta t}, \quad t \geqslant 0$$

Следовательно,

$$|f(\lambda,\, \mu,\, t)\, t^n S(t)\, x| \leqslant M\, |x|\, t^{n+1} e^{-(\delta-\omega)t}.$$

Из следствия III.6.16 вытекает, что можно перейти к пределу при λ, стремящемся к μ, т. е. можно продифференцировать выражение

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} t^n S(t)\, x\, dt$$

под знаком интеграла; тогда мы получим

$$\frac{d}{d\lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda t} t^n S(t)\, x\, dt = -\int_0^\infty e^{-\lambda t} t^{n+1} S(t)\, x\, dt, \quad \mathrm{Re}(\lambda) > \omega.$$

Таким образом, по индукции, мы находим

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda;\, A)\, x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} (-t)^n S(t)\, x\, dt.$$

Комбинируя эту формулу с формулой, приведенной выше, мы получим равенство [*].

Наконец, если $\mathrm{Re}(\lambda) > \omega$, то из [*] и условий на $S(t)$ видно, что

$$|R(\lambda;\ A)^n| \leqslant \frac{M}{(n-1)!}\int\limits_0^\infty t^{n-1}e^{-(\mathrm{Re}(\lambda)-\omega)t}\,dt = \frac{M}{(\mathrm{Re}(\lambda)-\omega)^n}, \qquad \text{ч. т. д.}$$

$\longrightarrow$ 13. Теорема. (*Хилле — Иосида — Филлипс.*) *Для того чтобы замкнутый линейный оператор со всюду плотной областью определения был инфинитезимальным оператором сильно непрерывной полугруппы, необходимо и достаточно, чтобы существовали вещественные числа M и ω такие, что для каждого вещественного $\lambda > \omega$, $\lambda \in \varrho(A)$, и*

$$|R(\lambda;\ A)^n| \leqslant M(\lambda-\omega)^{-n}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Доказательство. Необходимость условия вытекает из следствия 5, теоремы 11 и леммы 12. Для доказательства достаточности положим $B_\lambda = -\lambda[I - \lambda R(\lambda;\ A)]$, $\lambda > \omega$. Мы построим полугруппу $T(t)$ как сильный предел при $\lambda \longrightarrow \infty$ полугруппы e^{tB_λ}. Так как

$$e^{tB_\lambda} = e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda^2 t)^n R(\lambda;\ A)^n}{n!},$$

то

$$|e^{tB_\lambda}| \leqslant Me^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda^2 t)^n}{n!\,(\lambda-\omega)^n} = Me^{-\lambda t}e^{\frac{\lambda^2 t}{\lambda-\omega}} = Me^{\frac{t\omega\lambda}{\lambda-\omega}}.$$

Если $\omega_1 > \omega$, то при λ достаточно больших $\omega\lambda(\lambda-\omega)^{-1} < \omega_1$. Таким образом,

$$[*] \qquad |e^{tB_\lambda}| < Me^{t\omega_1}$$

при больших значениях λ.

Покажем, что $\lim\limits_{\lambda\to\infty} B_\lambda x = Ax$, $x \in \mathfrak{D}(A)$. Если $x \in \mathfrak{D}(A)$, то

$$|\lambda R(\lambda;\ A)x - x| = |R(\lambda;\ A)Ax| \leqslant M|Ax|(\lambda-\omega)^{-1} \longrightarrow 0$$

при $\lambda \longrightarrow \infty$. Так как $|\lambda R(\lambda;\ A)| \leqslant M\lambda(\lambda-\omega)^{-1} < 2M$ при больших λ, то, согласно теореме II.3.6, $\lambda R(\lambda;\ A)x \longrightarrow x$, $x \in \mathfrak{X}$, при $\lambda \longrightarrow \infty$. Следовательно, $B_\lambda x = \lambda R(\lambda;\ A)Ax \longrightarrow Ax$ для x из $\mathfrak{D}(A)$.

Теперь определим $S_\lambda(t) = e^{tB_\lambda}$. Для любых λ и μ мы имеем $B_\lambda B_\mu = B_\mu B_\lambda$; формула $S_\lambda(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} t^n B_\lambda^n/n!$ показывает, что

$B_\mu S_\lambda(t) = S_\lambda(t) B_\mu$. Следовательно, если $x \in \mathfrak{D}(A)$, то [см. лемму 7 (b)]

$$S_\lambda(t)x - S_\mu(t)x = \int_0^t \frac{d}{ds}[S_\mu(t-s)S_\lambda(s)x]\,ds =$$

$$= \int_0^t S_\mu(t-s)(B_\lambda - B_\mu)S_\lambda(s)x\,ds =$$

$$= \int_0^t S_\mu(t-s)S_\lambda(s)(B_\lambda - B_\mu)x\,ds.$$

Используя неравенство [*], получаем

$$|S_\lambda(t)x - S_\mu(t)x| \leqslant M^2 t e^{t\omega_1}|B_\lambda x - B_\mu x|$$

при больших значениях λ и μ. Таким образом, $S_\lambda(t)$ сходится к пределу равномерно в каждом конечном интервале. Так как $\mathfrak{D}(A)$ плотно в $\mathfrak{X}$, то из неравенства [*] и теоремы II.3.6. вытекает, что существует ограниченный оператор $T(t)$, такой, что $\lim\limits_{\lambda\to\infty} S_\lambda(t)x = T(t)x$, $x \in \mathfrak{X}$. Более того, $|T(t)| \leqslant \varliminf\limits_{\lambda\to\infty}|S_\lambda(t)| \leqslant e^{t\omega_1}$. Непрерывность $T(t)x$ следует из равномерности сходимости. Так как $S_\lambda(t)$ является полугруппой, то легко показать теперь, что и $T(t)$ — полугруппа. Ввиду неравенства

$$|S_\lambda(t)B_\lambda x - T(t)Ax| \leqslant |S_\lambda(t)(B_\lambda x - Ax)| +$$
$$+ |(S_\lambda(t) - T(t))Ax| \leqslant Me^{t\omega_1}|B_\lambda x - Ax| + 2Me^{t\omega_1}|Ax|,$$

выполненного для $x \in \mathfrak{D}(A)$, можно перейти к пределу при $\lambda \to \infty$ (см. следствие III.6.16) в обеих частях равенства $S_\lambda(t)x - x = \int_0^t S_\lambda(s)B_\lambda x\,ds$, чтобы получить соотношение

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)Ax\,ds.$$

Таким образом, если B — инфинитезимальный оператор полугруппы $T(s)$, то

$$Bx = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t T(s)Ax\,ds = Ax, \quad x \in \mathfrak{D}(A).$$

Следовательно, $\mathfrak{D}(B) \supseteq \mathfrak{D}(A)$ и B есть расширение оператора A. Однако, при больших λ, $\lambda \in \varrho(A) \cap \varrho(B)$ и равенства $(\lambda I - A)\mathfrak{D}(A) =$

$=\mathfrak{X}=(\lambda I-B)\,\mathfrak{D}(A)$, $(\lambda I-B)\,\mathfrak{D}(B)=\mathfrak{X}$ влекут совпадение $\mathfrak{D}(B)=$ $=\mathfrak{D}(A)$. Таким образом, $B=A$, ч. т. д.

14. Следствие. *Для того чтобы замкнутый линейный оператор со всюду плотной областью определения порождал сильно непрерывную полугруппу $T(t)$ ограниченных операторов, такую, что $|T(t)|\leqslant e^{\omega t}$ при некотором вещественном числе ω, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства*

$$[*]\qquad |R(\lambda;\ A)|\leqslant(\lambda-\omega)^{-1},\ \lambda>\omega.$$

Доказательство. Формула $R(\lambda;\ A)\,x=\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\,T(t)\,x\,dt,\qquad x\in\mathfrak{X}$, показывает необходимость неравенства [*]. Ясно, что [*] влечет неравенства $|R(\lambda;\ A)^n|\leqslant(\lambda-\omega)^{-n}$, $\lambda>\omega$, и, таким образом, по теореме 13 (с $M=1$), A является инфинитезимальным оператором полугруппы $T(t)$. В доказательстве теоремы 13 было показано, что $|T(t)|\leqslant Me^{t\omega_1}$ при всех $\omega_1>\omega$. Таким образом $|T(t)|\leqslant e^{t\omega}$, $t\geqslant 0$, ч. т. д.

Для очередного следствия будет необходима следующая лемма.

15. Лемма. *Пусть $f\in L_1(0,\ \infty)$ и*

$$\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}f(t)\,dt=0$$

при $\mathrm{Re}(\lambda)$ *достаточно больших. Тогда $f(t)=0$ почти всюду.*

Доказательство. Предположим, что равенство выполнено при $\mathrm{Re}(\lambda)\geqslant\omega$. Пусть $f_1(t)=e^{-\omega t}f(t)$, так что $f_1\in L_1(0,\ \infty)$ и $\int\limits_0^\infty f_1(t)\,e^{-\lambda t}\,dt=0$ при $\mathrm{Re}(\lambda)\geqslant 0$. Сделаем замену переменной $u=e^{-t}$. Тогда $t=-\log u$, и $\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}f_1(t)\,dt=\int\limits_0^1 u^\lambda g(u)\,du$, где $g(u)=u^{-1}(-\log u)\in L_1\,[0,\ 1]$ по лемме III.10.8. Тогда $\int\limits_0^1 u^n g(u)\,du=0$, $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$. Следовательно, по аппроксимационной теореме Вейерштрасса и следствию III.10.6,

$$0=\int\limits_0^1 h(u)\,g(u)\,du=\int\limits_0^1 h(u)\,G(du),\qquad h\in C(0,\ 1),$$

где $G(E)=\int_E g(u)\,du$. Так как мера Лебега регулярна, то регулярна и G, и, по теореме Рисса (IV.6.3), $\int_E g(u)\,du=0$ для любого измеримого множества E. Таким образом, $g(u)=0$ почти всюду (III.6.8). Следовательно, f_1, а значит, и f почти всюду равна нулю, ч. т. д.

16. Следствие. *Для того чтобы замкнутый оператор A со всюду плотной областью определения был инфинитезимальным оператором сильно непрерывной полугруппы, необходимо и достаточно, чтобы существовало сильно непрерывное семейство $S(t)$, $t\geqslant 0$, ограниченных линейных операторов, удовлетворяющее условиям $S(0)=I$, $|S(t)|\leqslant Me^{\omega t}$ при некоторых вещественных числах M и ω и такое, что*

$$R(\lambda;\,A)x=\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)x\,dt,\quad \lambda>\omega.$$

При выполнении этих условий $S(t)$ является полугруппой с инфинитезимальным оператором A.

Доказательство. По лемме 12, $|R(\lambda;\,A)^n|\leqslant M(\lambda-\omega)^{-n}$, $\lambda>\omega$. Таким образом, по теореме 13, A — инфинитезимальный генератор полугруппы $T(t)$ и $|T(t)|\leqslant Me^{\omega t}$. По теореме 11, $R(\lambda;\,A)x=$ $=\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\,dt$, $x\in\mathfrak{X}$, $\lambda>\omega$. Теперь, если $x^*\in\mathfrak{X}^*$, то

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}x^*(T(t)x-S(t)x)\,dt=0$$

при $\lambda>\omega$. Полагая $f(t)=e^{-(\omega+1)t}x^*(T(t)x-S(t)x)$, имеем $\int_0^\infty e^{-\lambda t}f(t)\,dt=0$ при $\lambda\geqslant 0$. Из леммы 15 следует, что $x^*T(t)x=$ $=x^*S(t)x$ при почти всех t. В силу непрерывности это равенство выполнено при всех $t\geqslant 0$, и, таким образом, (см. II.3.15) $T(t)=$ $=S(t)$, $t\geqslant 0$, ч. т. д.

Мы теперь рассмотрим вопрос о том, когда сильно непрерывная полугруппа операторов, определенная на $[0,\infty)$, может быть расширена до группы $T(t)$ операторов, определенной на $(-\infty,\infty)$. Ясно, что такое расширение единственно, если существует, и семейство $S(t)=T(-t)$, $t\geqslant 0$, есть сильно непрерывная полугруппа.

Так как при $0 < t < 1$

$$\frac{S(t)x - x}{t} = \frac{-T(-2)[T(2-t)x - T(2)x]}{-t},$$

то ясно, что инфинитезимальный оператор $S(t)$ равен замкнутому оператору $-A$, $\mathfrak{D}(-A) = \mathfrak{D}(A)$. Мы будем называть оператор A *инфинитезимальным оператором* группы и говорить, что A *порождает* группу $T(t)$, $-\infty < t < \infty$. На вопрос о том, допускает ли полугруппа $T(t)$, $t \geqslant 0$ расширение до группы, можно ответить в терминах инфинитезимального оператора A.

17. Следствие. *Для того чтобы замкнутый линейный оператор A со всюду плотной областью определения порождал сильно непрерывную группу ограниченных операторов на* $(-\infty, \infty)$, *необходимо и достаточно, чтобы существовали вещественные числа* $M > 0$ *и* $\omega \geqslant 0$, *такие, что*

$$[*] \qquad |R(\lambda; A)^n| \leqslant M(|\lambda| - \omega)^{-n}, \ \lambda > \omega \text{ и } \lambda < -\omega.$$

Если A порождает группу $T(t)$, $-\infty < t < \infty$, то $|T(t)| \leqslant Me^{\omega|t|}$.

Доказательство. Необходимость неравенства [*] следует из замечания, сделанного выше, теоремы 13 и соотношений $R(\lambda; -A) = -R(-\lambda; A)$ и $\sigma(-A) = -\sigma(A)$ (см. VII.9.10). С другой стороны, если [*] выполнено, то и A и $-A$ удовлетворяют условиям теоремы 13 и порождают полугруппы $T_+(t)$ и $T_-(t)$ соответственно. Легко показать, что аппроксимирующие полугруппы $S_\lambda^+(t)$ и $S_\lambda^-(t)$ (построенные при доказательстве теоремы 13) коммутируют, и, следовательно, $T_+(t)$ и $T_-(t)$ также коммутируют. Таким образом, $W(t) = T_+(t)T_-(t)$ — также полугруппа, определенная на $[0, \infty)$. Однако если $x \in \mathfrak{D}(A) = \mathfrak{D}(-A)$, то

$$\frac{W(t)x - x}{t} = T_-(t)\left[\frac{T_+(t)x - x}{t}\right] + \frac{T_-(t)x - x}{t} \to$$
$$\to Ax + (-Ax) = 0.$$

при $t \to 0$. Таким образом, $dW(t)x/dt = 0$, и, следовательно, $W(t)x = x$ для $x \in \mathfrak{D}(A)$. Так как $\mathfrak{D}(A)$ плотно в $\mathfrak{X}$, отсюда вытекает, что $T_-(t) = T_+(t)^{-1}$. Следовательно, если мы определим $T(t) = T_+(t)$, $t \geqslant 0$, и $T(t) = T_-(t)$, $t \leqslant 0$, то $T(t)$ — сильно непрерывная группа линейных операторов с инфинитезимальным оператором A. Неравенство $|T(t)| \leqslant Me^{\omega|t|}$ очевидно, ч. т. д.

Примеры. В случае когда T является оператором в пространстве $\mathfrak{X}$ функций, определенных при всех s из множества S, мы будем в дальнейших примерах использовать обозначение $(Tx)(s)$ или $T(x, s)$ для значения Tx в точке s. Конечно, если элементами пространства $\mathfrak{X}$ являются классы эквивалентных функций, как, например, в случае $\mathfrak{X} = L_p$, то эти символы обозначают одну из функций из класса эквивалентности Tx. Простейшие и наиболее важные примеры полугрупп ограниченных операторов возникают из операции сдвига $T(t)(x, s) = x(t+s)$ в пространствах $L_p(0, \infty)$ и $C[0, \infty]$. Мы обозначаем далее через $C[0, \infty]$ пространство всех непрерывных функций на компактной расширенной неотрицательной полуоси, т. е. пространство всех функций x неотрицательной вещественной переменной, для которых существует предел $x(\infty) = \lim_{s\to\infty} x(s)$. Аналогично $C[-\infty, \infty]$ есть пространство всех непрерывных функций вещественной переменной, для которых существуют оба предела $x(\infty)$ и $x(-\infty) = \lim_{s\to-\infty} x(s)$. Инфинитезимальный оператор в этих случаях есть оператор дифференцирования $A = d/dt$. Мы проверим это и найдем спектр $\sigma(A)$ в случае пространства $C[0, \infty]$. Из равномерной непрерывности функций в $C[0, \infty]$ легко вытекает, что $T(t)$ — сильно непрерывная полугруппа и, кроме того, $|T(t)| = 1$, $t \geqslant 0$. Пусть $x \in \mathfrak{D}(A)$ и $y = Ax$, тогда

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{x(t+h)-x(t)}{h} - y(t)\right] = 0$$

равномерно по t. Остюда следует, что $y = x' = dx/dt$. С другой стороны, пусть x — функция из $C[0, \infty]$, такая, что $x' \in C[0, \infty]$. Тогда

$$\left|\frac{x(t+h)-x(t)}{h} - x'(t)\right| \leqslant \frac{1}{h}\int_t^{t+h} |x'(s) - x'(t)|\, ds;$$

интеграл в правой части этого неравенства стремится к нулю равномерно по t при $h \to 0$ ввиду равномерной непрерывности функции x'. Таким образом,

$$\mathfrak{D}(A) = \{x \mid x' \in C[0, \infty]\}$$

и $A = d/dt$. Из общей теории следует, что оператор A замкнут. При λ, принадлежащих резольвентному множеству оператора A, дифференциальное уравнение $\lambda y - y' = x$ должно иметь единственное решение в $C[0, \infty]$ при всех $x \in C[0, \infty]$. В этом случае $y = R(\lambda; A)x$. Рассмотрение общего решения этого дифференциального уравнения показывает, что спектром $\sigma(A)$ оператора A является полуплоскость $\mathrm{Re}(\lambda) \leqslant 0$, и

$$R(\lambda; A)(x, t) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} x(t+s)\, ds, \quad \mathrm{Re}(\lambda) > 0.$$

Проведенные рассмотрения применимы с небольшими изменениями и в случае пространства $C[-\infty, \infty]$. Здесь $T(t)(x, s) = x(t+s)$ определяет сильно непрерывную группу на $(-\infty, \infty)$. Снова $A = d/dt$ с областью определения $\mathfrak{D}(A) = \{x \mid x' \in C[-\infty, \infty]\}$. В этом случае спектр $\sigma(A)$ есть мнимая ось, и

$$R(\lambda; A)x(t)=\int_0^\infty e^{-\lambda s}x(t+s)\,ds, \quad \mathrm{Re}(\lambda)>0;$$

$$=-\int_{-\infty}^0 e^{-\lambda s}x(t+s)\,ds, \quad \mathrm{Re}(\lambda)<0.$$

Читатель не встретит затруднений, перенося проведенные выше рассмотрения на случай пространств $L_p(0,\infty)$ и $L_p(-\infty,\infty)$, $1\leqslant p<\infty$. Как и раньше, $A=d/dt$ и $\mathfrak{D}(A)$ состоит из абсолютно непрерывных функций в L_p, у которых $x'\in L_p$. Спектр и формула резольвенты остаются теми же, что и для пространств C. Мы вернемся к этим примерам, чтобы проиллюстрировать дальнейшую теорию.

Как можно судить по тому вниманию, какое мы уделили теореме 13, следствию 14 и следствию 16, важно выяснить, когда замкнутый оператор A является инфинитезимальным оператором сильно непрерывной полугруппы. Теорема 13 дает необходимые и достаточные условия, но эти условия зачастую трудно проверить в конкретных аналитических случаях, представляющих интерес. Поэтому мы посвятим оставшуюся часть этого параграфа рассмотрению проблемы о порождении полугруппы с точки зрения теории возмущений. Основная идея, которая руководит нами при этом, состоит в следующем: если оператор A порождает полугруппу и если оператор P не слишком неправилен относительно A, то и оператор $A+P$ порождает полугруппу. Точной, хотя и относящейся к довольно специальному случаю формулировкой этого в известной мере неточного принципа является следующее утверждение (частный случай теоремы 19): если оператор A порождает полугруппу, а P — ограниченный оператор, то оператор $A+P$ порождает полугруппу.

Множество операторов, удовлетворяющих нашему принципу возмущений, определяется точно следующим образом.

18. Определение. Пусть оператор A — инфинитезимальный оператор сильно непрерывной полугруппы $T(t)$; обозначим через $\mathscr{P}(A)$ класс замкнутых операторов P, удовлетворяющих следующим условиям:

(I) $\mathfrak{D}(P)\supseteq\mathfrak{D}(A)$;

(II) для каждого $t>0$ существует постоянная $K_t<\infty$, такая, что $|PT(t)x|\leqslant K_t|x|$ при $x\in\mathfrak{D}(A)$;

(III) постоянные K_t в условии (II) можно выбрать так, что $\int_0^1 K_t\,dt$ существует и конечен.

19. Теорема. *Пусть $T(t)$, $t\geqslant 0$ — сильно непрерывная полугруппа ограниченных операторов в $\mathfrak{X}$ с инфинитезимальным оператором A.*

Если $P \in \mathcal{P}(A)$, то оператор $A+P$, определенный на $\mathfrak{D}(A)$, замкнут и является инфинитезимальным оператором полугруппы $T(t; A+P)$. Кроме того,

$$T(t; A+P) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(t), \quad t \geqslant 0,$$

где $S_0(t) = T(t)$ *и* $S_n(t)x = \int_0^t T(t-s) PS_{n-1}(s)x\, ds$ *для* $x \in \mathfrak{X}$ *и* $n \geqslant 1$, *причем ряд абсолютно сходится, равномерно по t в любом конечном интервале. Для любых n и x функция $S_n(t)x$ непрерывна при $t \geqslant 0$.*

Мы построим доказательство теоремы 19 в виде ряда лемм. Во всей оставшейся части этого параграфа мы будем пользоваться обозначениями определения 18 и теоремы 19.

20. Лемма. *Если* $P \in \mathcal{P}(A)$, *то*

(a) $\mathfrak{D}(P) \supseteq \bigcup_{t>0} T(t)\mathfrak{X}$;

(b) *Отображение* $x \to PT(t)x$, $x \in \mathfrak{D}(A)$, *имеет единственное расширение до ограниченного оператора (которое мы будем обозначать через $PT(t)$), определенного на всем $\mathfrak{X}$;*

(c) *функция $PT(t)x$ непрерывна по t при $t > 0$ и любом $x \in \mathfrak{X}$. Если $\omega_0 = \lim_{t\to\infty} \log|T(t)|/t$, то $\overline{\lim_{t\to\infty}} \log|PT(t)|/t \leqslant \omega_0$;*

(d) *если* $\operatorname{Re}(\lambda) > \omega_0$, *то*

$$PR(\lambda; A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} PT(t)x\, dt, \quad x \in \mathfrak{X}.$$

Доказательство. Так как $\mathfrak{D}(A)$ плотно в $\mathfrak{X}$ по лемме 8, то утверждение (b) легко вытекает из условия (II) определения 18 с помощью предложения I.6.17.

Пусть $x_0 \in \mathfrak{X}$, $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$, где $x_n \in \mathfrak{D}(A)$. Тогда $T(t)x_n \to T(t)x_0$ и $PT(t)x_n \to \{PT(t)\}x_0$. Так как оператор P замкнут, то $T(t)x_0 \in \mathfrak{D}(P)$ и $P\{T(t)x_0\} = \{PT(t)\}x_0$. Это доказывает (a). Чтобы доказать (c), положим $0 < \delta < t$. Равенство $PT(t)x = PT(\delta)T(t-\delta)x$ показывает, что функция $PT(t)x$ непрерывна. Так как

$$\log|PT(t)| \leqslant \log|PT(\delta)| + \log|T(t-\delta)|,$$

то

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\log|PT(t)|}{t} \leqslant \lim_{t\to\infty} \frac{\log|PT(\delta)|}{t} + \lim_{t\to\infty} \frac{\log|T(t-\delta)|}{t} = \omega_0.$$

Таким образом, (c) доказано. Утверждение (d) следует из теоремы III.6.20, ч. т. д.

21. Лемма. *Пусть f — непрерывная функция, определенная при $t>0$, со значениями в $\mathfrak{X}$, причем $\int_0^1 |f(t)|\,dt<\infty$. Если $g(t)=$ $=\int_0^t T(t-s)f(s)\,ds$, то $g(t)\in\mathfrak{D}(P)$,*

$$Pg(t)=\int_0^t PT(t-s)f(s)\,ds,$$

и g и Pg — непрерывные функции t при $t>0$.

Доказательство. Интеграл, определяющий функцию g, существует при всех $t\geqslant 0$, так как $|T(t)|$ ограничена в каждом конечном интервале (лемма 3). При всех $s<t$ вектор $T(t-s)f(s)\in\mathfrak{D}(P)$ по лемме 20. Таким образом, как только будет показано, что функция $s\to PT(t-s)f(s)$ интегрируема на интервале $[0, t]$, из теоремы III.6.20 будет вытекать включение и формула для $Pg(t)$. Из леммы 20(b) и принципа равномерной ограниченности (II.3.21) следует, что $|PT(\cdot)|$ ограничена в любом интервале, не содержащем начала координат. Пусть $0<t_1<t$, так что функция $s\to|PT(t-s)|$ ограничена, а $|f(\cdot)|$ интегрируема на интервале $0\leqslant s\leqslant t_1$, в то время как $|f(\cdot)|$ ограничена и $s\to|PT(t-s)|$, по лемме 3 и определению 18(III), интегрируема на интервале $t_1\leqslant s\leqslant t$. Для проверки непрерывности функции Pg при $t>0$ положим $0<2\delta<t_0$ и $M_1=\sup|PT(s)|$ при $t_0-2\delta\leqslant s\leqslant t_0+\delta$. Тогда $|PT(t-s)f(s)|\leqslant M_1|f(s)|$, если $|t-t_0|\leqslant\delta$. Поэтому, по следствию III.6.16,

$$[*]\qquad \lim_{t\to t_0}\int_0^\delta PT(t-s)f(s)\,ds=\int_0^\delta PT(t_0-s)f(s)\,ds.$$

Далее,

$$\int_\delta^t PT(t-s)f(s)\,ds=\int_0^{t_0} PT(s)f(t-s)\chi_{[0,\,t-\delta]}(s)\,ds,$$

и если $M_2=\sup|f(s)|$ при $\delta\leqslant s\leqslant t_0+\delta$, то норма интеграла справа ограничена числом $M_2|PT(s)|$. Таким образом,

$$\lim_{t\to t_0}\int_\delta^t PT(t-s)f(s)\,ds=\int_\delta^{t_0} PT(t_0-s)f(s)\,ds.$$

Соединяя этот результат с формулой [*], мы видим, что функция Pg непрерывна в произвольной точке $t_0>0$. Только что полученный результат, примененный к случаю $P=I$, показывает, что функция g непрерывна, ч. т. д.

22. Лемма *Пусть f — непрерывная функция, определенная при $t>0$, со значениями в $\mathfrak{X}$, причем $\int_0^\infty e^{-\omega s}|f(s)|\,ds<\infty$ при некотором ω. Пусть $\omega_0=\lim_{t\to\infty}\log|T(t)|/t$ и $F(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda s}f(s)\,ds$. Тогда при $\mathrm{Re}(\lambda)>\max(\omega,\ \omega_0)$*

$$\text{(I)}\qquad R(\lambda;\,A)\,F(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^t T(t-s)\,f(s)\,ds\,dt$$

и

$$\text{(II)}\qquad PR(\lambda;\,A)\,F(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}P\int_0^t T(t-s)\,f(s)\,ds\,dt.$$

Доказательство. Предположим, что $\mathrm{Re}(\lambda)>\max(\omega,\ \omega_0)$. Для доказательства формулы (I) вспомним, что, согласно теореме 11,

$$R(\lambda;\,A)\,F(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)\left\{\int_0^\infty e^{-\lambda s}f(s)\,ds\right\}dt.$$

Функция $e^{-\lambda(t+s)}\,T(t)\,f(s)$ непрерывна на произведении $(0,\infty)\times(0,\infty)$ и, следовательно, измерима. По теореме Тонелли (III.11.15), имеем

$$R(\lambda;\,A)\,F(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda s}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)\,f(s)\,dt\,ds.$$

Далее, при каждом s делаем подстановку $t\to(t-s)$ во втором интеграле и снова меняем порядок интегрирования. Таким образом,

$$R(\lambda;\,A)\,F(\lambda)=\int_0^\infty\int_s^\infty e^{-\lambda t}T(t-s)\,f(s)\,dt\,ds=$$
$$=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^t T(t-s)\,f(s)\,ds\,dt.$$

Утверждение (II) вытекает теперь из (I), леммы 22 и теоремы III.6.20, ч. т. д.

Последние сведения, необходимые нам для доказательства теоремы 19, относятся к определенного типа интегралам, важным и в других разделах математики. Мы приводим эти сведения в определении и леммах 23—25.

23. Определение. Пусть F и G — измеримые по Лебегу числовые функции, определенные на $(-\infty, \infty)$. Мы определяем функцию $F*G$, полагая

$$(F*G)(t)=\int_{-\infty}^{\infty} F(t-s)\,G(s)\,ds$$

при всех значениях t, для которых интеграл существует. Функция $F*G$ называется *сверткой* функций F и G.

Заметим, что если F и G равны тождественно нулю при $s<0$, то формула для $F*G$ принимает вид

$$(F*G)(t)=\int_{0}^{t} F(t-s)\,G(s)\,ds.$$

В следующих двух леммах доказаны некоторые основные свойства свертки, которые будут использоваться в этом параграфе и в дальнейшем.

24. Лемма. (a) *Если функции F и G принадлежат пространству $L_1(-\infty, \infty)$ функций, интегрируемых по мере Лебега, то $F*G$ определена при почти всех t, принадлежит $L_1(-\infty, \infty)$ и $|F*G|_1\leqslant|F|_1|G|_1$.*

(b) *Если $F\in L_1(-\infty, \infty)$ и $|G(t)|\leqslant M$, то $|(F*G)(t)|\leqslant M|F|_1$.*

(c) *Пусть F и G определены при $t\geqslant 0$ и интегрируемы по Лебегу на каждом конечном интервале. Тогда $(F*G)(t)=\int_0^t F(t-s)G(s)\,ds$ интегрируема по Лебегу на каждом конечном интервале.*

Доказательство. Для доказательства утверждения (a) мы сначала покажем, что функция $[s, t]\to G(t-s)$, определенная на плоскости $(-\infty, \infty)\times(-\infty, \infty)$, измерима относительно двумерной меры Лебега.

Для любого подмножества E вещественной оси положим, по определению, $p(E)=\{[s, t]\,|\,s-t\in E\}$. Тогда $p\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)=\bigcup_{i=1}^{\infty}p(E_i)$, $p(E')=(p(E))'$ и $p(\varnothing)=\varnothing$. Так как $p(E)$ открыто, если открыто E, то, очевидно, что $p(E)$ — борелевское множество, если E — борелевское множество. Пусть теперь E — борелевское множество меры нуль. По теореме Фубини (III.11.9), имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\chi_{p(E)}(s, t)\,ds\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\chi_E(s-t)\,ds\,dt=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\chi_E(s-t)\,ds\right\}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}0\cdot dt=0.$$

Таким образом, $p(E)$ имеет меру нуль, если E имеет меру нуль. Поэтому если множество E лежит в лебеговском расширении σ-алгебры борелевских подмножеств прямой, то множество $p(E)$ лежит в лебеговском расширении σ-алгебры борелевских подмножеств плоскости. Пусть U — открытое множество комплексных чисел, $E=\{t\,|\,G(t)\in U\}$ и $D=\{[s, t]\,|\,G(t-s)\in U\}$. Тогда $D=p(E)$, и измеримость функции $G(t—s)$ следует немедленно из III.6.10.

Пусть теперь $F,G\in L_1$. Тогда, по теореме Тонелли (III.11.14),

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|(F*G)(t)|\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}F(t-s)G(s)\,ds\right|dt\leqslant$$

$$\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(t-s)G(s)|\,ds\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(t-s)||G(s)|\,dt\,ds=$$

$$=|F|_1\int_{-\infty}^{+\infty}|G(s)|\,ds=|F|_1|G|_1,$$

откуда следует (a). Доказательство (b) элементарно. Утверждение (c) следует из (a), так как

$$\int_0^\beta|(F*G)(t)|\,dt=\int_0^\beta|(F_1*G_1)(t)|\,dt,$$

где $F_1(t)=F(t)$ и $G_1(t)=G(t)$ при $0<t<\beta$ и $F_1(t)=G_1(t)=0$ при $t>\beta$ и $t\leqslant 0$, ч. т. д.

25. Лемма. (a) *Если F_1 и G_1— измеримые по Лебегу функции, определенные на вещественной прямой, то* $F*G=G*F$.

(b) *Если F, G и H принадлежат $L_1(-\infty, \infty)$, то* $(F*G)*H=$ $=F*(G*H)$.

Доказательство. Утверждение (a) немедленно следует из равенств

$$(F*G)(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}F(t-s)G(s)\,ds=\int_{-\infty}^{+\infty}F(s)G(t-s)\,ds=(G*F)(t).$$

Утверждение (b) следует из равенства

$$((F*G)*H)(r)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}F(s)G(t-s)\,ds\right\}H(r-t)\,dt=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}G(t-s)F(s)H(r-t)\,ds\,dt=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}G(t-s)H(r-t)\,dt\right\}F(s)\,ds=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}G(t)H(r-s-t)\,dt\right\}F(s)\,ds=(F*(G*H))(r),$$

которое выполнено при почти всех r в силу предложения (a) теоремы Тонелли (III.11.14), так как

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|G(t-s)F(s)H(r-t)|\,dr\,dt\,ds=|H|_1|G|_1|F|_1<\infty$$

и так как измеримость всех наших функций была доказана в первой части доказательства леммы 24, ч. т. д.

Наконец, мы даем доказательство теоремы 19.

Доказательство теоремы 19. Пусть $\chi(t)=|T(t)|$ и $\psi(t)=|PT(t)|$. Тогда функции χ и ψ измеримы (см. лемму 3). Если ω — любая постоянная, большая, чем $\omega_0=\lim\limits_{t\to\infty}\log|T(t)|/t$, то существует постоянная $M_\omega<\infty$, такая, что $\chi(t)\leqslant M_\omega e^{\omega t}$ при $t\geqslant 0$. По лемме 3 и п. (III) определения 18, $\int_0^\beta\psi(t)\,dt<\infty$ при всех $\beta>0$. Положим $\psi^{(1)}=\psi$ и, по индукции, $\psi^{(n)}=\psi^{(n-1)}*\psi$. Из леммы 24(c) с помощью индукции находим, что все функции $\psi^{(n)}$ интегрируемы по Лебегу на каждом конечном интервале положительной вещественной полуоси. Положим $\chi^{(0)}=\chi$, $\chi^{(n)}=\chi*\psi^{(n)}$. По лемме 24(c), функция $\chi^{(n)}$ интегрируема на каждом конечном интервале положительной вещественной полуоси.

Пусть $S_0(t)=T(t)$; определим по индукции

$$[*]\qquad S_n(t)x=\int_0^t T(t-s)PS_{n-1}(s)\,ds\qquad \text{для } x\in\mathfrak{X}.$$

Такое индуктивное построение законно, если мы докажем, что

(I) $S_n(t)x \in \mathfrak{D}(P)$, $x \in \mathfrak{X}$, $t > 0$;

(II) $S_n(t)x$ непрерывна по t при $t > 0$, $x \in \mathfrak{X}$;

(III) $|S_n(t)| \leqslant \chi^{(n)}(t)$;

(IV) $PS_n(t)x$ непрерывна по t при $t > 0$, $x \in \mathfrak{X}$;

(V) $|PS_n(t)| \leqslant \psi^{(n+1)}(t)$.

При $n=0$ все это либо очевидно, либо следует из лемм 20 и 21. Предположим, известно, что (I)—(V) выполнены при $n=m$. Тогда из (I), (IV) и (V) ясно, что интеграл в [*] существует при всех $t>0$ и может быть использован для определения S_{m+1}. Утверждения (I), (II) и (IV) для случая $n=m+1$ тогда следуют из леммы 21. Далее,

$$\begin{aligned}|S_{m+1}(t)x| &= \left|\int_0^t T(t-s)PS_m(s)x\,ds\right| \leqslant \\ &\leqslant |x| \int_0^t \chi(t-s)\psi^{(m+1)}(s)\,ds = \\ &= |x|\chi^{(m+1)}(t).\end{aligned}$$

По лемме 21,

$$\begin{aligned}|PS_{m+1}(t)x| &= \left|\int_0^t PT(t-s)PS_m(s)\,ds\right| \leqslant \\ &\leqslant |x| \int_0^t \psi(t-s)\psi^{(m+1)}(s)\,ds = \\ &= |x|\psi^{(m+2)}(t),\end{aligned}$$

что доказывает (III) и (V) для случая $n=m+1$. Следовательно, (I)—(V) доказаны по индукции для всех n.

Мы теперь получим оценку для ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \chi^{(n)}(t)$, который мажорирует ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |S_n(t)|$.

По лемме 20(с), для каждого $\omega > \omega_0$ существует постоянная $M_\omega < < \infty$, такая, что $\psi(t) = |PT(t)| < M_\omega e^{\omega t}$ при достаточно больших t. С другой стороны, мы видели, что ψ интегрируема на каждом конечном интервале положительной вещественной полуоси. Таким образом, если мы выберем ω_1 достаточно большим, то

$$\int_0^\infty e^{-\omega_1 t}\psi(t)\,dt < \infty.$$

Следовательно, по следствию III.6.16,

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\psi(t)\,dt=\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\infty e^{-(\lambda-\omega_1)t}\{e^{-\omega_1 t}\psi(t)\}\,dt=0,$$

так что если $\omega>\omega_1$ выбрано достаточно большим, то

$$\int_0^\infty e^{-\omega t}\psi(t)\,dt=\gamma<1.$$

Мы покажем теперь, по индукции, что

$$\chi^{(n)}(t)\leqslant M_\omega e^{\omega t}\gamma^n.$$

Это ясно для случая $n=0$. Предположим, что неравенство справедливо для данного n. Тогда, по лемме 25(b),

$$\chi^{(n+1)}(t)=\int_0^t\chi^{(n)}(t-s)\,\psi(s)\,ds\leqslant$$

$$\leqslant M_\omega\,e^{\omega t}\gamma^n\int_0^t e^{-\omega s}\psi(s)\,ds\leqslant$$

$$\leqslant M_\omega\,e^{\omega t}\gamma^{n+1},\quad t>0.$$

Ясно, что $\lim\limits_{t\to 0}S_0(t)=I$ в сильной операторной топологии. Так как

$$\chi^{(n)}(t)=\int_0^t\chi(t-s)\,\psi^{(n)}(s)\,ds\leqslant M_\omega\,e^{\omega t}\int_0^t e^{-\omega s}\psi^{(n)}(s)\,ds,$$

то ясно, что $\chi^{(n)}(t)\to 0$ при $t\to 0$ для $n\geqslant 1$. Но поскольку $|S_n(t)|\leqslant\leqslant\chi^{(n)}(t)$, то и $S_n(t)\to 0$ для $n\geqslant 1$. Следовательно, если мы положим $S_0(0)=I$, $S_n(0)=0$ для $n\geqslant 0$, то функция $S_n(t)x$ будет для всех $x\in\mathfrak{X}$ непрерывна по t при $t\geqslant 0$. Кроме того, очевидно, выполняется неравенство $|S_n(t)|\leqslant M_\omega e^{\omega t}\gamma^n$ для $t\geqslant 0$ и $n\geqslant 0$.

Отсюда следует, что ряд $\sum\limits_{n=0}^\infty S_n(t)$ сходится абсолютно и равномерно в каждом конечном интервале $[0,\ \beta]$, и что

$$[**]\qquad \sum_{n=0}^\infty|S_n(t)|\leqslant(1-\gamma)^{-1}M_\omega\,e^{\omega t}.$$

Пусть $S(t)=\sum\limits_{n=0}^\infty S_n(t)$, $t\geqslant 0$. Так как каждый член этого ряда сильно непрерывен при $t\geqslant 0$, то то же верно и для суммы $S(t)$. Кроме того, $|S(t)|\leqslant(1-\gamma)^{-1}M_\omega\,e^{\omega t}$.

Остается показать, что $S(t)$, $t \geqslant 0$, есть полугруппа ограниченных операторов с инфинитезимальным оператором $A+P$, $\mathfrak{D}(A+P) = \mathfrak{D}(A)$. Для этого сначала заметим, что ввиду неравенства [**] и III.6.16 мы имеем

$$\int_0^\infty e^{-\lambda s} S(s)\, x\, ds = \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda s} S_n(s)\, x\, ds, \quad x \in \mathfrak{X}; \quad \operatorname{Re}(\lambda) > \omega.$$

По лемме 22(I),

$$\int_0^\infty e^{-\lambda s} S_n(s)\, x\, ds = R(\lambda;\ A) \int_0^\infty e^{-\lambda s} P S_{n-1}(s)\, x\, ds.$$

Теперь повторное применение леммы 22(II) дает

$$\int_0^\infty e^{-\lambda s} S_n(s)\, x\, ds = R(\lambda;\ A)\, PR(\lambda;\ A) \int_0^\infty e^{-\lambda s} P S_{n-2}(s)\, x\, ds = \ldots$$
$$\ldots = R(\lambda;\ A)\, [PR(\lambda;\ A)]^n x.$$

Следовательно,

$$\int_0^\infty e^{-\lambda s} S(s)\, x\, ds = \sum_{n=0}^\infty R(\lambda;\ A)\, [PR(\lambda;\ A)]^n x, \quad \operatorname{Re}(\lambda) > \omega.$$

По лемме 20(d) и 18(I),

$$|PR(\lambda;\ A)| \leqslant \int_0^\infty e^{-\omega s} \psi(s)\, ds = \gamma < 1, \quad \operatorname{Re}(\lambda) > \omega.$$

Таким образом, ряд $\sum_{n=0}^\infty [PR(\lambda;\ A)]^n$ сходится абсолютно. Пусть $\mathfrak{D}(A+P) = \mathfrak{D}(A)$. Вспоминая, что $R(\lambda;\ A)\, \mathfrak{X} = \mathfrak{D}(A)$, имеем

$$(\lambda I - A - P)\, R(\lambda;\ A) \sum_{n=0}^\infty PR(\lambda;\ A)\, x =$$
$$= \sum_{n=0}^\infty [PR(\lambda;\ A)]^n x - \sum_{n=1}^\infty [PR(\lambda;\ A)]^n x = x, \quad x \in \mathfrak{X}.$$

Кроме того, если $x \in \mathfrak{D}(A)$, то

$$R(\lambda;\ A) \left\{ \sum_{n=0}^\infty [PR(\lambda;\ A)]^n \right\} (\lambda I - A - P)\, x =$$
$$= x + R(\lambda;\ A) \sum_{n=0}^\infty [PR(\lambda;\ A)]^n Px -$$
$$- R(\lambda;\ A) \sum_{n=0}^\infty [PR(\lambda;\ A)]^n Px = x.$$

Таким образом, оператор $\lambda I - A - P$ с областью определения $\mathfrak{D}(A)$ имеет ограниченный обратный $R(\lambda; A) \sum_{n=0}^{\infty} [PR(\lambda; A)]^n$. Следовательно, $A+P$ замкнут и

$$R(\lambda;\ A) \sum_{n=0}^{\infty} [PR(\lambda;\ A)]^n = R(\lambda;\ A+P).$$

Заключение теоремы 19 теперь вытекает из следствия 16, ч. т. д.

Пример. В качестве примера приложения теоремы 19 мы рассмотрим пространство $C[-\infty, \infty]$ и группу сдвигов $\{T(t)\}$, определенную равенством $T(t)(x, s) = x(t+s)$; эта группа имеет инфинитезимальный оператор $A = d/ds$ (см. примеры после следствия 17). Рассмотрим оператор $A^2 = d^2/ds^2$, область определения которого (см. VII.9.6) состоит из всех функций $x \in C[-\infty, \infty]$, таких, что x' и x'' принадлежат $C[-\infty, \infty]$. Замкнутость оператора A^2 была доказана в теореме VII.9.7. Легко видеть, что многообразие $\mathfrak{D}(A^2)$ плотно. Так как выше было отмечено, что спектр $\sigma(A)$ есть мнимая ось, то $\sigma(A^2)$ совпадает с отрицательной вещественной полуосью (см. VII.9.10). Если $\lambda > 0$, то ввиду теоремы VII.9.5

$$R(\lambda;\ A^2) = -R(\sqrt{\lambda};\ A)\, R(-\sqrt{\lambda};\ A).$$

Следовательно, $|R(\lambda;\ A^2)| \leqslant \lambda^{-1}$, $\lambda > 0$, и из следствия 14 вытекает, что оператор A^2 порождает сильно непрерывную полугруппу $T(t, A^2)$, удовлетворяющую условию $|T(t;\ A^2)| \leqslant 1$.

Мы найдем явное выражение для $T(t;\ A^2)$. По теоремам VII.9.4 и VII.9.5,

$$R(\lambda;\ A^2)(x,\ s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1+C_2} \frac{R(\mu;\ A)(x,\ s)\, d\mu}{(\mu - \sqrt{\lambda})(\mu + \sqrt{\lambda})}, \quad -\infty < s < \infty,$$

где C_1 и C_2 — достаточно малые положительно ориентированные окружности около точек $\mu = -\sqrt{\lambda}$ и $\mu = \sqrt{\lambda}$ соответственно. Сделав подстановку

$$\begin{aligned} R(\mu;\ A)(x,\ s) &= \int_0^{\infty} e^{-\mu t} x(t+s)\, dt, \quad \operatorname{Re}(\mu) > 0, \\ &= -\int_{-\infty}^{0} e^{-\mu t} x(t+s)\, dt, \quad \operatorname{Re}(\mu) < 0, \end{aligned}$$

и подсчитав вычеты, получаем формулу

$$R(\lambda;\ A^2)(x,\ s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-|t|\sqrt{\lambda}}}{2\sqrt{\lambda}}\, x(s+t)\, dt, \quad -\infty < s < \infty.$$

Теперь сделаем подстановку

$$\frac{e^{-|t|\sqrt{\lambda}}}{\sqrt{\lambda}}=\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda r}e^{-t^2/4r}}{\sqrt{\pi r}}\,dr$$

и изменим порядок интегрирования, используя теорему Тонелли (III.11.14); при этом получаем

$$R(\lambda;\ A^2)(x,\ s)=\int_0^\infty e^{-\lambda r}\left\{\frac{1}{2\sqrt{\pi r}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/4r}x(t+s)\,dt\right\}dr.$$

Однако мы знаем из теоремы 11, что

$$R(\lambda,\ A^2)(x,\ s)=\int_0^\infty e^{-\lambda r}T(r;\ A^2)(x,\ s)\,dr,$$

и, применяя лемму 15, находим

$$T(r;\ A^2)(x,\ s)=\frac{1}{2\sqrt{\pi r}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/4r}x(s+t)\,dt,\quad r>0.$$

Пусть теперь $h\in C[-\infty,\ \infty]$ и P — (неограниченный) оператор, определенный следующим образом:

(a) Область определения P состоит из всех $x\in C[-\infty,\infty]$, таких, что x имеет непрерывную производную в окрестности каждой точки t_0, где $h(t_0)\neq 0$, и таких, что $h(t)\,x'(t)\in C[-\infty,\ \infty]$.

(b) Для $x\in\mathfrak{D}(P)$, $(Px)(t)=h(t)\,x'(t)$. Легко видеть, что оператор P замкнут.

Проверим теперь условия определения 18, чтобы показать при помощи теоремы 19, что оператор A^2+P с областью определения $\mathfrak{D}(A^2)$ порождает некоторую полугруппу. Ясно, что $\mathfrak{D}(A^2)\subseteq\mathfrak{D}(P)$. Если $x\in\mathfrak{D}(A^2)$ и $t>0$, то

$$|PT(t;\ A^2)(x,\ s)|\leqslant|h|\left|\frac{d}{ds}T(t;\ A^2)(x,\ s)\right|=$$

$$=|h|\left|\frac{-1}{4t\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}(\xi-s)\,e^{-(\xi-s)^2/4t}x(\xi)\,d\xi\right|=$$

$$\leqslant\frac{|x|\,|h|}{2t\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty \xi e^{-\xi^2/4t}\,d\xi=\frac{|x|\,|h|}{\sqrt{\pi t}}\,.$$

Таким образом, условия (II) и (III) также выполнены. Ввиду леммы 7(b) для любого $x_0\in\mathfrak{D}(A^2)$ функция

$$y(s,\ t)=T(t;\ A^2+P)(x_0,\ s)$$

есть решение задачи Коши:

$$(1)\qquad \frac{\partial}{\partial t} y(s,\ t)=\frac{\partial^2}{\partial s^2} y(s,\ t)+h(s)\frac{\partial}{\partial s} y(s,\ t),$$

$$(2)\qquad \lim_{t\to 0} y(s,\ t)=x_0(s)\quad \text{равномерно по } s.$$

Ясно, что тем же методом можно было бы установить существование решения задачи Коши для многих других уравнений, таких, например, как упомянутое во введении к этой главе (при условии, что ядро K определяет ограниченный линейный оператор), или для такого:

$$(1')\ \frac{\partial}{\partial t} y(s,\ t)=\frac{\partial^2}{\partial s^2} y(s,\ t)+h_1(s)\frac{\partial}{\partial s} y(s,\ t)+h_2(s)\,y(s,\ t),$$

$$(2')\qquad \lim_{t\to 0} y(s,\ t)=x_0(s)\quad \text{равномерно по } s$$

при любых $h_1,\ h_2 \in C[-\infty,\ \infty]$ и $x_0 \in \mathfrak{D}(A^2)$.

2. Функции инфинитезимального оператора

В параграфе 9 гл. VII показано, как м жно построить операторное исчисление для неограниченного замкнутого оператора A с непустым резольвентным множеством. В частности, для каждой функции f, аналитической на $\sigma(A)$ и в бесконечности, мы так определили ограниченный оператор $f(A)$, что отображение $f\longrightarrow f(A)$ было гомоморфизмом. В этом параграфе мы предполагаем, что A — инфинитезимальный оператор сильно непрерывной группы операторов $T(t)$, $-\infty<t<\infty$, и показываем в этом случае, как можно определить ограниченный оператор $f(A)$ для более широкого класса функций f. Этот класс функций будет содержать функции, аналитические на спектре $\sigma(A)$, но необязательно аналитические в бесконечности. Функции, рассматриваемые нами, представляют собой двусторонние преобразования Лапласа—Стильтьеса. Мы изучим также обращение этих операторов при помощи пределов многочленов от A.

Во всем этом параграфе мы считаем, что $T(t)$, $-\infty<t<\infty$, — сильно непрерывная группа ограниченных операторов в комплексном B-пространстве $\mathfrak{X}$, а A — ее инфинитезимальный оператор. Мы напомним (см. 1.17), что существуют положительные постоянные M и ω, такие, что $|T(t)|\leqslant Me^{\omega|t|}$ и спектр инфинитезимального оператора A лежит в вертикальной полосе $-\omega<\operatorname{Re}(\lambda)<\omega$. Кроме того,

$$R(\lambda;\ A)\,x=\begin{cases}\displaystyle\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)\,x\,dt, & \operatorname{Re}(\lambda)>\omega,\\[2ex] \displaystyle -\int_{-\infty}^0 e^{-\lambda t}T(t)\,x\,dt, & \operatorname{Re}(\lambda)<-\omega\end{cases}$$

Мы начнем наш анализ с рассмотрения двустороннего преобразования Лапласа — Стильтьеса.

1. Определение. Обозначим через $\mathcal{S}(A)$ семейство всех конечных комплекснозначных мер β, определенных на борелевских множествах в $(-\infty, \infty)$ и таких, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{(\omega+\varepsilon)|t|} v(\beta; dt) < \infty,$$

где ε — положительное число (которое может меняться вместе с мерой β). Функция

$$f(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda t} \beta(dt), \quad -(\omega+\varepsilon) < \operatorname{Re}(\lambda) < \omega+\varepsilon,$$

называется *двусторонним преобразованием Лапласа — Стильтьеса* меры β. Обозначим через $\mathcal{V}(A)$ семейство двусторонних преобразований Лапласа мер $\beta \in \mathcal{S}(A)$. Если мера β из $\mathcal{S}(A)$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега — Стильтьеса и если F — функция из $L_1(-\infty, \infty)$, определяемая теоремой Радона — Никодима (III.10.2), т. е. такая, что $\beta(E) = \int_E F(s)\,ds$, то функция

$$f(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda t} F(t)\,dt$$

называется *двусторонним преобразованием Лапласа функции* F.

Мы теперь докажем некоторые основные факты о преобразованиях Лапласа — Стильтьеса.

2. Лемма. *Если* $f \in \mathcal{V}(A)$ *и* $f(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda t}\beta(dt)$, *то функция* f *аналитична в полосе* $-(\omega+\varepsilon) < \operatorname{Re}(\lambda) < (\omega+\varepsilon)$. *Меры, определенные на всех борелевских множествах* E *равенствами*

$$\beta^{(n)}(E) = \int_E (-t)^n \beta(dt), \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

принадлежат $\mathcal{S}(A)$, *и*

$$\frac{d^n f}{d\lambda^n}(\lambda) = f^{(n)}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda t}\beta^{(n)}(dt) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (-t)^n e^{-\lambda t}\beta(dt), \quad -(\omega+\varepsilon) < \operatorname{Re}(\lambda) < \omega+\varepsilon.$$

Доказательство. Для всех n и $\varepsilon_1 < \varepsilon$ существует постоянная K такая, что

$$|t|^n e^{(\omega+\varepsilon_1)|t|} \leqslant K e^{(\omega+\varepsilon)|t|}, \quad -\infty < t < \infty.$$

Поэтому, так как $\beta \in \mathscr{S}(A)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{(\omega+\varepsilon_1)|t|} v(\beta^{(n)}, dt) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\omega+\varepsilon_1)|t|} |t|^n v(\beta, dt) \leqslant$$

$$\leqslant K \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\omega+\varepsilon)|t|} v(\beta, dt) < \infty$$

и $\beta^{(n)} \in \mathscr{S}(A)$.

Поскольку $|e^{-\mu t} - e^{-\lambda t}| |\mu - \lambda|^{-1} \leqslant |t| e^{(\omega+\varepsilon)|t|}$ при $|\operatorname{Re}(\lambda)| < \omega + \varepsilon$, а $|\operatorname{Re}(\lambda)| < \omega + \varepsilon$, то, согласно III.6.16 и III.10.6,

$$\lim_{\mu \to \lambda} \frac{f(\lambda) - f(\mu)}{\lambda - \mu} = \lim_{\mu \to \lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t} - e^{-\mu t}}{\lambda - \mu} \beta(dt) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (-t) e^{-\lambda t} \beta(dt) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda t} \beta^{(1)}(dt), \quad |\operatorname{Re}(\lambda)| < \omega + \varepsilon.$$

Таким образом, функция f аналитична при $|\operatorname{Re}(\lambda)| < \omega + \varepsilon$, и

$$\frac{df}{d\lambda}(\lambda) = f'(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda t} \beta^{(1)}(dt), \quad |\operatorname{Re}(\lambda)| < \omega + \varepsilon.$$

Ясно, что, повторяя по индукции только что приведенное рассуждение, мы покажем, что

$$f^{(n)}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda t} \beta^{(n)}(dt), \quad |\operatorname{Re}(\lambda)| < \omega + \varepsilon,$$

ч. т. д.

3. Определение. Пусть $\alpha, \beta \in \mathscr{S}(A)$; обозначим через $\alpha \times \beta$ произведение мер, определенное на $(-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty)$ (см. параграф III.11). В начале доказательства леммы 1.25 было показано, что если E — борелевское подмножество вещественной прямой, то множество $P(E) = \{(x, y) \mid x + y \in E\}$ есть борелевское подмножество плоскости. Для всех борелевских подмножеств E вещественной прямой положим $\gamma(E) = (\alpha \times \beta)\{P(E)\}$. Мы называем меру γ *сверткой мер* α и β и пишем $\gamma = \alpha * \beta$. Ясно, что мера γ определена на борелевских множествах и $\alpha * \beta = \beta * \alpha$. Пусть теперь $E_1, \ldots, E_n$ — непересекающиеся

борелевские множества, так что

$$\sum_{i=1}^{n} |\gamma(E_i)| = \sum_{i=1}^{n} |(\alpha \times \beta)(P(E_i))| \leqslant \sum_{i=1}^{n} v(\alpha \times \beta, E_i).$$

Из этого неравенства и леммы III.11.11 следует, что

$$v(\gamma, E) \leqslant v(\alpha) \times v(\beta)(P(E)) = v(\alpha) * v(\beta)(E)$$

для всех борелевских множеств E на вещественной прямой. Согласно лемме III.10.8 (b) и теореме III.11.13,

$$[*] \qquad \int_{-\infty}^{\infty} F(r)\gamma(dr) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(s+t)\,\alpha(ds)\,\beta(dt),$$

если функция F γ-интегрируема.

Наконец, мы заметим, что, по теореме Фубини,

$$\gamma(E) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \chi_E(s+t)\,\alpha(ds)\,\beta(dt) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(E-t)\,\beta(dt).$$

4. Лемма. *Пусть* α *и* β — *меры из* $\mathcal{S}(A)$ *с двусторонними преобразованиями Лапласа—Стильтьеса* f *и* g. *Тогда* $\gamma = \alpha * \beta \in \mathcal{S}(A)$ *и*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda t}\gamma(dt) = f(\lambda)\,g(\lambda), \quad -(\omega+\varepsilon) < \operatorname{Re}(\lambda) < \omega + \varepsilon.$$

Доказательство. Так как вариации мер γ, α и β связаны соотношением $v(\gamma, E) \leqslant v(\alpha) * v(\beta)(E)$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{|r|(\omega+\varepsilon)} v(\gamma, dr) \leqslant \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(\omega+\varepsilon)|s+t|} v(\alpha, ds)\, v(\beta, dt) \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{(\omega+\varepsilon)|s|} v(\alpha, ds)\right\} \left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{(\omega+\varepsilon)|t|} v(\beta, dt)\right\}$$

по теореме Фубини, и, таким образом, $\gamma \in \mathcal{S}(A)$. Если ε достаточно мало, то из формулы [*] видно, что при $|\operatorname{Re}(\lambda)| < \omega+\varepsilon$ мы имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda t}\gamma(dt) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda(t+s)}\alpha(dt)\,\beta(ds) =$$

$$= \left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda t}\alpha(dt)\right\} \left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda s}\beta(dt)\right\} = f(\lambda)\,g(\lambda), \qquad \text{ч. т. д.}$$

5. Определение. Пусть $f \in \mathscr{V}(A)$ и

$$f(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda t}\alpha(dt), \quad -(\omega+\varepsilon)<\operatorname{Re}(\lambda)<\omega+\varepsilon,$$

где $\alpha \in \mathscr{S}(A)$. Если A — инфинитезимальный оператор сильно непрерывной группы $T(t)$, то мы определяем оператор $f\{A\}$ равенством

$$f\{A\}x=\int_{-\infty}^{\infty} T(-t)x\,\alpha(dt), \quad x \in \mathfrak{X}.$$

Так как $|T(t)| \leqslant Me^{\omega|t|}$, приведенная выше формула показывает, что

$$|f\{A\}| \leqslant M\int_{-\infty}^{\infty} e^{\omega|t|}v(\alpha;\, dt).$$

Таким образом, оператор $f\{A\}$ ограничен. Мы заметим, что при всех t_0 функция $f_{t_0}(\lambda)=e^{\lambda t_0} \in \mathscr{V}(A)$ как преобразование меры, которая принимает значение единица в точке $t=-t_0$ и обращается в нуль на всех борелевских множествах, не содержащих $-t_0$. Более того, $f_{t_0}\{A\}=T(t_0)$. Если $|\operatorname{Re}(\lambda)|>\omega$, то функция f_α, определяемая равенством $f_\alpha(\lambda)=(\alpha-\lambda)^{-1}$, принадлежит $\mathscr{V}(A)$, так как

$$\frac{1}{\alpha-\lambda}=\begin{cases} \displaystyle\int_{0}^{\infty} e^{-\lambda t}e^{\alpha t}\,dt, & \operatorname{Re}(\alpha)<\operatorname{Re}(\lambda),\\[2ex] \displaystyle -\int_{-\infty}^{0} e^{-\lambda t}e^{\alpha t}\,dt, & \operatorname{Re}(\alpha)>\operatorname{Re}(\lambda).\end{cases}$$

Кроме того,

$$f_\alpha\{A\}=-\int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t}T(-t)\,dt=\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t}T(t)\,dt=$$
$$=R(\alpha;\, A), \qquad \operatorname{Re}(\alpha)>\omega,$$

и аналогично

$$f_\alpha\{A\}=R(\alpha;\, A), \qquad \operatorname{Re}(\alpha)<-\omega.$$

6. Теорема. *Если f и g принадлежат $\mathscr{V}(A)$, то αf, $f+g$ и fg также принадлежит $\mathscr{V}(A)$, и*

(a) $(\alpha f)\{A\}=\alpha f\{A\}$;

(b) $(f+g)\{A\}=f\{A)+g\{A\}$;

(c) $(fg)(A\}=f\{A\}\,g\{A\}$.

Доказательство. Утверждения (a) и (b) очевидны ввиду линейности формулы, определяющей оператор $f\{A\}$. Для доказательства (c) заметим, что для любого линейного функционала $x^* \in \mathfrak{X}^*$

$$x^* f\{A\} g\{A\} x = x^* \int_{-\infty}^{\infty} T(-s) g\{A\} x\alpha(ds) =$$

$$= x^* \int_{-\infty}^{\infty} T(-s) \int_{-\infty}^{\infty} T(-t) x\beta(dt)\,\alpha(ds) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^* T(-s-t) x\beta(dt)\,\alpha(ds) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^* T(-r) x\gamma(dr),$$

где $\gamma = \alpha * \beta$. По лемме 4, $(fg)(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda t}\gamma(dt)$. Таким образом, $f\{A\} g\{A\} = (fg)\{A\}$, ч. т. д.

Для $f \in \mathscr{V}(A)$ и $x \in \mathfrak{D}(A^2)$ мы получим в двух следующих леммах формулу для $f\{A\}x$. Эта формула позволит нам связать операторное исчисление для оператора A с построенным в параграфе VII.9 и будет использована при дальнейшем изучении обращения свертки преобразований.

Условимся для любого вещественного числа c обозначать через Γ_c бесконечный контур, состоящий из двух вертикальных прямых: прямой $\lambda = c + i\tau$, $-\infty < \tau < \infty$, направленной вверх, и прямой $\lambda = -c + i\tau$, $-\infty < \tau < \infty$, направленной вниз.

7. Лемма. *Пусть α — комплексное число и c — вещественное число, выбранные так, что $\omega < c < |\mathrm{Re}(\alpha)|$. Тогда для $x \in \mathfrak{D}(A^2)$,*

$$[*] \qquad T(t)x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_c} \frac{e^{\lambda t} R(\lambda; A)(\alpha I - A)^2 x\, d\lambda}{(\alpha - \lambda)^2}.$$

Доказательство. Сначала мы заметим, что так как $R(\lambda; A) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} T(t)\,dt$, то $|R(\lambda; A)| \leqslant K \int_0^{\infty} e^{(\omega - \mathrm{Re}(\lambda))t} dt$ при $\mathrm{Re}(\lambda) > \omega$; поэтому функция $|R(\lambda; A)|$ равномерно ограничена в каждой полуплоскости $\mathrm{Re}(\lambda) > \omega + \varepsilon$. Аналогично функция $|R(\lambda; A)|$ равномерно ограничена в каждой полуплоскости $\mathrm{Re}(\lambda) < -\omega - \varepsilon$. Таким образом, подинтегральная функция в [*] порядка $|\lambda|^{-2}$ при $|\lambda| \to \infty$, так что интеграл в [*] вполне определен. Пусть $x \in \mathfrak{D}(A^2)$, и пусть

$B(t)x$ обозначает интеграл в равенстве [*]. Предположим сначала, что $t \geqslant 0$. Тогда если $\operatorname{Re}(\mu) > c$, то

$$\int_0^\infty e^{-\mu t} B(t)\, x\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_c} \frac{R(\lambda;\ A)(\alpha I - A)^2}{(\alpha - \lambda)^2}\, x \int_0^\infty e^{(\lambda-\mu)t}\, dt\, d\lambda =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_c} \frac{R(\lambda;\ A)(\alpha I - A)^2\, x\, d\lambda}{(\mu-\lambda)(\alpha-\lambda)^2}.$$

Подинтегральная функция в последнем интеграле есть $O(|\lambda|^{-3})$ при $|\lambda| \to \infty$ в полуплоскости $\operatorname{Re}(\lambda) \geqslant c$, а также в полуплоскости $\operatorname{Re}(\lambda) \leqslant \leqslant -c$. Таким образом, используя теорему Коши, мы можем заменить контур Γ_c двумя маленькими отрицательно ориентированными окружностями около $\lambda = \alpha$ и $\lambda = \mu$ соответственно и, вычисляя вычеты, получить

$$\int_0^\infty e^{-\mu t} B(t)\, x\, dt = \frac{R(\mu;\ A)(\alpha I - A)^2\, x}{(\alpha-\mu)^2} - \frac{R(\alpha;\ A)(\alpha I - A)^2\, x}{(\alpha-\mu)^2} -$$
$$- \frac{R(\alpha;\ A)^2(\alpha I - A)^2\, x}{\alpha-\mu} = \frac{-x}{\alpha-\mu} - \frac{(\alpha I - A)\, x}{(\alpha-\mu)^2} + \frac{R(\mu;\ A)(\alpha I - A)^2\, x}{(\alpha-\mu)^2}.$$

Тогда последовательная подстановка в тождество

$$R(\mu;\ A)\, x = \frac{-x}{\alpha-\mu} + \frac{(\alpha I - A)\, R(\mu;\ A)\, x}{\alpha-\mu}$$

показывает, что

$$\int_0^\infty e^{-\mu t} B(t)\, x\, dt = R(\mu;\ A)\, x = \int_0^\infty e^{-\mu t} T(t)\, x\, dt.$$

Применяя с обеих сторон линейные функционалы, получим, по лемме 1.15, что $B(t)\, x = T(t)\, x$, $x \in \mathfrak{D}(A^2)$, $t \geqslant 0$.

Применяя такие же соображения к полугруппе $T(-t)$, которая имеет инфинитезимальный оператор $-A$, мы видим, что

$$T(-t)\, x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_c} \frac{e^{\lambda t} R(\lambda;\ -A)(\alpha I - A)^2\, x\, d\lambda}{(\alpha-\lambda)^2}, \qquad t \geqslant 0.$$

Заменяя $-\lambda$ на λ и вспоминая, что $R(-\lambda;\ -A) = -R(\lambda;\ A)$, убеждаемся в том, что

$$T(-t)\, x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_c} \frac{e^{-\lambda t} R(\lambda;\ A)(\alpha I + A)^2\, x\, d\lambda}{(\alpha+\lambda)^2}, \qquad t \geqslant 0.$$

Подставляя $-\alpha$ вместо α и $-t$ вместо t, получаем

$$T(t)\, x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_c} \frac{e^{\lambda t} R(\lambda;\ A)(\alpha I - A)^2\, x\, d\lambda}{(\alpha-\lambda)^2}, \qquad t \leqslant 0.$$

Таким образом, $T(t)\, x = B(t)\, x$ при всех вещественных t, ч. т. д.

8. Лемма. *Если* $f\in\mathcal{V}(A)$ *и* $|\operatorname{Re}(\alpha)|>c>\omega$, *то*

$$f\{A\}x=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_c}\frac{f(\lambda)}{(\alpha-\lambda)^2}R(\lambda;A)(\alpha I-A)^2x\,d\lambda,\qquad x\in\mathfrak{D}(A^2),$$

где число c таково, что $\omega<c<|\operatorname{Re}\alpha|$ *и функция f аналитична на контуре* Γ_c.

Доказательство. Так как $f(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\lambda t}\beta(dt)$ для некоторой меры $\beta\in\mathcal{S}(A)$, то, по лемме 7,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_c}\frac{f(\lambda)R(\lambda;A)(\alpha I-A)^2x\,d\lambda}{(\alpha-\lambda)^2}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\int\limits_{\Gamma_c}\frac{e^{-\lambda t}R(\lambda;A)(\alpha I-A)^2x\,d\lambda}{(\alpha-\lambda)^2}\right\}\beta(dt)=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}T(-t)x\,\beta(dt)=f\{A\}x.$$

Теорема Фубини применима здесь, так как $\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{(\omega+\varepsilon)|t|}v(\beta,dt)<\infty$ при $\varepsilon>0$, и, как было показано в первом абзаце доказательства леммы 7, функция $|R(\lambda;A)|$ равномерно ограничена на контуре Γ_c. Таким образом, существует постоянная $K<\infty$, такая, что

$$\left|\frac{e^{-\lambda t}R(\lambda;A)(\alpha I-A)^2x}{(\alpha-\lambda)^2}\right|\leqslant Ke^{c|t|}(|\lambda|+1)^{-2},\quad \text{ч. т. д.}$$

9. Лемма. *Если C — замкнутый оператор с плотной областью определения и непустым резольвентным множеством, то* $\mathfrak{D}(C^n)$ *плотно в* $\mathfrak{X}$ *при любом натуральном n.*

Доказательство. Если $\alpha\in\rho(C)$, то $\mathfrak{D}(C^n)=\mathfrak{D}((\alpha I-C)^n)=$ $=(R(\alpha;C))^n\mathfrak{X}$. Таким образом, если $x^*(\mathfrak{D}(C^n))=0$, то $[(R(\alpha;C))^n]^*x^*=$ $=[R(\alpha;C)^*]^nx^*=0$. Равенство $R(\alpha;C)^*y^*=0$ влечет $y^*(\mathfrak{D}(C))=0$, а так как $\mathfrak{D}(C)$ всюду плотно, то отсюда следует, что $y^*=0$. Поэтому равенство $(R(\alpha;C)^*)^nx^*=0$ влечет $x^*=0$. Доказываемое утверждение вытекает теперь из теоремы Хана — Банаха, ч. т. д.

10. Теорема. *Если* $f\in\mathcal{V}(A)$ *и аналитична в бесконечности, то* $f\{A\}$ *равен оператору* $f(A)$ *определения* VII.9.3.

Доказательство. Пусть функция f принадлежит $\mathcal{V}(A)$, так что f аналитична в полосе $|\operatorname{Re}(\lambda)|\leqslant\omega+\varepsilon$, и пусть f аналитична в бесконечности. Тогда особенности f образуют два ограниченных множества H_1 и H_2 в правой и левой полуплоскостях соответственно. Выберем α так, что $\operatorname{Re}(\alpha) > \omega + \varepsilon$, и пусть C_1 и C_2 — две простые замкнутые отрицательно ориентированные жордановые кривые, такие, что C_1 содержит $H_1 \cup \{\alpha\}$, C_2 содержит H_2, а C_1 и C_2 не пересекаются с прямыми $\operatorname{Re}(\lambda) = \pm(\omega + c)$, $0 < c < \varepsilon$.

Мы напомним, что оператор $g(A)$ задается формулой (см. теорему VII.9.4)

$$g(A) = g(\infty) I + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_1 + C_2} g(\lambda) R(\lambda;\ A)\, d\lambda.$$

Пусть $g(\lambda) = f(\lambda)(\alpha - \lambda)^{-2}$. Тогда если $x \in \mathfrak{D}(A^2)$, то, используя операторное исчисление параграфа VII.9 (см. теорему VII.9.5), получаем равенство

$$f(A)x = f(A) R^2(\alpha;\ A)(\alpha I - A)^2 x =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_1 + C_2} \frac{f(\lambda) R(\lambda;\ A)(\alpha I - A)^2 x}{(\alpha - \lambda)^2}\, d\lambda.$$

Так как функция f ограничена в окрестности бесконечности, подинтегральная функция есть $O(|\lambda|^{-2})$ при $|\lambda| \to \infty$, $|\operatorname{Re}(\lambda)| \geqslant c$. Таким образом, мы можем заменить контур $C_1 + C_2$ в последнем интеграле контуром Γ_c. Из леммы 8 следует, что $f(A)x = f\{A\}x$ при $x \in \mathfrak{D}(A^2)$. По лемме 9, $\mathfrak{D}(A^2)$ плотно в $\mathfrak{X}$, а так как операторы $f(A)$ и $f\{A\}$ ограничены, $f(A) = f\{A\}$, ч. т. д.

Мы рассмотрим теперь задачу обращения оператора вида $f\{A\}$. Задача эта усложняется тем фактом, что обратное преобразование, если оно существует, обычно неограничено и не может быть прямо построено при помощи операторного исчисления, имеющегося в нашем распоряжении. Однако, если можно найти такую последовательность многочленов от λ, что $\lim\limits_{n\to\infty} p_n(\lambda) f(\lambda) = 1$ на спектре $\sigma(A)$, то можно было бы ожидать, что $\lim\limits_{n\to\infty} p_n(A) f\{A\} x = x$ для всех $x \in \mathfrak{X}$. Приведенная ниже теорема 13 дает достаточные условия для справедливости формулы обращения такого типа.

11. Лемма. *Пусть p — многочлен от λ степени m, и пусть функции f и pf обе принадлежат $\mathcal{V}(A)$. Тогда $f\{A\}\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{D}(A^m)$ и $p(A) f\{A\} x = (pf)\{A\} x$ для x из $\mathfrak{X}$.*

Доказательство. Предположим сначала, что $x \in \mathfrak{D}(A^{m+2})$. По теореме 6, теореме 10 и лемме 8,

$$R^m(\alpha;\ A)(pf)\{A\} x = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_c} \frac{p(\lambda) f(\lambda) R(\lambda;\ A)(\alpha I - A)^2 x}{(\alpha - \lambda)^{m+2}}\, d\lambda.$$

Полагая $p(\lambda)=\sum_{i=0}^{m} a_i(\alpha-\lambda)^i$ и снова используя теорему 6, теорему 10 и лемму 8, мы получаем

$$R^m(\alpha; A)(pf)\{A\}x=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_c}\left\{\sum_{i=0}^{m}\frac{a_i}{(\alpha-\lambda)^{m+2-i}}\right\}R(\lambda; A)(\alpha I-A)^2 x\,d\lambda=$$

$$=\left\{\sum_{i=0}^{m} a_i R^{m-i}(\alpha; A)\right\}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_c}\frac{f(\lambda)R(\lambda; A)(\alpha I-A)^2 x}{(\alpha-\lambda)^2}d\lambda=$$

$$=\left\{R^m(\alpha; A)\sum_{i=0}^{m} a_i(\alpha I-A)^i\right\}p(A)f\{A\}x=$$

$$=R^m(\alpha; A)\,p(A)f\{A\}x.$$

Следовательно, $(pf)\{A\}x=p(A)f\{A\}x$ для $x\in\mathfrak{D}(A^{m+2})$. Пусть теперь $x\in\mathfrak{X}$, и пусть $x_n\in\mathfrak{D}(A^{m+2})$, $x_n\to x$ (см. лемму 9). Тогда $f\{A\}x_n\to f\{A\}x$ и $p(A)f\{A\}x_n=(pf)\{A\}x_n\to(pf)\{A\}x$. Так как оператор $p(A)$ замкнут на $\mathfrak{D}(A^m)$ (теорема VII.9.7), отсюда следует, что $f\{A\}x\in\mathfrak{D}(A^m)$ и $p(A)f\{A\}x=(pf)\{A\}x$. Так как $\mathfrak{D}(A^m)$ всюду плотно (лемма 1.8 и лемма 9), это равенство выполнено для всех x из $\mathfrak{X}$, ч. т. д.

12. Определение. Последовательность многочленов $p_n(\lambda)$ назовем *обращающей последовательностью* для функции $f\in\mathcal{V}(A)$, если
(a) функции $\{p_n f\}$ принадлежат $\mathcal{V}(A)$;
(b) $|p_n(\lambda)f(\lambda)|\leqslant M$ и $\lim_{n\to\infty}p_n(\lambda)f(\lambda)=1$ в полосе $|\operatorname{Re}(\lambda)|\leqslant\omega+\varepsilon$;
(c) $|(p_n f)\{A\}|\leqslant M$, $n=1, 2, \ldots$.

13. Теорема. *Если $\{p_n\}$ — обращающая последовательность для функции f из $\mathcal{V}(A)$, то*

$$\lim_{n\to\infty}p_n(A)f\{A\}x=x,\quad x\in\mathfrak{X}.$$

Доказательство. Положим сначала, что $x\in\mathfrak{D}(A^2)$. Согласно леммам 8 и 11,

$$[*]\qquad p_n(A)f\{A\}x=(p_n f)\{A\}x=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_c}\frac{p_n(\lambda)f(\lambda)R(\lambda; A)(\alpha I-A)^2 x}{(\alpha-\lambda)^2}d\lambda$$

при $\omega<c<|\operatorname{Re}(\alpha)|$ и достаточно малом (зависящим от n) $c-\omega$. Мы предположили, что $|p_n(\lambda)f(\lambda)|\leqslant M$ в полосе $|\operatorname{Re}(\lambda)|<\omega+\varepsilon$, где ε не зависит от n. Из первого абзаца доказательства леммы 7 видно, что функция $|R(\lambda; A)|$ равномерно ограничена в любой полуплоскости $\operatorname{Re}(\lambda)>\omega+\varepsilon$ и любой полуплоскости $\operatorname{Re}(\lambda)<-(\omega+\varepsilon)$.

Поэтому интегральная теорема Коши показывает, что в формуле [*] за c мы можем взять любую вещественную постоянную между ω и $|\operatorname{Re}(\alpha)|$ при условии, что $c < \omega + \varepsilon$. Таким образом, нет необходимости считать c зависящим от n.

Применяя следствие III.6.16, видим, что

$$\lim_{n\to\infty} p_n(A) f\{A\} x = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_c} \frac{R(\lambda; A)(\alpha I - A)^2 x}{(\alpha-\lambda)^2} d\lambda = x,$$

так как (лемма 8) интеграл справа равен $g\{A\}x$, где функция g тождественно равна единице. Так как преобразования $(p_n f)\{A\}$ предполагаются равномерно ограниченными и $\mathfrak{D}(A^2)$ плотно в $\mathfrak{X}$, то доказываемая теорема следует из теоремы II.1.18, ч. т. д.

Очередное следствие показывает, что когда $\mathfrak{X}$ рефлексивно, обращающая последовательность характеризует область изменения оператора $f\{A\}$ достаточно просто.

14. Следствие. *Пусть $\mathfrak{X}$ рефлексивно и $\{p_n\}$ — обращающая последовательность для функции $f \in \mathscr{V}(A)$. Вектор x лежит в области значений оператора $f\{A\}$ тогда и только тогда, когда $x \in \mathfrak{D}(p_n(A))$ при всех n и последовательность $\{p_n(A)x\}$ ограничена.*

Доказательство. Мы знаем из предыдущей теоремы, что если $x = f\{A\}y$, то $\lim\limits_{n\to\infty} p_n(A)x = y$, так что последовательность $\{p_n(A)x\}$ ограничена. Для доказательства обратного утверждения положим, что $\{p_n(A)x\}$ ограничена. Так как $\mathfrak{X}$ рефлексивно, мы можем выбрать подпоследовательность целых чисел $\{n_i\}$ и вектор y, такие, что $x^* p_{n_i}(A) x \to x^* y$ при всех $x^* \in \mathfrak{X}^*$ (см. II.3.28). Мы покажем, что $x = f\{A\}y$.

Имеем

$$x^* f\{A\} p_{n_i}(A) x = f\{A\}^* x^* p_{n_i}(A) x \to x^* f\{A\} y.$$

Однако если $x \in \mathfrak{D}(p_{n_i}(A))$, то $T(t)x \in \mathfrak{D}(p_{n_i}(A))$ при $-\infty < t < +\infty$, согласно лемме 1.7, и

$$f\{A\} p_{n_i}(A) x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} T(-t) p_{n_i}(A) x \alpha(dt) =$$

$$= p_{n_i}(A) \int\limits_{-\infty}^{\infty} T(-t) x \alpha(dt) = p_{n_i}(A) f\{A\} x$$

по теореме III.6.20. Таким образом, $p_{n_i}(A) f\{A\} x \to x$ по теореме 13, так что $x^* f\{A\} y = x^* x$ для $x^* \in \mathfrak{X}^*$ и $x = f\{y, чA\}$. т. д.

Примеры. Пусть $\mathfrak{X}$ — одно из пространств $C[-\infty, \infty]$ или $L_p(-\infty, \infty)$, $1 \leqslant p < \infty$, рассмотренных в примерах § 1, и пусть $T(t)$ — группа сдвигов $T(t)(x, s) = x(t+s)$ с инфинитезимальным оператором $A = d/ds$. Мы напомним, что спектр $\sigma(A)$ есть мнимая ось. Если $f(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda t} \beta(dt) \in \mathcal{V}(A)$, то преобразование $f\{A\}$ принимает обычный вид «свертки»

$$[f\{A\}x](t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t-s)\,\beta(ds).$$

В частности, если β абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, так что $\beta(E) = \int\limits_{E} F(t)\,dt$ при некоторой функции F из $L_1(-\infty, \infty)$, то функция f есть двустороннее преобразование Лапласа от F и

$$[f\{A\}x](t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(t-s)\,x(s)\,ds.$$

Преобразование Стильтьеса

$$y(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\operatorname{ch}\frac{t-s}{2}\right]^{-1} x(s)\,ds$$

дает пример к теореме 13 об обращении. В этом случае

$$f(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda t}\left[\operatorname{ch}\frac{t}{2}\right]^{-1} dt = [\cos \pi\lambda]^{-1}.$$

Так как

$$\cos \pi\lambda = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda^2}{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2}\right),$$

мы выбираем

$$p_n(\lambda) = \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{\lambda^2}{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2}\right).$$

Функции $p_n(\lambda) f(\lambda)$ представимы в виде

$$p_n(\lambda) f(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda t} G_n(t)\,dt,$$

где, как можно показать, ядра G_n положительны. Таким образом

$$|(p_n f)\{A\}| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} G_n(t)\,dt = (p_n f)(0) = 1, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{\frac{d^2}{dt^2}}{\left(k - \frac{1}{2}\right)^2}\right) \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\operatorname{ch} \frac{t-s}{2}\right]^{-1} x(s)\,ds = x(t)$$

по норме любого из пространств $L_p(-\infty, \infty)$, $1 \leqslant p < \infty$, или $C[-\infty, \infty]$. Функция $y \in L_p(-\infty, \infty)$, $1 \leqslant p < \infty$, имеет представление

$$y(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\operatorname{ch} \frac{t-s}{2}\right]^{-1} x(s)\,ds, \quad x \in L_p(-\infty, \infty),$$

тогда и только тогда, когда последовательность $\{p_n(d/dt)\,y(t)\}$ по норме ограничена. Ссылки на аналитические детали и дальнейшие приложения могут быть найдены в замечаниях в конце главы.

3. Упражнения

1. Пусть $T(t)$ — полугруппа ограниченных операторов в $\mathfrak{X}$, такая, что функция $x^*T(t)(x)$ непрерывна на $[0, \infty)$ при всех $x \in \mathfrak{X}$ и $x^* \in \mathfrak{X}^*$. Доказать, что $T(t)$ сильно непрерывна на $[0, \infty)$.

В упражнениях 2—9 $T(t)$ — сильно непрерывная полугруппа ограниченных операторов, определенная на интервале $[0, \infty)$. Оператор A — инфинитезимальный оператор полугруппы $T(t)$.

2. Предположим, что $\lim\limits_{t\to 0} t^{-1}[T(t)x - x] = y$ слабо. Доказать, что $\lim\limits_{t\to 0} t^{-1}[T(t)x - x] = y$ сильно и, таким образом, $x \in \mathfrak{D}(A)$.

3. Доказать, что $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathfrak{D}(A^n)$ плотно в $\mathfrak{X}$. (Указание: пусть $\mathscr{K}$ обозначает класс функций K из $C^\infty(0, \infty)$, каждая из которых обращается тождественно в нуль вне компактного подмножества $(0, \infty)$.

Доказать, что если $\mathfrak{Y} = \left\{y \mid y = \int_0^\infty K(t)\,T(t)\,x\,dt, K \in \mathscr{K}, x \in \mathfrak{X}\right\}$, то $\mathfrak{Y}$ плотно в $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y} \subseteq \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathfrak{D}(A^n)$.

4.(a) Доказать, что $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda; A)\,x = x$ при $|\lambda| \to \infty$, $|\arg\lambda| < \pi/2$;

(b) доказать, что если $x \in \mathfrak{D}(A^n)$, то

$$\lim_{\lambda\to\infty} \left\{\lambda^{n+1} R(\lambda;\, A)\, x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{A^k x}{\lambda^{k+1}}\right\} = A^n x$$

при $|\lambda| \to \infty$, $|\arg \lambda| < \pi/2$.

5. Доказать, что если $t > 0$ и $c > \omega$, где $\omega = \lim\limits_{t\to\infty} \log |T(t)|/t$, то

$$T(t)\, x = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^{r} \left[1 - \frac{|\tau|}{r}\right] e^{(c+i\tau)t} R(c+i\tau;\, A)\, x\, d\tau, \quad x \in \mathfrak{X},$$

равномерно в каждом интервале $[\varepsilon, 1/\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$. Показать, что при $t = 0$ предел равен $x/2$.

6.(a) Показать, что

$$[\lambda R(\lambda;\, A)]^k x = x + \frac{kAx}{\lambda} + \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\lambda^k}{\mu^2 (\lambda-\mu)^k} R(\mu;\, A)\, A^2 x\, d\mu$$

для $x \in \mathfrak{D}(A^2)$ и $\lambda > c > \omega$, где ω определяется как и в предыдущем упражнении;

(b) доказать, что если $t > 0$, то

$$T(t)\, x = \lim_{k\to\infty} \left[\frac{k}{t} R\left(\frac{k}{t};\, A\right)\right]^k x, \quad x \in \mathfrak{X}.$$

7. Доказать, что если $t > 0$ и $x \in \mathfrak{D}(A^n)$, то

$$T(t)\, x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} A^k x + \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} T(s)\, A^n x\, ds.$$

8. Доказать, что если $x \in \mathfrak{D}(A^n)$, то

$$\lim_{t\to 0} t^{-n} \left[T(t)\, x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} A^k x\right] = \frac{A^n x}{n!}.$$

9. Определим разности

$$\Delta_h^n T(t) = h^{-n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k T(t+kh), \quad t \geqslant 0;$$

показать, что если $t \geqslant s$, то

$$T(t)\, x = \lim_{h\to 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-s)^n}{n!} \Delta_h^n T(s)\, x, \quad x \in \mathfrak{X},$$

и предел существует равномерно по t в любом конечном интервале.

10. Пусть E_+^n — множество точек $s=[s_1, \ldots, s_n]$ евклидова n-мерного пространства с неотрицательными координатами s_i. Пусть $T(s)$, $s \in E_+^n$ — семейство ограниченных операторов, удовлетворяющее условиям

$$T(s+t)=T(s)\,T(t),\quad T(0)=I,\quad \lim_{s\to t} T(s)\,x=T(t)\,x,$$

$$x \in \mathfrak{X},\quad s,\ t \in E_+^n.$$

Пусть $h_i=(0, \ldots, 0, h, 0, \ldots, 0)$ — вектор из E_+^n с $h>0$ на i-м месте и нулями на остальных. Пусть $A(h, i)=h^{-1}[T(h_i)-I]$ и $\mathfrak{D}(A_i)$ — область определения оператора, задаваемого формулой

$$A_i x=\lim_{h\to 0} A(h, i)\,x$$

там, где этот предел существует. Доказать, что $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathfrak{D}(A_i)$ плотно в $\mathfrak{X}$ и

$$T(s)\,x=\lim_{h\to 0} \prod_{i=1}^{n} e^{s_i A(h, i)}\,x,\quad x \in \mathfrak{X}.$$

11. (Вейерштрасс.) Пусть x — непрерывная комплекснозначная функция, определенная на компактном подмножестве K эвклидова n-мерного пространства. Тогда x является равномерным пределом многочленов от n переменных. (Указание: пусть $\mathfrak{X}$ — B-пространство всех функций, равномерно непрерывных на E^n с равномерной нормой; предположим, что $K \subseteq E_+^n$. Определить полугруппу $T(t)\,(x, s)=x(t+s)$ для $t \in E_+^n$ и воспользоваться результатом упражнения 9.)

12. Пусть $\mathfrak{X}=L_p(-\pi, \pi)$, $1 \leqslant p < \infty$. Показать, что семейство операторов, определяемое равенством

$$T(t)\,(x, s)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-e^{-t})\,x(s+\xi)\,d\xi}{1-2e^{-t}\cos\xi+e^{-2t}},\qquad x \in \mathfrak{X},$$

является сильно непрерывной полугруппой на $[0, \infty)$. В эквивалентной форме

$$T(t)\,(x, s)=\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-|n|t}\,x_n e^{ins},$$

если

$$x(s) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} x_n e^{ins},\qquad x_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(s)\,e^{-ins}\,ds.$$

13. Пусть $\mathfrak{X}=L_p(-\pi, \pi)$, $1 \leqslant p < \infty$. Показать, что семейство операторов, определяемое равенством

$$T(t)(x, s)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\theta_3(s-\xi, t)\,x(\xi)\,d\xi, \quad x \in \mathfrak{X},$$

где $\theta_3(s, t)=1+2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t}\cos ns$, является сильно непрерывной полугруппой на $[0, \infty)$. В эквивалентной форме $T(t)(x, s)= =\sum_{-\infty}^{\infty} x_n e^{-n^2t+ins}$, если $x(s)\sim\sum_{-\infty}^{\infty} x_n e^{ins}$. Показать, что инфинитезимальный оператор полугруппы $T(t)$ есть оператор A, область определения $\mathfrak{D}(A)$ которого состоит из всех периодических функций f периода 2π с абсолютно непрерывными первыми производными и вторыми производными f'', лежащими в L_p, и который определяется формулой $Af=f''$ для $f \in \mathfrak{D}(A)$.

14. Пусть $\mathfrak{X}=L_p(-\infty, \infty)$, $1 \leqslant p < \infty$. Показать, что семейство операторов, определяемое равенством

$$T(t)(x, s)=\frac{t}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x(s-\xi)\,d\xi}{\xi^2+t^2}, \quad x \in \mathfrak{X},$$

является сильно непрерывной полугруппой на $[0, \infty)$.

15. Пусть $\mathfrak{X}=L_p(-\infty, \infty)$, $1 \leqslant p < \infty$. Показать, что семейство операторов, определяемое равенством

$$T(t)(x, s)=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} x(s-\xi)\,e^{-\frac{\xi^2}{t}}\,d\xi, \quad x \in \mathfrak{X},$$

является сильно непрерывной полугруппой на $[0, \infty)$. Показать, что инфинитезимальный оператор полугруппы $T(t)$ есть оператор A, область определения $\mathfrak{D}(A)$ которого состоит из всех функций $f \in L_p$ с абсолютно непрерывными первыми производными и со вторыми производными f'', лежащими в L_p, и который определяется формулой $Af=f''$, $f \in \mathfrak{D}(A)$.

16. Пусть $\mathfrak{X}=L_p(0, \infty)$, $1 \leqslant p < \infty$. Пусть $T(t)(x, s)=x(t+s)$, $x \in \mathfrak{X}$. Показать, что $T(t)$ — сильно непрерывная полугруппа, инфинитезимальным оператором который является оператор $A=d/ds$. Показать, что $\sigma(A)=\{\lambda \mid \operatorname{Re}(\lambda)\leqslant 0\}$ и $\sigma(T(t))=\{\lambda \mid |\lambda| \leqslant 1\}$, если $t>0$.

17. Пусть A и B — замкнутые линейные операторы в комплексном B-пространстве с непустыми резольвентными множествами.

(а) Если $\lambda_0 \in \varrho(A)$ и оператор $R(\lambda_0; A)$ вполне непрерывен (слабо вполне непрерывен), то и $R(\lambda; A)$ вполне непрерывен (слабо вполне непрерывен) при всех $\lambda \in \varrho(A)$.

(b) Если $\mathfrak{D}(B) \subseteq \mathfrak{D}(A)$ и если при некотором $\lambda_0 \in \varrho(A)$ оператор $R(\lambda_0; A)$ вполне непрерывен (слабо вполне непрерывен), то и $R(\mu; B)$ вполне непрерывен (слабо вполне непрерывен) при всех $\mu \in \varrho(B)$.

18. Пусть A — инфинитезимальный оператор сильно непрерывной полугруппы на $[0, \infty)$. Если $B \in B(\mathfrak{X})$ и оператор $R(\lambda; A)$ вполне непрерывен (слабо вполне непрерывен) при некотором $\lambda \in \varrho(A)$, то $R(\mu; A+B)$ вполне непрерывен (слабо вполне непрерывен) при всех $\mu \in \varrho(A+B)$.

19. Показать, что уравнение в частных производных

$$\frac{\partial x(s,t)}{\partial t} = \frac{\partial x(s,t)}{\partial s} + \int_0^\infty e^{-us} x(u,t)\,du,$$

$$\lim_{t\to 0} x(s,t) = x_0(s),$$

имеет решение для любой функции $x_0 \in C[0, \infty]$, у которой $x_0' \in C[0, \infty]$.

20. Показать, что уравнение в частных производных

$$\frac{\partial x(s,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 x(s,t)}{\partial x^2} + e^{-s^2}\frac{\partial}{\partial s} x(s,t) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(u,t)\,du}{1+(s-u)^2},$$

$$\lim_{t\to 0} x(s,t) = x_0(t),$$

имеет решение для любой функции $x_0 \in C[-\infty, \infty]$, у которой $x_0', x_0'' \in C[-\infty, \infty]$.

21. Пусть $\mathfrak{X} = C[-\infty, \infty]$ и $A = d/ds$ с областью $\mathfrak{D}(A) = \{x \mid x'(t) \in C[-\infty, \infty]\}$. Показать, что замкнутый оператор A^3 не является инфинитезимальным оператором ни для какой сильно непрерывной полугруппы ограниченных операторов.

4. Эргодическая теория

Основной математический вопрос в статистической механике Гиббса — Больцмана относится к существованию определенного типа средних по времени. Задача может быть сформулирована в абстрактных терминах следующим образом: мгновенное положение механической системы описывается путем выделения точки в «фазовом пространстве» S. Предполагается, что механическая система управляется классическими уравнениями Гамильтона и подчиняется, таким образом, принципу научного детерминизма, т. е. известно, что начальное положение x по прошествии t секунд переходит в однозначно определенное новое положение y. Так как y однозначно определяется по x и t, то равенством $y = \varphi_t(x)$ на S

определяется функция φ_t со значениями в S. Предполагается, что для всех точек x фазового пространства и всех значений времени s и t поток φ_t обладает свойством

$$\text{(I)} \qquad \varphi_t(\varphi_s(x)) = \varphi_{t+s}(x).$$

Тождество (I) может быть доказано для некоторых механических систем; в частности, его легко проверить, если функция Гамильтона не зависит от времени. Далее, любая числовая величина, определяемая мгновенным положением механической системы (например, сила, с какой действует данная система, которая предполагается большим собранием газовых молекул, содержащихся в сосуде), задается вещественной функцией f, определенной на S. Если начальное положение системы определяется точкой x в S, то значение величины f в момент времени t будет равно $f(\varphi_t(x))$. Величина $f(\varphi_t(x))$ обычно очень быстро колеблется с изменением t, как, например, в том случае, когда мы рассматриваем силу, с какой действуют молекулы газа на стенку содержащего их сосуда, так как эта сила зависит от числа молекул, отражающихся от стенки в произвольный момент времени. Важна же и измерима в лаборатории не величина $f(\varphi_t(x))$, а ее среднее значение

$$\text{(II)} \qquad \frac{1}{T}\int_0^T f(\varphi_t(x))\,dt,$$

вычисленное за некоторый интервал времени $0 \leqslant t \leqslant T$. Обычно величина T, которая определяется инерциальным характером «макроскопических» инструментов, таких, как барометры, термометры и т. д., весьма велика по сравнению с естественной скоростью изменения состояния рассматриваемой механической системы. Можно ожидать, например, что молекулы газа, находящегося в сосуде, за каждую секунду проходят тысячи футов и отражаются от стенки миллионы раз. Таким образом, с физической точки зрения время опыта T достаточно велико, чтобы среднее значение на отрезке $[0, T]$ давало хорошее приближение для предела

$$\text{(III)} \qquad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(\varphi_t(x))\,dt,$$

который в физических теориях предполагается существующим.

Таким образом, перед математиком ставится задача определить, существует или нет предел (III). Следующие четыре параграфа посвящены изучению этой задачи и различных ее обобщений, которые возникают в теории стохастических процессов.

Следует заметить, что эта задача представляет интерес преимущественно для математика. Для химика или физика главный вопрос — и вопрос, который еще нуждается в удовлетворительном исследовании, — состоит в определении того, когда предел в (III) равен постоянному среднему по пространству

$$\text{(IV)} \qquad \frac{\int\limits_S f(s)\mu(ds)}{\mu(S)},$$

взятому относительно обычной меры Лебега μ в фазовом пространстве S. Если механическая система обладает этим свойством, ее называют *эргодической*. Со времен Больцмана были сделаны различные физические предположения, известные под названием *эргодических гипотез*, достаточные для того, чтобы гарантировать эргодичность системы. В дальнейшем мы увидим, что системы, которые метрически транзитивны в смысле Дж. Биркгофа, эргодичны, но мы не будем пытаться рассматривать трудную и важную задачу определения того, какие механические системы метрически транзитивны.

Ключевым моментом в дальнейшей теории пределов является теорема Лиувилля, которая утверждает, что в консервативной механической системе мера μ обладает свойством инвариантности, выражаемым равенством

$$\text{(V)} \qquad \mu(\varphi_t^{-1}(E)) = \mu(E), \quad E \in \Sigma,$$

где Σ — σ-алгебра всех измеримых множеств в S. Если при всех t линейное преобразование U_t определяется равенством

$$\text{(VI)} \qquad (U_t f)(x) = f(\varphi_t(x)), \qquad f \in L_p(S, \Sigma, \mu),$$

то равенства (I) и (V) показывают, что $\{U_t\}$ есть полугруппа унитарных (сохраняющих норму) преобразований в $L_p(S, \Sigma, \mu)$. Предел в (III) может быть выражен в терминах операторов U_t как

$$\lim_{T\to\infty} \left\{\frac{1}{T}\int\limits_0^T (U_t f)\,dt\right\}(x),$$

и мы покажем, следуя Дж. Нейману и Ф. Риссу, что этот предел существует по норме $L_p(S, \Sigma, \mu)$, а также, следуя Дж. Биркгофу, что предел существует для почти всех точек фазового пространства S. Наше рассмотрение будет относиться к полугруппе операторов, имеющей значительно более общую форму, чем полугруппа, определяемая равенством (VI).

Однако, чтобы объяснить основные понятия, удобнее обойти некоторые технические трудности, рассматривая сначала дискретный случай, а потом непрерывный. Например, вместо изучения непрерывного потока φ_t мы рассмотрим дискретный поток φ_n, где $\varphi_{n+m} = \varphi_n\varphi_m$. Так как $\varphi_n = \varphi_1^n$, то это значит, что мы будем изучать средние вида

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(\varphi_1^n(x)), \qquad f\in L_p(S, \Sigma, \mu),$$

где φ_1 — отображение S в себя.

В теории вероятностей важный класс операторов, называемых *марковскими процессами*, возникает следующим естественным образом. Пусть P — неотрицательная функция, определенная на $S\times\Sigma$ и удовлетворяющая условиям

(α) при всех $E\in\Sigma$, $P(\cdot, E)$ — измеримая функция на S;

(β) при всех $s\in S$, $P(s, \cdot)$ — вполне аддитивная мера на Σ;

(γ) $P(s, S)=1$, $\quad s\in S$.

Мы можем рассматривать число $P(s, E)$ как вероятность того, что процесс переносит точку s в множество E по прошествии одной единицы времени. С функцией P мы можем связать оператор, определяемый равенством

$$(Tf)(s)=\int_S f(t)P(s, dt),$$

где f принадлежит соответствующему классу функций на S. Семейство таких операторов, конечно, включает и операторы вида $f(\cdot)\to f(\varphi(\cdot))$. Рассмотрение, которое мы проводим в дальнейшем, включает операторы, возникающие в марковских процессах, как частный случай.

Несколько слов о построении следующих параграфов. В параграфе 5 для дискретного случая получен ряд результатов о сходимости в среднем, а в параграфе 6 для дискретного случая установлена точечная сходимость. Эти результаты применяются в параграфе 7, чтобы получить соответствующие теоремы о сходимости в среднем и о точечной сходимости для непрерывного случая. Параграф 8 посвящен определенному классу операторов T, для которых последовательность средних $\{N^{-1}\sum_{n=0}^{N-1} T^n\}$ сходится в равномерной операторной топологии. Наконец, в параграфе 9 в форме упражнений дано много приложений и иллюстраций общей теории.

5. Статистические эргодические теоремы

В этом и трех следующих параграфах мы рассмотрим поведение средних от итераций линейного оператора и таким образом попытаемся пролить свет на задачи статистической механики и теории вероятностей, которые были указаны в предыдущем параграфе. Однако нет необходимости ограничивать наше внимание операторами, связанными с потоками, которые возникают в статистической механике, или марковскими операторами теории вероятностей. В настоящем параграфе для оператора T в произвольном комплексном B-пространстве $\mathfrak{X}$ будут даны условия, необходимые и достаточные для сходимости в $\mathfrak{X}$ средних

$$A(n)=\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}T^m$$

от итераций оператора T. Эти общие условия будут затем применены к тем операторам в пространстве Лебега $L_p(S, \Sigma, \mu)$, которые имеют вид, встречающийся в статистической механике. В настоящем параграфе изучается только сильная сходимость средних $A(n)$. Вопросы, связанные с поведением последовательности $A(n)f$ в почти всех точках, для функций $f\in L_p$ отложены до следующего параграфа.

Для простоты формулировок мы предполагаем в оставшейся части этой главы, что речь идет о комплексных B-пространствах. В параграфах 5—7 это ограничение на самом деле несущественно, и читатель легко заметит, что небольшое изменение приведенных доказательств (если действительно это необходимо) распространяет результаты этих параграфов также и на вещественные B-пространства. Только в параграфе 8 предположение о комплексности B-пространства будет играть сколько-нибудь важную роль.

В дальнейших параграфах пространство (S, Σ, μ) с мерой произвольно, но в статистических эргодических теоремах, которые даны ниже, в следствии 5, теореме 9 и следствии 10, пространство (S, Σ, μ) предполагается имеющим конечную меру. Это сделано только для того, чтобы избежать технических усложнений; изменения, необходимые для получения аналогичных результатов для общего пространства с мерой, указаны в упражнениях.

Обозначение $A(n)$ будет использоваться для средних

$$A(n)=\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}T^m,\qquad n\geqslant 1.$$

Иногда желательно подчеркнуть зависимость $A(n)$ от T; в этих случаях мы будем употреблять обозначение $A(T, n)$ вместо $A(n)$.

1. Теорема. *Пусть средние $A(n)$ итераций оператора T в B-пространстве $\mathfrak{X}$ ограничены. Тогда множество тех точек x в $\mathfrak{X}$, для которых последовательность $\{A(n)x\}$ сходится, есть замкнутое линейное многообразие, состоящее из всех векторов x, для которых множество $\{A(n)x\}$ слабо компактно и $T^n x/n$ стремится к нулю.*

Доказательство. Эта теорема по существу есть следствие теоремы VII.7.4. Мы применим VII.7.4, полагая $f(\lambda)=1-\lambda$, $f_n(\lambda)=$

$=(\sum_{i=0}^{n-1}\lambda^i)/n$, и заменяя $\mathfrak{X}$ на множество $\mathfrak{X}_0$ всех таких x в $\mathfrak{X}$, для которых последовательность $\{A(n)x\}=\{f_n(T)x\}$ слабо компактна и $T^nx/n\to 0$. Так как $\{A(n)x\}$ ограничена, то лемма II.3.30 показывает, что множество тех x, для которых последовательность $\{A(n)x\}$ слабо компактна, есть замкнутое линейное многообразие. Тождество

$$(*)\qquad \frac{T^n}{n}=A(n)-\frac{n-1}{n}A(n-1)$$

показывает, что последовательность $\{T^n/n\}$ ограничена и, следовательно, по теореме II.1.18, множество x, для которых $T^nx/n\to 0$, есть замкнутое линейное многообразие. Таким образом, $\mathfrak{X}_0$ есть замкнутое линейное многообразие, и так как непрерывный линейный оператор отображает слабо сходящиеся последовательности в слабо сходящиеся, то $T\mathfrak{X}_0\subseteq\mathfrak{X}_0$. Поэтому мы можем применить теорему VII.7.4 к сужению оператора T на B-пространство $\mathfrak{X}_0$. Тождество $f(T)f_n(T)=(I-T^n)/n$ показывает, что предположение $f(T)f_n(T)x\to 0$ теоремы VII.7.4 выполнено для $x\in\mathfrak{X}_0$. Так как функция f имеет лишь простой корень $\lambda=1$ и так как $f_n(1)=1$, то из VII.7.4 следует, что $\{A(n)x\}$ сходится при всех $x\in\mathfrak{X}_0$. Наоборот, если для некоторого x из $\mathfrak{X}$ последовательность $\{A(n)x\}$ сходится, то она слабо компактна и тождество $(*)$ показывает, что $T^nx/n\to 0$, ч. т. д.

2. Следствие. *Если сильный предел $E=\lim_n A(n)$ существует, то он равен оператору проектирования пространства $\mathfrak{X}$ на многообразие $\{x\mid Tx=x\}$ неподвижных точек оператора T. Областью значений дополнительного проектора является замыкание многообразия $(I-T)\mathfrak{X}$.*

Доказательство. Так как $(I-T)A(n)=(I-T^n)/n$, то тождество $(*)$ показывает, что $TE=E$ и, тем самым, что $A(n)E=E$ и $E^2=E$. Поэтому E является оператором проектирования на неподвижные точки оператора T. Так как $E(I-T)=0$, область значений $E'\mathfrak{X}$ дополнительного к E проектора E' содержит $(I-T)\mathfrak{X}$. Пусть теперь x^* — линейный функционал и $x^*(I-T)=0$. Тогда $x^*=x^*T=x^*A(n)=x^*E$ и потому $x^*E'=0$. Из следствия II.3.13 вытекает, что $E'\mathfrak{X}$ содержится в замыкании $(I-T)\mathfrak{X}$, ч. т. д.

3. Следствие. *Если последовательность $\{A(n)\}$ ограничена, то она сходится в сильной операторной топологии тогда и только тогда, когда T^nx/n стремится к нулю для x из фундаментального множества и последовательность $\{A(n)x\}$ слабо компактна для x из фундаментального множества.*

Доказательство. В начале доказательства теоремы 1 было показано, что множество тех x, для которых $T^n x/n \to 0$, есть замкнутое линейное многообразие, а также, что и множество тех x, для которых последовательность $\{A(n)\,x\}$ слабо компактна, есть замкнутое линейное многообразие. Таким образом, оба эти множества суть $\mathfrak{X}$, и теорема 1 показывает, что $\{A(n)x\}$ сходится при всех x из $\mathfrak{X}$, ч. т. д.

4. Следствие. *Если $\mathfrak{X}$ рефлексивно, то последовательность $\{A(n)\}$ сходится в сильной операторной топологии тогда и только тогда, когда она ограничена и $\{T^n x/n\}$ сходится к нулю для всех x из фундаментального множества.*

Доказательство. Это утверждение вытекает из следствия 3 и теоремы II.3.28, ч. т. д.

5. Следствие. *Пусть (S, Σ, μ) — пространство с конечной мерой, и пусть T — линейный оператор в $L_1(S, \Sigma, \mu)$, который отображает существенно ограниченные функции в существенно ограниченные. Пусть средние $A(n)$ равномерно ограничены как операторы в $L_\infty(S, \Sigma, \mu)$, а также как операторы в $L_1(S, \Sigma, \mu)$. Эти средние сильно сходятся в $L_1(S, \Sigma, \mu)$ тогда и только тогда, когда $T^n f/n$ стремится к нулю в $L_1(S, \Sigma, \mu)$ для всех f из некоторого фундаментального множества в $L_1(S, \Sigma, \mu)$.*

Доказательство. Пусть f — характеристическая функция множества из Σ; так как последовательность $\{A(n)f\}$ ограничена в $L_\infty(S, \Sigma, \mu)$, она, по следствию IV.8.11, слабо компактна как последовательность в $L_1(S, \Sigma, \mu)$. Доказываемое утверждение вытекает теперь из следствия 3, ч. т. д.

Предыдущие общие результаты будут теперь применены к оператору в $L_p(S, \Sigma, \mu)$, имеющему специальный вид, а именно $(Tf)(s) = f(\varphi(s))$, где $f \in L_p(S, \Sigma, \mu)$, а φ — отображение S в себя. В оставшейся части этого параграфа предполагается, что (S, Σ, μ) — пространство с *конечной* положительной мерой. Чтобы применять следствия 4 и 5 к оператору T, мы должны сначала выяснить условия на φ, которые достаточны, чтобы гарантировать, что оператор T отображает $L_p(S, \Sigma, \mu)$ в $L_p(S, \Sigma, \mu)$, и соответствующая последовательность $\{A(n)\}$ ограничена. Так как точками в $L_p(S, \Sigma, \mu)$ являются не функции, а классы эквивалентных функций, то оператор T нельзя считать определенным на $L_p(S, \Sigma, \mu)$, если $f(s) = g(s)$ почти всюду не влечет совпадения $f(\varphi(s)) = g(\varphi(s))$. Следующая лемма даст условия на φ, которые исключают такую возможность, а также позволяют нам делать вывод о μ-измеримости функции Tf из μ-измеримости функции f. Эта лемма и некоторые из последующих теорем будут применяться к функциям из класса немного более общего, чем $L_p(S, \Sigma, \mu)$. По этой причине удобно определить оператор T как отображение в классе всех *функций* на области S, которое задается равенством

$$(\mathrm{I}) \qquad (Tf)(s)=f(\varphi(s)), \qquad s\in S.$$

Таким образом, если f есть функция на S, то Tf есть функция на S; и область изменения Tf содержится в области изменения f.

6. Лемма. *Пусть $\mathfrak{X}\neq 0$ — полное B-пространство, (S, Σ, μ) — пространство с конечной положительной мерой и φ — отображение S в себя, которое удовлетворяет следующим условиям:*

$$(\mathrm{II}) \qquad \varphi^{-1}(e)\in\Sigma, \quad \mu(\varphi^{-1}(a))=0, \quad \textit{если} \quad a,e\in\Sigma \quad \textit{и} \quad \mu(a)=0.$$

Пусть для любой функции f, отображающей S в $\mathfrak{X}$, функция Tf определена на S равенством (I). *Тогда T отображает μ-измеримые функции в μ-измеримые функции и эквивалентные относительно μ функции в эквивалентные. Кроме того, T есть непрерывное линейное отображение F-пространства $M(S)=M(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$ всех $\mathfrak{X}$-значных μ-измеримых функций в себя.*

Доказательство. Так как $\mu(s)<\infty$, каждая μ-измеримая функция вполне μ-измерима (определение III.2.10), и, таким образом, как показано в начале параграфа IV.11, пространство $M(S)$ есть F-пространство. Условие (II) показывает, что T отображает эквивалентные относительно μ функции в эквивалентные, т. е. $f(\varphi(s))=$ $=g(\varphi(s))$ почти всюду, если $f(s)=g(s)$ почти всюду. Таким образом, T можно считать линейным отображением в F-пространстве $M(S)$ при условии, что функция Tf μ-измерима, если функция f μ-измерима. Чтобы убедиться в том, что T обладает этим свойством, вспомним (III.5.18), что лебеговское расширение Σ^* σ-алгебры Σ состоит из всех множеств вида $e^*=e\bigcup a$, где $e\in\Sigma$, а a есть подмножество множества $b\in\Sigma$, $\mu(b)=0$. Таким образом, согласно (II),

$$\varphi^{-1}(e^*)=\varphi^{-1}(e)\bigcup\varphi^{-1}(a),$$

где $\varphi^{-1}(e)\in\Sigma$, а $\varphi^{-1}(a)$ — подмножество множества $\varphi^{-1}(b)\in\Sigma$, $\mu(\varphi^{-1}(b))=0$. Таким образом, $\varphi^{-1}(e^*)\in\Sigma^*$, и поэтому

$$(\mathrm{III}) \qquad \varphi^{-1}(\Sigma^*)\subseteq\Sigma^*.$$

Пусть теперь f — μ-измеримая функция, и пусть G — открытое множество в $\mathfrak{X}$. Тогда, по лемме III.6.9, $f^{-1}(G)\in\Sigma^*$ и, следовательно, по (III),

$$(f\varphi)^{-1}(G)=\varphi^{-1}(f^{-1}(G))\in\Sigma^*.$$

Аналогично так как f почти сепарабельнозначна, то условия (II) показывают, что Tf также почти сепарабельнозначна. Таким образом, по лемме III.6.9, функция Tf μ-измерима при любой μ-измеримой функции f из S в $\mathfrak{X}$, и T есть линейное отображение $M(S)$

в себя. Остается показать, что T — непрерывное отображение в $M(S)$. Для этого воспользуемся теоремой о замкнутом графике (II.2.4). Если $f_n \to f$ и $Tf_n \to g$ в $M(S)$, то, согласно следствию III.6.13, существует подпоследовательность $\{f_{n_i}\}$, $f_{n_i}(s) \to f(s)$ и $f_{n_i}(\varphi(s)) \to g(s)$ для всех s в S, кроме s из множества e нулевой меры. Таким образом, $f_n(\varphi(s)) \to f(\varphi(s))$ для всех s, кроме $s \in \varphi^{-1}(e)$. Из предположения (II) следует, что $\mu(\varphi^{-1}(e))=0$ и тем самым $g(s)=f(\varphi(s))$ почти всюду в S, а, таким образом, $Tf=g$; это показывает, что T замкнут. Теорема о замкнутом графике приводит теперь к непрерывности T, ч. т. д.

Следующая лемма дает дополнительное ограничение на φ, которое будет гарантировать, что T отображает $L_p(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$ в себя.

7. Лемма. *Пусть $\mathfrak{X} \neq 0$—комплексное B-пространство, (S, Σ, μ)— пространство с конечной положительной мерой и φ — отображение S в себя, для которого $\varphi^{-1}(\Sigma) \subseteq \Sigma$. Тогда при $1 \leqslant p < \infty$ оператор T, определяемый равенством* (I), *отображает пространство $L_p(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$ в себя в том и только в том случае, когда*

$$\text{(IV)} \qquad \sup_{e \in \Sigma} \frac{\mu(\varphi^{-1}(e))}{\mu(e)} = M < \infty.$$

Кроме того, если это условие выполнено, то T есть линейное непрерывное отображение в $L_p(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$, норма которого равна $M^{1/p}$.

Доказательство. Предположим сначала, что T отображает $L_p = L_p(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$ в себя. Будет показано, что T замкнут, и, следовательно, (II.2.4) непрерывен. Так как T определен на L_p, он отображает эквивалентные функции в эквивалентные. Пусть теперь $a \neq 0$ — фиксированный вектор в $\mathfrak{X}$, а e — множество нулевой меры в Σ. Тогда $T(a, \chi_e) = a\chi_{\varphi^{-1}(e)} = 0$ в L_p. Таким образом, $\varphi^{-1}(e)$ — множество нулевой меры в Σ, и условия (II) леммы 6 выполнены. Так как сходимость в L_p влечет сходимость по мере (III.3.6), лемма 6 показывает, что $Tf_n \to Tf$ по мере, если $f_n \to f$ в L_p. Таким образом, если $f_n \to f$ в L_p и $Tf_n \to g$ в L_p, то $Tf = g$, и T замкнут. По теореме о замкнутом графике (II.2.4), T непрерывен и, таким образом, (II.3.4) ограничен. Если $a \neq 0$ — вектор в $\mathfrak{X}$ и e —множество в Σ, то

$$|a|\,\mu(\varphi^{-1}(e))^{1/p} = |T(a\chi_e)| \leqslant |T|\,|a|\,\mu(e)^{1/p},$$
$$\mu(\varphi^{-1}(e)) \leqslant |T|^p \mu(e);$$

это показывает, что $M \leqslant |T|^p < \infty$. Таким образом, если оператор T отображает L_p в L_p, то он непрерывен и выполнено (IV).

Наоборот, пусть φ обладает свойством (IV) и пусть f — μ-интегрируемая простая функция принимающая значения $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ на непересекающихся множествах $e_1, \ldots, e_n$ положительной меры.

Тогда Tf принимает значения $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ на множествах $\varphi^{-1}(e_1), \ldots$ $\ldots, \varphi^{-1}(e_n)$ и

$$|Tf| = \Big[\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^p \mu(\varphi^{-1}(e_i))\Big]^{1/p} \leqslant M^{1/p} \Big[\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^p \mu(e_i)\Big]^{1/p} = M^{1/p} |f|.$$

Так как μ-интегрируемые простые функции плотны в L_p (III.3.8), это показывает, что T непрерывен на плотном множестве в L_p и, таким образом, имеет единственное непрерывное расширение $\widetilde{T}$, определенное на всем L_p с нормой $|\widetilde{T}| \leqslant M^{1/p}$. Теперь если $f_n \to f$ в L_p, то $f_n \to f$ по мере μ, и лемма 6 показывает, что и $Tf_n \to Tf$ по мере. Так как $Tf_n \to \widetilde{T}f$ в L_p, то $(\widetilde{T}f)(s) = (Tf)(s)$ для почти всех s в S, и, следовательно, $T = \widetilde{T}$ есть линейное отображение в L_p с нормой $|T| \leqslant M^{1/p}$. С другой стороны, ясно из определения M, что $|T| \geqslant M^{1/p}$, ч. т. д.

8. Лемма. *Пусть (S, Σ, μ) — пространство с конечной положительной мерой и φ — отображение S в себя, для которого $\varphi^{-1}(\Sigma) \subseteq \Sigma$. Предположим, что существует постоянная M, для которой*

$$\text{(V)} \qquad \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mu(\varphi^{-j}(e)) \leqslant M \mu(e), \quad e \in \Sigma, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Тогда при всех $1 \leqslant p \leqslant \infty$ оператор T, определяемый равенством (I), *отображает $L_p(S, \Sigma, \mu)$ в себя, и средние $A(n)$ равномерно ограничены как операторы в $L_p(S, \Sigma, \mu)$. Обратно, если оператор T, определяемый равенством* (I), *отображает $L_1(S, \Sigma, \mu)$ в себя и если средние $A(n)$ равномерно ограничены как операторы в $L_1(S, \Sigma, \mu)$, то существует постоянная M, для которой выполнено* (V).

Доказательство. Обозначения $|T|_p$, $|A(n)|_p$ будут использоваться для норм операторов T, $A(n)$ соответственно, когда они рассматриваются как операторы в $L_p = L_p(S, \Sigma, \mu)$. Точно так же для μ-измеримой функции f обозначение $|f|_p$ используется для числа $\left(\int_S |f(s)|^p \mu(ds)\right)^{1/p}$, будет ли оно конечным или нет. Мы сначала докажем достаточность условия (V). Используя это условие при $n=2$, мы видим, что $\mu(\varphi^{-1}(e)) \leqslant (2M-1)\mu(e)$ для всех $e \in \Sigma$, и, таким образом, по лемме 7, $|T|_p < \infty$ при всех p, $1 \leqslant p < \infty$. Это неравенство также показывает, что $\mu(\varphi^{-1}(e)) = 0$, если $\mu(e) = 0$, и, таким образом,

$$(*) \qquad |T|_\infty \leqslant 1.$$

Пусть теперь f — μ-интегрируемая простая функция, которая принимает значения $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ на непересекающихся множествах $e_1, \ldots, e_k$

соответственно. Тогда

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} T^j f = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \chi_{\varphi^{-j}(e_i)},$$

так что, используя (V), имеем

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} T^j f\right| \leqslant M \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|\,\mu(e_i) \leqslant M\,|f|_1,$$

и, таким образом,

(**) $$|A(n)|_1 \leqslant M.$$

Теорема Рисса о выпуклости (VI.10.11) и неравенства (*) и (**) дают теперь

$$\log|A(n)|_p \leqslant \left(1-\frac{1}{p}\right)\log|A(n)|_\infty + \frac{1}{p}\log|A(n)|_1 \leqslant$$
$$\leqslant \log|A(n)|_1^{1/p} \leqslant \log M^{1/p},$$

так что

(VI) $$|A(n)|_p \leqslant M^{1/p}, \quad n=1, 2, \ldots .$$

Наоборот, предположим, что T отображает L_1 в L_1 и что $|A(n)|_1 \leqslant M$ при $n \geqslant 1$. Тогда для $e \in \Sigma$

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \mu(\varphi^{-j}(e)) = \int_S \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \chi_{\varphi^{-j}(e)}(s)\,\mu(ds) =$$
$$= |A(n)\chi_e| \leqslant M\mu(e), \quad n=1, 2, \ldots ,$$

что завершает доказательство леммы.

Замечание. Следует отметить, что последнее неравенство и неравенство (**), взятые вместе, показывают, что

$$|A(n)|_1 = \sup_{e\in\Sigma}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \mu(\varphi^{-j}(e))/\mu(e).$$

9. Теорема. (*Статистическая эргодическая теорема.*) *Пусть* (S, Σ, μ) — *пространство с конечной положительной мерой, и пусть* φ — *отображение* S *в себя со свойствами*: $\varphi^{-1}(\Sigma) \subseteq \Sigma$ *и*

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \mu(\varphi^{-j}(e)) \leqslant M\mu(e), \quad e \in \Sigma, \quad n=1, 2, \ldots ,$$

где M — *постоянная, не зависящая от* e *и* n. *Тогда при всех* p, $1 \leqslant p < \infty$, *преобразование* T, *определяемое равенством* $(Tf)(s) = f(\varphi(s))$, *есть непрерывное линейное отображение в* $L_p = L_p(S, \Sigma, \mu)$ *и средние* $A(n)$ *сильно сходятся в* L_p.

Доказательство. По лемме 8, последовательность $A(n)$ ограничена. Если $|f(s)| \leqslant K$ для s в S, то $|T^n(f, s)|/n \leqslant K/n$, так что теорема вытекает из следствий 4 и 5, ч. т. д.

Следует отметить, что *сохраняющее меру преобразование* φ (т. е. преобразование, для которого $\mu(\varphi^{-1}(e)) = \mu(e)$ для всех e в Σ) удовлетворяет условиям предыдущей теоремы. Было отмечено выше, что именно такого типа преобразование возникает при изучении консервативных механических систем. Преобразование φ *метрически транзитивно*, если из равенства $\mu(e \Delta \varphi^{-1}(e)) = 0$ для некоторого e в Σ следует, что либо $\mu(e) = 0$, либо $\mu(e') = 0$.

10. Следствие *Если в дополнение к условиям предыдущей теоремы предположить, что φ сохраняет меру и метрически транзитивно, то для всех f в $L_1(S, \Sigma, \mu)$ предел $\lim_n A(n) f$ почти всюду равен постоянному среднему по пространству* $\int_S f(s)\mu(ds)/\mu(S)$.

Доказательство. Пусть $g = \lim_{n\to\infty} A(n) f$, так что, по следствию 2, $Tg = g$. Таким образом, для всех борелевских множеств E с точностью до множеств нулевой меры

$$\{s \mid g(s) \in E\} = \{s \mid g(\varphi(s)) \in E\},$$

так что $\mu((g^{-1}E) \Delta (\varphi^{-1}g^{-1}E)) = 0$. Поэтому из определения метрической транзитивности следует, что либо $\mu(g^{-1}E) = 0$, либо $\mu(g^{-1}E) = \mu(S)$. Поскольку g почти сепарабельнозначна (III.6.10), для произвольного $\varepsilon > 0$ существует последовательность $\{E_n\}$ непересекающихся борелевских множеств, каждое из которых диаметром меньше ε, и такая, что $g(s) \in \bigcup E_n$ для почти всех s в S. Таким образом, при некотором n мы имеем $\mu(g^{-1}E_n) = \mu(S)$; это означает, что $|g(s) - g(t)| < \varepsilon$ при всех s и t из дополнения множества меры нуль. Следовательно, при почти всех s $g(s) = g$ постоянна. Так как φ сохраняет меру, $\int_S f(s)\mu(ds) = \int_S \{A(n) f(s)\}\mu(ds) = \int_S g(s)\mu(ds) = g\mu(S)$, что завершает доказательство следствия.

6. Индивидуальные эргодические теоремы

B-пространство $\mathfrak{X}$ предыдущего параграфа будет теперь заменено пространством $L_p = L_p(S, \Sigma, \mu)$, где (S, Σ, μ) — произвольное пространство с положительной мерой. Если T—оператор в L_p и f—векторы в L_p, то для указания значения в точке s одной из функций из класса эквивалентности Tf будут использоваться обозначения $(Tf)(s)$ и $T(f, s)$. Как и раньше, символ $A(n)$ будет обозначать средние

$n^{-1}\sum_{m=0}^{n-1} T^m$, а иногда, когда желательно указать на зависимость $A(n)$ от T, вместо $A(n)$ будет использоваться обозначение $A(T, n)$. Как обычно, символ $|f|_p$ будет использоваться для p-нормы:

$$|f|_p = \begin{cases} \left(\int\limits_S |f(s)|^p \mu(ds)\right)^{1/p}, & 1 \leqslant p < \infty, \\ \operatorname{vrai}\sup\limits_{s\in S} |f(s)|, & p = \infty, \end{cases}$$

измеримой функции на S. Иногда удобно пользоваться понятием *p-нормы оператора T, область определения которого плотна в L_1*. Эта норма определяется равенством $|T|_p = \sup |Tf|_p$, где верхняя грань берется по всем f из области определения T с $|f|_p \leqslant 1$. Если $|T|_p < \infty$ и $p < \infty$, то T имеет единственное непрерывное расширение в L_p и тот же символ T будет использоваться для расширенного оператора. Большинство результатов этого параграфа относится к оператору T, у которого $|T|_1 \leqslant 1$ и $|T|_\infty \leqslant 1$. Из теоремы Рисса о выпуклости следует, что $|T|_p \leqslant 1$ при $1 \leqslant p \leqslant \infty$, так что T есть непрерывное линейное отображение в каждом пространстве L_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Следует заметить, что отображение $f \to f\varphi$ (рассмотренное в параграфе 5), которое порождается сохраняющим меру преобразованием $s \to \varphi(s)$ в S, относится к этой категории. Другой пример дает оператор марковского процесса; еще один — оператор вида $f \to a(\cdot) f(\varphi(\cdot))$, где множитель a — измеримая функция и $|a|_\infty \leqslant 1$. Нашей основной целью будет доказательство сходимости почти всюду последовательности $\{A(n)f\}$ и получение оценок для функции $\sup\limits_n |A(n)f|$.

1. Лемма. (*Хопф.*) *Пусть P — положительный оператор в L_∞ и $|P|_\infty \leqslant 1$. Пусть $\{e^k\}$ — убывающая последовательность характеристических функций и e^k равны нулю при $k > n$. Тогда существует последовательность $\{g_k, 0 \leqslant k\}$ в L_∞, такая, что если $i \geqslant 0$, то*

(I) $\qquad 0 \leqslant g_i \leqslant g_i e^{i+1};$

(II) $\qquad 0 \leqslant e^{i+2}(g_{i+1} - g_i);$

(III) $\qquad e^{i+1} = e^{i+1}(g_i + Pg_{i+1} + P^2 g_{i+2} + \ldots).$

Доказательство. Пусть $g_i = 0$ при $i \geqslant n$, а при $i < n$ определяем g_i по обратной индукции равенством

(1) $\qquad g_i = e^{i+1}(1 - Pg_{i+1} - P^2 g_{i+2} - \ldots), \quad 0 \leqslant i < n.$

Равенство

(2) $\qquad e^{i+1} = e^{i+1}(g_i + Pg_{i+1} + \ldots), \quad 0 \leqslant i,$

очевидно, что и доказывает (III). Покажем теперь, что

(3) $$g_i + Pg_{i+1} + P^2 g_{i+2} + \ldots \leqslant 1, \quad 0 \leqslant i.$$

Это ясно для $i \geqslant n$, а для $i < n$ может быть доказано обратной индукцией следующим образом: так как $(1 - e^{i+1}) g_i = 0$, то, по предположению индукции,

$$(1 - e^{i+1})(g_i + Pg_{i+1} + \ldots) = (1 - e^{i+1}) P (g_{i+1} + Pg_{i+2} + \ldots) \leqslant$$
$$\leqslant (1 - e^{i+1}) P1 \leqslant 1 - e^{i+1},$$

что вместе с (2) доказывает (3). Из (1) и (3) видно, что

$$e^{i+1} g_i = g_i = e^{i+1} [1 - P (g_{i+1} + Pg_{i+2} + \ldots)] \geqslant 0,$$

это доказывает (I). Для доказательства (II) мы докажем сначала обратной индукцией, что

(4) $$(g_i + Pg_{i+1} + \ldots) - (g_{i+1} + Pg_{i+2} + \ldots) \geqslant 0, \quad 0 \leqslant i.$$

Предположим, что неравенство (4) выполнено при $i > j$. Тогда, по (2) и (3),

(5) $$e^{j+1} (g_j + Pg_{j+1} + \ldots - g_{j+1} - Pg_{j+2} - \ldots) =$$
$$= e^{j+1} - e^{j+1} (g_{j+1} + Pg_{j+2} + \ldots) \geqslant 0.$$

Аналогично, так как $(1 - e^{j+1}) g_j = (1 - e^{j+1}) g_{j+1} = 0$, мы видим из предположения индукции, что

(6) $$(1 - e^{j+1})(g_j + Pg_{j+1} + \ldots - g_{j+1} - Pg_{j+2} - \ldots) =$$
$$= (1 - e^{j+1}) P (g_{j+1} + Pg_{j+2} + \ldots - g_{j+2} - Pg_{j+3} - \ldots) \geqslant 0.$$

Таким образом, неравенство (4) вытекает из (5) и (6). Так как $e^{i+2} e^{i+1} = e^{i+2}$, то из соотношений (1) и (4) вытекает, что

$$e^{i+2} (g_{i+1} - g_i) = e^{i+2} P (g_{i+1} + Pg_{i+2} + \ldots - g_{i+2} - Pg_{i+3} - \ldots) \geqslant 0,$$

это доказывает (II).

2. Лемма. (*Хопф.*) *Пусть P — положительный оператор в L_1 и $|P|_1 \leqslant 1$. Тогда для любой вещественной функции f в L_1 и любого натурального n и $E = \{s \mid \sup_{1 \leqslant k \leqslant n} A(P, k)(f, s) \geqslant 0\}$ интеграл*

$$\int_E f(s)\, \mu(ds) \geqslant 0.$$

Доказательство. Пусть при $i > n$ множество E_i пусто, а при $1 \leqslant i \leqslant n$ положим

$$E_i = \{s \mid A(i)(f, s) \geqslant 0;\ A(j)(f, s) < 0;\ j < i\},$$

где $A(n)=A(P, n)$. Пусть далее $E^i=E_i \cup E_{i+1} \cup \ldots$, так что $E^1=E$, и пусть e_i и e^i — характеристические функции множеств E_i и E^i соответственно. Тогда

$$e_i \sum_{j=0}^{i-1} P^j f \geqslant 0, \quad e_i \sum_{j=0}^{m-1} P^j f \leqslant 0, \quad m<i,$$

так что

$$e_i \sum_{j=m}^{i-1} P^j f \geqslant 0, \qquad m<i.$$

Складывая эти неравенства, мы получаем

$$\text{(1)} \qquad \sum_{i>m} \sum_{j=m}^{i-1} e_i P^j f=\sum_{j \geqslant m} e^{j+1} P^j f \geqslant 0, \quad 0 \leqslant m.$$

Предыдущая лемма теперь применима к сопряженному оператору P^* в L_∞, так что существуют функции $g_i \in L_\infty$, $0 \leqslant i$, со свойствами (I), (II) этой леммы, а также со свойством

$$\text{(III}') \qquad e^1=e^1(g_0+P^* g_1+P^{*2} g_2+\ldots).$$

Пусть $g_{-1}=0$, так что из (I) и (II) мы имеем

$$0 \leqslant \sum_{m \geqslant 0} e^{m+1}(g_m-g_{m-1}) \sum_{j \geqslant m} e^{j+1} P^j f=\sum_{m \geqslant 0} \sum_{j \geqslant m} e^{j+1}(g_m-g_{m-1}) P^j f=$$

$$=\sum_{j \geqslant 0} \sum_{m=0}^{j}(g_m-g_{m-1}) e^{j+1} P^j f=\sum_{j \geqslant 0} g_j e^{j+1} P^j f=\sum_{j \geqslant 0} g_j P^j f.$$

Следовательно,

$$0 \leqslant \int_S \Big(\sum_{j \geqslant 0} g_j P^j f\Big)(s) \mu(ds)=\int_S \sum_{j \geqslant 0}(P^{*j} g_j)(s) f(s) \mu(ds).$$

Так как $P^{*j} g_j \geqslant 0$ и $f=f_1$ отрицательна на $S-E \subseteq S-E_1$, то

$$0 \leqslant \int_E \sum_{j \geqslant 0}(P^{*j} g_j)(s) f(s) \mu(ds).$$

Так как e^1 — характеристическая функция E, из (III′) следует, что $\sum_{j \geqslant 0}(P^{*j} g_j)(s)=1$ для s в E. Таким образом, $\int_E f(s) \mu(ds) \geqslant 0$, ч. т. д.

3. Лемма. *Пусть A — ограниченное подмножество в L_∞ и $\alpha A \subseteq A$ при $|\alpha|=1$. Тогда* $\sup_{f \in A}|f(\cdot)|=\sup_{f \in A} \operatorname{Re} f$.

Доказательство. Верхняя грань в рассматриваемых выражениях понимается в смысле структуры L_∞. Пусть $g_1=\sup_{f \in A}|f(\cdot)|$, $g_2=\sup_{f \in A} \operatorname{Re} f$.

Тогда из неравенства $|f(\cdot)| \geqslant \operatorname{Re} f$ вытекает, что $g_1 \geqslant g_2$. Поэтому для доказательства леммы достаточно показать, что $g_2 \geqslant |f(\cdot)|$ для всех f в A. Если это неверно, то существуют f в A, $\varepsilon > 0$ и измеримое множество e положительной меры, такие, что $|f(s)| \geqslant g_2(s) + \varepsilon$ для $s \in e$. Пусть N — такое натуральное число, что $4|f|_\infty \pi < N\varepsilon$. Так как $0 \leqslant \arg f(s) < 2\pi$, существуют целое число $i \leqslant N$ и измеримое подмножество e_1 множества e положительной меры, такие, что $2\pi i/N \leqslant \arg f(s) < 2\pi(i+1)/N$ для s в e_1. Так как $e^{-2\pi i/N} f \in A$, мы можем предположить, что $0 \leqslant \arg f(s) < 2\pi/N$ для s в e_1. Тогда

$$|\operatorname{Re} f(s) - f(s)| \leqslant |f(s) \sin[\arg f(s)]| \leqslant \frac{2\pi |f|_\infty}{N} < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad s \in e_1$$

и, следовательно, $\operatorname{Re} f \geqslant g_2 + \varepsilon/2$ для s в e_1, что противоречит определению g_2 и доказывает лемму.

4. Лемма. *Пусть (S, Σ, μ) — пространство с σ-конечной мерой, и пусть T — ограниченный линейный оператор в L_1, норма которого в L_∞ также конечна. Тогда существует положительный линейный оператор P в L_1, нормы которого в L_1 и L_∞ не превосходят соответствующих норм T, и такой, что*

$$|(T^n f)(\cdot)| \leqslant P^n(|f(\cdot)|), \quad 1 \leqslant n, \quad f \in L_1.$$

Доказательство. Используя полноту структуры L_∞ (теорема IV.8.23), мы определяем Pf для $0 \leqslant f \in L_1 \cap L_\infty$ как $\sup \operatorname{Re} Tg$, где g пробегает все элементы в L_∞, такие, что $|g(\cdot)| \leqslant f$. Таким образом, по предыдущей лемме,

$$Pf = \sup_{|g(\cdot)| \leqslant f} \operatorname{Re} Tg = \sup_{|g(\cdot)| \leqslant f} |(Tg)(\cdot)|, \quad 0 \leqslant f \in L_\infty.$$

Ясно, что $Pf \geqslant 0$, если $0 \leqslant f \in L_1 \cap L_\infty$. С другой стороны, если $|g_1(\cdot)| \leqslant f_1 \in L_1 \cap L_\infty$ и $|g_2(\cdot)| \leqslant f_2 \in L_1 \cap L_\infty$, то $\operatorname{Re} Tg_1 + \operatorname{Re} Tg_2 = \operatorname{Re} T(g_1 + g_2) \leqslant P(f_1 + f_2)$, откуда следует, что $Pf_1 + Pf_2 \leqslant P(f_1 + f_2)$, если $0 \leqslant f_1, f_2 \in L_1 \cap L_\infty$. Пусть теперь $f_1, f_2, h \in L_1 \cap L_\infty$, $f_1, f_2 \geqslant 0$ и $|h(\cdot)| \leqslant f_1 + f_2$; определяем $h_2 = h - h_1$, где $h_1(s) = 0$, если $h(s) = 0$, и

$$h_1(s) = \frac{h(s)}{|h(s)|}[|h(s)| \wedge f_1(s)]$$

в противном случае. Тогда ясно, что $|h_1(\cdot)| \leqslant f_1$, $|h_2(\cdot)| \leqslant f_2$, так что $\operatorname{Re} Th = \operatorname{Re} Th_1 + \operatorname{Re} Th_2 \leqslant Pf_1 + Pf_2$; это доказывает, что $P(f_1 + f_2) \leqslant Pf_1 + Pf_2$ и устанавливает равенство

$$P(f_1 + f_2) = Pf_1 + Pf_2, \quad 0 \leqslant f_1, f_2 \in L_1 \cap L_\infty.$$

Если f_1, f_2, g_1, g_2 — неотрицательные элементы в $L_1 \cap L_\infty$ и $f_1 - f_2 = g_1 - g_2$, то $f_1 + g_2 = f_2 + g_1$, так что $Pf_1 + Pg_2 = Pf_2 + Pg_1$ и $Pf_1 - Pf_2 = Pg_1 - Pg_2$. Это показывает, что Pf может быть определено для произвольного вещественного элемента в $L_1 \cap L_\infty$ равенством $Pf = Pf_1 - Pf_2$, где f_1 и f_2 — неотрицательные функции и $f = f_1 - f_2$. Ясно, что $P\alpha f = \alpha Pf$ для вещественных чисел α и вещественных функций f в $L_1 \cap L_\infty$. Для произвольной f в $L_1 \cap L_\infty$ мы положим $Pf = P \operatorname{Re} f + iP \operatorname{Im} f$. Очевидно, что P аддитивен и что $P\alpha f = \alpha Pf$ для вещественных α. Таким образом, для доказательства линейности P достаточно заметить, что $iPf = Pif$, т. е. что $P \operatorname{Re}(if) + iP \operatorname{Im}(if) = i(P \operatorname{Re} f + iP \operatorname{Im} f)$ для всех f в $L_1 \cap L_\infty$.

Чтобы убедиться в неравенстве $|P|_\infty \leqslant |T|_\infty$, заметим, что $P \operatorname{Re} f = \operatorname{Re} Pf$, и, таким образом, по лемме 3,

$$|(Pf)(\cdot)| = \sup_{|\alpha|=1} \operatorname{Re} P\alpha f = \sup_{|\alpha|=1} P \operatorname{Re} \alpha f \leqslant$$
$$\leqslant P|f(\cdot)| = \sup_{|g(\cdot)| \leqslant |f(\cdot)|} |(Tg)(\cdot)| \leqslant |T|_\infty |f|_\infty$$

для $f \in L_1 \cap L_\infty$; это доказывает, что $|P|_\infty \leqslant |T|_\infty$.

Для доказательства неравенства $|P|_1 \leqslant |T|_1$ мы применим метод, использованный выше, к сопряженному оператору T^*, который определен в $L_1^* = L_\infty$. Таким путем мы построим оператор P_1 в L_∞ со свойствами

$$[1] \qquad P_1 \geqslant 0, \quad |P_1|_\infty \leqslant |T^*|_\infty = |T|_1,$$
$$|(T^*f(\cdot)| \leqslant P_1|f(\cdot)| = \sup_{|g(\cdot)| \leqslant |f(\cdot)|} |T^*g(\cdot)|, \quad 0 \leqslant f \in L_\infty.$$

Пусть $0 \leqslant f \in L_\infty$, $g \in L_1$, и пусть $\varkappa$ — естественное вложение L_1 в L_1^{**}. Тогда

$$\int_S f(s)(\operatorname{Re} Tg)(s)\mu(ds) = \operatorname{Re} \int_S f(s)(Tg)(s)\mu(ds) \leqslant$$
$$\leqslant \left| \int_S f(s)(Tg)(s)\mu(ds) \right| = \left| \int_S (T^*f)(s)g(s)\mu(ds) \right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_S |(T^*f)(s)|\,|g(s)|\mu(ds) \leqslant \int_S (P_1 f)(s)|g(s)|\mu(ds) = \nu f,$$

где $\nu = P_1^* \varkappa |g(\cdot)|$. Так как мера в (S, Σ, μ) σ-конечна, элемент ν в L_∞^* может быть представлен в виде ограниченной аддитивной функции множеств (IV.8.16), значение которой на множестве e в Σ равно $\nu(\chi_e)$, где χ_e — характеристическая функция e. В предыдущем неравенстве заменим f характеристической функцией множества e в Σ и напишем $\nu(e)$ вместо νf. Таким образом, по предыдущему неравенству, имеем

$$\left| \int_e (Tg)(s)\mu(ds) \right| \leqslant \nu(e), \quad g \in L_1, \quad e \in \Sigma.$$

Следовательно, функция множества $\beta(e)=\int\limits_e (Tg)(s)\,\mu(ds)$ имеет полное изменение $v(\beta, e)\leqslant \nu(e)$. Таким образом, по лемме III.2.15, $\int\limits_e (Tg)(s)\,\mu(ds)=\nu(\beta, e)\leqslant \nu(e)$, это показывает, что

$$[2] \qquad \varkappa\,|(Tg)(\cdot)|\leqslant P_1^*\varkappa\,|g(\cdot)|,\quad g\in L_1.$$

Если h — неотрицательная измеримая функция и $h\leqslant f\in L_1\cap L_\infty$, то h также принадлежит и L_1 и L_∞. Таким образом, элемент, определяемый выражением вида $\sup\limits_{h\in A}|h(\cdot)|$, будет одним и тем же независимо от того, берется ли верхняя грань в полной структуре L_1 или в полной структуре L_∞ при единственном условии, что существует элемент f в $L_1\cap L_\infty$, для которого $|h(\cdot)|\leqslant f$ при всех h в A. Аналогично если $0\leqslant f\in L_1$, $\nu\in L_1^{**}$ и $0\leqslant\nu\leqslant\varkappa f$, то функция множеств ν абсолютно непрерывна относительно μ и, следовательно, принадлежит $\varkappa L_1$. Таким образом (см. IV.8.24), для множества A в L_1, для которого существует неотрицательная f в L_1, такая, что $|h(\cdot)|\leqslant f$ при $h\in A$, мы имеем $\varkappa\sup\limits_{h\in A}|h(\cdot)|=\sup\limits_{h\in A}\varkappa\,|h(\cdot)|$. Наконец, мы заметим, что ограниченное множество A в L_∞ и характеристическая функция χ_e множества $e\in\Sigma$ удовлетворяет соотношению $\sup\limits_{h\in A}\chi_e h=\chi_e\sup\limits_{h\in A}h$.

Используя замечания предыдущего абзаца и формулу [2], мы видим, что для $0\leqslant f\in L_1\cap L_\infty$ и $e\in\Sigma$, $\mu(e)<\infty$ выполнены соотношения

$$\begin{aligned}
\varkappa\chi_e Pf &= \varkappa\chi_e \sup_{|g(\cdot)|\leqslant f}|Tg(\cdot)| = \\
&= \varkappa \sup_{|g(\cdot)|\leqslant f}\chi_e\,|(Tg)(\cdot)| = \\
&= \sup_{|g(\cdot)|\leqslant f}\varkappa\,[\chi_e\,|(Tg)(\cdot)|] = \\
&= \sup_{|g(\cdot)|\leqslant f}\varkappa\,|(Tg(\cdot)|\leqslant \sup_{|g(\cdot)|\leqslant f}P_1^*\varkappa\,|g(\cdot)| = \\
&= P_1^*\varkappa f.
\end{aligned}$$

Таким образом, для каждого множества e в Σ, такого, что $\mu(e)<\infty$, мы имеем $\int\limits_S \chi_e(s)(Pf)(s)\,\mu(ds)\leqslant |P_1^*\varkappa f|$. Далее, из [1] видно, что $|P_1^*|=|P_1|_\infty\leqslant|T|_1$, и поэтому $\int\limits_S (Pf)(s)\,\mu(ds)\leqslant|T|_1\,|\varkappa f|=|T|_1\,|f|_1$ для всех неотрицательных функций f в $L_1\cap L_\infty$. Поскольку, как показано раньше, $|(Pf)(\cdot)|\leqslant P\,|f(\cdot)|$, мы имеем $\int\limits_S |(Pf)(s)|\,\mu(ds)\leqslant$ $\leqslant|T|_1\,|f|_1$ для всех f в $L_1\cap L_\infty$. Таким образом, $|P|_1\leqslant|T|_1$, и P

имеет единственное расширение до оператора (который мы тоже называем P), определенного на всем L_1.

По определению,

$$P|f(\cdot)| = \sup_{|g(\cdot)| \leqslant |f(\cdot)|} |(Tg)(\cdot)| \geqslant |(Tf)(\cdot)|, \quad f \in L_1 \cap L_\infty.$$

Так как $L_1 \cap L_\infty$ плотно в L_1 и $|P|_1$ по доказанному конечно, это неравенство выполнено для всех $f \in L_1$. По индукции вытекает, что $P^{n+1}|f(\cdot)| \geqslant P|(T^n f)(\cdot)| \geqslant |(T^{n+1}f)(\cdot)|$, ч. т. д.

5. Лемма. *Пусть (S, Σ, μ) — пространство с σ-конечной мерой, и пусть T — линейный оператор в L_1, $|T|_\infty \leqslant 1$ и $|T|_1 \leqslant 1$. Если $1 \leqslant p < \infty$ и $f \in L_p(S, \Sigma, \mu)$, то для почти всех s из S* $\sup\limits_{1 \leqslant n \leqslant \infty} |A(T, n)(f, s)| < \infty$.

Доказательство. Мы можем предполагать, что $f \geqslant 0$. Пусть a' — дополнение множества $a = \{s \mid f(s) \geqslant 1\}$. Так как $f \in L_p$, то $\mu(a) < \infty$, и, таким образом, f есть сумма суммируемой функции $f\chi_a$ и ограниченной функции $f\chi_{a'}$. Далее, так как $|T|_\infty \leqslant 1$, то $|A(n)g|_\infty \leqslant |g|_\infty$ для ограниченной функции g в L_p. Таким образом, в доказательстве леммы можно считать, что $f \in L_1$. Ввиду леммы 4 можно также предполагать, что оператор T положителен. Пусть

$$e_\infty = \{s \mid \sup_{1 \leqslant k} A(T, k)(f, s) = \infty\}.$$

Так как мера μ σ-конечна на S, достаточно доказать, что $\mu(ee_\infty) = 0$ для всех множеств e в Σ, таких, что $\mu(e) < \infty$. Пусть g — характеристическая функция множества ee_∞, где $\mu(e) < \infty$. Если $\alpha > 0$ и лемма 2 применяется к функции $f - \alpha g$, то

$$(*) \qquad \alpha\mu(ee_\infty c) \leqslant \int_S f(s)\mu(ds),$$

где $c = \{s \mid \sup\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} A(T, k)(f - \alpha g, s) \geqslant 0\}$. В то же время из неравенства $|A(T, k)|_\infty \leqslant 1$ вытекает, что $0 \leqslant A(T, k)\alpha g \leqslant \alpha$, и, таким образом, $c \supseteq e_n$, где $e_n = \{s \mid \sup\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} A(T, k)(f, s) \geqslant \alpha\}$. Поэтому неравенство (*) имеет следствием неравенство

$$\alpha\mu(ee_n) \leqslant \int_S f(s)\mu(ds), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

и так как $e_n \to e_\infty$, то $\alpha\mu(ee_\infty) \leqslant \int_S f(s)\mu(ds)$. Так как это неравенство выполнено при любом $\alpha > 0$, то $\mu(ee_\infty) = 0$, ч. т. д.

6. Теорема. (*Индивидуальная эргодическая теорема.*) *Пусть (S, Σ, μ) — пространство с положительной мерой и T — линей-*

ный оператор в $L_1(S, \Sigma, \mu)$, *такой, что* $|T|_\infty \leqslant 1$ и $|T|_1 \leqslant 1$. *Тогда для любого* p, $1 \leqslant p < \infty$, *и любой функции* f *в* $L_p(S, \Sigma, \mu)$ *предел*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} (T^m f)(s)$$

существует для почти всех s *в* S.

Доказательство. Так как функции $T^n f$, $n=0, 1, \ldots$, все обращаются в нуль на дополнении σ-конечного множества, мы можем считать, что мера в (S, Σ, μ) σ-конечна. Так как $|T|_\infty \leqslant 1$ и $|T|_1 \leqslant 1$, из теоремы Рисса о выпуклости следует, что $|T|_p \leqslant 1$. При $1 < p < \infty$ L_p рефлексивно (IV.8.2), и поэтому, согласно следствию 5.4, последовательность $A(T, n) f$ сходится в L_p для любой f в L_p. Из следствия 5.2 тогда вытекает, что векторы вида $h = f + (I - T) g$, где f, $g \in L_p$, $Tf = f$ и g ограничена, плотны в L_p. Для таких векторов h мы имеем $A(T, n) h = f + (I - T^n) g/n$, и, таким образом, для почти всех s в S

$$|A(T, n)(h, s) - f(s)| \leqslant 2|g|_\infty/n \to 0.$$

Это показывает, что $A(T, n)\, h$ сходится почти всюду для всех h из плотного в L_p множества, и, по лемме 5, $\sup |A(T, n)(h, s)| < \infty$ почти всюду для всех h в L_p. Таким образом, по теореме IV.11.2, последовательность $A(T, n) h$ сходится почти всюду для всех h в L_p. Так как $L_p \cap L_1$ плотно в L_1, мы можем применить лемму 5 и теорему IV.11.2 снова, чтобы убедиться в том, что последовательность $A(T, n) f$ сходится почти всюду для всех f в L_1, ч.т.д.

Из предыдущей теоремы и следствия 5.4 видно, что для $1 < p < \infty$ и $f \in L_p$ последовательность $\{A(n) f\}$ средних не только сходится в L_p, но также сходится почти всюду на S. Далее будет показано, что эта последовательность средних ограничена функцией из L_p. Доказательство основано на следующей лемме, утверждение которой содержит следующие обозначения:

$$A(n) = A(T, n), \quad f^*(s) = \sup |A(n)(f, s)|,$$
$$e^*(\alpha) = \{s \mid f^*(s) > \alpha\}, \quad e(\alpha) = \{s \mid |f(s)| > \alpha\}.$$

7. Лемма. *Пусть* T — *оператор в* L_1, $|T|_\infty \leqslant 1$, $|T|_1 \leqslant 1$, *и пусть* $1 \leqslant p < \infty$. *Тогда для любой функции* f *в* L_p *и любого положительного числа* α

$$\alpha\mu(e^*(2\alpha)) \leqslant \int_{e(\alpha)} |f(s)|\, \mu(ds).$$

Доказательство. Лемма будет сначала доказана в предположении, что $\mu(S) < \infty$. Если P — положительный оператор, связанный с T, как в лемме 4, то $e^*(\alpha) \subseteq \{s \mid \sup_{1 \leqslant n} A(P, n)(|f(\cdot)|, s) > \alpha\}$, откуда следует, что без ограничения общности мы можем считать T положительным оператором, а f — неотрицательной функцией в L_p. Пусть $g(s)=f(s)$, если $f(s)>\alpha$, и $g(s)=0$ в противном случае. Тогда $f\leqslant g+\alpha$, $f-2\alpha\leqslant g-\alpha$, и так как $|T|_\infty\leqslant 1$, то

$$A(n)f-2\alpha\leqslant A(n)(f-2\alpha)\leqslant A(n)(g-\alpha).$$

Это показывает, что $e^*(2\alpha)\subseteq B\subseteq C$, где

$$B=\{s\,|\sup_{1\leqslant n}A(n)(f-2\alpha,\ s)\geqslant 0\},\quad C=\{s\,|\sup_{1\leqslant n}A(n)(g-\alpha,\ s)\geqslant 0\}.$$

По лемме 2 $\int_C|g-\alpha|(s)\mu(ds)\geqslant 0$, и поэтому

$$a\mu(e^*(2\alpha))\leqslant\alpha\mu(C)\leqslant\int_C g(s)\mu(ds).$$

Если s — такая точка, что $g(s)\neq 0$, то $0<g(s)-\alpha=A(1)(g-\alpha,s)$ и, таким образом, $s\in C$. Это означает, что функция g обращается в нуль на дополнении C и, следовательно,

$$\alpha\mu(e^*(2\alpha))\leqslant\int_S g(s)\mu(ds)=\int_{e(\alpha)}f(s)\mu(ds).$$

Это доказывает лемму при дополнительном предположении, что $\mu(S)<\infty$. Пусть теперь $(S,\ \Sigma,\ \mu)$ — произвольное пространство с положительной мерой. Так как все функции $A(n)f$ обращаются в нуль на дополнении некоторого σ-конечного множества, мы можем считать, что мера в S σ-конечна. Пусть $\{S_n\}$ — возрастающая последовательность множеств, объединение которых есть S, и $\mu(S_n)<\infty$. Пусть $T_n=B_nTB_n$, где B_n — операция умножения на характеристическую функцию S_n. Пусть

$$e^*(m,\ \alpha)=\{s\,|\sup_{1\leqslant k\leqslant m}A(k)(f,\ s)>\alpha\},$$

и

$$e^*(n,\ m,\ \alpha)=\{s\,|\sup_{1\leqslant k\leqslant m}A(T_n,\ k)(f,\ s)>\alpha\}.$$

Тогда, по уже доказанному,

$$(*)\qquad \alpha\mu(e^*(n,\ m,\ 2\alpha))\leqslant\int_{S_ne(\alpha)}f(s)\mu(ds).$$

Так как $T_n\to T$ в сильной L_p-топологии, функция $\sup_{1\leqslant k\leqslant m}A(T_n,k)f$ стремится к $\sup_{1\leqslant k\leqslant m}A(k)f$ по норме L_p при $n\to\infty$. С другой стороны, так как $f\geqslant 0$ и так как T_n возрастает вместе с n, последовательность $\{\sup_{1\leqslant k\leqslant m}A(T_n,k)(f,s)\}$ возрастающая по n. Это показывает, что последовательность $\{e^*(n, m, \alpha)\}$ возрастает вместе с n и имеет предел $e^*(m,\alpha)$. Полагая $n \to \infty$ в неравенстве (*), получаем, таким образом, неравенство $\alpha\mu(e^*(m, 2\alpha)) \leqslant \int\limits_{e(\alpha)} f(s)\,\mu(ds)$, из которого желаемое неравенство получается при $m \to \infty$, ч. т. д.

8. Теорема. *Пусть T — оператор в L_1, $|T|_\infty \leqslant 1$ и $|T|_1 \leqslant 1$. Для каждой f в L_p положим*

$$f^*(s) = \sup_{1 \leqslant n} \left| \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} (T^m f)(s) \right|.$$

Тогда для $1 < p < \infty$

$$\int\limits_S f^*(s)^p \mu(ds) \leqslant \frac{2^p p}{p-1} \int\limits_S |f(s)|^p \mu(ds),$$

в то время как при $p = 1$ *и* $\mu(S) < \infty$

$$\int\limits_S f^*(s)\,\mu(ds) \leqslant 2 \left[\mu(S) + \int\limits_S |f(s)| \log^+ |f(s)|\,\mu(ds)\right].$$

Пояснение. Символ $\log^+ a$ означает для $a > 0$ наибольшее из чисел $\log a$ и 0.

Доказательство. Ввиду леммы 4 мы можем считать, что оператор T и функция f неотрицательны. Рассмотрим сначала случай $1 < p$, используя предыдущую лемму следующим образом:

$$\begin{aligned}
\int\limits_S f^*(s)^p \mu(ds) &= p \int\limits_S \left(\int\limits_0^{f^*(s)} a^{p-1}\,da \right) \mu(ds) = \\
&= p \int\limits_S \int\limits_0^\infty a^{p-1} \chi_{e^*(a)}(s)\,\mu(ds)\,da = \\
&= p \int\limits_0^\infty a^{p-1} \mu(e^*(a))\,da = \\
&\leqslant 2p \int\limits_0^\infty a^{p-2} \left\{ \int\limits_{e(a/2)} f(s)\,\mu(ds) \right\} da = \\
&= 2p \int\limits_0^\infty a^{p-2} \int\limits_S f(s)\,\chi_{e(a/2)}(s)\,\mu(ds)\,da = \\
&= 2p \int\limits_S f(s) \left\{ \int\limits_0^{2f(s)} a^{p-2}\,da \right\} \mu(ds) = \\
&= \frac{2^p p}{p-1} \int\limits_S f(s)^p \mu(ds).
\end{aligned}$$

Случай $p=1$ рассматривается аналогично следующим образом:

$$\int_S f^*(s)\,\mu(ds)=\int_S\left\{\int_0^{f^*(s)}da\right\}\mu(ds)=$$
$$=\int_S\int_0^\infty \chi_{e^*(a)}(s)\,\mu(ds)\,da=$$
$$=\int_0^\infty \mu(e^*(a))\,da\leqslant 2\mu(S)+\int_2^\infty \mu(e^*(a))\,da$$

и

$$\int_2^\infty \mu(e^*(a))\,da\leqslant 2\int_2^\infty a^{-1}\left\{\int_{e(a/2)} f(s)\,\mu(ds)\right\}da=$$
$$=2\int_1^\infty a^{-1}\left\{\int_{e(a)} f(s)\,\mu(ds)\right\}da=$$
$$=2\int_1^\infty\int_S a^{-1}f(s)\,\chi_{e(a)}(s)\,\mu(ds)\,da=$$
$$=2\int_S f(s)\left\{\int_1^{\max(1,\,f(s))} a^{-1}da\right\}\mu(ds)=$$
$$=2\int_S f(s)\log^+f(s)\,\mu(ds),\quad \text{ч. т. д.}$$

9. Теорема. *Пусть T_i, $i=1, \ldots, k$,— линейные операторы в L_1, $|T_i|_\infty\leqslant 1$ и $|T_i|_1\leqslant 1$, $i=1, \ldots, k$. Тогда для всех f в L_p при $p>1$ многократная последовательность*

$$(1)\qquad (n_1\cdots n_k)^{-1}\sum_{m_1=0}^{n_1-1}\cdots\sum_{m_k=0}^{n_k-1}(T_k^{m_k}\cdots T_1^{m_1}f)(s)$$

сходится (при $n_1, \ldots, n_k\to\infty$ независимо) как почти всюду на S, так и по норме L_p. Кроме того, эта многократная последовательность мажорируется функцией из L_p.

Доказательство. Пусть $V(n_1, \ldots, n_k)=A(T_k, n_k)\ldots A(T_1, n_1)$, так что $V(n_1, \ldots, n_k)(f, s)$ есть многократная последовательность (1). Так как $|T_i|_\infty\leqslant 1$ и $|T_i|_1\leqslant 1$, из теоремы Рисса о выпуклости (IV.10.11) вытекает, что $|T_i|_p\leqslant 1$, и, следовательно,

$$(2)\qquad |A(T_i, n_i)|\leqslant 1,\quad |V(n_1, \ldots, n_k)|\leqslant 1$$

(здесь и во всей оставшейся части доказательства норма без индекса обозначает L_p-норму). По следствиям 5.2 и 5.4, существуют такие проекционные операторы E_i, что

(3) $$\lim_n A(T_i, n)f = E_i f, \quad f \in L_p, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Из (2) и (3) немедленно вытекает, что

(4) $$\lim V(n_1, \ldots, n_k)f = E_k \ldots E_1 f, \ f \in L_p.$$

В самом деле, предположим, что этот факт установлен для $k-1$ операторов $T_2, \ldots, T_k$ и заметим, что

$$|A(T_k, n_k) \ldots A(T_1, n_1)f - E_k \ldots E_1 f| \leqslant$$
$$\leqslant |A(T_k, n_k) \ldots A(T_2, n_2)\{A(T_1, n_1) - E_1\}f| +$$
$$+ |\{A(T_k, n_k) \ldots A(T_2, n_2) - E_k \ldots E_2\}E_1 f| \leqslant$$
$$\leqslant |\{A(T_1, n_1) - E_1\}f| + |\{A(T_k, n_k) \ldots A(T_2, n_2) - E_k \ldots E_2\}E_1 f|$$

стремится к нулю по предположению индукции. По следствию 5.2, E_i проектирует L_p на многообразие $\mathfrak{N}_i$ тех f в L_p, для которых $T_i f = f$, а дополнительный проектор $E'_i = I - E_i$ проектирует L_p на замыкание многообразия $(I - T_i) L_p$. Таким образом, если через $\mathfrak{M}_i$ мы обозначим множество функций вида $(I - T_i)f$, где f ограничена, то

(5) $$\mathfrak{M}_i + \mathfrak{N}_i \text{ плотно в } L_p, \ 1 \leqslant i \leqslant k,$$

— факт, который нам позже понадобится. Пусть теперь $g = (I - T_1)f \in \mathfrak{M}_1$, $|f(s)| \leqslant K$. Тогда $A(T_1, n)(g, s) = n^{-1}[f(s) - T_1^n(f, s)]$, и, таким образом, $|V(n_1, \ldots, n_k)(g, s)| \leqslant 2K/n_1$ при почти всех s. Это показывает, что для почти всех s в S

(6) $$\lim V(n_1, \ldots, n_k)(g, s) = 0, \quad g \in \mathfrak{M}_1.$$

Для функции f в $\mathfrak{N}_1$ мы имеем $T_1(f, s) = f(s)$ для почти всех s в S, и таким образом, $A(T_1, n)(f, s) = f(s)$ для почти всех s и всех $n = 1, 2, \ldots$. Так как теорема верна при $k = 1$ (теорема 6), мы применим индукцию и предположим, что теорема доказана для случая $(k-1)$-го преобразования $T_2, \ldots, T_k$. Предположение индукции дает тогда для f из $\mathfrak{N}_1$ сходимость почти всюду многократной последовательности

$$V(n_1, \ldots, n_k)(f, s) = A(T_k, n_k) \ldots A(T_2, n_2)(f, s).$$

Этот факт вместе с (5) и (6) показывает, что последовательность $V(n_1, \ldots, n_k)(f, s)$ сходится почти всюду на S для любой f из множества, плотного в L_p. Далее будет показано, что для всех f из L_p последовательность (1) мажорируется функцией из L_p. Для доказательства этого мы сначала воспользуемся леммой 4, чтобы найти положительные операторы P_i, $i=1, \ldots, k$, $|P_i|_\infty \leqslant 1$, $|P_i|_1 \leqslant 1$, такие, что

$$|A(T_i, n)(f, \cdot)| \leqslant A(P_i, n)(|f(\cdot)|), \quad 1 \leqslant i \leqslant k, \ 1 \leqslant n.$$

Если $g(s)=|f(s)|$, то отсюда следует, что $|A(T_1, n_1)(f, s)| \leqslant \leqslant A(P_1, n_1)(g, s)$ для почти всех s в S и, следовательно, что

$$|V(n_1, \ldots, n_k)(f, s)| \leqslant A(P_k, n_k) \ldots A(P_1, n_1)(g, s).$$

Таким образом, при доказательстве того, что $V(n_1, \ldots, n_k)f$ мажорируется функцией из L_p мы можем предполагать, что $f \geqslant 0$ и что $T_i \geqslant 0$, $i=1, \ldots, k$. По теореме 8, существуют функции $f_1, \ldots, f_k$ в L_p, такие, что

$$\begin{gathered} A(T_1, n_1)f \leqslant f_1, \quad n_1 \geqslant 1, \\ A(T_2, n_2)A(T_1, n_1)f \leqslant A(T_2, n_2)f_1 \leqslant f_2, \ n_1, \ n_2 \geqslant 1, \\ A(T_k, n_k) \ldots A(T_1, n_1)f \leqslant f_k, \quad n_1, \ldots, n_k \geqslant 1; \end{gathered}$$

это доказывает, что многократная последовательность $V(n_1, \ldots, n_k)f$ мажорируется функцией из L_p. Мы можем применить теперь к доказательству сходимости почти всюду этой последовательности теорему IV.11.3. Пусть в этой теореме A_p — множество всех строк $a=[n_1, \ldots, n_k]$ из k целых чисел с $n_i \leqslant p$, $i=1, \ldots, k$, и пусть при $a=[n_1, \ldots, n_k] \in A_1$ оператор T_a теоремы IV.11.3 равен оператору $V(n_1, \ldots, n_k)$. Все предположения теоремы IV.11.3 выполнены, и поэтому мы заключаем, что многократная последовательность $V(n_1, \ldots, n_k)(f, s)$ сходится почти всюду на S для всех f из L_p, ч.т.д.

Предыдущая теорема неверна при $p=1$, но существует k-параметрический аналог леммы 5. Он помещен в конце следующего параграфа.

Теоремы о сходимости этого параграфа предполагают, что нормы оператора T удовлетворяют неравенствам $|T|_1 \leqslant 1$ и $|T|_\infty \leqslant 1$. В некоторых случаях, однако, они могут применяться для доказательства сходимости почти всюду средних $A(n)(f, s)$, даже если $|T|_1 > 1$ и $|A(n)|_1 \to \infty$. Мы закончим этот параграф двумя такими теоремами, доказательства которых используют следующие леммы.

10. Лемма. *Пусть (S, Σ, μ) — пространство с конечной положительной мерой. Ограниченная последовательность $\{\mu_n\}$ в B-пространстве абсолютно непрерывных относительно μ вещественных или комплексных аддитивных функций множеств на Σ слабо компактна при условии, что*

$$\lim_{\mu(e)\to 0} \overline{\lim_{n\to\infty}} |\mu_n(e)| = 0.$$

Доказательство. σ-алгебра Σ является полным метрическим пространством $\Sigma(\mu)$ с функцией расстояния $\varrho(a, b) = \mu(a \Delta b)$, и функции μ_n непрерывны на $\Sigma(\mu)$ (см. § III.7). Таким образом, при $\varepsilon > 0$ множества

$$C_k = \{e \mid e \in \Sigma(\mu), \quad |\mu_n(e)| \leqslant \varepsilon, \; n \geqslant k\}$$

замкнуты в $\Sigma(\mu)$ и, по предположению, их объединение содержит сферу в $\Sigma(\mu)$. Таким образом, по теореме Бэра о категориях (I.6.7, I.6.9) существуют множество $a \in \Sigma$, число $r > 0$ и целое число k, такие, что $e \in C_k$, если $\mu(a \Delta e) < r$. Возьмем множество b в Σ, такое, что $\mu(b) < r$, и пусть $b_1 = a + b$, $b_2 = a - b$. Тогда $b = b_1 - b_2$, $\mu(a \Delta b_1) < r$ и $\mu(a \Delta b_2) < r$. Таким образом, $b_1, b_2 \in C_k$ и, следовательно, $|\mu_n(b)| \leqslant 2\varepsilon$ для всех $n \geqslant k$. Существует такое положительное число $r_1 \leqslant r$, что $|\mu_n(b)| \leqslant \varepsilon$ при $1 \leqslant n \leqslant k$ при условии, что $\mu(b) < r_1$, а это доказывает, что функции μ_n, $n = 1, 2, \ldots$, равномерно абсолютно непрерывны относительно μ. Заключение леммы следует теперь из теоремы IV.9.1.

11. Лемма. *Положительное линейное отображение P в L_1 непрерывно.*

Доказательство. Если это не так, то существуют положительные элементы f_n в L_1, такие, что $|f_n| = 1$ и $|Pf_n| > n^2$. Пусть $f = \sum f_n/n^2$; тогда $|Pf| \geqslant \left|P \sum_1^m f_n/n^2\right| = \sum_1^m |Pf_n|/n^2 \geqslant m$ при всех m, что приводит к противоречию, ч. т. д.

Две заключительные теоремы возвращают нас к типу операторов, возникающих в классической статистической механике. Они относятся к пространству (S, Σ, μ) с конечной положительной мерой и отображению $\varphi: S \to S$. Мы напомним (лемма 5.6), что если $\varphi^{-1}\Sigma \subseteq \Sigma$ (т. е. $\varphi^{-1}e \in \Sigma$ для $e \in \Sigma$) и если $\mu(\varphi^{-1}e) = 0$ при $\mu(e) = 0$, то отображение $T: f \to f(\varphi)$ есть непрерывное линейное отображение в пространстве $M(S)$ всех μ-измеримых функций.

12. Теорема. *Пусть (S, Σ, μ) — пространство с конечной положительной мерой, и пусть φ — отображение S в себя со свойствами*

(1) $$\varphi^{-1}\Sigma \subseteq \Sigma \text{ и } \mu(\varphi^{-1}e) = 0, \text{ если } \mu(e) = 0;$$

(2) $$\lim_{\mu(e)\to 0} \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \mu(\varphi^{-m}e) = 0.$$

Тогда для любой ограниченной измеримой функции f на S предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} f(\varphi^m s)$$

существует при почти всех s в S.

Доказательство. Мы применим лемму 10 к функциям множеств

$$\mu_n(e)=\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}\mu(\varphi^{-m}e),\quad e\in\Sigma,\ n\geqslant 1.$$

По лемме III.4.13, эти функции множеств лежат в B-пространстве $ca(\Sigma, \mu)$ абсолютно непрерывных относительно μ аддитивных функций множеств на Σ. Так как $|\mu_n|\leqslant|\mu|$, из леммы 10 и следствия 5.3 вытекает, что предел $m=\lim\mu_n$ существует в $ca(\Sigma, \mu)$. По следствию 5.2, $m(\varphi^{-1}e)=m(e)$, так что отображение $T: f(\cdot)\to f(\varphi(\cdot))$ как оператор в пространстве $L_1(S, \Sigma, m)$ имеет норму $|T|_1=1$ (лемма 5.7). Пусть теперь f — ограниченная μ-измеримая функция на S. Тогда f m-измерима, m-интегрируема и, по теореме 6, предел

$$g(s)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}f(\varphi^m s)$$

существует для почти всех относительно m точек в S. (Следует заметить, что требование ограниченности f используется только для того, чтобы обеспечить ее m-интегрируемость. Другими словами, доказательство устанавливает существование предела $g(s)$ для почти всех относительно μ точек s в S при условии, что f m-интегрируема.) Пусть $e_0=\{s\,|\,(dm/d\mu)(s)\neq 0\}$, так что мера μ подмножества e_0 равна нулю тогда и только тогда, когда равна нулю его мера m. Таким образом, предел $g(s)$ существует для почти всех относительно μ точек в e_0, и доказательство существования будет завершено, если показать, что для почти всех относительно μ точек s в e_0' мы имеем $\varphi^m s\in e_0$ при всех достаточно больших m. Чтобы убедиться в этом, примем за b подмножество e_0', которое остается в e_0' при всех итерациях φ, т. е. $\varphi^m b\subseteq e_0'$ при $m\geqslant 0$. Тогда $b\subseteq\varphi^{-m}e_0'$, и $\mu(b)\leqslant\mu_n(e_0')\to m(e_0')=0$. Таким образом, почти все относительно μ точки в e_0' отображаются некоторой итерацией φ в e_0. Остается показать, что для почти всех относительно μ точек s в e_0 их образ φs также лежит в e_0; отсюда следовало бы, что почти все относительно μ точки в e_0' в конце концов становятся и остаются точками e_0. Пусть $a\subseteq e_0$ и $\varphi a\subseteq e_0'$. Тогда $a\subseteq\varphi^{-1}e_0'$ и, таким образом, $m(a)\leqslant m(\varphi^{-1}e_0')=m(e_0')=0$. Так как $a\subseteq e_0$, то и $\mu(a)=0$. Таким образом, $g(s)$ существует для почти всех относительно μ точек в S, ч. т. д.

Естественно спросить, когда предыдущая теорема справедлива для всех μ-интегрируемых функций f. Ответ дается следующей теоремой К. Рыль-Нарджевского [1; I].

13. Теорема. *Пусть (S, Σ, μ) — пространство с конечной мерой и φ — отображение S в себя, причем $\varphi^{-1}\Sigma\subseteq\Sigma$ и $\mu(\varphi^{-1}e)=0$ для всех нуль-множеств e. Для того чтобы для каждой функции*

$f \in L_1(S, \Sigma, \mu)$ при почти всех $s \in S$ существовал предел

$$(1) \qquad g(s) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} f(\varphi^m s)$$

и $g(s)$ принадлежало $L_1(S, \Sigma, \mu)$, необходимо и достаточно, чтобы при некоторой постоянной K

$$(2) \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \mu(\varphi^{-m} e) \leqslant K\mu(e), \quad e \in \Sigma.$$

Доказательство. Если предел g существует и если $g \in L_1$, то, по лемме 11, отображение $f \to g$ непрерывно и, таким образом, существует постоянная K, такая, что $|g|_1 \leqslant K|f|_1$. Пусть f — характеристическая функция множества e в Σ; тогда элементы последовательности (1) не превосходят единицы и последовательность сходится по норме L_1. Таким образом,

$$\int_S \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} f(\varphi^m s)\, \mu(ds) = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \mu(\varphi^{-m} e) \to |g| \leqslant K|f| = K\mu(e),$$

что доказывает (2). Обратно, если (2) выполнено, то функция множеств m из доказательства предыдущей теоремы удовлетворяет неравенству $m(e) \leqslant K\mu(e)$ и, таким образом, μ-интегрируемая функция f также m-интегрируема. При доказательстве предыдущей теоремы было отмечено, что предел $g(s)$ существует для почти всех относительно μ точек s, и, следовательно, остается только показать, что функция g интегрируема. Аналогично в предыдущем доказательстве отмечалось, что $m(\varphi^{-1}e) = m(e)$ для множеств e из Σ, и, таким образом, статистическая эргодическая теорема (5.9) показывает, что $g \in L_1(S, \Sigma, m)$. Так как $g\varphi = g$, для множеств вида $e = \{s \mid a < g(s) \leqslant b\}$ выполнено соотношение $\varphi^{-1}e = e$. Таким образом, для таких множеств $m(e) = \mu(e)$; это доказывает, что $\int g(s)\, m(ds) = \int g(s)\, \mu(ds$.

7. Эргодическая теория непрерывных потоков

В параграфе 4 было показано, как эргодическая гипотеза в классической статистической механике приводит к вопросам, связанным со средними однопараметрической полугруппы унитарных операторов частного вида. В этом параграфе мы изучим такого рода вопросы и покажем, как они могут быть решены путем сведения к изучению средних от итераций одного оператора. Нет необходимости ограничивать рассмотрение только полугруппами, аналогичными возникающим в классической статистической механике, так как результаты, излагаемые ниже, справедливы в случае, имеющем такую же степень общности, какой обладает дискретная полугруппа $\{T^n, 0 \leqslant n\}$, рассмотренная в предыдущем параграфе.

Основным понятием, проходящим через все наше рассмотрение, является *однопараметрическая полугруппа ограниченных линейных операторов в вещественном или комплексном B-пространстве.* Мы напомним, что такая полугруппа есть множество $\{T(t), 0 \leqslant t\}$ ограниченных линейных операторов в B-пространстве $\mathfrak{X}$, для которого

$$\text{(I)} \qquad T(0) = I, \quad T(t+u) = T(t)T(u), \quad 0 \leqslant t, \; u.$$

Чтобы имели смысл средние значения

$$\text{(II)} \qquad A(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha T(t)\,dt, \quad 0 \leqslant \alpha,$$

которыми в основном мы будем заниматься в этом параграфе, желательно дополнить алгебраическое условие (I) условием, относящимся к аналитической зависимости полугруппы от параметра t. Мы напомним, что полугруппа $\{T(t), 0 \leqslant t\}$ называется *сильно непрерывной*, если она непрерывна по t в сильной операторной топологии, т. е. если $\lim\limits_{t \to u} |T(t)x - T(u)x| = 0$ для всех x в $\mathfrak{X}$ и $u \geqslant 0$. Говорят, что полугруппа *сильно измерима*, если при всех x в $\mathfrak{X}$ функция $T(\cdot)x$ измерима относительно меры Лебега на бесконечном интервале $0 \leqslant t$. Было отмечено в лемме 1.3, что сильно измеримая полугруппа сильно непрерывна всюду, кроме, быть может, начала координат $t = 0$. С этими понятиями связано понятие сильной интегрируемости. Говорят, что полугруппа *сильно интегрируема на каждом конечном интервале*, если при всех x в $\mathfrak{X}$ функция $T(\cdot)x$ интегрируема относительно меры Лебега на каждом конечном интервале $0 \leqslant t \leqslant \alpha$. Если полугруппа сильно интегрируема на каждом конечном интервале, мы можем для всех $\alpha \geqslant 0$ определить ограниченный линейный оператор $A(\alpha)$, называемый *средним* полугруппы $\{T(t), 0 \leqslant t\}$ *на интервале* $0 \leqslant t \leqslant \alpha$. Оператор $A(\alpha)$ определяется при $\alpha = 0$ как $A(0) = I$, а при $\alpha > 0$ — равенством $A(\alpha)x = \alpha^{-1} \int_0^\alpha T(t)x\,dt$. Чтобы убедиться, что $A(\alpha)$ — ограниченный оператор, мы заметим сначала, что отображение $x \to T(\cdot)x$ пространства $\mathfrak{X}$ в пространство L_1 $\mathfrak{X}$-значных измеримых по Лебегу функций на $[0, \alpha]$ замкнуто: действительно, если $x_n \to x$ и $T(\cdot)x_n \to f$ в L_1, то для некоторой подпоследовательности $\{x_{n_i}\}$ $T(t)x_{n_i} \to f(t)$ для почти всех t в $[0, \alpha]$. Так как $T(t)x_n \to T(t)x$ при всех t, то $T(t)x = f(t)$ при почти всех t; это доказывает, что отображение $x \to T(\cdot)x$ замкнуто.

и, таким образом (II.2.4), непрерывно. Отсюда немедленно следует, что $A(\alpha)$ — непрерывный линейный оператор в пространстве $\mathfrak{X}$. Именно в этом смысле и определен интеграл в равенстве (II).

Такое понятие среднего $A(\alpha)$ достаточно для формулировки некоторых результатов, относящихся к сильным пределам вида $\lim\limits_{\alpha\to\infty} A(\alpha)x$. В большей части параграфа, однако, B-пространство $\mathfrak{X}$ есть пространство $L_p = L_p(S, \Sigma, \mu)$, где (S, Σ, μ) — пространство с положительной мерой, и мы будем иметь дело со сходимостью почти всюду и с ограниченностью почти всюду средних $A(\alpha)f$ для функции f в L_p. Так как точка $f_\alpha = A(\alpha)f$ в L_p есть класс эквивалентных функций и две функции f_α и g_α представляют одну и ту же точку, если $f_\alpha(s) = g_\alpha(s)$ всюду, кроме множества E_α нулевой меры μ, которое может меняться вместе с α, крайне необходимо определить более точно, что должно пониматься под средними $A(\alpha)(f, s)$ функции f в точке s из S. Чтобы дать такое определение, мы предположим, что полугруппа $\{T(t), 0 \leqslant t\}$ сильно интегрируема на каждом конечном интервале и что она действует в L_p. Тогда, по лемме 1.3, для любого f в L_p множество всех векторов $T(t)f$, $t \geqslant 0$, есть сепарабельное подмножество в L_p, и, следовательно, по лемме III.8.5, эти векторы все обращаются в нуль на дополнении σ-конечного подмножества S. Таким образом, при определении среднего $A(\alpha)(f, s)$ мы можем предполагать, что мера в пространстве (S, Σ, μ) σ-конечна. Тогда, по теореме III.11.17, для каждого f в L_p существует числовое представление $T(t)(f, s)$ векторов $T(t)f$, которое измеримо по $[t, s]$ (т. е. измеримо относительно произведения меры Лебега и меры μ), и такое измеримое представление единственно всюду, кроме множества точек $[t, s]$, мера-произведение которых равна нулю. Теорема III.11.17 показывает также, что существует множество меры нуль $E(f)$, которое может зависеть от f, но которое не зависит от t и таково, что $T(\cdot)(f, s)$ интегрируема на каждом конечном t-интервале при всех $s \notin E(f)$. Кроме того, по теореме III.11.17, при всех $\alpha > 0$ интеграл

$$\text{(III)} \qquad A(\alpha)(f, s) = \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha T(t)(f, s)\,dt, \quad 0 < \alpha, \quad s \notin E(f),$$

есть числовое представление вектора $A(\alpha)f$ в L_p. Если бы мы начали с другого $[t, s]$-измеримого представления $K(t, s)$ векторов $T(t)f$, то, так как для почти всех s, $K(t, s) = T(t)(f, s)$ при почти всех t, видно, что при почти всех s имеет место равенство $\alpha^{-1}\int_0^\alpha K(t, s)\,dt = A(\alpha)(f, s)$ для всех α. Таким образом, для почти всех s в S среднее $A(\alpha)(f, s)$ однозначно определено равенством (III) для *всех* положительных значений α и, кроме того, дает $[\alpha, s]$-измеримое числовое представление вектора $A(\alpha)f$, определенного в равенстве (II).

Это однозначно определенное среднее $A(\alpha)(f, s)$ есть не только измеримая функция переменных (α, s), но для всех s, не принадлежащих нулевому множеству $E(f)$, оно непрерывно по α в интервале $0<\alpha<\infty$. Эта непрерывность по α показывает, что для почти всех $s\in S$ число $f^*(s)$, определяемое равенством

$$\text{(IV)} \qquad f^*(s)=\sup_{0<\alpha<\infty}|A(\alpha)(f, s)|,$$

равно $\sup_{\alpha\in R}|A(\alpha)(f, s)|$, где R — счетное множество положительных рациональных чисел. Ввиду теоремы IV.11.6 отсюда следует, что f^* является также точной верхней гранью множества $\{|A(\alpha)(f, \cdot)|, 0<\alpha\}$, если оно рассматривается как множество элементов в структуре вещественных μ-измеримых функций. Таким образом, если $\{|A(\alpha)(f, \cdot)|, 0<\alpha\}$ — ограниченное множество в этой структуре, то его верхняя грань

$$\text{(V)} \qquad f^*=\sup_{0<\alpha}|A(\alpha)(f, \cdot)|,$$

взятая в этой структуре, представляется числовой функцией (IV), так что не может возникнуть недоразумений в связи с понятием точной верхней грани. Аналогичные замечания следует сделать и в случае, рассматриваемом в теореме 10, где изучаются средние от произведения k различных полугрупп.

Мы продолжаем, когда это удобно, использовать обозначение $|U|_p$, которое было введено в начале предыдущего параграфа, для L_p-нормы оператора U. Напомним, что $|U|_p=\sup|Uf|_p$, где f пробегает все элементы в области определения U, такие, что $|f|_p\leqslant 1$. Мы начнем с рассмотрения сильной сходимости средних $A(\alpha)$ при $\alpha\to\infty$; в этом случае нет необходимости накладывать ограничения на B-пространство, в котором действует полугруппа.

1. Теорема. *Пусть $A(\alpha)$, $\alpha\geqslant 0$, — среднее на интервале $[0, \alpha]$ однопараметрической полугруппы $\{T(t), 0\leqslant t\}$, которая предполагается сильно интегрируемой на каждом конечном интервале. Предположим также, что*

$$\text{(1)} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{T(n)}{n}x=0, \qquad x\in\mathfrak{X};$$

$$\text{(2)} \qquad |A(\alpha)|\leqslant K, \qquad 0\leqslant\alpha:$$

(3) *для всех x из фундаментального подмножества пространства $\mathfrak{X}$ множество $\{A(\alpha)x, 0<\alpha\}$ слабо компактно.*

Тогда средние $A(\alpha)$ сходятся при $\alpha\to\infty$ в сильной операторной топологии.

Доказательство. Доказательство будет основано на следующем тождестве, которое позволит свести эту теорему к уже рассмотренному дискретному случаю. Пусть $n=[\alpha]$, так что $\alpha=n+r$, $0\leqslant r<1$. Тогда при $\alpha\geqslant 1$

$$A(\alpha)=\frac{1}{\alpha}\int_0^n T(t)\,dt+\frac{1}{\alpha}\int_n^{n+r} T(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{\alpha}\sum_{m=0}^{n-1}\int_m^{m+1} T(t)\,dt+\frac{1}{\alpha}\int_n^{n+r} T(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{\alpha}\sum_{m=0}^{n-1}\int_0^1 T(t+m)\,dt+\frac{1}{\alpha}\int_0^r T(t+n)\,dt,$$

так что

$$\text{(VI)}\qquad A(\alpha)=\frac{n}{\alpha}\left[\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} T(m)A(1)+\frac{T(n)}{n}rA(r)\right].$$

При фиксированном x $rA(r)x$ непрерывна по r и, таким образом, множество всех векторов $rA(r)x$, таких, что $0\leqslant r\leqslant 1$, компактно. Из предположения (1) и леммы IV.5.4 следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{T(n)}{n}rA(r)x=0$$

равномерно на $0\leqslant r\leqslant 1$, и, таким образом, предположение (3) и тождество (VI) показывают, что последовательность $\left\{n^{-1}\sum_{m=0}^{n-1} T(m)x\right\}$ слабо компактна для всех x из множества, фундаментального в замыкании области значений оператора $A(1)$. Поскольку $T(m)=T^m(1)$, теорему 4.1 можно применить к оператору $T(1)$ в пространстве $\overline{A(1)\mathfrak{X}}$, что дает сильную сходимость $A(\alpha)$, ч. т. д.

2. Следствие. *В предположениях теоремы предел* $Ex=\lim_{\alpha} A(\alpha)$ *проектирует* $\mathfrak{X}$ *на многообразие* $\{x\,|\,T(t)x=x,\ 0\leqslant t\}$ *неподвижных точек полугруппы, а дополнительный проектор* $E'=I-E$ *проектирует* $\mathfrak{X}$ *на замкнутое линейное многообразие, определяемое областями значений всех операторов* $I-T(t)$, $t\geqslant 0$.

Доказательство. Ясно, что $Ex=x$, если x — неподвижная точка. Далее, тождество

$$T(u)A(\alpha)=\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha T(t+u)\,dt =$$

$$=\frac{1}{\alpha}\left[\int_0^\alpha T(t)\,dt+\int_\alpha^{u+\alpha} T(t)\,dt-\int_0^u T(t)\,dt\right]$$

показывает, что $|(T(u)-I)A(\alpha)|\leqslant 2u\alpha^{-1}$, откуда следует, что $T(u)E=E$. Таким образом, все x из пространства значений E суть неподвижные точки полугруппы. Так как $E'(T(u)-I)=$ $=T(u)-I$, то область значений оператора E' содержит объединение областей значений всех операторов $T(u)-I$. Если x^* — функционал, обращающийся в нуль на областях значений всех операторов $T(u)-I$, то $x^*=x^*T(u)=x^*A(u)=x^*E$, и, таким образом, x^* обращается в нуль на области значений E'. Доказываемое утверждение вытекает теперь из следствия II.3.13, ч. т. д.

3. Следствие. *В рефлексивном пространстве средние $A(\alpha)$ сильно сходятся, если они ограничены и если $T(n)/n$ стремится сильно к нулю.*

Доказательство. Это утверждение следует из теоремы 1 и теоремы II.3.28, ч. т. д.

4. Следствие. *Пусть (S, Σ, μ) — пространство с конечной положительной мерой и $\{T(t),\ 0\leqslant t\}$ — полугруппа операторов в $L_1(S, \Sigma, \mu)$, сильно интегрируемая на каждом конечном интервале. Предположим, что при некоторой постоянной K*

$$|A(\alpha)|_1\leqslant K,\quad |T(t)|_\infty\leqslant K,\quad 0<\alpha,\ t,$$

и что $T(n)/n$ сходится сильно к нулю в $L_1(S, \Sigma, \mu)$. Тогда средние сходятся сильно в $L_1(S, \Sigma, \mu)$.

Доказательство. Если $f\in L_\infty(S, \Sigma, \mu)$, то для всех α и почти всех s $|A(\alpha)(f, s)|\leqslant K|f|_\infty$, а отсюда следует (IV.8.9), что множество $\{A(\alpha)f,\ 0\leqslant\alpha\}$ слабо компактно в $L_1(S, \Sigma, \mu)$. Доказываемое утверждение вытекает теперь из теоремы 1, ч. т. д.

Оставшаяся часть параграфа будет посвящена исключительно тому случаю, когда полугруппа действует в пространстве $L_p=L_p(S, \Sigma, \mu)$. Основные предположения в следующих теоремах состоят в том, что полугруппа $\{T(t),\ 0\leqslant t\}$ есть сильно измеримая полугруппа в L_1, причем $|T(t)|_1\leqslant 1$, $|T(t)|_\infty\leqslant 1$. Из этих предположений немедленно вытекают два вывода, которыми мы будем впредь пользоваться без более точных пояснений. Первый из них: $|T(t)|_p \leqslant 1$ при всех $p \geqslant 1$. Это следует из теоремы Рисса о выпуклости (VI.10.11). Таким образом, при всех $p \geqslant 1$ полугруппа $\{T(t),\ 0 \leqslant t\}$ есть полугруппа ограниченных линейных операторов в $L_p = L_p(S, \Sigma, \mu)$. Второе следствие из сделанных предположений, которое мы хотели бы отметить, состоит в том, что как полугруппа операторов в L_p, $1 \leqslant p < \infty$, $\{T(t),\ 0 \leqslant t\}$ сильно интегрируема на каждом конечном интервале, и, таким образом, средние $A(\alpha)$ определены при $0 \leqslant \alpha < \infty$ как линейные операторы в L_p и имеют нормы $|A(\alpha)|_p \leqslant 1$. Чтобы убедиться в этом, положим $f \in L_1 \cap L_p$, так что $T(t)(f, s)$ $[t, s]$ — измерима и $|T(t)f|_p \leqslant |f|_p$. Из леммы III.11.16 вытекает, что L_p-значная функция $T(\cdot)f$ измерима. Так как $1 \leqslant p < \infty$, то $L_1 \cap L_p$ плотно в L_p, и, таким образом, полугруппа сильно измерима, если она рассматривается как действующая в L_p. Так как $|T(t)|_p \leqslant 1$, она также сильно интегрируема на каждом конечном интервале и, следовательно, $A(\alpha)$ — ограниченный оператор в L_p и $|A(\alpha)|_p \leqslant 1$. В дальнейшем обозначение L_p будет всегда использоваться для пространства $L_p(S, \Sigma, \mu)$.

5. Теорема. *Если $\{T(t),\ 0 \leqslant t\}$ — сильно измеримая полугруппа в L_1, причем $|T(t)|_1 \leqslant 1$, $|T(t)|_\infty \leqslant 1$, то для всех f в L_p при $1 \leqslant p < \infty$ средние $A(\alpha)(f, s)$ сходятся почти всюду при $\alpha \to \infty$.*

Доказательство. Пусть $1 \leqslant p < \infty$, $f \in L_p$, и пусть $g(s) = \int_0^1 |T(t)(f, s)|\,dt$. По теореме III.11.17, число $g(s)$ конечно для всех s, не принадлежащих множеству $E(f)$ нулевой меры, и для таких s мы имеем $|rA(r)(f, s)| \leqslant g(s)$ при всех r в интервале $0 \leqslant r \leqslant 1$. Кроме того, из неравенства

$$|g|_p^p = \int_S ds \left[\int_0^1 |T(t)(f, s)|\,dt\right]^p \leqslant \int_S ds \int_0^1 |T(t)(f, s)|^p\,dt =$$

$$= \int_0^1 |T(t)f|_p^p\,dt \leqslant |f|_p^p,$$

вытекает, что $g \in L_p$. По лемме 6.4, существует положительный оператор P в L_1, такой, что $|P_1| \leqslant 1$, $|P|_\infty \leqslant 1$ и $|T^n(f, \cdot)| \leqslant \leqslant P^n(|f(\cdot)|, \cdot)$, $n = 1, 2, \ldots$. По теореме Рисса о выпуклости, $|P|_p \leqslant 1$, а так как $P^n = \sum_0^n P^m - \sum_0^{n-1} P^m$, то из теоремы 5.5 видно, что

$$\left|\frac{T^n}{n} rA(r)(f, s)\right| \leqslant \frac{P^n}{n}(g, s) \to 0$$

почти всюду на S и равномерно на интервале $0 \leqslant r \leqslant 1$. Доказываемое утверждение теперь следует из тождества (VI) и теоремы 5.5, ч. т. д.

6. Лемма. *Пусть* (S, Σ, μ) — *пространство с положительной мерой, и пусть при* $t > 0$ *в* L_1 *определен оператор* $T(t)$, *причем* $|T(t)|_1 \leqslant 1$ *и* $|T(t)|_\infty \leqslant 1$. *Предположим, что либо* $\{T(t), 0<t\}$ *есть сильно измеримая полугруппа в* L_1, *либо операторы* $T(t)$ *положительны, сильно непрерывны по* t *и удовлетворяют неравенству* $T(t)T(v) \geqslant T(t+v)$. *Пусть* $1 \leqslant p < \infty$, *и пусть для всех* u *из множества* U *определен такой элемент* $f_u \in L_p$, *что структурная верхняя грань* $f = \sup\limits_{u \in U} |f_u(\cdot)|$ *также принадлежит* L_p. *Пусть для* $\alpha > 0$ $e(\alpha) = \{s \mid f(s) > \alpha\}$ *и* $e^*(\alpha) = \{s \mid f^*(s) > \alpha\}$, *где*

$$f^* = \sup_{u \in U} \sup_{0<\alpha} |A(\alpha)(f_u, \cdot)|$$

и $A(\alpha) = \alpha^{-1} \int\limits_0^\alpha T(t)\, dt$. *Тогда*

$$\alpha\mu(e^*(2\alpha)) \leqslant \int\limits_{e(\alpha)} f(s)\mu(ds), \quad \alpha > 0.$$

Доказательство. По теореме III.11.17, для каждого $u \in U$ найдется множество $E(u)$ нулевой меры, для которого средние $A(\alpha)(f_u, s)$ существуют при всех неотрицательных α, всех $u \in U$ и всех s, не принадлежащих множеству $E(u)$. Согласно лемме 1.3, оператор $T(t)$ сильно непрерывен по t в каждой точке $t > 0$, и отсюда, в силу неравенства $|T(t)|_p \leqslant 1$, вытекает, что для всех α из множества R неотрицательных рациональных чисел

$$A(\alpha) f_u = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\alpha n!} \sum_{m=0}^{\alpha n!-1} T\left(\frac{m}{n!}\right) f_u, \quad u \in U, \quad \alpha \in R.$$

Используя следствие III.6.13, теорему III.11.17 и канторовский диагональный процесс, мы можем найти для всех $u \in U$ последовательность $\{n_i\}$, зависящую от u, такую, что

$$A(\alpha)(f_u, s) = \lim_{i \to \infty} \frac{1}{\alpha n_i!} \sum_{m=0}^{\alpha n_i!-1} T\left(\frac{m}{n_i!}\right)(f_u, s)$$

для всех $\alpha \in R$ и всех s, не принадлежащих множеству меры нуль $E_1(u) \supseteq E(u)$. Для $u \in U$ и $s \notin E_1(u)$ положим

$$f_n^*(u, s) = \sup_{0<k<\infty} \left| \frac{1}{k} \sum_{m=0}^{k-1} T\left(\frac{m}{n!}\right)(f_u, s) \right|,$$

так что для $u \in U$, $\alpha \in R$, $s \notin E_1(u)$ и $\varepsilon > 0$ найдется целое число $N(u, \alpha, s, \varepsilon)$, такое, что

$$f_n^*(u, s) \geqslant |A(\alpha)(f_u, s)| - \varepsilon, \quad n \geqslant N(u, \alpha, s, \varepsilon)$$

и, следовательно,

$$\varliminf_{n\to\infty} f_n^*(u, s) \geqslant |A(\alpha)(f_u, s)| \qquad u \in U, \quad \alpha \in R, \quad s \notin E_1(u).$$

Далее, если $s \notin E_1(u)$, то $s \notin E(u)$, и так как для таких s функция $A(\alpha)(f_u, s)$ непрерывна по α на интервале $0 < \alpha < \infty$, то

$$\sup_{0<\alpha<\infty} |A(\alpha)(f_u, s)| = \sup_{\alpha \in R} |A(\alpha)(f_u, s)|$$

и, таким образом,

$$\varliminf_{n\to\infty} f_n^*(u, s) \geqslant \sup_{0<\alpha<\infty} |A(\alpha)(f_n, s)|, \quad u \in U, \quad s \notin E_1(u).$$

Пусть

$$f^*(u, s) = \sup_{0<\alpha<\infty} |A(\alpha)(f_u, s)|,$$

так что

$$f^* = \sup_u f^*(u, \cdot)$$

и для всех $u \in U$

$$\varliminf_{n\to\infty} f_n^*(u, s) \geqslant f^*(u, s)$$

для почти всех $s \in S$. Пусть теперь $P(n)$ — положительный оператор, связанный с $T(1/n!)$, как в лемме 6.4, так что

$$\left| \frac{1}{k} \sum_{m=0}^{k-1} T\left(\frac{m}{n!}\right)(f_u, \cdot) \right| \leqslant \frac{1}{k} \sum_{m=0}^{k-1} P(n)^m f, \quad u \in U, \quad 1 \leqslant k.$$

Пусть

$$f_n^* = \sup_k \frac{1}{k} \sum_{m=0}^{k-1} P(n)^m f,$$

так что $f_n^* \geqslant f_n^*(u, \cdot)$ для всех $u \in U$, и, следовательно,

$$\varliminf_{n\to\infty} f_n^* \geqslant f^*(u, \cdot), \quad u \in U.$$

Отсюда следует, что

$$(*) \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}} f_n^* \geqslant \sup_u f^*(u, \cdot) = f^*.$$

Таким образом, если $e_n^*(\alpha) = \{s \mid f_n^*(s) > \alpha\}$, то $e^*(\alpha) \subseteq \underline{\lim}_n e_n^*(\alpha)$. Лемма 6.7 и лемма Фату (III.6.19) показывают, что

$$\alpha\mu(e^*(2\alpha)) \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} \alpha\mu(e_n^*(2\alpha)) \leqslant \int_{e(\alpha)} f(s)\mu(ds), \text{ ч. т. д.}$$

Аналогично неравенство $\underline{\lim}_{n\to\infty} f_n^* \geqslant f^*$ вместе с леммой Фату и теоремой 6.8 показывают, что

$$\int_S f^*(s)^p \mu(ds) \leqslant \int_S \underline{\lim_{n\to\infty}} f_n^*(s)^p \mu(ds) \leqslant$$

$$\leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} \int_S f_n^*(s)^p \mu(ds) \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} \dfrac{2^p p}{p-1} \displaystyle\int_S f(s)^p \mu(ds), & 1 < p < \infty, \\ 2\left[\mu(S) + \displaystyle\int_S f(s)\log^+ f(s)\mu(ds)\right], & p = 1. \end{cases}$$

Это доказывает следующую теорему.

7. Теорема. *Пусть $\{T(t), 0 \leqslant t\}$ — сильно измеримая полугруппа в L_1 и $|T(t)|_1 \leqslant 1$, $|T(t)|_\infty \leqslant 1$. Пусть для всех u из множества U определен элемент $f_u \in L_p$, такой, что структурная верхняя грань $f = \sup_{u\in U} |f_u(\cdot)|$ также принадлежит L_p. В случае $p = 1$ предположим также, что $\mu(S) < \infty$ и $\int_S f(s)\log^+ f(s)\mu(ds) < \infty$. Тогда функция*

$$f^* = \sup_{u\in U} \sup_{0<\alpha<\infty} |A(\alpha)(f_u, \cdot)|$$

принадлежит L_p и

$$|f^*|_p \leqslant \begin{cases} 2\left(\dfrac{p}{p-1}\right)^{1/p} |f|_p, & 1 < p < \infty, \\ 2\left[\mu(S) + \displaystyle\int_S f(s)\log^+ f(s)\mu(ds)\right], & p = 1. \end{cases}$$

Две последние теоремы настоящего параграфа обобщают теоремы 5 и 7 на случай k-параметрических полугрупп. Мы определим сначала основные понятия, связанные с такими полугруппами и их средними.

8. Определение. *Сильно измеримой k-параметрической полугруппой операторов в вещественном* или комплексном B-пространстве $\mathfrak{X}$ называется множество $\{T(t_1, \ldots, t_k), t_1, \ldots, t_k > 0\}$ ограниченных линейных операторов в $\mathfrak{X}$ со свойствами

(a) $T(t_1, \ldots, t_k)T(u_1, \ldots, u_k) = T(t_1+u_1, \ldots, t_k+u_k)$;

(b) $T(t_1, \ldots, t_k)x$ измерима по Лебегу по $[t_1, \ldots, t_k]$ при любом $x \in \mathfrak{X}$.

9. Лемма. *Если $T(t_1, \ldots, t_k)$ — сильно измеримая k-параметрическая полугруппа в B-пространстве $\mathfrak{X}$, то для всех $x \in \mathfrak{X}$ функция $T(t_1, \ldots, t_k)x$ непрерывна в области $t_1, \ldots, t_k > 0$.*

Доказательство. Для случая $k=1$ это утверждение доказано в лемме 1.3, и рассмотрение этого доказательства показывает, что оно переносится также и на общий случай леммы 9, ч. т. д.

Если, кроме сильной измеримости, полугруппа сильно интегрируема на каждом множестве, определенном неравенствами вида $0 < t_1, \ldots, t_k \leqslant \alpha$, то средние

$$A(\alpha) = \frac{1}{\alpha^k} \int_0^\alpha \ldots \int_0^\alpha T(t_1, \ldots, t_k)\, dt_1 \ldots dt_k$$

определяются для $\alpha > 0$ способом, аналогичным использованному в однопараметрическом случае. В частности, $A(\alpha)$ — ограниченный линейный оператор в $\mathfrak{X}$. Так же как в однопараметрическом случае, мы видим, что если $\mathfrak{X}$ есть пространство $L_p(S, \Sigma, \mu)$ и если $T(t_1, \ldots, t_k)(f, s)$ — числовое представление вектора $T(t_1, \ldots, t_k)f$, которое измеримо как функция $t_1, \ldots, t_k$ и s, то

$$A(\alpha)(f, s) = \frac{1}{\alpha^k} \int_0^\alpha \ldots \int_0^\alpha T(t_1, \ldots, t_k)(f, s)\, dt_1 \ldots dt_k$$

есть числовое представление вектора $A(\alpha)f$ и почти для всех $s \in S$ непрерывно по α. Это замечание показывает, что функция $f^*(s) = \sup_{0<\alpha} |A(\alpha)(f, s)|$ равна функции $\sup_{\alpha \in R} |A(\alpha)(f, s)|$, где R — множество положительных рациональных чисел. Поэтому функция f^* μ-измерима и на самом деле совпадает с верхней гранью множества $\{|A(\alpha)(f, \cdot)|, 0 < \alpha\}$ в структуре μ-измеримых функций на S.

В действительности же в следующей теореме, являющейся обобщением теоремы 7, рассматривается несколько более общий случай, чем k-параметрическая полугруппа, так как здесь мы имеем дело со средними вида

$$\alpha_1^{-1} \ldots \alpha_k^{-1} \int_0^{\alpha_1} \ldots \int_0^{\alpha_k} T_k(t_k) \ldots T_1(t_1)\, dt_1 \ldots dt_k,$$

где $T_1(t_1), \ldots, T_k(t_k)$ — однопараметрическая полугруппы. Дело в том, что эти однопараметрические полугруппы не обязательно коммутируют, а если они коммутируют, то $T(t_1, \ldots, t_k) = T_k(t_k) \ldots$ $\ldots T_1(t_1)$ есть k-параметрическая полугруппа.

10. Теорема. *Пусть $\{T_i(t), 0 \leqslant t\}$, $i=1, \ldots, k$ — сильно измеримые полугруппы в L_1, причем $|T_i(t)|_1 \leqslant 1$, $|T_i(t)|_\infty \leqslant 1$. Тогда для всех f в L_p, $1 < p < \infty$, функции*

$$(1) \qquad \frac{1}{\alpha_1 \ldots \alpha_k} \int_0^{\alpha_k} \ldots \int_0^{\alpha_1} T_k(t_k) \ldots T_1(t_1)(f, s)\, dt_1 \ldots dt_k$$

стремятся к пределу почти всюду на S, когда $\alpha_1 \to \infty, \ldots, \alpha_k \to \infty$ независимо. Предел существует также в норме L_p, и функции (1) *при $\alpha_1, \ldots, \alpha_k > 0$ в совокупности мажорируются функцией из L_p.*

Доказательство. Если $A_i(\alpha)$ есть среднее полугруппы $\{T_i(t), 0 \leqslant t\}$ на интервале $(0, \alpha)$, то многократная последовательность (1) может быть записана как $V(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)(f, s)$, где

$$(2) \qquad V(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = A_k(\alpha_k) \ldots A_1(\alpha_1).$$

Так как $|T_i(t)|_\infty \leqslant 1$ и $|T_i(t)|_1 \leqslant 1$, то из теоремы Рисса о выпуклости (VI.10.11) следует, что $|T_i(t)|_p \leqslant 1$ и, тем самым, что

$$(3) \qquad |A_i(\alpha)| \leqslant 1, \quad |V(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)| \leqslant 1, \quad 1 \leqslant i \leqslant k$$

(здесь и во всем доказательстве норма без индекса является L_p-нормой).

Согласно теореме 1, пределы

$$(4) \qquad E_i f = \lim_{\alpha \to \infty} A_i(\alpha) f, \quad f \in L_p, \quad 1 \leqslant i \leqslant k,$$

существуют в сильной L_p-топологии. Из (3) и (4) следует, что

$$(5) \qquad E_k \ldots E_1 f = \lim V(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) f, \quad f \in L_p,$$

в норме L_p. Чтобы убедиться в этом, мы воспользуемся соотношением (4) индуктивно. Предположим, что (5) доказано для произведения $k-1$ множителя $A_k(\alpha_k), \ldots, A_2(\alpha_2)$. Тогда выражение

$$\begin{aligned} |V(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) f - E_k \ldots E_1 f| &\leqslant |A_k(\alpha_k) \ldots A_2(\alpha_2)\{A_1(\alpha_1) - E_1\} f| + \\ &+ |\{A_k(\alpha_k) \ldots A_2(\alpha_2) - E_k \ldots E_2\} E_1 f| \leqslant \\ &\leqslant |\{A_1(\alpha_1) - E_1\} f| + |\{A_k(\alpha_k) \ldots A_2(\alpha_2) - E_k \ldots E_2\} E_1 f| \end{aligned}$$

стремится к нулю в силу предположения индукции, чем и устанавливается соотношение (5). Далее будет показано, что функции (1) мажорируются функцией из L_p, которая не зависит от параметров $\alpha_1,\dots,\alpha_k$. Предыдущая теорема показывает, что это так в случае $k=1$. Предположим, что тот же факт установлен для случая $k-1$ полугруппы $T_1,\dots,T_{k-1}$ так что функция

$$g=\sup_{0<\alpha_1,\dots,\alpha_{k-1}<\infty}|A_{k-1}(\alpha_{k-1})\dots A_1(\alpha_1)(f,\cdot)|$$

принадлежит L_p. В предыдущей теореме обозначим через $u=(\alpha_1,\dots,\dots,\alpha_{k-1})$ точку $(k-1)$-мерного эвклидова пространства и положим $f_u=A_{k-1}(\alpha_{k-1})\dots A_1(\alpha_1)f$. Тогда из этой теоремы следует, что функция

$$\sup_u \sup_{0<\alpha_k<\infty}|A_k(\alpha_k)(f_u,\cdot)|,$$

которая мажорирует все функции (1), принадлежит L_p.

Наконец, докажем, что функции (1) сходятся почти всюду на S, когда $\alpha_1,\dots,\alpha_k\to\infty$ независимо. При $k=1$ это следует из теоремы 5, и мы предположим, что то же установлено для случая $k-1$ полугруппы $T_2,\dots,T_k$. Согласно следствию 2, функции вида

$$h=f+\sum_{i=1}^{n}[I-T_1(t_i)]g_i,$$

где $T_1(t)f=f$, $0\leqslant t$, и $g_i\in L_\infty\cap L_p$ — плотны в L_p. Таким образом, ввиду соотношения

$$A_1(\alpha)(I-T_1(u))=\frac{1}{\alpha}\left[\int_0^u T_1(t)\,dt-\int_\alpha^{u+\alpha}T(t)\,dt\right]$$

мы имеем для такой функции h

$$V(\alpha_1,\dots,\alpha_k)h=A_k(\alpha_k)\dots A_2(\alpha_2)f+\sum_{i=1}^{n}h_i,$$

где $|h_i|_\infty\leqslant 2t_i|g_i|_\infty|\alpha_1$. Предположение индукции тогда показывает, что $Vh\to E_k\dots E_2f$ почти всюду на S. Для завершения доказательства мы можем воспользоваться теоремой IV.11.3. Примем за A_p множество всех элементов $a=[\alpha_1,\dots,\alpha_k]$ с рациональными α_i и $\alpha_i\geqslant p$, $i=1,\dots,k$, и положим $T_a=V(a)=V(\alpha_1,\dots,\alpha_k)$. Заметим, что так как при почти всех s функция $V(\alpha_1,\dots,\alpha_k)(f,s)$ непрерывна при $0<\alpha_1,\dots,\alpha_k$, то

$$\sup_{a,\,b\in A_p}|V(a)(f,s)-V(b)(f,s)|=\sup_{\alpha_i,\,\beta_j\geqslant p}|V(a)(f,s)-V(b)(f,s)|,$$

где вторая верхняя грань берется по $\alpha_1,\dots,\beta_k$, пробегающим все вещественные числа, большие или равные p. Таким образом, по теореме IV.11.3,

$$\lim_{p\to\infty} \sup_{\alpha_i,\, \beta_j \geqslant p} |V(a)(f, s) - V(b)(f, s)| = 0,$$

так что $V(a)(f, s)$ сходится при почти всех s в S когда $\alpha_1, \ldots, \ldots, \alpha_k \longrightarrow \infty$ независимо, ч. т. д.

Если $p = 1$, то предыдущая теорема теряет силу, потому что (даже если $k = 1$) средние необязательно ограничены суммируемой функцией. Однако средние k-параметрической сильно измеримой полугруппы $\{T(t_1, \ldots, t_k),\ t_1, \ldots, t_k > 0\}$ в $L_1(S, \Sigma, \mu)$, у которых $|T(t_1, \ldots, t_k)|_1 \leqslant 1$, $|T(t_1, \ldots, t_k)|_\infty \leqslant 1$, примененные к функции из $L_1(S, \Sigma, \mu)$, тем не менее сходятся почти всюду. Этот результат, который будет доказан индукцией по k, основан на следующей ключевой лемме, обобщающей лемму 6 на случай k-параметрической полугруппы.

11. Лемма. *Пусть* (S, Σ, μ) — *пространство с положительной мерой*, $\{T(t_1, \ldots, t_k),\ t_1, \ldots, t_k > 0\}$ — *сильно измеримая полугруппа операторов в* $L_1(S, \Sigma, \mu)$ *и* $|T(t_1, \ldots, t_k)|_1 \leqslant 1$, $|T(t_1, \ldots, t_k)|_\infty \leqslant 1$. *Пусть* $1 \leqslant p < \infty$, $f \in L_p$, *и* $f^*(s) = \sup_{0<\alpha<\infty} |A(\alpha)(f, s)|$, *где*

$$A(\alpha) = \frac{1}{\alpha^k} \int_0^\alpha \cdots \int_0^\alpha T(t_1, \ldots, t_k)\, dt_1 \ldots dt_k.$$

Тогда существует абсолютная постоянная c_k, *которая не зависит от полугруппы и не зависит от* f, *такая, что*

$$\mu(e^*(\beta)) \leqslant \frac{1}{c_k \beta} \int_{e(c_k\beta)} |f(s)|\, \mu(ds), \quad \beta > 0,$$

где $e^*(\beta) = \{s \mid f^*(s) > \beta\}$ *и* $e(\beta) = \{s \mid |f(s)| > \beta\}$.

Мы докажем лемму 11 по индукции, отправляясь от частного случая $k = 1$, который был установлен в лемме 6. Доказательство основано на трех вспомогательных леммах, и, быть может, будет полезно привести схематический план основных логических построений, ведущих от леммы 6 к лемме 11. Чтобы сделать такую диаграмму, мы будем пользоваться обозначением C_k для леммы 11 и D_k — для ее дискретного аналога. (Утверждение D_k сформулировано точно в лемме 16.) Тогда C_1 есть лемма 6, а D_1 — лемма 6.7. Обозначение CP_k будет использоваться для утверждения C_k при дополнительном предположении, что операторы в полугруппе положительны, а DP_k будет обозначать дискретный аналог CP_k. Утверждения, обозначенные через CP_k и DP_k, сформулированы точно в леммах 13 и 14 соответственно. В этих обозначениях логическая структура доказательства леммы 11 такова: $C_1 \Rightarrow CP_k \Rightarrow DP_k \Rightarrow D_k \Rightarrow C_k$. Первый этап в этой последовательности, т. е. сведение CP_k к C_1, осуществляется при помощи преобразования, которое сводит $2k$-параметрическую полугруппу к k-параметрической полугруппе. Этот прием основан на том, что если семейство функций $\{\varphi_u, 0 < u\}$ образует полугруппу относительно свертки, т. е. $\varphi_u * \varphi_v = \varphi_{u+v}$, и если $\varphi_u(x) = 0$ при $x \leqslant 0$, то преобразование

$$S(x_1, \ldots, x_k) = \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \varphi_{x_1}(t_1)\varphi_{x_1}(t_2)\varphi_{x_2}(t_3)\varphi_{x_2}(t_4)\ldots$$

$$\ldots \varphi_{x_k}(t_{2k-1})\varphi_{x_k}(t_{2k}) T(t_1, \ldots, t_{2k})\, dt_1 \ldots dt_{2k}$$

сводит $2k$-параметрическую полугруппу $T(t_1, \ldots, t_{2k})$ к k-параметрической полугруппе $S(x_1, \ldots, x_k)$. Чтобы быть уверенным, что полугруппа $S(x_1, \ldots, x_k)$ обладает нужными свойствами, следует выбирать соответствующим образом функции φ_u. Следующая лемма определяет эти функции и устанавливает свойства, которые мы далее будем использовать.

12. Лемма. *Пусть для $u > 0$, по определению, $\varphi_u(x) = u^{-2}\varphi(xu^{-2})$, где*

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{4x}}, & x > 0. \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

Тогда $\varphi_u * \varphi_v = \varphi_{u+v}$ *и* $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx = 1.$

Доказательство. Мы имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx = 2^{-1}\pi^{-1/2}\int_0^\infty x^{-3/2} e^{-1/4x}\,dx =$$

$$= 2^{-1}\pi^{-1/2}\int_0^\infty y^{-1/2}e^{-y/4}\,dy = \pi^{-1/2}\int_0^\infty x^{-1/2}e^{-x}\,dx = \pi^{-1/2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 1.$$

Для доказательства равенства $\varphi_u * \varphi_v = \varphi_{u+v}$ достаточно показать, что

$$(*) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-xt}\,dx = e^{-\sqrt{t}}, \quad t > 0.$$

Действительно, если (*) известно, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_u(x)\, e^{-xt}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, e^{-xu^2 t}\, dx = e^{-u\sqrt{t}}, \quad t > 0,$$

и, таким образом, по лемме 2.4,

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\varphi_u * \varphi_v)(x)\, e^{-xt}\, dx = e^{-(u+v)\sqrt{t}} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{u+v}(x)\, e^{-xt}\, dx, \ \ t > 0;$$

это, ввиду леммы 1.15, доказывает, что $\varphi_u * \varphi_v = \varphi_{u+v}$. Чтобы установить равенство (*), положим $A = \int_0^{\infty} e^{-(\alpha/u-u)^2} du$ для $\alpha > 0$. Сделав подстановку $u = 1/v$, мы находим, что

$$A = \int_0^{\infty} \frac{\alpha}{u^2}\, e^{-\left(\frac{\alpha}{u}-u\right)^2} du$$

Из этих формул для A видно, что

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{u^2}\right) e^{-\left(\frac{\alpha}{u}-u\right)^2} du$$

и, тем самым (если положить $\alpha/u - u = v$), что

$$A = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2}\, dv = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-1/4x}}{x^{3/2}}\, e^{-xt}\, dx = \frac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x^{-3/2}\, e^{-\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{xt}\right)^2} dx =$$

$$= \frac{2e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{t}}{2y^2}\, e^{-\left(\frac{\sqrt{t}}{2y} - y\right)^2} dy = \frac{2e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{\pi}} A = e^{-\sqrt{t}},$$

это доказывает формулу (*) и завершает доказательство леммы.

Мы теперь сформулируем и докажем лемму, обозначенную выше как CP_k. По техническим причинам, понятным из дальнейшего, следующая лемма устанавливается для такого семейства операторов, которое можно скорее назвать положительной субполугруппой, чем положительной полугруппой. Доказательство этой леммы — наиболее сложный этап доказательства леммы 11 в той его форме, как оно представлено на диаграмме $C_1 \Rightarrow CP_k \Rightarrow DP_k \Rightarrow D_k \Rightarrow C_k$. Доказательство возможности сведения случая DP_k к случаю CP_k, в чем и состоит смысл доказательства леммы 14, очень похоже на доказательство следующей леммы, но значительно проще в деталях, так что читатель может при желании прочесть доказательство леммы 14 раньше, чем доказательство леммы 13.

13. Лемма. *Пусть (S, Σ, μ) — пространство с положительной мерой, и пусть при $t_1, \ldots, t_k > 0$ $P(t_1, \ldots, t_k)$ — положительные операторы в $L_1(S_1, \Sigma, \mu)$, причем $|P(t_1, \ldots, t_k)|_1 \leqslant 1$, $|P(t_1, \ldots, t_k)|_\infty \leqslant 1$ и*

$$P(t_1, \ldots, t_k)\, P(u_1, \ldots, u_k) \geqslant P(t_1+u_1, \ldots, t_k+u_k).$$

Предположим, что операторнозначная функция P сильно непрерывна в области $t_1, \ldots, t_k > 0$. Пусть $1 \leqslant p < \infty$, $f \in L_p$ и $f^* = \sup\limits_{0<\alpha} A(\alpha)\,|f(\cdot)|$, где

$$A(\alpha) = \frac{1}{\alpha^k} \int\limits_0^\alpha \ldots \int\limits_0^\alpha P(t_1, \ldots, t_k)\, dt_1 \ldots dt_k.$$

Тогда существует абсолютная постоянная c_k, которая не зависит от оператора $P(t_1, \ldots, t_k)$ и не зависит от f, такая, что

$$\mu(e^*(\beta)) \leqslant \frac{1}{c_k\beta} \int\limits_{e(c_k\beta)} |f(s)|\, \mu(ds), \quad \beta > 0,$$

где $e^*(\beta) = \{s \mid f^*(s) > \beta\}$ и $e(\beta) = \{s \mid |f(s)| > \beta\}$.

Доказательство. Заметим, что если $1 \leqslant m \leqslant k$ и если $T(t_1, \ldots, t_m) = P(t_1, \ldots, t_k)$, то

$$\frac{1}{\alpha^m} \int\limits_0^\alpha \ldots \int\limits_0^\alpha T(t_1, \ldots, t_m)\, dt_1 \ldots dt_m =$$

$$= \frac{1}{\alpha^k} \int\limits_0^\alpha \ldots \int\limits_0^\alpha P(t_1, \ldots, t_k)\, dt_1 \ldots dt_k.$$

Это показывает, что если лемма верна для целого числа k, то она также верна для всех целых чисел $m \leqslant k$. Таким образом, для доказательства леммы достаточно показать, что она верна, если k четно. Если $k = 1$, то лемма уже доказана (лемма 6). Мы будем, таким образом, предполагать, что лемма доказана для целого числа n, и покажем, что она справедлива для целого числа $k=2n$. Пусть φ_u, φ — функции, определенные в лемме 12, и пусть

$$S(x_1, \ldots, x_n)=\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \varphi_{x_1}(t_1)\varphi_{x_1}(t_2)\varphi_{x_2}(t_3)\varphi_{x_2}(t_4)\ldots$$
$$\ldots\varphi_{x_n}(t_{k-1})\varphi_{x_n}(t_k)P(t_1, \ldots, t_k)\,dt_1\ldots dt_k.$$

Согласно лемме 12,

$$\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \varphi_{x_1}(t_1)\varphi_{x_1}(t_2)\ldots\varphi_{x_n}(t_{k-1})\varphi_{x_n}(t_k)\,dt_1\ldots dt_k=$$
$$=\left\{\int_0^\infty \varphi(t)\,dt\right\}^k=1,$$

и так как $\varphi(t)>0$, то $S(x_1, \ldots, x_n)$ — положительный оператор, у которого $|S(x_1, \ldots, x_n)|_1\leqslant 1$, $|S(x_1, \ldots, x_n)|_\infty\leqslant 1$. Поскольку, кроме того, $\varphi(x)=0$ при $x<0$, из леммы 12 для $0\leqslant f\in L_1(S, \Sigma, \mu)$ вытекает равенство

$$S(x_1, \ldots, x_n)S(y_1, \ldots, y_n)f=$$
$$=\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \varphi_{x_1}(t_1)\ldots\varphi_{x_n}(t_k)\varphi_{y_1}(u_1)\ldots$$
$$\ldots\varphi_{y_n}(u_k)P(t_1, \ldots, t_k)P(u_1, \ldots, u_k)f\,dt_1\ldots du_k\geqslant$$
$$\geqslant\int_{-\infty}^\infty \ldots \int_{-\infty}^\infty \varphi_{x_1}(t_1)\ldots\varphi_{x_n}(t_k)\varphi_{y_1}(u_1)\ldots$$
$$\ldots\varphi_{y_n}(u_k)P(t_1+u_1, \ldots, t_k+u_k)f\,dt_1\ldots du_k=$$
$$=\int_{-\infty}^\infty \ldots \int_{-\infty}^\infty \varphi_{x_1}(v_1-w_1)\varphi_{y_1}(w_1)\ldots$$
$$\ldots\varphi_{x_n}(v_k-w_k)\varphi_{y_n}(w_k)P(v_1, \ldots, v_k)f\,dv_1\ldots dw_k=$$
$$=\int_{-\infty}^\infty \ldots \int_{-\infty}^\infty \varphi_{x_1+y_1}(v_1)\ldots\varphi_{x_n+y_n}(v_k)P(v_1, \ldots, v_k)f\,dv_1\ldots dv_k=$$
$$=S(x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n)f.$$

Таким образом, $S(x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяет предположениям леммы 13, и поэтому, по предположению индукции, существует такая постоянная c_n, что

$$\mu\{s \mid f^{**}(s) > \beta\} \leqslant \frac{1}{c_n\beta} \int\limits_{e(c_n\beta)} |f(s)|\,\mu(ds), \ \beta > 0,$$

где

$$f^{**} = \sup_{0<\alpha} \frac{1}{\alpha^n} \int\limits_0^\alpha \ldots \int\limits_0^\alpha S(x_1, \ldots, x_n)\,|f(\cdot)|\,dx_1 \ldots dx_n.$$

Чтобы завершить доказательство леммы, достаточно установить существование абсолютной постоянной d_k, такой, что $f^{**} \geqslant d_k f^*$. Для этого достаточно показать, что для всех $\alpha > 0$ существует $\alpha_1 = \alpha_1(\alpha) > 0$, такое, что

$$[*] \qquad A(S, \alpha_1)f = \frac{1}{\alpha_1^n} \int\limits_0^{\alpha_1} \ldots \int\limits_0^{\alpha_1} S(x_1, \ldots, x_n)\,f\,dx_1 \ldots dx_n \geqslant$$

$$\geqslant d_k \frac{1}{\alpha^k} \int\limits_0^\alpha \ldots \int\limits_0^\alpha P(t_1, \ldots, t_k)\,f\,dt_1 \ldots dt_k,$$

для каждой неотрицательной функции f в L_1. Так как

$$A(S, \alpha_1)f = 2^{-k}\pi^{-k/2} \int\limits_0^\infty \ldots \int\limits_0^\infty h(\alpha_1, t_1, t_2)\,h(\alpha_1, t_3, t_4) \ldots$$

$$\ldots h(\alpha_1, t_{k-1}, t_k)\; P(t_1, \ldots, t_k)\,f\,dt_1 \ldots dt_k,$$

где

$$h(\alpha_1, t, v) = \frac{1}{\alpha_1} \int\limits_0^{\alpha_1} \varphi_u(t)\,\varphi_u(v)\,du =$$

$$= \frac{1}{\alpha_1}(tv)^{-3/2} \int\limits_0^{\alpha_1} u^2 e^{-u^2\left(\frac{1}{4t}+\frac{1}{4v}\right)}\,du,$$

то, очевидно, достаточно показать, что $h(\alpha_1, t, v) \geqslant \delta/\alpha^2$ для всех $t, v \leqslant \alpha$, ибо тогда неравенство [*] выполнено при $d_k = (\delta/4\pi)^{k/2}$. Убедимся, что можно взять $\alpha_1 = \alpha^{1/2}$, т. е. покажем, что

$$(t_1 t_2)^{-3/2} \int\limits_0^{1} u^2 e^{-u^2\left(\frac{1}{4t_1}+\frac{1}{4t_2}\right)}\,du > \delta, \ t_1, t_2 \leqslant \alpha_1^2.$$

Подстановкой $u=\alpha_1 v$, $t_1=\alpha_1^2 s_1$, $t_2=\alpha_1^2 s_2$ приводим это неравенство к виду

$$(s_1 s_2)^{-\frac{3}{2}} \int_0^1 v^2 e^{-v^2\left(\frac{1}{4s_1}+\frac{1}{4s_2}\right)}\, dv > \delta, \quad 0 < s_1, \ s_2 \leqslant 1.$$

Пусть $G(a)=\int_0^1 v^2 e^{-v^2 a}\, dv$; тогда нам нужно установить неравенство

$$[**] \qquad (s_1 s_2)^{-3/2} G\left(\frac{1}{4s_1}+\frac{1}{4s_2}\right) > \delta, \quad 0 < s_1 < s_2 \leqslant 1.$$

Так как G положительна и непрерывна, достаточно доказать неравенство [**] для случая, когда s_1 или s_2 близки к нулю. Мы имеем

$$G(a)=\int_0^1 v^2 e^{-v^2 a}\, dv = \int_0^1 u^{1/2} e^{-ua}\, du = \frac{a^{-3/2}}{2} \int_0^a v^{1/2} e^{-v}\, dv,$$

и поэтому при некотором положительном k $G(a) \geqslant k a^{-3/2}$ для всех достаточно больших значений a. Таким образом,

$$(s_1 s_2)^{-3/2} G\left(\frac{1}{4s_1}+\frac{1}{4s_2}\right) \geqslant 8k (s_1+s_2)^{-3/2},$$

если хоть одно из чисел s_1 или s_2 близко к нулю. Это устанавливает неравенство [**] и завершает доказательство леммы.

14. Лемма. *Пусть (S, Σ, μ) — пространство с положительной мерой, и пусть для любого множества k неотрицательных целых чисел $i_1, \ldots, i_k$ в $L_1(S, \Sigma, \mu)$ определен положительный оператор $P(i_1, \ldots, i_k)$, причем*

$$|P(i_1, \ldots, i_k)| \leqslant 1, \ |P(i_1, \ldots, i_k)|_\infty \leqslant 1 \ \text{и}$$
$$P(i_1, \ldots, i_k) P(j_1, \ldots, j_k) \geqslant P(i_1+j_1, \ldots, i_k+j_k).$$

Пусть для $f \in L_p$, по определению, $f^* = \sup_n A(n) |f(\cdot)|$, где

$$A(n) = \frac{1}{n^k} \sum_{i_k=0}^{n} \ldots \sum_{i_1=0}^{n} P(i_1, \ldots, i_k).$$

Тогда существует постоянная c_k, не зависящая от операторов $P(i_1, \ldots, i_k)$ и от функции f, такая, что

$$\mu(\{s \mid f^*(s) > \beta\}) \leqslant \frac{1}{c_k \beta} \int_{e(c_k\beta)} |f(s)| \mu(ds), \quad \beta > 0.$$

Доказательство. *Для* $x_1, \ldots, x_k > 0$ определим оператор

$$S(x_1, \ldots, x_k) = e^{-(x_1+\ldots+x_k)} \sum_{i_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{i_k=0}^{\infty} \frac{x_1^{i_1} \ldots x_k^{i_k}}{i_1! \ldots i_k!} P(i_1, \ldots, i_k).$$

Так как сумма коэффициентов этого ряда

$$e^{-(x_1+\ldots+x_k)} \sum_{i_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{i_k=0}^{\infty} \frac{x_1^{i_1} \ldots x_k^{i_k}}{i_1! \ldots i_k!} = 1,$$

то $|S(x_1, \ldots, x_k)|_1 \leqslant 1$, $|S(x_1, \ldots, x_k)|_\infty \leqslant 1$, и, таким образом, по теореме Рисса о выпуклости, $|S(x_1, \ldots, x_k)|_p \leqslant 1$. Ясно также, что $S(x_1, \ldots, x_k)$ — положительный оператор в L_p. Кроме того,

$$S(x_1, \ldots, x_k) S(y_1, \ldots, y_k) =$$

$$= e^{-(x_1+y_1+\ldots+x_k+y_k)} \sum \frac{x_1^{i_1} \ldots x_k^{i_k} y_1^{j_1} \ldots y_k^{j_k}}{i_1! \ldots i_k! j_1! \ldots j_k!} P(i_1, \ldots, i_k) P(j_1, \ldots, j_k) \geqslant$$

$$\geqslant e^{-(x_1+y_1+\ldots+x_k+y_k)} \sum \frac{x_1^{i_1} \ldots y_k^{j_k}}{i_1! \ldots j_k!} P(i_1+j_1, \ldots, i_k+j_k),$$

где сумма Σ берется по всем неотрицательным целым числам $i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_k$. Таким образом,

$$S(x_1, \ldots, x_k) S(y_1, \ldots, y_k) \geqslant$$

$$\geqslant e^{-(x_1+y_1+\ldots+x_k+y_k)} \sum_{m_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{m_k=0}^{\infty} \frac{P(m_1, \ldots, m_k)}{m_1! \ldots m_k!} (x_1+y_1)^{m_1} \ldots$$

$$\ldots (x_k+y_k)^{m_k} = S(x_1+y_1, \ldots, x_k+y_k),$$

и поэтому видно, что операторы $S(x_1, \ldots, x_k)$ удовлетворяют требованиям предыдущей леммы. Следовательно, если

$$f^{**} = \sup_{0<\alpha} \frac{1}{\alpha^k} \int_0^\alpha \ldots \int_0^\alpha S(x_1, \ldots, x_k) |f(\cdot)| \, dx_1 \ldots dx_k,$$

где $f \in L_p$, то

$$\mu(\{s \mid f^{**}(s) > \beta\}) \leqslant \frac{1}{c_k\beta} \int_{e(c_k\beta)} |f(s)| \mu(ds), \quad \beta > 0.$$

Таким образом, наша лемма будет доказана, если мы установим существование абсолютной постоянной d_k, для которой $f^{**} \geqslant d_k f^*$.

Это неравенство будет справедливо, если мы докажем, что для $0 \leqslant f \in L_p$ и $n \geqslant 0$ существует $\alpha = \alpha(n, f)$, такое, что

$$[*] \qquad \frac{1}{\alpha^k} \int_0^\alpha \ldots \int_0^\alpha S(x_1, \ldots, x_k) f \, dx_1 \ldots dx_k \geqslant$$
$$\geqslant \frac{d_k}{n^k} \sum_{i_1=0}^{n-1} \ldots \sum_{i_k=0}^{n-1} P(i_1, \ldots, i_k) f.$$

Так как

$$\frac{1}{\alpha^k} \int_0^\alpha \ldots \int_0^\alpha S(x_1, \ldots, x_k) \, dx_1 \ldots dx_k =$$
$$= \sum_{i_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{i_k=0}^{\infty} c_{i_1}(\alpha) \ldots c_{i_k}(\alpha) P(i_1, \ldots, i_k),$$

где $c_m(\alpha) = \alpha^{-1} \int_0^\alpha e^{-x} x^m \, dx/m!$, то для доказательства неравенства [*] достаточно показать, что существуют число $\delta > 0$ и для каждого n число $\alpha(n) > 0$ такие, что $c_m(\alpha(n)) \geqslant \delta/n$ при $m < n$, так как тогда неравенство [*] будет выполнено с постоянной $d_k = \delta^k$. Это последнее утверждение будет проверено для $\alpha(n) = n$, т. е. мы покажем, что при некотором $\delta > 0$ имеет место неравенство $\int_0^n e^{-x} x^m \, dx/m! \geqslant \delta$ для всех $m < n$. Таким образом, достаточно показать, что $\lim_{m \to \infty} \int_0^m f_m(x) \, dx > 0$, где $f_m(x) = e^{-x} x^m/m!$ Так как $f'_m(x) \geqslant 0$ и $f''_m(x) \leqslant 0$ на интервале $m - \sqrt{m} \leqslant x \leqslant m$, то

$$\int_0^m f_m(x) \, dx \geqslant \int_{m-\sqrt{m}}^m f_m(x) \, dx \geqslant \frac{1}{2} \sqrt{m} f_m(m) =$$
$$= \frac{1}{2} \frac{e^{-m} m^{m+1} m^{-1/2}}{m!} \to \frac{e}{\sqrt{8\pi}},$$

по формуле Стирлинга, ч. т. д.

При доказательстве возможности сведения случая D_k к случаю DP_k нам будет необходима следующая лемма.

15. Лемма. *Для каждого ограниченного оператора T в L_1, у которого $|T|_\infty < \infty$, примем за $P(T)$ положительный оператор, связанный с T, как в лемме* 6.4. *Тогда* $P(T_1) P(T_2) \geqslant P(T_1 T_2)$.

Доказательство. Мы напомним, что для $0 \leqslant f \in L_1 \cap L_\infty$

$$P(T)f = \sup_{|g(\cdot)| \leqslant f} |T(g, \cdot)|.$$

Пусть $|g(\cdot)| \leqslant f$, так что, по лемме 6.4,

$$|T_1 T_2(g, \cdot)| \leqslant P(T_1)|T_2(g, \cdot)| \leqslant P(T_1)P(T_2)|g(\cdot)| \leqslant P(T_1)P(T_2)f.$$

Таким образом, $P(T_1 T_2)f \leqslant P(T_1)P(T_2)f$ для любой неотрицательной функции f в $L_1 \cap L_\infty$. Из соображений непрерывности ясно, что это же неравенство выполнено для всех положительных функций f в L_1, ч. т. д.

16. Лемма. *Пусть $T_1, \ldots, T_k$ — коммутирующие операторы в L_1 и $|T_i|_1$, $|T_i|_\infty \leqslant 1$ для $i = 1, \ldots, k$. Для $f \in L_p$ положим $f^* = \sup_{n \geqslant 1} |A(n)(f, \cdot)|$, где*

$$A(n) = \frac{1}{n^k} \sum_{i_1=0}^{n-1} \ldots \sum_{i_k=0}^{n-1} T_1^{i_1} \ldots T_k^{i_k}.$$

Тогда существует постоянная c_k, не зависящая от операторов $T_1, \ldots, T_k$ и функции f, такая, что

$$\mu(\{s \mid f^*(s) > \beta\}) \leqslant \frac{1}{c_k \beta} \int_{e(c_k\beta)} |f(s)| \mu(ds).$$

Доказательство. Используя обозначение $P(T)$, введенное в лемме 15, определим для любого множества $i_1, \ldots, i_k$ неотрицательных чисел операторы $P(i_1, \ldots, i_k) = P(T_1^{i_1} \ldots T_k^{i_k})$. Согласно леммам 6.4 и 15, операторы $P(i_1, \ldots, i_k)$ удовлетворяют предположениям леммы 14. Поэтому при некоторой постоянной c_k

$$[*] \qquad \mu(\{s \mid f^{**}(s) > \beta\}) \leqslant \frac{1}{c_k \beta} \int_{e(c_k\beta)} |f(s)| \mu(ds), \quad \beta > 0.$$

где

$$f^{**} = \sup_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^k} \sum_{i_1=0}^{n-1} \ldots \sum_{i_k=0}^{n-1} P(i_1, \ldots, i_k)|f(\cdot)|.$$

Но, по лемме 6.4,

$$f^{**} \geqslant \sup_{n \geqslant 1} \left| \frac{1}{n^k} \sum_{i_1=0}^{n-1} \ldots \sum_{i_k=0}^{n-1} T_1^{i_1} \ldots T_k^{i_k}(f, \cdot) \right| = f^*.$$

Поэтому $\{s \mid f^{**}(s) > \beta\} \supseteq \{s \mid f^*(s) > \beta\}$, что ввиду неравенства [*] доказывает лемму.

Теперь уже все подготовлено для доказательства леммы 11. Эта лемма будет сначала доказана при небольшом дополнительном предположении, что полугруппа $T(t_1, \ldots, t_k)$ определена при всех $t_i \geqslant 0$. Для простоты обозначений доказательство дано для случая $k=2$, но будет ясно, что метод применим для произвольного положительного целого числа k. По теореме III.11.17, найдется множество E нулевой меры μ, такое, что средние

$$A(\alpha)(f, s) = \frac{1}{\alpha^2} \int_0^\alpha \int_0^\alpha T(t_1, t_2)(f, s)\, dt_1\, dt_2$$

существуют для всех s, не принадлежащих E. Таким образом, при $s \notin E$ функция $A(\alpha)(f, s)$ непрерывна при $\alpha > 0$. По лемме 9, полугруппа $\{T(t_1, t_2), t_1, t_2 \geqslant 0\}$ сильно непрерывна в каждой точке $t_1 > 0$, $t_2 > 0$, и поскольку $|T(t_1, t_2)|_p \leqslant 1$, то для всех α из множества R неотрицательных рациональных чисел

$$A(\alpha) f = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\alpha n!)^2} \sum_{i_1=0}^{\alpha n!-1} \sum_{i_2=0}^{\alpha n!-1} S_1(n)^{i_1} S_2(n)^{i_2} f,$$

где $S_1(n) = T(1/n!, 0)$, $S_2(n) = T(0, 1/n!)$. Используя следствие III.6.13, теорему III.11.17 и канторовский диагональный процесс, мы можем найти такую последовательность $\{n_j\}$, что

$$A(\alpha)(f, s) = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{(\alpha n_j!)^2} \sum_{i_1=0}^{\alpha n_j!-1} \sum_{i_2=0}^{\alpha n_j!-1} S_1(n_j)^{i_1} S_2(n_j)^{i_2} (f, s)$$

для всех α в R и всех s, не принадлежащих множеству меры нуль $E_1 \supseteq E$. Для $s \notin E_1$ положим

$$f_n^*(s) = \sup_{1 \leqslant k} \left| \frac{1}{k^2} \sum_{m_1=0}^{k-1} \sum_{m_2=0}^{k-1} S_1(n)^{m_1} S_2(n)^{m_2} (f, s) \right|,$$

так что если $\alpha \in R$, $s \notin E_1$ и $\varepsilon > 0$, то найдется целое число $N(\alpha, s, \varepsilon)$, такое, что

$$|f_n^*(s)| \geqslant |A(\alpha)(f, s)| - \varepsilon, \quad n \geqslant N(\alpha, s, \varepsilon).$$

Следовательно,

$$\varliminf_{n\to\infty} f_n^*(s) \geqslant |A(\alpha)(f, s)|, \quad \alpha \in R, \ s \notin E_1.$$

Если теперь $s \notin E_1$, то $s \notin E$ и, следовательно, для $s \notin E_1$ среднее $A(\alpha)(f, s)$ непрерывно по α на интервале $0 < \alpha < \infty$. Таким образом,

$$\varliminf_{n\to\infty} f_n^*(s) \geqslant f^*(s) = \sup_{0<\alpha} |A(\alpha)(f, s)|, \quad s \notin E_1.$$

Поэтому для $\beta > 0$ мы имеем $\overline{\lim}\, \chi_n \geqslant \chi$, где χ_n и χ — характеристические функции множеств $\{s \mid f_n^*(s) > \beta\}$ и $\{s \mid f^*(s) > \beta\}$ соответственно. Следовательно, по лемме Фату и лемме 16,

$$\mu(\{s \mid f^*(s) > \beta\}) = \int_S \chi(s)\mu(ds) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_S \chi_n(s)\mu(ds) =$$

$$= \varliminf_{n\to\infty} \mu\{s \mid f_n^*(s) > \beta\} \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{c_k\beta} \int_{e(c_k\beta)} |f(s)|\mu(ds) =$$

$$= \frac{1}{c_k\beta} \int_{e(c_k\beta)} |f(s)|\mu(ds).$$

Это доказывает лемму 11 при дополнительном предположении, что полугруппа определена при всех $t_1, \ldots, t_k \geqslant 0$. Предположим теперь, что $\{S(t_1, \ldots, t_k),\ t_1, \ldots, t_k > 0\}$ — полугруппа, которая удовлетворяет условиям леммы 11, и для $\varepsilon > 0$ положим $T(\varepsilon_2; t_1, \ldots, t_k) = I$, если $t_1 = t_2 = \ldots = t_k = 0$, а в противном случае положим $T(\varepsilon; t_1, \ldots, t_k) = S(t_1 + \varepsilon u_1, \ldots, t_k + \varepsilon u_k)$, где $u_i = t_1 + \ldots + t_{i-1} + t_{i+1} + \ldots + t_k$. Тогда мы можем применить только что доказанный результат к полугруппе $\{T(\varepsilon; t_1, \ldots, t_k),\ t_1, \ldots, t_k \geqslant 0\}$. Для функции f из L_p положим

$$f_\varepsilon^* = \sup_{0<\alpha} |A(\varepsilon, \alpha)(f, \cdot)|, \quad f^* = \sup_{0<\alpha} |A(\alpha)(f, \cdot)|,$$

где

$$A(\varepsilon, \alpha) = \frac{1}{\alpha^k} \int_0^\alpha \cdots \int_0^\alpha T(\varepsilon; t_1, \ldots, t_k)\, dt_1 \ldots dt_k$$

и

$$A(\alpha) = \frac{1}{\alpha^k} \int_0^\alpha \cdots \int_0^\alpha S(t_1, \ldots, t_k)\, dt_1, \ldots, dt_k.$$

Таким образом, доказано, что

$$[*] \qquad \mu(\{s \mid f_\varepsilon^*(s) > \beta\}) \leqslant \frac{1}{c_k\beta} \int_{e(c_k\beta)} |f(s)|\mu(ds), \ \varepsilon, \beta > 0.$$

Из теоремы Лебега (III.6.16) и леммы 9 видно, что для всех функций f из L_p при $\alpha > 0$ имеет место равенство $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} A(\varepsilon, \alpha) f = A(\alpha) f$ по норме L_p. Таким образом, по теореме III.3.6, $A(\varepsilon, \alpha) f \to A(\alpha) f$ по мере; следовательно, применяя следствие III.6.13 и используя канторовский диагональный процесс, мы можем найти такую последовательность $\varepsilon_i \to 0$, что $A(\varepsilon_i, \alpha)(f, s) \to A(\alpha)(f, s)$ для почти всех относительно μ точек s в S и для всех α в множестве R положительных рациональных чисел. Отсюда следует, что $\underline{\lim}_{i\to\infty} f^*_{\varepsilon_i}(s) \geqslant |A(\alpha)(f, s)|$ для почти всех s в S и всех α в R. Так как для почти всех s в S функция $A(\alpha)(f, s)$ непрерывна при $0 < \alpha$, то

$$f^*(s) = \sup_{\alpha \in R} |A(\alpha)(f, s)| \leqslant \underline{\lim}_{i\to\infty} f^*_{\varepsilon_i}(s)$$

почти всюду на S. Если $e^*(\beta) = \{s | f^*(s) > \beta\}$ и $e^*_{\varepsilon_i}(\beta) = \{s | f^*_{\varepsilon_i}(s) > \beta\}$, то с точностью до множества меры нуль $\underline{\lim}_{i\to\infty} e^*_{\varepsilon_i}(\beta) \supseteq e^*(\beta)$, и поэтому из неравенства [*] и леммы Фату вытекает, что

$$\mu(e^*(\beta)) \leqslant \frac{1}{c_k\beta} \int\limits_{e(c_k\beta)} |f(s)| \mu(ds).$$

Это завершает доказательство леммы 11 и подготавливает нас к следующему основному результату о сходимости почти всюду средних k-параметрической полугруппы в $L_1(S, \Sigma, \mu)$.

17. Теорема. *Пусть (S, Σ, μ) — пространство с положительной мерой, $\{T(t_1, \ldots, t_k), t_1, \ldots, t_k \geqslant 0\}$ — сильно измеримая k-параметрическая полугруппа операторов в $L_1(S, \Sigma, \mu)$ и $|T(t_1, \ldots, t_k)|_1 \leqslant 1$, $|T(t_1, \ldots, t_k)|_\infty \leqslant 1$. Тогда для любой функции f из $L_1(S, \Sigma, \mu)$ предел*

$$\lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{\alpha^k} \int\limits_0^\alpha \ldots \int\limits_0^\alpha T(t_1, \ldots, t_k)(f, s)\, dt_1 \ldots dt_k$$

существует для почти всех s в S.

Доказательство. Пусть

$$A(\alpha) = \frac{1}{\alpha^k} \int\limits_0^\alpha \ldots \int\limits_0^\alpha T(t_1, \ldots, t_k)\, dt_1, \ldots, dt_k.$$

При $p > 1$ множество $L_p \cap L_1$ плотно в L_1 и из теоремы 10 видно, что для функций f из $L_p \cap L_1$ предел $\lim_{\alpha\to\infty} A(\alpha)(f, s)$ существует для почти всех $s \in S$. Ввиду леммы 11 мы можем применить теорему IV.11.3, полагая A_p = множеству всех рациональных чисел $\alpha \geqslant p$, чтобы доказать для любой функции f из L_1 соотношение

$$\lim_{p} \sup_{\alpha, \beta \in A_p} |A(\alpha)(f, s) - A(\beta)(f, s)| = 0$$

при почти всех s в S. Но так как при почти всех s функция $A(\alpha)(f, s)$ непрерывна по α, то это означает, что предел $\lim_{\alpha\to\infty} A(\alpha)(f, s)$ существует почти всюду на S, ч. т. д.

8. Равномерная эргодическая теория

В этом параграфе мы получим условия на ограниченный линейный оператор T в комплексном B-пространстве, которые достаточны для того, чтобы обеспечить сходимость средних $n^{-1}\sum_{j=0}^{n-1} T^j$ в равномерной топологии операторов. Для некоторых операторов в пространствах $C(S)$ и $L_1(S, \Sigma, \mu)$ будет проведено специальное рассмотрение в том случае, когда возможно более полное описание топологического пространства S. Результаты этого параграфа могут быть успешно применены к некоторым задачам в теории марковских процессов, хотя мы лишь бегло укажем эти применения.

1. Лемма. *Пусть T — оператор в B-пространстве $\mathfrak{X}$, предположим, что последовательность $\{n^{-1}T^n\}$ сходится к нулю в слабой операторной топологии, когда n стремится к бесконечности. Тогда спектр оператора T есть подмножество единичного круга $\{z \mid |z| \leqslant 1\}$ и любой полюс λ резольвенты оператора T, такой, что $|\lambda| = 1$, является простым.*

Доказательство. Из условий леммы и теоремы о равномерной ограниченности вытекает неравенство $|T^n/n| \leqslant K$, $n=0, 1, 2, \ldots$ при некоторой постоянной K, и поэтому $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |T^n|^{1/n} \leqslant 1$. Из леммы VII.3.4 вытекает, что $|\sigma(T)| \leqslant 1$. Если λ — полюс резольвенты оператора T и $|\lambda|=1$, то 1 является полюсом резольвенты оператора $T_1 = T/\lambda$ и $T_1^n/n \to 0$ в слабой операторной топологии. Следовательно, для доказательства второго утверждения, достаточно исследовать тот случай, когда 1 есть полюс оператора T. Предположим, что порядок полюса 1 не меньше двух. Согласно теореме VII.3.18, найдется такой вектор $x_0 \in E(1; T)\mathfrak{X}$, что $(I-T)x_0 \neq 0$, но $(I-T)^2 x_0 = 0$. Применяя теперь теорему VII.3.22 к функции f, определяемой равенством $f(\lambda) = \lambda^n/n$, получаем

$$\frac{1}{n} T^n x_0 = \frac{1}{n} x_0 + (I-T)x_0.$$

Полагая $n \to \infty$, мы приходим к выводу, что $x^*(I-T)x_0 = 0$ для всех $x^* \in \mathfrak{X}^*$, но это приводит к противоречию. Следовательно, полюса оператора T, которые лежат на единичной окружности, могут быть только простыми, ч. т. д.

Мы сформулируем теперь такое условие, которое в случае $|\sigma(T)| \leqslant 1$ приводит к тому, что спектральные точки λ с модулем $|\lambda| = 1$ изолированы, а соответствующие проекторы имеют конечномерные области значений.

2. Лемма. *Пусть T — ограниченный линейный оператор, спектр которого содержится в единичном круге, и пусть $|T^n - K| < 1$ для некоторого натурального числа n и некоторого вполне непрерывного оператора K. Тогда любая спектральная точка λ оператора T в области $|\lambda|^n > |T^n - K|$ изолирована и соответствующий проектор $E(\lambda; T)$ имеет конечномерную область значений.*

Доказательство. Пусть n — число, фигурирующее в условии, и ω — примитивный n-й корень из единицы. Из теоремы VII.3.11 следует, что если $\lambda \in \sigma(T)$ и $|\lambda| = 1$, то

$$E(\lambda; T) + E(\lambda\omega; T) + \ldots + E(\lambda\omega^{n-1}; T) = E(\lambda^n; T^n).$$

По следствию VII.3.21, $E(\lambda\omega^p; T)\, E(\lambda\omega^q; T) = 0$, $p \neq q$, и поэтому если $E(\lambda^n; T^n)$ имеет конечномерную область значений, то и $E(\lambda; T)$ тоже. Согласно той же теореме VII.3.11, если λ^n — изолированная точка спектра $\sigma(T^n) = [\sigma(T)]^n$, то λ — изолированная точка спектра $\sigma(T)$. Следовательно, достаточно доказать лемму в случае $n = 1$, что мы и сделаем.

Пусть $V = T - K$. Сначала будет показано, что если $|\mu| > |V|$ и если обратный оператор $(I - R(\mu; V) K)^{-1}$ существует, то оператор $R(\mu; T)$ существует и равен $(I - R(\mu; V) K)^{-1} R(\mu; V)$. Это следует из тождества

$$R(\mu; V)(\mu I - T) = R(\mu; V)(\mu I - V - K) = I - R(\mu; V) K$$

и следующих подсчетов:

$$[(I - R(\mu; V) K)^{-1} R(\mu; V)][\mu I - T] = I;$$

$$\begin{aligned}[\mu I - T]\,[(I - R(\mu; V) K)^{-1} R(\mu; V)] &= \\ = (\mu I - V) R(\mu; V)(\mu I - T)(I - R(\mu; V) K)^{-1} R(\mu; V) &= \\ = (\mu I - V)(I - R(\mu; V) K)(I - R(\mu; V) K)^{-1} R(\mu; V) &= I.\end{aligned}$$

Далее, согласно VI.5.4, оператор $R(\mu; V) K$ вполне непрерывен при всех μ в области $|\mu| > |V|$ и, очевидно, аналитически зависит от μ. Так как $|R(\mu; V)| \to 0$ при $|\mu| \to \infty$, то при $|\mu|$ достаточно больших $|R(\mu; V) K| < 1$. Ввиду леммы VII.3.4 мы приходим к выводу, что если $|\mu|$ достаточно велико, то число 1 не принадлежит спектру оператора $R(\mu; V) K$. Из леммы VII.6.13 следует, что $(I - R(\mu; V) K)^{-1}$ существует и является аналитической функцией μ в области $|\mu| > |V|$, кроме счетного множества изолированных ее точек. Ввиду сделанных выше замечаний это показывает, что оператор $R(\mu; T)$ существует при $|\mu| > |V|$, кроме счетного числа изолированных точек.

Пусть $\lambda \in \sigma(T)$ и $|\lambda| > |V|$; остается показать что оператор $E(\lambda; T)$ имеет конечномерную область значений. Для этого обозначим через C окружность с центром в точке λ и радиусом настолько малым, что C целиком лежит в области $|\mu|>|V|$ и не содержит внутри себя никаких точек, кроме λ, в которых $(I-R(\mu; V)K)^{-1}$ перестает существовать. При больших $|\mu|$ разложение Лорана приводит к тождеству

$$(I-R(\mu; V)K)^{-1}=I+R(\mu; V)K(I-R(\mu; V)K)^{-1},$$

и аналитическим продолжением мы устанавливаем, что оно выполнено также и на C. Следовательно,

$$R(\mu; T)=R(\mu; V)+R(\mu; V)K(I-R(\mu; V)K)^{-1}R(\mu; V).$$

Но, поскольку $R(\mu; V)$ аналитична на C, мы имеем

$$E(\lambda; T)=\frac{1}{2\pi i}\int_C R(\mu; T)\,d\mu=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C R(\mu; V)K(I-R(\mu; V)K)^{-1}R(\mu; V)\,d\mu.$$

Так как оператор K вполне непрерывен, подинтегральная функция вполне непрерывна при всех μ на C. Вспоминая определение интеграла и лемму VI.5.3, мы приходим к выводу, что $E(\lambda; T)$ также вполне непрерывен. Но $E(\lambda; T)$ есть тождественный оператор в подпространстве $E(\lambda; T)\mathfrak{X}$, откуда, согласно теореме IV.3.5, и следует, что подпространство $E(\lambda; T)\mathfrak{X}$ конечномерно, ч. т. д.

3. Теорема. *Пусть оператор T таков, что последовательность T^n/n сходится к нулю в слабой топологии, и пусть $|T^n-K|<1$ для некоторого натурального числа n и некоторого вполне непрерывного оператора K. Тогда в спектре оператора T существует не более конечного числа точек $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$, равных по модулю единице. Каждая точка λ_k есть простой полюс, и $E(\lambda_k; T)\mathfrak{X}$ конечномерно.*

Доказательство. Пусть $\lambda_k\in\sigma(T)$ и $|\lambda_k|=1$. По лемме 2, $E(\lambda_k; T)\mathfrak{X}$ конечномерно, и поэтому оператор T, суженный на это подпространство, вполне непрерывен. Из теорем VII.4.5 и VII.3.20 следует, что λ_k есть полюс резольвенты оператора T. По лемме 1, он должен быть простым полюсом, ч. т. д.

4. Следствие. *Если оператор T удовлетворяет условиям теоремы, то последовательность $n^{-1}\sum_{j=0}^{n-1}T^j$ сходится к проектору $E(1; T)$ в равномерной топологии операторов.*

Доказательство. Пусть $A(n)=n^{-1}\sum_{m=0}^{n-1}T^m$, σ — часть спектра $\sigma(T)$, лежащая в открытом множестве $|\lambda|<1$ и $\sigma'=\sigma(T)-\sigma$. Тогда, согласно лемме VII.3.13, $A(n)E(\sigma)\to 0$. По теореме VII.3.20, точки $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ есть простые полюса сужения $T_{\sigma'}$ оператора T на $E(\sigma')\mathfrak{X}$. Так как $n^{-1}\sum_{m=0}^{n-1}\lambda_i^m\to 0$ при всех $\lambda_i\neq 1$, то мы видим из теоремы VII.3.22, что $A(n)E(\sigma')\to E(\{1\})$. Так как $A(n)=A(n)E(\sigma)+ +A(n)E(\sigma')$, следствие доказано.

Мы теперь обратимся к исследованию некоторых операторов T, определенных в $C(S)$ в том случае, когда S — бикомпактное хаусдорфово пространство. Мы говорим, что оператор T *положителен*, если $(Tf)(s)\geqslant 0$, $s\in S$ для любой функции f, такой, что $f(s)\geqslant 0$, $s\in S$. Будет показано, что если T положителен и удовлетворяет условиям, сформулированным в теореме 3, то все точки спектра $\sigma(T)$, равные по модулю единице, суть корни из единицы.

5. Лемма. *Пусть T — положительный линейный оператор в $C(S)$, такой, что последовательность T^n/n сходится к нулю в слабой операторной топологии, и пусть $|T^n-K|<1$ для некоторого натурального числа n и некоторого вполне непрерывного оператора K. Тогда существует целое число N, такое, что если $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ — точки $\sigma(T)$, равные по модулю единице, то $\lambda_k^N=1$, $k=1, \ldots, q$.*

Доказательство. Пусть точка $\lambda\neq 1$ лежит в спектре $\sigma(T)$, $|\lambda|=1$ и пусть функция $f\neq 0$ лежит в области значений проектора $E(\lambda)$, так что $Tf=\lambda f$. Пусть s_0 — точка S, в которой $|f(\cdot)|$ достигает своего максимума. Так как $E(\lambda)\,C(S)$ есть линейное многообразие, мы можем предположить, что $f(s_0)=1$. Пусть δ — линейный функционал на $C(S)$, определяемый равенством $\delta g=g(s_0)$, $g\in C(S)$. Тогда $(T^*)^n\delta$ — неотрицательный линейный функционал на $C(S)$, и поэтому, по теореме IV.6.3, существует неотрицательная мера π_n в $rca(S)$, такая, что

$$(T^ng)(s_0)=\int_S g(s)\,\pi_n(ds),\quad g\in C(S).$$

Так как $\lambda^nf(s_0)=(T^nf)(s_0)=\int_S f(s)\,\pi_n(ds)$ и $|f(s)|\leqslant f(s_0)=1$, то $\pi_n(S)\geqslant 1$, $n=1, 2, \ldots$.

Мы теперь покажем, что для всех n открытое множество $A_n= =\{s\in S\,|\,\lambda^{-n}f(s)\neq 1\}$ имеет π_n-меру нуль. Так как $T^nf=\lambda^nf$, то

$$0=f(s_0)-\lambda^{-n}(T^nf)(s_0)=\int_S\{1-\lambda^{-n}f(s)\}\,\pi_n(ds),$$

и, беря вещественные части,

$$0=\int_S\{1-\mathrm{Re}\,(\lambda^{-n}f(s))\}\,\pi_n(ds).$$

Так как $|\operatorname{Re}(\lambda^{-n}f(s))| \leqslant |f(s)| \leqslant 1$, подинтегральная функция неотрицательна. Поскольку и мера π_n неотрицательна, из III.2.20 (d) и III.6.8 следует, что $\pi_n(B_n) = 0$, где через B_n обозначено множество $\{s \in S \mid \operatorname{Re}(\lambda^{-n}f(s)) \neq 1\}$. Так как $|f(s)| \leqslant |f(s_0)| = 1$, легко видеть, что $B_n \supseteq A_n$, и, следовательно, $\pi_n(A_n) = 0$.

Теперь будет показано, что дополнения $A_n' = S - A_n$, $n = 1, 0, 2, \ldots$, не могут быть попарно не пересекающимися. Применяя следствие 4, мы определяем меру π равенством

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \pi_j = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (T^*)^j \delta.$$

Так как $\pi_j(S) \geqslant 1$, то и $\pi(S) \geqslant 1$. Пусть $A = \bigcap_{j=0}^{\infty} A_j$; так как $A \subseteq A_j$, то $\pi_j(A) = 0$ для $j=0, 1, 2, \ldots$, и, следовательно, $\pi(A) = 0$. Пусть $A' = \bigcap_{j=0}^{\infty} A_j'$, так что $A' = S - A$. Если множества A_k', $k = 0, 1, 2, \ldots$, попарно не пересекаются, то $\pi_j(A_k') = 0$ при $j \neq k$, и поэтому

$$0 \leqslant \pi(A_k') = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \pi_j(A_k') = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Следовательно, $\pi(A') = \sum_{k=0}^{\infty} \pi(A_k') = 0$. Так как A и A' суть дополнительные множества, то $0 = \pi(A) + \pi(A') = \pi(S) \geqslant 1$. Это противоречие доказывает, что множества $\{A_k'\}$ не могут быть попарно не пересекающимися.

Мы показали, что существуют такие различные целые числа m и n, что множество $A_m' A_n'$ содержит точку s_1. Следовательно, $\lambda^{-n} f(s_1) = 1 = \lambda^{-m} f(s_1)$, и поэтому $\lambda^{n-m} = 1$. Но λ было любой точкой спектра $\sigma(T)$ с модулем $|\lambda| = 1$, а так как имеется лишь конечное число таких точек, существование целого числа N, описанного в утверждении, доказано.

Мы теперь соберем уже полученные результаты.

6. Теорема. *Пусть T — положительный линейный оператор в $C(S)$, такой, что последовательность T^n/n сходится к нулю в слабой операторной топологии, и пусть $|T^{\nu} - K| < 1$ для некоторого натурального n и некоторого вполне непрерывного оператора K. Тогда спектр $\sigma(T)$ может быть представлен как объединение замкнутого множества σ, которое лежит внутри круга $|z| < \alpha < 1$ и конечного числа простых полюсов $e^{2\pi i \theta_k}$, где θ_k рационально, $k = 1, 2, \ldots, q$. Если положим $E_k = E(e^{2\pi i \theta_k})$, $E_D = E(\sigma)$ и $D = TE_D$, то каждый проектор E_k имеет конечномерную область значений. Итерации*

оператора T определяются равенством

$$T^m = \sum_{k=1}^{q} e^{2\pi i m \theta_k} E_k + D^m, \quad m \geqslant 1.$$

Кроме того, существует положительное число M, такое, что

$$|D^m| \leqslant M\alpha^m, \quad m \geqslant 1.$$

Доказательство. Остается доказать только два последних утверждения. Так как точки $e^{2\pi i\theta_k}$ — простые полюса резольвенты оператора T, выражение для T^m есть непосредственное следствие теоремы VII.3.22. Наконец, $D = T_\sigma$ на подпространстве $E(\sigma)C(S)$ и обращается в нуль на подпространстве $(I - E(\sigma))C(S)$, так что $\sigma(D) = \sigma(T_\sigma) \bigcup \{0\}$. По теореме VII.3.20, $\sigma(D) = \sigma \bigcup \{0\}$, и поэтому $\sigma(D)$ содержится в круге $|z| < \alpha$ при некотором $\alpha < 1$. По лемме VII.3.4, отсюда следует неравенство $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}} |D^m|^{1/m} < \alpha$, так что $|D^m| \leqslant$ $\leqslant M\alpha^m$ $m \geqslant 1$, при некотором положительном числе M, ч. т. д.

7. Теорема. *Пусть оператор T удовлетворяет условиям предыдущей теоремы, и пусть $E_P = \sum_{k=1}^{q} E_k$. Тогда подпространство $C_P =$ $= E_P[C(S)]$ конечномерно, и если $C_D = E_D[C(S)]$, то $C(S)$ есть прямая сумма C_P и C_D. Оба подпространства C_P и C_D инвариантны относительно T, и*

(a) *существует такое натуральное число N, что $T^N x = x$ для $x \in C_P$;*

(b) *$T^n x \to 0$ экспоненциально быстро, для $x \in C_D$. Кроме того, подпространства C_P и C_D однозначно определяются свойствами* (a) *и* (b) *соответственно.*

Доказательство. Из определения оператора E_P вытекает, что E_P — проектор, $E_P E_D = E_D E_P = 0$ и $I = E_P + E_D$. Кроме того, оператор T коммутирует с E_P и E_D, так что это разложение в прямую сумму есть разложение на подпространства, инвариантные относительно T. Утверждения (a) и (b) вытекают из формулы для T^m, данной в теореме 6. Для доказательства последнего утверждения теоремы положим $x \in C(S)$ и $T^n x \to 0$. Тогда $x = x_P + x_D$, где $x_P =$ $= E_P x \in C_P$ и $x_D = E_D x \in C_D$. Отсюда следует, что $T^n x_P \to 0$ и $T^n x_D \to 0$; но так как последовательность $\{T^n x_P\}$ имеет бесконечно много членов, равных x_P, то $x_P = 0$. Поэтому множество $C_D = \{x \in C(S) \mid T^n x \to 0\}$. Аналогично если $x \in C(S)$ таков, что $T^n x = x$ при некотором $n \geqslant 1$, то $x \in C_P$ и поэтому множество $C_P = \{x \in C(S) \mid T^n x = x$ при некотором $p \geqslant 1\}$, ч. т. д.

Выводы теоремы 3 справедливы для любого B-пространства, и в частности для пространства $L_1(S, \Sigma, \mu)$. Однако совсем не очевидно, что более подробные результаты, полученные в теоремах 6 и 7 для пространства $C(S)$, могут быть распространены на какие-либо другие пространства. Мы теперь докажем, что для пространства $L_1(S, \Sigma, \mu)$ это возможно благодаря тому факту, что его сопряженное пространство может быть представлено как пространство непрерывных функций. Пусть T — оператор в пространстве $L_1(S, \Sigma, \mu)$; мы говорим, что оператор T *положителен*, если $(Tf)(s) \geqslant 0$ почти всюду на S, как только $f(s) \geqslant 0$ почти всюду.

8. Теорема. *Пусть* (S, Σ, μ) — *пространство с* σ-*конечной положительной мерой. Предположим, что* T — *положительный линейный оператор в* $L_1(S, \Sigma, \mu)$, *такой, что последовательность* T^n/n *сходится к нулю в слабой операторной топологии, и пусть* $|T^n - K| < 1$ *для некоторого натурального числа* n *и некоторого вполне непрерывного оператора* K. *Тогда выводы теоремы* 6 *и* 7 *справедливы, если* $C(S)$ *заменено на* $L_1(S, \Sigma, \mu)$.

Доказательство. Рассмотрим сопряженный оператор T^* в пространстве $L_\infty(S, \Sigma, \mu)$. Легко видеть, что так как оператор T положителен, то T^* тоже положителен. Кроме того, если $T^n = K + V$, где K вполне непрерывен и $|V| < 1$, то $(T^*)^n = K^* + V^*$, и K^* вполне непрерывен по теореме VI.5.2, в то время как $|V^*| < 1$ по лемме VI.2.2. Далее, по условию теоремы, $T^n/n \to 0$ в слабой операторной топологии. Рассуждения, аналогичные примененным в доказательстве следствия 4, показывают, что последовательность $\{T^n/n\}$ сходится к нулю в равномерной операторной топологии $B(L_1)$. Тогда, по лемме VI.2.2, последовательность $\{T^{*n}/n\}$ сходится в равномерной операторной топологии $B(L_\infty)$ и, следовательно, в слабой операторной топологии этого пространства. Таким образом, мы показали, что условия, которым удовлетворяет T, выполнены также и для T^*.

Далее, теорема V.8.11 утверждает, что существует компактное хаусдорфово пространство S_1, такое, что $L_\infty(S, \Sigma, \mu)$ изометрически изоморфно пространству $C(S_1)$ и что изоморфизм сохраняет понятие положительности. Поэтому из теоремы 5 видно, что все точки спектра $\varrho(T^*)$, равные по модулю единице, есть корни из единицы, а по лемме VII.3.7 то же верно и для спектра $\sigma(T)$. Остальные выводы теорем 6 и 7 доказываются точно так же, как и раньше, так как, чтобы их установить, не использовалось никаких специальных свойств пространства $C(S)$, ч. т. д.

Мы закончим этот параграф, показав вкратце, как уже полученные результаты могут быть применены к теории марковских процессов. Изложение здесь неполно; за подробностями читателя можно отослать к статье Иосиды и Какутани [2]. Их изложение не совпадает в точности с нашим, но в существенном они не различаются.

Пусть (S, Σ, μ) — пространство с конечной положительной мерой; рассмотрим вещественнозначную функцию P, определенную на $S \times \Sigma$. Функция P называется функцией *вероятностей перехода*; мы считаем число $P(t, e)$ вероятностью того, что по прошествии единицы времени точка $t \in S$ будет находиться в множестве $e \in \Sigma$. Пусть через $B(S, \Sigma)$ обозначено пространство ограниченных Σ-измеримых комплекснозначных функций на S с нормой $|f| = \sup_{s \in S} |f(s)|$, $f \in B(S, \Sigma)$. Через $ca(S, \Sigma)$ обозначим пространство вполне аддитивных комплекснозначных мер, определенных на σ-алгебре Σ. Предположим, что

$$(\alpha)\ P(\cdot, e) \in B(S, \Sigma), \qquad e \in \Sigma;$$

$$(\beta)\ P(t, \cdot) \in ca(S, \Sigma), \qquad t \in S;$$

$$(\gamma)\ P(t, e) \geqslant 0, \qquad t \in S;\ e \in \Sigma;$$

$$(\delta)\ P(t, S) = 1, \qquad t \in S.$$

Из этих предположений легко выводится, что вероятность того, что точка $t \in S$ будет находиться в множестве $e \in \Sigma$ по прошествии n единиц времени, задается рекуррентными соотношениями

$$P^{(n)}(t, e) = \int_S P^{(n-1)}(t, ds), P(s, e) =$$

$$= \int_S P(t, ds) P^{(n-1)}(s, e) \qquad n = 2, 3, \ldots,$$

где $P^{(1)} = P$. Проблема Маркова состоит в исследовании асимптотического поведения последовательности $\{P^{(n)}(t, e)\}$ и значений $n^{-1} \sum_{j=0}^{n-1} P^{(j)}(t, e)$ в том случае, когда $P^{(0)}(t, e) = \chi_e(t)$.

В этом случае мы, естественно, приходим к изучению двух линейных отображений

$$f \to Tf = \int_S f(s) P(\cdot, ds), \qquad f \in B(S, \Sigma),$$

$$\mu \to T'\mu = \int_S \mu(ds) P(s, \cdot), \qquad \mu \in ca(S, \Sigma),$$

которые действуют в пространствах $B(S, \Sigma)$ и $ca(S, \Sigma)$ соответственно. Легко видеть, что оператор T и его итерации положительны и имеют нормы, равные единице. Кроме того, функция, равная тождественно единице, не изменяется оператором T, так что $1 \in \sigma(T)$. При изучении таких процессов обычно накладывают дополнительные условия на функцию P, которые гарантируют существование целого числа n и вполне непрерывного оператора K в $B(S, \Sigma)$, таких, что $|T^n - K| < 1$.

Заметим, что пространство $B(S, \Sigma)$ изометрически изоморфно, в силу теоремы IV.6.18, пространству $C(S_1)$, где S_1 — некоторое бикомпактное хаусдорфово пространство. Так как изоморфизм сохраняет нормы и положительность, то результаты теорем 6 и 7 справедливы для оператора T в пространстве $B(S, \Sigma)$. Функцию P вероятностей перехода можно разложить аналогично разложению пространства $B(S, \Sigma)$, найденному в теоремах 6 и 7. Быть может, еще более удивительно то, что может быть получено другое разложение пространства. Именно, если g — размерность подпространства $E(1; T)B(S, \Sigma)$, то можно разложить S на g взаимно непересекающихся борелевских множеств e_i, $i=1, \ldots, g$, которые называются *эргодическими ядрами* и определяются с точностью до множеств нулевой меры, и на дополнительную часть $\Delta = S - \bigcup_{i=1}^{g} e_i$, называемую *диссипативной частью* S. Эти множества обладают тем свойством, что

$$P(t, e_i) = 1, \qquad t \in e_i,$$

$$\sup_{t \in S} P^{(n)}(t, \Delta) < M\alpha^n, \quad 0 < \alpha < 1, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Эти соотношения можно пояснить, сказав, что если точка $t \in e_i$, то она переносится процессом T (с вероятностью единица) в то же эргодическое ядро e_i и что с возрастанием времени диссипативная часть рассеивается. Кроме того, ядра e_i не могут быть разложены на меньшие множества, обладающие первым из отмеченных свойств. Однако каждое ядро e_i можно еще расщепить на конечное число непересекающихся борелевских множеств $e_{i1}, \ldots, e_{ik_i}$, где k_i — делитель целого числа N теоремы 7 и $\sum_{i=1}^{g} k_i = \dim E_P[B(S, \Sigma)]$. Множества e_{ij}, $j = 1, \ldots, k_i$, называются *подэргодическими ядрами*, принадлежащими e_i; они определяются с точностью до множеств нулевой меры и $e_i = \bigcap_{j=1}^{k_i} e_{ij}$. Кроме того, полагая $e_{i, k_i+1} = e_{i1}$, имеем

$$P(t, e_{i, j+1}) = 1, \qquad t \in e_{ij},$$

так что процесс (с вероятностью единица) переводит точки эргодического ядра циклически по подэргодическим ядрам, которые ему принадлежат.

9. Упражнения по эргодической теории

1. Показать, что теорема 5.9 и следствие 5.5 остаются справедливыми, если $p > 1$, даже если (S, Σ, μ) — пространство с бесконечной мерой.

2. Показать, что если пространство с мерой (S, Σ, μ) в теореме 5.9 таково, что $\mu(S) = \infty$, то необходимым и достаточным условием справедливости теоремы и в случае $p=1$ является существование для любого $\varepsilon > 0$ и любого $e \in \Sigma$, $\mu(e) < \infty$, такого множества $a \in \Sigma$, что $\mu(a) < \infty$ и $n^{-1} \sum_{j=0}^{n-1} \mu(\varphi^{-j}(e) - a) < \varepsilon$.

3. Пусть $\{T_t\}$ — сильно измеримая, сохраняющая положительность полугруппа операторов в L_1, такая, что $|T(t)|_1 \leqslant 1$, $|T(t)|_\infty \leqslant 1$, $t > 0$. Показать, что для любой функции $f \in L_p$, $p \geqslant 1$ существует измеримая функция f^*, конечная почти всюду, такая, что

$$\int_0^\infty |(T_t f)^\cdot(s)| \beta(t)\, dt \leqslant f^*(s) \int_0^\infty \beta(t)\, dt$$

для любой положительной и убывающей функции β. Показать, что если $f \in L_p$, $p > 1$, то мы можем выбрать $f^* \in L_p$.

4. Пусть $\{T(t_1, \ldots, t_k)\}$ — сильно измеримая, сохраняющая положительность k-параметрическая полугруппа операторов в L_1, такая, что $|T(t_1, \ldots, t_k)|_1 \leqslant 1$, $|T(t_1, \ldots, t_k)|_\infty \leqslant 1$, $t_i > 0$. Показать, что если выполнено одно из следующих условий:

(a) $p \geqslant 1$ и $\beta(t_1, \ldots, t_k) = \gamma(t_1^2 + \ldots + t_k^2)$, где γ — положительная и убывающая функция, или

(b) $p > 1$ и $\beta(t_1, \ldots, t_k) = \prod_{i=1}^{k} \gamma_i(t_i)$,

где $\gamma_i(t_i)$ — положительная и убывающая функция $t_i > 0$, $i = 1, \ldots, k$, то для любой функции $f \in L_p$ существует измеримая функция f^*, конечная почти всюду и такая, что для почти всех s

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty |T(t_1, \ldots, t_k)(f, s)| \beta(t_1, \ldots, t_k)\, dt_1 \ldots dt_k \leqslant$$
$$\leqslant f^*(s) \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \beta(t_1, \ldots, t_k)\, dt_1, \ldots, dt_k,$$

Показать, что если $p > 1$, то мы можем выбрать $f^* \in L_p$.

5. Пусть β — положительная четная интегрируемая функция вещественной переменной x, которая убывает при $x > 0$. Пусть

$\beta(x) \geqslant |\gamma(x)|$, функция γ измерима и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \gamma(x)\,dx = 1$. Тогда для функций $f \in L_p$

$$\lim_{t\to\infty} t \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \gamma(t(x-y))\, f(y)\, dy = f(x)$$

при почти всех x.

6. Пусть β — положительная интегрируемая функция вещественных переменных $x_1, \ldots, x_n$, которая имеет вид $\beta(x_1, \ldots, x_n) = \beta_1(x_1^2, + \ldots + x_n^2)$, где β_1 — убывающая функция. Пусть $\beta(x_1 \ldots, x_n) \geqslant |\gamma(x_1, \ldots, x_n)|$, функция γ измерима и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \gamma(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n = 1$. Тогда для функций $f \in L_p$

$$\lim_{t\to\infty} t^n \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \gamma(t(x_1-y_1), \ldots, t(x_n-y_n))\, f(y_1, \ldots, y_n)\, dy_1 \ldots dy_n = f(x_1, \ldots, x_n)$$

при почти всех x.

7. (Харди — Литлвуд.) Пусть h — гармоническая функция, определенная в круге $x^2+y^2 < 1$, и $1 < p < \infty$. Предположим, что $\int\limits_0^{2\pi} |h(re^{i\theta})|^p\, d\theta \leqslant K$, $0 < r < 1$. Пусть $h^*(\theta) = \max\limits_{0<r<1} h(re^{i\theta})$. Показать, что существует абсолютная постоянная C, такая, что $\int\limits_0^{2\pi} |h^*(\theta)|^p\, d\theta \leqslant C_p K$. Показать что, $\lim\limits_{r\to 1} h(re^{i\theta})$ существует почти всюду. (Указание: сравните с упражнением IV.14.60.)

8. Пусть h — гармоническая функция, определенная в шаре $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 < 1$ эвклидового n-мерного пространства. Пусть $1 < p < \infty$, $0 < K < \infty$. Предположим, что при всех r, $0 < r < 1$, интеграл функции $|h(rx)|^p$ по поверхности единичной сферы не превосходит K. Положим $h^*(x) = \sup\limits_{0<r<1} |h(rx)|$ для $|x| = 1$; показать, что существует абсолютная постоянная $C_{n,p}$, такая, что интеграл h^{*p} по поверхности единичной сферы не превосходит $C_{n,p} K$. Показать, что $\lim\limits_{r\to 1} h(rx)$ существует для почти всех x на поверхности единичной сферы.

9. Пусть h — бесконечно дифференцируемая функция $2n$ вещественных переменных $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$, определенная в обла-

сти $x_i^2+y_i^2<1$, $i=1, \ldots, n$. Предположим, что при всех $i=1, \ldots, n$ $\partial^2 h/\partial x_i^2+\partial^2 h/\partial y_i^2=0$, а также, что $p>1$, и при $0<r<1$

$$\int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} |f(r\cos\vartheta_1, r\cos\vartheta_2, \ldots, r\sin\vartheta_n)|^p\, d\vartheta_1 \ldots d\vartheta_n \leqslant K.$$

Показать, что

$$\lim f(r_1\cos\theta_1, \ldots, r_n\sin\theta_n) \qquad r_1 \to 1, \ldots, r_n \to 1$$

существует при почти всех $\theta_1, \ldots, \theta_n$.

10. Пусть h — гармоническая функция, такая, как в упражнении 7. Показать, что при почти всех ϑ существует предел $\lim\limits_{z_i \to e^{i\vartheta}} (z_i)$, если $|\arg(1-z_i e^{-i\vartheta})| \leqslant K < \pi/2$. (Указание: использовать метод упражнения 7 с измененным ядром.)

11. Пусть f — измеримая функция вещественной переменной x, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и $f \in L_p$. Показать, что при почти всех x мы имеем

(a) $$\lim_{t\to\infty} \sqrt{t/\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t(x-y)^2} f(y)\, dy = f(x);$$

(b) $$\lim_{t\to\infty} t \int_x^{\infty} e^{t(x-y)} f(y)\, dy = f(x);$$

(c) $$\lim_{t\to\infty} (\pi t)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin t(x-y)}{x-y}\right)^2 f(y)\, dy = f(x);$$

(d) $$\lim_{\varepsilon\to 0+} (\varepsilon/\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\varepsilon^2+(x-y)^2} f(y)\, dy = f(x).$$

12. Пусть f — измеримая функция вещественных переменных $x_1, \ldots, x_n$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и $f \in L_p$. Показать, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ при почти всех $x_1, \ldots, x_n$ равна

(a) $$\lim_{t\to\infty} \left(\frac{t}{\pi}\right)^{n/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t\{(x_1-y_1)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2\}} f(y_1, \ldots, y_n) \times$$
$$\times\, dy_1 \ldots dy_n;$$

(b) $$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{(\pi t)^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{\frac{\sin t(x_1-y_1) \ldots \sin t(x_n-y_n)}{(x_1-y_1) \ldots (x_n-y_n)}\right\}^2 \times$$
$$\times f(y_1, \ldots, y_n)\, dy_1 \ldots dy_n.$$

13. Показать, что, применяя теоремы 7.5 и 7.7 *непосредственно* к полугруппе $\{S_t\}$, определяемой равенством

$$(S_t f)(x_1, \ldots, x_n) =$$
$$= t^{n/2} \pi^{-n/2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t\{(x_1-y_1)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2\}} f(y_1, \ldots, y_n)\, dy_1 \ldots dy_n,$$

можно получить неравенство, вполне достаточное для того, чтобы прийти к результату (a) предыдущего упражнения. Доказать, что отсюда следует теорема Лебега, которая утверждает, что для интегрируемой функции f

$$\lim_{h\to 0+} h^{-n} \int\limits_{x_1}^{x_1+h} \ldots \int\limits_{x_n}^{x_n+h} f(y_1, \ldots, y_n)\, dy_1 \ldots dy_n = f(x_1, \ldots, x_n)$$

почти всюду. Показать также, что из этой теоремы Лебега вытекает результат (b) предыдущего упражнения.

14. Пусть f — функция такая же, как в упражнении 12, и $p > 1$. Показать, что в этом случае $f(x_1, \ldots, x_n)$ при почти всех $x_1, \ldots, x_n$ равна

$$\text{(a)}\ \lim \left(\frac{t_1 \ldots t_n}{\pi^n}\right)^{1/2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} t_i (x_i - y_i)^2\right) \times$$
$$\times f(y_1, \ldots, y_n)\, dy_1 \ldots dy_n;$$

$$\text{(b)}\ \lim \frac{1}{(t_1 \ldots t_n)\pi^n} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{\sin t_i (x_i - y_i)}{x_i - y_i}\right)^2 f(y_1, \ldots, y_n) \times$$
$$\times dy_1 \ldots dy_n;$$

$$\text{(c)}\ \lim (h_1 \ldots h_n)^{-1} \int\limits_{x_1}^{x_1+h_1} \ldots \int\limits_{x_n}^{x_n+h_n} f(y_1, \ldots, y_n)\, dy_1 \ldots dy_n,$$

где пределы берутся при $t_1, \ldots, t_n \to \infty$ и $h_1, \ldots, h_n \to 0+$. [Часть (c) есть результат Сакса, Зигмунда и Марцинкевича.]

15. Пусть (S, Σ, μ) — пространство с конечной положительной мерой и T — оператор в $L_1(S, \Sigma, \mu)$, $|T|_1 \leqslant 1$, $|T|_\infty \leqslant 1$. Положим $f^* = \sup\limits_{1 \leqslant n} |A(n)(f, \cdot)|$ для любой функции $f \in L_1$. Показать, что

(a) если $f \in L_1$, то $f^* \in L_p(S, \Sigma, \mu)$ для любого p, $0 < p < 1$;

(b) если $\int\limits_S |f(s)|(1 + \log^+ |f(s)|)^k \mu(ds) < \infty$,

то

$$\int\limits_S |f^*(s)|(1+\log^+|f^*(s)|)^{k-1}\mu(ds)<\infty.$$

Установить соответствующие результаты для сильно измеримой n-параметрической полугруппы операторов.

16. Показать, что сходимость почти всюду в теореме 6.9 сохраняется, если (S, Σ, μ) — пространство с конечной мерой и $\int\limits_S |f(s)|(1+\log^+|f(s)|)^{k-1}\mu(ds)<\infty$. Установить соответствующее обобщение теоремы 7.10.

17. Показать, что результат упражнения 9 остается верным если интеграл

$$\int\limits_0^{2\pi}\ldots\int\limits_0^{2\pi}|f(r\cos\theta_1, \ldots, r\sin\theta_n)|(1+\log^+|f(r\cos\theta_1, \ldots \\ \ldots, r\sin\theta_n|)^{n-1}d\theta_1\ldots d\theta_n$$

конечен. Установить соответствующее обобщение результата упражнения 14.

18. Предположим, что $h_1, \ldots, h_n \to 0$, причем отношение $|h_i/h_j|$ остается ограниченным при $1\leqslant i, j\leqslant n_0$ и $n_0+1\leqslant i, j\leqslant n$. Показать, что тогда условие

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(x_1, \ldots, x_n)|(1+\log^+|f(x_1, \ldots, x_n)|)\,dx_1\ldots dx_n<\infty$$

достаточно для того, чтобы обеспечить справедливость результатов упражнения 14.

19. Пусть S — сепарабельное метрическое пространство. Пусть $\mathscr{B}$ — алгебра борелевских множеств S, а μ — σ-конечная мера, определенная на $\mathscr{B}$, причем каждое открытое подмножество S имеет положительную меру μ. Пусть $\{T_n\}$ — последовательность ограниченных операторов в $L_1(S, \mathscr{B}, \mu)$ вида

$$(T_nf)(s)=\int\limits_S K_n(s, t)f(t)\mu(dt).$$

Предположим, что

(I) $K_n(s, t)$ — ограниченная равномерно непрерывная функция s и t при каждом $n\geqslant 1$; $\lim\limits_{s\to s_0} K_n(s, t)=K_n(s_0, t)$ равномерно по $t\in S$ при всех $n\geqslant 1$.

(II) Если U — произвольная окрестность s, то $K_n(s, t)$ сходится равномерно при $n\to\infty$ на $S-U$.

(III) $\lim\limits_{n\to\infty}(T_nf)(s)$ существует почти всюду относительно μ для всех $f\in L_1(S, \mathscr{B}, \mu)$.

Показать, что для всех $\nu \in ca(\mathscr{B})$ предел $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_S K_n(x, y)\,\nu(dy)$ существует почти всюду относительно μ. (Указание: разложить ν на абсолютно непрерывную и сингулярную относительно μ части. Используя метод, применяемый в теореме Банаха IV.11.2, и $C(S)$-плотность $L_1(S, \mathscr{B}, \mu)$ в $ca(\mathscr{B})$, показать, что для $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что

$$\mu\left\{\sup_{1\leqslant n<\infty}\left|\int\limits_S K_n(s, t)\,\nu(dt)\right| > \varepsilon\right\} < \varepsilon,$$

если $v(\nu, S) < \delta$.)

20. Показать, что если функция β в упражнении 5 непрерывна, а функция γ измерима по Борелю, то для любой регулярной и конечной борелевской меры ν предел

$$\lim_{t\to\infty} t \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \gamma(t(x-y))\,\nu(dy)$$

существует почти всюду (по Лебегу). Установить соответствующие обобщения упражнений 6, 7, 8, 10, 11, 12 и 13.

21. Пусть (S, Σ, μ) — пространство с мерой. Пусть A — замкнутый неограниченный оператор с плотной областью определения в $L_1(S, \Sigma, \mu)$, такой, что $R(\lambda; A)$ существует при $\lambda > 0$, и $|R(\lambda; A)|_1 \leqslant 1$, $|R(\lambda; A)_\infty \leqslant 1$ при $\lambda > 0$. Показать, что $\lim\limits_{\lambda\to\infty}(\lambda R(\lambda; A) f)(s)$ существует почти всюду для $f \in L_p$, $1 \leqslant p < \infty$. Показать, что если S — топологическое пространство и если для всех $\lambda > 0$ функция $R(\lambda; A) f$ непрерывна при непрерывной функции f, то при $1 \leqslant p < \infty$ и $f \in L_p$ предел $\lim\limits_{\lambda\to 0}(\lambda R(\lambda; A) f)(s)$ существует почти всюду.

22. Пусть T — преобразование в L_1, $T \geqslant 0$, $|T|_1 \leqslant 1$ и $A(n) = A(T, n)$. Показать, что если функция f вещественна, $f \in L_1$, $\sup\limits_{0\leqslant n} A(n) f \geqslant 0$ почти всюду и $\inf\limits_{0\leqslant n} A(n) f \leqslant 0$ почти всюду, то $f = 0$.

23. (Хопф.) Пусть T — положительное линейное отображение $L_1(S, \Sigma, \mu)$ в себя и $|T|_1 \leqslant 1$. Пусть $f \in L_1$, $g \in L_1$ и $g(s) > 0$ почти всюду. Показать, что

$$\sup_{0\leqslant n} \frac{f(s) + (Tf)(s) + \ldots + (T^n f)(s)}{g(s) + (Tg)(s) + \ldots + (T^n g)(s)} < \infty$$

почти всюду. Вывести отсюда, что предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(s) + \ldots + (T^n f)(s)}{g(s) + \ldots + (T^n g)(s)}$$

существует почти всюду на множестве $\{s \mid \sum\limits_{n=0}^{\infty} (T^n g)(s) < \infty\}$.

24. (Эргодическая теорема Халмоша.) Пусть (S, Σ, μ) — пространство с положительной мерой, $\varphi: S \to S$, и предположим, что $\varphi^{-1} e \in \Sigma$, если $e \in \Sigma$. Пусть ω — неотрицательная измеримая функция, определенная на S. Предположим, что отображение T, определяемое для каждой μ-измеримой функции f равенством $(Tf)(s) = \omega(s) f(\varphi(s))$, отображает $L_1(S, \Sigma, \mu)$ в себя и что $|T|_1 \leqslant 1$. Показать, что если f — вещественная функция в L_1, то не существует множества e положительной меры, такого, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (A(T, n)(f, s) > 0, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} A(T, n)(f, s) < 0,$$

для $s \in e$. Вывести отсюда, что если $f \in L_1$, $g \in L_1$ и $g(s) > 0$ почти всюду относительно μ, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A(T, n)(f, s)}{A(T, n)(g, s)}$$

существует почти всюду.

25. (Гуревич — Окстоби.) Пусть (S, Σ, μ) — пространство с положительной σ-конечной мерой, и пусть $\varphi: S \to S$ имеет следующие свойства:

(a) $\varphi^{-1} e \in \Sigma$, если $e \in \Sigma$;

(b) из равенства $\mu(e) = 0$ следует равенство $\mu(\varphi^{-1} e) = 0$. Пусть $v \in ca(S, \Sigma)$, $v_n(e) = \sum_{j=0}^{n} v(\varphi^{-j} e)$ и $\mu_{(n)}(e) = \sum_{j=0}^{n} \mu(\varphi^{-j} e)$. Показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{dv_{(n)}}{d\mu_{(n)}}(s)$$

существует почти всюду относительно μ. (Указание: воспользоваться результатом предыдущего упражнения.)

26. Пусть (S, Σ, μ), φ, ω и T — такие же, как в упражнении 24. Пусть $g \in L_1$, $g(s) > 0$ почти всюду, и пусть функция f неотрицательна и μ-измерима. Показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A(T, n)(f, s)}{A(T, n)(g, s)}$$

или сходится или расходится к $+\infty$ для почти всех относительно μ точек $s \in S$. Показать, в частности, что если $\omega = 1$ и $\mu(S) < \infty$, то для любой неотрицательной μ-измеримой функции f предел $\lim_{n\to\infty} (A(T, n) f)(s)$ существует или расходится к $+\infty$ почти всюду.

27. Пусть (S, Σ, μ) — пространство с конечной положительной мерой, $0 \leqslant f \in L_1(S, \Sigma, \mu)$ и отображение φ удовлетворяет усло-

виям леммы 5.8. Показать, что

$$\lim_{n\to\infty} (f(s) f(\varphi s) \ldots f(\varphi^n s))^{1/n}$$

существует почти всюду относительно μ.

28. Показать, что если $\{\mu_n\}$ — такая ограниченная последовательность элементов $ca(S, \Sigma)$, что

$$\lim_{m\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} |\mu_n(e_m)| = 0$$

для любой убывающей последовательности $\{e_m\}$ множеств в Σ с пустым пересечением $\bigcap e_m = \varnothing$, то $\{\mu_n\}$ слабо компактна.

29. Показать, что предложение, обратное теореме 6.12, также верно.

30. Показать, что лемма 6.10 выполнена как для конечно аддитивных функций множеств, так и для вполне аддитивных функций множеств.

31. (И. Н. Даукер.) Пусть φ — отображение множества S в себя и Σ — такая σ-алгебра подмножеств S, что $\varphi^{-1} e \in \Sigma$, если $e \in \Sigma$. Неотрицательный элемент $m \in ca(S, \Sigma)$ называется потенциально φ-инвариантным, если существует такой неотрицательный элемент $\mu \in ca(S, \Sigma)$, что $\mu(\varphi^{-1} e) = \mu(e)$ и из равенства $\mu(e) = 0$ следует равенство $m(e) = 0$. Показать, что m потенциально инвариантна тогда и только тогда, когда предел $\tilde{m}(e) = \lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} m(\varphi^{-i} e)$ существует для всех $e \in \Sigma$, и что $\tilde{m}$ есть элемент из $ca(S, \Sigma)$, удовлетворяющий условию $m(\varphi^{-1} e) = \tilde{m}(e)$. (Указание: рассмотреть пространство всех абсолютно непрерывных относительно μ элементов пространства $ca(S, \Sigma)$.)

32. (И. Н. Даукер.) Пусть S, Σ, φ, m — такие же, как в предыдущем упражнении. Показать, что m потенциально инвариантна тогда и только тогда, когда $\lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{j=1}^{n} f(\varphi^j s)$ существует почти всюду относительно m для любой функции $f \in L_\infty(S, \Sigma, m)$.

33. (Данфорд — Миллер.) Пусть S, Σ, m, φ — такие же, как в упражнении 31. Показать, что $\lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(\varphi^j s)$ сходится в смысле $L_1(S, \Sigma, m)$ для любой функции $f \in L_1(S, \Sigma, m)$ только при условии, что существует постоянная $K < \infty$, такая, что

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} m(\varphi^{-i} e) \leqslant K m(e), \quad n = 0, 1, \ldots .$$

34. (И. Н. Даукер.) Пусть S, Σ, φ, m — такие же, как в упражнении 31. Показать, что если при некотором p, $1 \leqslant p < \infty$, предел

$\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1} \sum\limits_{j=0}^{n-1} f(\varphi^j s)$ существует в смысле $L_p(S, \Sigma, m)$ для любой функции $f \in L_p$, то $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1} \sum\limits_{j=0}^{n-1} f(\varphi^j s)$ существует почти всюду относительно m для любой функции $f \in L_p$.

35. (Данфорд — Миллер.) Пусть (S, Σ, μ) — пространство с конечной мерой и при $x_1, \ldots, x_n > 0$ $\varphi_{x_1, \ldots, x_n}$ — отображение S в себя. Предположим, что Λ обозначает меру Бореля — Лебега подмножеств множества $\{x_1, \ldots, x_n \mid x_i > 0\}$. Пусть $\varphi_{x_1, \ldots, x_n}$ обладает следующими свойствами:

(a) множество $\{x_1, \ldots, x_n, s \mid \varphi_{x_1, \ldots, x_n}(s) \in e\}$ $\Lambda \times \mu$-измеримо для любого $e \in \Sigma$;

(b) интеграл $t^{-n} \int\limits_0^t \ldots \int\limits_0^t \mu \{s \mid \varphi_{x_1, \ldots, x_n}(s) \in e\}\, dx_1 \ldots dx_n \leqslant K\mu(e)$

для $0 < t < \infty$ и некоторой постоянной $K < \infty$. Показать, что для любой функции $f \in L_p(S, \Sigma, \mu)$, $1 \leqslant p < \infty$, предел

$$\lim_{t\to\infty} t^{-n} \int\limits_0^t \ldots \int\limits_0^t f(\varphi_{x_1, \ldots, x_n} s)\, dx_1 \ldots dx_n$$

существует как в смысле L_p, так и почти всюду относительно μ. (Указание: использовать метод «замены меры» четырех последних упражнений.)

36. (Рыль-Нарджевский.) Пусть (S, Σ, μ) — пространство с положительной мерой и φ — отображение $S \to S$, такое, что $\varphi^{-1}e \in \Sigma$, если $e \in \Sigma$, и $\mu(\varphi^{-1}e) = 0$, если $\mu(e) = 0$. Показать, что последовательность $n^{-1} \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\varphi^i s)$ сходится почти всюду относительно μ к функции $\tilde{f}$ из L_1 для любой функции $f \in L_1$ тогда и только тогда, когда

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mu(\varphi^{-j} e) \leqslant K\mu(e)$$

для любого множества e конечной меры μ. (Указание: рассмотреть отображение $f(s) \to \chi_A(s) f(\varphi s)$ для любого множества $A \in \Sigma$ с конечной мерой $\mu(A) < \infty$.)

37. Пусть (S, Σ, μ) — пространство с положительной мерой и T — неотрицательное линейное отображение пространства $L_1(S, \Sigma, \mu)$ в себя. Предположим, что $|T|_1 \leqslant 1$ и что существует такая постоянная K, что $|A(T, n)|_\infty \leqslant K$. Показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} (A(T, n) f)(s)$ существует почти всюду относительно μ для любой функции $f \in L_p$, $1 \leqslant p < \infty$.

38. Пусть S — компактное метрическое пространство, и пусть (S, Σ, μ) — пространство с регулярной конечной мерой. Пусть φ — такое отображение S в себя, что множество $\{\varphi^i\}$ отображений равностепенно непрерывно. Показать, что φ метрически транзитивно тогда и только тогда, когда для некоторой точки x множество $\{\varphi^i x\}$ плотно в S.

39. (Г. Вейль.) Пусть $[x_1, \ldots, x_n]$ — точка n-мерного евклидова пространства, причем между ее координатами нет рациональных соотношений. Положим $x_m^{(n)} = [nx_m]$, где через $[y]$ обозначено наибольшее целое число, меньшее вещественного числа y. Показать, что если C — прямоугольное подмножество единичного куба $\{[x_1, \ldots, x_n] \mid 0 \leqslant x_i < 1\}$ и через $v(m)$ обозначено число индексов $k \leqslant m$, для которых $[x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}] \in C$, то $\lim\limits_{m \to \infty} m^{-1} v(m)$ равен объему C.

40. Пусть (S, Σ, μ) — пространство с конечной положительной мерой, и пусть (S, Σ^*, v) — пространство с мерой, равное произведению пространств (S, Σ, μ), повторенных бесконечное число раз. Показать, что отображение $\varphi : S \to S$, определяемое равенством $\varphi(s_1 \times s_2 \times \ldots) = s_2 \times \ldots$, метрически транзитивно.

41. Показать, что для почти всех вещественных чисел x цифра 7 встречается с предельной частотой 0,1 в десятичном выражении x, т. е. что $\lim\limits_{n \to \infty} n^{-1} N(n) = 0,1$, где $N(n)$ число «семерок», встречающихся среди первых n десятичных знаков числа x.

42. Пусть φ — метрически транзитивное отображение пространства (S, Σ, μ) с конечной положительной мерой в себя; предположим, что $\mu(\varphi^{-1} e) = \mu(e)$ для $e \in \Sigma$. Показать, что если функция f неотрицательна, μ-измерима, но не μ-интегрируема, то

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(\varphi^j s) = \infty \text{ почти всюду относительно } \mu.$$

43. Показать, что φ является метрически транзитивным отображением пространства (S, Σ, μ) с конечной положительной мерой в себя тогда и только тогда, когда ни для одной непостоянной μ-измеримой функции f не может выполняться равенство $f(\varphi s) = f(s)$ почти всюду относительно μ, и что в этом случае любая μ-измеримая функция g, удовлетворяющая условию $g(\varphi s) = \lambda g(s)$ почти всюду при $|\lambda| = 1$, равна почти всюду по модулю единице. Показать, что если еще для одной функции $h(\varphi s) = \lambda h(s)$ почти всюду, то $h = \alpha g$.

44. (Эргодическая теорема случайного выбора.) Пусть (S, Σ, μ) — пространство с σ-конечной мерой. Пусть $T_0, \ldots, T_9$ — десять операторов в L_1, причем каждый удовлетворяет неравенствам $|T_i|_1 \leqslant 1$, $|T_i|_\infty \leqslant 1$. Для любой десятичной дроби $\alpha = 0\ \alpha_1 \alpha_2 \ldots$,

такой, что $0 < \alpha < 1$, положим

$$A(n, \alpha) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} T_{\alpha_j} T_{\alpha_{j-1}} \ldots T_{\alpha_1}.$$

Показать, что если функция $f \in L_p(S, \Sigma, \mu)$, $1 \leqslant p < \infty$, то $\lim_{n\to\infty} A(n, \alpha) f$ существует почти всюду для почти всех (по Лебегу) α. Показать, что если $p > 1$, то $\lim_{n\to\infty} A(n, \alpha) f$ существует в смысле L_p и что это же верно, если $\mu(S) < \infty$, для $p = 1$. (Указание: рассмотреть соответствующий оператор J вида

$$(Jf)(s, \alpha) = (T_{\alpha_1} f)(s, \varphi\alpha).\ )$$

10. Примечания и указания

Полугруппы операторов. Теория полугрупп линейных операторов возникла сравнительно недавно; первые результаты в этом направлении были получены в 1930 г. М. Стоуном [10], который изучал группу унитарных операторов в гильбертовом пространстве. С тех пор теория получила существенное развитие, особенно благодаря усилиям Э. Хилле, монография [1] которого дает развернутое изложение абстрактной теории и содержит много приложений к конкретным математическим задачам. Мы отсылаем читателя к этой книге (и ее переизданиям) как по поводу дальнейших результатов, так и за справками. Кроме того, изложение результатов, полученных за последние годы, читатель может найти в обзорной статье Р. Филлипса [9]. Мы лишь приводим здесь ссылки к той небольшой доле теории, которая представлена в § 1, и не говорим о других результатах.

Представление равномерно непрерывной группы операторов в виде показательной функции было получено независимо Натаном [1, стр. 525], Нагумо [1, стр. 72] и Иосидой [7, стр. 24]; на самом деле Нагумо и Иосида рассматривали случай группы в B-алгебре. Из книги Хилле [1, стр. 200] видно, что если при $t \in (0, \infty)$ отображение $t \to T(t)$ измеримо в равномерной операторной топологии и если $T(t+s) = T(t)T(s)$, $t, s > 0$, то оно и непрерывно в этой топологии при $t > 0$. Однако эти условия не обеспечивают существования предела $\lim_{t\to 0} T(t)$ или дифференцируемости функции $T(t)$ при $t > 0$, поэтому выводы теоремы 2 в этом случае неверны.

Дж. Нейманом [10] было показано, что если $U(t)$, $-\infty < t < \infty$, есть однопараметрическая группа унитарных операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ и при всех $x, y \in \mathfrak{H}$ функция $(U(t)x, y)$ измерима, то для любого $x \in \mathfrak{H}$ функция $U(t)x$ непрерывна при $t \in (-\infty, \infty)$. Этот результат был обобщен Данфордом [12], который показал, что если $T(t)$, $t>0$, есть полугруппа ограниченных операторов в B-пространстве и при любых $x^* \in \mathfrak{X}^*$, $x \in \mathfrak{X}$ функция $x^*T(\cdot)x$ измерима на $(0, \infty)$, если $|T(t)|<M$ для t из некоторого интервала $(0, a)$ и подпространство $\{T(t)x \mid t \in (0, \infty)\}$ при любом $x \in \mathfrak{X}$ сепарабельно, то функция $T(\cdot)$ сильно непрерывна справа. Из рассуждений Данфорда вытекает (см. также Хилле [1, стр. 224]), что если функция $T(\cdot)x$ измерима на $(0, \infty)$ и $T(\cdot)$ ограничена на любом конечном интервале в $(0, \infty)$, то функция $T(\cdot)x$ непрерывна на $(0, \infty)$. То, что предположение ограниченности несущественно, было показано Филлипсом [8] при помощи остроумного соображения, приведенного в этой главе (см. 1.3). Однако одного условия измеримости функции $x^*T(\cdot)x$, $x^* \in \mathfrak{X}^*$, $x \in \mathfrak{X}$, еще не достаточно, чтобы сделать вывод о сильной непрерывности. Полугруппы с таким свойством слабой измеримости были изучены Феллером [1].

Доказательство теоремы 10, приведенное нами, принадлежит Данфорду и Сигалу [1]. Некоторые более общие результаты такого рода были получены Хилле [1, стр. 228—231]. Впервые условия, при которых замкнутый линейный оператор порождает сильно непрерывную полугруппу, были даны независимо Хилле [1, стр. 238] и Иосидой [8]. Полная характеристика инфинитезимального оператора, которую дает теорема 13, была почти одновременно получена Феллером [2], Миядера [1] и Филлипсом [6]. По поводу других результатов в этом направлении смотрите книгу Хилле [1] и работу Филлипса [10][1]).

Результаты о возмущении операторов, порождающих полугруппу, принадлежат Филлипсу [6]. Смотрите также статью Филлипса [10].

Функции инфинитезимального оператора. Хилле [1, гл. 15] построил операторное исчисление инфинитезимального оператора полугруппы для функций, которые суть преобразования Лапласа—Стильтьеса и аналитичны на спектре оператора. Немного другое построение было предложено Филлипсом [5]. Бейд [1] показал, что для инфинитезимального оператора группы можно расширить класс функций, включив в него многочлены и другие функции, с аналогичными условиями на их рост. Изложение параграфа 2 очень близко следует работе Бейда. Теорема 13 обобщает некоторые теоремы Полларда [1], Уиддера [2] и Уиддера и Хиршмана [1, 3] об обращении свертки при помощи дифференциальных операторов бесконечного порядка. Имеется обширная литература по этой задаче, в частности о трудном вопросе точечной сходимости последовательности $\{p_n(D)f(D)x(t)\}$ к функции $x(t)$, где $f(D)$—преобразование типа свертки, а $\{p_n(D)\}$—обращающая последовательность. Ссылки на дальнейшие рассмотрения этой задачи могут быть най-

---

[1]) Второе издание книги Хилле [1], выпущенное им совместно с Филлипсом и содержащее большую часть упоминаемых здесь и ниже результатов, переведено и в ближайшее время выходит в Издательстве иностранной литературы. —*Прим. ред.*

дены в названных выше статьях и в книге Хиршмана и Уиддера [1]. Смотрите также обзорные статьи Шёнберга [3] и Уиддера [3]. Теорема 13 в том виде, как она приведена нами, принадлежит Бейду [1]. Следствие 14 — результат Уиддера и Хиршмана [2].

Эргодическая теория. Хотя развитие эргодической теории происходило в основном после 1931 г., имеется очень много литературы по этому вопросу. К счастью, прекрасная монография Хопфа [1] излагает раннее развитие теории, а обзорные статьи Халмоша [4], Какутани [10] и Окстоби [1] довольно полно рассматривают несколько разных аспектов теории и содержат много ссылок на предшествующую литературу. (См. также статью Ф. Рисс [18] и Халмош [11*].) Поэтому нам нет необходимости приводить длинный список или библиографию этой теории. Однако мы хотим сделать несколько замечаний, не лишенных интереса, по поводу того материала, который рассматривался в тексте главы.

Статистическая эргодическая теорема. Первое доказательство статистической эргодической теоремы было дано Дж. Нейманом [11], после того как Купменом [1] было замечено, что отображения, сохраняющие меру, на пространстве S с мерой приводят к унитарным операторам в $L_2(S)$. Доказательство Дж. Неймана было основано на спектральной теории унитарных операторов в гильбертовом пространстве. Было дано много обобщений этой эргодической теоремы как для более общих B-пространств, так и для более общих операторов. Статьи Виссера [1], Ф. Рисса [15, 17], Иосиды [4], Какутани [13], Лорха [8] и Иосиды и Какутани [2] основаны на различных свойствах слабой компактности. Геометрическое доказательство для операторов в гильбертовом пространстве, основанное на том факте, что существует кратчайшее расстояние от точки до выпуклого множества, было дано Винером [3]. Короткие геометрические доказательства, верные для равномерно выпуклых пространств, были даны Г. Биркгофом [7] и Ф. Риссом [16, 18]. Другое доказательство, основанное на том интересном факте, что неподвижная точка сжимающего оператора в гильбертовом пространстве является также неподвижной точкой его сопряженного оператора, было дано Риссом и Секефальви-Надем [2]. Г. Биркгофом [2], Какутани [7, 8] и Ф. Риссом [17] были доказаны теоремы для абстрактных линейных структур.

Ряд обобщений статистической эргодической теоремы для групп или полугрупп операторов более общих, чем дискретная полугруппа $\{T^n | n=0, 1, 2, \ldots\}$, был получен в статьях Алаоглу и Биркгофа [1, 2], Г. Биркгофа [8], Дэя [8, 10], Данфорда [9, 11], Эберлейна [3, 4] и Винера [3].

Эргодические теоремы типа статистической эргодической теоремы, но в которых другие методы суммирования заменяют обычно используемый $(C, 1)$-метод, были доказаны Л. Коэном [2], Хилле [1, гл. 14] и Филлипсом [4].

Точечная или индивидуальная эргодическая теорема. Эта теорема была установлена Дж. Биркгофом [1], который рассматривал гомеоморфизмы многообразий, сохраняющие меру. Случай пространства с конечной мерой рассматривался Хинчиным [1], а с бесконечной мерой — Степановым [1]. Некоторые другие обобщения были даны Винером[3], Винером и Уинтнером [1], У. Гуревичем [1], Дубом[1], Даукером [2, 3], Данфордом и Миллером [1], Окстоби [2], Риссом [19], Рыль-Нарджевским [1], Халмошем [8], Хинчиным [2].

Другая форма теоремы о точечной сходимости (теорема 6.8) принадлежит Винеру [3]. Различные доказательства теоремы Винера были даны Иосидой и Какутани [1] и Фукамия [1]. Важным шагом в доказательстве как индивидуальной эргодической теоремы, так и винеровских эргодических теорем является *максимальная* эргодическая теорема (лемма 6.7). Доказательство этого результата было дано Иосидой и Какутани [1], хотя аналогичный результат был установлен в статье Дж. Биркгофа. Основным в нашем изложении было обобщение максимальной эргодической теоремы на марковские процессы (особенно лемма 6.2); эти результаты принадлежат Э. Хопфу [2]. Максимальная эргодическая теорема рассматривалась также Даукером [2], Каратеодори [2], Питтом [1], Риссом [18] и Хопфом [3]. Хартман [1] доказал максимальную эргодическую теорему для случая потока.

Индивидуальная эргодическая теорема для n-параметрической группы преобразований, сохраняющих меру, дана Винером [3]. Некоммутативный случай рассмотрели Данфорд [3] и Зигмунд [2]. Обобщение для абстрактных групп дал Кальдерон[1].

Теория марковских процессов есть обобщение теории точечных преобразований. Эргодическая теория таких процессов изложена в работах Дуба [2, 3], Какутани [16], Иосиды [9], Иосиды и Какутани [2] и в совсем недавней статье Э. Хопфа [2]. Мы отсылаем также читателя к недавно вышедшей монографии Дуба [4].

Равномерная эргодическая теорема. Этот результат принадлежит Иосиде и Какутани; смотрите их статью [2], где эта теорема применяется в теории марковских процессов для вывода ряда результатов, ранее полученных Дёблэном, Дубом, Фреше и Крыловым и Боголюбовым. За более подробными вероятностными рассмотрениями марковских процессов мы отсылаем читателя к монографии Дуба [4]. Такие процессы важны в теории тасовки карт.

[В последнее время теория динамических систем была сильно продвинута вперед благодаря идеям А. Н. Колмогорова. Именно им был предложен новый метрический инвариант — энтропия. Смотрите в связи с этим работы А. Н. Колмогорова [4*, 5*], В. А. Рохлина [4*—6*], Я. Синая [1*, 2*], Л. Абрамова [1*].

С другой стороны, идеи теории полугрупп оказались весьма плодотворными при изучении марковских процессов. См. по этому поводу статьи В. Феллера [4—7], Е. Б. Дынкина [1*]. — *Ред.*]

Библиография

В этот список входит литература, цитированная в обоих томах настоящей книги. [Звездочкой отмечены работы, добавленные редакторами русского издания. Для монографий, переведенных на русский язык, указан также год издания оригинала (на который ссылаются авторы).— Ред.]

А б д е л ь г а й (A b d e l h a y J.)

1. Caractérisation de l'espace de Banach de toutes les suites de nombres réels tendant vers zéro, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **229** (1949)., 1111—1112.
2. On a theorem of representation, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55 (1949), 408—417.

А б е л ь (A b e l N. H.)

1. Untersuchungen über die Reihe:
$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\ldots \text{ u. s. w.}$$
J. Reine Angew. Math., **1** (1826), 311—339.

А б р а м о в Л.

1*. Об энтропии автоморфизма соленоидальной группы, *Теория вероятностей и ее применения*, **4**, вып. 3, 1958, 249—254.

А д а м а р (H a d a m a r d J.)

1. Sur les opérations fonctionelles, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **136** (1903) 351—354.

А д а м с (A d a m s C. R.)

1. The space of functions of bounded variation and certain general spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **40** (1936), 421—438.

А д а м с и К л а р к с о н (A d a m s C. R., C l a r k s o n J. A.)

1. On definitions of bounded variation for functions of two variables, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **35** (1933), 824—854.
2. Properties of functions $f(x, y)$ of bounded variation, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **36** (1934), 711—730. Исправлено там же, **46** (1939), 468.
3. On convergence in variation, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **40** (1934), 413—417.
4. The type of certain Borel sets in several Banach spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **45** (1939), 322—334.

А д а м с и М о р с (A d a m s C. R., M o r s e A. P.)

1. On the space (BV), *Trans. Amer. Math. Soc.*, **42** (1937), 194—205.
2. Continuous additive functional on the space (BV) and certain subspaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 48 (1940), 82—100.

А к и л о в Г. П.

1. О распространении линейных операций, *ДАН СССР*, **57** (1947), 643—646.
2. Необходимые условия распространимости линейных операций, *ДАН СССР*, **59** (1948), 417—418.

А л а о г л у (A l a o g l u L.)

1. Weak topologies of normed linear spaces, *Ann. of Math.* (2), **41** (1940), 252—267.
2. Weak convergence of linear functional (abstract), *Bull. Amer. Math. Soc.*, **44** (1938), 196.

Алаоглу и Биркгоф (Alaoglu L., Birkhoff G.)
1. General ergodic theorem, *Proc. Nat. Acad. USA*, **25** (1939), 628—630.
2. General ergodic theorems, *Ann. of Math.* (2), **41** (1940), 293—309.

Александров А. Д.
1. Additive set functions in abstract spaces, I—III.
I. *Матем. сб.*, 8 (50), (1940), 307—348.
II. Там же, **9** (51), (1941), 563—628.
III. Там же, **13** (55), (1943), 169—238.

Александров П. С.
1*. Введение в общую теорию множеств и функций, М., Гостехиздат, 1948.

Александров П. С. и Хопф (Alexandroff P., Hopf H.)
1. Topologie, I. J. Springer, Berlin, 1935.

Алексевич (Alexiewicz A.)
1. On sequences of operations, I—IV.
I. *Studia Math.*, **11** (1950), 1—30.
II. Там же, **11** (1950), 200—236.
III. Там же, **12** (1951), 84—92.
IV. Там же, **12** (1951), 93—101.
2. Linear operations among bounded measurable functions, I, II.
I. *Ann. Soc. Polon. Math.*, **19** (1946), 140—161.
II. Там же, **19** (1946), 161—164.
3. On differentiation of vector-valued functions, *Studia Math.*, **11** (1950), 185—196.
4. Continuity of vector-valued functions of bounded variation, *Studia Math.*, **12** (1951), 133—142.
5. On some theorems of S. Saks, *Studia Math.*, **13** (1953), 18—29.
6. A theorem on the structure of linear operations, *Studia Math.*, 14 (1953), 1—12 (1954).

Алексевич и Орлич (Alexiewicz A., Orlicz W.)
1. Remarks on Riemann-integration of vector-valued functions, *Studia Math.*, **12**, (1951), 125—132.
2. On analytic vector-valued functions of a real variable, *Studia Math.*, **12** (1951), 108—111.
3. On the differentials in Banach spaces, *Ann. Soc. Polon. Math.*, **25** (1952), (1953), 95—99.
4. Analytic operations in real Banach spaces, *Studia Math.*, **14** (1953), 57—78.

Альбрехт (Albrycht J.)
1. On a theorem of Saks for abstract polinomials, *Studia Math.*, **14** (1953), 79—81.

Альтман М. Ш. (Altman M. S.)
1. О базисах в пространстве Гильберта, *ДАН СССР*, **69** (1949), 483—485.
2. О биортогональных системах, *ДАН СССР*, **67** (1949), 413—416.
3. On linear functional equations in locally convex spaces, *Studia Math.*, **13** (1953), 194—207.
4. Mean ergodic theorem in locally convex topological spaces, *Studia Math.*, **13** (1953), 190—193.
5. The Fredholm theory of linear equations in locally convex topological spaces, *Bull. Acad. Polon. Sci. Cl.* III. **2** (1954), 267—269.

Альфорс (Ahlfors L. V.)
1. Complex analysis, McGraw-Hill, New York (1953).

Амброзе (Ambrose W.)
1. Structure theorems for a special class of Banach algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **57** (1945), 364—386.
2. Measures on locally compact topological groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **61** (1947), 106—121.

3. Direct sum theorem for Haar measures, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **61** (1947), 122—127.
4. Spectral resolution of groups of unitary operators, *Duke Math. J.*, **11** (1944), 589—595.

Андзаи и Какутани (Anzai H., Kakutani S.)
1. Bohr compactifications of a locally compact abelian group, I, II. I. *Proc. Imp. Acad. Tokyo.*, **19** (1943), 476—480. II. Там же, **19** (1943), 533—539.

Аренс (Arens R. F.)
1. Duality on linear spaces, *Duke Math., J.*, **14** (1947), 787—794.
2. The space L^{ω} and convex topological rings, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **52** (1946), 931—935.
3. Representation of functionals by integrals, *Duke Math. J.*, **17** (1950), 499—506.
4. Approximation in, and representation of, certain Banach algebras, *Amer. J. Math.*, **71** (1949), 763—790.
5. A topology for spaces of transformations, *Ann. of Math.* (2), **47** (1946), 480—495.
6. On a theorem of Gelfand and Neumark, *Proc. Nat. Acad. USA*, **32** (1946), 237—239.
7. Representation of Banach *-algebras, *Duke Math., J.*, **14** (1947), 269—282.
8. Linear topological division algebras, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **53** (1947), 623—630.
9. A generalization of normed rings, *Pacific J. Math.*, **2** (1952), 455—471.

Аренс и Капланский (Arens R. F., Kaplansky I.)
1. Topological representation of algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **63** (1948), 457—481.

Аренс и Келли (Arens R. F., Kelley J. L.)
1. Characterizations of the space of continuous functions over a compact Hausdorff space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **62** (1947), 499—508.

Арну (Arnous E.)
1. Sur les groupes continus de transformations unitaires de l'espace de Hilbert, *Comment. Math. Helv.*, **19** (1946), 50—60.

Ароншайн (Aronszajn N.)
1. Caractérisation métrique de l'espace de Hilbert, des espaces vectoriels et de certains groupes métriques, *C. R. Acad. Sci.*, Paris, **201** (1935), 811—813, 873—875.
2. Le correspondant topologique de l'unicité dans la théorie des équations différentielles, *Ann. of Math.* (2), **43** (1942), 730—738.
3. Approximation methods for eigenvalues of completely continuous symmetric operators. Proceedings of the Symposium on Spectral Theory and Differential Problems (1951), 179—202. Oklahoma Agricultural and Mechanical College, Stillwater, Oklahoma.
4. The Rayleigh—Ritz and A. Weinstein methods for approximation of eigenvalues, I, II, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **34** (1948), 474—480, 594—601.
5. Sur quelques problèmes concernant les espaces de Minkowski et les espaces vectoriels généraux, *Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* (6), **26** (1937), 374—376.

Ароншайн и Смит (Aronszajn N., Smith K. T.)
1. Invariant subspaces of completely continuous operators, *Ann. of Math.* (2), **60** (1954), 345—350. Есть русский перевод: Математика, 2 : 1 (1958), 97—102.

Артеменко А. П.
1. Общий вид линейного функционала в пространстве функций ограниченной вариации, *Матем. сб.*, 6 (48), (1939), 215—220.

2. О позитивных линейных функционалах в пространстве почти периодических функций H. Bohr'a, *Хрк., Зап. матем. о-ва.* (4) 16, (1940), 111—114.

Арцела (Arzelà C.)

1. Intorno alla continuità della somma di infinite funzioni continue, *Rend. dell'Accad. R. delle Sci. dell'Istituto di Bologna* (1883—1884), 79—84.
2. Funzioni di linee, *Atti della R. Accad. dei Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* (4) 5_{I} (1889), 342—348.
3. Sulle funzioni di linee, *Mem. Accad. Sci. Ist. Bologna. Cl. Sci. Fis. Mat.* (5) **5** (1895), 55—74.
4. Sulle serie di funzioni, I, II.
   I. *Memorie della R. Accad. delle Sci. dell'Istituto di Bologna. Sci. Fis. e Mat.* (5) 8 (1899), 3—58.
   II. Там же (5) 8 (1899), 91—134.
5. Un'osservazione intorno alle serie di funzioni, *Rend. dell'Accad. R. delle Sci. dell'Instituto di Bologna* (1882—1883), 142—159.

Асколи (Ascoli G.)

1. Sugli spazi lineari metrici e le loro varietà lineari, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) **10** (1932), 33—81, 203—232.
2. Le curve limiti di una varietà data di curve. *Atti della R. Accad. dei Lincei. Memorie della Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* (3), **18** (1883—1884), 521—586.

Аткинсон (Atkinson F. V.)

1. Symmetric linear operators on a Banach space, *Monatsh. Math.*, **53** (1949), 278—297.
2. Нормальная разрешимость линейных уравнений в нормированных пространствах, *Матем. сб.*, 28 (70), (1951), 3—14.
3. A spectral problem for completely continuous operators, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **3** (1952), 53—60.
4. On relatively regular operators, *Acta Sci. Math. Szeged*, **15** (1953), 38—56.
5. On the second-order linear oscillator, *Univ. Nac. Tucumán. Revista A.*, 8 (1951), 71—87.

Ахиезер Н. И.

1. Бесконечные матрицы Якоби и проблема моментов, *УМН*, **9** (стар. сер.), (1941), 126—156.

Ахиезер Н. И. и Глазман И. М.

1. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, Гостехиздат, М.—Л., 1950.

Бабенко К. И.

1. О сопряженных функциях, *ДАН СССР*, **62** (1948), 157—160.

Банах (Banach S.)

1. Théorie des opérations linéaires, Monografje Matematyczne, Warsaw, 1932. (На украинском языке: «Курс функціонального аналізу», Київ, 1948.)
2. Über die Baire'sche Kategorie gewisser Funktionenmengen, *Studia Math.*, **3** (1931), 174—179.
3. Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales, *Fund. Math.*, **3** (1922), 133—181.
4. Sur les fonctionnelles linéaires, I, II.
   I. *Studia Math.*, **1** (1929), 211—216.
   II. Там же, **1** (1929), 223—239.
5. Über homogene Polynome in (L^2), *Studia Math.*, **7** (1938), 36—44.
6. Teorja operacyj, Warsaw, 1931.
7. Über metrische Gruppen, *Studia Math.*, **3** (1931), 101—113.
8. Sur la convergence presque partout de fonctionnelles linéaires, *Bull. Sci. Math.* (2) **50** (1926), 27—32, 36—43.

Б а н а х и М а з у р (B a n a c h S., M a z u r S.)
1. Zur Theorie der linearen Dimension, *Stuhia Math.*, 4 (1933), 100—112.
Б а н а х и С а к с (B a n a c h S., S a k s S.)
1. Sur la convergence forte dans les champs L^p, *Studia Math.*, 2 (1930), 51—57.
Б а н а х и Ш т е й н г а у з (B a n a c h S., S t e i n h a u s H.)
1. Sur le principe de la condensation de singularités, *Fund. Math.*, **9** (1927), 50—61.
Б а р а н к и н (B a r a n k i n E. W.)
1. Bounds on characteristic values, *Bull. Amer. Math., Soc.*, 54 (1948), 728—735.
2. Bounds for characteristic roots of a matrix, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **51** (1945), 767—770.
Б а р г м а н (B a r g m a n V.)
1. Remarks on the determination of a central field of force from the elastic scattering phase shifts, *Phys. Rev.*, 75 (1949), 301—303.
Б а р е н б л а т т Г. И.
1. Об одном методе решения уравнения теплопроводности, *ДАН СССР*, **72** (1950), 667—670.
Б а р и Н. К.
1. Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве, *Учен. Зап. МГУ*, 148; *Математика*, 4 (1951), 69—107.
2. Об устойчивости свойства полноты системы функций, *ДАН СССР*, **37** (1942), 99—103.
Б а р р и (B a r r y J. Y.)
1. On the convergence of ordered sets of projections, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 5 (1954), 313—314.
Б а р т л (B a r t l e R. G.)
1. Singular points of functional equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **75** (1953), 366—384.
2. On compactness in functional analysis, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **79** (1955), 35—57.
3. A general bilinear vector integral, *Studia Math.*, **15** (1956), 337—352.
4. Implicit functions and solutions of equations in groups, *Math. Zeit.*, **62** (1955), 335—346.
5. Newton's method in Banach spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **6** (1955), 827—831.
Б а р т л и Г р е й в с (B a r t l e R. G., G r a v e s L. M.)
1. Mappings between function spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **72** (1952), 400—413.
Б а р т л, Д а н ф о р д и Ш в а р ц (B a r t l e R. G., D u n f o r d N., S c h w a r t z J.)
1. Weak compactness and vector measures, *Canadian J. Math.*, **7** (1955), 289—305.
Б а с с а л и (B a s s a l i W. A.), см. С т и в е н с о н
Б а т л е р (B u t l e r J. B.)
1. Perturbation series for eigenvalues of regular non-symmetric operators, Technical Report No. 8 to the Office of Ordinance Research, Univ. of California, Berkeley (1955).
Б е з и к о в и ч (B e s i c o v i t c h A. S.)
1. Almost periodic functions, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1932.
Б е й д (B a d e W. G.)
1. An operational calculus for operators with spectrum in a strip, *Pacific J. Math.*, 3 (1953), 257—290.
2. Unbounded spectral operators, *Pacific J. Math.*, 4 (1954), 373—392.
3. Weak and strong limits of spectral operators *Pacific J. Math.*, 4 (1954), 393—413.

4. On Boolean algebras of projections and algebras of operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **80** (1955), 345—360.

Б е й д и Ш в а р ц (B a d e W. G., S c h w a r t z J.)

1. On abstract eigenfunction expansions, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **42** (1956), 519—525.

Б е й к е р (B a k e r H. F.)

1. On the integration of linear differential equations, *Proc. London Math. Soc.* (1) **35** (1903), 333—378.

Б е л л (B e l l R. P.)

1. Eigenvalues and eigenfunctions for the operator $\frac{d^2}{dx^2}-|x|$, *Philos. Mag.*, **35** (1944), 385—588.

Б е л л м а н (B e l l m a n R.)

1. A survey of the theory of the boundedness, stability and asymptotic behavior of solutions of linear and non-linear differential and difference equations, Office of Naval Res., Washington, D. C., 1949.
2. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений, М., ИЛ 1954 (1953).

Б е н н е т (B e n n e t A. A.)

1. Newton's method in general analysis, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **2** (1916), 592—598.

Б е р е з а н с к и й Ю. М.

1. Об однозначности определения уравнения Шредингера по его спектральной функции, *ДАН СССР*, **93** (1953), 591—594.
2. О гиперкомплексных системах, построенных по уравнению Штурма—Лиувилля на полуоси, *ДАН СССР*, **91** (1953), 1245—1248.

3*. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, *Матем. сб.*, **43** (85), (1957), 75—126.

Б е р к о в и ц (B e r k o w i t z J.)

1. On the discreteness of the spectra of Sturm-Liouville operators. Dissertation, New York University, 1951.

Б е р л и н г (B e u r l i n g A.)

1. Sur les intégrales de Fourier absolument convergentes et leur application à une transformation fonctionnelle. Proc. IX Congrès de Math. Scandinaves, Helsingfors (1938), 345—366.
2. Un théorème sur les fonctions bornées et uniformément continues sur l'axe réel, *Acta Math.*, **77** (1945), 127—136.
3. On the spectral synthesis of bounded functions, *Acta Math.*, **81** (1949), 225—238.
4. On two problems concerning linear transformations in Hilbert space, *Acta Math.*, **81** (1949), 239—255.

Б е р н е т (B u r n e t t D.)

1. The distribution of velocities in a slightly non-uniform gas, *Proc. London Math. Soc.* (2) **39** (1935), 385—430.

Б е р р и Р. Я.

1. Исследование конуса положительных элементов в полуупорядоченном пространстве, *Матем. сб.*, **23** (65), (1948), 419—440.

Б е р т о н (B u r t o n L. P.)

1. Oscillation theorems for the solutions of linear, non-homogeneous, second order differential systems, *Pacific J. Math.*, **2** (1952), 281—289.

Б е т е (B e t h e H. A.)

1. Theory of effective image in nuclear scattering, *Phys. Rev.*, **76**, (1949), 38—50.

Б и б е р б а х (B i e b e r b a c h L.)

1. Lehrbuch der Funktionentheorie, vol. I, Fourth Ed., 1934; vol. II, Second ed., 1931, Teubner, Leipzig.

Биркгоф Г. (Birkhoff G.), см. также Алаоглу
1. Orthogonality in linear metric spaces, *Duke Math. J.*, **1** (1935), 169—172.
2. Dependent probabilities and the space (*L*), *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **24** (1938), 154—159.
3. Теория структур, М., ИЛ, 1952 (1940).
4. Integration of functions with values in a Banach space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **38** (1935), 357—378.
5. A note on topological groups, *Compositio Math.*, **3** (1936), 427—430.
6. On product integration, *J. Math. and Phys. Mass. Inst. Tech.*, **16** (1937), 104—132.
7. The mean ergodic theorem, *Duke Math. J.*, **5** (1939), 19—20.
8. An ergodic theorem for general semi-groups, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **25** (1939), 625—627.

Биркгоф Г. и Мак-Лейн (Birkhoff G., MacLane S.)
1. A survey of modern algebra, Macmillan Co., New York, 1941.

Биркгоф Дж. (Birkhoff G. D.)
1. Proof of the ergodic theorem, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **17** (1931), 656—660.
2. On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential operations containing a parameter, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **9** (1908), 219—231.
3. Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **9** (1908), 373—395.
4. Existence and oscillation theorems for a certain boundary value problem, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **10** (1909), 259—270.
5. Quantum mechanics and asymptotic series, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **39** (1933), 681—700.
6. Note on the expansion of the Green's function, *Math. Ann.*, **72** (1912), 292—294.
7. Note on the expansion problems of ordinary linear differential equations, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **36** (1913), 115—126.
8*. Collected Mathematical Papers, Vols I—III, Princeton, 1950.

Биркгоф Дж. и Келлог (Birkhoff G. D., Kellogg O. D.)
1. Invariant points in function space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **23** (1922), 96—115.

Биркгоф Дж. и Лангер (Birkhoff G. D., Langer R. E.)
1. The boundary problems and developments associated with a system of ordinary differential equations of the first order, *Proc. Amer. Acad. Arts. Sci.* (2), **58** (1923), 51—128.

Бирман М. Ш.
1. К теории самосопряженных расширений положительно определенных операторов, *ДАН СССР*, **91** (1953), 189—191.

Бирнбаум и Орлич (Birnbaum Z. W., Orlicz W.)
1. Über die Verallgemeinerung des Begriffes der zueinander Konjugierten Potenzen, *Studia Math.*, **3** (1931), 1—67.

Блисс (Bliss G. A.)
1. A boundary value problem for a system of ordinary linear differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **28** (1926), 561—589.

Блок (Block H. D.)
1. Linear transformations on or onto a Banach space, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **3** (1952), 126—128.

Блюменталь (Blumenthal L. M.)
1. Generalized Euclidean space in terms of a quasi-inner product. *Amer. J. Math.*, **72** (1950), 686—698.

Боас М., Боас Р. и Левинсон (Boas M. L., Boas R. P., Jr, Levinson N.)
1. The growth of solutions of a differential equation, *Duke Math. J.*, **9** (1942), 847—853.

Боас Р. (Boas R. P., Jr.), см. также Боас М.
1. Some uniformly convex spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **46** (1940), 304—311.
2. Expansions of analytic functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **48** (1940), 467—487.

Боненблуст (Bohnenblust H. F.)
1. An axiomatic characterization of L_p-spaces, *Duke Math. J.*, **6** (1940), 627—640.
2. A characterization of complex Hilbert spaces, *Portugaliae Math.*, **3** (1942), 103—109.
3. Subspaces of $l_{p,n}$ spaces, *Amer. J. Math.*, **63** (1941), 64—72.
4. Convex regions and projections in Minkowski spaces, *Ann. of Math.* (2), **39** (1938), 301—308.

Боненблуст и Какутани (Bohnenblust H. F., Kakutani S.)
1. Concrete representations of (M)-spaces, *Ann. of Math.* (2) **42**, (1941), 1025—1028.

Боненблуст и Собчик (Bohnenblust H. F., Sobczyk A.)
1. Extensions of functionals on complex linear spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **44** (1938), 91—93.

Боннезен и Фенхель (Bonnesen T., Fenchel W.)
1. Theorie der konvexen Körper, Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete, III. 1, J. Springer, Berlin, 1934.

Бонсол (Bonsall F. F.)
1. A note on subadditive functionals, *J. London Math. Soc.*, **29** (1954), 125—126.

Бор (Bohr H.)
1. Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen, I—III.
I. *Acta Math.*, **45**, (1925), 29—127.
II. Там же, **46** (1925), 101—214.
III. Там же, **47** (1926), 237—281.
2. Почти-периодические функции, М.—Л., 1934.
3. On almost periodic functions and the theory of groups, *Amer. Math. Monthly*, **56** (1949), 595—609.
4. A survey of the different proofs of the main theorems in the theory of almost periodic functions, Proc. International Cong. Math., Cambridge, 1 (1950), 339—348.

Бор и Фёльнер (Bohr H., Følner E.)
1. On some types of functional spaces. A contribution to the theory of almost periodic functions, *Acta Math.*, **76** (1944), 31—155.

Борг (Borg G.)
1. Über die Stabilität gewisser Klassen von linearen Differentialgleichungen, *Ark. Mat. Astr. Fys.*, 31A, No. 1 (1944).
2. Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe Bestimmung der Differentialgleichung durch die Eigenwerte, *Acta Math.*, **78** (1946), 1—96.
3. Inverse problems in the theory of characteristic values of differential systems, C. R. Dixième Congrès Math. Scandinaves, Copenhagen, 1946.
4. On the completeness of some sets of functions, *Acta Math.*, **81** (1949), 266—283.
5. On a Liapounoff criterion of stability, *Amer. J. Math.*, **71** (1949), 67—70.
6. Über die Ableitung der S-Funktion, *Math. Ann.*, **122** (1950—1951), 326—331.

7. On the point spectra of $y''+(\lambda-q(x))\,y=0$, *Amer. J. Math.*, **73** (1951), 122—126.

Борель (Borel E.)

1. Sur l'équation adjointe et sur certains systèmes d'équations différentielles, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (3) **9** (1892), 63—90.

Ботс (Botts, Truman)

1. On convex sets in linear normed spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **48** (1942), 150—152.
2. Convex sets, *Amer. Math. Monthly*, **49** (1942), 527—531.

Бохер (Bôcher M.)

1. On regular singular points of linear differential equations of the second order whose coefficients are not necessarily analytic, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **1** (1900), 40—52.
2. Green's functions in spaces of one dimension, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **7** (1901), 297—299.
3. Boundary problems and Green's functions for linear differential and difference equations, *Ann. of Math.* (2) **13** (1911), 71—88.
4. Applications and generalisations of the concept of adjoint system, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **14** (1913), 403—420.
5. Leçons sur les méthodes de Sturm, Gauthier-Villars, Paris, 1917.

Бохнер (Bochner S.)

1. Completely monotone functions in partially ordered space, *Duke Math. J.* **9** (1942), 519—526.
2. Integration von Funktionen, deren Werte die Elemente eines Vectorraumes sind, *Fund. Math.*, **20** (1933), 262—276.
3. Additive set functions on groups, *Ann. Math.* (2) **40** (1939), 769—799.
4. Beiträge zur Theorie der fastperiodischen Funktionen, *Math. Ann.*, **96** (1927), 119—147.
5. Absolut-additive abstrakte Mengenfunktionen, *Fund. Math.*, **21** (1933), 211—213.
6. Vorlesungen über Fouriersche Integrale, Akad. Verlag, Leipzig, 1932.
7. Spektraldarstellung linearer Scharen unitärer Operatoren, S.-B. Preuss. Akad. Wiss. (1933), 371—376.
8. Inversion formulae and unitary transformations, *Ann. of Math.* (2) **35** (1934), 111—115.

Бохнер и Дж. Нейман (Bochner S., von Neumann J.)

1. Almost periodic functions in groups, II, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **37** (1935), 21—50.

Бохнер и Тейлор (Bochner S., Taylor A. E.)

1. Linear functionals on certain spaces of abstractly-valued functions, *Ann. of Math.* (2) **39** (1938), 913—944.

Бохнер и Фань Ку (Bochner S., Fan K.)

1. Distributive order-preserving operations in partially ordered vector sets, *Ann. of Math.* (2) **48** (1947), 168—179.

Бохнер и Филлипс (Bochner S., Phillips R. S.)

1. Additive set functions and vector lattices, *Ann. of Math.* (2) **42** (1941), 316—324.
2. Absolutely convergent Fourier expansions for non-commutative normed rings, *Ann. of Math.* (2) **43** (1942), 409—418.

Браудер (Browder F. E.)

1. The Dirichlet problem for linear elliptic equations of arbitrary even order with variable coefficients, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 38 (1952), 230—235.
2. The Dirichlet and vibration problems for linear elliptic differential equations of arbitrary order, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **38** (1952), 741—747.
3. Assumption of boundary values and the Green's function in the Dirichlet

problem for the general linear elliptic equation, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **39** (1953), 179—184.
4. Linear parabolic differential equations of arbitrary order; general boundary-value problems for elliptic equations, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **39** (1953), 185—190.
5. Strongly elliptic systems of differential equations. Contributions to the theory of partial differential equations, 15—51, *Ann. of Math. Studies*, No. 33, Princeton, 1954.
6. On the eigenfunctions and eigenvalues of the general linear elliptic differential operator, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **39** (1953), 433—439.
7. The eigenfunction expansion theorem for the general self-adjoint singular elliptic partial differential operator. I. The analytical foundation, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **40** (1954), 454—459.
8. Eigenfunction expansions for singular elliptic operators. II. The Hilbert space argument; parabolic equations on open manifolds, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **40** (1954), 459—463.
9*. Functional analysis and partial differential equations I, *Math. Ann.*, **138** (1959), 55—79. Есть русский перевод: Математика, 4 : 3 (1960) 79—106.

Браун (Brown A.)
1. On a class of operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **4** (1953), 723—728.
2. The unitary equivalence of binormal operators, *Amer. J. Math.*, **76**, 414—434 (1954).

Брауэр (Brauer A.)
1. Limits for the characteristic roots of a matrix, *Duke Math. J.*, **13** (1946), 387—394.

Брей (Bray H. E.)
1. Elementary properties of the Stieltjes integral, *Ann. of Math.* (2) **20** (1918—1919), 177—186.

Брейс (Brace J. W.)
1. Transformations on Banach spaces, Dissertation, Cornell University (1953).
2. Compactness in the weak topology, *Math. Mag.*, **28** (1955), 125—134.

Брем (Bram J.)
1. Subnormal operators, *Duke Math. J.*, **22** (1955), 75—94.

Бриллюэн (Brillouin L.)
1. La mécanique ondulatoire de Schrödinger; une méthode générale de résolution par approximations successives, *C. R. Acad. Sci.* Paris, **183**, (1926), 24—26.

Бродский М. С. и Мильман Д. П.
1. О центре выпуклого множества, *ДАН СССР*, **59** (1948), 837—840.

Броун (Browne E. T.)
1. Limits to the characteristic roots of a matrix, *Amer. Math. Monthly*, **46** (1939), 252—265.

Броуэр (Brouwer L. E. J.)
1. Über eineindeutige, stetige Transformationen von Flächen in sich, *Math. Ann.*, **69** (1910), 176—180.

Буняковский В. Я.
1. Sur quelques inégalités concernant les intégrales ordinaires et les intégrales aux différences finies, *Mém. Acad. St. Petersburg* (7) **1**, No. 9 (1859).

Бурбаки (Bourbaki N.)
1. Sur les espaces de Banach, *C. R. Acad. Sci.*, **206** (1938), 1701—1704.
2. Элементы математики, т. 5. Топологические векторные пространства, ИЛ, М., 1959 (1953, 1955).
3. Sur certains espaces vectorials topologiques, *Ann. Inst. Fourier Grenoble*, **2** (1950), 5—16.
4. Eléments de mathématique, Livre VI, Intégration. Hermann et Cie, Act. Sci. et Ind., **1175**, Paris, 1952.

5. Éléments de mathématique, Livre III, Topologie générale. Hermann et Cie, Act. Sci. et Ind., 858, 916, 1029, 1045, 1084, Paris, 1940 — 1949. (В русском переводе вышли главы I—III и IV—VIII:
Общая топология. Основные структуры, М., Физматгиз, 1958.
Общая топология. Числа и связанные с ними группы и пространства, М., Физматгиз, 1959.)

Бурга (Burgat P.)
1. Résolutions de problèmes aux limites au moyen de transformations fonctionnelle. Dissertation, Université de Neuchâtel, Lausanne, 1950.
2. Résolution de problèmes aux limites au moyen de transformations fonctionnelles, *Z. Angew. Math. Physik.*, **4** (1953), 146—152.

Бурж ен (Bourgin D. G.)
1. Some properties of Banach spaces, *Amer. J. Math*,. **64** (1942), 597— 612.
2. Linear topological spaces, *Amer. J. Math.*, **65** (1943), 637—649.

Буркхардт (Burkhard H.)
1. Sur les fonctions de Green rélatives à une domaine d'une dimension, *Bull. Soc. Math. France*, **22** (1894), 71—75.

Бухгейм (Buchheim A.)
1. An extension of a theorem of Professor Sylvester's relating to matrices, *Phil. Mag.* (5) **22** (1886), 173—174.

Важевский (Ważewsky T.)
1. Sur l'évaluation du domaine d'existence des fonctions implicites dans le cas des espaces abstrait, *Fund. Math.*, **37** (1950), 5—24.

Вайнбергер (Weinberger H. F.)
1. An optimum problem in the Weinstein method for eigenvalues, *Pacific J. Math.*, **2** (1952), 413—418.
2. Error estimation in the Weinstein method for eigenvalues, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **3** (1952), 643—646.
3. An extension of the classical Sturm-Liouville theory, *Duke Math. J.*, **22** (1955), 1—14.

Вайнштейн (Weinstein A.)
1. Quantitative methods in Sturm-Liouville theory. Proc. Symposium on Spectral Theory and Differential Problems (1951). Oklahoma Agricultural and Mechanical College, Stillwater, Oklahoma.

Ван дер Варден (van der Waerden B. L.)
1. Современная алгебра, Гостехиздат, М.—Л., 1947 (1930, 1931).

Ван Данциг (van Dantzig D.), см. Данциг

Ван Кампен (van Kampen E. R.), см. Кампен

Варшавский (Warschawski S. E.), см. Галбрайт

Васильков Д. А.
1. Частично упорядоченные линейные системы банахова пространства и системы функций, *ДАН СССР*, **35** (1942), 148—151.
2. Классификация упорядочений линейных систем, *ДАН СССР*, **39** (1943), 175—178.
3. On the theory of partially ordered linear systems and linear spaces, *Ann. of Math.*, **44** (1943), 580—609.
4. Упорядочения абстрактных множеств и линейных систем, *Изв. АН СССР, сер. матем.*, **7** (1943), 203—236.

Веблен (Veblen O.)
1. Invariants of quadratic differential forms. Cambridge Univ. Press, London, 1933.

Веддерберн (Wedderburn J. H. M.)
1. Lectures on matrices, Amer. Math. Soc. Colloquium Pub. 17, New York, 1934.

Вейерштрасс (Weierstrass K.)
1. Mathematische Werke, Band 1. Mayer und Müller, Berlin, 1894.
2. Mathematische Werke, Band 3, Mayer und Müller, Berlin, 1903.

Вейль А. (Weil A.)
1. Интегрирование в топологических группах и его применения, М., ИЛ, 1950 (1940).
2. Sur les fonctions presque périodiques de von Neumann, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **200** (1935), 38—40.
3. Sur les groupes topologiques et les groupes mesures, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **202** (1936), 1147—1149.

Вейль Г. (Weyl H.), см. также Петер
1. Inequalities between the two kinds of eigenvalues of a linear transformation, *Proc. Nat. Acad. Sci., USA*, **35** (1949), 408—411.
2. Über beschränkte quadratische Formen, deren Differenz vollstetig ist, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **27** (1909), 373—392.
3. Raum, Zeit, Materie. Vierte Aufl., J. Springer, Berlin, 1921.
4. Ramifications, old and new, of the eigenvalue problem, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 56 (1950), 115—139.
5. Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen, *Math. Ann.*, **68** (1910), 220—269.
6. Almost periodic invariant vector sets in a metric vector space, *Amer. J. Math.*, **71** (1949), 178—205.
7. Über gewöhnliche lineare Differentialgleichungen mit singulären Stellen und ihre Eigenfunktionen, *Nachr. Acad. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl.* (1909), 37—64.
8. Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit singulären Stellen und ihre Eigenfunktionen, *Nachr. Acad. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl.* (1910), 442—467.
9. The method of orthogonal projection in potential theory, *Duke Math., J.*, **7** (1940), 411—444.

Вейр (Weyr E.)
1. Note sur la théorie des quantités complexes formées avec *n* unités principales, *Bull. Sci. Math.* (2) **11** (1887), 205—215.

Веккен (Wecken F. J.)
1. Zur Theorie linearer Operatoren, *Math. Ann.*, **110** (1935), 722—725.
2. Unitärinvarianten selbstadjugierter Operatoren, *Math. Ann.*, **116** (1939), 422—455.

Вентцель (Wentzel G.)
1. Eine Verallgemeinerung der Quantenbedingungen für die Zwecke der Wellenmechanik, *Zeit. für Physik.*, **38** (1926), 518—529.

Вестфаль (Westfall J.)
1. Zur theorie der Integralgleichungen. Dissertation. Göttingen, 1905.

Вехаузен (Wehausen J. V.)
1. Transformations in linear topological spaces, *Duke Math. J.*, **4** (1938), 157—169.
2. Transformations in metric spaces and ordinary differential equations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **51** (1945), 113—119.

Вигман (Wiegmann N. A.)
1. A note on infinite normal matrices, *Duke Math. J.*, **16** (1949), 535—538.

Видав (Vidav I.)
1. Über eine Vermutung von Kaplansky, *Math. Z.*, **62** (1955), 330.

Виландт (Wielandt H.)
1. Eigenwerttheorie. Naturforschung und Medizin in Deutschland 1939—1946, Band 2, 85—98. Dieterich'sche Verlagsbuchhandlung, Wiesbaden, 1948.
2. Über die unbeschränkheit der Operatoren der Quantenmechanik, *Math. Ann.*, **121** (1949), 21.

Виланский (Wilansky A.)
1. The basis in Banach space, *Duke Math. J.*, **18** (1951), 795—798.

2. An application of Banach linear functionals to summability, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **67** (1949), 59—68.

Вильямсон (Williamson J. H.)

1. Spectral representation of linear transformation in ω, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **47** (1951), 461—472.
2. Linear transformations in arbitrary linear spaces, *J. Lond. Math. Soc.*, **28** (1953), 203—210.
3. Compact linear operators in linear topological spaces, *J. Lond. Math. Soc.*, **29** (1954), 149—156. (Есть русский перевод: *Математика*, **4 : 5** (1960), 85—91).
4. On topologising the field *C* (*t*), *Proc. Amer. Math. Soc.*, **5** (1954), 729—734.

Виндау (Windau W.)

1. Über lineare Differentialgleichungen vierter Ordnung mit singuläritaten und die dazugehörigen Darstellungen willkürlicher Funktionen, *Math. Ann.*, **83** (1921), 256—279.

Винер (Wiener N.), см. также Пэли

1. Limit in terms of continuous transformation, *Bull. de la Soc. Math. de France*, **50** (1922), 119—134.
2. Note on a paper of M. Banach, *Fund. Math.*, **4** (1923), 136—143.
3. The ergodic theorem, *Duke Math. J.*, **5** (1939), 1—18.
4. The Fourier integral and certain of its applications, Cambridge Univ. Press, 1933.
5. Tauberian theorems, *Ann. of Math.* (2) **33** (1932), 1—100.
6. Generalized harmonic analysis, *Acta Math.*, **55** (1930), 117—285.
7. The average value of a functional, *Proc. London Math. Soc.* (2) **22** (1924), 454—467.
8. Differential space, *J. Math. Phys. Mass. Inst. Tech.*, **2** (1923), 131—174.

Винер и Уинтнер (Wiener N., Wintner A.)

1. Harmonic analysis and ergodic theory, *Amer. J. Math.*, **63** (1941), 415—426.

Виноградов А. А., см. Крачковский С. Н.

Винокуров В. Г.

1. О биортогональных системах, проходящих через заданные подпространства, *ДАН СССР*, **85** (1952), 685—687.

Виртингер (Wirtinger W.)

1. Beiträge zu Riemann's Integrationsmethode für hyperbolische Differentialgleichungen, und deren Anwendungen auf Schwingungsprobleme, *Math. Ann.*, **48** (1897), 365—389.

Виссер (Visser C.)

1. On the iteration of linear operations in a Hilbert space, *Neder. Akad. Wetensch. Proc.*, **41** (1938), 487—495.
2. Note on linear operators, *Neder. Akad. Wetensch. Proc.*, **40** (1937), 270—272.

Виссер и Заанен (Visser C., Zaanen A. C.)

1. On the eigenvalues of compact linear transformations, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser.* A, **55** (1952), 71—78.

Витали (Vitali G.)

1. Sulle funzioni integrali, *Atti R. Accad. delle Sci. di Torino*, **40** (1905), 753—766.
2. Sull'integrazione per serie, *Rend. del. Circolo Mat. di Palermo*, **23** (1907), 137—155.

Виттих (Wittich H.)

1. Über das Anwachsen der Lösungen linearer Differentialgleichungen, *Math. Ann.*, **124** (1952), 277—288.

Вишик М. И.

1. Линейные расширения операторов и краевые условия, *ДАН СССР*, **65** (1949), 433—436.

2. О линейных краевых задачах для дифференциальных уравнений, *ДАН СССР*, **65** (1949), 785—788.
3. Об общем виде разрешимых краевых задач для однородного и неоднородного эллиптического уравнения, *ДАН СССР*, **82** (1952), 181—184.
4. Метод ортогональных и прямых разложений в теории эллиптических дифференциальных уравнений, *Матем. сб.*, **25** (67), (1949), 189—234.
5. О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений, *Матем. сб.*, **29** (71), (1951), 615—676.

Вот (Vaught R. L.), см. Келли

Волмэн (Wallman H.), см. Гуревич У.

Вольтерра (Volterra V.)

1. Theory of functionals. Blackie and Sons, London and Glasgow, 1930.

Вулих Б. З., см. также Канторович Л. В.

1. Определение произведения в линейном полуупорядоченном пространстве, *ДАН СССР*, **26** (1940), 847—851.
2. Свойства произведения и обратного элемента в линейных полуупорядоченных пространствах, *ДАН СССР*, **26** (1940), 852—856.
3. О линейных пространствах с заданной сходимостью, Л., *Учен. зап. ун-та*, **10** (1940), 40—63.
4. Интеграл Стильтьеса для функций со значениями в полуупорядоченных пространствах, Л., *Учен. зап. ун-та*, сер. матем., **12** (1941), 3—29.
5. О линейных функционалах и линейных полуупорядоченных пространствах, *ДАН СССР*, **52** (146), 95—98.
6. О линейных мультипликативных операциях, *ДАН СССР*, **52** (1946), 387—390.
7. О некоторых нелинейных операциях в линейных полуупорядоченных пространствах, *ДАН СССР*, **52** (1946), 479—482.
8. Конкретное представление линейных полуупорядоченных пространств, *ДАН СССР*, **58** (1947), 733—736.
9. Произведение в линейных полуупорядоченных пространствах и его применение к теории операций, ч. 1, *Матем. сб.*, **22** (64), (1948), 27—78.
10. Произведение в линейных полуупорядоченных пространствах и его применение к теории операций, ч. 2, *Матем. сб.*, **22** (64), (1948), 267—317.
11. О конкретном представлении полуупорядоченных линеалов, *ДАН СССР*, **78** (1951), 189—192.
12. Sur les formes générales de certaines opérations linéaires, *Матем. сб.*, **2** (44), (1937), 275—305.
13. Sur les opérations linéaires dans l'espace des fonctions sommables, *Mathematica, Cluj.*, **13** (1937), 40—54.
14. On a generalized notion of convergence in a Banach space, *Ann. of Math.* (2) **38** (1937), 156—174.
15. Некоторые вопросы теории линейных полуупорядоченных множеств, *Изв. АН СССР*, сер. матем., **17** (1953), 365—388.

Вульф (Wolf F.)

1. Analytic perturbation of operators in Banach spaces, *Math. Ann.*, **124** (1952), 317—333.
2. Simplicity of spectra in general operators (Abstract), *Bull. Amer. Math. Soc.*, **60** (1954), 345.

Вульфсон (Wolfson K.)

1. On the spectrum of a boundary value problem with two singular endpoints, *Amer. J. Math.*, **72** (1950), 713—719.
2. On the separation of spectra, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **4** (1953), 408—409.

Гавурин М. К.

1. Об оценках собственных чисел и векторов возмущенного оператора, *ДАН СССР*, **76** (1951), 769—770.

2. Об оценках для собственных чисел и векторов возмущенного оператора, *ДАН СССР*, **96** (1954), 1093—1095.
3. О точности приближенных методов разыскания собственных чисел интегральных операторов, *ДАН СССР*, **97** (1954), 13—15.
4. Über die Stieltjessche Integration abstrakter Funktionen, *Fund. Math.*, **27** (1936), 255—268.

Гагаев Б. М.
1. О сходимости в банаховских пространствах, *УМН*, **3, вып. 5** (27), (1948), 171—173.

Гайнц (Heinz E).
1. Beiträge zur Störungstheorie der Spektralzerlegung, *Math. Ann.*, **123** (1951), 415—438.
2. Ein v. Neumannscher Satz über beschränkte Operatoren in Hilberischen Raum, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl.* (1952), 5—6.
3. Zur Theorie der Hermiteschen Operatoren des Hilbertschen Raumes, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl.*, 1951, No. 2, (1951), 4.
4. On an inequality for linear operators in a Hilbert space. Report on Operator Theory and Group Representations, Pub. No. 387, *Nat. Acad. Sci. U.S.A.* (1955), 27—29.
5. Zur Frage der Differenzierbarkeit der S-Funktion, *Math. Ann.*, **122** (1950), 332—333.

Гал (Gàl I. S.)
1. Sur la méthode de résonance et sur un théorème concernant des espaces de type (B), *Ann. Inst. Fourier Grenoble*, **3** (1951), 23—30.
2. The principle of condensation of singularities, *Duke Math. J.*, **20** (1953), 27—35.
3. On sequences of operations in complete vector spaces, *Amer. Math. Monthly*, **60** (1953), 527—538.

Галбрайт и Варшавский (Galbraith A. S., Warschawski S. E.)
1. The convergence of expansions resulting from a self-adjoint boundary problem, *Duke Math. J.*, **6** (1940), 318—340.

Гальперин (Halperin I.), см. также Эллис
1. Function spaces, *Canadian J. Math.*, **5** (1953), 273—288.
2. Convex sets in linear topological spaces, *Trans. Roy. Soc. Canada*, Sec. III, **47** (1953), 1—6.
3. Uniform convexity in function spaces, *Duke Math. J.*, **21** (1954), 195—204.
4. Reflexivity in the $L\lambda$ function spaces, *Duke Math. J.*, **21** (1954), 205—208.
5. Closures and adjoints of linear differential operators, *Ann. of Math.* (2) **38** (1937), 880—919.

Гамбургер (Hamburger H. L.)
1. Five notes on a generalization of quasi-nilpotent transformations in Hilbert space, *Proc. London Math. Soc.* (3), **1** (1951), 494—512.
2. On a new characterization of self-adjoint differential operators in the Hilbert space L_2, *Proc. Symposium on Spectral Theory and Differential Problems*, 229—247 (1951). Oklahoma A. and M. College, Stillwater, Oklahoma.
3. Remarks on self-adjoint differential operators, *Proc. London Math. Soc.* (3) **3** (1953), 446—463.
4. Über die Zerlegung des Hilbertschen Raumes durch vollstetige lineare Transformationen, *Math. Nachr.*, **4** (1951), 56—69.
5. Contributions to the theory of closed Hermitian transformations of deficiency index (m, m), *Ann. of Math.* (2) **45** (1944), 59—99.
6. Contributions to the theory of closed Hermitian transformations of deficiency index (m, m), *Quart. J. Math. Oxford. Ser.*, **13** (1942), 117—128.

7. Hermitian transformations of deficiency-index (1, 1), Jacobi matrices and undetermined moment problems, *Amer. J. Math.*, **66** (1944), 489—522.
8. On a class of Hermitian transformations containing self-adjoint differential operators, *Ann. of Math.* (2) **47** (1946), 667—687.

Гамбургер и Гримшоу (Hamburger H. L., Grimshaw M. E.)

1. Linear transformations in n-dimensional vector space, Cambridge Univ. Press, 1951.

Гамель (Hamel G.)

1. Über lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit periodischen Koeffizienten, *Math. Ann.*, **73** (1913), 371—412.

Гантмахер В. Р.

1. Über schwache totalstetige Operatoren., *Матем. сб.*, **7** (49), (1940), 301—308.

Гантмахер В. Р. и Шмульян В. Л.

1. О линейных пространствах, единичная сфера которых слабо компактна, *ДАН СССР*, **17** (1937), 91—94.
2. О слабой компактности в пространстве Банаха, *Матем. сб.*, **8** (50), (1940), 489—492.

Гантмахер Ф. Р.

1*. Теория матриц, М., Гостехиздат, 1953.

Гантмахер Ф. Р. и Крейн М. Г.

1*. Осцилляционные матрицы и малые колебания механических систем, М., Гостехиздат, 1950.

Гарабедян (Garabedian P. R.)

1. The classes L_p and conformal mapping, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **69** (1950), 392—415.

Гарабедян и Шифман (Garabedian P. R., Shiffman M.)

1. On solution of partial differential equations by the Hahn-Banach Theorem, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **76**, (1954) 288—299.

Гартогс и Розенталь (Hartogs F., Rosenthal A.)

1. Über Folgen analytischer Funktionen, *Math. Ann.*, **104** (1931), 606—610.

Гаупт (Haupt O.)

1. Über lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit periodischen Koeffizienten, *Math. Ann.*, **79** (1918), 278—285.

Гёдель (Gödel K.)

1. The consistency of the continuum hypothesis, *Ann. of Math. Studies*, No. 3, Princeton Univ. Press, Princeton, 1940.
2. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, I, *Monatsh. für Math. u. Physik*, **38** (1931), 173—198.

Гейл (Gale D.)

1. Compact sets of functions and function rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **1** (1950), 303—308.

Гельбаум (Gelbaum B. R.)

1. Expansions in Banach spaces, *Duke Math. J.*, **17** (1950), 187—196.
2. A nonabsolute basis for Hilbert space, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **2** (1951), 720—721.

Гёльдер (Hölder E.)

1. Über die Vielfachheiten gestörter Eigenwerte, *Math. Ann.*, **113** (1936), 620—628.
2. Über einen Mittelwertsatz, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math. Phys. Kl.* (1889), 38—47.

Гельфанд И. М.

1. Normierte Ringe, *Матем. сб.*, **9** (51), (1941), 3—24.
2. Abstrakte Funktionen und lineare Operatoren, *Матем. сб.*, **4** (46), (1938), 235—286.

3. Ideale und primäre Ideale in normierten Ringen, *Матем. сб.*, **9** (51), (1941), 41—48.
4. Zur Theorie der Charaktere der Abelschen topologischen Gruppen, *Матем. сб.*, 9 (51), (1941), 49—50.
5. Über absolut konvergente trigonometrische Reihen und Integrale. *Матем сб.*, **9** (51), (1941), 51—66.
6. Замечание к работе Н. К. Бари «Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве», М., *Учен. зап. ун-та*, **148**; *Математика*, **4** (1951), 224—225.

Гельфанд И. М. и Колмогоров А. Н.

1. О кольцах непрерывных функций на топологических пространствах, *ДАН СССР*, **22** (1939), 11—15.

Гельфанд И. М. и Костюченко А. Г.

1. Разложение по собственным функциям дифференциальных и других операторов, *ДАН СССР*, **103** (1955), 349—352.

Гельфанд И. М. и Левитан Б. М.

1. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции, *Изв. АН СССР*, сер. матем., **15** (1951), 309—360.
2. Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка, *ДАН СССР*, 88 (1953), 593—596.

Гельфанд И. М. и Наймарк М. А.

1. On the imbedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space, *Матем. сб.*, **12** (54), (1943), 197—219.
2. Нормированные кольца с инволюцией и их представления, *Изв. АН СССР*, сер. матем., **12** (1948), 445—480.

Гельфанд И. М. и Райков Д. А.

1. К теории характеров коммутативных топологических групп, *ДАН СССР*, **28** (1940), 195—198.
2. Неприводимые унитарные представления локально бикомпактных групп, *Матем. сб.*, **13** (55), (1943), 301—316.

Гельфанд И. М. и Шилов Г. Е.

1. Über verschiedene Methoden der Einführung der Topologie in die Menge der maximalen Ideale eines normierten Ringes, *Матем. сб.*, **9** (51), (1941), 25—40.

2*. Обобщенные функции. Вып. 1. Обобщенные функции и действия над ними.
Вып. 2. Пространства основных и обобщенных функций.
Вып. 3. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений, М., Физматгиз, 1958.

Гельфанд И. М. и Яглом А. М.

1. Интегрирование в функциональных пространствах и его применения в квантовой физике, *УМН*, **11**, вып. 1 (67), (1956), 77—114.

Герглотц (Herglotz G.)

1. Über Potenzreihen mit positiven, reellem Teil im Einheitskreis, *S.-B. Sächs. Akad. Wiss.*, **63** (1911), 501—511.
2. Über die Integration linearer, partieller Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, I—IV.
   I. *S.-B. Sächs. Akad. Wiss.*, 78 (1926), 93—125.
   II. Там же, 78 (1926), 287—318.
   III. Там же, **80** (1928), 69—114.
   IV. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **6** (1928), 189—197.

Гильб (Hilb E.)

1. Über die Auflösung von Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, *S.-B. Phys. Med. Soz. Erlangen* (1908), 84—89.
2. Über Integraldarstellung willkürlicher Funktionen, *Math. Ann.*, **66** (1909), 1—66.

3. Über Reihenentwicklung nach den Eigenfunktionen linearer Differentialgleichungen 2ter Ordnung, *Math. Ann.*, **71** (1911), 76—87.
4. Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die dazugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen, *Math. Ann.*, **76** (1915), 333—339.

Гильб и Сас (Hilb E., Szász O.)
1. Allgemeine Reihenentwicklungen, Encycklopädie der Math. Wiss., II C 11, (1922), 1229—1276.

Гильберт (Hilbert D.), см. также Курант
1. Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, I. *Nachr. Akad. Wiss. Gottingen. Math.-Phys. Kl.* (1904), 49—91. II. Там же (1905), 213—259. III. Там же (1905), 307—338. IV. Там же (1906), 157—227. V. Там же (1906), 439—480. VI. Там же (1910), 355—417.

Гильдебрандт (Hildebrandt T. H.)
1. On unconditional convergence in normed vector spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **46** (1940), 959—962.
2. On uniform limitedness of sets of functional operations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **29** (1923), 309—315.
3. On bounded functional operations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **36** (1934), 868—875.
4. Integration in abstract spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **59** (1953), 111—139.
5. Lebesgue integration in general analysis. (Abstract), *Bull. Amer. Math. Soc.*, **33** (1927), 646.
6. Über vollstetige lineare Transformationen, *Acta Math.*, **51** (1928), 311—318.
7. Linear operations on functions of bounded variation, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **44** (1938), 75.
8. On the moment problem for a finite interval, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **38** (1932), 269—270.
9. Convergence of sequences of linear operations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **28** (1922), 53—58.

Гильдебрандт и Грейвс (Hildebrandt T. H., Graves L. M.)
1. Implicit functions and their differentials in general analysis, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **29** (1927), 127—153.

Гильдебрандт и Шёнберг (Hilbebrandt T. H., Schoenberg I. J.)
1. On linear functional operations and the moment problem for a finite interval in one or several dimensions, *Ann. of Math.* (2) **34** (1933), 317—328.

Глазман И. М., см. также Ахиезер Н. И.
1. К теории сингулярных дифференциальных операторов, *УМН*, **5**, вып. 6 (40), (1950), 102—135.
2. Об индексе дефекта дифференциальных операторов, *ДАН СССР*, **64** (1949), 151—154.
3. О спектре линейных дифференциальных операторов, *ДАН СССР*, **80** (1951), 153—156.
4. О характере спектра одномерных сингулярных краевых задач, *ДАН СССР*, 87 (1952), 5—8.
5*. О характере спектра многомерных сингулярных краевых задач, *ДАН СССР*, 87 (1952), 171—174.

Гливенко В. И.
1. Интеграл Стильтьеса, М.—Л., 1936.

Гликсберг (Glicksberg I.)
1. The representation of functionals by integrals, *Duke Math. J.*, **19** (1952), 253—261.

Гобсон (Hobson E. W.)
1. The theory of functions of a real variable. (Two volumes.) Second edition, Cambridge Univ. Press, 1921, 1926.
2. On a general convergence theorem, and the theory of the representation of a function by a series of normal functions, *Proc. Lond. Math. Soc.* (2) 6 (1908), 349—395.

Годман (Godement R.), см. также Картан
1. Théorèmes taubériens et théorie spectrale, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (3) **64** (1947), 119—138.
2. Les fonctions de type positif et la théorie des groupes, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **63** (1948), 1—84.
3. Sur la théorie des représentations unitaires, *Ann. of Math.* (2) **53** (1951), 68—124.
4. Mémoire sur la théorie des caractères dans les groupes localement compacts unimodulaires, *J. Math. Pures Appl.*, **30** (1951), 1—110.
5. Sur une généralisation d'un théorème de Stone, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **218** (1944), 901—903.

Голдстайн (Goldstine H. H.)
1. Weakly complete Banach spaces, *Duke Math. J.*, **4** (1938), 125—131.
2. The theorem of Hildebrandt, *Studia Math.*, **7** (1938), 157—158.

Гольдман М. А., см. Крачковский С. Н.

Гольдман М. А. и Крачковский С. Н.
1. О нуль-элементах линейного оператора в его области Фредгольма, *ДАН СССР*, **86** (1952), 15—17.

Гомес (Gomes A. P.), см. Дьёдонне

Гординг (Gårding L.)
1. Linear hyperbolic partial differential equations with constant coefficients, *Acta Math.*, **85** (1950), 2—62.
2. Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations, *Math. Scand.*, **1** (1953), 55—72.
3. Le problème de Dirichlet pour les équations aux dérivées partielles élliptiques linéaires dans des domaines bornés, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **233** (1951), 1554—1556.
4. Dirichlet's problem and the vibration problem for linear elliptic partial differential equations with constant coefficients. Proc. Symposium Spectral Theory and Differential Problems, 291—301. Oklahoma Agricultural and Mechanical College, Stillwater, Oklahoma, 1951.
5. L'inégalité de Friedrichs et Lewy pour les équations hyperboliques linéaires d'ordre supérieur, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **239** (1954), 849—850.
6. Applications of the theory of direct integrals of Hilbert spaces to some integral and differential operators. Inst. Fluid Dynamics. Univ. of Maryland, College Park., 1954.

7*. Задача Коши для гиперболических уравнений, М., ИЛ, 1961.

Горн (Horn A.)
1. On the singular values of a product of completely continuous operators, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **36** (1950), 374—375.

Гохберг И. Ц.
1. О линейных уравнениях в пространстве Гильберта, *ДАН СССР*, **76** (1951), 9—12.
2. О линейных уравнениях в нормированных пространствах, *ДАН СССР*, **76** (1951), 477—480.
3. О линейных операторах, аналитически зависящих от параметра, *ДАН СССР*, **78** (1951), 629—632.
4. Об индексе неограниченного оператора, *Матем. сб*, **33** (75), (1953), 193—198.

Г р а ф ф А. А.
1. К теории линейных дифференциальных систем в области одного измерения, ч. I и II.
I. *Матем. сб.*, **18** (60), (1946), 305—328.
II. Там же, **21** (63), (1947), 143—159.
Г р е й в с Л. (G r a v e s L. M.), см. также Б а р т л, Г и л ь д е б р а н д т
1. Topics in the functional calculus, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **41** (1935), 641—662. Исправл. там же, **42** (1936), 381—382.
2. The theory of functions of real variables, McGraw-Hill Co., New York, 1946.
3. Riemann integration and Taylor's theorem in general analysis, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **29** (1927), 163—177.
4. Some general approximation theorems, *Ann. of Math.* (2) **42** (1941), 281—292.
5. Some mapping theorems, *Duke Math. J.*, **17** (1950), 111—114.
6. A generalization of the Riesz theory of completely continuous transformations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **79** (1955), 141—149.
7. Remarks on singular points of functional equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 79 (1955), 150—157.
Г р е й в с Р. Е. (G r a v e s R. E.), см. К а м е р о н
Г р е й в с Р. Л. (G r a v e s R. L.)
1. The Fredholm theory in Banach spaces. (Abstract). Dissertation, Harvard University (1951), *Bull. Amer. Math. Soc.*, **58** (1952), 479.
Г р е к о (G r e c o D.)
1. Sulla convergenza degli sviluppi in serie di autosoluziani associati ad un problema ai limite relativo ad un'equazione differenziale ordinaria dee secondo ordine, *Rend. Acc. Sci. Fis. Mat. Napoli* (4), **17** (1950), 171—189.
Г р и м ш о у (Grimshaw M. E.), см. Г а м б у р г е р
Г р и н б л ю м М. М.
1. Некоторые теоремы о базисе в пространстве типа (*B*), *ДАН СССР*, **31** (1941), 428—432.
2. Биортогональные системы в пространстве Банаха, *ДАН СССР*, **47** (1945), 79—82.
3. К теории биортогональных систем, *ДАН СССР*, **55** (1947), 291—295.
4. Об одном признаке базиса, *ДАН СССР*, **59** (1948), 9—11.
5. Спектральная мера, *ДАН СССР*, **81** (1951), 345—348.
6. Операторный интеграл в пространстве Банаха, *ДАН СССР*, **71** (1950), 5—8.
Г р о с б е р г Ю. И.
1. Про лінійні функціонали на просторі функцій обмеженоі вариаціі, Киев, *Учен. зап. пед. ин-та*, **2** (1939), 17—23.
Г р о с б е р г Ю. И. и К р е й н М. Г.
1. О разложении линейного функционала на положительные составляющие, *ДАН СССР*, **25** (1939), 721—724.
Г р о т е н д и к (G r o t h e n d i e c k A.)
1. Critères généraux de compacité dans les espaces vectoriels, localement convexes. Pathologie des espaces (*LF*), *C. R. Acad. Sci. Paris*, **231** (1950), 940—941.
2. Critères de compacité dans les espaces fonctionels généraux, *Amer. J. Math.*, **74** (1952), 168—186.
3. Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Memoirs, *Amer. Math. Soc.*, No. 16, 1955.
4. Sur les applications linéaires faiblement compacted d'espaces du type *C* (*K*), *Canadian J. Math.*, **5** (1953), 129—173.
5. Sur certains espaces de fonctions holomorphes, I, II,
I. *J. Reine Angew. Math.*, **192** (1953), 35—64.
II. Там же, **192** (1953), 77—95.

6*. Sur les espaces (*F*) et (*DF*), *Summa Bras. Math.*, **3** (1954), 57—123. (Есть русский перевод; *Математика*, 2: 3 (1958), 81—127.)

7*. La theorie de Fredholm, *Bull. Soc. Math. France*, **84** (1958), 319—384. (Есть русский перевод: *Математика*, 2 : 5 (1958), 51—103.)

Гуднер (Goodner D. B.)

1. Projections in normed linear spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **69** (1950), 89—108.

Гурвиц (Hurwitz W. A.), см. Джиллеспи

Гуревич Л. А.

1. О базисе безусловной сходимости, *УМН*, 8 : **5** (57), (1953), 153—156.

Гуревич (Hurewicz W.)

1. Ergodic theorems without invariant measure, *Ann. of Math.* (2) **45** (1944), 192—206.

Гуревич и Волмэн (Hurewicz W., Wallman H.)

1. Теория размерности, М., ИЛ, 1948 (1941).

Далецкий Ю. Л.

1*. Фундаментальные решения операторного уравнения и континуальные интегралы, *Изв. выс. уч. зав.*, № 3(1961), 27—48.

Дайнс, см. Московиц

Данем (Dunham J. L.)

1. The Wentzel—Brillouin—Kramers method of solving the wave equation, *Phys. Rev.*, **41** (1932), 713—720.
2. The energy levels of a rotating vibrator, *Phys. Rev.*, **41** (1932), 721—731.

Даниель (Daniell P. J.)

1. A general form of integral, *Ann. of Math.* (2) **19** (1917—1918), 279—294.

Данфорд (Dunford N.), см. также Бартл и Л. Коэн

1. Uniformity in linear spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **44** (1938), 305—356.
2. Direct decompositions of Banach spaces, *Bol. Soc. Mat. Mexicana*, **3** (1946), 1—12.
3. An individual ergodic theorem for non-commutative transformations, *Acta Sci. Math. Szeged*, **14** (1951), 1—4.
4. Integration in general analysis, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **37** (1935), 441—453.
5. On continuous mappings, *Ann. of Math.* (2), **41** (1940), 639—661.
6. Spectral theory, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **49**, (1943), 637—651.
7. Spectral theory I, Convergence to projections, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **54** (1943), 185—217.
8. Integration and linear operations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **40** (1936), 474—494.
9. A mean ergodic theorem, *Duke Math. J.*, **5** (1939), 635—646.
10. On a theorem of Plessner, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **41** (1935), 356—358.
11. An ergodic theorem for *n*-parameter groups, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **25** (1939), 195—196.
12. On one parameter groups of linear transformations, *Ann. of Math.* (2) **39** (1938), 569—573.
13. Resolution of the identity for commutative B*- algebras of operators, *Acta Sci. Math. Szeged*, 12 Pars B (1950), 51—56.
14. Spectral theory in abstract spaces and Banach algebras, Proc. Symposium on Spectral Theory and Differential Problems (1951), 1—65. Oklahoma Agricultural and Mechanical College, Stillwater, Oklahoma.
15. Spectral theory, Proc. Symposium on Spectral Theory etc. (1951), 203—208.
16. The reduction problem in spectral theory, Proc. International Congress Math., Cambridge, Mass., 1950, Vol. 2, 115—122.
17. Spectral theory. II. Resolutions of the identity, *Pacific J. Math.*, **2** (1952), 559—614.

18. Spectral operators, *Pacific J. Math.*, 4 (1954), 321—354.
19*. A survey of the theory of spectral operators, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 64, No. 5 (1958), 217—274. (Есть русский перевод: *Математика*, 4 : 1 (1960), 53—100.)

Данфорд и Миллер (Dunford N., Miller D. S.)
1. On the ergodic theorem, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 60 (1946), 538—549.

Данфорд и Морс (Dunford N., Morse A. P.)
1. Remarks on the preceding paper of James A. Clarkson, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 40 (1936), 415—420.

Данфорд и Петтис (Dunford N., Pettis B. J.)
1. Linear operations on summable functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 47 (1940), 323—392.

Данфорд и Сигал (Dunford N., Segal I. E.)
1. Semi-groups of operators and the Weierstrass theorem, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 52 (1946), 911—914.

Данфорд и Стоун (Dunford N., Stone M. H.)
1. On the representation theorem for Boolean algebras, *Revista Ci. Lima*, 43 (1941), 447—453.

Данфорд и Тамаркин (Dunford N., Tamarkin J. D.)
1. A principle of Jessen and general Fubini theorems, *Duke Math., J.*, 8, (1941), 743—749.

Данфорд и Шварц (Dunford N., Schwartz J.)
1. Convergence almost everywhere of operator averages, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 41 (1955), 229—231.
2. Convergence almost everywhere of operator averages, *J. Rational Mech. and Anal.*, 5 (1956), 129—178.

Данциг (van Dantzig D.)
1. Zur topologischen Algebra, I. *Math. Ann.*, 107 (1932), 587—626.
2. Einige Sätze über topologische Gruppen, *Jber Deutsch. Math. Verein.*, 41 (1932), 42—44.

Даукер (Dowker Y. N.)
1. Finite and σ-finite invariant measures, *Ann. of Math.* (2) 54, (1951), 595—608.
2. A new proof of the general ergodic theorem, *Acta Sci. Math. Szeged* 12 Pars B (1950), 162—166.
3. A note on the ergodic theorem, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55 (1949), 379—383.

Дворецкий и Роджерс (Dvoretzky A., Rogers C. A.)
1. Absolute and unconditional convergence in normed linear spaces, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 36 (1950), 192—197.

Девинац, Нусбаум и Дж. Нейман (Devinatz A., Nussbaum A. E., von Neumann J.)
1. On the permutability of self-adjoint operators, *Ann. of Math.* (2) 62 (1955), 199—203.

Дейвис Г. (Davis H. T.)
1. The theory of linear operators, Principia Press, Bloomington, Indiana, 1936.

Дейвис Р. (Davies R.)
1. Expansions in series of non-orthogonal eigenfunctions, *Industr. Math.*, 4 (1953), 9—16.

Джеймс (James R. C.)
1. Orthogonality in normed linear spaces, *Duke Math. J.*, 12 (1945), 291—302.
2. Orthogonality and linear functionals in normed linear spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 61 (1947), 265—292.
3. Inner products in normed linear spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 53 (1947), 559—566.

4. Bases and reflexivity of Banach spaces, *Ann. of Math.* (2) **52** (1950), 518—527.
5. A non-reflexive Banach space isometric with its second conjugate space, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **37** (1951), 174—177.

Джекобсон (Jacobson N.)
1. Lectures in abstract algebra. I. Basic Concepts. II. Linear algebras. D. van Nostrand, New York, 1951, 1953.

Джексон (Jackson D.)
1. Algebraic properties of self-adjoint systems, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **17** (1916), 418—424.

Джемисон (Jamison S. L.)
1. Perturbation of normal operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **5** (1954), 103—110.
2. On analytic normal operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **5** (1954), 288—290.

Джерисон (Jerison M.)
1. Characterizations of certain spaces of continuous functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **70** (1951), 103—113.
2. A property of extreme points of compact convex sets, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **5** (1954), 782—783.

Джиллеспи и Гурвиц (Gillespie D. C., Hurwitz W. A.)
1. On sequences of continuous functions having continuous limits, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **32** (1930), 527—543.

Джон (John F.)
1. The fundamental solution of linear elliptic differential equations with analytic coefficients, *Comm. Pure Appl. Math.*, **3** (1950), 273—304.
2. General properties of solutions of linear elliptic partial differential equations. Proc. Symposium Spectral Theory and Differential Problems, 113—175. Oklahoma Agricultural and Mechanical College, Stillwater, Oklahoma, 1951.

Джорджи (Giorgi G.)
1. Nuove osservazioni sulle funzioni delle matrici, *Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* (6) **8** (1928), 3—8.

Диксмье (Dixmier J.)
1. Les moyennes invariantes dans les semi-groupes et leurs applications, *Acta Sci. Math. Szeged* 12 Pars A (1950), 213—227.
2. Les fonctionnelles linéaires sur l'ensemble des opérateurs bornés d'un espace de Hilbert, *Ann. of Math.* (2) **51** (1950), 387—408.
3. Sur certains espaces considérés par M. H. Stone, *Summa Brasil. Math.*, **2** (1951), 151—182.
4. Sur un théorème de Banach, *Duke Math. J.*, **15** (1948), 1057—1071.
5. Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien, Gauthiers-Villars, Paris, 1957.
6. Sur une inégalité de E. Heinz, *Math. Ann.*, **126** (1953), 75—78.
7. Sur les bases orthonormales dans les espaces préhilbertiens, *Acta Sci. Math. Szeged*, **15** (1953), 29—30.

Диксон (Dixon A. C.)
1. On a class of expansions in oscillating functions, *Proc. London Math. Soc.* (2) **3** (1905), 83—103.

Дини (Dini U.)
1. Fonamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali, Pisa (1878).

Дирак (Dirac P. A. M.)
1. Основы квантовой механики, М., Гостехиздат, 1960 (1935)..

Диткин В. А.
1. Исследование строения идеалов в некоторых нормированных кольцах, М., *Учен. зап. ун-та*, **30** (1939), 83—130.

Дойль (Doyle T. C.)

1. Invariant theory of general ordinary, linear, homogenous, second order differential boundary problems, *Duke Math. J.*, **17** (1950), 249—261.

Доногю и Смит (Donoghue W. F., Smith K. T.)

1. On teh symmetry and bounded closure of locally convex spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **73** (1952), 321—344.

Дородницын А. А.

1. Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка, *УМН*, **7**, вып. 6 (52), (1952), 3—96.

Дрезден (Dresden A.)

1. Solid analytical geometry and determinants, H. Holt Co., New York, 1930.

Дуб (Doob J. L.), см. также Купмен

1. The law of large numbers for continuous stochastic processes, *Duke Math. J.*, **6** (1940), 290—306.
2. Stochastic processes with an integral-valued parameter, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **44** (1938), 87—150.
3. Asymptotic properties of Markoff transition probabilities, *Amer. Math. Soc.*, **63** (1948), 393—421.
4. Вероятностные процессы, М., ИЛ, 1956 (1953).

Дубровский В. М.

1. О некоторых свойствах вполне аддитивных функций множества и их применении к обобщению одной теоремы H. Lebesgue'a, *Матем. сб.*, **20** (62), (1947), 317—330.
2. О базисе семейства вполне аддитивных функций множества и о свойствах равномерной аддитивности и равностепенной непрерывности, *ДАН СССР*, **58** (1947,) 737—740.
3. О свойствах абсолютной непрерывности и равностепенной непрерывности, *ДАН СССР*, **63** (1948), 483—486.
4. О равностепенно суммируемых функциях и о свойствах равномерной аддитивности и равностепенной непрерывности семейства вполне аддитивных функций множества, *Изв. АН СССР*, сер. матем., **13** (1949), 341—356.
5. О свойстве равностепенной непрерывности семейства вполне аддитивных функций множества относительно собственного и несобственного базисов, *ДАН СССР*, **76** (1951), 333—336.
6. Об одном свойстве формулы Никодима, *ДАН СССР*, **85** (1952), 693—696.
7. О некоторых условиях компактности, *Изв. АН СССР*, сер. матем., **12** (1948), 397—410.

Дугунджи (Dugundji J.)

1. An extension of Tietze's theorem, *Pacific J. Math.*, **1** (1951), 353—367.

Дьёдонне (Dieudonné J.)

1. Sur le théorème de Hahn—Banach, *Rev. Sci.*, **79** (1941), 642—643.
2. Sur la séparation des ensembles convexes dans un espace de Banach, *Rev. Sci.*, **81** (1943), 277—278.
3. La dualité dans les espaces vectoriels topologiques, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (3) **59** (1942), 107—139.
4. Sur le théorème de Lebesgue—Nikodým, *Ann. of Math.* (2) **42** (1941), 547—555.
5. Sur le théorème de Lebesgue—Nikodým, II. *Bull. Soc. Math. France*, **72** (1944), 193—239; исправ. там же, **74** (1946), 66—68.
6. Complex structures on real Banach spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **3** (1952), 16?—164.

7. Sur les espaces de Köthe, *J. Analyse Math.*, **1** (1951), 81—115.
8. Natural homomorphisms in Banach spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **1** (1950), 54—59.
9. Sur le théorème de Lebesgue—Nikodým, IV, *J. Indian Math. Soc.* (*N.S.*), **15** (1951), 77—86.
10. Sur le théorème de Lebesgue—Nikodým, V, *Canadian J. Math.*, **3** (1951), 129—139.
11. Sur la convergence des suites de mesures de Radon, *Anais Acad. Brasil. Ci.*, **23** (1951), 21—38, 277—282.
12. Sur un théorème de Jessen, *Fund. Math.*, **37** (1950), 242—248.
13. Recent developments in the theory of locally convex vector spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **59** (1953), 495—512.
14. Sur le théorème de Lebesgue—Nikodým. III. *Ann. Inst. Fourier Grenoble*, **23** (1947—1948), 25—53.
15. Sur un théorème de Šmulian, *Arch. Math.*, **3** (1952), 436—440.
16. On biorthogonal systems, *Michigan Math. J.*, **2** (1954), 7—20. [Есть русский перевод: *Математика*, **3 : 4** (1959), 133—145.]
17. Sur le produit de composition, *Compositio Math.*, **12** (1954), 17—34.
18. Bounded sets in (*F*)-spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **6** (1955), 729—731.
19. Sur la bicommutante d'une algèbre d'opérateurs, *Portugaliae Math.*, **14** (1955), 35—38.
20. Sur la théorie spectrale, *J. Math. Pures Appl.* (9) **35** (1956), 175—187.
21. Champs de vecteurs non localement triviaux, *Archiv des Math.*, **7** (1956), 6—10.

Дьедонне и Гомес (Dieudonné J., Gomes A. P.)
1. Sur certains espaces vectoriels topologiques, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **230** (1950), 1129—1130.

Дьедонне и Шварц (Dieudonné J., Schwartz L.)
1. La dualité dans les espaces (*F*) et (*LF*), *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, **1** (1950), 61—101. [Есть русский перевод: *Математика*, **2 : 2** (1958), 77—117.]

Дынкин Е. Б.
1*. Марковские процессы и связанные с ними задачи анализа, *УМН*, 15:2 (1960), 3—24.

Дэй (Day M. M.)
1. The space L^p with $0<p<1$, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **46** (1940), 816—823.
2. A property of Banach spaces, *Duke Math.*, *J.*, **8** (1941), 763—770.
3. Reflexive Banach spaces not isomorphic to uniformly convex spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **47** (1941), 313—317.
4. Some more uniformly convex spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **47** (1941), 504—517.
5. Uniform convexity, III, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **49** (1943), 745—750.
6. Uniform convexity in factor and conjugate spaces, *Ann. of Math.*, **45** (1944), 375—385.
7. Some characterizations of inner-product spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **62**, 320—337 (1947).
8. Means for the bounded functions and ergodicity of the bounded representations of semi-groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **69** (1950), 276—291.
9. Operations in Banach spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **51** (1942), 583—608.
10. Ergodic theorems for abelian semi-groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **51** (1942), 399—412.
11. Strict convexity and smoothness of normed spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **78** (1955), 516—528.
12*. Линейные нормированные пространства, М., ИЛ., 1961.

Жордан (Jordan G.)
1. Sur la série de Fourier, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **92** (1881), 228—230.
Жюлиа (Julia G.)
1. Sur les racines carrées hermitiennes d'un operateur hermitien positif donné, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **222** (1946), 707—709.
2. Remarques sur les racines carrées hermitiennes d'un opérateur hermitien positif borné, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **222** (1946), 829—832.
3. Sur la representation spectrale des racines hermetiennes d'un opérateur hermitien positif donné, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **222** (1946), 1019—1022.
4. Sur les racines carrées self-adjoint d'un opérateur self-adjoint positif non borné, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **222** (1946), 1061—1063.
5. Sur les racines $n^{\text{ièmes}}$ hermetiennes d'un opérateur hermitien donné, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **222** (1946), 1465—1468.
6. Détermination de toutes les racines carrées d'un opérateur hermitien borné quelconque, I, II.
   I. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **227** (1948), 792—794.
   II. Там же, **227** (1948), 931—933.
7. Introduction mathématique aux théories quantiques, Paris, 1938.
Заанен (Zaanen A. C.), см. также Виссер
1. On a certain class of Banach spaces, *Ann. of Math.* (2), **47** (1946), 654—666.
2. Integral transformations and their resolvents in Orlicz and Lebesgue spaces, *Compositio Math.*, **10** (1952), 56—94.
3. Normalisable transformations in Hilbert space and systems of linear integral equations, *Acta Math.*, **83** (1950), 197—248.
4. Note on a certain class of Banach spaces, *Nederl. Akad. Vetensch. Proc.*, **52** (1949), 488—499.
5. Linear analysis. P. Noordhoff, Groningen, and Interscience Pub., New York, 1953.
6. Characterization of a certain class of linear transformations in an arbitrary Banach space, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A*, **54**, (1951), 87—93.
7. Über vollstetige symmetrische und symmetrisierbare Operatoren, *Nieuw Arch. Wiskunde* (2) **22** (1943), 57—80.
8. On the theory of linear integral equations, I. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.*, **49** (1946), 194—204.
9. On linear functional equations, Nieuw Arch. Wiskudne (2) **22** (1948), 269—282.
Зальцвассер (Zalwasser Z.)
1. Sur une propriété du champ des fonctions continues, *Studia Math.*, **2** (1930), 63—67.
Зейдель (Seidel Ph. L.)
1. Note über eine Eigenschaft der Reihen, welche discontinuierliche Functionen darstellen, *Abhandlungen der Bayerischen. Akad. der Wiss. München*, **5** (1847—1848), 379—393.
Зейферт (Seifert G.)
1. A third order boundary value problem arising in aeroelastic wing theory, *Quart. Appl. Math.*, **9** (1951), 210—218.
2. A third order irregular boundary value problem and the associated series, *Pacific J. Math.*, **2** (1952), 395—406.
Зейц (Seitz F.)
1. The modern theory of solids, New York, 1940.
Зигмунд (Zygmund A.), см. также Кальдерон, Пэли, Салем и Тамаркин
1. Тригонометрические ряды, М.—Л., 1939.
2. An individual ergodic theorem for non-commutative transformations, *Acta Sci. Math. Szeged*, **14** (1951), 103—110.

3. On a theorem of Paley, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **34** (1938), 125—133.
4. On the convergence and summability of power series on the circle of convergence (I). *Fund. Math.*, **30** (1938), 171—196.

Зильберштейн (Silberstein J. P. O.)
1. On eigenvalues and singular values of compact linear operators in Hilbert space, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **49** (1953), 201—212.

Ивата (Iwata G.)
1. Non-hermitian operator and eigenfunction expansions, *Progress Theoret. Phys.*, **6** (1951), 216—226.

Идзуми (Izumi S.)
1. On the bilinear functionals, *Tôhoku Math. J.*, **42** (1936), 195—209.
2. On the compactness of a class of functions, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **15** (1939), 111—113.
3. Lebesgue integral in the abstract space, *Jap. J. Math.*, **13** (1936), 501—513.
4. Notes on Banach space, I. Differentiation of abstract functions, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **18** (1942), 127—130.

Идзуми и Суноути (Izumi S., Sunouchi G.)
1. Notes on Banach space (VI): Abstract integrals and linear operations, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **19** (1943), 169—173.

Ийер (Iyer V. G.)
1. On the space of integral functions, I—III.
I. *J. Indian Math. Soc.* (2) **12** (1948), 13—30.
II. *Quart. J. Math.* (*Oxford*) (2) **1** (1950), 86—96.
III. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **3** (1952), 874—883.

Инаба (Inaba M.)
1. A theorem on fixed points and its application to the theory of differential equations, *Kumamoto. J. Sci. Ser.* A, **1**, No. 1 (1952), 13—16.

Инглтон (Ingleton A. W.)
1. The Hahn—Banach theorem for non-Archimedean valued fields, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **48** (1952), 41—45.

Инфельд (Infeld L.)
1. On a new treatment of some eigenvalue problems, *Phys. Rev.* (2) **59** (1941), 737—747.

Инфельд и Хал (Infeld L., Hull T. E.)
1. The factorization method, *Rev. Mod. Phys.*, **23** (1951), 21—68.

Ионеску и Маринеску (Ionescu Tulcea C. T., Marinescu G.)
1. Théorie ergodique pour des classes d'opérations non complètement continues, *Ann. of Math.* (2), **52** (1950), 140—147.

Иосида (Yosida K.)
1. On vector lattices with a unit, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **17** (1941), 121—124.
2. Vector lattices and additive set functions, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **17** (1941), 228—232.
3. On the unitary equivalence in general Euclidean space, *Proc. Japan Acad.*, **22** (1946), 242—245.
4. Mean ergodic theorem in Banach spaces, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **14** (1938), 292—294.
5. Ergodic theorems of Birkhoff—Khintchine's type, *Jap. J. Math.*, **17** (1940), 31—36.
6. An abstract treatment of the individual ergodic theorem, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **16** (1940), 280—284.
7. On the group embedded in the metrical complete ring, *Jap. J. Math.*, **13** (1936), 7—26.
8. On the differentiability and the representation of one-parameter semigroups of linear operators, *J. Math. Soc. Japan*, **1** (1948), 15—21.

9. The Markoff process with a stable distribution, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **16** (1940), 43—48.
10. On Titchmarsh—Kodaira's formula concerning Weyl—Stone's eigenfunction expansion, *Nagoya Math. J.*, **1** (1950), 49—58. Исправ. там же, **6** (1953), 187—188.
11. On the theory of spectra, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **16** (1940), 378—383.
12. Normed rings and spectral theorems, I—VI.
   I. *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **19** (1943), 356—359.
   II. Там же, **19** (1943), 466—470.
   III. Там же, **20** (1944), 71—73.
   IV. Там же, **20** (1944), 183—185.
   V. Там же, **20** (1944), 269—273.
   VI. Там же, **20**, (1944), 451—453.

Иосида и Какутани (Yosida K., Kakutani S.)
1. Birkhoff's ergodic theorem and the maximal ergodic theorem, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **15** (1939), 165—168.
2. Operator-theoretical treatment of Markoff process and mean ergodic theorem, *Ann. of Math.* (2) **42** (1941), 188—228.

Иосида, Мимура и Какутани (Yosida K., Mimura Y., Kakutani S.)
1. Integral operator with bounded kernel, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **14** (1938), 359—362.

Иосида и Накаяма (Yosida K., Nakayama T.)
1. On the semi-ordered ring and its application to the spectral theorem, I, II.
   I. *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **18** (1942), 555—560.
   II. Там же, **19** (1943), 144—147.

Иосида и Фукамия (Yosida K., Fukamiya M.)
1. On regularly convex sets, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **17** (1941), 49—52.

Иосида и Хьюит (Yosida K., Hewitt E.)
1. Finitely additive measures, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **72** (1952), 46—66.

Йессен (Jessen B.). См. также Спарре Андерсен
1. The theory of integration in a space of an infinite number of dimensions, *Acta Math.*, **63** (1934), 249—323.
2. Bidrag til Integralteorien for Funktioner af unendlig mange Variable. Copenhagen, 1930.

Йордан и Дж. Нейман (Jordan P., von Neumann J.)
1. On inner products in linear, metric spaces, *Ann. of Math.* (2), **36** (1935), 719—723.

Йост (Jost R.), см. также Ньютон
1. Bemerkungen zur mathematischen Theorie der Zähler, *Helvetica Phys. Acta*, **20** (1947), 173—182.

Йост и Кон (Jost R., Kohn W.)
1. Construction of a potential from a phase shift, *Phys. Rev.*, **87** (1952), 977—992.

Йост и Пейс (Jost R., Pais A.)
1. On the scattering of a particle by a static potential, *Phys. Rev.*, **82** (1951), 840—851.

Какутани (Kakutani S.), см. также Андзаи, Боненблуст и Иосида
1. Ein Beweis des Satzes von M. Eidelheit über konvexe Mengen, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **13** (1937), 93—94.
2. Weak topology and regularity of Banach spaces, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **15** (1939), 169—173.
3. Weak topology, bicompact set and the principle of duality, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **16** (1940), 63—67.

4. Two fixed-point theorems concerning bicompact convex sets, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **14** (1938), 242—245.
5. Topological properties of the unit sphere of a Hilbert space, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **19** (1943), 269—271.
6. Some characterizations of Euclidean spaces, *Jap. J. Math.*, **16** (1939), 93—97.
7. Mean ergodic theorems in abstract (*L*) spaces, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **15** (1939), 121—123.
8. Concrete representation of abstract (*L*)-spaces and the mean ergodic theorem, *Ann. of Math.* (2), **42** (1941), 523—537.
9. Concrete representation of abstract (*M*)-spaces. (A characterization of the space of continuous functions), *Ann. of Math.* (2) **42** (1941), 994—1024.
10. Ergodic theory, Proc. International Congress Math. Cambridge, Mass, 2 (1950), 128—142.
11. A proof of Schauder's theorem, *J. Math. Soc. Japan*, **3** (1951), 228—231.
12. Über die Metrisation der topologischen Gruppen, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **12** (1936), 82—84.
13. Iteration of linear operations in complex Banach spaces, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **14** (1938), 295—300.
14. Notes on infinite product measure spaces, I, II.
I. *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **19** (1943), 148—151.
II. Там же, **19** (1943), 184—188.
15. An example concerning uniform boundedness of spectral measures, *Pacific J. Math.*, **4** (1954), 363—372.
16. Ergodic theorems and the Markoff process with a stable distribution, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **16** (1940), 49—54.
17. On the uniqueness of Haar's measure, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **14** (1938), 27—31.
18. A proof of the uniqueness of Haar's measure, *Ann. of Math.* (2) **49** (1948), 225—226.
19. On the uniform ergodic theorem concerning real linear operations, *Jap. J. Math.*, **17** (1940), 5—12.
20. Some results in the operator-theoretical treatment of the Markoff process, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **15** (1939), 260—264.
21. Simultaneous extension of continuous functions considered as a positive linear operation, *Jap. J. Math.*, **17** (1940), 1—4.
22. Weak convergence in uniformly convex spaces, *Tôhoku Math. J.*, **45** (1938), 188—193.
23. Rings of analytic functions. Lectures on functions of a complex variable, pp. 71, 83, Ann Arbor, 1955.

Какутани и Кодаира (Kakutani S., Kodaira K.)
1. Über das Haarsche Mass in der lokal bikompakten Gruppe, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **20** (1944), 444—450.

Какутани и Макки (Kakutani S., Mackey G. W.)
1. Two characterizations of real Hilbert space, *Ann. of Math.* (2) **45** (1944), 50—58.

Калкин (Calkin J. W.)
1. Abstract symmetric boundary conditions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **45** (1939), 369—442.
2. Two sided ideals and congruences in the ring of bounded operators in Hilbert space, *Ann. of Math.* (2) **42** (1941), 839—873.
3. Symmetric transformations in Hilbert space, *Duke J. Math.*, **7** (1940), 504—508.

Каллер (Kuller R. G.)
1. Locally convex topological vector lattices and their representations, Dissertation, Univ. of Michigan, 1955.

Кальдерон (Calderón A. P.)
1. A general ergodic theorem, *Ann. of Math.* (2) 58 (1953), 182—191.
Кальдерон и Зигмунд (Calderón A. P., Zygmund A.)
1. A note on the interpolation of linear operations, *Studia Math.*, **12** (1951), 194—204.
2. On the theorem of Hausdorff — Young and its applications. Contributions to Fourier Analysis, 166—188. Ann. of Math. Studies, No. 25, Princeton Univ. Press (1950).
3. A note on the interpolation of sublinear operations, *Amer. J. Math.*, 78 (1956), 282—288.
4. On the existence of certain singular integrals, *Acta Math.*, 88 (1952), 85—139.
5. On singular integrals, *Amer. J. Math.*, 78 (1956), 289—309.
6. Algebras of certain singular operators, *Amer. J. Math.*, **78** (1956), 310—320.
Камерон (Cameron R. H.)
1. A «Simpson's Rule» for the numerical evaluation of Wiener's integrals in function space, *Duke Math. J.*, **18** (1951), 111—130.
2. The first variation of an indefinite Wiener integral, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **2** (1951), 914—924.
3. The generalized heat flow equation and a corresponding Poisson formula, *Ann. of Math.* (2) **59** (1954), 434—462.
Есть русский перевод: *Математика*, 2 : 1 (1958), 101—130.
4. Some examples of Fourier — Wiener transforms of analytic functionals, *Duke Math.* J., **12** (1945), 485—488.
5. The translation pathology of Wiener space, *Duke Math. J.*, **21** (1954), 623—627.
Камерон и Грейвс (Cameron R. H., Graves R. E.)
1. Additive functionals on a space of continuous functions. I, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **70** (1951), 160—176.
Камерон, Линдгрен и Мартин (Cameron R. H., Lindgren B. W., Martin W. T.)
1. Linearization of certain non-linear functional equations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **3** (1952), 138—143.
Камерон и Мартин (Cameron R. H., Martin W. T.)
1. An expression for the solution of a class of non-linear integral equations, *Amer. J. Math.*, 66 (1944), 281—298.
2. The orthogonal development of non-linear functionals in series of Fourier — Hermite functionals, *Ann. of Math.* (2) 48 (1947), 385—392.
3. The transformation of Wiener integrals by non-linear transformations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **66** (1949), 253—283.
4. Non-linear integral equations, *Ann. of Math.* (2) **51** (1950), 629—642.
5. Transformations of Wiener integrals under a general class of linear transformations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 58 (1945), 184—219.
6. Evaluation of various Wiener integrals by use of Sturm — Liouville differential equations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **51** (1945), 73—90.
7. Transformations of Wiener integrals under translations, *Ann. of Math.* (2) **45** (1944), 386—396.
8. The Wiener measure of Hilbert neighborhoods in the space of real continuous functions, *J. Math. Phys. Mass. Inst. Tech.*, **23** (1944), 195—209.
9. Fourier-Wiener transforms of analytic functionals, *Duke Math. J.*, **12** (1945), 489—507.
Камерон и Фейган (Cameron R. H., Fagan R. E.)
1. Non-linear transformations of Volterra type in Wiener space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **75** (1953), 552—575.

Камерон и Хетфилд (Cameron R. H., Hatfield C.)
1. Summability of certain orthogonal development of non-linear functionals, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **55** (1949), 130—145.
2. Summability of certain series for unbounded non-linear functionals, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **4** (1953), 375—387.

Камерон и Шапиро (Cameron R. H., Shapiro J. M.)
1. Non-linear integral equations, *Ann. of Math.* (2) **62** (1955), 472—497.

Камке (Kamke E.)
1. Mengenlehre. W. de Gruyter, Berlin and Leipzig, 1928.
2. Neue Herleitung der Oszillationsätze für die linearen selbstadjugierten Randwertaufgaben zweiter Ordnung, *Math. Zeit.*, **44** (1938), 635—638.

Кампен (van Kampen E. R.)
1. Locally bicompact groups and their character groups, *Ann. of Math.* (2), **36** (1935), 448—463.

Канторович Л. В., см. также Фихтенгольц Г. М.
1. Lineare halbgeordnete Räume, *Матем. сб.*, **2** (44), (1937), 121—168.
2. The method of successive approximations for functional equations, *Acta Math.*, **71** (1939), 63—97.
3. Linear operations in semi-ordered spaces, I, *Матем. сб.*, **7** (49), (1940), 209—284.
4. Общие формы некоторых классов линейных операций, ДАН СССР, **3** (1936), 101—106.

Канторович Л. В. и Вулих Б. З.
1. Sur la rep'esentation des opérations linéaires, *Compositio Math.*, **5** (1938), 119—165.
2. Sur un théoreme de M. N. Dunford, *Compositio Math.*, **5** (1938), 430—432.

Канторович Л. В., Вулих Б. З. и Пинскер А. Г.
1. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. Гостехиздат, М.—Л., 1950.
2. Полуупорядоченные группы и линейные полуупорядоченные пространства, *УМН*, **6 : 3** (43), (1951), 31—98.

Капланский (Kaplansky I.), см. также Аренс
1. The structure of certain operator algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **70**, (1951,, 219—255.
2. The Weierstrass theorem in fields with valuations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **1** (1950), 356—357.
3. Lattices of continuous functions, I, II.
I. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **53** (1947), 617—623.
II. *Amer. J. Math.*, **70** (1948), 626—634.
4. Topological rings, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **54** (1948), 809—826.
5. Primary ideals in group algebras, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, **35** (1949), 133—136.
6. Products of normal operators, *Duke Math. J.*, **20** (1953), 257—260.
7. A theorem on rings of operators, *Pacific J. Math.*, **1** (1951), 227—232.

Карасева Т. М.
1. Об обратной задаче Штурма — Лиувилля для неэрмитова оператора, *Матем. сб.*, **32** (74), (1953), 477—484.

Каратеодори (Carathéodory C.)
1. Vorlesungen über reelle Funktionen. 2-е изд. Teubner, Leipzig, 1927. 1-е изд. Teubner, Berlin und Leipzig, 1918.
2. Bemerkungen zur Riesz — Fischerschen Satz und zur Ergodentheorie, *Abb. Math. Sem. Hansischen Univ.*, **14** (1941), 351—389.

Карлеман (Carleman T.)
1. Sur les équations intégrales singuliéres à noyau réel et symétrique. Almquist and Wiksells, Uppsala, 1923.
2. Zur Theorie der linearen Integralgleichungen, *Math. Zeit.*, **9** (1921), 196—217.

3. Über die asymptotische Verteilung der Eigenwerte partiellen Differentialgleichungen, *Ber. Verh. Sachs. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-Nat. Kl.*, 88 (1936), 119—132.

Карлин (Karlin S.)

1. Unconditional convergence in Banach spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **54** (1948), 148—152.
2. Bases in Banach spaces, *Duke Math. J.*, **15** (1948), 971—985.

Картан (Cartan H.)

1. Sur la mesure de Haar, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **211** (1940), 759—762.

Картан и Годман (Cartan H., Godement R.)

1. Théorie de la dualité et analyse harmonique dans les groupes abéliens localement compacts, *Ann. École Norm. Sup.*, 64 (1947), 79—99.

Като (Kato T.)

1. On the convergence of the perturbation method, I, II.
   I. *Progress Theoret. Physics*, **4** (1949), 514—523.
   II. Там же, **5** (1950), 96—101, 207—212.
2. On the convergence of the perturbation method, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect.* I, **6** (1951), 145—226.
3. Perturbation theory of semi-bounded operators, *Math. Ann.*, **125** (1953), 435—447.
4. On the perturbation theory of closed linear operators. *J. Math. Soc. Japan*, **4** (1952), 323—337.
5. Notes on some inequalities for linear operators, *Ma h. Ann.*, **125** (952), 208—212.
6. On some approximate methods concerning the operators T^*T, *Math. Ann.*, **126** (1953), 253—262.
7. On the semi-groups generated by Kolmogoroff's differential equations, *J. Math. Soc. Japan*, **6** (1954), 1—15.
8. On the upper and lower bounds of eigenvalues, *J. Phys. Soc. Japan*, **4** (1949), 334—339.

9*. Integration of the equation of evolution in a Banach space, *J. Math. Soc. Japan*, **5** (1953), 208—234. Есть русский перевод: *Математика*, **2**:**4** (1958), 117—135.

Кафиеро (Cafiero F.)

1. Criteri di compattezza per le successioni di funzioni generalmente a variazione limitata, I, II.
   I. *Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Math. Nat.* (8), (1950), 305:311.
   II. Там же (8) 8, (1950), 450—457.
2. Sugli insiemi compatti di funzioni misurabili negli spazi astratti, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **20** (1951), 48—58.
3. Sulle famiglie di funzioni additive d'insieme, uniformemente continue, *Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* (8) **12** (1952), 155—162.
4. Sul passaggio al limite sotto il segno d'integrale di Stieltjes — Lebesgue negli spazi astratti, con masse variabili con gli integrandi, I, II.
   I. *Atti. Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* (8) **14** (1953), 488—494.
   II. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **22** (1953), 223—245.
5. Sulle famiglie compatte di funzioni additive di insieme astratto. Atti del Quarto Congresso dell'Unione Mat. Italiana, Taormin, 1951, vol. II, pp. 30—40. Casa Editrice Perrella, Rome, 1953.

Кац И. С.

1. О гильбертовых пространствах, порождаемых монотонными эрмитовыми матрицами-функциями, *Харьк., Зап. мат. об-ва* (4), **22** (1950), 95—113.

Кац М. (Кас М.), см. также Эрдёш
1. On distributions of certain Wiener functionals, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **65** (1949), 1—13.
2. On the average of a certain Wiener functional and a related limit theorem in the calculus of probability, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **59** (1946), 401—414.
3. On some connections between probability theory and differential and integral equations, Proc. Second Berkeley Symposium Math. Statistics and Prob., (1951), 189—215. (Есть русский перевод: *Математика*, **1** : **2** (1957), 95—124.)

Качмаж и Штейнгауз (Kaczmarz S., Steinhaus H.)
1. Теория ортогональных рядов, М., Физматгиз, 1958 (1935).

Квигли (Quigley F. D.), см. Хельсон

Кей (Kay I.)
1. The inverse scattering problem. Div. Electromag. Res., Inst. Math. Sci., New York Univ., 1955.

Кей и Мозес (Kay I., Moses H. E.)
1. The determination of the scattering potential from the spectral measure function, I, *Il Nuovo Cimento* (10) **2** (1955), 917—961.
2. The determination of the scattering potential from the spectral measure function, I—III, Div. of Electromag. Res., Inst. Math., Sci., New York Univ., 1955.

Кейдисон (Kadison R. V.)
1. A representation theory for commutative topological algebra, *Memoirs Amer. Math. Soc.*, No. 7, 1951.
2. Isometries of operator algebras, *Ann. of Math.* (2) **54** (1951), 325—338.

Келдыш М. В.
1. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений, *ДАН СССР*, **77** (1951), 11—14.

Келли (Kelley J. L.), см. также Аренс и Фелл
1. Note on a theorem of Krein and Milman, *J. Osaka Inst. Sci. Tech. Part 1*, **3** (1951), 1—2.
2. Banach spaces with the extension property, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **72** (1952), 323—326.
3. The Tychonoff product theorem implies the axiom of choice, *Fund. Math.*, **37** (1950), 75—76.
4. Convergence in topology, *Duke Math., J.*, **17** (1950), 277—283.
5. General topology, D. van Nostrand, New York, 1955.
6. Commutative operator algebras, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, **38** (1952), 598—605.

Келли и Вот (Kelley J. L., Vaught R. L.)
1. The positive cone in Banach algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **74** (1953), 44—55.

Келлог (Kellogg O. D.), см. Биркгоф Дж.

Кембл (Kemble E. C.)
1. A contribution to the theory of the B. W. K., method, *Phys. Rev.*, **48** (1935), 549—561.
2. Note on the Sturm — Liouville eigenvalue-eigenfunction problem with singular endpoints, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, **19** (1933), 710—714.
3. The fundamental principles of quantum mechanics, New York, 1937.

Кемп (Camp B. H.)
1. Singular multiple integrals, with applications to series, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **14** (1913), 42—64.

Кернер (Kerner M.)
1. Abstract differential geometry, *Compositio Math.*, **4** (1937), 308—341.
2. Die Differentiale in der allgemeinen Analysis, *Ann. of Math.* (2) **34** (1933), 564—572.

Кёте (Köthe G.)
1. Die Teilräume eines linearen Koordinatenraumes, *Math. Ann.*, **114** (1937), 99—125.
2. Lösbarkeitsbedingungen für Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, *J. Reine Angew. Math.*, **178** (1938), 193—213.
3. Erweiterung von Linearfunktionen in linearen Räumen, *Math. Ann.*, **116** (1939), 719—732.
4. Die Quotienträume eines linearen vollkommenen Räumes, *Math. Z.*, **51** (1947), 17—55.
5. Die Stufenräume, eine einfache Klasse linearer vollkommenen Räume, *Math. Z.*, **51** (1948), 317—345.
6. Eine axiomatische Kennzeichnung der linearen Räume von Typus ω, *Math. Ann.*, **120** (1949), 634—649.
7. Über die Vollständigkeit einer Klasse lokalkonvexer Räume, *Math. Z.*, **52** (1950), 627—630.
8. Über zwei Sätze von Banach, *Math. Z.*, **53** (1950), 203—209.
9. Neubegründung der Theorie der vollkommenen Räume, *Math. Nachr.*, **4** (1951), 70—80.
10. Funktionalanalysis, Integraltransformationen. Naturforschung und Medizin in Deutschland, 1939—1946, Band 2, 85—98. Dieterich'sche Verlagsbuchhandlung, Wiesbaden, 1948.

Кёте и Теплиц (Kothe G., Toeplitz O.)
1. Lineare Räume mit unendlichvielen Koordinaten, *J. Reine Angew Math.*, **171** (1934), 193—226.

Килпи (Kilpi Y.)
1. Über lineare normale Transformationen im Hilbertschen Raum, *Ann. Acad. Sci., Fennicae*, Ser. A 1, No. 154 (1953), 38.

Киносита (Kinoshita S.)
1. On essential components of the set of fixed points, *Osaka Math. J.*, **4** (1952), 19—22.

Кларксон (Clarkson J. A.), см. также Адамс
1. Univormly convex spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **40** (1936), 396—414.
2. A characterization of *C*-spaces, *Ann. of Math.* (2) **48** (1947), 845—850.

Кларксон и Эрдёш (Clarkson J. A., Erdös P.)
1. Approximation by polynomials, *Duke Math. J.*, **10** (1943), 5—11.

Клейнекке (Kleinecke D. C.)
1. A generalization of complete continuity. Technical Report No. 3 to the Office of Ordinance Research, University of California, Berkeley (1954).
2. Degenerate perturbations. Technical Report No. 1 to the Office of Ordinance Research, University of California, Berkeley (1953).
3. Finite perturbations and the essential spectrum. Technical Report No, 4 to the Office of Ordinance Research, University of California, Berkeley (1954).

Кли (Klee V. L., Jr.)
1. The support property of a convex set in a linear normed space, *Duke Math., J.*, **15** (1948), 767—772.
2. Dense convex sets, *Duke Math. J.*, **16** (1949), 351—354.
3. Convex sets in linear spaces, *Duke Math. J.*, **18** (1951), 443—466.
4. Convex sets in linear spaces, II, *Duke Math. J.*, **18** (1951), 875—883.
5. Invariant extensions of linear functionals, *Pacific J., Math.*, **4** (1954), 37—46.
6. Invariant metrics in groups (Solution of a problem of Banach), *Proc. Amer. Math. Soc.*, **3** (1952), 484—487.
7. Some characterizations of reflexivity, *Revista Ci., Lima*, **52** (1950), 15—23.

8. Convex bodies and periodic homeomorphisms in Hilbert space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **74** (1953), 10—43.

Клиффорд (Clifford A. H.), см. Майкал

Кнезер (Kneser A.)

1. Untersuchungen über die reellen Nullstellen der Integrale linearer Differentialgleichungen, *Math. Ann.*, **42** (1893), 409—435.
2. Untersuchungen über die Darstellung willkürlicher Funktionen in der mathematischen Physik, *Math. Ann.*, **58** (1904), 81—147.
3. Beiträge zur Theorie der Sturm — Liouvilleschen Darstellung willkürlicher Funktionen, *Math. Ann.*, **60** (1905), 402—423.
4. Die Theorie der Integralgleichungen und die Darstellung willkürlicher Funktionen in der mathematischen Physik, II, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl.* (1906), 213—252.

Кнопп (Knopp K.)

1. Theory of functions, I, II. Dover Publications, New York, 1945, 1947.

Кобер (Kober H. A.)

1. A theorem on Banach spaces, *Compositio Math.*, **7** (1939), 135—140.

Ковалевский (Kowalewski G.)

1. Einführung in die Determinantentheorie. Second ed., W. de Gruytér, Berlin and Leipzig, 1925.

Кодаира (Kodaira K.), см. также Какутани

1. On ordinary differential equations of any even order and the corresponding eigenfunction expansions, *Amer. J. Math.*, **72** (1950), 502—544.
2. On some fundamental theorems in the theory of operators in Hilbert space, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **15** (1939), 207—210.
3. Über die Beziehung zwischen den Massen und den Topologien in einer Gruppe, *Proc. Phys.-Mat. Soc. Japan* (3) **23** (1941), 67—119.
4. The eigenvalue problem for ordinary differential equations of the second order and Heisenberg's theory of S-matrices, *Amer. J. Math.*, **71** (1949), 921—945.
5. On singular solutions of second order differential operators, I. II.
   I. *Sūgaku*, **7** (1948), 177—191.
   II. Там же, **2** (1948), 113—139. (Японск.).

Коддингтон (Coddington E. A.)

1. On the spectral representation of ordinary self-adjoint differential operators, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **38** (1952), 732—737.
2. The spectral representation of ordinary self-adjoint differential operators, *Ann. of Math.* (2) **60** (1954), 192—211.
3. A characterization of ordinary self-adjoint differential systems (abstract), *Bull. Amer. Math. Soc.*, **58** (1952), 42.
4. The spectral matrix and Green's function for singular selfadjoint boundary value problems, *Canadian J. Math.*, **6** (1954), 169—185.

Коддингтон и Левинсон (Coddington E. A., Levinson N.)

1. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, М., ИЛ, 1958 (1955).
2. On the nature of the spectrum of singular second order linear differential operators, *Canadian J. Math.*, **3**, (1951), 335—338.
3. Perturbations of linear systems with constant coefficients possessing periodic solutions. Contribution to the theory of non-linear oscillations II, 19—35, Princeton, 1952.

Козлов В. Я.

1. О базисах в пространстве L_2 (0,1), *Матем. сб.*, **26** (68) (1950), 85—102.
2. О одном обобщении понятия базиса, *ДАН СССР*, **73** (1950), 643—646.

Коллац (Collatz L.)

1. Eigenwertprobleme und ihre numerische Behandlung. Akademischer Verlag, Leipzig, 1945.

Коллинз (Collins H. S.)
1. Completeness and compactness in linear topological spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **79** (1955), 256—280.
Колмогоров А. Н., см. также Гельфанд
1. Zur Normierbarkeit eines allgemeinen topologischen linearen Raumes, *Studia Math.*, **5** (1934), 29—33.
2. Über Kompaktheit der Funktionenmengen bei der Konvergenz im Mittel, *Nachr. Ges. Göttingen Math.-Phys. Kl.* (1931), 60—63.
3*. О линейной размерности топологических векторных пространств, *ДАН СССР*, **120** (1958), 239—241.
4*. Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизмов пространств Лебега, *ДАН СССР*, **119** (1958), 861—864.
5*. Об энтропии на единицу времени как метрическом инварианте автоморфизмов, *ДАН СССР*, **124**(1959), 754—755.
Колмогоров А. Н. и Фомин С. В.
1*. Элементы функционального анализа, изд. МГУ, вып. 1, 1954; вып. 2, 1960.
Коматудзаки (Komatuzaki H.)
1. Sur les projections dans certains espaces du type (*B*), *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **16** (1940), 274—279.
2. Une remarque sur les projections dans certains espaces du type (*B*), *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **17** (1941), 238—240.
Кон (Kohn W.), см. Йост
Кордес (Cordes H. O.)
1. Separation des Variablen in Hilbertschen Räumen, *Math. Ann.*, **125** (1953), 401—434.
2. Der Entwicklungssatz nach Produkten bei singulären Eigenwertproblemen partieller Differentialgleichungen, die durch Separation zerfallen, *Nachr. Akad. Göttingen. Math.-Phys. Kl.* (1954), 51—69.
Костюченко А. Г.— см. Гельфанд.
Костюченко А. Г. и Скороход А. В.
1. Об одной теореме Н. К. Бари, *УМН*, **8** : **5** (57), (1953), 165—166.
Котляр (Cotlar M.)
1. On a theorem of Beurling and Kaplansky, *Pacific J. Math.*, **4** (1954), 459—465.
Котляр и Рикабарра (Cotlar M., Ricabarra R. A.)
1. On transformations of sets and Koopman's operators, *Revista Unión Mat. Argentina*, **14** (1950), 232—254.
Коши (Cauchy A.)
1. Oeuvres, sér. I, t. 12, Gauthier-Villars, Paris, 1900.
2. Oeuvres, sér. II, t. 3, Gauthier-Villars, Paris, 1900.
Коэн И. (Cohen I. S.)
1. On non-Archimedean normed spaces, *Nederl. Akad. Wetensch., Proc.*, **51** (1948), 693—698.
Коэн Л. (Cohen L. W.)
1. Transformations on spaces of infinitely many dimensions, *Ann. of Math.* (2) **37** (1936), 326—335.
2. On the mean ergodic theorem, *Ann. of Math.* (2) **41** (1940), 505—509.
Коэн Л. и Данфорд (Cohen L. W., Dunford N.)
1. Transformations on sequence spaces, *Duke Math. J.*, **3** (1937), 689—701.
Крамер В. (Kramer V. A.)
1. Investigations in asymptotic perturbation series. Dissertation, Univ. of California at Berkeley, 1954.
2. Asymptotic inverse series. Proc., *Amer. Math. Soc.*, 7 (1956), 429—437.
Крамер Г. (Kramer H. R.)
1. Perturbation of differential operators, Dissertation, Univ. of California at Berkeley, 1954.

К р а м е р с (Kramers H. A.)
1. Wellenmechanic und halbzahlige Quantisierung, *Zeitschrift für Phys.*, **39** (1926), 828—846.
2. Das Eigenwertproblem in eindimensional periodischen Kraftfelde, *Physica*, **2** (1935), 483—490.

К р а с н о с е л ь с к и й М. А., см. также К р е й н М. Г.
1. О некоторых типах расширений эрмитовых операторов, *Укр. матем. ж.*, **2** (1950), 74—83.
2. О самосопряженных расширениях эрмитовых операторов. *Укр. матем. ж.*, **1** (1949), 21—38.
3. О дефектных числах замкнутых операторов, *ДАН СССР*, **56** (1947), 559—562.
4. О расширении эрмитовых операторов с неплотной областью определения, *ДАН СССР*, **59** (1948), 13—16.

К р а с н о с е л ь с к и й М. А. и Р у т и ц к и й Я. Б.
1. К теории пространства Орлича, *ДАН СССР*, **81** (1951), 497—500.
2. Линейные интегральные операторы в пространствах Орлича, *ДАН СССР*, 85 (1952), 33—36.
3. Дифференцируемость нелинейных интегральных операторов в пространствах Орлича, *ДАН СССР*, **89** (1953), 601—604.

К р а ч к о в с к и й С. Н., см. также Г о л ь д м а н М. А.
1. Каноническое представление нуль-элементов линейного оператора в его области Фредгольма, *ДАН СССР*, **88** (1953), 201—204.
2. О свойствах линейного оператора, связанных с его обобщенной областью Фредгольма, *ДАН СССР*, **91** (1953), 1011—1013.
3. О расширенной области сингулярности оператора $T_\lambda = E - \lambda A$, *ДАН СССР*, **96** (1954), 1101—1104.

К р а ч к о в с к и й С. Н. и В и н о г р а д о в А. А.
1. Об одном критерии равномерной выпуклости пространства типа (B), *УМН*, **7 : 3** (49), (1952), 131—134.

К р а ч к о в с к и й С. Н. и Г о л ь д м а н М. А.
1. О главной части вполне непрерывного оператора, *ДАН СССР*, **70** (1950), 945—948.
2. Нуль-элементы и нуль-функционалы вполне непрерывного оператора, *Изв. АН Латв. ССР*, **6** (1950), 87—100.
3. Некоторые свойства вполне непрерывного оператора в пространстве Гильберта, *Изв. АН Латв. ССР*, **10** (1950), 93—106.

К р е й н М. Г., см. также Ф. Р. Г а н т м а х е р и Г р о с б е р г.
1. О некоторых вопросах геометрии выпуклых ансамблей, принадлежащих линейному нормированному и полному пространству, *ДАН СССР*, **14** (1937), 5—8.
2. О линейных операторах, оставляющих инвариантным некоторое коническое множество, *ДАН СССР*, **23** (139), 749—752.
3. Основные свойства нормальных конических множеств в пространстве Банаха, *ДАН СССР*, 28 (1940), 13—17.
4. О минимальном разложении линейного функционала на положительные составляющие, *ДАН СССР*, **28** (1940), 18—22.
5. О положительных функционалах на почти-периодических функциях, *ДАН СССР*, **30** (1941), 9—12.
6. Об одном обобщении теоремы Планшереля на случай интегралов Фурье на коммутативной топологической группе, *ДАН СССР*, **30** (1941), 482—486.
7. Бесконечные J-матрицы и матричная проблема моментов, *ДАН СССР*, **69** (1949), 125—128.
8. О формуле следов в теории возмущений, *Матем. сб.*, **33** (75) (1953), 597—626.

9. Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения, I,II
I. *Матем. сб.*, **20** (62), (1947), 431—498.
II. Там же, **21** (63), (1947), 365—404.
10. О несимметрических осцилляционных функциях Грина обыкновенных дифференциальных операторов, *ДАН СССР*, **25** (1939), 643—646.
11. Об одном общем методе разложения положительно определенных ядер на элементарные произведения, *ДАН СССР*, **53** (1946), 3—6.
12. Про ермитові операторі з напрямними функціоналами. *Сб. трудов ин-та матем. АН Укр. ССР*, **10** (1948), 83—106.
13. Об одномерной сингулярной краевой задаче четного порядка в интервале (0, ∞), *ДАН СССР*, **74** (1950), 9—12.
14. Решение обратной задачи Штурма — Лиувилля, *ДАН СССР*, **76** (1951), 21—24.
15. О некоторых задачах на максимум и минимум для характеристических чисел и о ляпуновских зонах устойчивости, *ПММ*, **15** (1951), 323—348.
16. О неопределенном случае краевой задачи Штурма — Лиувилля в интервале (0, ∞), *Изв. АН СССР*, **16** (1952), 293—324.
17. О некоторых случаях эффективного определения плотности неоднородной струны по ее спектральной функции, *ДАН СССР*, **93** (1953), 617—620.
18. Об одном методе эффективного решения обратной краевой задачи, *ДАН СССР*, **94** (1954), 987—990.
19. Определение плотности неоднородной симметрической струны по спектру ее частот, *ДАН СССР*, **76** (1951), 345—348.

Крейн М. Г. и Красносельский М. А.
1. Устойчивость индекса неограниченного оператора, *Матем. сб.*, **30** (72), (1952), 219—224.
2. Основные теоремы о расширении эрмитовых операторов и некоторые их применения к теории ортогональных полиномов и проблеме моментов, *УМН*, **2 : 3** (19), (1947), 60—106.

Крейн М. Г., Красносельский М. А. и Мильман Д. П.
1. О дефектных числах линейных операторов в банаховом пространстве и о некоторых геометрических вопросах, *Сб. трудов Ин-та матем. АН Укр. ССР*, **11** (1948), 97—112.

Крейн М. Г. и Крейн С. Г.
1. Об одной внутренней характеристике пространства всех непрерывных функций, определенных на хаусдорфовом бикомпактном пространстве, *ДАН СССР*, **27** (1940), 427—431.
2. Sur l'espace des fonctions continues définies sur un bicompact de Hausdorff et ses sousespaces semiordonnés, *Матем. сб.*, 13(55) (1943), 1—38.

Крейн М. Г. и Мильман Д. П.
1. On extreme points of regularly convex sets, *Studia Math.*, **9** (1940), 133—138.

Крейн М. Г., Мильман Д. П. и Рутман М. А.
1. Об одном свойстве базиса в пространстве Banach'a, *Хрк., Зап. Матем об-ва*, (4), **16** (1940), 106—110.

Крейн М. Г. и Рутман М. А.
1. Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха, *УМН*, 3, вып. 1, (23), (1948), 3—95.

Крейн М. Г. и Шмульян В. Л. (Krein M., Smulian V.)
1. On regularly convex sets in the space conjugate to a Banach space, *Ann. of Math.*, **41** (1940), 556—583.

Крейн С. Г., см. Крейн М. Г.

Кристиан (Christian R. R.)

1. On integration with respect to a finitely additive measure whose values lie ni a Dedekind complete partially ordered vector space, Dissert., Yale Univ. (1954).

Кронин (Cronin J.)

1. Branch points of solutions of equations in Banach space, *Trans. Amer Math. Soc.*, **69** (1950), 105—131.
2. Branch points of solutions of equations in Banach space, II, *Trans Amer. Math. Soc.*, **76** (1954), 207—222.
3. A definition of degree for certain mappings in Hilbert space, *Amer. J. Math.*, **73** (1951), 763—772.
4. Analytic functional mappings, *Ann. of Math.* (2) **58** (1953), 175—181

Кук (Cooke R. G.)

1. Linear operators, Macmillan, London, 1953.

Кунисава (Kunisava K.)

1. Some theorems on abstractly-valued functions in an abstract space *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **16** (1940), 68—72.

Купер (Cooper J. L. B.)

1. The spectral analysis of self-adjoint operators, *Quart. J. Math. (Oxford)*, **16** (1945), 31—48.
2. Symmetric operators in Hilbert space, *Proc. London Math. Soc.* (2) **50**, 11—55 (1948).
3. One-parameter semi-groups of isometric operators in Hilbert space, *Ann. of Math.* (2) **48** (1947), 827—842.

Купмен (Koopman B. O.)

1. Hamiltonian systems and transformations in Hilbert space, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, **17** (1931), 315—318.

Купмен и Дуб (Koopman B. O., Doob J. L.)

1. On analytic functions with positive imaginary parts, *Bull. Amer. Math Soc.*, **40** (1934), 601—605.

Курант и Гильберт (Courant R., Hilbert D.)

1. Методы математической физики, М.—Л., Гостехиздат 1951 (1924, 1937).

Курант и Лакс (Courant R., Lax A.)

1. Remarks on Cauchy's problem for hyperbolic partial differential equations with contant coefficients in several independent variables, *Comm. Pure Appl. Math.*, **8** (1955), 497—502.

Куратовский (Kuratowski C.)

1. Sur la propriété de Baire dans les groupes métriques, *Studia Math.*, **4** (1933), 38—40.

Курош А. Г.

1*. Курс высшей алгебры, Гостехиздат, 1952.
2*. Теория групп, Гостехиздат, 1953.
3*. Лекция по общей алгебре, М., 1962.

Кюршак (Kürschák J.)

1. Über Limesbildung und allgemeine Körpertheorie, *J. Reine Angew. Math.*, **142** (1912), 211—253.

Лаасонен (Laasonen P.)

1. Über die Näherungslösungen der Sturm — Liouvilleschen Eigenwertaufgabe. Proc. XII Scand. Math. Congress Lund, 1953 (1954), 176—182

Лаврентьев М. А.

1. Sur les fonctions d'une variable complexe représentables par des séries de polynomes, *Act. Sci. Ind.*, **441**, Paris, 1936.

Лагерр (Laguerre E. N.)

1. Sur le calcul des systèmes linéaires, Oeuvres, t. I (1898), 221—267.

Лагранж (Lagrange J. L.)

1. Oeuvres, t. 3, Gauthiers — Villars, Paris, 1869.
2. Oeuvres, t. 1, Gauthier — Villars, Paris, 1867.

Л а к с А. (L a x A.), см. К у р а н т
Л а к с П. (L a x P. D.)
1. On the existence of Green's function, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **3** (1952), 526—531. Исправл. там же **3** (1952), 993.
2. Symmetrizable linear transformations, *Comm. Pure Appl. Math.*, **7** (1954), 633—647.
3. Reciprocal extremal problems in function theory, *Comm. Pure Appl. Math.*, 8 (1955), 437—453.
4*. On Cauchy's problem for hyperbolic equations and the differentiability of solutions of elliptic equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, 8 (1955), 615—633. Русский перевод: *Математика*, **1 : 1** (1957), 43—59.
5*. A Phragmen —Lindelöf theorem in harmonic analysis and its application to some questions in the theory of elliptic equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, **10** (1957), 361—389. Есть русский перевод: *Математика*, **3 : 4** (1959), 107—132.
Л а к с П. и М и л ь г р а м (L a x P. D., M i l g r a m A. N.)
1. Parabolic equations. Contributions to the theory of partial differential equations, 167—190, *Ann. of Math. Studies*, No. 33, Princeton, 1954.
Л а м с о н (L a m s o n K. W.)
1. A general implicit function theorem with an application to problems of relative minima, *Amer. J. Math.*, **42** (1920), 243—256.
Л а н г е р (L a n g e r R. E.), см. также Б и р к г о ф Дж.
1. On the connection formulas and the solutions of the wave equation, *Phys. Rev.*, **51** (1937), 669—676.
2. On the wave equation with small quantum numbers, *Phys. Rev.*, **75** (1949), 1573—1578.
3. The expansion problem in the theory of ordinary differential systems of the second order, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **31** (1929), 868—906.
Л а н д а у (L a n d a u E.)
1. Über einen Konvergensatz, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.—Phys. Kl.* IIa 1907 (1907), 25—27.
2. Über einen Satz von Herrn Esclangon, *Math. Ann.* **102** (1929), 177—178.
Л а с а л ь (L a s a l l e J. P.)
1. Pseudo-normed linear spaces, *Duke Math. J.*, 8 (1941), 131—135.
2. Application of the pseudo-norm to the study of linear topological spaces, *Revista Ci., Lima*, **47** (1945), 545—563.
3. Singular measurable sets and linear functions, *Math. Mag.*, **22** (1948), 67—72.
Л а т ш о у (L a t s h a w V. V.)
1. The algebra of self-adjoint boundary-value problems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **39** (1933), 969—978.
Л а у р и к а й н е н (L a u r i k a i n e n K. V.)
1. Asymptotic eigensolutions of the radical deuteron equations, *Ann. Acad. Sci. Fennicae Ser.* A, 1, No. 130 (1952), 10 pp.
Л е б е г (L e b e s g u e H.)
1. Sur les intégrales singulièrs, *Ann. de Toulouse* (3)**1**(1909), 25—117.
2. Интегрирование и отыскание примитивных функций, М., 1934(1904).
Л е в и Б. (L e v i B.)
1. Sur principio di Dirichlet, *Rend. del Circolo Matem. di Palermo*, **22** (1906), 293—360.
Л е в и П. (L é v y P.)
1. Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle. Avec un complétement sur les fonctionnelles analytiques par F. Pellegrino, Gauthier — Villars, Paris, Second edition 484, 1951.
2. Leçons d'analyse fonctionnelle, Gauthier — Villars, Paris, 1922.

Лёвиг (Löwig H.)
1. Komplexe euklidische Räume von beliebiger endlicher oder unendlicher Dimensionszahl, *Acta Sci. Math. Szeged.*, **7** (1934), 1—33.
Левинсон (Levinson N.), см. также Боас М. и Коддингтон
1. Gap and density theorems, *Amer. Math. Soc. Colloquim Pub.*, vol. 26, New York, 1940.
2. Criteria for the limit-point case for second order linear differential operators, *Časopis Pešt. Mat. Fys.*, **74** (1949), 17—20.
3. On the uniqueness of potential in a Schrödinger equation for a given asymptotic phase, *Danske Vid. Selsk. Mat.-Fys. Medd.*, **25**, 9 (1949), 25.
4. The inverse Sturm — Liouville problem, *Mat. Tidsskr. B.* (1949), 25—30.
5. A simplified proof of the expansion theorem for singular second order linear differential equations, *Duke Math. J.*, **18** (1951), 57—71.
6. Addendum to «A simplified proof of the expansion theorem for singular second order differential equations», *Duke Math. J.*, **18** (1951), 719—722.
7. The *L*-closure of eigenfunctions associated with self-adjoint boundary value problems, *Duke Math. J.*, **19** (1952), 23—26.
8. Certain relationships between phase shifts and scattering potential, *Phys. Rev.*, **89** (1953), 755—757.
9. The expansion theorem for singular self-adjoint linear differential operators, *Ann. of Math.* (2) **59** (1954), 300—315.
Левитан Б. М., см. также Гельфанд И. М.
1. Применения операторов обобщенного сдвига к линейным дифференциальным уравнениям второго порядка, *УМН*, **4** : **1** 29 (1949), 3—112.
2. Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка, М.— Л., Гостехиздат, 1950.
3. К теореме разложения по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка, *ДАН СССР*, **71** (1950), 605—608.
4. Доказательство теоремы разложения по собственным функциям самосопряженных дифференциальных уравнений, *ДАН СССР*, **73** (1950), 651—654.
5. Об одной теореме Г. Вейля, *ДАН СССР*, **82** (1952), 673—676.
6. О полноте квадратов собственных функций, *ДАН СССР*, **83** (1952), 349—352.
7. Об асимптотическом поведении спектральной функции и о разложении по собственным функциям самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка.
I. Изв. *АН СССР*, сер. матем., **17** (1953), 331—364.
II. Там же, **19** (1955), 33—58.
8*. Почти периодические функции, М., 1953.
Лёвнер (Löwner K.)
1. Grundzüge einer Inhaltslehre im Hilbertschen Räume, *Ann. of Math.* (2) **40** (1939), 816—833.
Лежанский (Leżański T.)
1. The Fredholm theory of linear equations in Banach spaces, *Studia Math.*, **13** (1953), 244—276.
2. Sur les fonctionnelles multiplicatives, *Studia Math.*, **14** (1953), 13—23.
Лейтон (Leighton W.)
1. Bounds for the solutions of a second order linear differential equation, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, **35** (1949), 190—193.
2. On self-adjoint differential equations of the second order, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **35** (1949), 656—657.
3. On the detection of the oscillation of a second order linear differential equation, *Duke Math. J.*, **17** (1950), 57—62.
4. On self-adjoint differential equations of second order, *J. London. Math. Soc.*, **27** (1952), 33—47.

Лейя (Leja F.)

1. Sur la notion du groupe abstrait topologique, *Fund. Math.*, **9** (1927) 37—44.

Леньель (Lengyel B. A.)

1. On the spectral theorem of self-adjoint operators, *Acta Sci. Math. Szeged*, **9** (1939), 174—186.
2. Bounded self-adjoint operators and the problem of moments, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **45** (1939), 303—306.

Леньель и Стоун (Lengyel B. A., Stone M. H.)

1. Elementary proof of the spectral theorem, *Ann. of Math.* (2), **37** (1936), 853—864.

Лере (Leray J.)

1. La théorie des points fixes et ses applications en analyse. Proc. International Congress Math., Cambridge, Mass. 2 (1950), 202—208.
2. Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme complètement continu d'un espace vectoriel à voisinages convexes, Acta Sci. Math. Szeged 12 Pars. B (1950), 177—186. Есть русский перевод: *Математика*, **4 : 5** (1960), 73—83.
3. Topologie des espaces abstraits de M. Banach, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **200** (1935), 1082—1084.
4. Lectures on hyperbolic equations with variable coefficients, Inst. Adv Studies, Princeton, 1952.

Лефшец (Lefschetz S.)

1. Алгебраическая топология, М., ИЛ, 1949 (1942).
2. Introduction to topology. Princeton University Press, Princeton, 1949.

Ливингстон (Livingston A. E.)

1. The space H^p, $0<p<1$, is not normable, *Pacific J. Math.*, **3** (1953), 613—616.

Лившиц М. С.

1. Изометрические операторы с равными дефектными числами, квазиунитарные операторы, *Матем. сб.*, **26** (68) (1950) 247—264.
2. О приведении линейных неэрмитовых операторов к треугольному виду, *ДАН СССР*, **84** (1952), 873—876.
3. О резольвенте линейного несимметрического оператора, *ДАН СССР*, **84** (1952), 1131—1134.
4. О спектральном разложении линейных несамосопряженных операторов, *Матем. сб.*, **34** (76) (1954), 144—199.
5. К теории самосопряженных систем дифференциальных уравнений, *ДАН СССР*, **72** (1950), 1013—1016.

Лившиц М. С. и Потапов В. П.

1. Теорема умножения характеристических матриц-функций, *ДАН СССР*, **72** (1950), 625—628.

Лидер (Leader S.)

1. The theory of L^p-spaces for finitely additive set functions, *Ann. Math.* (2), **58** (1953), 528—543.

Лидский В. Б.

1. О числе решений с интегрируемым квадратом системы дифференциальных уравнений $y''+P(t)y=\lambda y$, *ДАН СССР*, **95** (1954), 217—220.

2*. Условие полноты системы корневых подпространств у несамосопряженных операторов с дискретным спектром, Труды Мос. матем. о-ва, т. 8 (1958), 83—120.

Линдгрен (Lindgren B. W.), см. Камерон

Литлвуд (Littlewood J.), см. Харди

Литлвуд и Пэли (Littlewood J., Paley R. E. A. C.)

1. Theorems on Fourier series and power series, I, II.
   I. *J. London Math. Soc.*, 6 (1931), 230—233.
   II. *Proc. London Math.* Soc. (2), **42** (1937), 52—89.

Лиувилль (Liouville J.)
1. Sur le développement des fonctions en séries dont les divers termes sont assujeties à satisfaire à une même équation différentielle du sécond ordre contenant un paramètre variable. I—III.
I. *J. Math. Pures Appl.* (1), **1**, (1836), 253—265.
II. Там же (1), **2** (1837), 16—37.
III. Там же (1), **2** (1837), 418—436.
2. D'un théorème dû à M. Sturm et relatif a une classe de fonctions trancendantes, *J. Math. Pures Appl.* (1) **1** (1836), 269—277.
Лифшиц И. М.
1. К теории регулярных возмущений, *ДАН СССР*, **48** (1945), 83—86.
2. О вырожденных регулярных возмущениях, I, II.
I. *Журн. экспер. и теоретич. физ.*, **17** (1947), 1017—1025.
II. Там же, **17** (1947), 1076—1089.
3. Об одной задаче теории возмущений, связанной с квантовой статистикой, *УМН*, **7 : 1** (52) (1952), 171—180.
4. О регулярных возмущениях оператора с квазинепрерывным спектром, *Хрк., Зап. Мат. об-ва* (4), **20** (1950), 77—82.
Лихтенштейн (Lichtenstein L.)
1. Zur Analysis der unendlichvielen Variablen. I. Entwicklungssätze der Theorie gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **38** (1914), 113—166.
Ловалья (Lovaglia A. R.)
1. Locally uniformly convex Banach spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **78** (1955), 225—238.
Лоренц (Lorentz G. G.)
1. On the theory of spaces Λ, *Pacific J. Math.*, **1** (1951), 411—429.
2. Some new functional spaces, *Ann. of Math.* (2), **51** (1950), 37—55.
3. Operations in linear metric spaces, *Duke Math. J.*, **15** (1948), 755—761.
4. Funktionale und Operationen in den Räumen der Zahlenfolgen, *ДАН СССР*, **1** (1935), 81—85.
Лорх (Lorch E. R.) см. также Ф. Рисс.
1. Bicontinuous linear transformations in certain vector spaces. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **45** (1939), 564—569.
2. On a calculus of operators in reflexive vector spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **45** (1939), 217—234.
3. The Cauchy — Schwarz inequality and self-adjoint spaces, *Ann. of Math.* (2), **46** (1945), 468—473.
4. On certain implications which characterize Hilbert space, *Ann. of Math.* (2), **49** (1948), 523—532.
5. Return to the self-adjoint transformation, *Acta Sci. Math. Szeged*, **12**, Pars B (1950), 137—144.
6. The spectrum of linear transformation, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **52** (1942), 238—248.
7. The integral representation of weakly almost-periodic transformations in reflexive vector spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **49** (1941), 18—40.
8. Means of iterated transformations in reflexive vector spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **45** (1939), 945—957.
9. The structure of normed abelian rings, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **50** (1944), 447—463.
10. The theory of analytic functions in normed abelian vector rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **54** (1943), 414—425.
11. Functions of self-adjoint transformations in Hilbert space, *Acta Sci. Math. Szeged*, **7** (1934), 136—146.
12. Differentiable inequalities and the theory of convex bodies, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **71** (1951), 243—266.

52 Заказ № 1324

13. Su certe estensioni del concetto di volume, *Rend. Acc. Naz. Lincei* (8) **16** (1954), 25—29.
14. On the volume of smooth convex bodies in Hilbert space, *Math. Zeit.*, **61** (1955), 391—407.

Лукомский Т. И.
1. К теории матричных представлений неограниченных самосопряженных операторов, *ДАН СССР*, **70** (1950), 377—379.

Люмер (Lumer G.), см. Халмош

Люмис (Loomis L. H.)
1. Введение в абстрактный гармонический анализ, М., ИЛ, 1956 (1953).
2. Linear functionals and content, *Amer. J. Math.*, **76** (1954), 168—182.
3. Abstract congruence and the uniqueness of Haar measurew, *Ann. of Math.* (2), **46** (1945), 348—355.
4. Haar measure in uniform structures, *Duke Math. J.*, **16** (1949), 193—208.
5. On the representation of σ-complete Boolean algebras, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **53** (1947), 757—760.

Ма (Ma S. T.)
1. On a general condition of Heisenberg for the S-matrix, *Phys. Rev.*, **71** (1947), 195—200.

Маак (Maak W.)
1. Fastperiodische Funktionen. Springer, Berlin, 1950.

Маеда (Maeda F.), см. также Огасавара
1. Unitary equivalence of self-adjoint operators and constants of motion, *J. Sci. Hiroshima Univ.* A, **6** (1936), 283—290.

Мазани (Masani P. R.)
1. Multiplicative Riemann integration in normed rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **61** (1947), 147—192.

Мазур (Mazur S.), см. также Банах и Эйдельгайт
1. Über konvexe Mengen in linearen normierte Räumen, *Studia Math.*, **4** (1933), 70—84.
2. Über die kleinste konvexe Menge, die eine gegebene kompakte Menge enthält, *Studia Math.*, **2** (1930), 7—9.
3. Über schwache Konvergenz in den Räumen (L^p), *Studia Math.*, **4** (1933), 128—133.
4. Une remarque sur l'homéomorphie des champs fonctionnels, *Studia Math.*, **1** (1929), 83—85.
5. Sur les anneaux linéaires, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **207** (1938), 1025—1027.

Мазур и Орлич (Mazur S., Orlicz W.)
1. Über Folgen linearer Operationen, *Studia Math.*, **4** (1933), 152—157.
2. Grundlegende Eigenschaften der polynomischen Operationen, I, II.
I. *Studia Math.*, **5** (1934), 50—68.
II. Там же, **5** (1934), 179—189.
3. Sur les espaces métriques linéaires, I, II.
I. *Studia Math.*, **10** (1948), 184—208.
II. Там же, **13** (1953), 137—179.

Мазур и Улам (Mazur S., Ulam S.)
1. Sur les transformations isométriques d'espace vectoriels normés, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **194** (1932), 946—948.

Майерс (Myers S. B.)
1. Equicontinuous sets of mappings, *Ann. of Math.* (2), **47** (1946), 496—502.
2. Banach spaces of continuous functions, *Ann. of Math.* (2), **49** (1948), 132—148.
3. Spaces of continuous functions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **55** (1949), 402—407.
4. Normed linear spaces of continuous functions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **56** (1950), 233—241.

Майкал (Michal A. D.)
1. General differential geometries and related topics, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **45** (1939), 529—563.
Майкал и Клиффорд (Michal A. D., Clifford A. H.)
1. Fonctions analytiques implicites dans les espaces vectoriels abstraits, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **197** (1933), 735—737.
Майкал и Мартин (Michal A. D., Martin R. S.)
1. Some expansions in vector space. *J. Math. Pures et Appl.* (9), 13 (1934), 69—91.
Майкал и Элконин (Michal A. D., Elconin V.)
1. Completely integrable differential equations in abstract spaces, *Acta Math.*, **68** (1937), 71—107.
Майкл (Michael E.)
1. Transformations from a linear space with weak topology, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **3** (1952), 671—676.
2. Locally multiplicatively-convex topological algebras, *Memoirs Amer. Math. Soc.* No. 11, 1952.
Макаи (Makai E.)
1. Asymptotische Abschätzung der Eigenwerte gewisser Differentialgleichungen zweiter Ordnung, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* (2), **10** (1941), 123—126.
Мак-Даффи (MacDuffee C. C.)
1. The theory of matrices. Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete, vol. 2, Berlin, 1933.
Макинтайр и Рогозинский (Macintyre A. J., Rogosinski W. W.)
1. Extremum problems in the theory of analytic functions, *Acta Math.*, **82** (1950), 275—325.
Макки (Mackey G. W.), см. также Какутани
1. On convex topological linear spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **60** (1946), 519—537.
2. On infinite dimensional linear spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **57** (1945), 155—207.
3. Note on a theorem of Murray, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **52** (1946), 322—325.
4. Commutative Banach algebras. Mimeographed lecture notes, Harvard University, 1952.
5. Functions on locally compact groups, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **56** (1950), 385—412.
Мак-Лейн (MacLane S.), см. Биркгоф Г.
Мак-Фейл (MacPhail M. S.)
1. Absolute and unconditional convergence, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **53** (1947), 121—123.
Мак-Шейн (McShane E. J.)
1. Linear functionals on certain Banach spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **1** (1950), 402—408.
2. Integration. Princeton University Press, Princeton, 1944.
3. Order-preserving maps and integration processes, *Ann. of Math. Studies*, No. 31, Princeton Univ. Press, 1953.
4. Images of sets satisfying the condition of Baire, *Ann. of Math.* (2), **51** (1950), 380—386.
Мак-Эвен (McEwen W. H.)
1. Spectral theory and its application to differential eigenvalue problems, *Amer. Math. Monthly*, **60** (1953), 223—233.
Мандельбройт (Mandelbrojt S.)
1. Un théorème de fermeture, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **231** (1950), 16—18.
2. Théorèmes généraux de fermeture, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **232** (1951), 284—286.

3. Théorèmes d'approximation et problèmes des moments, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **232** (1951), 1054—1056.
4. General theorems of closure, *Rice Inst. Pamphlet*, Houston, 1951.
5. Quelques théorèmes d'unicité, Proc. International Cong. Math., Cambridge, Mass., **1** (1950), 349—355.
6. Théorèmes généraux de fermeture, *J. Analyse Math.*, **1** (1951), 180—208.
7. Quelques nouveaux théorèmes de fermeture, *Ann. Soc. Polon. Math.*, **25** (1952), 241—251 (1953).

Мандельбройт и Эгмон (Mandelbrojt S., Agmon S.)
1. Une généralisation du théorème tauberien de Wiener, *C. R. Acad. Sci.* Paris, **228** (1949), 1394—1396.
2. Une généralisation du théorème tauberien de Wiener, *Acta Sci. Math. Szeged.*, **12**, Pars B (1950), 167—176.

Манроу (Munroe M. E.)
1. Absolute and unconditional convergence in Banach spaces, *Duke Math. J*,. **13** (1946), 351—365.
2. Introduction to measure and integration. Addison Wesley, Cambridge, Mass., 1953.
3. A note on weak differentiability of Pettis integrals. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **52** (1946), 167—174.
4. A second note on weak differentiability of Pettis integrals. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **52** (1946), 668—670.

Маринеску (Marinescu G.), см. также Ионеску
1. Opérations relativement compètement continues. *Acad. Republ. Pop. Romăne. Stud. Cerc. Mat.*, **2** (1951), 107—194.

Марков А. А.
1. Некоторые теоремы об абелевых множествах, *ДАН СССР*, **1** (1936), 299—302.
2. On mean values and exterior densities, *Матем. сб.*, **4** (46) (1938), 165—191.

Маркушевич А. И.
1. О базисе (в широком смысле слова), *ДАН СССР*, **41** (1943), 241—243.
2. О наилучшем приближении, *ДАН СССР*, **44** (1944), 290—292.
3. Обобщение одной теоремы Д. Е. Меньшова, *Матем. сб.*, **15** (57) (1944), 433—436.
4*. Теория аналитических функций, М., 1950.

Мартин Р. (Martin R. S.), см. Майкал

Мартин У. (Martin W. T.), см. Камерон

Маруяма (Maruyma G.)
1. Notes on Wiener integrals. *Kōdai Math. Sem. Rep.* (1950), 41—44.

Марцинкевич (Marcinkiewicz J.)
1. Sur les multiplicateurs des séries de Fourier, *Studia Math.*, **8** (1939), 78—91.

Марчевский, см. Хартман С.

Марченко В. А.
1. Некоторые вопросы теории дифференциального оператора второго порядка, *ДАН СССР*, **72** (1950), 457—460.
2. О формулах обращения, порождаемых линейным дифференциальным уравнением второго порядка, *ДАН СССР*, **74** (1950), 657—660.

Маслов А. С.
1. К вопросу о product-интеграле Birkhoff'a, *Ученые Зап. ЛГУ*, **83**, матем. сер. **12** (1941), 42—56.

Маутнер (Mautner F. I.)
1 On eigenfunction expansions, *Proc. Nat. Acad. U. S. A.*, **39** (1953), 49—53. Русский перевод: *УМН*, **10**: **4** (1955), 127—132.

Махарам (Maharam Dorothy)
1. The representation of abstract measure functions, *Trans. Amer. Math Soc.*, **65** (1949), 279—330.

2. The representation of abstract integrals, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **75** (1953), 154—184.
3. On kernel representation of linear operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **79** (1955), 229—255.

Медведев Ю. Т.
1. Два признака компактности семейств функций, *ДАН СССР*, **90** (1953), 337—340.

Меддаус (Maddaus I., Jr.)
1. On types of «weak» convergence in linear normed spaces, *Ann. of Math.* (2), **42** (1941), 229—246.
2. On completely continuous linear transformations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **44** (1938), 279—282.

Мергелян С. Н.
1. О представлении функций рядами полиномов на замкнутых множествах, *ДАН СССР*, **78** (1951), 405—408.
2. Равномерное приближение функций комплексного переменного, *УМН*, **7 : 2** (48), (1952), 31—122.

Меркил (Mirkil H.)
1. The work of Šilov on commutative semi-simple Banach algebras. Technical Report, Contract 218 (00). Office of Naval Research.

Меррей (Murray F. J.)
1. On complementary manifolds and projections in spaces L_p and l_p, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **41** (1937), 138—152.
2. Quasi-complements and closed projections in reflexive Banach spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **58** (1945), 77—95.
3. The analysis of linear transformations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **48** (1942), 76—93.
4. Linear transformations between Hilbert spaces and the application of this theory to linear partial differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **37** (1935), 301—338.
5. Linear transformations in L_p, $p>1$, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **39** (1936), 83—100.
6. Bilinear transformations in Hilbert space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **45** (1939), 474—507.
7. An introduction to linear transformations in Hilbert space. Ann. of Math. Studies, No. 4, Princeton, 1941.

Меррей и Дж. Нейман (Murray F. J., von Neumann J.)
1. On rings of operators, I, II, IV.
   I. *Ann. of Math.* (2), **37** (1936), 116—229.
   II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **41** (1937), 208—248.
   IV. *Ann. of Math.* (2), **44** (1943), 716—808.

Микусинский (Mikusinski J. G.)
1. Sur certains espaces abstraits, *Fund. Math.*, **36** (1949), 125—130.

Миллер Д. (Miller D. S.), см. Данфорд

Миллер К. (Miller K. S.)
1. A Sturm — Liouville problem associated with iterative methods, *Ann. of Math.* (2), **53** (1951), 520—530.
2. Construction of the Green's function of a linear differential system, *Math. Mag.*, **26** (1952), 1—8.
3. Self-adjoint differential systems, *Quart. J. Math., Oxford* (2), **3** (1952), 175—178.

Миллер К. и Шиффер (Miller K. S., Schiffer M. M.)
1. On the Green's function of ordinary differential systems, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **3** (1952), 433—441.
2. Monotonic properties of the Green's function, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **3** (1952), 948—956.

Милн (Milne W. E.)
1. The behavior of a boundary value problem as the interval becomes infinite, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **30** (1928), 797—802.
2. On the degree of convergence of expansions in an infinite interval, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **31** (1929), 906—918.
3. The numerical determination of characteristic numbers, *Phys. Rev.*, **35** (1930), 863—867.

Мильграм (Milgram A. N.) см. П. Лакс.

Мильман Д. П., см. также Бродский М. С. и Крейн М. Г.
1. О некоторых признаках регулярности пространств типа (*B*), *ДАН СССР*, **20** (1938), 243—246.
2. Характеристика экстремальных точек регулярно-выпуклого множества, *ДАН СССР*, **57** (1947), 119—122.
3. Достижимые точки функционального компакта, *ДАН СССР*, **59** (1948), 1045—1048.
4. Изометрия и экстремальные точки, *ДАН СССР*, **59** (1948), 1241—1244.
5. Многометрические пространства. Анализ инвариантных подмножеств многонормированного бикомпакта относительно полугруппы нерасширяющих операторов в нем, *ДАН СССР*, **67** (1949), 27—30.
6. Экстремальные точки и центры выпуклых бикомпактов, *УМН*, **4 : 5** (33), (1949), 179—181.
7. Граневая структура выпуклого бикомпакта и интегральные разложения средних, *ДАН СССР*, **83** (1952), 357—360.
8. Об одной классификации точек спектра линейного оператора, *ДАН СССР*, **33** (1941), 279—281.

Мильман Д. П. и Рутман М. А.
1. Об одном уточнении теоремы о полноте системы экстремальных точек регулярно-выпуклого множества, *ДАН СССР*, **60** (1948), 25—27.

Мимура (Mimura Y.), см. также Иосида
1. Über Funktionen von Funktionaloperatoren in einem Hilbertschen Raum, *Jap. J. Math.*, **13** (1936), 119—128.

Минковский (Minkowski H.)
1. Gesammelte Abhandlungen, Vol. II. Teubner, Berlin, 1911.

Минлос Р. А.
1*. Обобщенные случайные процессы и их продолжение до меры, *Труды Мос. мат. о-ва*, т. 8 (1958), 497—518.

Миранда (Miranda C.)
1. Próblemi di esistenza in analisi funzionale. Litografia Tacchi, Pisa, 1949.
2. Sul principio di Dirichlet per le funzioni armoniche, *Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* (8), **3** (1947), 55—59.

Михлин С. Г.
1. О сходимости рядов Фредгольма, *ДАН СССР*, **42** (1944), 387—390.

Мишоу (Mishoe L. I.), см. также Фридман Б.
1. On the expansion of an arbitrary function in terms of the eigenfunctions of a non-self-adjoint differential system. Dissert., New York University, 1953.

Мишоу и Форд (Mishoe L. I., Ford G. C.)
1. Studies in the eigenfunction series associated with a non-self-adjoint differential system, Tech. Report Nat. Sci. Foundation, 1955.
2. On the uniform convergence of a certain eigenfunction series, *Pacific J. Math.*, **6** (1956), 271—278.

Миядера (Miyadera I.)
1. Generation of a strongly continuous semi-group of operators, *Tôhoku Math. J.*, **4** (2), (1952), 109—114.

Мозер (Moser J.)

1. Störungstheorie des kontinuierlichen Spektrums für gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung, *Math. Ann.*, **125** (1953), 366—393.

Мозес (Moses H. E.), см. Кей

Молчанов А. М.

1. Об условиях дискретности спектра самосопряженных дифференциальных уравнений второго порядка, М., *Труды Мос. мат. о-ва*, **2** (1953), 169—199.

Монна (Monna A. F.)

1. On a linear P-adic space, *Nederl. Akad. Wetensch. Verslagen, Afd. Natuurkunde*, **52** (1943), 74—82.
2. On weak and strong convergence in a P-adic Banach space, *Nederl. Akad. Wetensch. Verslagen, Afd. Natuurkunde*, **52** (1943), 207—211.
3. On non-Archimedean linear space, *Nederl. Akad. Wetensch. Verslagen, Afd. Natuurkunde*, **52** (1943), 308—321.
4. Linear functional equations in non-Archimedean Banach spaces, *Nederl. Akad. Wetensch. Verslagen. Afd. Natuurkunde*, **52** (1943), 654—661.
5. On ordered groups and linear spaces, *Nederl. Akad. Wetensch. Verslagen. Afd. Natuurkunde*, **53** (1944), 178—182.
6. On the integral of a function whose values are elements of a non-Archimedean valued field, *Nederl. Akad. Wetensch. Verslagen, Afd. Natuurkunde*, **53** (1944), 385—399.
7. Sur les espaces linéaires normés. I—VI.
   I. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.*, 49 (1946), 1045—1055.
   II. Там же, **49** (1946), 1056—1062.
   III. Там же, **49** (1946), 1134—1141.
   IV. Там же, **49** (1946), 1142—1152.
   V. Там же, **51** (1948), 197—210.
   VI. Там же, **52** (1949), 151—160.
8. Espaces linéaires à une infinité dénombrable de coordonnée, *Nederl Akad. Wetensch. Proc.*, **53** (1950), 1548—1559.
9. Sur une classe d'espaces linéaires normés, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.*, **55** (1952), 513—525.

Монтролль (Montroll E. W.)

1. Markoff chains, Wiener integrals, and quantum theory *Comm. Pure Appl. Math.*, **5** (1952), 415—453.

Мор (Mohr E.)

1. Die Konstruktion der Greenschen Funktion im erweiterten Sinne, *J. Reine Angew. Math.*, **189** (1951), 129—140.

Морс А. (Morse A. P.), см. также Адамс, Данфорд, Эгнью

1. A theory of covering and differentiation, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **55** (1944), 205—235.

Морс М. (Morse M.)

1. Bilinear functionals over $C \times C$, *Acta Sci. Math. Szeged*, **12**, Pars B (1950), 41—48

Морс и Трансю (Morse M., Transue W.)

1. Functionals of bounded Fréchet variation, *Canadian J. Math.*, **1**, (1949) 153—165.
2. Functionals F bilinear over the product $A \times B$ of two pseudo-normed vector spaces, I, II.
   I. *Ann. of Math.* (2), **50** (1949), 777—815.
   II. Там же (2), **51** (1950), 576—614.
3. Integral representations of bilinear functionals, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, **35** (1949), 136—143.
4. The generalized Fréchet variation and Riesz — Young — Hausdorff type theorems, *Rend. Circ. Mat. Palermo* (2), **2** (1953), 5—35.

Московиц и Дайнс (Moskovitz D., Dines L. L.)
1. Convexity in a linear space with an inner product, *Duke Math. J.*, 5 (1939), 520—534.
2. On the supporting-plane property of a convex body, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **46** (1940), 482—489.

Мур Э. (Moore E. H.)
1. Introduction to a form of general analysis. The New Haven Math. Colloquim of the Amer. Math. Soc., 1906.
2. General analysis, I, II. Mem. Amer. Philos. Soc., Philadelphia 1935, 1939.

Мур Р. (Moore R. L.)
1. Foundations of point set theory. Amer. Math. Soc. Colloquim Publications, vol. 13, New York, 1932.

Мюнц (Müntz Ch. H.)
1. Über den Approximationssatz von Weierstrass. Math. Abhandlungen H. A. Schwarz gewidmet. Berlin (1914), 303—312.

Нагата (Nagata J.)
1. On lattices of functions on topological spaces and of functions on uniform spaces, *Osaka Math. J.*, **1** (1949), 166—181.

Нагумо (Nagumo M.)
1. Einige analytische Untersuchungen in linearen metrischen Ringen, *Jap. J. Math.*, **13** (1936), 61—80.
2. Degree of mapping in convex linear topological spaces, *Amer. J. Math.*, **73** (1951), 497—511.
3. Characterisierung der allgemeinen euklidischen Räume durch eine Postulate für Schwerpunkte, *Jap. J. Math.*, **12** (1936), 123—128.

Наймарк М. А., см. также Гельфанд И. М.
1. Положительно определенные операторные функции на коммутативной группе, *Изв. АН СССР*, сер. матем., 7 (1943), 237—244.
2. Кольца операторов в гильбертовом пространстве, *УМН*, **4** : **4** (32), (1949), 83—147.
3. Об одном представлении аддитивных операторных функций множеств, *ДАН СССР*, **41** (1943), 373—375.
4. Об индексе дефекта линейных дифференциальных операторов, *ДАН СССР*, **82** (1952), 517—520.
5. Линейные дифференциальные операторы, М., Гостехиздат, 1954.
6. О квадрате замкнутого симметрического оператора, *ДАН СССР*, **26** (1940), 863—867.
7. О самосопряженных расширениях второго рода симметрического оператора, *Изв. АН СССР*, сер. матем., **4** (1940), 53—104.
8. Спектральные функции симметрического оператора, *Изв. АН СССР*, сер. матем., **4** (1940), 277—318.
9. О спектре сингулярных несамосопряженных дифференциальных операторов второго порядка, *ДАН СССР*, **85** (1952), 41—44.
10. Исследование спектра и разложение по собственным функциям несамосопряженных сингулярных дифференциальных операторов второго порядка, *УМН*, 8 : **4** (56), (1953), 174—175.
11. О разложении по собственным функциям несамосопряженных дифференциальных операторов второго порядка, *ДАН СССР*, 89 (1953), 213—216.
12. Исследование спектра и разложение по собственным функциям несамосопряженного дифференциального оператора второго порядка на полуоси, М., *Труды Мат. об-ва*, **3** (1954), 181—270.

13*. Нормированные кольца, М., Гостехиздат, 1956.

Накамура (Nakamura M.)
1. Notes on Banach space. X. Vitali-Hahn-Saks' theorem and K-spaces, *Tôhoku Math. J.* (2), **1** (1949), 101—108.

2. Notes on Banach space, XI. Banach lattices with positive bases, *Tôhoku Math. J.* (2), **2** (1950), 135—141.
3. Complete continuities of linear operators, *Proc. Japan Acad.*, **27** (1951), 544—547.

Накамура и Суноути (Nakamura M., Sunouchi S.)
1. Note on Banach spaces (IV). On a decomposition of additive set functions, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **18** (1942), 333—335.

Накамура и Умегаки (Nakamura M., Umegaki H.)
1. A remark on theorems of Stone and Bochner, *Proc. Japan Acad.*, **27** (1951), 506—507.

Накано (Nakano H.)
1. Topology and linear topological spaces, Maruzen Co., Tokyo, 1951.
2. Modulared semi-ordered linear spaces, Maruzen Co., Tokyo, 1950.
3. Riesz-Fischerscher Satz im normierten teilweise geordneten Modul, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **18** (1942), 350—353.
4. Über Erweiterungen von allgemein teilweise geordneten Moduln, I. *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **18** (1942), 626—630.
5. Über Erweiterungen von allgemein teilweise geordneten Moduln; II. *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **19**, (1943), 138—143.
6. Modulared linear spaces, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect.* I, **6** (1950), 85—131.
7. Zur Eigenwerttheorie normaler Operatoren, *Proc. Phys.-Math. Soc. Japan* (3) (1939), 315—339.
8. Über Abelsche Ringe von Projektionsoperatoren, *Proc. Phys.-Math. Soc. Japan* (3) **21** (1939), 357—375.
9. Unitärinvariante hypermaximale normale Operatoren, *Ann. of Math.* (2) **42** (1941), 657—664.
10. Unitärinvarianten in allgemeinen Euklidischen Raum, *Math. Ann.*, **118** (1941), 112—133.
11. Funktionen mehrerer hypermaximaler normaler Operatoren, *Proc. Phys. Math. Soc. Japan* (3) **21** (1939), 713—728.
12. Modern spectral theory. Maruzen Co., Tokyo, 1950.
13. Spectral theory in the Hilbert space, *Japan Soc. for Promotion of Sci.*, Tokyo, 1953.
14. Über normierte teilweise geordnete Moduln, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **17** (1941), 311—317.
15. Stetige lineare Funktionale auf dem teilweise geordnete Modul, *J. Fac. Sci. Imp. Univ. Tokyo*, **4** (1942), 201—382.
16. Über ein lineare Funktional auf dem teilweise geordneten Modul, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **18** (1942), 548—552.
17. Über den Beweis des Stoneschen Satzes, *Ann. of Math.* (2), **42** (1941) 665—667.
18. Reduction of Bochner's theorem to Stone's theorem, *Ann. of Math.* (2) **49** (1948), 279—280.

Накаяма (Nakayama T.,) см. Иосида

Натан (Nathan D. S.)
1. One-parameter groups of transformations in abstract vector spaces, *Duke Math. J.*, **1** (1935), 518—526.

Натансон И. П.
1*. Теория функций вещественной переменной, Гостехиздат, 1950.

Нахбин (Nachbin L.)
1. On the axiom of the nonconvergent sequences in some linear topological space, *Revista Unión Mat. Argentina*, **12** (1947), 129—150.
2. A characterization of the normed vector ordered spaces of continuous functions over a compact space, *Amer. J. Math.* **71** (1949), 701—705.
3. A theorem of the Hahn-Banach type for linear transformations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 68 (1950), 28—46.

Нейгауз М. Г.
1. Об определении асимптотики функции $q(x)$ по свойствам спектральной функции оператора $-y''+q(x)y$, *ДАН СССР*, **102** (1955), 25—28.
Нейман Дж. (von Neumann J.), см. также Бохнер, Девинац, Йордан, Меррей и Халмош
1. On complete topological spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **37** (1935), 1—20.
2. Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der Normalen Operatoren, *Math. Ann.*, **102** (1929—1930), 370—427.
3. Eine Spectraltheorie für allgemeine Operatoren eines unitären Raumes, *Math. Nachr.*, **4** (1951), 258—281.
4. Functional operators, I. Annals of Math. Studies, no. 21 Princeton University Press, Princeton, 1950.
5. On a certain topology for rings of operators, *Ann. of Math.* (2) **37** (1936), 111—115.
6. Charakterisierung des Spectrums eines Integraloperators, *Act. Sci. et Ind.*, 229, Paris, 1935.
7. Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren, *Math. Ann.*, **102** (1929—1930), 49—131.
8. Mathematische Begründung der Quantenmechanik, *Nachr. Gesell. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl* (1927), 1—57.
9. Almost periodic functions in a group, I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **36** (1934), 445—492.
10. Über einen Satz von Herrn M. H. Stone, *Ann. of Math.* (2) **33** (1932), 567—573.
11. Proof of the quasi-ergodic hypothesis, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, **18** (1932), 70—82.
12. Zum Haarschen Mass in topologischen Gruppen, *Comp. Math.*, **1** (1934), 106—114.
13. On rings of operators, III. *Ann. of Math.* (2) **41** (1940), 94—161.
14. On some algebraical properties of operator rings, *Ann. of Math.* (2) **44** (1943), 709—715.
15. On rings of operators. Reduction theory, *Ann. of Math.* (2) **50** (1949), 401—485.
16. Über adjungierte Funktionaloperatoren, *Ann. of Math.* (2) **33** (1932), 294—310.
17. The uniqueness of Haar's measure, *Матем. сб.*, **1** (43) (1936), 721—734.
18. Über Funktionen von Funktionaloperatoren, *Ann. of Math.* (2) **32** (1931), 191—226.
19. Einige Sätze über messbare abbildungen, *Ann. of Math.* (2) **33** (1932), 574—586.
20. Zur Operatorenmethode in der klassischen Mechanik, *Ann. of Math.* (2) **33** (1932), 587—642, 789—791.
21. Algebraische Repräsentanten der Funktionen «bis auf eine Menge vom Masse Null», *J. Reine Angew. Mathem.*, **165** (1931), 109—115.
22. On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism, I. *Матем. сб.*, **1** (43), (1936), 415—482.
23. Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, J. Springer, Berlin, 1932.
24. Approximative properties of matrices of high finite order, *Port. Math.*, **3** (1942), 1—62.
Нейман К. (Neumann C.)
1. Untersuchungen über das logaritmische und Newtonsche Potential, Teubner, Leipzig, 1877.
Неймарк Ф. А.
1. О расширении эрмитова оператора до перестановочного с данным эрмитовым оператором, *ДАН СССР*, **66** (1949), 9—12.

Н е м ы ц к и й В. В.

1. Метод неподвижных точек в анализе, *УМН*, **1** (1936), 141—175.
2. Проблемы качественной теории дифференциальных уравнений, М., *Вест. Ун-та*, 8 (1952), 19—39.

Н и к о в и ч И. А.

1. О рядах Фредгольма, *ДАН СССР*, 59 (1948), 423—425.

Н и к о д и м (N i k o d ý m O. M.)

1. Remarques sur les intégrales de Stieltjes en connexion avec celles de MM. Radon et Fréchet, *Ann. Soc. Polon. Math.*, **18** (1945), 12—24.
2. Sur les fonctionelles linéaires, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **229** (1949), 16—18, 169—171, 288—289.
3. Remarques sur la pseudo-topologie et sur les fonctionnelles linéaires, *C. R. Acad. Sci. Paris.*, **229** (1949), 863—865.
4. Un nouvel appareil mathématique pour la théorie des quanta, *Ann. Inst. H. Poincaré*, **11** (1949), 49—112.
5. Sur les familles bornées de fonctions parfaitement additives d'ensemble abstrait, *Monatsh. für Math. u. Phys.*, **40** (1933) 418—426.
6. Sur les suites convergentes de fonctions parfaitement additives d'ensemble abstrait, *Monatsh. für Math. u. Phys.*, **40** (1933), 427—432.
7. Sur les fonctions d'ensembles. Comptes Rendus du I Congres des Math. des Pays Slaves. Warsaw (1929), 304—313.
8. Sur une généralisation des intégrales de M. J. Radon, *Fund. Math.*, **15** (1930), 131—179.
9. Contribution à la théorie des fonctionelles linéaires en connexion avec la théorie de la mesure des ensembles abstraits, *Mathematica, Cluj*, **5** (1931), 130—141.
10. Sur les opérateurs normaux maximaux dans l'espace hilbertien séparable et complet, I, II.
    I. *C. R. Acad. Sci, Paris*, **238** (1954), 1373—1375.
    II. Там же, **238** (1954), 1467—1469.

Н и к о л е с к у (N i c o l e s c u M.)

1. On the criterion of compactness of A. Kolmogorov, *Acad. Republ. Pop. Române. Bul. Sti. Ser. Mat. Fiz. Chim.*, **2** (1950), 407—415.

Н и к о л ь с к и й В. Н.

1. Наилучшее приближение и базис в пространстве Фреше, *ДАН СССР*, **59** (1948), 639—642.

Н и к о л ь с к и й С. М.

1. Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах, *Изв. АН СССР*, сер. матем., **7** (1943), 147—166.

Н и м а н (N y m a n B.)

1. On the one-dimensional translation group and semi-group in certain function spaces. Dissertation. University of Uppsala (1950). *Math. Rev.*, **12** (1951), 108.

Н и р е н б е р г (N i r e n b e r g L.)

1. Remarks on strongly elliptic partial differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, 8 (1955), 648—674.

2*. On nonlinear elliptic partial differential equations and Hölder continuty Comm, *Pure Appl. Math.*, **6** (1953), 103—157.
Есть русский перевод: *Математика*, **3** : **3** (1959), 9—55.

Н у с б а у м (N u s s b a u m A. E.), см. Д е в и н а ц

Н ь ю т о н и Й о с т (N e w t o n R. G., J o s t R.)

1. The construction of potentials from the S-matrix for systems of differential equations, *Il. Nuovo Cimento* (10), **1** (1955), 590—622.

О г а с а в а р а (O g a s a w a r a T.)

1. Compact metric Boolean algebras and vector lattices, *J. Sci. Hirosima Univ. Ser. A*, 11 (1942), 125—128.

2. On Fréchet lattices, I. *J. Sci. Hirosima Univ. Ser. A*, 12, (1943), 235—248 (Японск.; *Math. Rev.*, **10** (1949), 544).
3. Remarks on a vector lattice with a metric function, *J. Sci. Hirosima Univ. Ser. A*, **13** (1944), 317—325 (Японск.; *Math. Rev.*, **10** (1949), 544.)
4. Commutativity of Archimedean semi-ordered groups, *J. Sci. Hirosima Univ. Ser. A*, **12** (1943), 249—254. (Японск.; *Math. Rev.*, **10** (1949), 544.)
5. Theory of vector lattices, I, II.
I. *J. Sci. Hirosima Univ. Ser. A*, **12** (1942), 17—35.
II. Там же **12** (1943), 217—234 (Японск., *Math. Rev.*, **10** (1949), 545.)
6. Some general theorems and convergence theorems in vector lattices, *J. Sci. Hirosima Univ. Ser. A*, **14** (1949), 14—25.
7. On the integral representation of unbounded self-adjoint transformations, *J. Sci. Hirosima Univ. Ser. A*, **6** (1936) 279—281.

Огасавара и Маеда (Ogasawara T., Maeda F.)
1. Representation of vector lattices, *J. Sci. Hirosima Univ. Ser. A*, **12** (1942), 17—35 (Японск.; *Math. Rev.*, **10** (1949) 544.)
2. Remarks on representation of vector lattices, *J. Sci. Hirosima Univ. Ser. A*, **12** (1934), 217—234 (Японск.; *Math. Rev.*, **10** (1949), 594.)

Одэн (Audin M.)
1. Sur certaines singularités des transformations linéaires bornées, *C. R. Acad. Sci., Paris*, **238** (1954), 2221—2222.

Окстоби (Oxtoby J. C.)
1. Ergodic sets, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **58** (1952), 116—136.
Есть русский перевод: *УМН*, 8, вып. 5 (1953).
2. On the ergodic theorem of Hurewicz, *Ann. of Math.* (2) **49** (1948), 872—884.
3. Invariant measures in groups which are not locally compact, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **60** (1946), 215—237.
4. The category and Borel class of certain subsets of L_p, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **43** (1937), 245—248.

Окстоби и Улам (Oxtoby J. C., Ulam S.)
1. On the existence of a measure invariant under a transformation, *Ann of Math.* (2) **40** (1939), 560—566.

О'Нилл (O'Neill B.)
1. Essential sets and fixed points, *Amer. J. Math.*, **75**, (1953), 497—509.

Оно (Ono T.)
1. A generalization of the Hahn-Banach theorem, *Nagoya Math. J.*, 6 (1953), 171—176.

Орихара (Orihara M.)
1. On the regular vector lattice, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **18** (1942), 525—529.

Орлич (Orlicz W.), см. также Алексевич, Бирнбаум и Мазур
1. Über unbedingte Konvergenz in Funktionräumen, I, II.
I. *Studia Math.*, **4** (1933), 33—37.
II. Там же, **4** (1933), 41—47.
2. Über konjugierte Exponentenfolgen, *Studia Math.*, **3** (1931), 200—211.
3. Über eine gewisse Klasse von Räumen von Typus *B*, *Bull. Int. Acad. Polon. Sci. Sér. A* (1932), 207—220.
4. Ein Satz über die Erweiterung von linearen Operationen, *Studia. Math.*, **5** (1934), 127—140.
5. Sur les opérations linéaires dans l'espace des fonctions bornées, *Studia Math.*, **10** (1948), 60—89.
6. Linear operations in Saks spaces (I), *Studia Math.*, **11** (1950), 237—272.

7. Über Folgen linearen Operationen, die von einem Parameter abhängen. *Studia Math.*, **5** (1934), 160—170.
8. Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen, I—VI.
   I. *Studia Math.*, **1** (1929), 1—39.
   II. Там же, **1** (1929), 241—255.
   III. *Bull. Int. Acad. Polon. Sci. Sér. A*, **8—9** (1932), 229—238.
   IV. *Studia Math.*, **5** (1934), 1—14.
   V. Там же, **6** (1936), 20—38.
   VI. Там же, **8** (1939), 141—147.

Орлов С. А.
1. Об индексе дефекта линейных дифференциальных операторов, *ДАН СССР*, **92** (1953), 483—486.

Оухар (Owchar M.)
1. Wiener integrals of multiple variations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **3** (1952), 459—470.

Охира (Ōhira K.)
1. On a certain complete, separable and metric space, *Mem. Fac. Sci. Kyūsyū Univ.* A, **6** (1951), 9—15.
2. On some characterizations of abstract Euclidean spaces by properties of orthogonality, *Kumamoto J. Sci. Ser. A*, **1**, no. 1 (1952) 23—26.

Паркер (Parker W. V.)
1. Limits to the characteristic roots of a matrix, *Duke Math. J.*, **10** (1943). 479—482.

Паули (Pauli W.)
1. Мезонная теория ядерных сил, М., 1947 (1946).

Пеано (Peano G.)
1. Integrazione per serie delle equazioni differenziali lineari, *Atti R. Acc. Sci. Torino*, **22** (1887), 293—302. Немецкий перевод: *Math. Ann.*, **32** (1888), 450—456.

Пейс (Pais A.), см. Йост

Пек (Peck J. E. L.)
1. An ergodic theorem for a noncommutative semi-group of linear operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **2** (1951), 414—421.

Петер и Вейль (Peter F., Weyl H.)
1. Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe, *Math. Ann.*, **97** (1927). 737—755.

Петтис (Pettis B. J.), см. также Данфорд
1. A note on regular Banach spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **44** (1938), 420—428.
2. A proof that every uniformly convex space is reflexive, *Duke Math. J.*, **5** (1939), 249—253.
3. Remarks on a theorem of E. J. Mc. Shane, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **2** (1951), 166—171.
4. On integration in vector spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **44** (1938), 277—304.
5. On continuity and openness of homomorphisms in topological groups, *Ann. of Math.* (2) **52** (1950), 293—308.
6. Absolutely continuous functions in vector spaces (abstract), *Bull. Amer. Math. Soc.*, **45** (1939), 677.
7. Differentation in Banach spaces, *Duke Math. J.*, **5** (1939), 254—269.
8. Linear functionals and completely additive set functions, *Duke Math. J.*, **4** (1938), 552—565.

Пиконе (Picone M.)
1. Sui valori eccezionali di un parametro da cui dipende un'equazione differenziale del seconde ordine, *Ann. R. Scuola Norm. Sup. Pisa* (1) **11** (1910), 1—141.

П и н к е р л е (P i n c h e r l e S.)
1. Funktionaloperationen und -Gleichungen, *Encyklopädie der Math. Wiss.* II, A, **11** (1905), 761—817. Французский перевод: Équations et opérations fonctionnelles, *Enc. des sciences math.*, II, Vol. 5, fasc. 1, no. **26**, 1—86.

П и н с к е р А. Г., см. также К а н т о р о в и ч Л. В.
1. Об одном классе операций в K-пространствах, *ДАН СССР*, 36 (1942) 243—246.
2. О нормированных *K*-пространствах, *ДАН СССР*, **33** (1941), 12—15.
3. Универсальные *K*-пространства, *ДАН СССР*, **49** (1945), 8—11.
4. Разложение K-пространств на элементарные пространства, *ДАН СССР*, **49** (1945), 168—171.
5. О сепарабельных *K*-пространствах, *ДАН СССР*, **49** (1945), 327—328.
6. Вполне линейные функционалы в *K*-пространствах, *ДАН СССР*, **55** (1947), 303—306.
7. О конкретных представлениях линейных полуупорядоченных пространств, *ДАН СССР*, **55** (1947), 383—386.

П и р с (P i e r c e R.)
1. Cones and the decomposition of functionals, *Math. Mag.* **24**, (1951) 117—122.

П и т т (P i t t H. R.)
1. Some generalizations of the ergodic theorem., *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **38** (1942), 325—343.

П л а н ш е р е л ь (P l a n c h e r e l M.)
1. Integraldarstellungen willkürlicher Funktionen, *Math. Ann.*, **67** (1909), 519—543.

П л е с н е р А. И.
1. О полуунитарных операторах, *ДАН СССР*, **25** (1939), 708—710.
2. Спектральная теория линейных операторов, *УМН*, **9** (1941), 3—125.

П л е с н е р А. И. и Р о х л и н В. А.
1. Спектральная теория линейных операторов, *УМН*, **1 : 1** (11), (1946), 171—191.

П о в з н е р А. Я.
1. О некоторых приложениях одного класса гильбертовых пространств функций, *ДАН СССР*, **74** (1950), 13—16.
2. О спектре ограниченных функций, *ДАН СССР*, **57** (1947), 755—758.
3. О спектре ограниченных функций и преобразовании Лапласа, *ДАН СССР*, **57** (1947), 871—874.
4. О одной общей формуле обращения типа Планшереля, *ДАН СССР*, **57**, (1947), 123—125.
5. Об уравнениях типа Штурма — Лиувилля и позитивных функциях, *ДАН СССР*, **43** (1944), 387—391.
6. О дифференциальных уравнениях типа Штурма — Лиувилля на полуоси, *Матем. сб.*, **23** (65) (1948), 3—52.
7. О методе направляющих функционалов М. Г. Крейна, Хрк., *Зап. Матем. о-ва* (4) **20** (1950), 43—52.
8. О дифференцировании спектральной функции уравнения Шредингера, *ДАН СССР*, **79** (1951), 193—196.

П о й а (P ó l y a G.), см. также Х а р д и
1. Remark on Weyl's note «Inequalities between the two kinds of eigen values of a linear transformation». *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, **36** (1950), 49—51.

П о л л а р д (P o l l a r d H.)
1. Integral transforms, *Duke Math. J.*, **13** (1946), 307—330.

П о н т р я г и н Л. С.
1. Топологические группы, изд. 2-е, М., Гостехиздат, 1954.

П о т а п о в В. П., см. Л и в ш и ц М. С.

Поттер (Potter R. L.)
1. On self-adjoint differential equations of the second order, *Pacific J. Math.*, **3** (1953), 467—491.

Прайс (Price G. B.)
1. The theory of integration, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **47** (1940), 1—50.

Прюфер (Prüfer H.)
1. Neue Herleitung der Sturm-Liouvilleschen Reihenentwicklung stetiger Funktionen, *Math. Ann.*, **95** (1926), 499—518.

Птак (Pták V.)
1. О полных топологических линейных пространствах, *Чехосл. Матем. журн.*, **3** (78), (1953), 301—364.
2. On a theorem of W. F. Eberlein, *Studia Math.*, **14** (1954), 276—284.
3. Weak compactness in convex topological linear spaces, *Čehoslovack. Mat. Ž.* 4 (79) (1954), 175—186.
4*. Completness and the open mapping theorem, *Bull. Soc. Math. France*, **86** (1958), 41—74. Есть русский перевод: *Математика*, **4**:**6** (1960), 39—67.
5*. On the closed graph theorem., *Чехосл. Матем. ж.*, 9 (84), (1959), 523—527. Есть русский перевод: *Математика*, **4** : **6** (1960), 69—72.

Пуанкаре (Poincaré H.)
1. Sur les groupes continus, *Cambridge Phil. Trans.*, **18** (1899), 220—255. Перепечатано в *Oeuvres*, **3**, 173—212.
2. Sur les equations de la physique mathématique, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 8 (1894), 57—156.

Пул (Poole E. G. C.)
1. Introduction to the theory of linear differential equations, Oxford Univ. Press, 1936.

Путнам (Putnam C. R.), см. также Хартман П.
1. On normal operators in Hilbert space, *Amer. J. Math.*, **73** (1951), 357—362.
2. On commutators of bounded matrices, *Amer. J. Math.*, **93** (1951), 127—131.
3. On the spectra of commutators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **5** (1954), 929—931.
4. An application of spectral theory to a singular calculus of variations problem, *Amer. J. Math.*, **70** (1948), 780—803.
5. The cluster spectra of bounded potential, *Amer. J. Math.*, **71** (1949), 612—620.
6. An oscillation criterion involving a minimum principle, *Duke Math. J.*, **16** (1949), 633—636.
7. On the spectra of certain boundary value problems, *Amer. J. Math.*, **71** (1949), 109—111.
8. On isolated eigenfunctions associated with bounded potentials, *Amer. J. Math.*, **72** (1950), 135—147.
9. The comparison of spectra belonging to potentials with a bounded difference, *Duke Math. J.*, **18** (1951), 267—273.
10. On the least eigenvalue of Hill's equation, *Quart. Appl. Math.*, **9** (1951), 310—314.
11. The spectra of quantum-mechanical operators, *Amer. J. Math.*, **74** (1952) 377—388.
12. On the unboundness of the essential spectrum, *Amer. J. Math.*, **74** (1952), 578—585.
13. A sufficient condition for an infinite discrete spectrum, *Quart. Appl. Math.*, **11** (1953), 484—486.
14. On the gap in the spectrum of the Hill equation, *Quart. Appl. Math.*, **11** (1953), 496—498.

15. Integrable potentials and half-line spectra, *Proc. 'Amer. Math. Soc.*, **6** (1955), 243—246.
16. On the continuous spectra of singular boundary value problems, *Canadian J. Math.*, **6** (1954), 420—426.
17. Note a limit-point criterion, *J. London Math. Soc.*, **29** (1954), 126—128.
18. Necessary and sufficient conditions for the existence of negative spectra, *Quart. Appl. Math.*, **13** (1955), 335—337.

Пэли (Paley R. E. A. C.), см. также Литлвуд
1. A proof of a theorem on bilinear forms, *J. London Math. Soc.*, **6** (1931), 226—230.
2. A note on bilinear forms, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **39** (1933), 259—260.
3. Some theorems on orthogonal functions, *Studia Math.*, **3** (1931), 226—238.

Пэли и Винер (Paley R. E. A. C., Wiener N.)
1. Fourier transforms in the complex domain. Amer. Math. Soc. Colloquium Pub., no. 19, New York, 1934.

Пэли, Винер и Зигмунд (Paley R. E. A. C., Wiener N., Zygmund A.)
1. Notes on random functions, *Math. Zeit.*, **37** (1933), 647—668.

Рабинович Ю. Л.
1. О непрерывной зависимости от параметра спектра симметрического линейного интегрального оператора, М., *Учен. зап. ун-та*, **148**; *Математика*, **4** (1951), 181—191.

Радон (Radon J.)
1. Über lineare Funktionaltransformationen und Funktionalgleichungen, *S.-B. Akad. Wiss. Wien*, **128** (1919), 1083—1121. Русский перевод: *УМН*, **1**, (1936), 200—227.
2. Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen, *S.-B. Akad. Wiss. Wien*, **122** (1913), 1295—1438.

Райков Д. А., см. также Гельфанд И. М.
1. Гармонический анализ на коммутативных группах с мерой Хаара и теория характеров, *Труды Матем. ин-та АН СССР*, **14** (1945).
2. Новое доказательство единственности меры Хаара, *ДАН СССР*, **34** (1942), 231—233.
3. Положительно определенные функции на коммутативных группах с инвариантной мерой, *ДАН СССР*, 28 (1940), 296—300.

Райнхарт (Rinehart R. F.)
1. The equivalence of definitions of a metric function, *Amer. Math. Monthly*, **62** (1955), 395—414.

Райт (Wright F. B.)
1. Absolute valued algebras, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **39** (1953), 330—332.

Рамасвами (Ramaswami V.)
1. Normed algebras, isomorphism and the associative postulate, *J. Indian Math. Soc.* (*N.S.*) **14** (1950), 47—64.

Рапопорт И. М.
1. О сингулярной краевой задаче для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, *ДАН СССР*, **79** (1951), 21—24.
2. Об оценке собственных значений эрмитовых операторов, *ДАН СССР*, **103** (1955), 199—202.

Растон (Ruston A. F.)
1. A note on convexity in Banach spaces, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **45** (1949), 157—159.
2. On the Fredholm theory of integral equations for operators belonging to the trace class of a general Banach space, *Proc. London Math. Soc.* (2) **53** (1951), 109—124.
3. Direct products of Banach spaces and linear functional equations, *Proc. London Math. Soc.* (3) **1** (1951), 327—384.

4. A short proof of a theorem on reflexive spaces, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **45** (1949), 674.
5. Formulae of Fredholm type for compact linear operations on a general Banach space, *Proc. London Math. Soc.* (3) **3** (1953), 368—377.
6. Operators with a Fredholm theory, *J. London Math. Soc.*, **29** (1954), 318—326.
7*. Conjugate Banach spaces, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **53** (1957), 576—580. Есть русский перевод: *Математика*, **3 : 6** (1959), 91—96.

Рейтер (Reiter H. J.)
1. Investigations in harmonic analysis, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **73** (1952), 401—427.
2. On a certain class of ideals in the L^1-algebra of a locally compact abelian group, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **75** (1953), 505—509.

Рей Пастор (Rey Pastor J.)
1. Functional analysis and the general theory of functions, *Reale Accademia d'Italia, Fondezione Allesandro Volta. Ati dei Convegni.*, **9** (1939), 339—372, Rome 1943.

Реллих (Rellich F.)
1. Störungstheorie der Spektralzerlegung, *Proc. Internat. Congress of Math. Cambridge, Mass.* **1** (1950), 606—613.
2. Störungstheorie der Spektralzerlegung, I—V.
I. *Math. Ann.*, **113** (1936), 600—619.
II. Там же, **113** (1936), 677—685.
III. Там же, **116** (1939), 555—570.
IV. Там же, **117** (1940—1941), 356—382.
V. Там же, **118** (1941—1943), 462—484.
3. Spektraltheorie in nichtseparabeln Räumen, *Math. Ann.*, **110** (1935), 342—356.
4. Die zulässigen Randbedingungen bei den singulären Eigenwertproblemen der mathematischen Physik, *Math. Zeit*, **49** (1944), 702—723.
5. Die Eindeutigkeitssatz für die Lösungen quantenmechanische Vertauschungsrelationen, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl.* (1946), 107—115.
6. Halbbeschränkte gewöhnliche Differentialoperatoren zweiter Ordnung, *Math. Ann.*, **122** (1951), 243—368.
7. Spectral theory of a second order ordinary differential equation. Inst. Math. Sci., New York University, 1951.

Рид (Reid W. T.)
1. Symmetrizable completely continuous linear transformations in Hilbert space, *Duke Math. J.*, **18** (1951), 41—56.
2. Expansion problems associated with a system of linear integral equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **33** (1931), 475—485.
3. A new class of self-adjoint boundary value problems, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **52** (1942), 381—425.

Рикабарра (Ricabarra R. A.), см. Котляр.

Рикларт (Rickart C. E.)
1. Integration in a convex linear topological space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **52** (1942), 498—521.
2. An abstract Radon-Nikodým theorem, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **56** (1944), 50—66.
3. Decomposition of additive set functions, *Duke Math. J.*, **10** (1943), 653—665.
4. The singular elements of a Banach algebra, *Duke Math. J.*, **14** (1947), 1063—1077.
5. Isomorphic groups of linear transformations, *Amer. J. Math.*, **72** (1950), 451—464.

6. Banach algebras with an adjoint operation, *Ann. of Math.* (2) **47** (1946), 528—550.
7. The uniqueness of norm problem in Banach algebras, *Ann. of Math.* (2) **51** (1950), 615—628.
8. Representation of certain Banach algebras on Hilbert space, *Duke Math. J.*, 18 (1951), 27—39.
9. On spectral permanence for certain Banach algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **4** (1953), 191—196.
10. General theory of Banach algebras. The university series in highes mathematics, Princeton, 1960.

Рис (Riss J.)
1. Transformation de Fourier des distributions, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **229** (1949), 12—14.

Рисс М. (Riesz M.)
1. Sur les maxima des formes bilinéaires et sur les fonctionnelles linéaires, *Acta Math.*, **49** (1926), 465—497.
2. Sur les ensembles compacts de fonctions sommables, *Acta Sci. Math. Szeged*, **6** (1933), 136—142.
3. Sur les fonctions conjugées, *Math. Zeit.*, **27** (1927), 218—244.
4. L'intégrale de Riemann-Liouville et le probleme de Cauchy, *Acta Math.*, **81** (1949), 1—223.

Рисс Ф. (Riesz F.)
1. Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre, *Atti det IV Congresso Intern. dei Matem.*, *Bologna*, **2** (1908), 18—24.
2. Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen, *Math. Ann.* **69** (1910), 449—497.
3. Sur certains systèmes singuliers d'équations integrales, *Ann. École Norm. Sup.* (3) **28** (1911), 33—62.
4. Über lineare Funktionalgleichungen, *Acta Math.*, **41** (1918), 71—98. Есть русский перевод: *УМН*, **1** (1936), 175—199.
5. Sur les systèmes orthogonaux de fonctions, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **144** (1907), 615—619.
6. Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues. Paris, 1913.
7. Sur les opérations fonctionnelles linéaires, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **149** (1909), 974—977.
8. Sur Theorie des Hilbertschen Raumes, *Acta Sci. Math. Szeged*, **7** (1934), 34—38.
9. Sur une espèce de géométrie analytiques des systèmes de fonctions sommables, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **144** (1907), 1409—1411.
10. Démonstration nouvelle d'un théorème concernant les opérations fonctionnelles linéaires, *Ann. l'École Norm. Sup.* (3) **31** (1914), 9—14.
11. Sur la répresentation des opérations fonctionnelles lineáres par des intégrales de Stieltjes, *Proc. Roy. Physiog. Soc. Lund.*, **21**, 16 (1952), 145—151.
12. Sur les suites de fonctions mesurables, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **148** (1909), 1303—1305.
13. Sur la convergence en moyenne, I, II.
I. *Acta Sci. Math. Szeged*, **4** (1928—1929), 58—64.
II. Там же (1928—1929), 182—185.
14. Über die linearen Transformationen des komplexen Hilbertschen Raumes, *Acta Sci. Math. Szeged*, **5** (1930—1932), 23—54.
15. Some mean ergodic theorems, *J. London Math. Soc.*, **13** (1938), 274—278.
16. Another proof of the mean ergodic theorem, *Acta Sci. Math. Szeged*, **10** (1941—1943), 75—76.
17. Sur la théorie ergodique des espaces abstraits, *Acta Sci. Math. Szeged*, **10** (1941—1943), 1—20.
18. Sur la théorie ergodique, *Comment. Math. Helv.*, **17** (1945), 221—239.

19. On a recent generalization of G. D. Birkhoff's ergodic theorem, *Acta Sci. Math. Szeged*, **11** (1946—1948), 193—200.
20. Über quadratische Formen von unendlich vielen Veränderlichen, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl* (1910), 190—195.
21. Sur les fonctions des transformations hermitiennes dans l'espace de Hilbert, *Acta Sci. Math. Szeged*, **7** (1935), 147—159.
22. Über Sätze von Stone und Bochner, *Acta Sci. Math. Szeged*, **6** (1933), 184—198.
23. Sur quelques notions fondamentales dans la théorie générale des opérations linéaires, *Ann. of Math.* (2) **41** (1940), 174—206. Русский перевод: *УМН*, 1 : 2 (2) (1946), 147—178.

Рисс Ф. и Лорх (Riesz F., Lorch E. R.)
1. The integral representation of unbounded self-adjoint transformations in Hilbert space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **39** (1936), 331—340.

Рисс Ф. и Секефальви-Надь (Riesz F., Sz-Nagy B.)
1. Leçons d'analyse fonctionnelle. Akadémiai Kiado, Budapest, 1952. [Русский перевод: Лекции по функциональному анализу, М., ИЛ, 1954.]
2. Über Kontraktionen des Hilbertschen Raumes, *Acta Sci. Math. Szeged*, **10** (1941—1943), 202—205.

Робертс (Roberts B. D.)
1. On the geometry of abstract vector spaces, *Tôhoku Math. J.*, **39** (1934), 42—59.

Робертсон А. и Робертсон У. (Robertson A. and W.)
1*. On the closed graph theorem, *Proc. Glas. Math. Ass.*, **3** (1956), Part I, 9—12. Есть русский перевод: *Математика*, **4** : **6** (1960), 73—77.

Робисон (Robison G. B.)
1. Invariant integrals over a class of Banach spaces, *Pacific J. Math.*, **4** (1954), 123—150.

Рогозинский (Rogosinski W. W.), см. Макинтайр

Рогозинский и Шапиро (Rogosinski W. W., Shapiro H. S.)
1. On certain extremum problems for analytic functions, *Acta Math.*, **90** (1953), 287—318.

Роджерс (Rogers C. A.), см. Дворецкий

Розенблат (Rosenblatt M.)
1. On a class of Markoff processes, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **71** (1951), 120—135.

Розенблюм (Rosenbloom P. C.)
1. Elements of mathematical logic. Dover Publications, New York, 1950.
2. Perturbations of linear operators in Banach spaces, *Arch. Math.*, **6** (1955), 89—101.

Розенталь (Rosenthal A.), см. Гартогс и Хан

Россер (Rosser J. B.)
1. Logic for mathematicians. McGraw-Hill Co., New York, 1953.

Рота (Rota G. C.)
1. Extension theory of ordinary linear differential operators. Dissertation, Yale University, 1956.

Роте (Rothe E. H.)
1. Zur Theorie der topologischen Ordnung und der Vektorfelder in Banachschen Räumen, *Compositio Math.*, **5** (1937—1938), 177—196.
2. Topological proofs of uniqueness theorems in the theory of differential and integral equations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **45** (1939), 606—613.
3. Critical points and gradient fields of scalars in Hilbert space, *Acta Math.*, **85** (1951), 73—98.
4. Gradient mappings, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **59** (1953), 5—19.
5. Completely continuous scalars and variational methods, *Ann. of Math.* (2), **47** (1946), 580—592.

6. Gradient mappings and extrema in Banach spaces, *Duke Math. J.*, **15** (1948), 421—431.
7. Mapping degree in Banach spaces and spectral theory, *Math. Z.*, **63** (1955), 195—218.

Рохлин В. А., см. также Плеснер А. И.
1. Об эндоморфизмах компактных коммутативных групп, *Изв. АН СССР*, сер. матем., **13** (1949), 329—340.
2. Избранные вопросы метрической теории динамических систем, *УМН*, **4 : 2** (30), (1949), 57—128.
3. О разложении динамической системы на транзитивные компоненты, *Матем. сб.*, **25** (67), (1949), 235—249.
4*. Об энтропии метрического автоморфизма, *ДАН СССР*, **124** (1959), 980—983.
5*. Об основных понятиях теории меры, *Матем. сб.*, **25** (67), (1949), 107—150.
6*. Новый прогресс в теории преобразований с инвариантной мерой, *УМН*, 15:4 (1960), 3—26.

Рубин и Стоун (Rubin H., Stone M. H.)
1. Postulates for generalizations of Hilbert space, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **4** (1953), 611—616.

Рудин (Rudin W.)
1. Analyticity and the maximum modulus principle, *Duke Math. J.*, **20**, (1953), 449—457.

Рутицкий Я. Б., см. Красносельский М. А.

Рутман М. А. см. Крейн М. Г. и Мильман Д. П.

Рутовиц (Rutovitz D.)
1. On the L_p-convergence of eigenfunction expansions, *Quart. J. Math. Oxford* (2) 7, (1956), 24—38.

Рыль-Нарджевский (Ryll-Nardzewski C.), см. также Хартман.
1. On the ergodic theorems, I, II.
I. Generalized ergodic theorems, *Studia Math.*, **12** (1951), 65—73.
II. Ergodic theory of continued fractions, там же, **12** (1951), 74—79.

Сакс (Saks S.), см. также Банах
1. Теория интеграла, М., ИЛ, 1949 (1937).
2. On some functionals, I, II.
I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **35** (1933), 549—556.
II. Там же, **41** (1937), 160—170.
3. Addition to the note on some functionals, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **35** (1933), 967—974.
4. Integration in abstract metric spaces, *Duke Math. J.*, **4** (1938), 408—411.
5. Sur les fonctionnelles de M. Banach et leurs applications aux développments de fonctions, *Fund. Math.*, **10** (1928), 189—196.

Сакс и Тамаркин (Saks S., Tamarkin J. D.)
1. On a theorem of Hahn-Steinhaus, *Ann. of Math.* (2) **34** (1933), 595—601.

Салем (Salem R.)
1. Sur une extension du théorème de convexité de M. Marcel Riesz, *Colloq. Math.*, **1** (1947), 6—8.

Салем и Зигмунд (Salem R., Zygmund A.)
1. A convexity theorem, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **34** (1948), 443—447.

Сан Хуан (San Juan R.)
1. Generalization of a theorem of Steinhaus on linear functionals, *Las Ciencias. Madrid*, **17**, no. 2, 205—208 (1952). *Math. Rev.*, **14** (1953), 657.

Сарджент (Sargent W. L. C.)
1. On linear functionals in spaces of conditionally integrable functions, *Quart. J. Math.*, Oxford. Ser. (2) **1** (1950), 288—298.

2. On some theorems of Hahn, Banach and Steinhaus, *J. London Math. Soc.*, 28 (1953), 438—451.

Сас (Szász O.), см. также Гильб

1. Über die Approximation stetiger Funktionen durch lineare Aggregate von Potenzen, *Math. Ann.*, 77 (1915—1916), 482—496.

Себаштьян-и-Сильва (Sebastião e Silva J.)

1. Integration and derivation in Banach spaces, *Univ. Lisboa. Revista Fac. Ci. A. Ci. Mat.* (2) **1** (1950), 117—166. Исправ. (1951) 401—402. *Math. Rev.*, **13** (1952), 45.
2. Analytic functions and functional analysis, *Portugaliae Math.*, **9** (1950), 1—130. *Math. Rev.* **11** (1950), 524.
3. Sui fondamenti della teoria dei funzionali analitici, *Portugaliae Math.*, **12** (1953), 1—47.

4*. Su certe classi di spazi locamente convessi importanti per le applicazioni, Rendiconti di matematica e della sue applicazioni, Roma (5), **14** (1955), 388—410. Есть русский перевод: *Математика*, **1 : 1** (1957), 60—77.

Секефальви-Надь (Sz.-Nagy, B. von), см. также Рисс

1. Sur les lattis linéaires de dimension finie, *Comm. Math. Helv.*, **17** (1945), 209—213.
2. Perturbations des transformations linéaires fermées, *Acta Sci. Math. Szeged*, **14** (1951), 125—137.
3. Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes. Ergebnisse der Math., V. 5. J. Springer, Berlin, 1942.
4. Perturbations des transformations autoadjointes dans l'espace de Hilbert, *Comment. Math. Helv.*, **19** (1946—1947), 347—366.
5. On the set of positive functions in L_2, *Ann. of Math.* (2), **39** (1938), 1—13.
6. On semi-groups of self-adjoint transformations in Hilbert space, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **24** (1938), 559—560.
7. On uniformly bounded linear transformations in Hilbert space, *Acta Sci. Math. Szeged*, **11** (1947), 152—157.
8. Sur les contractions de l'espace de Hilbert, *Acta Sci. Math. Szeged*, **15** (1953), 87—92 [ч. II, там же, **18** (1957), 1—14. Русский перевод: *Математика*, 3:6 (1959), 73—77 и 79—89.]
9. A moment problem for self-adjoint operators, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **3** (1952), 285—293.
10. Transformations de l'espace de Hilbert, founctions de type positif sur un groupe, *Acta Sci. Math. Szeged.*, **15** (1954), 104—114.
11. Prolongements des transformations de l'espace de Hilbert qui sortent de cet espace. Akad. Kiadó, Budapest, 1955 (приложение к Рисс и Секефальви-Надь [1]).
12. On a spectral problem of Atkinson, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 3 (1952), 61—66.
13. On the stability of the index of unbounded linear transformations, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **3** (1952), 49—52.
14. Über messbare Darstellungen Liescher Gruppen, *Math. Ann.*, **112** (1936), 286—296.
15. Expansion theorems of Paley — Wiener type, *Duke Math. J.*, **14** (1947), 975—978.

Сигал (Segal I. E.), см. также Данфорд

1. Postulates for general quantum mechanics, *Ann. of Math.* (2) **48** (1947), 930—948.
2. The group algebra of a locally compact group, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **61** (1947), 69—105.
3. The span of the translations of a function in a Lebesgue space, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **30** (1944), 165—169.

4. An extension of Plancherel's formula to separable unimodular groups, *Ann. of Math.* (2) **52** (1950), 272—292.
5. Decompositions of operator algebras, I, II. *Memoirs Amer. Math. Soc.* no. 9 (1951).
6. Invariant measures on locally compact spaces, *J. Indian Math. Soc.* (*N. S.*), **13** (1949), 105—130.

Сикорский (Sikorski R.)
1. On multiplication of determinants in Banach spaces, *Bull. Acad. Polon. Sci. Cl.* III, **1** (1953), 219—221.
2. On Leżański's determinants of linear equations in Banach spaces, *Studia Math.*, **14** (1953), 24—48.

Сильва Диас (da Silvas Dias C. L.).
1. Topological vector spaces and their application in analytic functional spaces, *Bol. Soc. Mat. São Paulo*, **5** (1950), (1952). 1—58. *Math. Rev.*, **13** (1952), 249.

Сильвермен (Silverman R. J.)
1. Invariant linear functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **81** (1956), 411—424.

Сильвестер (Sylvester J. J.)
1. On the equation to the secular inequalities in the planetary theory, *Phil. Mag.*, **16** (1883), 267—269.
2. Sur les puissances et les racines de substitutions linéaires, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **94** (1882), 55—59.

Синай Я. Г.
1*. О понятии энтропии динамической системы, *ДАН СССР*, **124** (1959), 768—771.
2*. О потоках с конечной энтропией, *ДАН СССР*, **125** (1959), 1200—1202.

Сингер и Уэрмер (Singer I. M., Wermer J.)
1. Derivations on commutative normed algebras, *Math. Ann.*, **129** (1955), 260—264.

Сирвинт Ю. Ф.
1. Об интегральных преобразованиях пространства *L*, *ДАН СССР*, **18** (1938), 255—257.
2. Слабая компактность в банаховых пространствах, *ДАН СССР*, **28** (1940), 199—201.
3. Weak compactness in Banach spaces, *Studia Math.*, **11** (1950), 71—94.

Сирота (Shirota T.)
1. A generalization of a theorem of I. Kaplansky, *Osaka Math. J.*, **4** (1952), 121—132.

Сирс (Sears D. B.)
1. On the solutions of a linear second order differential equation which are of integrable square, *J. London Math. Soc.*, **24** (1949), 207—215.
2. Note on the uniqueness of Green's functions associated with certain differential equations, *Canadian J. Math.*, **2** (1950), 314—325.
3. On the spectrum of a certain differential equation, *J. London Math. Soc.*, **26** (1951), 205—210.
4. An expansion in eigenfunctions, *Proc. London Math. Soc.* (2) **53** (1951), 396—421.
5. Some properties of a differential equation, *J. London Math. Soc.*, **27** (1952), 180—188.
6. Integral transforms and eigenfunction theory, *Quart. J. Math. Oxford* (2) **5** (1954), 47—58.
7. Some properties of a differential equation, *J. London Math. Soc.*, **29** (1954), 354—366.

Сирс и Титчмарш (Sears D. B., Titchmarsh E. C.)
1. Some eigenfunction formulae, *Quart. J. Math. Oxford* (2) **1** (1950), 165—175.

С к о р о х о д А. В., см. К о с т ю ч е н к о
С л о б о д я н с к и й М. Г.
1. Об оценке для собственных значений оператора, *Прикл. матем. и мех.*, **19** (1955), 295—314.
С м а й л и (S m i l e y M. F.)
1. A remark on S. Kakutani's characterization of (L)-spaces, *Ann. of Math.* (2) **43** (1942), 528—529.
С м и т (S m i t h K. T.), см. также А р о н ш а й н и Д о н о г ю
1. Sur le théorème spectral, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **234** (1952), 1024—1025.
С м и т и с (S m i t h i e s F.)
1. The Fredholm theory of integral equations, *Duke Math. J.*, **8** (1941), 107—130.
2. A note on completely continuous transformations, *Ann. of Math.* (2) **38** (1937), 626—630.
С о б о л е в С. Л.
1. Уравнения математической физики, Гостехиздат, М.— Л., 1954.
2. Об одной теореме функционального анализа, *Матем. сб.*, **4** (46), (1938), 471—498.
3*. Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Л., 1950.
С о б ч и к (S o b c z y k A.), см. также Б о н е н б л у с т
1. Projections in Minkowski and Banach spaces, *Duke Math. J.*, **8** (1941), 78—106.
2. Projection of the space (m) on its subspace (c_0), *Bull. Amer. Math. Soc.*, **47** (1941), 938—947.
3. On the extension of linear transformations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **55** (1944), 153—169.
С о л о м я к М. З.
1. О собственных числах и собственных векторах возмущенного оператора, *ДАН СССР*, **90** (1953), 29—32.
С о н и н Н. Я.
1. Recherches sur les fonctions cylindriques et le developpement des fonctions continues en séries, *Math. Ann.*, **16** (1880), 1—80.
С п а р р е А н д е р с е н и Й е с с е н (S p a r r e A n d e r s e n E., J e s s e n B.)
1. Some limit theorems on integrals in an abstract set, *Danske Vid. Selsk. Math.-Fys. Medd.*, **22**, No. 14 (1946).
2. On the introduction of measures in infinite product sets, *Danske Vid. Selsk. Math.-Fys. Medd.*, **25**, No. 4 (1948).
С п р а г е н с (S p r a g e n s W. H.)
1. On series of Walsh eigenfunctions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **2** (1951), 202—204.
С т а ш е в с к а я В. В.
1. Об обратных задачах спектрального анализа для одного класса дифференциальных уравнений, *ДАН СССР*, **93** (1953), 409—411.
С т е й н б е р г (S t e i n b e r g H.)
1. Diffusion processes with absorption. Thesis, Yale Univ., 1954.
С т е к л о в В. А.
1. Sur les expressions asymptotiques de certaines fonctions définies par des équations différentielles linéaires du deuxième ordre, et leurs applications au problème du développement d'une fonction arbitraire en séries procédant suivant les dites fonctions, Харьков, *Сообщения Матем. об-ва* (2) **10** (2—6) (1907—1909), 97—199.
С т е п а н о в В. В.
1. Sur une extension dun théorème ergodique, *Compositio Math.*, **3** (1936), 239—253.

С т и в е н с о н и Б а с с а л и (S t e v e n s o n A. F., B a s s a l i W. A.)

1. On the possible forms of differential equation which can be factorized by the Schrödinger-Infeld method, *Canad. J. Math.*, **4** (1952), 385—395.

С т и л ь т ь е с (S t i l t j e s T. J.)

1. Recherches sur les fractions continues, *Ann. Fac. Sci. Toulouse* (1) 8, J. (1894), 1—22.

С т о к с (S t o k e s G. G.)

1. On the critical values of the sums of periodic series, *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, 8 (1849), 533—583.

С т о у н (S t o n e M. H.), см. также Р у б и н, Л е н ь е л ь, Д а н ф о р д

1. Applications of the theory of Boolean rings to general topology, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **41** (1937), 375—481.
2. Convexity. Mimeographed lecture notes, The University of Chicago, 1946.
3. Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis. Amer. Math. Soc. Colloquium Pub., vol. 15, New York, 1932.
4. The generalized Weierstrass approximation theorem, *Math. Mag.*, **21** (1947—1948), 167—184, 237—254.
5. On the compactification of topological spaces, *Ann. de la Soc. Polon. de Math.*, **21** (1948), 153—160.
6. Notes on integration, I—IV.
   I. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **34** (1948), 336—342.
   II. Там же, **34** (1948), 447—455.
   III. Там же, **34** (1948), 483—490.
   IV. Там же, **35** (1949), 50—58.
7. A general theory of spectra, I, II.
   I. *Proc. Nat. Acad. USA*, **26** (1940), 280—283.
   II. Там же, 27 (1941), 83—87.
8. Boundedness properties in function-lattices, *Canad. J. Math.*, **1** (1949), 176—186.
9. The theory of representations for Boolean algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **40** (1936), 37—111.
10. Linear transformations in Hilbert space, I—III.
    I. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **15** (1929), 198—200.
    II. Там же, **15** (1929), 423—425.
    III. Там же, **16** (1930), 172—175.
11. On the theorem of Gelfand-Mazur, *Ann. Soc. Polon. Math.*, **25** (1952), 238—240 (1953).
12. On the foundations of harmonic analysis, *Proc. Roy. Physiog. Soc. Lund*, **21**, no. 17 (1952), 152—172.
13. On unbounded operators in Hilbert space, *J. Indian Math. Soc.* (*N.S.*), **15** (1951), 155—192, (1952).
14. On a theorem of Pólya, *J. Indian Math. Soc.* (*N.S.*), **12** (1948), 1—7.
15. The algebraization of harmonic analysis, *Math. Student*, **17** (1949), 81—92.
16. On one-parameter unitary groups in Hilbert space, *Ann. of Math.* (2) **33** (1932), 643—648.
17. Certain integrals analogous to Fourier integrals, *Math. Zeit.*, **28** (1928), 654—676.
18. An unusual type of expansion problem, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **26** (1924), 335—355.
19. A comparison of the series of Fourier and Birkhoff, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 28 (1926), 695—761.
20. Irregular differential systems of order two and the related expansion problem, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **29** (1927), 23—53.
21. The expansion problems associated with regular differential systems of the second order, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **29** (1927), 826—844.

Стюарт (Stewart F. M.)
1. Integration in noncommutative systems, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **68** (1950), 76—104.

Суноути Г. (Sunouchi G.), см. также Идзуми
1. On the sequence of additive set functions, *J. Math. Soc. Japan*, **3** (1951), 290—295.

Суноути Х. (Sunouchi H.)
1. On integral representations of bilinear functionals, *Proc. Japan Acad.*, **27** (1951), 159—161.

Суноути С. (Sunouchi S.), см. Накамура

Сухомлинов Г. А.
1. О продолжении линейных функционалов в комплексном и кватернионном линейном пространстве, *Матем. Сб.*, **3** (45), 353—358 (1938).

Тагамлицкий (Tagamlitzki Y.)
1. Sur quelques applications de la théorie générale des espaces vectoriels partiellement ordonnés, *Annuaire* (*Godišnik*) *Fac. Sci. Phys. Math.*, *Univ. Sofia*, Livre, **1**, Partie II, **45** (1949), 263—286.
2. Zur Geometrie des Kegels in den Hilbertschen Räumen, *Annuaire* (*Godišnik*) *Fac. Sci. Phys. Math.*, *Univ. Sofia*, Livre, **1**, Partie II, **47** (1952), 85—107.

Такахаси (Takahashi T.)
1. On the compactness of the function-set by the convergence in mean of general type, *Studia Math.*, **5** (1934), 141—150.

Талдыкин А. Т.
1. О линейных уравнениях в гильбертовом пространстве, *Матем. сб.*, **29** (71), (1951), 529—550; Исправ. там же, **30** (75), (1952), 463.

Тамаркин (Tamarkin J. D.), см. также Данфорд, Сакс, Хилле, Шохат.
1. On the compactness of the space L_p, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **38** (1932), 79—84.
2. Sur quelques points de la théorie des équations différentielles linéaires ordinaires et sur la généralisation de la série de Fourier, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **24** (1912), 345—382.
3. Some general problems of the theory of ordinary linear differential equations and expansions of an arbitrary function in a series of fundamental functions, *Math. Zeit.*, **27** (1927), 1—54.

Тамаркин и Зигмунд (Tamarkin J. D., Zygmund A.)
1. Proof of a theorem of Thorin, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **50** (1944), 279—282.

Тейлор (Taylor A. E.), см. также Бохнер.
1. The extension of linear functionals, *Duke Math. J.*, **5** (1939), 538—547
2. The weak topologies of Banach spaces, *Revista Ci.*, *Lima*, **42** (1940), 355—366; **43** (1941), 465—474; **44** (1942), 45—63.
3. The weak topologies of Banach spaces, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **25** (1939), 438—440.
4. On certain Banach spaces whose elements are analytic functions, *Actas Acad. Ci. Lima*, **12** (1949), 31—43.
5. Weak convergence in the space H^p, *Duke Math. J.*, **17** (1950), 409—418.
6. New proofs of some theorems of Hardy by Banach space methods, *Math. Mag.*, **23** (1950), 115—124.
7. Banach spaces of functions analytic in the unit circle, I, II.
I. *Studia Math.*, **11** (1950), 145—170.
II. Там же, **12** (1951), 25—50.
8. Conjugations of complex linear spaces, *Univ. California Publ. Math.* (*N. S.*) **2** (1944), 85—102.
9. Spectral theory of unbounded closed operators. Proc. Symposium on Spectral Theory and Differential Problems (1951), 267—275. Oklahoma Agricultural and Mechanical College, Stillwater, Oklahoma.

10. Analysis in complex Banach spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **49** (1943), 652—669.
11. Spectral theory of closed distributive operators, *Acta Math.*, **84** (1951), 189—224.
12. The resolvent of a closed transformation, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **44** (1938), 70—74.
13. Linear operations which depend analytically upon a parameter, *Ann. of Math.* (2) **39** (1938), 574—593.
14. A note on unconditional convergence, *Studia Math.*, 8 (1939), 148—153.

Тейлор и Халбери (Taylor A. E., Halbury C. J. A.)
1*. General theorems about a bounded linear operator and its conjugate, *J. reine ang. Math.*, **198** (1957), 93—111.
Есть русский перевод: *Матем.*, **3 : 1** (1959), 69—89.

Тейхмюллер (Teichmüller O.)
1. Braucht der Algebraiker das Auswahlaxiom? *Deutsche Math.*, **4** (1939), 567—577.
2. Operatoren im Wachsschen Raum, *J. Reine Angew. Math.*, **174** (1935), 73—124.

Темпль (Temple G.)
1. The computation of characteristic numbers and characteristic functions, *Proc. London Math. Soc.* (2) **29** (1929), 257—280.

Теплиц (Toeplitz O.), см. также Хеллингер и Кёте
1. Die linearen vollkommenen Räume der Funktiontheorie, *Comment. Math. Helv.*, **23** (1949), 222—242.
2. Über allgemeine lineare Mittelbildungen, *Prace Math.-Fiz.*, **22** (1911), 113—119.

Тингли (Tingley A. J.)
1. A generalization of the Poisson formula for the solution of the heat flow equation, Dissertation. Univ. of Minnesota, 1952.

Титов Н. С.
1. Различные виды сходимости элементов и линейных операторов в банаховских пространствах, *ДАН СССР*, **52** (1946), 573—576.
2. К вопросу о различных видах сходимости элементов и линейных операторов в банаховских пространствах, *УМН*, **1**, вып. 5—6, (1946), 15—16.

Титчмарш (Titchmarsh E. C.), см. также Сирс.
1. Теория функций, М., Гостехиздат, 1951 (1932).
2. Some theorems of perturbation theory, I—IV.
I. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A*, **200** (1949), 34—46.
II. Там же, **201** (1950), 473—479.
III. Там же, **207** (1951), 321—328.
IV. Там же, **210** (1951), 30—47.
3. Введение в теорию интегралов Фурье, М.— Л., Гостехиздат, 1948 (1937).
4. Weber's integral theorem, *Proc. Lond. Math. Soc.* (2) **22**, (1923), 15—28.
5. On expansion in eigenvalues, I—VIII.
I. *Proc. Lond. Math. Soc.*, **14** (1939), 274—278.
II. *Quart. J. Math. Oxford*, **11** (1940), 129—140.
III. Там же, **11** (1940), 141—145.
IV. Там же, **12** (1941), 33—50.
V. Там же, **12** (1941), 89—107.
VI. Там же, **12** (1941), 154—166.
VII. Там же, **16** (1945), 103—114.
VIII. Там же, **16** (1945), 115—128.
6. An eigenfunction problem occuring in quantum mechanics, *Quart. J. Math. Oxford*, **13** (1942), 1—10.

7. On the eigenvalues of differential equations, *J. London Math. Soc.*, **19** (1944), 66—68.
8. On the discreteness of the spectrum associated with certain differential equations, *Ann. Math. Pura Appl.* (4) **28**, (1949), 141—147.
9. On the uniqueness of Green's function associated with a second order differential operator, *Canadian J. Math.*, **1** (1949), 191—198.
10. Eigenfunction problems with periodic potentials, *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A*, **203** (1950), 501—514.
11. On the discreteness of spectra of differential equations, *Acta Sci. Math. Szeged* 12 Pars B (1950), 16—18.
12. On the summability of eigenfunction expansions, *Quart. J. Math. Oxford* (2) **2** (1951), 250—268.
13. Travaux récents sur la théorie des fonctions charactéristiques, *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège*, **20** (1951), 543—561.
14. On the convergence of eigenfunction expansions, *Quart. J. Math. Oxford* (2), **3** (1952), 139—144.
15. Some properties of eigenfunction expansions, *Quart. J. Math. Oxford* (2) 5 (1954), 59—70.
16. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями 2-го порядка, ч. 1, М., ИЛ., 1960, ч. II, М., ИЛ, 1961 (1948).

Тихонов А. Н,
1. Ein Fixpunktsatz, *Math. Ann.*, **111** (1935), 767—776.

Томас (Thomas J.)
1. Untersuchungen über das Eigenwertproblem

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)\frac{dy}{dx}\right)+\lambda g(x)\,y=0,\quad \int_a^b A(x)\,y(x)\,dx=\int_a^b B(x)\,y(x)\,dx]=0,$$

Math. Nachr., **6** (1951), 229—261.

Томита (Tomita M.)
1. On the regularly convex hull of a set in a conjugate Banach space, *Math. J. Okayama Univ.*, **3** (1954), 143—145.

Торин (Thorin G. O.)
1. Convexity theorems, *Comm. Sém. Math. Univ. Lund.*, no. 9, 1948.
2. An extension of convexity theorem due to M. Riesz, *Comm. Sém. Math. Univ. Lund.*, no. 4, 1939.
3*. Convexity theorems, These University of Lund, 1948.
Есть русский перевод: *Математика*, **1 : 3** (1957), 41—78.

Торнхейм (Tornheim L.)
1. Normed fields over the real and complex fields, *Michigan Math. J.*, **1** (1952), 61—68.

Трансю (Transue W.), см. Морс М.

Тулайков (Tulajkov A.)
1. Zur Kompaktheit im Raum L_p für $p = 1$, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl.* (1933), 167—170.

Тьюки (Tukey J. W.)
1. Some notes on the separation of convex sets, *Portugaliae Math.*, **3** (1942), 95—102.

Уайберн Дж. (Whyburn G. T.)
1. Analytic topology. Amer. Math. Soc. Colloq. Pub., vol. 28, New York, 1942.
2. Open mappings on locally compact spaces, *Mem. Amer. Math. Soc.*, no. 1, New York, 1950.

Уайберн У. (Whyburn W. M.)
1. Differential equations with general boundary conditions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **48** (1942), 692—704.

Уайлдер С. (Wilder C. E.)
1. Expansion problems of ordinary linear differential equations with auxiliary conditions at more than two points, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **18** (1917), 415—442.
2. Problems in the theory of ordinary linear differential equations with auxiliary conditions at more than two points, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **19** (1918), 157—186.

Уайлдер Р. (Wilder R. L.)
1. Introduction to the foundations of mathematics. Wiley, New York, 1952.

Уиддер (Widder D. V.), см. также Хиршман
1. The Laplace transform. Princeton Univ. Press, Princeton, 1941.
2. Inversion formulas for convolution transforms, *Duke Math. J.*, **14** (1947), 217—249.
3. The convolution transform, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **60** (1954), 444—456.

Уиддер и Хиршман (Widder D. V., Hirschman I. I.)
1. The inversion of a general class of convolution transforms, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **66** (1949), 135—201.
2. A representation theory for a general class of convolution transforms, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **67** (1949), 69—97.
3. Convolution transforms with complex kernels, *Pacific J. Math.*, **1** (1951), 211—225.

Уилкинз (Wilkins J. E., Jr.)
1. Definitely self-conjugate adjoint integral equations, *Duke Math. J* **11** (1944), 155—166.

Уинтнер (Wintner A.), см. также Винер и Хартман
1. Spectraltheorie der unendlichen Matrizen. Hirzel, Leipzig, 1929.
2. Zur Theorie der beschränkten Bilinearformen, *Math. Z.*, **30** (1929), 228—289.
3. The unboundedness of quantum-mechanical matrices, *Physical Rev.*, **71** (1947), 738—739.
4. (L_2)-connections between the kinetic and potential energies of linear systems, *Amer. J. Math.*, **69** (1947), 5—13.
5. On the Laplace-Fourier transcendents occurring in mathematical physics, *Amer. J. Math.*, **69** (1947), 87—98.
6. Asymptotic integrations of the adiabatic oscillator, *Amer. J. Math.*, **69** (1947), 251—272.
7. Stability and high frequency, *J. Appl. Physics*, **18** (1947), 941—942.
8. Stability and spectrum in the wave mechanics of lattices, *Phys. Rev.*, **72** (1947), 81—82.
9. On the normalization of charateristic differentials in continuous spectra, *Phys. Rev.*, **72** (1947), 516—517.
10. O the location of continuous spectra, *Amer. J. Math.*, **70** (1948), 22—30.
11. Asymptotic integrations of the adiabatic oscillator in its hyperbolic range, *Duke Math. J.*, **15** (1948), 55—67.
12. On Dirac's theory of continuous spectra, *Phys. Rev.*, **73** (1948), 781—785.
13. A new criterion for non-oscillatory differential equations, *Quart. Appl. Math.*, **6** (1948), 183—185.
14. A criterion of oscillatory stability, *Quart. Appl. Math.*, **7** (1949), 115—117.
15. A priori Laplace transformation of linear differential equations, *Amer. J. Math.*, **71** (1949), 587—594.
16. On almost free linear motions, *Amer. J. Math.*, **71** (1949), 595—602.
17. On the smallness of isolated eigenfunctions, *Amer. J. Math.*, **71** (1949), 603—611.

18. A criterion for the non-existence of L_2-solutions of a non-oscillatory differential equation, *J. London Math. Soc.*, **25** (1950), 347—351.
19. On the non-existence of conjugate points, *Amer. J. Math.*, **73** (1951), 368—380.
20. On linear instability, *Quart. Appl. Math.*, **13** (1955), 192—195.

Уитни (Whitney H.)
1. On ideals of differentiable functions, *Amer. J. Math.*, **70** (1948), 635—658.

Улам (Ulam S.), см. Мазур и Окстоби.

Умегаки (Umegaki), см. Накамура

Уоллах (Wallach S.)
1. On the location of spectra of differential equations, *Amer. J. Math.* **70** (1948), 833—841.
2. The spectra of periodic potentials, *Amer. J. Math.*, **70** (1948), 842—848.

Уолтерс (Walters S. S.)
1. The space H^p with $0 < p < 1$, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **1** (1950), 800—805
2. Remarks on the space H^p, *Pacific. J. Math.*, **1** (1951), 455—471.

Уолш (Walsh J. L.)
1. On the convergence of the Sturm-Liouville series, *Ann. of Math.* (2) **24** (1923), 109—120.
2. Über die Entwicklung einer analytischen Funktion nach Polynomen, *Math. Ann.*, **96** (1926), 430—436.
3. Über die Entwicklung einer Funktion einer komplexen Veränderlichen nach Polynomen, *Math. Ann.*, **96** (1926), 437—450.
4. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области М., ИЛ, 1961 (1935).

Уорд (Ward L. E.)
1. A third order irregular boundary value problem and the associated series, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **34** (1932), 417—434.

Уэрмер (Wermer J.) См. также Сингер
1. The existence of invariant subspaces, *Duke Math. J.*, **19** (1952), 615—622.
2. Invariant subspaces of bounded operators. Proc. XII Scand. Math. Congress, Lund (1953).
3. Commuting spectral measures on Hilbert space, *Pacific J. Math.*, **4** (1954), 355—361.
4. On invariant subspaces of normal operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **3** (1952), 270—277.
5. On restrictions of operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **4** (1953), 860—865.
6. On algebras of continuous functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **4** (1953), 866—869.
7. On a class of normed rings, *Arkiv. för Mat.*, **2** (1953), 537—551.
8. Ideals in a class of commutative Banach algebras, *Duke Math. J.*, **20** (1953), 273—278.
9. Algebras with two generators, *Amer. J. Math.*, **76** (1954), 853—859.
10. Subalgebras of the algebra of all continuous complex-valued functions on the circle, *Amer. J. Math.*, 78 (1956), 225—242.
11. Polynomial approximation on an arc in C^3, *Ann. of Math.* (2) 62 (1955), 269—270.

Фаге М. К.
1. О симметричности и симметризуемости функции влияния, *Матем сб.*, **32** (74), (1953), 345—352.
2. Характеристическая функция одноточечной краевой задачи для обыкновенного линейного дифференциального уравнения второго порядка, *ДАН СССР*, 96, (1954), 929—932.

Фантапье (Fantappiè L.)
1. La teoria dei funzionali analitici, le sue applicazioni e i suoi possibili indirizzi, *Reale Accademia d'Italia, Fondazion Alessandro Volta, Atti dei Convegni.*, 9 (1939), 223—279, Rome, 1943.

2. L'analisi funzionale nel campo complesso e i nuovi metodi d'integrazione delle equazioni a derivate parziali, *Rivista Mat. Univ. Parma*, **1** (1950), 117—120.
3. Le calcul des matrices, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **186** (1928), 619—621.

Фань Ку (Fan K.), см. также Бохнер
1. Le prolongement des fonctionnelles continues sur un espace semi-ordonné, *Rev. Sci.*, **52** (1944), 131—139.
2. Partially ordered additive groups of continuous functions, *Ann. of Math.* (2) **51** (1950), 409—427.
3. Maximum properties and inequalities for the eigenvalues of completely continuous operators, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **37** (1951), 760—766.
4. Les fonctions définies-positives et les fonctions complètement monotones. Gauthier-Villars, Paris, 1950.
5. On a theorem of Weyl concerning eigenvalues of linear transformations I. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, **35**, 652—655 (1949). II; там же, **36** (1950), 31—35.

Фарнель (Farnell A. B.)
1. Limits for the characteristic roots of a matrix, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **50** (1944), 789—794.

Фейган, см. Камерон

Фейнман (Feynmann R. P.)
1. Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics, *Rev. Mod. Phys.*, **20**, no. 2 (1948), 367—387.
(Есть русский перевод в сборнике «Вопросы причинности в квантовой механике». М., 1955.)

Фелл и Келли (Fell J. M. G., Kelly J. L.)
1. An algebra of unbounded operators, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **38** (1952), 592—598.

Феллер (Feller W.)
1. Semi-groups of transformations in general weak topologies, *Ann. of Math.* (2) **57** (1953), 287—308.
2. On the generation of unbounded semi-groups of bounded linear operators, *Ann. of Math.* (2) **58** (1953), 166—174.
3. On positivity preserving semi-groups of transformations on $C[r_1, r_2]$, *Ann. Soc. Polon. Math.*, **25** (1952), 85—94 (1953).
4. Diffusion processes in one dimension, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **77** (1954), 1—31. (Есть русский перевод: *Математика*, **2 : 2** (1958), 119—146).
5. The parabolic differential equation and the associated semigroup of transformations, *Ann. of Math.* (2) **55** (1952), 468—519.
(Есть русский перевод: *Математика*, **1 : 4** (1957), 105—153.)
6. On second order differential operators, *Ann. of Math.* (2) **61**, (1955), 90—105.
7. On differential operators and boundary conditions, *Comm. Pure Appl. Math.*, 8 (1955), 203—216.
8*. On equation of the vibrating string, *J. Math. and Mech.*, 8 № 3 (1959), 339—348.

Фёльнер (Følner E.), см. Бор

Фенхель (Fenchel W.), см. Боннезен

Ферес (Veress P.)
1. Über kompakte Funktionenmengen und Bairecshe Klassen, *Fund. Math.*, **7** (1925), 244—249.
2. Über Funktionenmengen, *Acta Math. Sci. Szeged.*, **3** (1927), 177—192.

Фиккен (Ficken F. A.)
1. Note on the existence of scalar products in normed linear spaces, *Ann. of Math.* (2) **45**, 362—366 (1944).

Ф и л л и п с (P h i l l i p s R. S.), см. также Б о х н е р
1. On weakly compact subsets of a Banach space, *Amer. J. Math.*, **65** (1943), 108—136.
2. A characterization of Euclidean spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **46** (1940), 930—933.
3. On linear transformations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 48 (1940), 516—541.
4. A note on ergodic theory, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **2** (1951), 662—669.
5. Spectral theory for semi-groups of linear operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **71** (1951), 393—415.
6. Perturbation theory for semi-groups of linear operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **74** (1953), 199—221.
7. Integration in a convex linear topological space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **47** (1940), 114—145.
8. On one parameter semi-groups of linear transformations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **2** (1951), 234—237.
9. Semi-groups of operators, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **61** (1955), 16—33.
10. An inversion formula for Laplace transforms and semi-groups of linear operators, *Ann. Math.* (2), **59** (1954), 325—356.
11. The adjoint semi-group, *Pacific J. Math.*, **5** (1955), 269—283.
12. A decomposition of additive set functions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **46** (1940), 274—277.
13. Linear ordinary differential operators of the second order, *Div. Electromag. Res.*, *Inst. Math. Sci.*, New York Univ., 1952.

Ф и х т е н г о л ь ц Г. М.
1. Sur les fonctionnelles linéaires, continues au sens généralisé, *Матем. сб.*, **4** (46), (1938), 193—214.
2. Sur une classe d'opérations fonctionnelles lunéaires, *Матем. сб.*, **4** (46) (1938), 215—226.
3. Sur les opérations linéaires dans l'espace des fonctions continues, *Bull. Acad. Sci Roy. Belg.*, (5), **22** (1936), 26—33.

Ф и х т е н г о л ь ц Г. М. и К а н т о р о в и ч Л. В.
1. Sur les opérations linéaires dans l'espace des fonctions bornées, *Studia Math.*, **5** (1934), 69—98.
2. Некоторые теоремы о линейных функционалах, *ДАН СССР*, **3**, 307—312 (1934).

Ф и ш е л (F i s h e l B.)
1. The continuous spectra of certain differential equations, *J. London Math. Soc.*, **27** (1952), 175—180.

Ф и ш е р К. (F i s c h e r C. A.)
1. Necessary and sufficient conditions that a linear transformation be completely continuous, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **27** (1920), 10—17.
2. Linear functionals of N-spreads, *Ann. of Math.* (2) **19** (1917—1918), 37—43.

Ф и ш е р Э. (F i s c h e r E.)
1. Sur la convergence en moyenne, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **144** (1907), 1022—1024.
2. Applications d'un théorème sur la convergence en moyenne, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **144** (1907), 1148—1151.

Ф л е й ш е р (F l e i s c h e r I.)
1. Sur les espaces normés non-archimédiens, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A.*, **57** (1954), 165—168.

Ф о м и н С. В., см. К о л м о г о р о в А. Н.
Ф о р д (F o r d G. C.), см. М и ш о у
Ф о р т (F o r t M. K., Jr.)
1. Essential and nonessential fixed points, *Amer. J. Math.*, **72** (1950), 315—322.

Форте (Fortet R.)
1. Remarques sur les espaces uniformément convexes, *C. R. Acad. Sci., Paris*, **210** (1940), 497—499.
2. Remarques sur les espaces uniformément convexes, *Bull. Soc. Math. France*, 69 (1941), 23—46.
3. Les systèmes d'équations linéaires dans les espaces uniformément convexes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **211** (1940), 422—423.
4. Les fonctions aleatoires du type Markoff associées à certaines équations linéaires aux derivées partielles du type parabolique, *J. Math. Pures Appl.*, **22** (1954), 177—243.

Фредгольм (Fredholm I.)
1. Sur une classe d'équations fonctionnelles, *Acta Math.*, **27** (1903), 365—390.

Фрейденталь (Freudenthal H.)
1. Teilweise geordnete Moduln, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.*, **39** (1936), 641—651.
2. Einige Sätze über topologische Gruppen, *Ann. of Math.* (2) **37** (1936), 46—56.
3. Über die Friedrichssche Fortsetzung halbbeschränkter Hermitescher Operatoren, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.*, **39** (1936), 832—833.

Фреше (Fréchet M.)
1. Sur quelques points du calcul fonctionnel, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **22** (1906), 1—74.
2. Les espaces abstraits topologiquement affines, *Acta Math.*, **47** (1926), 25—52.
3. Les espaces abstraits. Gauthier-Villars, Paris, 1928.
4. Sur les ensembles de fonctions et les opérations linèaires, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **144** (1907), 1414—1416.
5. Sur les opérations linéaires, I—III.
   I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **5** (1904), 493—499.
   II. Там же, 6 (1905), 134—140.
   III. Там же, 8 (1907), 433—446.
6. Sur les ensemble compacts de fonctions mesurables, *Fund. Math.*, **9** (1927), 25—32.
7. Sur les ensembles compacts de fonctions de carrés sommables, *Acta Sci. Math. Szeged*, 8 (1937), 116—126.
8. Sur divers modes de convergence d'une suite de fonctions d'une variable, *Bull. Calcutta Math. Soc.*, **11** (1919—1920), 187—206.
9. Essai de géométrie analytique a une infinité de coordonnées, *Nouvelles Ann. de Math.* (4) 8 (1908), 97—116, 289—317.
10. Sur les fonctionnelles bilinéaires, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **16** (1915), 215—234.

Фридман Б. и Мишоу (Friedman B. and Mishoe L. I.)
1. Eigenfunction expansions associated with a non-self adjoint differential equation, *Pacific J. Math.*, **6** (1956), 249—270.

Фридман М. (Friedman M. D.)
1. Determination of eigenvalues using a generalized Laplace transform, *J. Appl. Phys.*, **21** (1950), 1333—1337.

Фридрихс (Friedrichs K. O.)
1. Über die Spektralzerlegung eines Integraloperators, *Math. Ann.*, **115** (1938), 249—272.
2. On the perturbation of continuous spectra, *Comm. Pure Appl. Math.*, **1** (1948), 361—406.
3. Spectraltheorie halbbeschränkter Operatoren, I—III.
   I. Math. Ann., **109** (1934), 465—487.
   II. Там же, **109** (1934), 685—713.
   III. Там же, **110** (1935), 777—779.
4. Beiträge zur Theorie der Spektralschar, *Math. Ann.*, **110** (1935), 54—62.

5. Über die ausgezeichnete Randbedingung in der Spektraltheorie der halbbeschränkten gewöhnlichen Differentialoperatoren zweiter Ordnung, *Math. Ann.*, **112** (1935), 1—23.
6. On differential operators in Hilbert space, *Amer. J. Math.*, **61** (1939), 523—544.
7. Spektraltheorie linearer Differentialoperatoren, *Jber. Deutsch. Math. Verein.*, **45** (1935), 181—193.
8. Die unitären Invarianten selbstadjugierter Operatoren im Hilbertschen Raum, *Jber. Deutsch. Math. Verein.*, **45** (1935), 79—82.
9. The identity of weak and strong extensions of differential operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **55** (1944), 132—151.
10. Criteria for discrete spectra, *Comm. Pure Appl. Math.*, **3** (1950), 439—449.
11. Functional analysis and applications. Inst. Math. Sci., New York Univ., New York, 1956.
12. Criteria for the discrete character of the spectra of ordinary differential operators. Courant Anniversary Volume, 145—160, Interscience Pub., 1948.
13. Spectral representation of linear operators. Inst. Math. Sci., New York Univ., 1953.
14. Symmetric hyperbolic linear differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, **7** (1954), 345—392.
15. Differentiability of solutions of linear elliptic differential operators, *Comm. Pure Appl. Math.*, **6** (1953), 299—326.
16. Mathematical aspects of the quantum theory of fields. Interscience Pub., New York and London, 1953.

Фринк (Frink O., Jr.)
1. Series expansions in linear vector spaces, *Amer. J. Math.*, **63** (1941), 87—100.

Фробениус (Frobenius G.)
1. Über lineare Substitutionen und bilineare Formen, *J. Reine Angew. Math.*, 84 (1878), 1—63.
2. Über die schiefe Invariante einer billinearen oder quadratischen Formen, *J. Reine Angew. Math.*, **86** (1879), 44—71
3. Über die cogredienten Transformationen der bilinearen Formen. *Sitzungsberichte der K. Preuss. Akad. der Wiss. zu Berlin* (1896), 7—16.

Фуглид (Fuglede B.)
1. A commutativity theorem for normal operators, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **36** (1950), 35—40.

Фукамия (Fukamiya M.), см. также Иосида
1. On dominated ergodic theorem in L_p ($p \geqslant 1$), *Tôhoku Math. J.*, **46** (1939), 150—153.
2. On B^*-algebras, *Proc. Japan Acad.*, **27**, 321—327 (1951).
3. On a theorem of Gelfand and Neumark and the B^*-algebra, *Kumamoto, J. Sci. Ser A.*, **1**, no. 1, 17—22 (1952).

Фукс (Fuchs L.)
1. Über Relationen, welche für die zwischen je zwei singulären Punkten erstreckten Integrale der Lösungen linearer Differentialgleichungen stattfinden, *J. Reine Angew. Math.*, 76, (1873) 177—213.

Фукухара (Hukuhara M.)
1. Sur l'existence des points invariants d'une transformation dans l'espace fonctionnel, *Jap. J. Math.*, **20** (1950), 1—4.

Фуллертон (Fullerton R. E.)
1. On a semi-group of subsets of a linear space, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **1** (1950), 440—442.
2. Linear operators with range in a space of differentiable functions, *Duke Math. J.*, **13** (1946), 269—280.

3. The representations of linear operators from L^p to L, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 5 (1954), 689—696.
4. An inequality for linear operators between L^p spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.* 6 (1955), 186—190.
5. A characterization of L spaces, *Fund. Math.*, 38 (1951), 127—136.

Хаар (Haar A.)
1. Der Massbegriff in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen, *Ann. of Math.* (2) **34** (1933), 147—169.
2. Über die Multiplikationstabelle der orthogonalen Funktionensysteme, *Math. Zeit*, **41** (1930), 769—798.
3. Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme, I, II.
I. *Math. Ann.*, 69 (1910), 331—371.
II. Там же, **71** (1911), 38—53.

Хажинский (Charzyński Z.)
1. Sur les transformations isométriques des espaces du type (F), *Studia Math.*, **13** (1953), 94—121.

Хайерс (Hyers D. H.)
1. Pseudo-normed linear spaces and abelian groups, *Duke Math. J.*, 5 (1939), 628—634.
2. Locally bounded linear topological spaces, *Revista Ci., Lima*, **41** (1939), 555—574.
3. Linear topological spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **51** (1945), 1—21.
4. A note on linear topological spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **44** (1938), 76—80.

Хал (Hull T. E.), см. Инфельд

Халбери (Halbery C. J. A.), см. Тейлор

Халмош (Halmos P. R.)
1. Normal dilations and extensions of operators, *Summa. Brazil. Math.*, 2 (1950), 125—134.
2. A nonhomogeneous ergodic theorem, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 66 (1949), 284—288.
3. Commutativity and spectral properties of normal operators, *Acta Sci. Math. Szeged* 12 Pars B. (1950), 153—156.
4. Measurable transformations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55 (1949), 1015—1034.
5. Теория меры, М., ИЛ, 1953 (1950).
6. Introduction to Hilbert space and the theory of spectral multiplicity. Chelsea, New York, 1951.
7. Finite dimensional vector spaces, Ann. of Math. Stud.. No. 7, Princeton Univ. Press, Princeton, 1942.
8. An ergodic theorem, *Proc. Mat. Acad. Sci. U.S.A.*, **32** (1946), 151—161.
9. Spectra and spectral manifolds, *Ann. Soc. Polon. Math.*, **25**, (1952), 43—49.
10. Commutators of operators, I, II.
I. *Amer. J. Math.*, **74** (1952), 237—240.
II. Там же, **76** (1954), 191—198.
11*. Лекции по эргодической теории. М., ИЛ., 1960.

Халмош и Люмер (Halmos P. R., Lumer G.)
1. Square roots of operators, II, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 5 (1954), 589—595.

Халмош, Люмер и Шефер (Halmos P. R., Lumer G., Schäffer J. J.)
1. Square roots of operators, *Proc. Amer. Math, Soc.*, 4 (1953), 142—149.

Халмош и Дж. Нейман (Halmos P. R., von Neumann J.)
1. Operator methods in classical mechanics, II, *Ann. of Math.* (2) **43** (1942), 332—350.

Хан (Hahn H.)
1. Über die Darstellung gegebener Funktionen durch singuläre Integrale, II, *Denkschriften der K. Akad. Wien. Math.-Naturwiss. Kl.*, **93** (1916), 657—692.
2. Über Folgen linearer Operationen, *Monatsh. für Math. und Physik*, **32** (1922) 3—88.
3. Über lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen, *J. Reine Angew. Math.*, **157** (1927), 214—229.
4. Reele Funktionen. Akad. Verlag., Leipzig, 1932.
5. Über die Integrale des Herrn Hellinger und die Orthogonalinvarianten der quadratischen Formen von unendlich vielen Veränderlichen, *Monatsh. für Math. und Physik*, **23** (1912) 161—224.

Хан и Розенталь (Hahn H., Rosenthal A.)
1. Set functions. Univ. of New Mexico Press, Albuquerque, 1948.

Харазов Д. Ф.
1. Об одном классе линейных уравнений в гильбертовых пространствах, *Сообщ. АН Груз. ССР*, **13**, (1952), 65—72.
2. Об одном классе линейных уравнений с симметризуемыми операторами, *ДАН СССР*, **91** (1953), 1023—1026.
3. К теории симметризуемых операторов, полиномиально зависящих от параметра, *ДАН СССР* (1953), 1285—1287.

Харди и Литлвуд (Hardy G. H., Littlewood J.)
1. Some properties of fractional integrals, I, II.
   I. *Math. Zeit*, **27** (1928), 565—606.
   II. Там же, **34** (1932), 403—439.

Харди, Литлвуд и Полиа (Пойя)
1. Неравенства. М., ИЛ, 1948 (1932).

Хартман П. (Hartman P.)
1. On the ergodic theorems, *Amer. J. Math.*, **69** (1947), 193—199.
2. On the essential spectra of symmetric operators in Hilbert space, *Amer. J. Math.* **75** (1953), 229—240.
3. The L_2-solutions of linear differential equations of second order, *Duke Math. J.*, **14** (1947), 323—326.
4. Unrestricted solution fields of almost separable differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **63** (1948), 560—580.
5. On differential equations with non-oscilatory eigenfunctions, *Duke Math. J.*, **15** (1948), 697—709.
6. On the linear logarithmico-exponential differential equation of the second order, *Amer. J. Math*, **70** (1948), 764—779.
7. On the spectra of slightly disturbed linear oscillators, *Amer. J. Math.*, **71** (1949), 71—79.
8. A characterization of the spectra of the one-dimensional wave equation, *Amer. J. Math.*, **71** (1949), 915—920.
9. The number of L_2-solutions of $x''+q(t)x=0$, *Amer. J. Math.*, **73** (1951), 635—645.
10. On bounded Green's kernels for second order linear differential equations, *Amer. J. Math.*, **73** (1951), 646—656.
11. On the eigenvalues of differential equations, *Amer. J. Math.*, **73** (1951), 657—662.
12. On linear second order differential equations with small coefficients, *Amer. J. Math.*, **73** (1951), 955—962.
13. Some examples in the theory of singular boundary value problems, *Amer. J. Math.*, **74** (1952), 107—126.
14. On non-oscillatory linear differential equations of second order, *Amer. J. Math.*, **74** (1952), 389—400.
15. On the derivatives of solutions of linear second order differential equations, *Amer. J. Math.*, **75** (1953), 173—177.

16. On the essential spectra of ordinary differential equations, *Amer. J. Math.*, **76** (1954), 831—838.

Хартман П. и Путнам (Hartman P., Putnam C.)

1. The least cluster point of the spectrum of boundary value problems, *Amer. J. Math.*, **70** (1948), 847—855.
2. The gaps in the essential spectra of wave equations, *Amer. J. Math.*, **72** (1950), 849—862.

Хартман П. и Уинтнер (Hartman P., Wintner A.)

1. The (L^2)-space of relative measure, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **33**, (1947), 128—132.
2. An oscillation teorem for continuous spectra, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **33** (1947), 376—379.
3. The asymptotic arcus variation of solutions of real linear differential equations of second order, *Amer. J. Math.*, **70** (1948), 1—10.
4. Criteria for the non-degeneracy of the wave equation, *Amer. J. Math.*, **70** (1948), 295—308.
5. On the orientation of unilateral spectra, *Amer. J. Math.*, **70** (1948), 309—316.
6. On non-conservative linear oscillators of low frequency, *Amer. J. Math.*, **70** (1948), 529—539.
7. A criterion for the non-degeneracy of the wave equation, *Amer. J. Math.*, **71** (1949), 206—213.
8. On the location of spectra of wave equations, *Amer. J. Math.*, **71** (1949), 214—217.
9. On the Laplace-Fourier transcendents, *Amer. J. Math.*, **71** (1949), 367—372.
10. Oscillatory and non-oscillatory linear differential equations, *Amer. J. Math.*, **71** (1949), 627—648.
11. A separation theorem for continuous spectra, *Amer. J. Math.*, **71** (1949), 650—662.
12. On the derivatives of the solutions of the one-dimensional wave equation, *Amer. J. Math*, **72** (1950), 148—155.
13. On the essential spectra of singular eigenvalue problems, *Amer. J. Math.*, **72** (1950), 545—552.
14. On an oscillation criterion of Liapounoff, *Amer. J. Math.*, **73**, (1951), 885—890.
15. On perturbations of the continuous spectrum of the harmonic oscillators, *Amer. J. Math.*, **74**, (1952), 79—85.
16. An inequality for the amplitudes and arcus in vibration diagrams of time-depended frequency, *Quart. Appl. Math.*, **10** (1952), 175—176.
17. On non-oscillatory linear differential equations, *Amer. J. Math.*, **75** (1953), 717—730.
18. On curves defined by binary non-conservativen differential systems, *Amer. J. Math.*, **76**, 497—501 (1954).
19. On the assignment of asymptotic values for the solution of linear differential equations of second order, *Amer. J. Math.*, **77** (1955), 475—483.
20. On linear second order differential equations in the unit circle, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **78** (1955), 492—500.
21. On non-oscillatory linear differential equations with monotone coefficients, *Amer. J. Math.*, **76** (1954), 207—219.

Хартман С. (Hartman S.)

1. Quelques propriétées ergodiques des fractions continues, *Studia Math.*, **12** (1951), 271—278.

Хартман С., Марчевский и Рыль-Нарджевский (Hartman S., Marczewski E., Ryll-Nardzewski C.)

1. Théorèmes ergodiques et leurs applications, *Colloq. Math.*, **2** (1951), 109—123.

Хаусдорф (Hausdorff F.)
1. Grundzüge der Mengenlehre. Verlag von Veit, Leipzig, 1914.
2. Теория множеств, М., Гостехиздат, 1937 (1935).
3. Zur Theorie der linearen metrischen Räume, *J. Reine Angew. Math.*, **167** (1932), 294—311.

Хейвуд (Heywood P.)
1. On the asymptotic distribution of eigenvalues, *Proc. London Math. Soc.* (3) **4** (1954), 456—470.

Хелли (Helly E.)
1. Über lineare Funktionaloperationen, *S.B.K. Akad. Wiss. Wien Math. Naturwiss. Kl.* 121. IIa (1912), 265—297.
2. Über Systeme linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, *Monatsh. für Math. u. Phys.*, **31** (1921), 60—91.

Хеллингер (Hellinger E.)
1. Neue Begründung der Theorie quadratischer Formen von unendlichvielen Veränderlichen, *J. Reine Angew. Math.*, **136** (1909), 210—271.

Хеллингер и Теплиц (Hellinger E., Toeplitz O.)
1. Grundlagen für eine Theorie der undendlichen Matrizen, *Math. Ann.*, **69** (1910), 289—330.
2. Grundlagen für eine Theorie der endlichen Matrizen, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl.* 1906, 351—355 (1906).
3. Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlichen Unbekannten. Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften II, C13, (1928), 1335—1616 (1928).

Хельсон (Helson H.)
1. Spectral synthesis of bounded functions, *Ark. för Mat.*, **1** (1951), 497—502.

Хельсон и Квигли (Helson H., Quigley F. D.)
1. Maximal algebras of continuous functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **8** (1957), 111—114.
2. Existence of maximal ideals in algebras of continuous functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 8 (1957), 115—119.

Хензель (Hensel K.)
1. Über Potenzreihen von Matrizen, *J. Reine Angew. Math.*, **155** (1926), 107—110.

Хенсон (Hanson E. H.)
1. A note on compactness, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **39** (1933), 397—400.

Хетфилд (Hatfield C.), см. Камерон

Хилле (Hille E.) (Хилл)
1. Функциональный анализ и полугруппы, М., ИЛ., 1951 (1948). [Находится в печати русский перевод 2-го издания (совместно с Филлипсом)].
2. Notes on linear transformations, II. Analyticity of semigroups, *Ann. of Math.* (2) **40** (1939), 1—47.
3. On the generation of semi-groups and the theory of conjugate functions, *Proc. Roy. Physiog. Soc. Lund*, **21** (1951), 1—13.
4. Non-oscillation theorems, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 64 (1948), 234—252.
5. The abstract Cauchy problem and Cauchy's problem for parabolic differential equations, *J. d'Analyse Math.*, **3** (1953), 81—196.

Хилле и Тамаркин (Hille E. and Tamarkin J. D.)
1. On the characteristic values of linear integral equations, *Acta Math.*, **57** (1931), 1—76.
2. On the theory of linear integral equations, II, *Ann. of Math.*, (2) (1934), 445—455.

Хильдинг (Hilding S.)
1. On completeness theorems of Paley-Wiener type, *Ann. of Math.* (2) **49** (1948), 953—954.

2. On the closure of disturbed orthonormal sets in Hilbert space, *Ark. Mat. Astr. Fys.* 32B, no. 7 (1946), 3 p.

Хинчин А. Я.

1. Zu Birkhoffs Lösung des Ergodenproblems, *Math. Ann.*, **107** (1932), 485—488.
2. Fourierkoeffizienten längs einer Bahn in Phasenraum, *Матем. сб.*, **41** (1934), 14—16.

Хиршман и Уиддер (Hirschman I. I., Widder D. V.), см. также Уиддер и Хиршман

1. Преобразования типа свертки, М., ИЛ, 1958 (1955).

Хольмгрен (Holmgren E.)

1. Über Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen, *Öfvers. Kongl. Vetens.-Akad. Förk.*, 58 (1901), 91—103.

Хопф Г. (Hopf H.), см. Александров П. С.

Хопф Э. (Hopf E.)

1. Ergodentheorie. Ergebnisse der Math. V. 2, J. Springer, Berlin, 1937. (Есть русский перевод: Эргодическая теория. *УМН*, **4**, вып. 1 (1949).
2. The general temporally discrete Markov process, *J. Rational Mech. and Anal.*, **3** (1954), 13—45.
3. Über eine Ungleichung der Ergodentheorie, *S. B. Math.-Nat. Kl. Bayer. Akad. Wiss.* (1944), 171—176.

Хотта (Hotta J.)

1. A remark on regularly convex sets, Kōdai Math. Sem. Rep. 1951 (1951), 37—40.

Хьюит (Hewitt E.), см. также Иосида

1. Linear functionals on spaces of continuous functions, *Fund. Math.*, **37** (1950), 161—189.
2. Integral representation of certain linear functionals, *Ark. för Mat.*, **2** (1952), 269—282.
3. Integration on locally compact spaces, I. Univ. of Washington, *Pub. in Math.*, **3** (1952), 71—75.
4. Certain generalizations of the Weierstrass approximation theorem, *Duke Math. J.*, **14** (1947), 419 —427.
5. Rings of real-valued continuous functions, I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 64 (1948), 45—99.
6. Linear functionals on almost periodic functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **74** (1953), 303—322.
7. A problem concerning finitely additive measures, *Mat. Tidsskr.* B. 1951 (1951), 81—94.

8*. A survey of abstract harmonic analysis. Some aspects of analysis and probability, New York, 1958, стр. 107—168. Есть русский перевод: *Математика*, 4 : 4 (1960), 75—133.

Хюльтен (Hulthén L.)

1. On the Sturm-Liouville Problem connected with a continuous spectrum, *Ark. Mat. Astr. Fys.* 35A, no. 25 (1949), 25 p.

Цвален (Zwahlen R.)

1. Ein «neues» Eigenwertproblem, *Actes Soc. Helw. Sci. Nat.*, **133** (1954), 60—65.

Цермело (Zermelo E.)

1. Beweis, das jede Menge wohlgeordnet werden kann, *Math. Ann.*, **59** (1904), 514—516.
2. Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung, *Math. Ann.*, **65** (1908), 107—128.

Циммерберг (Zimmerberg H. J.)

1. On normalizable transformations in Hilbert space, *Acta Math.*, 86 (1951), 85—88.
2. Definite integral systems, *Duke Math. J.*, **15** (1948), 371—388.

Ц о р н (Z o r n M.)
1. A remark on method in transfinite algebra, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **41** (1935), 667—670.
Ц з е н (T s e n g Y. Y.)
1. On generalized biorthogonal expansions in metric and unitary spaces, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 28 (1942), 170—175.
2. Обобщенные обратные к неограниченным операторам между двумя унитарными пространствами, *ДАН СССР*, **67** (1949), 431—434.
3. Свойства и классификация обобщенных обратных к замкнутым операторам, *ДАН СССР*, 67 (1949), 607—610.
Ц з я н (C h i a n g T. P.)
1. A theorem on the normalcy of completely continuous operators, *Acta Sci. Math. Szeged.*, **14** (1952), 188—196.
Ц у д з и (T s u j i M.)
1. On the integral representation of unitary and self-adjoint operators in Hilbert space, *Jap. J. Math.*, **19** (1948), 287—297.
2. On the compactness of space L^p ($p>0$) and its application to integral equations, Kodai Math. Sem. Rep. (1951), 33—36.
Ч а н (C h a n g S. H.)
1. On the distribution of the characteristic values and singular values of linear integral equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 67 (1949), 351—367.
2. Generalization of a theorem of Lalesco, *J. London Math. Soc.*, **22** (1947), 185—189.
Ч е х (Č e c h E.)
1. On bicompact spaces, *Ann. of Math.* (2) **38** (1937), 823—844.
Ш а п и р о Г. (S h a p i r o H. S.), см. также Р о г о з и н с к и й
1. Extremal problems for polynomials and power series. Dissertation, Mass. Inst. Tech., 1952.
2. Applications of normed linear spaces to function-theoretic extremal problems. Lectures of functions of a complex variable 399—404, Univ. of Michigan Press, Ann Arbor, 1955.
Ш а п и р о Дж. (S h a p i r o J. M.), см. К а м е р о н
Ш а т т е н (S c h a t t e n R.)
1. A theory of cross-spaces, *Ann. of Math. Studies*, No. 26, Princeton University Press, Princeton, 1950.
Ш а т у н о в с к и й С. О.
1*. Введение в анализ, Одесса, 1932 г.
Ш а у д е р (S c h a u d e r J.)
1. Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen, *Math. Z.*, **26** (1927), 47—65, 417—431.
2. Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen, *Studia Math.*, **2** (1930), 171—180.
3. Eine Eigenschaft des Haarschen Orthogonalsytemes, *Math. Z.*, 28 (1929), 317—320.
4. Invarianz des Gebietes in Funktionalräumen, *Studia Math.*, **1** (1929), 123—139.
5. Über den Zusammenhang zwischen der Eindeutigkeit und Lösbarkeit partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus, *Math. Ann.*, **106** (1932), 661—721.
6. Über lineare, vollstetige Funktionaloperationen, *Studia Math.*, **2** (1930), 183—196.
7. Über die Umkehrung linearer, stetiger Funktionaloperationen, *Studia Math.*, **2** (1930), 1—6.
Ш а х (S h a h S. M.)
1. Note on eigenfunction expansions, *J. London Math. Soc.*, **27** (1952), 58—74.

Шварц Г. А. (Schwarz H. A.)
1. Gesammelte Mathematische Abhandlungen, Band I. J. Springer, Berlin, 1890.
Шварц Г. М. (Schwartz H. M.)
1. Sequences of Stieltjes integrals, I—III.
I. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **47** (1941), 947—955.
II. *Duke Math. J.*, **10** (1943), 13—22.
III. *Там же*, **10** (1943), 595—610.
Шварц Дж. (Schwartz J.), см. также Бартл, Бейд, Данфорд.
1. A note on the space L_p^*, *Proc. Amer. Math. Soc.* **2** (1951), 270—275.
2. Perturbations of spectral operators, and applications, I, *Pacific J. Math.*, **4** (1954), 415—458.
3. Two perturbation formulae, *Comm. Pure Appl. Math.*, 8 (1955) 371—376.
Шварц Л. (Schwartz L.), см. также Дьёдонне
1. Analyse et synthèse harmoniques dans les espaces de distributions, *Canadian J. Math.*, **3** (1951), 503—512.
2. Sur une propriété de synthèse spectrale dans les groupes non compacts, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **227**, (1948), 424—426.
3. Théorie gènérale des fonctions moyennepériodiques, *Ann. of Math.* (2) **48** (1947), 857—929.
4. Homomorphismes et applications complètement continues, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **236** (1953), 2472—2473.
5. Théorie des distributions, I, II, Act. Sci. Ind. 1091, 1122, Hermann et Cie., Paris (1951).
6*. Théorie des noyaux, *Proc. Int. Cong. Math.* 1952 v. I, 220—230. (Есть русский перевод: *Математика* 3 : 3, 1959, 69—79.
Швердтфегер (Schwerdtfeger H.)
1. Les fonctions de matrices, *Act. Sci. et Ind.* 649, Hermann et Cie., Paris, 1938.
Шевалле (Chevalley C.)
1. Theory of Lie groups. I, Princeton Univ. Press, Princeton, 1946.
2. Theorie des groupes de Lie. II. Hermann et Cie., Act. Sci. et Ind. 1152, *Paris, 1951*.
3. Теория групп Ли. М., ИЛ., т. 1. 1948, т. т. 2, 3—1958.
Шёнберг (Schoenberg I. J.), см. также Гильдебрандт
1. A remark on M. M. Day's characterization of innerproduct spaces and a conjecture of L. M. Blumenthal, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **3**, (1952), 961—964.
2. On local convexity in Hilbert space, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **48** (1942), 432—436.
3. On smoothing operations and their generating functions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **59** (1953), 199—230.
Шерф (Schaerf H. M.)
1. Sur l'unicité des mesures invariantes, *C. R. Acad. Sci. Paris* **229** (1949), 1053—1055. Испр. **230** (1950), 795.
2. Sur l'unicité de la mesure de Haar, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **229** (1949), 1112—1113.
Шефер (Schäffer J. J.), см. также Халмош
1. On unitary dilations of contractions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **6** (1955), 322.
2. On some problems concerning operators in Hilbert space, *Anais Acad. Brasil. Ci.*, **25** (1953), 87—90.
Шефке (Schäfke F. W.)
1. Über einige unendliche lineare Gleichungssysteme, *Math. Nachr.*, **3** (1949), 40—58.

2. Das Kriterium von Paley und Wiener in Banachschen Raum, *Math. Nachr.*, **3** (1949), 59—61.
3. Über Eigenwertprobleme mit zwei Parametern, *Math. Nachr.*, **6** (1951), 109—124.

Шилов Г. Е., см. также Гельфанд И. М.
1. Идеалы и подкольца кольца непрерывных функций, *ДАН СССР*, **22** (1939), 7—10.
2. *К теории идеалов в нормированных кольцах функций*, *ДАН СССР*, **27** (1940), 900—903.
3. О нормированных кольцах с одной образующей, *Матем. сб.*, **21** (63), 25—37 (1947).
4. О регулярных нормированных кольцах, *Труды Матем. ин-та АН СССР*, 21 (1947).
5. О расширении максимальных идеалов, *ДАН СССР*, **29**, (1940), 83—85.
6*. Математический анализ (специальный курс), М., Физматгиз, 1960.
7*. Критерий компактности в однородном пространстве функций, *ДАН СССР*, **92** (1953), 11—12.

Шин Ден Юн
1. О квазидифференциальных операторах в гильбертовом пространстве, *ДАН СССР*, **18** (1938), 523—526.
2. О решениях линейного квазидифференциального уравнения *n*-го порядка, *Матем. сб.*, **7** (49) (1940), 479—532.
3. О квазидифференциальных операторах в гильбертовом пространстве, *Матем. сб.*, **13** (55) (1943), 39—70.

Широхов М. Ф.
1. Функции от элементов полуупорядоченных пространств, *ДАН СССР*, **74** (1950), 1057—1060.

Шифман (Shiffman M.), см. Гарабедян
Шиффер (Schiffer M. M.), см. Миллер К.
Шмейдлер (Schmeidler W.)
1. Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1950.

Шмидт (Schmidt E.)
1. Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, *Rend. del Circolo Matematico di Palermo*, **25** (1908), 53—77.
2. *Auflösung der allgemeinen linearen Integralgleichung*, *Math. Ann.*, **64** (1907), 161—174.

Шмульян В. Л., см. также Гантмахер В. Р. и Крейн М. Г.
1. О регулярно замкнутых и слабо компактных множествах в пространствах типа (*B*), *ДАН СССР*, **18** (1938), 403—406.
2. Линейные топологические пространства и их связь с пространствамк типа (*B*), *ДАН СССР*, 18 (1938), 475—477.
3. О различных топологиях в пространствах Банаха, *ДАН СССР*, **23** (1939), 331—334.
4. О некоторых геометрических свойствах сферы в пространстве типа (*B*), *ДАН СССР*, **24** (1939), 647—651.
5. О принципе вкладок в пространстве типа (*B*), *Матем. Сб.*, **5** (47), (1939), 317—328.
6. О некоторых геометрических свойствах единичной сферы пространства типа (*B*), *Матем. сб.*, 6 (48) (1939), 77—94.
7. О дифференцируемости нормы в пространстве Банаха, *ДАН СССР* **27** (1940), 643—648.
8. Über lineare topologische Räume, *Матем. сб.*, 7 (49) (1940), 425—448.
9. Sur la structure de la sphére unitaire dans l'espace de Banach, *Матем. сб.*, 9 (51) (1941), 545—572.
10. О линейных топологических пространствах, *Матем. сб.*, **9** (51) (1941), 727—730.

11. О некоторых геометрических свойствах сферы в линейных полуупорядоченных пространствах Банаха, *ДАН СССР*, **30** (1941), 392—396.
12. О некоторых вопросах функционального анализа, *ДАН СССР*, **38** (1943), 170—173.
13. Sur les ensembles compacts et faiblement compacts dans l'espace du type (*B*).
Матем. сб., **12** (54) (1943), 91—98.
14. О компактных множествах в пространстве измеримых функций, *Матем. сб.*, **15** (57), (1944), 343—346.

Шмульян Ю. Л.
1. Изометрические операторы с бесконечными индексами дефекта и их ортогональные расширения, *ДАН СССР*, 87 (1952), 11—14.
2. Операторы с вырожденной характеристической функцией, *ДАН СССР*, **93** (1953), 985—988.
3. Вполне непрерывные возмущения операторов, *ДАН СССР*, **101** (1955), 35—38.

Шноль Э. Э.
1. Поведение собственных функций и спектр операторов Штурма—Лиувилля, *УМН*, 9 : **4** (62) (1954), 113—132.

Шохат и Тамаркин (Shohat J. A. and Tamarkin J. D.)
1. The problem of moments. Math. Surveys, no. I, Amer. Math. Soc., New York, 1943.

Шрёдер (Schröder J.)
1. Fehlerabschätzungen zur Störungsrechnung bei linearen Eigenwertproblemen mit Operatoren eines Hilbertschen Raumes, *Math. Nachr.*, **10** (1953), 113—128.

Шрёдингер (Schrödinger E.)
1. Quantisierung als Eigenwertproblem, *Annalen der Physik* (4) 80 (1926) 437—490.
2. Verwasschene Eigenwertspectra, *S.-B. Preussischen Akad. Wiss.*, 1929 (1929), 668—682.

Шрейбер (Schreiber M.)
1. Generalized spectral resolution for operators in Hilbert space. Dissertation, University of Chicago, 1955.

Шрейдер Ю. А.
1. Строение максимальных идеалов в кольце мер со сверткой, Матем. сб. **27** (69) (1950), 297—318.

Шрейер О. (Schreier O.)
1. Abstrakte kontinuierliche Gruppen, *Abhand. Math. Sem. Hamburgischen Univ.*, 4 (1926), 15—32.

Шрейер Я. (Schreier J.)
1. Ein Gegenbeispiel zur Theorie der schwashen Konvergenz, *Studia Math.*, **2** (1930), 58—62.

Штейнгауз (Steinhaus H.) См. также Банах и Качмаж
1. Sur les dévelopments orthogonaux, *Bull. Int. Acad. Polon. Sci.* Sér. A, 11—39 (1926).
2. Additive und stetige Funktionaloperationen, *Math. Z.*, **5** (1919), 186—221.

Штраус А. В.
1. К теории обобщенных резольвент симметрического оператора, *ДАН СССР*, 78 (1951), 217—220.
2. О характеристических свойствах обобщенных резольвент, *ДАН СССР*, **82** (1952), 209—212.
3. К теории эрмитовых операторов, *ДАН СССР*, **67** (1949), 611—614.
4. Об обобщенных резольвентах симметрического оператора, *ДАН СССР*, **71** (1950), 241—244.

5. Обобщенные резольвенты симметрических операторов, *Изв. АН СССР*, сер. матем., **18** (1954), 51—86.

Штрут (Strutt M. J. O.)

1. Lamésche, Mathieusche und verwandte Funktionen in Physik. und Technik. Ergebnisse der Math. I, 3, J. Springer, Berlin, 1932.
2. Reelle Eigenwerte verallgemeinerter Hillscher Eigenwertaufgaben 2. Ordnung, *Math. Zeit.* **49** (1943—1944), 593—643.

Штурм (Sturm C.)

1. Sur les équations différentielles du second ordre, *J. Math. Pures Appl.* (1) **1**, (1836), 106—136.
2. Sur une classe d'équations à différences partielles, *J. Math. Pures Appl.* (1) **1** (1836), 373—444.

Шур А. (Schur A.)

1. Zur Entwickelung willkürlicher Funktionen nach Lösungen von Systemen linearer Differentialgleichungen, *Math. Ann.*, **82** (1921), 213—239.

Шур И. (Schur I.)

1. Über die charakteristischen Wurzeln einer linearen Substitution mit einer Anwendung auf die Theorie der Integralgleichungen, *Math. Ann.*, **66** (1909), 488—510.

Шур Я. (Schur J.)

1. Über lineare Transformationen in der Theorie der undenlichen Reihen, *J. Reine Angew. Math.*, **151** (1920), 79—111.

Эберлейн (Eberlein W. F.)

1. Weak compactness in Banach spaces, I, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **33** (1947), 51—53.
2. Closure, convexity, and linearity in Banach spaces, *Ann. of Math.* (2), **47** (1946), 688—703.
3. Abstract ergodic theorems and weak almost periodic functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 67 (1949), 217—240.
4. Abstract ergodic theorems, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **34** (1948), 43—47.
5. A note on the spectral theorem, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **52** (1946), 328—331.

Эгмон (Agmon S.), см. Мандельбройт

Эгнью (Agnew R. P.)

1. Linear fuctionals satisfying prescribed conditions, *Duke Math. J.*, **4** (1938), 55—77.

Эгнью и Морс (Agnew R. P. and Morse A. P.)

1. Extensions of linear functionals with applications to limits, integrals, mesures, and densities, *Ann. of Math.* (2) **39** (1938), 20—30.

Эдвардс (Edwards R. E.)

1. A theory of Radon measures on locally compact spaces, *Acta Math.*, **89** (1953), 133—164.
2. Multiplicative norms on Banach algebras, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **47** (1951), 473—474.

Эзрохи И. А.

1. Общие формы линейных операций в пространствах со счетным базисом, *ДАН СССР*, **59** (1948), 1537—1540.

Эйдельгайт (Eidelheit M.)

1. Zur Theorie der Konvexen Mengen in linearen normierten Räumen, *Studia Math.*, 6 (1936), 104—111.

Эйдельгайт и Мазур (Eidelheit M. and Mazur S.)

1. Eine Bemerkung über die Räume vom Typus (*F*), *Studia Math.*, **7** (1938), 159—161.

Эйленберг (Eilenberg S.)

1. Banach space methods in topology, *Ann. of Math.* (2) **43**, (1942), 568—579.

Э к к а р т (E c k a r t C.)
1. The penetration of a potential barrier by electrons, *Phys. Rev.*, **35** (1930), 1303—1309.
Э л к о н и н (E l c o n i n V.), см. М а й к а л.
Э л л и о т (E l l i o t t J.)
1. The boundary value problems and semi-groups associated with certain integro-differential operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **76** (1954), 300—331.
2. Eigenfunction expansions associated with singular differential operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **78** (1955), 406—425.
Э л л и с Г. и Г а л ь п е р и н (E l l i s H. W., H a l p e r i n I.)
1. Function spaces determined by a levelling length function, *Canadian J. Math.*, **5** (1953), 576—592.
Э л л и с Д. (E l l i s D.)
1. A modification of the parallelogram law characterization of Hilbert spaces, *Math. Zeit.*, **59** (1953), 94—96.
Э р д ё ш (E r d ö s P.), см. К л а р к с о н
Э р д ё ш и К а ц М. (E r d ö s P., K a c M.)
1. On certain limit theorems of the theory of probability, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **52** (1946), 292—302.
Э с к л а н г о н (E s c l a n g o n E.)
1. Nouvelles recherches sur les fonctions quasi-périodiques, *Ann. Obs. Bordeaux*, **16** (1917), 51—226.
Э с с е р (E s s e r M.)
1. Analycity in Hilbert space and self-adjoint transformations, *Amer. J. Math.*, **69** (1947), 825—835.
Ю д (Y o o d B.)
1. Banach algebras of continuous functions, *Amer. J. Math.*, **73** (1951), 30—42.
2. Properties of linear transformations preserved under addition of a completely continuous transformation, *Duke Math. J.*, **18** (1951), 599—612.
3. On fixed points for semi-groups of linear operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **2** (1951), 225—233.
4. Transformations between Banach spaces in the uniforn topology, *Ann. of Math.* (2) **50** (1949), 486—503.
5. Additive groups and linear manifolds of transformations between Banach spaces, *Amer. J. Math.*, **71** (1949), 663—677.
6. Difference algebras of linear transformations on a Banach space, *Pacific J. Math.*, **4** (1954), 615—636.
Ю д и н А. И.
1. Некоторые геометрические вопросы теории полуупорядоченных пространств, Л., *Учен. Зап. Ун-та*, сер. матем., **10** (1940), 64—83.
Ю н г (Y o u n g L. C.)
1. On an inequality of Marcel Riesz, *Ann. of Math.* (2) **40** (1939), 567—574.
Я г л о м А. М., см. Г е л ь ф а н д И. М.
Я м а б е (Y a m a b e)
1. On an extension of Helly's theorem, *Osaka Math. J.*, **2** (1950), 15—17.

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Цифры в скобках обозначают номера страниц; ссылки, начинающиеся римской цифрой (например, III. 2. 1),— номера параграфов и пунктов книги

Оглавление

ЧАСТЬ I. ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ

Оглавление второй части:

ЧАСТЬ II. СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ

Данфорд и Шварц

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ.
ОБЩАЯ ТЕОРИЯ

Редактор *В. М. Алексеев*
Художник *В. В. Ашмаров*
Технический редактор *В. Доценко*
Корректор *Е. Б. Марксон*

Сдано в производство 16/VIII 1961 г.
Подписано к печати 17/VIII 1962 г.
Бумага $60\times90^{1}/_{16}$-28 бум. л.
56 печ. л.
Уч.-изд. л. 56,3 Изд. № 1/5337
Цена 4 р. 14 к. Зак. 1324

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Московская типография № 5
Мосгорсовнархоза
Москва, Трехпрудный пер., 9