Н. ДАНФОРД и ДЖ. Т. ШВАРЦ

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ

LINEAR OPERATORS

Part II

SPECTRAL THEORY
SELF ADJOINT OPERATORS IN HILBERT SPACE

Nelson DUNFORD and Jacob T. SCHWARTZ
With the assistance
of William G. BADE and Robert G. BARTLE

1963
INTERSCIENCE PUBLISHERS
NEW YORK, LONDON

Н. Данфорд и Дж. Т. Шварц
при участии
У. Бейда и Р. Бартла

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Спектральная теория. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве

Перевод с английского
М. Г. Гасымова, В. Я. Лина и Б. С. Митягина

Под редакцией
А. Г. Костюченко

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва 1966

УДК 517.43

Эта книга представляет собой второй том фундаментальной монографии по теории линейных операторов (первый том был выпущен Издательством иностранной литературы в 1962 г.); она посвящена многочисленным применениям теории линейных операторов к различным вопросам анализа, в частности, общей теории ограниченных и неограниченных самосопряженных операторов, спектральной теории симметрических обыкновенных дифференциальных операторов и операторов с частными производными.

Изложение построено таким образом, что читателю почти не приходится прибегать к другим источникам, в том числе и к первому тому.

Книга рассчитана на математиков различных специальностей; она будет полезна преподавателям, аспирантам и студентам старших курсов математических факультетов университетов и пединститутов. Она представит интерес также для физиков-теоретиков, поскольку теория линейных операторов находит широкое применение в современной физике.

Редакция литературы по математическим наукам

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Предлагаемая читателю книга является вторым томом обширного труда американских математиков Н. Данфорда и Дж. Шварца, первый том которого вышел в русском переводе в 1962 г. [1])

В настоящем томе имеется шесть глав, из которых три —IX, X и XII— посвящены общей теории. Именно, в главе IX излагается теория банаховых алгебр, или, как у нас их часто называют, нормированных колец. По теории и различным применениям банаховых алгебр в последние годы у нас появился целый ряд превосходных книг (из них назовем «Коммутативные нормированные кольца» И. М. Гельфанда, Д. А. Райкова, Г. Е. Шилова и «Нормированные кольца» М. А. Наймарка). Однако читателю весьма удобно, когда материал излагается таким образом, что нет необходимости прибегать к другим источникам. Именно к этому и стремятся авторы. Главы X и XII посвящены общей теории ограниченных и неограниченных самосопряженных и нормальных операторов. Весьма интересной является глава XI, где собраны различные применения общей теории, развитой в предшествующих главах, к более специальным вопросам теории операторов и вообще анализа. Наиболее интересными в этой главе, как нам кажется, являются параграфы, посвященные несамосопряженным вполне непрерывным операторам, некоторая степень которых является оператором Гильберта — Шмидта. Этим операторам посвящено много весьма тонких работ различных математиков. Укажем здесь только на известные работы Т. Карлемана и М. В. Келдыша. Однако следует отметить, что одна из самых замечательных в этой области теорем — теорема Т. Карлемана об особенностях резольвенты оператора Гильберта —Шмидта— в книгах не была изложена [2]). Эта теорема доказывается в главе XI; в ней имеется также большое число других весьма глубоких и важных результатов, связанных с операторами Гильберта — Шмидта.

Глава XIII посвящена спектральной теории симметрических обыкновенных дифференциальных операторов. Глава содержит весьма обширный материал: общие теоремы о разложении М. Г. Крей-

---

[1]) Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы, общая теория, ИЛ, М., 1962.

[2]) Недавно вышла книга И. Ц. Гохберга и М. Г. Крейна [2*], посвященная несамосопряженным операторам.

на — К. Кодаиры, исследование индексов дефекта и спектра дифференциальных операторов. Следует отметить, что более полно этот материал излагается в книгах М. А. Наймарка «Линейные дифференциальные операторы» и И. М. Глазмана «Прямые методы качественного спектрального анализа», которые посвящены специально дифференциальным операторам.

Последняя, XIV глава посвящена спектральной теории симметрических дифференциальных операторов, главным образом эллиптических. До самого последнего времени эти вопросы излагались только в журнальной литературе. Лишь недавно вышла книга Ю. М. Березанского «Разложения по собственным функциям», где содержатся основные результаты спектральной теории эллиптических операторов.

Глава XIV содержит также некоторые сведения по теории обобщенных функций, необходимые для понимания изложенного в этой главе и, по-видимому, в дальнейшем для доказательства общей теоремы о разложении по собственным функциям.

При переводе было устранено некоторое количество замеченных опечаток и неточностей, а также сделан ряд примечаний, которые уточняют изложение истории вопроса.

Терминология авторов, насколько это было возможно, приближена к принятой в советской математической литературе.

Перевод глав IX—XI выполнен В. Я. Лином, главы XIII— М. Г. Гасымовым, глав XII и XIV— Б. С. Митягиным.

А. Г. Костюченко

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРОВ

Обилие имеющегося материала помешало нам рассмотреть в этом томе все вопросы, которые мы первоначально предполагали включить во вторую часть «Линейных операторов».

Настоящий том содержит весь ранее анонсированный материал, относящийся к классической спектральной теореме для самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Хотя мы затрагиваем некоторые вопросы, относящиеся к несамосопряженным операторам (такие, например, как приведенное в § XI.6 доказательство полноты системы собственных и присоединенных функций оператора Гильберта — Шмидта), изучение общей теории спектральных операторов и несамосопряженных краевых задач для дифференциальных операторов мы откладываем до третьей части настоящего трактата.

Поскольку во второй части рассматриваются в основном операторы в гильбертовом пространстве, мы для удобства справок непосредственно после главы XIV воспроизвели определение IV.2.26 и § IV.4 из первой части. Это приложение содержит основные определения и геометрические свойства гильбертова пространства, которые постоянно используются в данном томе. Таким образом, читателю, хорошо знакомому с содержанием глав I, II, III и VII, лишь изредка понадобится для справки первая часть. Схема, помещенная в начале книги, показывает взаимную зависимость различных параграфов второй части; аналогичная схема для первой части воспроизведена в конце книги.

Глава IX представляет собой введение в весьма обширную теорию банаховых алгебр; она служит нам фундаментом при построении спектральной теории ограниченных самосопряженных операторов, представленной в главе X. Главы X и XII содержат сравнительно полное изложение абстрактной спектральной теории для ограниченных и неограниченных самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. В главе XI собран целый ряд приложений спектральной теоремы для ограниченных операторов и некоторые родственные вопросы, а также изложена теория операторов Гильберта — Шмидта и неравенства Рисса — Кальдерона — Зигмунда. В главе XIII подробно рассматриваются приложения спектральной теоремы для неограниченных самосопряженных операторов к самосопряженным краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений. Глава XIV представляет собой краткое введение в теорию линейных дифференциальных уравнений с частными производными; она приведена здесь для того, чтобы указать еще одно богатое поле приложений спектральной теоремы.

Читатель, знакомый с книгой Стоуна, имеющей сходное с нашей название, заметит, что данная книга и хорошо известная работа Стоуна почти не перекрывают друг друга. Наше изложение общей теории основывается на исследованиях Гельфанда, а выбранные нами приложения отличаются от выбранных Стоуном.

Мы обязаны многим ученикам и коллегам, обратившим наше внимание на опечатки и ошибки, имеющиеся в первой части. Соответствующие исправления приведены в конце книги. Мы хотим поблагодарить д-ров Е. Коппельмана, Г. Лейбовица, Р. Ленглендса, Н. Митеса и Е. Торпа, отметивших многие из этих ошибок. В частности, Р. Ленглендс показал, что пример, о котором говорится в упражнении III.9.20, построить нельзя, и, таким образом, существенно улучшил результат А. Д. Александрова (см. III.5.13). Мы весьма благодарны мисс Р. М. Кастролл за ее компетентную редакционную помощь при подготовке рукописи к печати, а также за чтение всех корректур.

Нам приятно также поблагодарить администрацию Управления научных исследований Военно-воздушных сил и Службы морских исследований за постоянную поддержку при подготовке этой книги.

Оруэлл, Вермонт
Нью-Йорк
Июль 1963 г.

Нельсон Данфорд
Джекоб Шварц

ГЛАВА IX

Банаховы алгебры

1. Предварительные сведения

В математическом анализе часто встречаются классы функций, представляющие собой алгебры. Так, хорошо известными примерами алгебр могут служить классы, состоящие из всех ограниченных функций на некотором множестве, непрерывных ограниченных функций на топологическом пространстве, функций ограниченной вариации, почти периодических функций, функций, обладающих несколькими непрерывными производными, и аналитических функций. Во всех перечисленных случаях алгебраические операции являются обычными операциями над функциями и выполняются по правилам

$$(\alpha f)(s) = \alpha f(s), \quad (f+g)(s) = f(s) + g(s), \quad (fg)(s) = f(s)\,g(s).$$

Некоторые распространенные функциональные пространства, такие, например, как $L_1(-\infty, \infty)$, незамкнуты относительно естественных алгебраических операций (произведение двух интегрируемых функций не обязательно интегрируемо), но тем не менее являются алгебрами относительно других, также весьма употребительных операций. Так, пространство $L_1(-\infty, \infty)$ превращается в алгебру, если в качестве умножения на скаляры и сложения принять обычные операции, а произведение двух функций f, $g \in L_1(-\infty, \infty)$ определить как их свертку:

$$(f * g)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s-t)\,g(t)\,dt.$$

Итак, многие линейные пространства, с которыми мы сталкиваемся в математике, при том или ином определении операций являются также и алгебрами. Настоящая глава содержит аксиоматическое изложение теории некоторых типов алгебр, встречающихся в анализе. Многочисленные приложения общей теории к изучению различных конкретных алгебр читатель найдет в следующих двух главах.

1. Определение. Алгебра $\mathfrak{X}$ с единицей e над полем комплексных чисел называется *банаховой алгеброй*, или *B-алгеброй*, если она снабжена нормой $|\cdot|$, удовлетворяющей соотношениям

$$|e|=1, \quad |xy|\leqslant|x||y|, \quad x, y\in\mathfrak{X},$$

и является относительно этой нормы B-пространством. Банахова алгебра $\mathfrak{X}$ *коммутативна*, если $xy=yx$ для всех $x, y\in\mathfrak{X}$. *Инволюцией* в B-алгебре $\mathfrak{X}$ называется такое отображение $x\longrightarrow x^*$ алгебры $\mathfrak{X}$ в себя, что

$$(x+y)^*=x^*+y^*, \qquad (xy)^*=y^*x^*,$$
$$(\alpha x)^*=\bar{\alpha}x^*, \qquad (x^*)^*=x.$$

Все упомянутые выше алгебры функций, за исключением $L_1(-\infty, \infty)$ и алгебры аналитических функций, являются коммутативными B-алгебрами с инволюцией $x^*(s)=\overline{x(s)}$. Пространство $L_1(-\infty, \infty)$ со сверткой в качестве умножения представляет собой коммутативную алгебру с инволюцией $f^*(s)=\overline{f(-s)}$, но не B-алгебру, ибо в $L_1(-\infty, \infty)$ отсутствует единичный элемент. Покажем, как присоединить к такой алгебре единицу, чтобы получить B-алгебру. Пусть алгебра $\mathfrak{X}$ не имеет единицы, но удовлетворяет всем остальным аксиомам B-алгебры. Положим $\mathfrak{X}_1=\Phi\times\mathfrak{X}$, где Φ — поле комплексных чисел; таким образом, $\mathfrak{X}_1$ состоит из всевозможных упорядоченных пар $[\alpha, x]$, где $\alpha\in\Phi$, $x\in\mathfrak{X}$. Операции и норму в $\mathfrak{X}_1$ определим следующим образом:

$$[\alpha, x]+[\beta, y]=[\alpha+\beta, x+y],$$
$$[\alpha, x][\beta, y]=[\alpha\beta, \alpha y+\beta x+xy],$$
$$\lambda[\alpha, x]=[\lambda\alpha, \lambda x], \quad |[\alpha, x]|=|\alpha|+|x|.$$

Очевидно, что $\mathfrak{X}_1$ представляет собой B-алгебру с единицей $e=[1, 0]$, причем $|e|=1$, и что отображение $x\longrightarrow[0, x]$ является изометрическим изоморфизмом алгебры $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{X}_1$.

Имеется еще один тип алгебр, не являющихся банаховыми, но тем не менее таких, что их изучение с алгебраической и топологической точек зрения может быть сведено к изучению B-алгебр. Пусть комплексное B-пространство $\mathfrak{X}$ является в то же время алгеброй с единицей e над полем комплексных чисел. Мы не требуем выполнения условий $|e|=1$ и $|xy|\leqslant x||y|$, но предполагаем, что $|e|\neq 0$ и что произведение xy непрерывно по каждому из сомножителей при фиксированном другом. Определим отображение $\tau: x\longrightarrow T_x$ алгебры $\mathfrak{X}$ в алгебру $B(\mathfrak{X})$ всех линейных непрерывных операторов, действующих в B-пространстве $\mathfrak{X}$, положив $T_xy=xy$. Ясно, что отображение τ является (алгебраическим) изоморфизмом алгебры $\mathfrak{X}$ и подалгебры $\tau(\mathfrak{X})$ алгебры $B(\mathfrak{X})$. Покажем, что τ — также и гомеоморфизм; это будет означать, что алгебра $\mathfrak{X}$ топологически и алгебраически эквивалентна B-алгебре $\tau(\mathfrak{X})$. Так как $|x| = |xe| = |T_x e| \leqslant |e| \cdot |T_x|$, то обратное отображение $\tau^{-1}: T_x \to x$ непрерывно. Чтобы доказать непрерывность τ, покажем сначала, что множество $\tau(\mathfrak{X})$ замкнуто в $B(\mathfrak{X})$. Для этого заметим, что оператор T из $B(\mathfrak{X})$ принадлежит $\tau(\mathfrak{X})$ тогда и только тогда, когда $(Ty)z = T(yz)$ для всех $y, z \in \mathfrak{X}$. Действительно, если последнее условие выполнено, то, полагая $x = Te$, имеем $Ty = T(ey) = (Te)y = xy$, так что $T = T_x \in \tau(\mathfrak{X})$[1]). Если теперь $T_n \in \tau(\mathfrak{X})$ и $T_n \to T$, то из соотношений

$$(Ty)z = \lim_n (T_n y)z = \lim_n T_n(yz) = T(yz)$$

следует, что $T \in \tau(\mathfrak{X})$; таким образом, $\tau(\mathfrak{X})$ замкнуто. Поэтому τ — взаимно однозначное линейное отображение B-пространства $\mathfrak{X}$ на B-пространство $\tau(\mathfrak{X})$, а так как обратное отображение τ^{-1} непрерывно, то по теореме II.2.4 о замкнутом графике τ является гомеоморфизмом. Итак, доказано, что алгебра $\mathfrak{X}$ топологически и алгебраически эквивалентна B-алгебре $\tau(\mathfrak{X})$.

Это рассуждение показывает, в частности, что каждая банахова алгебра $\mathfrak{X}$ изометрически изоморфна подалгебре $\tau(\mathfrak{X})$ с единицей I алгебры $B(\mathfrak{X})$ всех непрерывных линейных операторов, действующих в B-пространстве $\mathfrak{X}$. В связи с этим желательно было бы показать, что оператор T_x из $\tau(\mathfrak{X})$ обратим в $B(\mathfrak{X})$ тогда и только тогда, когда элемент x имеет обратный в $\mathfrak{X}$, причем если обратный оператор T_x^{-1} существует и принадлежит $B(\mathfrak{X})$, то $T_x^{-1} = T_{x^{-1}} \in \tau(\mathfrak{X})$. Ясно, что если x^{-1} существует, то $T_{x^{-1}}T_x = T_x T_{x^{-1}} = I$. Если T_x^{-1} существует в $B(\mathfrak{X})$, то

$$T_x[(T_x^{-1}y)z] = yz, \qquad (T_x^{-1}y)z = T_x^{-1}(yz),$$

и если $a = T_x^{-1}e$, то $az = T_x^{-1}z$ для всех $z \in \mathfrak{X}$. Кроме того,

$$xa = T_x a = e = T_x^{-1}(T_x e) = T_x^{-1}(ex) = (T_x^{-1}e)x = ax.$$

Следовательно, $x^{-1} = a$ существует и $T_x^{-1}z = x^{-1}z$.

2. Определение. Элемент x банаховой алгебры $\mathfrak{X}$ называется *регулярным*, если существует обратный к нему элемент x^{-1}, и *сингулярным* в противном случае. *Спектр* $\sigma(x)$ элемента x состоит из тех комплексных чисел λ, для которых элемент $\lambda e - x$ сингулярен. Число $|\sigma(x)| = \sup\limits_{\lambda \in \sigma(x)} |\lambda|$ называется *спектральным*

[1]) Справедливость обратного утверждения вытекает из ассоциативности умножения в $\mathfrak{X}$. —*Прим. перев.*

радиусом элемента x. *Резольвентное множество* $\varrho(x)$ есть дополнение $\Phi-\sigma(x)$ спектра $\sigma(x)$. Функция $x(\lambda)=(\lambda e-x)^{-1}$, определенная для $\lambda\in\varrho(x)$, называется *резольвентой* элемента x. Элемент x назовем *правым* (*левым*) *топологическим делителем нуля*, если в $\mathfrak{X}$ найдется такая последовательность $\{x_n\}$ с $|x_n|=1$, $n=1, 2, \ldots$, что $x_n x\to 0$ (соответственно $xx_n\to 0$). Если элемент x является как правым, так и левым топологическим делителем нуля, то он называется *двусторонним топологическим делителем нуля*.

Предыдущее рассмотрение показывает, что $\sigma(x)=\sigma(T_x)$ и $\varrho(x)=\varrho(T_x)$; здесь $\sigma(T_x)$ и $\varrho(T_x)$ — соответственно спектр и резольвентное множество оператора T_x, см. VII.3.1. Оно позволяет также получить ряд утверждений, относящихся к B-алгебрам, в качестве следствий из соответствующих результатов теории операторов. Но поскольку непосредственные доказательства этих утверждений, по преимуществу, вполне элементарны, мы, полноты ради, приведем их здесь.

3. Лемма. *Мультипликативная группа G регулярных элементов B-алгебры $\mathfrak{X}$ открыта в $\mathfrak{X}$, и отображение $x\to x^{-1}$ является гомеоморфизмом G на себя.*

Доказательство. Покажем сначала, что группа G содержит шар $\{x\,|\,|e-x|<1\}$. В самом деле, при $|e-x|<1$ ряд $y=\sum_{n=0}^{\infty}(e-x)^n$ сходится (здесь, по определению, $a^0=e$). Поэтому

$$yx=xy=y-(e-x)y=\sum_{n=0}^{\infty}(e-x)^n-\sum_{n=1}^{\infty}(e-x)^n=e.$$

Следовательно, $y=x^{-1}$ и

$$|x^{-1}-e|=\left|\sum_{n=1}^{\infty}(e-x)^n\right|\leqslant\frac{|e-x|}{1-|e-x|}.$$

Таким образом, множество G содержит окрестность единицы и x^{-1} является непрерывной функцией от x в точке $x=e$. Пусть теперь $x\in G$ и $|y-x|<|x^{-1}|^{-1}$. Тогда

$$|x^{-1}y-e|=|x^{-1}(y-x)|\leqslant|x^{-1}||y-x|<1,$$

и, следовательно, как только что было доказано, $x^{-1}y\in G$, откуда $y\in G$. Если $y_n\to y$, то $y_n y^{-1}\to e$, и потому $yy_n^{-1}=(y_n y^{-1})^{-1}\to e$; следовательно, $y_n^{-1}\to y^{-1}$, ч. т. д.

4. Лемма. *Каждая граничная точка группы регулярных элементов B-алгебры является двусторонним топологическим делителем нуля.*

Доказательство. Пусть $x \notin G$, $x_n \in G$, $x_n \to x$. Если последовательность $\{|x_n^{-1}|\}$ ограничена, то $x_n^{-1}x - e = x_n^{-1}(x - x_n) \to 0$ и по лемме 3 $x_n^{-1}x \in G$ для больших n. Это противоречит условию $x \notin G$. Следовательно, последовательность $\{|x_n^{-1}|\}$ неограничена, и мы можем считать, что $|x_n^{-1}| \to \infty$. Пусть $y_n = x_n^{-1}/|x_n^{-1}|$, так что $|y_n| = 1$; тогда

$$y_n x = y_n(x - x_n) + \frac{e}{|x_n^{-1}|} \to 0,$$

$$x y_n = (x - x_n) y_n + \frac{e}{|x_n^{-1}|} \to 0;$$

это означает, что x — двусторонний топологический делитель нуля, ч. т. д.

5. Лемма. *Спектр $\sigma(x)$ элемента x банаховой алгебры является непустым ограниченным замкнутым множеством. Резольвента $x(\lambda) = (\lambda e - x)^{-1}$ элемента x аналитична на множестве $\varrho(x)$, стремится к 0 при $|\lambda| \to \infty$ и удовлетворяет соотношению*

$$x(\lambda) - x(\mu) = (\mu - \lambda)\, x(\lambda)\, x(\mu), \qquad \lambda,\ \mu \in \varrho(x).$$

Доказательство. То, что множество $\varrho(x)$ открыто и, следовательно, $\sigma(x)$ замкнуто, следует из леммы 3. Эта лемма показывает также, что $\lambda e - x = \lambda(e - x/\lambda) \in G$ для больших λ (ибо для больших λ элемент $e - x/\lambda$ близок к e), откуда вытекает ограниченность множества $\sigma(x)$. Так как $e - x/\lambda \to e$ при $|\lambda| \to \infty$, то по лемме 3 $x(\lambda) = \lambda^{-1}(e - x/\lambda)^{-1} \to 0$ при $|\lambda| \to \infty$. Для любых $\lambda, \mu \in \varrho(x)$ элементы $x(\mu)$ и $x(\lambda)$ коммутируют, и

$$(\lambda e - x)\, x(\lambda)\, x(\mu) = x(\mu),$$

$$(\mu e - x)\, x(\lambda)\, x(\mu) = x(\lambda),$$

$$x(\mu) - x(\lambda) = (\lambda - \mu)\, x(\lambda)\, x(\mu),$$

откуда

$$\frac{x(\mu) - x(\lambda)}{\mu - \lambda} = -x(\lambda)\, x(\mu).$$

Согласно лемме 3, функция $x(\lambda)$ непрерывна при $\lambda \in \varrho(x)$; поэтому последнее равенство показывает, что $x'(\lambda) = -x(\lambda^2)$ и, следовательно, резольвента $x(\lambda)$ аналитична на множестве $\varrho(x)$.

Наконец, если спектр $\sigma(x)$ пуст, то для любого линейного функционала x^* на $\mathfrak{X}$ функция $x^*x(\lambda)$ аналитична для всех λ и равна 0 на бесконечности; поэтому она равна 0 тождественно. Поскольку в качестве x^* можно взять любой элемент сопряженного пространства $\mathfrak{X}^*$, то отсюда следует (см. II.3.15), что $0 = x(\lambda) = x(\lambda)(\lambda e - x) = e$, но это противоречит предположению $|e| = 1$.

6. Теорема. *Если B-алгебра не содержит отличных от 0 двусторонних топологических делителей нуля, то она изометрически изоморфна полю комплексных чисел.*

Доказательство. Пусть $x \in \mathfrak{X}$. Согласно лемме 5, спектр $\sigma(x)$ непуст и ограничен, так что найдется точка λ, принадлежащая его границе. Тогда по лемме 4 $\lambda e - x$ является двусторонним топологическим делителем нуля, и потому $x = \lambda e$. Так как $|e| = 1$, то $|x| = |\lambda|$, ч. т. д.

→ 7. Следствие. *Если B-алгебра является телом, то она изометрически изоморфна полю комплексных чисел.*

8. Лемма. *Спектральный радиус $|\sigma(x)|$ элемента x банаховой алгебры удовлетворяет соотношениям*

$$|\sigma(x)| = \lim_n |x^n|^{1/n} \leqslant |x|.$$

Доказательство. При $|\lambda| > |x|$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/\lambda^{n+1}$ сходится и, поскольку

$$(\lambda e - x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{\lambda^n} - \frac{x^{n+1}}{\lambda^{n+1}} \right) = e,$$

представляет резольвенту $x(\lambda)$. Поэтому $|\sigma(x)| \leqslant |x|$. По лемме 5 резольвента $x(\lambda)$ аналитична на множестве $\varrho(x)$ и, следовательно, для любого функционала $x^* \in \mathfrak{X}^*$ все особые точки скалярной аналитической функции $x^*x(\lambda)$ заключены в круге $|\lambda| \leqslant |\sigma(x)|$. Поэтому ряд $x^*x(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} x^*x^n/\lambda^{n+1}$ сходится при $|\lambda| > |\sigma(x)|$, и, следовательно, для таких λ

$$\sup_n \left| \frac{x^*x^n}{\lambda^{n+1}} \right| < \infty.$$

Поскольку x^* — произвольный линейный непрерывный функционал на $\mathfrak{X}$, из принципа равномерной ограниченности (II.3.20) вытекает, что

$$\left| \frac{x^n}{\lambda^{n+1}} \right| \leqslant M_\lambda < \infty, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Следовательно,

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} |x^n|^{1/n} \leqslant |\lambda|.$$

Так как это верно для всех таких λ, что $|\lambda| > |\sigma(x)|$, то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |x^n|^{1/n} \leqslant |\sigma(x)|.$$

Для завершения доказательства заметим, что если элемент $\lambda e - x$ сингулярен, то сингулярен и элемент $\lambda^n e - x^n$, ибо $\lambda^n e - x^n$ делится на $\lambda e - x$. Поэтому, если $\lambda \in \sigma(x)$, то $\lambda^n \in \sigma(x^n)$, откуда $|\lambda^n| \leqslant |x^n|$; это показывает, что $|\lambda| \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} |x^n|^{1/n}$ при $\lambda \in \sigma(x)$. Следовательно, $|\sigma(x)| \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} |x^n|^{1/n}$, ч. т. д.

Если $\mathfrak{X}_0$ является B-подалгеброй (т. е. замкнутой подалгеброй с единицей) B-алгебры $\mathfrak{X}$ и $x \in \mathfrak{X}_0$, то наряду со спектром $\sigma(x)$ элемента x относительно алгебры $\mathfrak{X}$ можно рассмотреть его спектр $\sigma_0(x)$ относительно алгебры $\mathfrak{X}_0$. Множества $\sigma(x)$ и $\sigma_0(x)$, вообще говоря, различны; тем не менее предыдущая лемма показывает, что спектральные радиусы $|\sigma(x)|$ и $|\sigma_0(x)|$ равны. Если e_0 — идемпотент в $\mathfrak{X}$ (т. е. $e_0^2 = e_0$), отличный от 0 и e, а $\mathfrak{X}_0 = e_0 \mathfrak{X} e_0$, то ясно, что $\sigma_0(x) \subseteq \sigma(x)$ для любого $x \in \mathfrak{X}_0$. Следующая лемма показывает, что если единица подалгебры $\mathfrak{X}_0$ совпадает с e, то имеет место обратное включение.

9. Лемма. *Пусть B-подалгебра $\mathfrak{X}_0$ банаховой алгебры $\mathfrak{X}$ имеет общую с $\mathfrak{X}$ единицу e. Тогда $\sigma(x) \subseteq \sigma_0(x)$ для любого $x \in \mathfrak{X}_0$, в то время как граница $b(\sigma_0(x))$ множества $\sigma_0(x)$ содержится в границе $b(\sigma(x))$ множества $\sigma(x)$.*

Доказательство. Так как единица e алгебры $\mathfrak{X}$ содержится в $\mathfrak{X}_0$, то элемент, регулярный в $\mathfrak{X}_0$, регулярен и в $\mathfrak{X}$. Поэтому $\varrho_0(x) \subseteq \varrho(x)$ и $\sigma(x) \subseteq \sigma_0(x)$. Если $\lambda \in b(\sigma_0(x))$, то $\lambda e - x$ является граничной точкой группы регулярных элементов алгебры $\mathfrak{X}_0$. Тогда по лемме 4 $\lambda e - x$ есть двусторонний топологический делитель нуля в $\mathfrak{X}_0$, а значит, и в $\mathfrak{X}$. Следовательно, $b(\sigma_0(x)) \subseteq \sigma(x)$, что в сочетании с $\varrho_0(x) \subseteq \varrho(x)$ дает

$$\overline{\varrho_0(x)} \cap \sigma_0(x) = b(\sigma_0(x)) \subseteq \overline{\varrho(x)} \cap \sigma(x) = b(\sigma(x)),$$

ч. т. д.

10. Следствие. *Если в дополнение к условиям леммы 9 множество $\sigma_0(x)$ нигде не плотно или же множество $\varrho(x)$ связно, то $\sigma_0(x) = \sigma(x)$.*

Доказательство. Если множество $\sigma_0(x)$ нигде не плотно, то, поскольку оно замкнуто, $\sigma_0(x) = b(\sigma_0(x)) \subseteq b(\sigma(x)) \subseteq \sigma(x) \subseteq \sigma_0(x)$. Если множество $\varrho(x)$ связно и существует точка $\lambda \in \sigma_0(x) \cap \varrho(x)$, то можно соединить ее с бесконечностью непрерывной кривой, целиком лежащей в $\varrho(x)$. Но тогда найдется граничная точка множества $\sigma_0(x)$, лежащая в $\varrho(x)$. Это противоречит лемме. Следовательно, множество $\sigma_0(x) \cap \varrho(x)$ пусто; значит, и в этом случае $\sigma_0(x) \subseteq \sigma(x) \subseteq \sigma_0(x)$, ч. т. д.

11. Следствие. *Если в дополнение к условиям леммы 9 спектр $\sigma_0(x)$ веществен, то он совпадает со спектром $\sigma_1(x)$ элемента x относительно любой B-подалгебры $\mathfrak{X}_1 \subseteq \mathfrak{X}$, содержащей x и единицу e алгебры $\mathfrak{X}$.*

Доказательство. Так как $\sigma(x) \subseteq \sigma_0(x)$, то $\sigma(x)$ лежит на вещественной оси. Согласно лемме 5, множество $\sigma(x)$ ограничено. Поэтому $\varrho(x)$ связно, и следствие 10 показывает, что $\sigma_0(x) = \sigma(x) = \sigma_1(x)$.

Правым (*левым*) *идеалом* в $\mathfrak{X}$ называется такое непустое собственное линейное многообразие $\mathfrak{J}$ в $\mathfrak{X}$, что $\mathfrak{J}\mathfrak{X} = \mathfrak{J}$ (соответственно $\mathfrak{X}\mathfrak{J} = \mathfrak{J}$). Если одновременно $\mathfrak{J}\mathfrak{X} = \mathfrak{J}$ и $\mathfrak{X}\mathfrak{J} = \mathfrak{J}$, то идеал называется *двусторонним*. Множества $\mathfrak{X}$ и $\{0\}$ считаются тривиальными идеалами. Поскольку идеал является собственным подмножеством множества $\mathfrak{X}$, он не может содержать ни одного регулярного элемента и потому содержится в дополнении G' группы G регулярных элементов. Так как множество G открыто (лемма 3), то $\bar{\mathfrak{J}} \subseteq G'$ и потому $\bar{\mathfrak{J}} \neq \mathfrak{X}$. Отсюда и из непрерывности алгебраических операций следует, что $\bar{\mathfrak{J}}$ есть идеал. Таким образом, замыкание правого, левого или двустороннего идеала снова является правым, левым или двусторонним идеалом. Это показывает, что максимальный идеал (т. е. идеал, не содержащийся ни в каком другом одноименном нетривиальном идеале) всегда замкнут. Пусть $\mathfrak{J}$ — правый идеал; упорядочим по включению семейство всех правых идеалов, содержащих $\mathfrak{J}$. Применяя лемму Цорна, получаем, что это семейство содержит максимальный элемент. Итак, каждый правый (аналогично левый или двусторонний) идеал содержится в некотором максимальном правом (соответственно левом или двустороннем) идеале. В частности, если элемент x сингулярен, то хотя бы одно из множеств $x\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}x$ является идеалом; поэтому x содержится в некотором максимальном идеале. Перечисленные свойства идеалов собраны в следующей лемме.

12. Лемма. *Как для правых, так и для левых или двусторонних идеалов справедливы утверждения:*

(a) *Идеал не содержит регулярных элементов.*
(b) *Замыкание идеала есть идеал.*
(c) *Максимальный идеал замкнут.*
(d) *Каждый идеал содержится в некотором максимальном идеале.*

(e) *Элемент x содержится хотя бы в одном максимальном правом (левом) идеале тогда и только тогда, когда он не имеет правого (соответственно левого) обратного.*

Напомним, что смежные классы $x+\mathfrak{J}$, $x\in\mathfrak{X}$, по двустороннему идеалу $\mathfrak{J}$ образуют алгебру относительно следующих операций:

$$(x+\mathfrak{J})+(y+\mathfrak{J})=(x+y)+\mathfrak{J},$$
$$\alpha(x+\mathfrak{J})=(\alpha x)+\mathfrak{J}, \quad (x+\mathfrak{J})(y+\mathfrak{J})=(xy)+\mathfrak{J}.$$

Эта алгебра называется *факторалгеброй* алгебры $\mathfrak{X}$ по идеалу $\mathfrak{J}$ и обозначается $\mathfrak{X}/\mathfrak{J}$. *Норма* в факторалгебре банаховой алгебры $\mathfrak{X}$ по двустороннему идеалу $\mathfrak{J}$ задается соотношением

$$|x+\mathfrak{J}|=\inf_{y\in\mathfrak{J}}|x+y|.$$

13. Лемма. *Если $\mathfrak{J}$ — замкнутый двусторонний идеал B-алгебры $\mathfrak{X}$, то $\mathfrak{X}/\mathfrak{J}$ является B-алгеброй.*

Доказательство. Для краткости класс $x+\mathfrak{J}$ обозначим через $\bar{x}$. Ясно, что $\mathfrak{X}/\mathfrak{J}$ есть алгебра с единицей $\bar{e}$, так что остается лишь показать, что выполняются аксиомы нормы. Если $|\bar{x}|=0$, то найдется такая последовательность $x_n\in\mathfrak{J}$, что $|x+x_n|\to 0$, и, поскольку идеал $\mathfrak{J}$ замкнут, $x\in\mathfrak{J}$. Следовательно, $\bar{x}=\bar{0}$, т. е. $\bar{x}$ — нулевой элемент в $\mathfrak{X}/\mathfrak{J}$. Пусть теперь z, u, v независимо пробегают идеал $\mathfrak{J}$. Тогда

$$|\bar{x}\bar{y}|=|\overline{xy}|=\inf_{z}|xy+z|\leqslant\inf_{u,\,v}|(x+u)(y+v)|\leqslant|\bar{x}|\,|\bar{y}|.$$

Так как $|\bar{e}|=|\bar{e}^2|\leqslant|\bar{e}|^2$ и $|\bar{e}|\neq 0$, то $|\bar{e}|\geqslant 1$. С другой стороны, $|\bar{e}|=\inf|e+z|\leqslant|e|=1$. Следовательно, $|\bar{e}|=1$. Неравенство треугольника проверяется аналогичной выкладкой:

$$|\bar{x}+\bar{y}|=|\overline{x+y}|=\inf_{z}|x+y+z|\leqslant$$
$$\leqslant\inf_{u,\,v}|x+u+y+v|\leqslant|\bar{x}|+|\bar{y}|.$$

Ясно, что $|\alpha\bar{x}|=|\alpha|\,|\bar{x}|$. Наконец, докажем полноту пространства $\mathfrak{X}/\mathfrak{J}$. Пусть $\{\bar{x}_n\}$ — последовательность Коши в $\mathfrak{X}/\mathfrak{J}$ и $x_n\in\bar{x}_n$, $n=1, 2, \ldots$. Выберем из нее подпоследовательность $\{\bar{x}'_n\}$ таким образом, чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\bar{x}'_n-\bar{x}'_{n+1}|$ сходился. Фиксируем произвольно $z_1\in\mathfrak{J}$ и выбираем по индукции такие $z_2, z_3, \ldots\in\mathfrak{J}$, что

$$|x'_{i+1}+z_{i+1}-(x'_i+z_i)|\leqslant 2|\bar{x}'_{i+1}-\bar{x}'_i|, \quad i=1, 2, \ldots.$$

Тогда $y_n = x'_n + z_n$ есть последовательность Коши, ибо

$$|y_{n+p} - y_n| = \left|\sum_{k=0}^{p-1} (y_{n+k+1} - y_{n+k})\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{p-1} |y_{n+k+1} - y_{n+k}| \leqslant 2 \sum_{k=0}^{p-1} |\bar{x}'_{n+k+1} - \bar{x}'_{n+k}|.$$

Пусть $x = \lim y_n$; тогда

$$|\bar{x}'_n - \bar{x}| = |\bar{y}_n - \bar{x}| \leqslant |y_n - x| \to 0.$$

Таким образом, исходная последовательность Коши содержит сходящуюся подпоследовательность и потому сама сходится, ч. т. д.

2. Коммутативные B-алгебры

В коммутативной B-алгебре $\mathfrak{X}$ каждый идеал $\mathfrak{J}$ является двусторонним, и факторалгебра $\mathfrak{X}/\mathfrak{J}$ снова коммутативна; она является B-алгеброй, если идеал $\mathfrak{J}$ замкнут (1.13). Легко видеть, что каждый идеал $\mathfrak{J}'$ алгебры $\mathfrak{X}$, содержащий $\mathfrak{J}$ в качестве собственного подмножества, порождает в факторалгебре $\mathfrak{X}/\mathfrak{J}$ идеал $\bar{\mathfrak{J}}'$, состоящий из всех классов $\bar{x} = x + \mathfrak{J}$, для которых $x \in \mathfrak{J}'$. Обратно, всякий идеал факторалгебры $\mathfrak{X}/\mathfrak{J}$ может быть получен таким способом.

1. Теорема. *Пусть $\mathfrak{J}$ — замкнутый идеал коммутативной B-алгебры $\mathfrak{X}$. Факторалгебра $\mathfrak{X}/\mathfrak{J}$ тогда и только тогда изометрически изоморфна полю комплексных чисел, когда идеал $\mathfrak{J}$ максимален.*

Доказательство. Если идеал $\mathfrak{J}$ не максимален, то он строго содержится в некотором идеале; тогда факторалгебра $\mathfrak{X}/\mathfrak{J}$ содержит нетривиальный идеал и потому не является полем[1]). Если же идеал $\mathfrak{J}$ максимален, то $\mathfrak{X}/\mathfrak{J}$ не содержит нетривиальных идеалов; но тогда $\mathfrak{X}/\mathfrak{J}$ — поле. Требуемое утверждение вытекает из леммы 1.13 и теоремы 1.6.

Пусть $\mathcal{M}$ — множество всех максимальных идеалов коммутативной B-алгебры $\mathfrak{X}$. Из теоремы 1 следует, что для каждого $\mathfrak{M} \in \mathcal{M}$ и каждого $x \in \mathfrak{X}$ найдется такое комплексное число $x(\mathfrak{M})$, что $x + \mathfrak{M} = x(\mathfrak{M})\, e + \mathfrak{M}$. Ясно, что отображение $x \to x(\mathfrak{M})$ есть гомоморфизм алгебры $\mathfrak{X}$ в поле комплексных чисел Φ. Этот гомоморфизм непрерывен, ибо $|x(\mathfrak{M})| = |x + \mathfrak{M}| \leqslant |x|$.

[1]) В этом рассуждении существенно лишь, что $\mathfrak{X}/\mathfrak{J}$ и Φ алгебраически изоморфны. — *Прим. перев.*

2. Лемма. *Пусть μ — ненулевой гомоморфизм коммутативной B-алгебры $\mathfrak{X}$ в поле комплексных чисел Φ и*

$$\mathfrak{M}_\mu = \{x \mid \mu(x) = 0\}$$

— его ядро. Тогда $\mathfrak{M}_\mu$ — максимальный идеал алгебры $\mathfrak{X}$ и $x(\mathfrak{M}_\mu) = \mu(x)$ для любого $x \in \mathfrak{X}$. При этом соответствие $\mu \to \mathfrak{M}_\mu$ между множеством всех ненулевых гомоморфизмов и множеством $\mathcal{M}$ всех максимальных идеалов является взаимно однозначным.

Доказательство. Так как элемент $\mu(x)e - x$ содержится в идеале $\mathfrak{M}_\mu$, то он сингулярен, и потому число $\mu(x)$ принадлежит спектру $\sigma(x)$. Тогда по лемме 1.8 $|\mu(x)| \leqslant |x|$. Поэтому гомоморфизм μ непрерывен, идеал $\mathfrak{M}_\mu$ замкнут и $\mathfrak{X}/\mathfrak{M}_\mu$ является B-алгеброй (см. 1.13). Гомоморфизм μ постоянен на каждом смежном классе $x + \mathfrak{M}_\mu$ и потому порождает некоторый изоморфизм $\bar{\mu}$ факторалгебры $\mathfrak{X}/\mathfrak{M}_\mu$ в поле комплексных чисел Φ. Так как $\mu(\alpha e) = \alpha$, то $\bar{\mu}$ отображает $\mathfrak{X}/\mathfrak{M}_\mu$ на все Φ. Это показывает, что $\mathfrak{X}/\mathfrak{M}_\mu$ есть поле, и, следовательно, идеал $\mathfrak{M}_\mu$ максимален. Равенство $\mu(x) = x(\mathfrak{M}_\mu)$ вытекает непосредственно из определения $x(\mathfrak{M}_\mu)$. Соответствие $\mu \to \mathfrak{M}_\mu$ взаимно однозначно, ибо если $\mu_1 \to \mathfrak{M}_{\mu_1}$, $\mu_2 \to \mathfrak{M}_{\mu_2}$ и $\mathfrak{M}_{\mu_1} = \mathfrak{M}_{\mu_2}$, то $\mu_1(x) = x(\mathfrak{M}_{\mu_1}) = x(\mathfrak{M}_{\mu_2}) = \mu_2(x)$ для всех $x \in \mathfrak{X}$.

3. Следствие. *Всякий гомоморфизм коммутативной B-алгебры в поле комплексных чисел непрерывен.*

4. Лемма. *Пусть $\mathcal{M}$ — множество всех максимальных идеалов коммутативной B-алгебры $\mathfrak{X}$. Тогда $x(\mathcal{M}) = \sigma(x)$ и*

$$\sup_{\mathfrak{M} \in \mathcal{M}} |x(\mathfrak{M})| = \lim_n |x^n|^{1/n}.$$

Доказательство. Элемент $x(\mathfrak{M})e - x$ принадлежит максимальному идеалу $\mathfrak{M}$ и потому сингулярен (1.12e). Следовательно, $x(\mathfrak{M}) \in \sigma(x)$. Обратно, если $\lambda \in \sigma(x)$, то сингулярный элемент $\lambda e - x$ содержится в некотором максимальном идеале $\mathfrak{M}$ (1.12e), и потому $\lambda = x(\mathfrak{M})$. Равенство $\sup_{\mathfrak{M} \in \mathcal{M}} |x(\mathfrak{M})| = \lim_n |x^n|^{1/n}$ вытекает из леммы 1.8.

5. Определение. Элемент x банаховой алгебры $\mathfrak{X}$ называется *топологическим нильпотентом*, если $|x^n|^{1/n} \to 0$. *Радикал* $\mathfrak{R}$ есть множество всех топологических нильпотентов B-алгебры $\mathfrak{X}$. Если $\mathfrak{R} = \{0\}$, то алгебра $\mathfrak{X}$ называется *полупростой*.

6. Лемма. *Радикал коммутативной B-алгебры совпадает с пересечением всех ее максимальных идеалов.*

Доказательство. Поскольку $x(\mathfrak{M})=0$ тогда и только тогда, когда $x \in \mathfrak{M}$, эта лемма является следствием леммы 4.

7. Определение. *Структурным пространством*[1]) коммутативной B-алгебры $\mathfrak{X}$ называется множество $\mathcal{M}$ всех ее максимальных идеалов, наделенное топологией, которая задается всеми окрестностями вида

$$N(\mathfrak{M}_0;\ \varepsilon,\ A)=\{\mathfrak{M} \mid \mathfrak{M} \in \mathcal{M},\ |x(\mathfrak{M})-x(\mathfrak{M}_0)|<\varepsilon,\ x \in A\},$$

где $\varepsilon>0$, A — произвольное конечное подмножество в $\mathfrak{X}$, а $\mathfrak{M}_0$ пробегает $\mathcal{M}$.

Семейство множеств указанного вида удовлетворяет условиям леммы I.4.7 и потому действительно определяет некоторую топологию на множестве $\mathcal{M}$.

8. Лемма. *Структурное пространство $\mathcal{M}$ коммутативной B-алгебры $\mathfrak{X}$ является бикомпактным хаусдорфовым пространством, и для любого $x \in \mathfrak{X}$ функция $x(\mathfrak{M})$ непрерывна на $\mathcal{M}$.*

Доказательство. Непрерывность $x(\cdot)$ в каждой точке $\mathfrak{M}_0 \in \mathcal{M}$ вытекает из определения 7. Поэтому функция $x(\cdot)$ непрерывна на $\mathcal{M}$ (I.4.16a). Обозначим через Q_x замкнутый круг $\{\lambda \mid |\lambda| \leqslant |x|\}$ комплексной плоскости, и пусть $Q=\prod_{x \in \mathfrak{X}} Q_x$ — тихоновское произведение всех таких кругов (см. I.8.1). Так как $|x(\mathfrak{M})| \leqslant |x|$, то $x(\mathfrak{M}) \in Q_x$ для любого $x \in \mathfrak{X}$, и потому каждому $\mathfrak{M}$ из $\mathcal{M}$ соответствует некоторая точка $q \in Q$, а именно точка с координатами $q(x)=x(\mathfrak{M})$. Различным максимальным идеалам $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ отвечают в Q различные точки, ибо если $x \in \mathfrak{M}_1$ и $x \notin \mathfrak{M}_2$, то $x(\mathfrak{M}_1)=0 \neq x(\mathfrak{M}_2)$. Согласно теореме Тихонова (I.8.5) и лемме I.8.2, Q является бикомпактным хаусдорфовым пространством, а $\mathcal{M}$ топологически эквивалентно некоторому подмножеству пространства Q. Для завершения доказательства достаточно, в силу I.5.7, показать, что $\mathcal{M}$, рассматриваемое как подмножество в Q, замкнуто. Пусть $\lambda \in \overline{\mathcal{M}}$, $\varepsilon>0$, $A=\{x,\ y,\ x+y\}$, где x и y — произвольные элементы из $\mathfrak{X}$. Окрестность $N(\lambda;\ \varepsilon,\ A)$, рассматриваемая как окрестность точки λ в Q, пересекается с $\mathcal{M}$, и потому существует такой максимальный идеал $\mathfrak{M}$, что

$$|\lambda(x)-x(\mathfrak{M})|<\varepsilon,\quad |\lambda(y)-y(\mathfrak{M})|<\varepsilon,$$
$$|\lambda(x+y)-(x+y)(\mathfrak{M})|<\varepsilon.$$

Так как $(x+y)(\mathfrak{M})=x(\mathfrak{M})+y(\mathfrak{M})$, а $\varepsilon>0$ произвольно, то $\lambda(x+y)=\lambda(x)+\lambda(y)$.

[1]) В отечественной литературе чаще употребляется термин «пространство максимальных идеалов». — *Прим. перев.*

Подобным образом можно показать, что $\lambda(e)=1$, $\lambda(\alpha x)=\alpha\lambda(x)$ и $\lambda(xy)=\lambda(x)\lambda(y)$. Следовательно, точка $\lambda\in\overline{\mathscr{M}}$ определяет ненулевой гомоморфизм алгебры $\mathfrak{X}$ в поле комплексных чисел; в силу леммы 2 существует такой максимальный идеал $\mathfrak{M}_\lambda\in\mathscr{M}$, что $x(\mathfrak{M}_\lambda)=\lambda(x)$, $x\in\mathfrak{X}$. Итак, $\lambda\in\mathscr{M}$, т. е. $\mathscr{M}$ замкнуто в Q, ч. т. д.

$\longrightarrow$ 9. Теорема. *Пусть $\mathscr{M}$ — структурное пространство коммутативной B-алгебры $\mathfrak{X}$ и $C(\mathscr{M})$ есть B-алгебра всех комплексных непрерывных функций на $\mathscr{M}$. Тогда отображение $x\longrightarrow x(\cdot)$ является непрерывным гомоморфизмом алгебры $\mathfrak{X}$ в $C(\mathscr{M})$, причем $\sup\limits_{\mathfrak{M}\in\mathscr{M}}|x(\mathfrak{M})|\leqslant|x|$. Это отображение является взаимно однозначным тогда и только тогда, когда алгебра $\mathfrak{X}$ полупроста.*

Доказательство. То, что отображение $x\longrightarrow x(\cdot)$ является гомоморфизмом, следует из определения $x(\mathfrak{M})$. В лемме 8 утверждается, что $x(\cdot)\in C(\mathscr{M})$. Неравенство $|x(\mathfrak{M})|\leqslant|x|$ вытекает из определения нормы в факторалгебре (а также из леммы 4). В случае полупростоты алгебры $\mathfrak{X}$ из леммы 6 следует, что если $x(\mathfrak{M})=0$ для всех $\mathfrak{M}\in\mathscr{M}$, то $x=0$; таким образом, в этом случае отображение $x\longrightarrow x(\cdot)$ взаимно однозначно. Обратно, если это отображение взаимно однозначно, то та же лемма показывает, что алгебра $\mathfrak{X}$ полупроста, ч. т. д.

10. Определение. Будем говорить, что B-алгебра $\mathfrak{X}$ *порождается множеством* $Y\subseteq\mathfrak{X}$, если наименьшая замкнутая подалгебра алгебры $\mathfrak{X}$, содержащая Y и единицу e, совпадает с $\mathfrak{X}$. В этом случае Y называется *системой образующих*, а элементы $y\in Y$ — *образующими* алгебры $\mathfrak{X}$.

11. Теорема. *Структурное пространство коммутативной B-алгебры $\mathfrak{X}$, порожденной множеством $Y\subseteq\mathfrak{X}$, гомеоморфно замкнутому подмножеству тихоновского произведения $\prod\sigma(y)$, где y пробегает Y.*

Доказательство. Согласно лемме 4, $y(\mathscr{M})=\sigma(y)$ и потому соответствие $\mathfrak{M}\longrightarrow y(\mathfrak{M})$ задает отображение пространства $\mathscr{M}$ в $\prod\limits_{y\in Y}\sigma(y)$. Это отображение непрерывно, ибо непрерывны все функции $y(\cdot)$. Допустим, что $y(\mathfrak{M}_1)=y(\mathfrak{M}_2)$ для всех $y\in Y$. Тогда, поскольку Y порождает $\mathfrak{X}$, имеем $x(\mathfrak{M}_1)=x(\mathfrak{M}_2)$ для всех $x\in\mathfrak{X}$, откуда $\mathfrak{M}_1=\mathfrak{M}_2$, так как если $x\in\mathfrak{M}_1$ и $x\notin\mathfrak{M}_2$, то $x(\mathfrak{M}_1)=0\neq x(\mathfrak{M}_2)$. Поэтому рассматриваемое отображение является непрерывным и взаимно однозначным отображением бикомпактного хаусдорфова пространства $\mathscr{M}$ в хаусдорфово пространство $\prod_{y \in Y} \sigma(y)$. Следовательно (I.5.8), это отображение является гомеоморфизмом, причем образ $\mathscr{M}$ (согласно I.5.7) замкнут в $\prod_{y \in Y} \sigma(y)$, ч. т. д.

12. Следствие. *Если B-алгебра $\mathfrak{X}$ порождается множеством $Y \subseteq \mathfrak{X}$, то в качестве базы открытых множеств ее структурного пространства $\mathscr{M}$ можно взять все окрестности вида*

$$N(\mathfrak{M}_0;\ \varepsilon,\ A) = \{\mathfrak{M} \mid \mathfrak{M} \in \mathscr{M},\ |y(\mathfrak{M}) - y(\mathfrak{M}_0)| < \varepsilon,\ y \in A\},$$

где A — произвольное конечное подмножество в Y.

13. Следствие. *Структурное пространство B-алгебры с одной образующей гомеоморфно спектру этой образующей.*

14. Теорема. *Подмножество комплексной плоскости тогда и только тогда гомеоморфно структурному пространству некоторой B-алгебры с одной образующей, когда оно компактно и его дополнение связно.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{M}$ — структурное пространство B-алгебры $\mathfrak{X}$ с одной образующей z. Согласно следствию 13, компактное множество $\sigma(z)$ гомеоморфно $\mathscr{M}$. Допустим, что дополнение к $\sigma(z)$ несвязно, и пусть G — связная ограниченная компонента этого дополнения. Для каждого $x \in \mathfrak{X}$ найдется такая последовательность полиномов $\{P_n\}$, что $|P_n(z) - x| \to 0$; следовательно, если $\lambda = z(\mathfrak{M})$, то

$$|P_n(\lambda) - x(\mathfrak{M})| = |(P_n(z) - x)(\mathfrak{M})| \leqslant |P_n(z) - x| \to 0$$

равномерно относительно $\mathfrak{M} \in \mathscr{M}$. Так как $z(\mathscr{M}) = \sigma(z)$, то последовательность полиномов $\{P_n(\lambda)\}$ сходится равномерно на $\sigma(z)$. Тогда, как доказывается в теории функций комплексного переменного, последовательность $\{P_n(\lambda)\}$ сходится равномерно также на G. Для любого $\lambda \in G$ и любого $x \in \mathfrak{X}$ положим $x(\lambda) = \lim P_n(\lambda)$, где $\{P_n(\lambda)\}$ — такая последовательность полиномов, что $|P_n(z) - x| \to 0$. Ясно, что величина $x(\lambda)$ не зависит от выбора конкретной последовательности $\{P_n\}$, участвующей в ее определении. Для фиксированного $\lambda_0 \in G$ отображение $x \to x(\lambda_0)$ является ненулевым гомоморфизмом алгебры $\mathfrak{X}$ в поле комплексных чисел. Поэтому по лемме 2 найдется такой максимальный идеал $\mathfrak{M}_0$, что $x(\mathfrak{M}_0) = x(\lambda_0)$ для всех $x \in \mathfrak{X}$. В частности, $\lambda_0 = z(\lambda_0) = z(\mathfrak{M}_0) \in z(\mathscr{M}) = \sigma(z)$, что противоречит тому, что $\lambda_0 \in G \subseteq \Phi - \sigma(z)$. Обратно, пусть σ — компактное подмножество комплекс-

[1]) Это вытекает из очевидного включения $b(G) \subseteq \sigma(z)$, где $b(G)$ — граница области G, и принципа максимума модуля. — *Прим. перев.*

ной плоскости, и пусть его дополнение ϱ связно. Пусть $C(\sigma)$ есть B-алгебра всех комплексных непрерывных функций на множестве σ с нормой

$$|f| = \sup_{\lambda \in \sigma} |f(\lambda)|.$$

Пусть z — элемент алгебры $C(\sigma)$, определяемый соотношением $z(\lambda) = \lambda$, $\lambda \in \sigma$, и пусть $\mathfrak{X}_0$ есть B-подалгебра алгебры $C(\sigma)$, порожденная элементом z и единичным элементом алгебры $C(\sigma)$. Пусть $\sigma_0(z)$ — спектр элемента z относительно алгебры $\mathfrak{X}_0$, а $\sigma(z)$ — спектр z относительно $C(\sigma)$. Ясно, что $\sigma(z) = \sigma$; следовательно, резольвентное множество $\varrho(z) = \varrho$ связно и потому, согласно следствию 1.10, $\sigma_0(z) = \sigma(z) = \sigma$, ч. т. д.

Мы закончим рассмотрение свойств структурного пространства коммутативной B-алгебры приложением изложенной теории к доказательству существования чеховского бикомпактного расширения для вполне регулярного топологического пространства.

15. Определение. Топологическое пространство Λ *вполне регулярно*, если всякое его одноточечное подмножество замкнуто и для любого замкнутого множества $\Lambda_0 \subseteq \Lambda$ и для любой точки $\lambda_0 \notin \Lambda_0$ найдется такая непрерывная на Λ функция $f(\lambda)$, что $0 \leqslant f(\lambda) \leqslant 1$ для всех $\lambda \in \Lambda$; $f(\lambda_0) = 1$ и $f(\lambda) = 0$ при $\lambda \in \Lambda_0$.

16. Теорема (*теорема Стоуна — Чеха о бикомпактном расширении*). *Всякое вполне регулярное топологическое пространство Λ гомеоморфно всюду плотному подмножеству $\mathcal{M}_\Lambda$ бикомпактного хаусдорфова пространства $\mathcal{M}$, такого, что любая комплексная ограниченная непрерывная функция, определенная на $\mathcal{M}_\Lambda$, допускает единственное непрерывное продолжение на $\mathcal{M}$* [1]).

Доказательство. Пусть $C(\Lambda)$ — банахова алгебра всех комплексных ограниченных непрерывных функций на Λ, а $\mathcal{M}$ — структурное пространство этой алгебры. Пространство $\mathcal{M}$ хаусдорфово и бикомпактно (лемма 8). Для каждого $\lambda \in \Lambda$ отображение $x \to x(\lambda)$ алгебры $C(\Lambda)$ в поле комплексных чисел является гомоморфизмом, и потому (лемма 2) существует такой максимальный идеал $\mathfrak{M}_\lambda$, что $x(\mathfrak{M}_\lambda) = x(\lambda)$. Поскольку пространство Λ вполне регулярно, отображение $\lambda \to \mathfrak{M}_\lambda$ пространства Λ в $\mathcal{M}$ взаимно однозначно. Пусть $\mathcal{M}_\Lambda$ — образ Λ в $\mathcal{M}$ при этом отображении. Докажем, что $\mathcal{M}_\Lambda$ плотно в $\mathcal{M}$. Если это не так, то существует в $\mathcal{M}$ окрестность вида

$$\{\mathfrak{M} \mid |x_i(\mathfrak{M}) - x_i(\mathfrak{M}_0)| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \ldots, n\},$$

[1]) Пространство $\mathcal{M}$ называется чеховским (или максимальным) бикомпактным расширением пространства Λ. — *Прим. перев.*

не пересекающаяся с $\mathcal{M}_\Lambda$. Тогда если $y_i = x_i - x_i(\mathfrak{M}_0)e$, то для каждого $\lambda \in \Lambda$ найдется такое натуральное $i \leqslant n$, что $|y_i(\lambda)| \geqslant \varepsilon$. Пусть

$$y(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} y_i(\lambda)\overline{y_i(\lambda)};$$

тогда $y(\lambda) \geqslant \varepsilon^2$ для всех $\lambda \in \Lambda$, так что для $y(\lambda)$ существует в $C(\Lambda)$ обратный элемент y^{-1}. Следовательно (лемма 1.12), y не содержится ни в каком максимальном идеале; но $y(\mathfrak{M}_0) = 0$, откуда $y \in \mathfrak{M}_0$. Полученное противоречие показывает, что $\mathcal{M}_\Lambda$ всюду плотно в $\mathcal{M}$. Далее, для каждого $x \in C(\Lambda)$ функция $x(\mathfrak{M})$ непрерывна на $\mathcal{M}$ (лемма 8) и является продолжением на $\mathcal{M}$ функции $x(\mathfrak{M}_\lambda) = x(\lambda)$ (определенной первоначально на $\mathcal{M}_\Lambda$). Итак, для завершения доказательства достаточно показать, что взаимно однозначное отображение $\delta: \lambda \to \mathfrak{M}_\lambda$ пространства Λ на $\mathcal{M}_\Lambda$ является гомеоморфизмом. Прообразом окрестности

$$(\alpha) \qquad \{\mathfrak{M}_\lambda \mid \mathfrak{M}_\lambda \in \mathcal{M}_\Lambda,\ |x_i(\mathfrak{M}_\lambda) - x_i(\mathfrak{M}_{\lambda_0})| < \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, n\}$$

при этом отображении является множество

$$(\beta) \qquad \{\lambda \mid \lambda \in \Lambda,\ |x_i(\lambda) - x_i(\lambda_0)| < \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, n\},$$

которое в силу непрерывности функций x_i открыто. Следовательно, отображение δ непрерывно. Чтобы доказать непрерывность δ^{-1}, т. е. чтобы показать, что отображение δ переводит открытые множества в открытые, заметим сначала, что открытые множества вида (β) отображаются в множества вида (α), которые открыты в $\mathcal{M}_\Lambda$. Далее, полная регулярность пространства Λ позволяет установить, что каждое открытое в Λ множество является объединением некоторых множеств вида (β). Действительно, пусть G — окрестность точки λ_0, а $f \in C(\Lambda)$ — функция, отделяющая точку λ_0 от множества $\Lambda - G$, т. е. $0 \leqslant f(\lambda) \leqslant 1$; $f(\lambda_0) = 1$; $f(\lambda) = 0$ при $\lambda \notin G$. Тогда множество

$$\left\{\lambda \mid \lambda \in \Lambda,\ |f(\lambda) - f(\lambda_0)| < \frac{1}{2}\right\}$$

есть окрестность точки λ_0, содержащаяся в окрестности G. Следовательно, множества вида (β) образуют базу открытых множеств в Λ. Поэтому δ переводит открытые множества в открытые и является гомеоморфизмом, ч. т. д.

17. Следствие. *Бикомпактное хаусдорфово пространство Λ гомеоморфно структурному пространству B-алгебры $C(\Lambda)$.*

18. Следствие. *Если Λ_1 и Λ_2 — бикомпактные хаусдорфовы пространства, а алгебры $C(\Lambda_1)$ и $C(\Lambda_2)$ эквивалентны*[1], *то пространства Λ_1 и Λ_2 гомеоморфны.*

Чтобы понять, насколько замечательна теорема 16, рассмотрим в качестве пространства Λ полуоткрытый интервал $0 < \lambda \leqslant 1$ вещественной оси. Этот интервал является, очевидно, всюду плотным подмножеством компактного пространства — отрезка $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Однако непрерывная и ограниченная на Λ функция $\sin(1/\lambda)$, имеющая, согласно теореме, непрерывное продолжение на чеховское бикомпактное расширение интервала Λ, не имеет, разумеется, такого продолжения на отрезок $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, получающийся добавлением к Λ одной точки. В действительности никогда не удается эффективно построить чеховское расширение небикомпактного пространства.

3. Коммутативные B^*-алгебры

Мы уже отмечали, что B-пространства всех ограниченных функций на некотором множестве, непрерывных ограниченных функций на топологическом пространстве и почти периодических функций являются B-алгебрами с инволюцией $f^*(s) = \overline{f(s)}$, если в качестве алгебраических операций принять естественные операции над функциями. Согласно следующему определению, эти алгебры являются также B^*-алгебрами.

1. Определение. *B^*-алгеброй* называется B-алгебра с инволюцией $*$, удовлетворяющей дополнительному условию $|x^*x| = |x|^2$.

Кроме уже перечисленных примеров, в которых B^*-алгебры являются коммутативными, можно указать алгебру $B(\mathfrak{H})$ всех ограниченных линейных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Инволюция в этой алгебре состоит в переходе к гильбертовому сопряженному оператору (VI.2.9). Именно, если $T \in B(\mathfrak{H})$, то, по определению, T^* есть такой оператор из $B(\mathfrak{H})$, что

$$(\mathrm{I}) \qquad (Tx, y) = (x, T^*y), \qquad x, y \in \mathfrak{H},$$

где $(\cdot\,, \cdot)$ — скалярное произведение в $\mathfrak{H}$. Для проверки тожде-

[1]) Здесь предполагается, что алгебры $C(\Lambda_1)$, $C(\Lambda_2)$ изоморфны топологически и алгебраически. Более сильный результат состоит в том, что для гомеоморфизма пространств Λ_1 и Λ_2 достаточно, чтобы соответствующие алгебры были алгебраически изоморфны. Этот результат является очевидным следствием следующей теоремы Гельфанда: если коммутативные полупростые B-алгебры изоморфны алгебраически, то они изоморфны и топологически. (См. Гельфанд, Райков, Шилов [1*, стр. 68—70].) — *Прим. перев.*

ства $|T^*T| = |T|^2$ заметим сначала, что

$$|T^*T| = \sup |(T^*Tx, y)| = \sup |(Tx, Ty)| \geqslant \geqslant \sup |(Tx, Tx)| = \sup |Tx|^2 = |T|^2,$$

где верхние грани берутся по всем x, y из $\mathfrak{H}$, для которых $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$. С другой стороны,

$$|T^*| = \sup |(T^*x, y)| = \sup |(x, Ty)| = |T|,$$

так что

$$|T^*T| \leqslant |T^*| |T| = |T|^2.$$

Таким образом, $|T^*T| = |T|^2$, что вместе с леммой VI.2.10 доказывает справедливость следующей леммы.

2. Лемма. *Алгебра $B(\mathfrak{H})$ всех ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, в которой инволюция * определена соотношением* (I), *является B^*-алгеброй.*

Главная цель настоящего параграфа состоит в описании коммутативных B^*-алгебр. Будет показано, что гомоморфизм $x \longrightarrow x(\cdot)$ (см. теорему 2.9) коммутативной B^*-алгебры $\mathfrak{X}$ в алгебру $C(\Lambda)$ всех непрерывных функций на структурном пространстве Λ алгебры $\mathfrak{X}$ является изометрическим изоморфизмом между $\mathfrak{X}$ и $C(\Lambda)$. Будет также показано, что этот изоморфизм является *-изоморфизмом, т. е. сохраняет инволюцию. Этот основополагающий результат, принадлежащий Гельфанду и Наймарку, найдет много применений в следующих двух главах.

3. Лемма. *Если $\mathfrak{X}$ — коммутативная B^*-алгебра, то $|x^2| = |x|^2$, $|x| = |x^*|$ и единица e удовлетворяет соотношению $e = e^*$.*

Доказательство. Для любого $x \in \mathfrak{X}$ имеем $|x^2|^2 = |(x^2)^* x^2| = |(x^*)^2 x^2| = |(xx^*)^* (xx^*)| = |xx^*|^2 = |x|^4$. Таким образом, $|x^2| = |x|^2$. Аналогично $|xx^*| = |x|^2$, $|xx^*| = |x^{**}x^*| = |x^*|^2$, откуда $|x| = |x^*|$. Далее, $ee^* = e^*$, $ee^* = e^{**}e^* = (e^*e)^* = e$ и поэтому $e^* = e$, ч. т. д.

4. Определение. Гомоморфное отображение h B^*-алгебры $\mathfrak{X}$ в B^*-алгебру $\mathfrak{Y}$ называется **-гомоморфизмом*, если оно сохраняет инволюцию, т. е. $h(x)^* = h(x^*)$. Если *-гомоморфизм h отображает B^*-алгебру $\mathfrak{X}$ взаимно однозначно на B^*-алгебру $\mathfrak{Y}$, т. е. является изоморфизмом, то он называется **-изоморфизмом.* Если такой изоморфизм существует, то алгебры $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ называются *-изоморфными или *-эквивалентными. Для записи *-эквивалентности между алгебрами $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ иногда используется символ $\mathfrak{X} \stackrel{*}{=} \mathfrak{Y}$. Структурное пространство (определение 2.7) B^*-алгебры $\mathfrak{X}$ иногда называется *спектром алгебры* $\mathfrak{X}$ и часто обозначается символом $\sigma(\mathfrak{X})$.

5. Лемма (*Аренс*). *Если Λ является спектром коммутативной B^*-алгебры $\mathfrak{X}$, то отображение $x \to x(\cdot)$ алгебры $\mathfrak{X}$ в $C(\Lambda)$ представляет собой $*$-гомоморфизм.*

Доказательство. Согласно теореме 2.9, отображение $x \to x(\cdot)$ является гомоморфизмом. Таким образом, достаточно показать, что $x^*(\lambda) = \overline{x(\lambda)}$ для всех $\lambda \in \Lambda$ и $x \in \mathfrak{X}$. Пусть $x(\lambda) = \alpha + i\beta$ и $x^*(\lambda) = \gamma + i\delta$, где α, β, γ, δ вещественны. Допустим, что $\beta + \delta \neq 0$, и покажем, что это приводит к противоречию. Положим $y = [x + x^* - (\alpha + \gamma) e]/(\beta + \delta)$; тогда $y^* = y$ и $y(\lambda) = i$. Пусть N — вещественное число. Тогда $(y + Nie)(\lambda) = y(\lambda) + Ni = i(1 + N)$ и, следовательно, $|1 + N| \leqslant |y + Nie|$. Поэтому $(1 + N)^2 \leqslant$ $\leqslant |y + Nie|^2 = |(y + Nie)(y + Nie)^*| = |(y + Nie)(y - Nie)| = |y^2 + N^2 e| \leqslant$ $\leqslant |y|^2 + N^2$. Поскольку это неравенство должно выполняться для всех вещественных N, то, подставляя $N = |y|^2$, получаем противоречие. Следовательно, $\beta + \delta = 0$, и $x(\lambda) = \alpha + \beta i$, $x^*(\lambda) =$ $= \gamma - \beta i$, $(ix)(\lambda) = ix(\lambda) = -\beta + \alpha i$, $(ix)^*(\lambda) = -ix^*(\lambda) = -\beta - \gamma i$. Поэтому из доказанного выше следует, что $\alpha - \gamma = 0$, так что $x^*(\lambda) = \overline{x(\lambda)}$, ч. т. д.

6. Следствие. *Если $x = x^*$, то $x(\lambda)$ вещественно.*

$\to$ 7. Теорема (*Гельфанд — Наймарк*). *Коммутативная B^*-алгебра изометрически $*$-изоморфна алгебре всех комплексных непрерывных функций на своем спектре.*

Доказательство. Пусть Λ — спектр B^*-алгебры $\mathfrak{X}$. Так как по лемме 3 $|x^m| = |x|^m$, если m является степенью 2, то из леммы 2.4 вытекает, что

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} |x(\lambda)| = \lim_n \sqrt[n]{|x^n|} = |x|.$$

Поэтому отображение $x \to x(\cdot)$ алгебры $\mathfrak{X}$ в $C(\Lambda)$ изометрично и $\mathfrak{X}$ не имеет радикала. По лемме 5 это отображение является $*$-гомоморфизмом. Остается доказать, что каждой непрерывной функции на Λ соответствует некоторый элемент x из $\mathfrak{X}$. Для этого мы применим обобщенную теорему Вейерштрасса (IV.6.17). Обозначим через C подалгебру в $C(\Lambda)$, порожденную всеми функциями $x(\cdot)$, $x \in \mathfrak{X}$. Так как $|x| = \sup |x(\lambda)|$ и пространство $\mathfrak{X}$ полно, то C — замкнутая подалгебра в $C(\Lambda)$. Пусть λ_1, λ_2 — различные максимальные идеалы в Λ, и пусть $y \in \lambda_1$, $y \notin \lambda_2$. Тогда $y(\lambda_1) \neq y(\lambda_2)$, так что C различает точки Λ. Лемма 5 показывает, что условия теоремы Вейерштрасса выполнены, и потому мы заключаем, что $C = C(\Lambda)$, ч. т. д.

8. Следствие. *Если Λ — спектр коммутативной B^*-алгебры $\mathfrak{X}$, то гомоморфизм $x \to x(\cdot)$, фигурирующий в теореме 2.9, является изометрическим $*$-изоморфизмом между $\mathfrak{X}$ и $C(\Lambda)$.*

9. Следствие. *Коммутативная B^*-алгебра операторов в гильбертовом пространстве изометрически $*$-эквивалентна B^*-алгебре всех непрерывных функций на ее спектре.*

10. Следствие. *Пусть $\mathfrak{Y}$ является B^*-подалгеброй коммутативной B^*-алгебры $\mathfrak{X}$, причем $\mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{X}$ имеют общую единицу e. Тогда элемент y из $\mathfrak{Y}$ обратим в $\mathfrak{X}$ в том и только том случае, когда он обратим в $\mathfrak{Y}$. Следовательно, спектр элемента y относительно $\mathfrak{Y}$ совпадает с его спектром относительно $\mathfrak{X}$.*

Доказательство. Если y^{-1} существует в $\mathfrak{Y}$, то, поскольку $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ имеют одну и ту же единицу, y^{-1} является обратным к y и в $\mathfrak{X}$. Обратно, если y^{-1} существует в $\mathfrak{X}$, то, поскольку $(y^{-1})^* y^* = (yy^{-1})^* = e^* = e$, элемент y^* имеет обратный в $\mathfrak{X}$. Следовательно, yy^* обратим в $\mathfrak{X}$. Но по теореме 7 спектр элемента yy^* неотрицателен, и потому резольвентное множество $\varrho(yy^*)$ связно. Из следствия 1.10 вытекает, что yy^* имеет обратный в $\mathfrak{Y}$. Поэтому элемент y обратим в $\mathfrak{Y}$, ч. т. д.

11. Следствие. *Пусть x — элемент коммутативной B^*-алгебры $\mathfrak{X}$, и пусть $B^*(x)$ является наименьшей замкнутой B^*-подалгеброй, содержащей x и единицу e алгебры $\mathfrak{X}$. Тогда алгебра $B^*(x)$ изометрически $*$-эквивалентна алгебре $C(\sigma(x))$.*

Доказательство. Ввиду следствия 10 спектр элемента x как элемента алгебры $B^*(x)$ совпадает с его спектром $\sigma(x)$ относительно $\mathfrak{X}$. Поэтому мы можем предположить, что полиномы от e, x и x^* всюду плотны в $\mathfrak{X}$, т. е. что $\mathfrak{X} = B^*(x)$. Пусть $\Lambda = \sigma(\mathfrak{X})$, так что $\sigma(x) = x(\Lambda)$. Рассмотрим непрерывное отображение $\lambda \longrightarrow x(\lambda)$ пространства Λ на $\sigma(x)$. Покажем, что оно взаимно однозначно. Если $x(\lambda) = x(\lambda')$, то $x^*(\lambda) = \overline{x(\lambda)} = \overline{x(\lambda')} = x^*(\lambda')$, и потому $y(\lambda) = y(\lambda')$ для любого полинома от e, x и x^*. Поскольку такие полиномы всюду плотны в $\mathfrak{X}$, получаем, что $y(\lambda) = y(\lambda')$ для всех y из $\mathfrak{X}$. Тогда по следствию 8 любая непрерывная на Λ функция в точках λ и λ' принимает одинаковые значения. Так как бикомпактное хаусдорфово пространство нормально, то это означает, что $\lambda = \lambda'$. Таким образом, $\lambda \longrightarrow x(\lambda)$ является непрерывным взаимно однозначным отображением бикомпактного пространства Λ на бикомпактное пространство $x(\Lambda) = \sigma(x)$. Следовательно, $\sigma(x)$ и Λ гомеоморфны. Поэтому, согласно теореме 7, $\mathfrak{X} = B^*(x) \overset{*}{=} C(\sigma(x))$, ч. т. д.

Вообще говоря, имеется много различных изометрических $*$-изоморфизмов между $B^*(x)$ и $C(\sigma(x))$, так как ясно, что каждый гомеоморфизм $\sigma(x)$ на себя порождает изометрический автоморфизм алгебры $C(\sigma(x))$ и, таким образом, преобразует один

*-изоморфизм между $B^*(x)$ и $C(\sigma(x))$ в другой. Существует один специальный изометрический *-изоморфизм между $B^*(x)$ и $C(\sigma(x))$, который мы хотим выделить.

Используя обозначения предыдущего доказательства, рассмотрим *-изоморфизм[1] $y \longleftrightarrow y(x^{-1}(\cdot))$ между $B^*(x)$ и $C(\sigma(x))$; он обладает тем свойством, что элемент x соответствует функции $x(x^{-1}(\mu)) = \mu$, $\mu \in \sigma(x)$. Очевидно, что требование соответствия между элементом x и функцией $g(\mu) \equiv \mu$ определяет этот *-изоморфизм однозначно, что приводит нас к следующему определению.

12. Определение. Пусть x — элемент коммутативной B^*-алгебры, и пусть $f \in C(\sigma(x))$. Под $f(x)$ мы будем понимать элемент в $B^*(x)$, соответствующий функции f из $C(\sigma(x))$ при *-изоморфизме между $B^*(x)$ и $C(\sigma(x))$, однозначно определяемом требованием, чтобы x и $g(\mu) \equiv \mu$ были соответствующими элементами.

Обозначение $f(x)$, введенное в определении 12, совпадает с употреблявшимся ранее. В самом деле, если $f(\mu) = \sum \alpha_{nm}\mu^n\bar{\mu}^m$ — полином от μ и $\bar{\mu}$, то $f(x) = \sum \alpha_{nm}x^n x^{*m}$. Символ $f(x)$ употребляется также для обозначения элемента $(2\pi i)^{-1} \int_C f(\lambda)(\lambda e - x)^{-1} d\lambda$ (см. определение VII.3.9) при условии, что f является однозначной аналитической функцией, определенной на некотором открытом множестве, содержащем $\sigma(x)$. Следующая лемма показывает, что эти два определения элемента $f(x)$ совпадают.

13. Лемма. *Пусть f — комплексная функция, однозначная и аналитическая на некотором открытом множестве, содержащем спектр элемента x коммутативной B^*-алгебры. Тогда значения, придаваемые символу $f(x)$ определениями* 12 *и* VII.3.9, *совпадают.*

Доказательство. Пусть соответствие $y \longleftrightarrow y(\cdot)$ представляет собой *-изоморфизм между $B^*(x)$ и $C(\sigma(x))$, участвующий в определении 12, и пусть

$$y = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\lambda)(\lambda e - x)^{-1} d\lambda,$$

где кривая C удовлетворяет требованиям определения VII.3.9. Тогда

$$y(\mu) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\lambda)(\lambda e - x)^{-1}(\mu)\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\lambda)}{\lambda - \mu} d\lambda = f(\mu),$$

[1] Здесь $x^{-1}(\cdot)$ есть отображение $\sigma(x)$ на Λ, обратное к отображению $\lambda \to x(\lambda)$; не следует путать его с функцией $x^{-1}(\lambda)$, которая существует, если элемент x обратим. —*Прим. перев.*

и, таким образом, y совпадает с элементом $f(x)$, введенным в определении 12.

Очевидно, что предыдущие следствия можно применить к оператору T в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ при условии, что T является элементом некоторой коммутативной B^*-подалгебры B^*-алгебры $B(\mathfrak{H})$ всех ограниченных операторов в $\mathfrak{H}$. Это приводит к понятию нормального оператора, которое вводится в определении 14.

14. Определение. Ограниченный линейный оператор T в гильбертовом пространстве называется *нормальным*, если $TT^* = T^*T$, и *самосопряженным*, если $T = T^*$.

Ясно, что наименьшая замкнутая подалгебра в $B(\mathfrak{H})$, содержащая нормальный оператор T, его сопряженный T^* и единичный оператор I, является коммутативной B^*-алгеброй. Таким образом, мы можем сформулировать следующее следствие.

15. Следствие. *Пусть T — нормальный оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, и пусть $B^*(T)$ — наименьшая замкнутая подалгебра в $B(\mathfrak{H})$, содержащая I, T и T^*. Тогда алгебра $B^*(T)$ изометрически $*$-эквивалентна алгебре $C(\sigma(T))$. Кроме того, изометрический $*$-изоморфизм этих алгебр однозначно определяется требованием, чтобы оператору T соответствовала функция $\check{g}(\mu) = \mu$, $\mu \in \sigma(T)$. Если символ $f(T)$ использовать для обозначения оператора, соответствующего при этом изоморфизме скалярной функции $f \in C(\sigma(T))$, то для каждой функции f, однозначной и аналитической на некотором открытом множестве, содержащем спектр $\sigma(T)$, имеет место соотношение*

$$f(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\lambda)(\lambda I - T)^{-1}\, d\lambda,$$

где кривая C удовлетворяет требованиям определения VII.3.9.

Доказательство. Это вытекает из следствия 11 и леммы 13.

4. Упражнения

1. Пусть S — бикомпактное хаусдорфово пространство. Показать, что:

(I) Имеется взаимно однозначное соответствие между замкнутыми идеалами в $C(S)$ и замкнутыми множествами $F \subset S$, а именно

$$F \longleftrightarrow \mathfrak{J}_F = \{f \in C(S) \mid f(F) = 0\}.$$

(II) Пусть $\mathfrak{A}$ — замкнутая подалгебра в $C(S)$, содержащая вместе с каждой функцией, в нее входящей, комплексно сопряженную. Тогда существует такое разложение пространства S

в объединение замкнутых подмножеств F, что на каждом из них функции из $\mathfrak{A}$ постоянны и любая непрерывная функция, постоянная на каждом множестве F, принадлежит $\mathfrak{A}$.

2. Пусть S — компактное метрическое пространство, и пусть $\mathfrak{J} \subset C(S)$ — совокупность всех функций f из $C(S)$, обращающихся в нуль на некоторой зависящей от f окрестности фиксированной точки $x_0 \in S$. Тогда $\mathfrak{J}$ представляет собой идеал, замкнутый тогда и только тогда, когда точка x_0 является изолированной.

Таким образом, при условии, что S бесконечно, в $C(S)$ существуют незамкнутые идеалы.

3. Пусть S — бикомпактное хаусдорфово пространство, и пусть $n(S)$ — наименьшее число образующих в алгебре $C(S)$. Найти $n(S)$:

(a) для единичной окружности $|z| = 1$;

(b) для единичной сферы в трехмерном евклидовом пространстве;

(c) для гильбертова параллелепипеда $\{x \mid |x_i| \leqslant 1/i\}$ в l_2;

(d) для конфигурации, образованной непересекающимися дугами, соединяющими каждую из точек $(0, 0, 1)$, $(0, 0, 2)$ и $(0, 0, 3)$ трехмерного евклидова пространства с каждой из точек $(1, 0, 0)$, $(-1, 0, 0)$ и $(0, 1, 0)$.

4. Пусть $\mathfrak{X}$ — банахова алгебра, элементы которой являются непрерывными функциями на бикомпактном хаусдорфовом пространстве S, а операции сложения и умножения определяются обычным образом. Предположим, что:

(a) если $x(\cdot) \in \mathfrak{X}$, то $\overline{x(\cdot)} \in \mathfrak{X}$;

(b) если $x(\cdot) \in \mathfrak{X}$ и не обращается в нуль на S, то $1/x(\cdot) \in \mathfrak{X}$.

Тогда для каждого максимального идеала $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{X}$ найдется такая точка $t_0 \in S$, что $x(\mathfrak{M}) = x(t_0)$ для всех $x \in \mathfrak{X}$. Обратно, если для каждого максимального идеала $\mathfrak{M}$ существует такая точка $t_0 \in S$, что $x(\mathfrak{M}) = x(t_0)$, и если $x(\cdot) \in \mathfrak{X}$ и не обращается в нуль на S, то $1/x(\cdot) \in \mathfrak{X}$.

5. Пусть $\mathfrak{X}_1$ — банахова алгебра, удовлетворяющая условию (a) упражнения 4, и пусть $\mathfrak{X}_2$ — всюду плотная в $\mathfrak{X}_1$ подалгебра, удовлетворяющая условиям (a) и (b). Допустим, что $\mathfrak{X}_2$ можно снабдить нормой, относительно которой она становится B-алгеброй. Показать, что тогда $\mathfrak{X}_1$ также удовлетворяет условию (b).

6. Пусть C^n — класс всех комплексных функций $x(t)$ на отрезке $[0, 1]$, обладающих n непрерывными производными. Показать, что C^n с обычными операциями сложения и умножения является B-алгеброй, если

$$|x| = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \sum_{k=0}^{n} \frac{|x^{(k)}(t)|}{k!}.$$

Описать максимальные идеалы.

7. Пусть $CBV[0, 1]$ — алгебра непрерывных функций $x(t)$ ограниченной вариации на отрезке $[0, 1]$ с нормой

$$|x| = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t)| + v(x, [0, 1])$$

и обычными операциями сложения и умножения. Показать, что $CBV[0, 1]$ является банаховой алгеброй. Найти максимальные идеалы.

8. Пусть $K^{(n)}$ — алгебра всех полиномов $x = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k$ с комплексными коэффициентами и нормой $|x| = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$. Сложение и умножение определяются как обычно, за исключением того, что при умножении считаем $\lambda^{n+1} = 0$. Показать, что $K^{(n)}$ является банаховой алгеброй с единственным максимальным идеалом.

9. Пространство l_1 абсолютно сходящихся рядов $a = \{\alpha_n, -\infty < n < \infty\}$ является коммутативной банаховой алгеброй с умножением

$$ab = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{m-n} \beta_n, \quad a = \{\alpha_n\}, \ b = \{\beta_n\} \in l_1.$$

Пространство $\mathscr{M}$ максимальных идеалов гомеоморфно вещественной оси, приведенной по модулю 2π (т. е. окружности); этот гомеоморфизм таков, что если $\mathfrak{M} \in \mathscr{M}$ и θ — соответствующие точки, то

$$a(\mathfrak{M}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{in\theta}.$$

10. (Н. Винер.) Если сумма абсолютно сходящегося тригонометрического ряда $g(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{in\theta}$ нигде не обращается в нуль, то обратная к ней функция $1/g(\theta)$ также разлагается в абсолютно сходящийся тригонометрический ряд.

11. (Н. Винер — П. Леви.) Доказать, что если f — однозначная аналитическая функция в окрестности множества значений абсолютно сходящегося тригонометрического ряда

$$g(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{in\theta},$$

то существует такой абсолютно сходящийся тригонометрический ряд

$$h(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} \beta_n e^{in\theta},$$

что

$$h(\theta)=f(g(\theta)).$$

12. Пусть h: $\mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2$ — непрерывный гомоморфизм, $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ — банаховы алгебры. Допустим, что $h(a)=0$ влечет $a=0$, и пусть $\mathfrak{A}_2$ не имеет радикала. Показать, что тогда $\mathfrak{A}_1$ также не имеет радикала.

13. Пусть M — множество всех ограниченных регулярных (см. определение III.5.11) счетно аддитивных борелевских мер μ на вещественной прямой R. Для μ, λ из M обозначим через $\mu \times \lambda$ меру на $R \times R$, являющуюся прямым произведением мер μ и λ. Определим меру $\mu * \lambda$ на R, положив

$$(\mu * \lambda)(E)=(\mu \times \lambda)(E_1),$$

где E — произвольное борелевское подмножество в R, а $E_1 = \{(x, y) \in R \times R \mid x+y \in E\}$. Показать, что банахово пространство M (см. часть I, стр. 177—179) с умножением $\mu * \lambda$ является коммутативной банаховой алгеброй.

14. Показать, что если $f \in L_1(-\infty, \infty)$ и $\lambda(E)=\int_E f(s)\,ds$, то для любой меры μ из пространства M упражнения 13

$$(\lambda * \mu)(E)=\int_E ds \int_{-\infty}^{\infty} f(s-t)\,\mu(dt).$$

Если при этом $\mu(E)=\int_E g(s)\,ds$, где $g \in L_1(-\infty, \infty)$, то

$$(\lambda * \mu)(E)=\int_E ds \int_{-\infty}^{\infty} f(s-t)\,g(t)\,dt.$$

15. Пусть ξ принадлежит резольвентному множеству ограниченного линейного оператора T, и пусть $d(\xi)$ — расстояние от точки ξ до спектра T. Доказать, что

$$1 \leqslant d(\xi)\,|R(\xi;\,T)|.$$

Здесь $R(\xi;\,T)$ — резольвента оператора T, см. VII.3.1.

16. Пусть A и B — коммутирующие ограниченные операторы в комплексном банаховом пространстве. Показать, что

$$|\sigma(A+B)| \leqslant |\sigma(A)|+|\sigma(B)|,$$
$$|\sigma(AB)| \leqslant |\sigma(A)|\,|\sigma(B)|.$$

17. Если (коммутативная) B-алгебра не имеет нетривиальных идеалов, то она изометрически изоморфна полю комплексных

3 Заказ № 134

чисел. Показать, что существуют некоммутативные алгебры, не имеющие нетривиальных двусторонних идеалов, удовлетворяющие всем аксиомам B-алгебры, за исключением закона коммутативности, и не изоморфные полю комплексных чисел.

18. Построить некоммутативную B-алгебру $\mathfrak{A}$, в которой имеется элемент $x \neq 0$, не содержащийся ни в каком двустороннем идеале и такой, что $x^2 = 0$.

19. В коммутативной B-алгебре спектральный радиус является непрерывной функцией элемента алгебры.

20. (Капланский.) Определим умножение в l_1, положив

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots)(y_1, y_2, y_3, \ldots) = (x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3, \ldots).$$

Показать, что при таком умножении l_1 является коммутативной алгеброй без единицы, причем $|xy| \leqslant |x| \cdot |y|$.

(I) Показать, что имеется взаимно однозначное соответствие между замкнутыми идеалами и подмножествами натурального ряда.

(II) Существует взаимно однозначное соответствие между максимальными идеалами и натуральными числами.

(III) Топология на множестве максимальных идеалов дискретна.

(IV) Описать замкнутые подалгебры в l_1.

21. Пусть $\mathfrak{X}$ — коммутативная банахова алгебра со структурным пространством $\mathcal{M}$. Предположим, что для каждого замкнутого множества $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}$ и каждого максимального идеала $\mathfrak{M}_1 \notin \mathcal{M}_1$ найдется такой элемент $x \in \mathfrak{X}$, что $x(\mathfrak{M}_1) \neq 0$, а $x(\mathcal{M}_1) = 0$. Доказать следующие утверждения:

(a) Пусть $\mathfrak{J}$ — пересечение всех максимальных идеалов, принадлежащих некоторому замкнутому множеству $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$. Тогда $\sigma(x - \mathfrak{J}) = x(\mathcal{M}_0)$. Здесь $x - \mathfrak{J}$ является элементом факторалгебры $\mathfrak{X}/\mathfrak{J}$, а $\sigma(x - \mathfrak{J})$ — его спектром.

(b) Пусть U — собственное открытое подмножество в $\mathcal{M}$, $y(\mathfrak{M}) = 0$ при $\mathfrak{M} \in U$ и $x(\mathfrak{M}) \neq 0$ при $\mathfrak{M} \notin U$. Тогда существует такой элемент z, что $zx - y$ принадлежит радикалу.

(c) Допустим, что алгебра $\mathfrak{X}$ полупроста и для любого $x \in \mathfrak{X}$ найдется такой элемент $\bar{x} \in \mathfrak{X}$, что $\bar{x}(\mathfrak{M}) = \overline{x(\mathfrak{M})}$ для всех $\mathfrak{M}$ из $\mathcal{M}$. Пусть $E \subset \mathfrak{X}$ и $\mathcal{M}_0 = \{\mathfrak{M} \mid x(\mathfrak{M}) = 0,\ x \in E\}$. Показать, что идеал, порожденный множеством E, содержит всякий элемент y, для которого $y(\mathfrak{M})$ обращается в нуль для всех $\mathfrak{M}$ из некоторой окрестности замыкания множества $\mathcal{M}_0$.

5. Примечания и дополнения

Общую концепцию нормированной алгебры впервые предложили Майкал и Мартин [1] и Нагумо [1]. Однако с момента опубликования в 1941 г. фундаментальных работ Гельфанда [1, 3, 4, 5] и

Гельфанда и Шилова [1] изучение таких алгебр привлекло внимание многих авторов. Поскольку для наших целей требуются лишь наиболее элементарные аспекты теории B-алгебр, мы по поводу незатронутых нами вопросов отсылаем читателя к монографиям Хилле [1] (см. также переработанное совместно с Р. С. Филлипсом второе издание), Люмиса [1], Наймарка [13] и Риккарта [10][1]).

Предварительные сведения. Многие понятия этого параграфа имеют прямые аналоги в B-алгебре ограниченных линейных операторов, действующих в B-пространстве, которые были уже рассмотрены в § VII.11. Понятие топологического делителя нуля принадлежит Шилову [2]. Сингулярные элементы B-алгебры подробно изучались Риккартом [4], которому принадлежит лемма 4; в другой форме эта лемма была ранее доказана Бохнером и Филлипсом [2]. Мазур [3] высказал, а Гельфанд [1] доказал, что если B-алгебра является полем, то она изометрически изоморфна полю комплексных чисел. Это утверждение представляет собой аналог теоремы Фробениуса; сходные результаты при широком разнообразии предположений получили Аренс [8], Эдвардс [2], Лорх [10], Рамасвами [1], Шилов [5], Стоун [1], Торнхейм [1] и Райт [1]. (Ср. теорему 6, следствие 7.) Лемма 9 принадлежит Лорху [9]. Изучение B-алгебр при помощи их идеалов начато Гельфандом [1], которому принадлежит большинство результатов § 1.

B- и B^*-алгебры. Результаты § 2 принадлежат Гельфанду [1]. Фундаментальная теорема 3.7 доказана Гельфандом и Наймарком [1]. Их доказательство леммы 3.5 использует довольно глубокий результат Шилова, что, вообще говоря, не является необходимым. Приведенное в тексте доказательство этой леммы дано Аренсом [6], который получил этот результат также и в большей общности (Аренс [7]). Простое непосредственное доказательство следствия 3.6 дал Фукамия [2]; этим следствием можно воспользоваться для доказательства леммы 3.5. Следствие 3.10 принадлежит Риккарту (6), который получил также более сильные результаты о сохранении спектра (см. Риккарт [9]).

Некоммутативные B^*-алгебры. Хотя наше внимание было направлено на коммутативные B-алгебры, но многое известно и в некоммутативном случае. Отметим, что Гельфанд и Наймарк [1] дали параллельно теореме 3.7 следующую характеристику некоммутативных B^*-алгебр.

---

[1]) См. также книгу И. М. Гельфанда, Д. А. Райкова, Г. Е. Шилова [1*], посвященную целиком коммутативным нормированным кольцам.—*Прим. ред.*

3*

Теорема. *Каждая B^*-алгебра изометрически $*$-изоморфна подалгебре алгебры всех ограниченных линейных операторов на некотором комплексном гильбертовом пространстве.*

Следует заметить, что в своем доказательстве они предполагают, что B^*-алгебра $\mathfrak{X}$ удовлетворяет дополнительному условию, а именно, что для каждого $x \in \mathfrak{X}$ элемент $e + x^*x$ обладает обратным; в этом случае алгебра называется C^*-алгеброй. Лишь недавно Капланский[1]), используя некоторые результаты Фукамия [3] и Келли и Вота [1], доказал, что это условие является следствием остальных требований и, таким образом, излишне (ср. *Math. Rev.*, **14** (1953), 884). Т. Оно (литературу и комментарии см. у Рикарта [10; стр. 248]) показал, что условие $|x^*x| = |x|^2$ в определении 3.1 можно заменить условием $|xx^*| = |x|\,|x^*|$.

Теория слабо замкнутых некоммутативных B^*-алгебр операторов в гильбертовом пространстве широко развита Мерреем, фон Нейманом и многими другими. Поскольку результаты этой теории нам не потребуются, мы приведем лишь единственную теорему в этом направлении, принадлежащую фон Нейману [2]. Если $\mathfrak{A}$ — некоторая совокупность ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, то множество $\mathfrak{A}^c$ всех ограниченных линейных операторов в $\mathfrak{H}$, коммутирующих с каждым оператором из $\mathfrak{A}$, называется *централизатором* (или коммутантом) множества $\mathfrak{A}$.

Лемма. *Централизатор B^*-алгебры операторов в гильбертовом пространстве замкнут в слабой операторной топологии и является B^*-алгеброй операторов.*

Доказательство. Легко видеть, что централизатор $\mathfrak{A}^c$ B^*-алгебры $\mathfrak{A}$ является B^*-алгеброй. Если обобщенная последовательность $\{B_\alpha\}$ операторов из $\mathfrak{A}^c$ сходится в слабой операторной топологии к оператору B, то для любого $A \in \mathfrak{A}$ и любых $x, y \in \mathfrak{H}$ имеем $(BAx, y) = \lim (B_\alpha Ax, y) = \lim (AB_\alpha x, y) = (ABx, y)$, следовательно, $B \in \mathfrak{A}^c$, ч. т. д.

Теорема. *B^*-алгебра операторов в гильбертовом пространстве совпадает с централизатором своего централизатора тогда и только тогда, когда она замкнута в слабой операторной топологии.*

Доказательство. Из определения централизатора непосредственно следует, что $\mathfrak{A} \subseteq (\mathfrak{A}^c)^c$ и что если $\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}^c)^c$, то, согласно лемме, алгебра $\mathfrak{A}$ замкнута в слабой операторной топологии.

---

[1]) См. также Наймарк [13, стр. 281]. — *Прим. перев.*

Для доказательства теоремы достаточно показать, что если алгебра $\mathfrak{A}$ замкнута в слабой операторной топологии, то каждая слабая окрестность точки $B \in (\mathfrak{A}^c)^c$ содержит некоторый элемент из $\mathfrak{A}$.

Для иллюстрации идеи доказательства этого утверждения рассмотрим сначала случай, когда окрестность имеет вид

$$N_1 = \{A \in B(\mathfrak{H}) \mid |(x_1, (A-B)\, y_1)| < \varepsilon\},$$

где $\varepsilon > 0$, а x_1 и y_1 — фиксированные ненулевые элементы в $\mathfrak{H}$. Пусть E — оператор ортогонального проектирования $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{M} = \overline{\mathrm{sp}}\,\{Ay_1 \mid A \in \mathfrak{A}\}$ [1]). Тогда $A\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}$ и $A^*\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}$ для любого $A \in \mathfrak{A}$, поэтому $EAE = AE$ и $EA^*E = A^*E$. Переходя в последнем равенстве к сопряженным операторам, получаем $EA = EAE = AE$, т. е. $E \in \mathfrak{A}^c$. Следовательно, $By_1 = BEy_1 = EBy_1 \in \mathfrak{M}$, и потому найдется такой оператор $A \in \mathfrak{A}$, что $|Ay_1 - By_1| < \varepsilon/|x_1|$, отсюда вытекает, что A принадлежит N_1.

Рассмотрим теперь произвольную окрестность

$$N = \{A \in B(\mathfrak{H}) \mid |(x_i, (A-B)\, y_i)| < \varepsilon, \ i = 1, 2, \ldots, n\}$$

точки B; мы можем считать, что $|x_i| \leqslant 1$ Пусть $\mathfrak{H}^+$ — прямая сумма (ср. IV.4.17) n экземпляров пространства $\mathfrak{H}$, и для каждого оператора A, определенного на $\mathfrak{H}$, пусть A^+ — оператор, определенный на $\mathfrak{H}^+$ равенством $A^+[z_1, \ldots, z_n] = [Az_1, \ldots, Az_n]$. Множество всех операторов A^+, порожденных операторами A из $\mathfrak{A}$, обозначим через $\mathfrak{A}^+$. Произвольный ограниченный линейный оператор C в $\mathfrak{H}^+$ имеет вид

$$C[z_1, \ldots, z_n] = \Big[\sum_{i=1}^{n} C_{1i} z_i, \ \ldots, \ \sum_{i=1}^{n} C_{ni} z_i\Big];$$

поэтому $(\mathfrak{A}^+)^c$ состоит из таких операторов C, для которых все операторы C_{ij} принадлежат $\mathfrak{A}^c$. Отсюда видно, что $((\mathfrak{A}^+)^c)^c$ состоит из таких операторов A^+, для которых $A \in (\mathfrak{A}^c)^c$. Ввиду такого представления произвольного элемента в $((\mathfrak{A}^+)^c)^c$ соображения, использованные в случае $n = 1$, можно применить для доказательства существования в $\mathfrak{A}^+$ такого оператора A^+, что

$$|(A^+ - B^+)[y_1, \ldots, y_n]| = \sum_{i=1}^{n} |(A-B)\, y_i| < \varepsilon,$$

откуда следует, что $A \in N$, ч. т. д.

---

[1]) Если Q — подмножество в $\mathfrak{H}$, то $\overline{\mathrm{sp}}\,(Q)$ — наименьшее замкнутое линейное подпространство, содержащее Q (см. определение II.1.4). — *Прим. перев.*

Эта теорема весьма важна, поскольку она характеризует слабо замкнутые B^*-алгебры операторов в алгебраических терминах и наводит на мысль, что они представляют особый интерес.

Основы теории таких алгебр можно найти в работах фон Неймана [2, 13, 14, 15] и Меррея и Неймана [1]. Обзор имеется у Наймарка [2]; более исчерпывающее изложение дается в книгах Диксмье [5] и Риккарта [10], где приводится библиография.

Обобщения. Мы закончим упоминанием о том, что Аренс [2,9] и Майкл [2] распространили многие результаты, относящиеся к B-алгебрам, на более общие топологические алгебры. В качестве введения в теорию топологических колец и алгебр рекомендуем работу Капланского [4].

ГЛАВА X

Ограниченные нормальные операторы в гильбертовом пространстве

1. Терминология и предварительные сведения

Спектральная теорема, которую нам предстоит доказать в этой главе, послужит введением в теорию, которая в случае гильбертова пространства соответствует классической теории приведения нормальной комплексной матрицы в n-мерном унитарном пространстве. Всюду в данной главе символом T^* обозначается гильбертов сопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Для обозначения скалярного произведения векторов x, y из $\mathfrak{H}$ употребляется символ (x, y). По определению, $(Tx, y) = (x, T^*y)$. Оператор T называется *нормальным*, если $TT^* = T^*T$. Теорема Гельфанда и Наймарка IX.3.7 о представлении коммутативной B^*-алгебры (в частности, ее следствия IX.3.9 и IX.3.15) позволяет для нормальных операторов в гильбертовом пространстве построить теорию приведения более полную, чем развитая в гл. VII для общих операторов в комплексном B-пространстве.

Хотя изложение в настоящей главе не зависит от результатов гл. VII, но рассмотрение задачи приведения в свете общих результатов гл. VII помогает мотивировать изучение нормальных операторов. В гл. VII мы с каждым оператором T в комплексном B-пространстве связали некоторую булевскую алгебру множеств комплексной плоскости, названных спектральными множествами. Спектральные множества были определены как такие подмножества спектра $\sigma(T)$, которые одновременно открыты и замкнуты в его относительной топологии. Каждому спектральному множеству σ соответствует проектор

$$(\mathrm{I}) \qquad E(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(\sigma)} (\lambda I - T)^{-1} \, d\lambda,$$

где $C(\sigma)$ — какая-нибудь спрямляемая жорданова кривая в $\varrho(T)$, охватывающая σ и такая, что внутри ограниченной ею области нет точек из $\sigma(T) - \sigma$. Сейчас нас интересует не столько определение (I) проекторов $E(\sigma)$, сколько некоторые их свойства.

Эти проекторы удовлетворяют соотношениям

$$\text{(II)} \qquad E(\sigma \cap \delta) = E(\sigma) \wedge E(\delta), \quad E(\sigma \cup \delta) = E(\sigma) \vee E(\delta),$$
$$E(\sigma(T)) = I, \quad E(\varnothing) = 0,$$

где σ и δ — произвольные спектральные множества, а $\varnothing$ — пустое множество. Здесь мы употребили обозначения $A \wedge B$ и $A \vee B$ для *пересечения* и *объединения* коммутирующих проекторов A и B. Напомним, что эти операторы определяются равенствами $A \wedge B = AB$, $A \vee B = A + B - AB$ и что пересечение и объединение двух коммутирующих проекторов снова являются проекторами. Кроме того, области значений пересечения и объединения двух коммутирующих проекторов находятся соответственно из соотношений $(A \wedge B)\mathfrak{X} = (A\mathfrak{X}) \cap (B\mathfrak{X})$ и $(A \vee B)\mathfrak{X} = (A\mathfrak{X}) + (B\mathfrak{X}) = \operatorname{sp}(A\mathfrak{X}, B\mathfrak{X})$. Таким образом, в булевской алгебре проекторов *отношение порядка* $A \leqslant B$, которое по определению означает, что $AB = A$, допускает геометрическую интерпретацию в виде $A\mathfrak{X} \subseteq B\mathfrak{X}$. С другой стороны, соотношения (II) показывают, что соответствие $\sigma \to E(\sigma)$ является гомоморфным отображением булевской алгебры спектральных множеств на булевскую алгебру проекторов в $\mathfrak{X}$; кроме того, этот гомоморфизм переводит единицу $\sigma(T)$ алгебры спектральных множеств в единицу I алгебры проекторов. Эти замечания приводят к понятию спектральной меры в B-пространстве $\mathfrak{X}$. *Спектральной мерой* в $\mathfrak{X}$ называется гомоморфное отображение булевской алгебры множеств в булевскую алгебру проекторов в $\mathfrak{X}$, переводящее единицу исходной алгебры в единичный оператор I. Таким образом, с каждым ограниченным оператором T в комплексном B-пространстве связана посредством соотношения (I) спектральная мера E, определенная на семействе спектральных множеств оператора T. Эта спектральная мера связана (см. VII.3.20) с T также соотношениями

$$\text{(III)} \qquad E(\delta)T = TE(\delta), \quad \sigma(T_\delta) = \delta,$$

где δ — произвольное спектральное множество оператора T, а $\sigma(T_\delta)$ — спектр сужения T_δ оператора T на многообразие $\mathfrak{X}_\delta = E(\delta)\mathfrak{X}$.

Таким образом, если спектральные множества $\delta_1, \ldots, \delta_n$ оператора T не пересекаются и в сумме составляют весь спектр $\sigma(T)$, то пространство $\mathfrak{X}$ можно разложить в прямую сумму $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_{\delta_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{X}_{\delta_n}$, где T отображает каждое пространство $\mathfrak{X}_{\delta_i} = E(\delta_i)\mathfrak{X}$ в себя, и спектр $\sigma(T_{\delta_i})$ сужения оператора T на $\mathfrak{X}_{\delta_i}$ совпадает с δ_i. Это показывает, что изучение оператора T можно свести к изучению его сужений на инвариантные подпространства $\mathfrak{X}_{\delta_i}$. Очевидно, желательно знать, возможно ли дальнейшее расщепление оператора T, т. е. можно ли расширить область определения спектральной меры до большей булевской алгебры множеств на плоскости таким образом, чтобы сохранились соотношения (II) и (III). Ясно, что без ослабления условия (III) это невозможно, ибо если $\delta = \sigma(T_\delta)$, то, поскольку спектр оператора всегда замкнут (IX.1.5), каждое множество из области определения спектральной меры, удовлетворяющей условию (III), необходимо замкнуто и открыто[1]), т. е. является спектральным множеством. Однако для того чтобы свести изучение T к исследованию этого оператора на инвариантных подпространствах, на которых он имеет меньший спектр, вполне достаточно найти спектральную меру, удовлетворяющую вместо (III) условиям

$$\text{(IV)} \qquad E(\delta)T = TE(\delta), \quad \sigma(T_\delta) \subseteq \bar{\delta},$$

где $\bar{\delta}$ — замыкание множества δ. Как будет показано в следующем параграфе, нормальный оператор T в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ порождает спектральную меру, определенную на булевской алгебре $\mathscr{B}$ всех борелевских множеств плоскости и удовлетворяющую условию (IV) для всех $\delta \in \mathscr{B}$. Эта спектральная мера, связанная с нормальным оператором, счетно аддитивна на $\mathscr{B}$ в сильной операторной топологии. Это означает, что

$$\text{(V)} \qquad \sum_{i=1}^{\infty} E(\delta_i)x = E\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \delta_i\right)x, \quad x \in \mathfrak{H},$$

для любой последовательности $\{\delta_i\}$ непересекающихся борелевских множеств.

Спектральная мера E, определенная на борелевских множествах плоскости и удовлетворяющая условию (IV) для каждого борелевского множества δ и условию (V) для любой последовательности непересекающихся борелевских множеств $\{\delta_i\}$, называется *разложением единицы для* T. В этой терминологии спектральная теорема для ограниченных нормальных операторов в гильбертовом пространстве утверждает, что каждый такой оператор обладает однозначно определенным разложением единицы.

Одно из многих применений этой теоремы состоит в построении для нормальных операторов обобщенного операторного исчисления, подобного операторному исчислению для конечных матриц, развитому в § VII.1. Прежде чем описать операторное исчисление для нормальных операторов, напомним, какую форму при-

[1]) Открытость такого множества вытекает из того, что его дополнение замкнуто, ибо, по определению булевской алгебры, оно также принадлежит области определения спектральной меры и потому является спектром некоторого оператора. — *Прим. перев.*

нимает это исчисление для нормальных матриц в конечномерном пространстве. Если T — нормальный оператор в конечномерном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, то его минимальный многочлен имеет лишь простые корни, и потому индексы $\nu_1, \ldots, \nu_k$ (см. определение VII.1.1) всех собственных значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ равны 1. Таким образом, для конечной нормальной матрицы T операторное исчисление (см. VII.1.8) задается формулой $f(T) = \sum_{i=1}^{k} f(\lambda_i) E(\lambda_i)$, где f — произвольный многочлен, а $E(\lambda_i)$ — оператор, проектирующий $\mathfrak{H}$ на собственное подпространство $\{x \mid x \in \mathfrak{H},\ (T - \lambda_i I) x = 0\}$ оператора T, соответствующее собственному значению λ_i. Определим для каждого борелевского множества δ спектра $E(\delta)$ как сумму проекторов $E(\lambda_i)$ по всем точкам спектра $\lambda_i \in \delta$, если такие λ_i существуют, а в противном случае положим $E(\delta) = 0$; тогда функция $E(\delta)$ представляет собой разложение единицы для T, а операторное исчисление задается формулой

$$\text{(VI)} \qquad f(T) = \int_{\sigma(T)} f(\lambda) E(d\lambda),$$

где интеграл определяется как конечная сумма $\sum_{i=1}^{k} f(\lambda_i) E(\lambda_i)$. Если гильбертово пространство бесконечномерно, то для нормального оператора с разложением единицы E все же существует операторное исчисление, задаваемое формулой (VI), но в этой ситуации необходимо определить интеграл, участвующий в (VI), и алгебру скалярных функций f, к которым эта формула применима.

Оператор $f(T)$ был уже определен для одного класса скалярных функций f, отличного от класса многочленов, а именно для класса $C(\sigma(T))$ всех комплексных непрерывных функций на спектре $\sigma(T)$. Действительно, следствие IX.3.15 показывает, что между $C(\sigma(T))$ и B^*-алгеброй $B^*(T)$, порожденной оператором T, существует изометрический *-изоморфизм, который определяется однозначно, если мы потребуем, чтобы скалярная функция $g(\lambda) \equiv \lambda$ и оператор T были соответствующими элементами. Оператор $f(T)$ есть, по определению, тот однозначно определенный оператор в гильбертовом пространстве, который при этом *-изоморфизме соответствует непрерывной скалярной функции f. Этот абстрактный *-изоморфизм $f \longleftrightarrow f(T)$ между $C(\sigma(T))$ и $B^*(T)$ имеет конкретное аналитическое представление в виде равенства (VI), которое, таким образом, определяет операторное исчисление. Термин «операторное исчисление» употребляется здесь и в других местах в следующем смысле. Пусть $f \to T(f)$ есть гомоморфное отображение B-алгебры скалярных функций в B-алгебру операторов в банаховом пространстве. Тогда каждый метод вычисления оператора $T(f)$ по скалярной функции f называется *операторным исчислением*. Обычно операторное исчисление принимает вид аналитической формулы, которая дает конкретное представление абстрактного гомоморфизма $f \to T(f)$. В настоящей главе все гомоморфизмы $f \to T(f)$ будут $*$-гомоморфизмами B^*-алгебр.

При изучении нормальных операторов важные применения находят исчисления, определенные в виде различных обобщений формулы (VI). Это приводит к необходимости определить интеграл $\int f(\lambda) E(d\lambda)$ скалярной функции f по операторнозначной функции множества E. В настоящей главе нам придется интегрировать лишь ограниченные функции f, и потому ниже при построении интеграла мы ограничимся этим случаем. Пусть задана алгебра Σ подмножеств множества S, и пусть E — функция, отображающая Σ в алгебру ограниченных линейных операторов, действующих в B-пространстве $\mathfrak{X}$. Предположим, что функция E аддитивна и ограничена, т. е. существует такая постоянная K, что

$$\text{(VII)} \qquad E(\delta \cup \sigma) = E(\delta) + E(\sigma) \quad \text{и} \quad |E(\sigma)| \leqslant K$$

для любой пары непересекающихся множеств δ, σ из Σ. При определении интеграла необязательно предполагать, что E является спектральной мерой или что операторы $E(\delta)$ являются проекторами. Таким образом, основой при построении интеграла является любая ограниченная аддитивная операторнозначная функция E, заданная на алгебре Σ подмножеств абстрактного множества S.

Функции, которые мы будем интегрировать, являются ограниченными и Σ-измеримыми. Функция f называется Σ-*измеримой* (ср. IV.2.12), если $f^{-1}(A) \in \Sigma$ для любого борелевского множества A из области значений f. Если Σ — семейство всех борелевских множеств топологического пространства S, то Σ-измеримые функции называются также *измеримыми по Борелю*, или проще, *борелевскими* функциями. Класс $B(S, \Sigma)$ (ср. IV.2.12) является, по определению, замкнутым линейным многообразием в пространстве всех ограниченных функций на S, порожденным характеристическими функциями множеств из Σ. Норма в пространстве всех ограниченных функций на S (и, таким образом, норма в $B(S, \Sigma)$) определяется соотношением $|f| = \sup_{s \in S} |f(s)|$.

Мы будем называть Σ-*простой* всякую функцию на S, имеющую вид

$$\text{(VIII)} \qquad f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{\delta_i},$$

где χ_{δ_i} — характеристическая функция множества δ_i из Σ. Легко проверить, что если $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{\delta_i} = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \chi_{\sigma_j}$, то $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i E(\delta_i) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j E(\sigma_j)$, и потому *интеграл* от Σ-простой функции (VIII) можно определить равенством

$$\int_S f(s)\, E(ds) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i E(\delta_i).$$

Тогда, поскольку полная вариация скалярной аддитивной функции множества μ на Σ не больше, чем $4 \sup_{\delta \in \Sigma} |\mu(\delta)|$ (см. III.1.5), для каждой Σ-простой функции f имеем

$$\left| x^* \left[\int_S f(s)\, E(ds) \right] x \right| = \left| \int_S f(s)\, x^* E(ds)\, x \right| \leqslant$$

$$\leqslant 4 \sup_{s \in S} |f(s)| \sup_{\delta \in \Sigma} |E(\delta)|\, |x|\, |x^*|, \qquad x \in \mathfrak{X}, \qquad x^* \in \mathfrak{X}^*,$$

и, таким образом (см. II.3.15),

$$\left| \int_S f(s)\, E(ds) \right| \leqslant 4K \sup_{s \in S} |f(s)|,$$

где K — постоянная, участвующая в (VII). Это неравенство показывает, что если последовательность Σ-простых функций $\{f_n\}$ сходится в $B(S, \Sigma)$ к функции f, то последовательность интегралов $\left\{ \int_S f_n(s)\, E(ds) \right\}$ сходится и ее предел зависит только от f и не зависит от конкретной последовательности $\{f_n\}$, использованной для аппроксимации f. Таким образом, мы можем определить интеграл от f равенством

$$\int_S f(s)\, E(ds) = \lim_n \int_S f_n(s)\, E(ds).$$

Для множества δ из Σ интеграл $\int_\delta f(s)\, E(ds)$ равен, по определению, $\int_S f(s)\, \chi_\delta(s)\, E(ds)$. Ясно, что отображение $f \to \int_S f(s)\, E(ds)$ является непрерывным линейным отображением $B(S, \Sigma)$ в алгебру ограниченных операторов на $\mathfrak{X}$. Если функция множества E есть спектральная мера, то отображение $f \to \int_S f(s)\, E(ds)$ оказывается также гомоморфизмом. Действительно, пусть f, $g \in B(S, \Sigma)$; заметим, что оба оператора $\int\limits_S f(s) g(s) E(ds)$ и $\left[\int\limits_S f(s) E(ds)\right] \times$ $\times \left[\int\limits_S g(s) E(ds)\right]$ линейно и непрерывно зависят от g и что если g — характеристическая функция множества δ из Σ, то

$$\int\limits_S f(s) g(s) E(ds) = \int\limits_S f(s) E(ds \cap \delta) =$$
$$= \int\limits_S f(s) E(ds) E(\delta) = \left[\int\limits_S f(s) E(ds)\right] \left[\int\limits_S g(s) E(ds)\right].$$

Таким образом, если $f \in B(S, \Sigma)$, то равенство

$$\int\limits_S f(s) g(s) E(ds) = \left[\int\limits_S f(s) E(ds)\right] \left[\int\limits_S g(s) E(ds)\right]$$

имеет место для всех Σ-простых функций g, и, следовательно, в силу непрерывности обеих его частей по g, оно справедливо для всех f и g из $B(S, \Sigma)$. Если, кроме того, E — *самосопряженная спектральная мера* в гильбертовом пространстве, что означает, что $E(\delta) = E(\delta)^*$ для всех δ из Σ, то отображение $f \to \int\limits_S f(s) E(ds)$ является *-гомоморфизмом B^*-алгебры $B(S, \Sigma)$ в B^*-алгебру ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве. Чтобы показать это, рассмотрим Σ-простую функцию f (см. VIII). Имеем

$$\left[\int\limits_S f(s) E(ds)\right]^* = \sum_{i=1}^{n} \bar{\alpha}_i E(\delta_i) = \int\limits_S \overline{f(s)}\, E(ds)$$

и, поскольку простые функции плотны в $B(S, \Sigma)$, получаем, что $\left[\int\limits_S f(s) E(ds)\right]^* = \int\limits_S \overline{f(s)}\, E(ds)$ для всех f из $B(S, \Sigma)$.

В результате мы установили следующую теорему.

1. Теорема. *Пусть E — ограниченная самосопряженная спектральная мера в гильбертовом пространстве, определенная на алгебре Σ подмножеств множества S. Тогда отображение $f \to T(f)$, определенное равенством*

$$T(f) = \int\limits_S f(s) E(ds), \quad f \in B(S, \Sigma),$$

является непрерывным *-гомоморфизмом B^*-алгебры $B(S, \Sigma)$ ограниченных Σ-измеримых функций на S в B^*-алгебру ограниченных операторов в гильбертовом пространстве.

Возвращаясь к общему интегралу $\int f(s)\,E(ds)$, где E — просто ограниченная аддитивная операторнозначная функция множества, мы замечаем, что интеграл определен в терминах равномерной операторной топологии. Ясно, что аналогично можно определить интеграл $\int f(s)\,v(ds)$ ограниченной Σ-измеримой функции f по ограниченной аддитивной векторнозначной функции множества v. Таким образом, если E — ограниченная аддитивная функция множества на Σ, значения которой $E(\delta)$ являются ограниченными операторами в B-пространстве $\mathfrak{X}$, и если $x \in \mathfrak{X}$, то интеграл $\int f(s)\,E(ds)x$ определен для каждой ограниченной Σ-измеримой функции f на S. Из определения интеграла немедленно следует, что

$$\left[\int_S f(s)\,E(ds)\right]x = \int_S f(s)\,E(ds)\,x.$$

Аналогично, если $x \in \mathfrak{X}$ и $x^* \in \mathfrak{X}^*$, то любая ограниченная Σ-измеримая функция f на S интегрируема по ограниченной аддитивной скалярной функции множества $x^*E(\delta)\,x$, $\delta \in \Sigma$, и

$$x^*\left[\int_S f(s)\,E(ds)\right]x = \int_S f(s)\,x^*E(ds)\,x.$$

В гильбертовом пространстве это тождество принимает вид

$$\left(\left[\int_S f(s)\,E(ds)\right]x,\, y\right) = \int_S f(s)\,(E(ds)\,x,\, y), \qquad x,\, y \in \mathfrak{H}.$$

Обозначение $\int_S f(s)\,E(ds)$ говорит само за себя, но, быть может, будет полезно явно указать, что символы

$$\int_S f(s) \int_{ds} g(t)\,E(dt) \quad \text{и} \quad \int_S f(s)\,E(ds \cap \delta)$$

обозначают интегралы от f по аддитивным операторнозначным функциям множества

$$\int_\sigma g(t)\,E(dt) \quad \text{и} \quad E(\sigma \cap \delta)$$

соответственно. Интеграл $\int_S f(s)\,E(ds \cap \delta)$ сам является ограниченной аддитивной функцией множества $\delta \in \Sigma$, а интеграл от функции g из $B(S, \Sigma)$ по этой функции множества записывается в виде

$$\int_S g(t) \int_S f(s) E(ds \cap dt).$$

Если f — характеристическая функция множества $\delta \in \Sigma$, то

$$\text{(IX)} \qquad \int_S g(t) \int_S f(s) E(ds \cap dt) = \int_S g(t) f(t) E(dt),$$

и так как обе части этого равенства линейны и непрерывны относительно f, то (IX) имеет место для всех f, $g \in B(S, \Sigma)$.

Пусть S — нормальное топологическое пространство, и пусть функция множества E регулярна в том смысле, что для любых $x \in \mathfrak{X}$ и $x^* \in \mathfrak{X}^*$ регулярна скалярная мера $x^*E(\cdot)x$. Тогда из обращения в нуль интеграла $\int_S f(s) E(ds)$ для каждой ограниченной непрерывной на S функции f вытекает, что

$$x^* \left[\int_S f(s) E(ds) \right] x = \int_S f(s) x^* E(ds) x = 0, \qquad f \in C(S),$$

и потому (см. IV.6.2) $x^*E(\delta)x = 0$ для любого борелевского множества $\delta \subseteq S$. Следовательно (см. II.3.15), $E(\delta) = 0$. Таким образом, если E и A — ограниченные аддитивные регулярные операторнозначные функции множества, определенные на борелевских множествах нормального топологического пространства S, и если $\int_S f(s) E(ds) = \int_S f(s) A(ds)$ для любой ограниченной непрерывной на S функции f, то $E(\delta) = A(\delta)$ для каждого борелевского множества $\delta \subseteq S$.

Еще одно свойство интеграла, которое часто будет применяться, носит название *принципа замены меры*. Этот принцип состоит в следующем. Пусть E и E_1 — две спектральные меры на Σ, связанные соотношением

$$E(\delta) = E_1(h^{-1}(\delta)), \qquad \delta \in \Sigma,$$

где h — отображение S в себя, обладающее тем свойством, что для любого δ из Σ множество $h^{-1}(\delta) = \{s \mid h(s) \in \delta\}$ принадлежит Σ. Если f — характеристическая функция множества $\delta \in \Sigma$, то соотношение между E и E_1 может быть записано в виде

$$\int_S f(s) E(ds) = \int_S f(h(s)) E_1(ds).$$

Так как обе части этого равенства линейно и непрерывно зависят от $f \in B(S, \Sigma)$, то ясно, что оно справедливо для любой ограниченной Σ-измеримой функции f.

Элементарные свойства интеграла $\int_S f(s)E(ds)$, рассмотренные в данном параграфе, будут неоднократно применяться на протяжении этой главы, причем обычно без явной ссылки на свойство, о котором идет речь.

2. Спектральная теорема для ограниченных нормальных операторов

Перед доказательством того, что ограниченный нормальный оператор в гильбертовом пространстве обладает разложением единицы, мы докажем следующую ниже более общую теорему, которая часто будет использоваться в ситуации, когда применение ее частного случая (т. е. обычной спектральной теоремы) затруднительно. Эта общая теорема позволяет для любого семейства коммутирующих нормальных операторов построить спектральную меру, которая одновременно приводит каждый оператор данного семейства. Эта теорема вместе с теоремой Гельфанда — Наймарка (IX.3.7) дает ключ ко всей теории нормальных операторов в гильбертовом пространстве. Настоящая глава представляет собой в известном отношении перечень следствий и частных случаев этих двух результатов. В следующей главе указанные теоремы найдут применение к разнообразным задачам анализа.

→ 1. Теорема (*общая спектральная теорема*). *Любая коммутативная B^*-алгебра $\mathfrak{A}$ операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ изометрически $*$-эквивалентна алгебре $C(\Lambda)$ всех комплексных непрерывных функций на своем спектре Λ. Кроме того, каждый изометрический $*$-изоморфизм $f \longleftrightarrow T(f)$ между этими алгебрами однозначно определяет спектральную меру E, заданную на алгебре $\mathscr{B}$ всех борелевских подмножеств спектра Λ и обладающую следующими свойствами:*

(I) *для любых $x, y \in \mathfrak{H}$ функция множества $(E(\sigma)x, y)$, $\sigma \in \mathscr{B}$, является регулярной и счетно аддитивной на $\mathscr{B}$;*

(II) $E(\delta)T = TE(\delta), \qquad E(\delta) = E(\delta)^*, \qquad \delta \in \mathscr{B},\ T \in \mathfrak{A};$

(III) $T(f) = \int_\Lambda f(\lambda)E(d\lambda), \qquad f \in C(\Lambda).$

Доказательство. Первое утверждение составляет содержание следствия IX.3.9. Для доказательства второго потребуется следующая лемма.

2. Лемма. *Ограниченная билинейная форма, удовлетворяющая соотношению* $[x, y] = \overline{[y, x]}$, *однозначно определяет такой ограниченный самосопряженный оператор* A, *что* $[x, y] = (Ax, y)$.

Доказательство. Для фиксированного y величина $[x, y]$ линейно и непрерывно зависит от x, и, следовательно (IV.4.5), найдется такая точка $Ay \in \mathfrak{H}$, что $[x, y] = (x, Ay)$. Так как форма $[x, y]$ ограничена и билинейна, то оператор A линеен и ограничен, а соотношение $[x, y] = \overline{[y, x]}$ показывает, что он самосопряжен.

Продолжая доказательство теоремы, заметим, что для каждой пары $x, y \in \mathfrak{H}$ величина $(T(f)x, y)$ линейна относительно f и $|(T(f)x, y)| \leqslant |f||x||y|$. Таким образом, по теореме Рисса о представлении линейного ограниченного функционала (IV.6.3), на $\mathscr{B}$ существует единственная регулярная мера $\mu(\cdot, x, y)$, для которой

$$\text{(a)} \qquad (T(f)x, y) = \int_\Lambda f(\lambda)\,\mu(d\lambda, x, y), \qquad f \in C(\Lambda),$$

$$\text{(b)} \qquad |\mu(e, x, y)| \leqslant v(\mu(\cdot, x, y), e) \leqslant |x|\cdot|y|, \qquad e \in \mathscr{B}.$$

Так как $(T(f)\alpha x, y) = \alpha(T(f)x, y)$, то, учитывая (a), имеем

$$\int_\Lambda f(\lambda)\,\mu(d\lambda, \alpha x, y) = \int_\Lambda f(\lambda)\,\alpha\mu(d\lambda, x, y), \qquad f \in C(\Lambda),$$

и поскольку регулярная мера однозначно определяется функционалом, ясно, что $\mu(\delta, \alpha x, y) = \alpha\mu(\delta, x, y)$. Аналогично можно показать, что мера $\mu(\delta, x, y)$ билинейна по x и y. Если теперь функция f вещественна, то $T(f) = T(\overline{f}) = T(f)^*$, так что $(T(f)x, y) = \overline{(T(f)y, x)}$. Из (a) следует, что

$$\int_\Lambda f(\lambda)\,\mu(d\lambda, x, y) = \int_\Lambda f(\lambda)\,\overline{\mu(d\lambda, y, x)}, \qquad f \in C(\Lambda),$$

откуда, по соображениям единственности, $\mu(\delta, x, y) = \overline{\mu(\delta, y, x)}$. Лемма 2 и неравенства (b) показывают, что для каждого δ из $\mathscr{B}$ найдется единственный ограниченный самосопряженный оператор $E(\delta)$, для которого $\mu(\delta, x, y) = (E(\delta)x, y)$. Ясно, что функция $E(\delta)$ аддитивна на $\mathscr{B}$, а из (b) следует, что $|E(\delta)| \leqslant 1$. Таким образом, свойство (III) вытекает из (a). Чтобы убедиться, что $E(\delta)E(\sigma) = E(\delta \cap \sigma)$, заметим, что для любой пары f, g из $C(\Lambda)$ мы имеем

$$\int_\Lambda f(\lambda) \int_\Lambda g(\mu)\,E(d\mu \cap d\lambda) = \int_\Lambda f(\lambda) \int_{d\lambda} g(\mu)\,E(d\mu) =$$

$$= \int_\Lambda f(\lambda)\,g(\lambda)\,E(d\lambda) = T(fg) =$$

$$=T(f)T(g)=\int_\Lambda f(\lambda)T(g)E(d\lambda)=\int_\Lambda f(\lambda)\int_\Lambda g(\mu)E(d\mu)E(d\lambda).$$

Таким образом,

$$\int_\Lambda g(\mu)E(d\mu\cap\delta)=\int_\Lambda g(\mu)E(d\mu)E(\delta),\qquad \delta\in\mathscr{B},\qquad g\in C(\Lambda),$$

и, следовательно, $E(\sigma\cap\delta)=E(\sigma)E(\delta)$ для любой пары σ, δ из $\mathscr{B}$. Поэтому E является спектральной мерой, и, в частности, все проекторы $E(\delta)$ коммутируют. Но тогда из свойства (III) следует, что проекторы $E(\delta)$ коммутируют также с $T(f)$, а это завершает доказательство теоремы.

3. Следствие. *Спектральная мера является счетно аддитивной в сильной операторной топологии.*

Доказательство. Если последовательность $\{\delta_n\}$ борелевских множеств стягивается к пустому множеству, то в силу свойства (I) $|E(\delta_n)x|^2=(E(\delta_n)x,\ E(\delta_n)(x)=(E(\delta_n)x,\ x)\to 0$, ч. т. д.

Последнее рассуждение показывает также, что регулярность скалярной меры $(E(\delta)x,y)$ для любых x, y из $\mathfrak{H}$ влечет регулярность векторной меры $E(\delta)x$ относительно сильной топологии в $\mathfrak{H}$, т. е. для любых $\delta\in\mathscr{B}$ и $\varepsilon>0$ существуют такое замкнутое множество $F\subseteq\delta$ и такое открытое множество $G\supseteq\delta$, что $|E(\sigma)x|<\varepsilon$ для любого σ из $\mathscr{B}$, содержащегося в $G-F$. Это следует из равенства $|E(\sigma)x|^2=(E(\sigma)x,x)$. Таким образом, для *самосопряженной* спектральной меры (т. е. спектральной меры, удовлетворяющей условию $E(\delta)=E(\delta)^*$) *понятия счетной аддитивности и регулярности не зависят от того, рассматриваются они в слабой или в сильной операторной топологии.* Эти понятия никогда не будут рассматриваться в равномерной операторной топологии, так как $|E|\geqslant 1$ для каждого ненулевого проектора E в любом B-пространстве. Поэтому мы можем, не опасаясь недоразумения, употреблять такие выражения, как «регулярная счетно аддитивная самосопряженная спектральная мера».

4. Следствие. *Ограниченный нормальный оператор T однозначно определяет на борелевских множествах комплексной плоскости регулярную счетно аддитивную самосопряженную спектральную меру E, обращающуюся в нуль на $\varrho(T)$ и обладающую тем свойством, что*

$$f(T)=\int_{\sigma(T)} f(\lambda)E(d\lambda),\qquad f\in C(\sigma(T)).$$

Доказательство. Если мы положим $E(\delta)=0$, когда $\delta \cap \sigma(T)$ пусто, то следствие 4 непосредственно вытекает из теоремы 1 и следствия IX.3.15.

5. Определение. Однозначно определенная спектральная мера, соответствующая по следствию 4 нормальному оператору T, называется *разложением единицы для T*.

Для того чтобы связать это определение с определением разложения единицы, данным в § 1, докажем следующее следствие.

6. Следствие. *Если E — разложение единицы для нормального оператора T, а δ — борелевское множество комплексных чисел, то*

$$E(\delta)T = TE(\delta), \qquad \sigma(T_\delta) \subseteq \overline{\delta},$$

где *T_δ — сужение оператора T на $E(\delta)\mathfrak{H}$.*

Доказательство. Первое утверждение следует из теоремы 1 (II). Далее, из теоремы 1.1 и следствия 4 вытекает, что если $\xi \notin \overline{\delta}$, то оператор $R = \int (\xi-\lambda)^{-1}\chi_\delta(\lambda)\,E(d\lambda)$ удовлетворяет равенству $R(\xi I - T) = E(\delta)$, ч. т. д.

7. Следствие. *Регулярная счетно аддитивная самосопряженная спектральная мера E, определенная на борелевских множествах комплексной плоскости, тогда и только тогда является разложением единицы для нормального оператора T, когда $T = \int\limits_{\sigma(T)} \lambda E(d\lambda)$.*

Доказательство. Если $T = \int\limits_{\sigma(T)} \lambda E(d\lambda)$ и мера E является самосопряженной, то $T^* = \int\limits_{\sigma(T)} \overline{\lambda} E(d\lambda)$. Таким образом, по теореме 1.1 для каждого полинома $p(\lambda, \overline{\lambda})$ от λ и $\overline{\lambda}$ имеем $p(T, T^*) = \int\limits_{\sigma(T)} p(\lambda, \overline{\lambda})\,E(d\lambda)$. Из аппроксимационной теоремы Вейерштрасса следует, что $f(T) = \int\limits_{\sigma(T)} f(\lambda)\,E(d\lambda)$ для каждой функции f из $C(\sigma(T))$. Таким образом, по следствию 4 E является разложением единицы для T. Обратное утверждение непосредственно вытекает из следствия 4.

→ 8. Следствие. *Пусть E — разложение единицы для ограниченного нормального оператора T; для каждой комплексной ограни-*

ченной борелевской функции f на спектре $\sigma(T)$ положим

$$\text{(I)} \quad f(T) = \int_{\sigma(T)} f(\lambda) E(d\lambda).$$

Тогда отображение $f \to f(T)$ является непрерывным $*$-гомоморфизмом B^*-алгебры ограниченных борелевских функций на $\sigma(T)$ в B^*-алгебру ограниченных операторов в гильбертовом пространстве, причем функции $f(\lambda) \equiv \lambda$ и $f(\lambda) \equiv 1$ отображаются соответственно в операторы T и I. Этот гомоморфизм обладает еще следующими свойствами:

$$\text{(II)} \quad |f(T)x|^2 = \int_{\sigma(T)} |f(\lambda)|^2 (E(d\lambda)x, x), \qquad x \in \mathfrak{H};$$

(III) *если равномерно ограниченная последовательность $\{f_n\}$ комплексных борелевских функций сходится в каждой точке спектра $\sigma(T)$ к функции f, то $f_n(T) \to f(T)$ в сильной операторной топологии.*

Доказательство. Согласно теореме 1.1, отображение $f \to f(T)$ является непрерывным $*$-гомоморфизмом. По следствию 4 функции λ и 1 отображаются в операторы T и I соответственно. Докажем утверждение (II). Имеем

$$|f(T)x|^2 = (f(T)x, f(T)x) = (f(T)^* f(T)x, x) =$$
$$= (\bar{f}(T) f(T)x, x) = \int_{\sigma(T)} |f(\lambda)|^2 (E(d\lambda)x, x).$$

Утверждение (III) следует из (II), поскольку

$$|f_n(T)x - f(T)x|^2 = \int_{\sigma(T)} |f_n(\lambda) - f(\lambda)|^2 (E(d\lambda)x, x) \to 0$$

по теореме Лебега об ограниченной сходимости.

Иногда желательно иметь операторное исчисление, подобное тому, которое дается в теореме 1.1, но представляющее собой изометрический $*$-изоморфизм (а не просто непрерывный $*$-гомоморфизм) между коммутативной B^*-алгеброй операторов в гильбертовом пространстве и B^*-алгеброй, элементами которой являются классы эквивалентности функций. Пользуясь таким исчислением, которое мы сейчас опишем, можно получать ограниченные операторы из функций, не обязательно ограниченных. Пусть E — счетно аддитивная самосопряженная спектральная мера, определенная на σ-алгебре Σ подмножеств из S. Скалярная или векторная функция f на S называется *существенно* *ограниченной* относительно E, если величина

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{E\ \ s\in S} |f(s)| = \inf_{E(\delta)=I} \sup_{s\in\delta} |f(s)|$$

конечна. Так как мера E счетно аддитивна, то найдется такое множество δ_0 из Σ, что $E(\delta_0) = I$ и

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{E\ \ s\in S} |f(s)| = \sup_{s\in\delta_0} |f(s)|.$$

Таким образом, если функция f существенно ограничена, то существует такая ограниченная на S функция f_0, что $f(s) = f_0(s)$ почти всюду относительно меры E. Если функция f Σ-измерима, то f_0 — ограниченная Σ-измеримая функция, т. е. элемент B^*-алгебры $B(S, \Sigma)$. Алгебра $EB(S, \Sigma)$ существенно ограниченных относительно E и Σ-измеримых функций на S есть B^*-алгебра, элементами которой являются классы эквивалентности Σ-измеримых скалярных функций на S, определенные всевозможными ограниченными Σ-измеримыми скалярными функциями таким образом, что каждый класс состоит из всех Σ-измеримых функций, отличающихся от некоторой ограниченной Σ-измеримой функции лишь на множестве, имеющем нулевую меру E. Иными словами, $EB(S, \Sigma)$ получается из $B(S, \Sigma)$ приведением по модулю множеств нулевой E-меры. Норма в $EB(S, \Sigma)$ есть

$$|f| = \operatorname*{vrai\,sup}_{E\ \ s\in S} |f(s)|.$$

Хотя элементами алгебры $EB(S, \Sigma)$ являются классы эквивалентных функций, мы для удобства будем говорить об этих элементах как о функциях на S. Ситуация здесь вполне аналогична встретившейся нам в случае пространства $L_\infty(S, \Sigma, \mu)$. Алгебраические операции в $EB(S, \Sigma)$ определяются естественным образом; в частности, инволюция определяется как $f^* = \bar{f}$, где, как обычно, $\bar{f}(\lambda) = \overline{f(\lambda)}$. Для ограниченной Σ-измеримой функции g на S имеем $\int_\delta g(s)\,E(ds) = \int_S g(s)\,E(ds)$, если $E(\delta) = I$; поэтому можно определить интеграл от существенно ограниченной относительно E функции f как интеграл от какой-нибудь ограниченной Σ-измеримой функции g, отличающейся от f лишь на множестве нулевой E-меры. Из теоремы 1.1 вытекает, что отображение $f \to \int_S f(s)\,E(ds)$ алгебры $EB(S, \Sigma)$ в алгебру операторов в гильбертовом пространстве является непрерывным $*$-гомоморфизмом. Следующий более сильный результат показывает, что это отображение представляет собой изометрический $*$-изоморфизм.

9. Следствие. *Пусть E — счетно аддитивная самосопряженная спектральная мера на σ-алгебре Σ подмножеств множества S. Тогда отображение $f \to T(f)$ алгебры $EB(S, \Sigma)$ в алгебру операторов в гильбертовом пространстве, определенное соотношением*

$$\text{(I)} \quad T(f) = \int_S f(s)\, E(ds), \qquad f \in EB(S, \Sigma),$$

*является изометрическим *-изоморфизмом и обладает следующими свойствами:*

(II) *оператор $T(f)$ тогда и только тогда имеет ограниченный обратный $T(f)^{-1}$, когда функция $1/f$ существенно ограничена на S относительно меры E;*

$$\text{(III)} \quad \sigma(T(f)) = \bigcap_{E(\delta)=I} \overline{f(\delta)}, \quad f \in EB(S, \Sigma);$$

$$\text{(IV)} \quad |T(f)x|^2 = \int_S |f(\lambda)|^2 (E(d\lambda)x, x), \quad f \in EB(S, \Sigma);$$

(V) *если $\{f_n\}$ — ограниченная последовательность в $EB(S, \Sigma)$ и $\lim\limits_n f_n(s) = f(s)$ почти всюду относительно E, то $T(f_n)x \to T(f)x$ для каждого x из гильбертова пространства.*

Доказательство. Утверждения (IV) и (V) можно доказать так же, как соответствующие утверждения следствия 8. Чтобы показать, что отображение $f \to T(f)$ изометрично, рассмотрим любое такое $\delta \in \Sigma$, что $E(\delta) = I$. Тогда

$$|T(f)| = \left| \int_\delta f(\lambda)\, E(d\lambda) \right| \leqslant \sup_{\lambda \in \delta} |f(\lambda)|$$

и, следовательно, $|T(f)| \leqslant \operatorname*{vrai\,sup}_{E\ \ s \in S} |f(s)|$. Обратно, пусть $r < \operatorname*{vrai\,sup}_{E\ \ s \in S} |f(s)|$ и $\delta_r = \{s \mid |f(s)| > r\}$, так что $E(\delta_r) \neq 0$, и потому $0 \neq x = E(\delta_r)x$ для некоторого вектора x. Тогда, согласно (IV),

$$|T(f)x|^2 = \int_S |f(\lambda)|^2 (E(d\lambda) E(\delta_r) x, x) =$$

$$= \int_S |f(\lambda)|^2 (E(d\lambda \cap \delta_r) x, x) = \int_{\delta_r} |f(\lambda)|^2 (E(d\lambda) x, x) \geqslant r^2 |x|^2,$$

откуда $|T(f)| \geqslant r$, поскольку $x \neq 0$. Так как r — произвольное число, меньшее чем $\operatorname*{vrai\,sup}_{E\ \ s \in S} |f(s)|$, то $|T(f)| \geqslant \operatorname*{vrai\,sup}_{E\ \ s \in S} |f(s)|$; это означает, что $|T(f)| = |f|$, и доказывает, что отображение $f \to T(f)$ является изометрическим *-изоморфизмом. Чтобы доказать (II), заметим, что если функция $1/f$ существенно ограничена на S относительно меры E, то $T(1/f)\cdot T(f)=T(1)=I$, т. е. $T(f)^{-1}$ существует. Обратно, пусть $T(f)^{-1}$ существует и является ограниченным оператором в гильбертовом пространстве; пусть $r>|T(f)^{-1}|$. Покажем, что $E(\delta_r)=0$, где $\delta_r= =\{s\,|\,|1/f(s)|>r\}=\{s\,|\,|f(s)|<r^{-1}\}$. Действительно, если это не так, то найдется такой вектор x, что $0\neq x=E(\delta_r)x$, и тогда, согласно (IV),

$$|T(f)x|^2=\int\limits_{\delta_r}|f(s)|^2(E(ds)x,x)\leqslant r^{-2}|x|^2.$$

Поэтому $|x|=|T(f)^{-1}T(f)x|<r|T(f)x|\leqslant|x|$, что невозможно; полученное противоречие завершает доказательство утверждения (II). Наконец, чтобы доказать (III), предположим, что $\lambda_0\notin\overline{f(\delta)}$, где $E(\delta)=I$. Тогда функция $1/(\lambda_0-f)$ существенно ограничена относительно E, и потому $\lambda_0\in\varrho(T(f))$. Это доказывает, что $\overline{f(\delta)}\supseteq\sigma(T(f))$, и, таким образом,

$$\bigcap_{E(\delta)=I}\overline{f(\delta)}\supseteq\sigma(T(f)).$$

Обратно, если $\lambda_0\in\varrho(T(f))$, то, согласно (II), функция $1/(\lambda_0-f)$ существенно ограничена относительно E; следовательно, найдется такое множество $\delta\in\Sigma$, что $E(\delta)=I$ и $\lambda_0\notin\overline{f(\delta)}$. Это показывает, что $\sigma(T(f))\supseteq\bigcap\limits_{E(\delta)=I}\overline{f(\delta)}$, ч. т. д.

10. Следствие. *Пусть $f\in EB(S,\Sigma)$, где E — спектральная мера из следствия 9, и пусть E_f — разложение единицы для оператора $T(f)$. Тогда $E_f(\delta)=E(f^{-1}(\delta))$ для каждого борелевского множества δ комплексной плоскости.*

Доказательство. Поскольку функция f существенно ограничена относительно E, то существует такая постоянная M и такое множество $\sigma_0\in\Sigma$, что $E(\sigma_0)=I$ и $|f(s)|\leqslant M$ при $s\in\sigma_0$. Пусть $T=T(f)$. Тогда, согласно 9 (II), для каждого $\lambda_1\in\varrho(T)$ функция $1/(\lambda_1-f)$ существенно ограничена относительно E, и потому найдется такая окрестность N_1 точки λ_1, что $E(f^{-1}(N_1))=0$. Конечное число таких окрестностей покрывает множество δ_n, состоящее из всех таких комплексных чисел λ, для которых $|\lambda|\leqslant M$ и расстояние от λ до $\sigma(T)$ не меньше, чем $1/n$. Поэтому $E(f^{-1}(\delta_n))=0$. Так как мера E счетно аддитивна, то $E(f^{-1}(\varrho(T)))=0$. Следовательно, $E(f^{-1}(\delta\cap\sigma(T)))=E(f^{-1}(\delta))$ для любого борелевского множества δ комплексной плоскости. Таким образом, по правилу замены меры при интегрировании,

$$\int_{\sigma(T)} \lambda E(f^{-1}(ds)) = \int_S f(s) E(ds) = T,$$

и потому по следствию 7 $E_f(\delta) = E(f^{-1}(\delta))$, ч. т. д.

3. Собственные значения и собственные векторы

Одно из отличий спектральной теории в общем B-пространстве (или в гильбертовом пространстве) от соответствующей теории в конечномерном пространстве состоит в том, что в общем случае оператор $\mu I - T$ может иметь обратный даже тогда, когда μ принадлежит спектру $\sigma(T)$ оператора T. С рядом таких примеров мы встречались в § VII.5, где была также дана общая классификация точек спектра. Мы повторим здесь эту классификацию в применении к операторам в гильбертовом пространстве и изучим некоторые ее связи с теорией нормальных операторов.

1. Определение. Пусть $\sigma(T)$ — спектр ограниченного линейного оператора T в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Множество всех комплексных чисел λ из $\sigma(T)$, для которых оператор $\lambda I - T$ не является взаимно однозначным, называется *точечным спектром* оператора T и обозначается $\sigma_p(T)$. Каждое число μ из $\sigma_p(T)$ называется *собственным значением* оператора T, а каждый вектор $x \neq 0$, для которого $(\mu I - T)x = 0$ при некотором $\mu \in \sigma_p(T)$, называется *собственным вектором оператора, соответствующим собственному значению* μ, или проще, *собственным вектором оператора* T. Множество всех $\mu \in \sigma(T)$, для которых оператор $\mu I - T$ взаимно однозначен и для которых многообразие $(\mu I - T)\mathfrak{H}$ всюду плотно в $\mathfrak{H}$ (но не совпадает со всем $\mathfrak{H}$), называется *непрерывным спектром* оператора T и обозначается $\sigma_c(T)$. Множество всех $\mu \in \sigma(T)$, для которых оператор $\mu I - T$ взаимно однозначен, но многообразие $(\mu I - T)\mathfrak{H}$ не является всюду плотным в $\mathfrak{H}$, называется *остаточным спектром* оператора T и обозначается $\sigma_r(T)$.

Следует заметить, что если оператор $\lambda I - T$ взаимно однозначен и $(\lambda I - T)\mathfrak{H} = \mathfrak{H}$, то (см. II.2.2) оператор $(\lambda I - T)^{-1}$ определен на всем $\mathfrak{H}$ и ограничен, и потому λ не принадлежит спектру $\sigma(T)$. Это показывает, что каждая точка комплексной плоскости лежит в одном из непересекающихся множеств $\varrho(T)$, $\sigma_p(T)$, $\sigma_c(T)$, $\sigma_r(T)$. Напомним еще, что $\sigma(T)$ есть непустое замкнутое множество (IX.1.5), содержащееся в круге $\{\lambda \mid |\lambda| \leqslant |T|\}$ (см. VII.3.2). Следующая лемма резюмирует вышеизложенное.

2. Лемма. *Пусть T — ограниченный оператор в гильбертовом пространстве. Тогда резольвентное множество $\varrho(T)$ открыто,*

а спектр является непустым замкнутым подмножеством круга $\{\lambda \mid |\lambda| \leqslant |T|\}$. *Кроме того, множества* $\varrho(T)$, $\sigma_p(T)$, $\sigma_c(T)$ *и* $\sigma_r(T)$ *попарно не пересекаются и их объединение совпадает со всей комплексной плоскостью.*

Для иллюстрации введенных понятий рассмотрим гильбертово пространство l_2 всех последовательностей $x=\{\alpha_i\}$ комплексных чисел, для которых $|x|=\left(\sum|\alpha_i|^2\right)^{1/2}<\infty$. Скалярное произведение в l_2 определяется формулой $(x, y)=\sum \alpha_i\overline{\beta}_i$, где $x=\{\alpha_i\}$, $y=\{\beta_i\}$. Пусть $y=Tx$ — оператор сдвига в l_2, определенный соотношением $y=\{\alpha_2, \alpha_3, \ldots\}$, где $x=\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\}$. Так как $|T|\leqslant 1$, то по лемме 2 спектр $\sigma(T)$ содержится в круге $\{\lambda \mid |\lambda|\leqslant 1\}$. Если $|\lambda|<1$, то последовательность $x=\{1, \lambda, \lambda^2, \ldots\}$ принадлежит l_2 и $Tx=\lambda x$, так что каждое λ с $|\lambda|<1$ является собственным значением оператора T. Так как спектр $\sigma(T)$ замкнут и содержится в единичном круге, то $\sigma(T)=\{\lambda \mid |\lambda|\leqslant 1\}$. Ясно, что единственным, с точностью до скалярного множителя, собственным вектором, соответствующим собственному значению λ при $|\lambda|<1$, является вектор $\{1, \lambda, \lambda^2, \ldots\}$, так что многообразие $\{x \mid x\in l_2, (T-\lambda I)x=0\}$ одномерно. Если $|\lambda|=1$, то $\lambda\notin\sigma_p(T)$, поскольку в этом случае $\{1, \lambda, \lambda^2, \ldots\}$ не принадлежит l_2. Такие λ лежат в $\sigma_c(T)$. Чтобы показать это, рассмотрим в l_2 произвольный вектор $y=\{\beta_i\}$, и пусть k — такое натуральное число, что $\sum_{i=k}^{\infty}|\beta_i|^2<\varepsilon^2$, где ε — заданное положительное число. Ясно, что мы можем найти такую последовательность $x=\{\alpha_n\}$, что $\alpha_{n+1}=0$ при $n>k$ и $\lambda\alpha_n-\alpha_{n+1}=\beta_n$ при $n\leqslant k$. Таким образом,

$$|(\lambda I-T)x-y|=\left(\sum_{n=k+1}^{\infty}|\beta_n|^2\right)^{1/2}<\varepsilon,$$

откуда следует, что $\sigma_c(T)=\{\lambda \mid |\lambda|=1\}$ и что остаточный спектр $\sigma_r(T)$ пуст. Можно также привести примеры операторов A, для которых $\sigma_r(A)=\sigma(A)$; для таких операторов точечный и непрерывный спектры пусты.

Следующая лемма показывает, что для нормального оператора характер точки спектра определяется разложением единицы.

3. Лемма. *Если E — разложение единицы для нормального оператора T, то:*

(I) *если множество δ не пусто и открыто в относительной топологии спектра $\sigma(T)$, то $E(\delta)\neq 0$;*

(II) *точечный спектр $\sigma_p(T)$ оператора T состоит из всех комплексных чисел μ, для которых $E(\{\mu\})\neq 0$;*

(III) *остаточный спектр $\sigma_r(T)$ оператора T пуст.*

Доказательство. Пусть δ открыто, $E(\delta)=0$ и $\lambda_0 \in \delta \cap \sigma(T)$. Тогда функция $(\lambda_0-\lambda)^{-1}$ существенно ограничена на $\sigma(T)$ относительно меры E и, согласно следствию 2.9 (II), $\lambda_0 \in \varrho(T)$, что приводит к противоречию, доказывающему справедливость утверждения (I). Чтобы доказать пункт (II), допустим, что $E(\{\mu\})x = x \neq 0$. Тогда

$$Tx = \int\limits_{\sigma(T)} \lambda E(d\lambda) E(\{\mu\}) x = \int\limits_{\sigma(T)} \lambda E(d\lambda \cap \{\mu\}) x = \mu x,$$

так что $\mu \in \sigma_p(T)$. Обратно, если $x \neq 0$ и $Tx = \mu x$, положим

$$f_n(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mu-\lambda}, & |\mu-\lambda| > \dfrac{1}{n}, \\ 0, & |\mu-\lambda| \leqslant \dfrac{1}{n}. \end{cases}$$

Тогда $f_n(T)(\mu I - T) = E\{\lambda \,|\, |\lambda-\mu| > 1/n\}$, и так как $(\mu I - T)x = 0$, мы имеем $E(\{\lambda \,|\, |\lambda-\mu| > 1/n\})x = 0$. Устремляя n к бесконечности и применяя следствие 2.8 (III), получаем, что $E(\{\lambda | \lambda \neq \mu\})x = 0$, откуда $E(\{\mu\})x = x \neq 0$. Чтобы доказать (III), достаточно показать, что если $(\mu I - T)\mathfrak{H}$ не плотно в $\mathfrak{H}$, то $\mu \in \sigma_p(T)$. Для такого μ по следствию II.3.13 и теореме IV.4.5 найдется вектор $x \neq 0$, ортогональный к $(\mu I - T)\mathfrak{H}$, откуда $(\bar{\mu} I - T^*)x = 0$. Согласно (II), для разложения единицы A оператора T^* имеем $A(\{\mu\}) \neq 0$. Таким образом, в силу следствия 2.10 $0 \neq A(\{\bar{\mu}\}) = E(\{\mu\})$ и, согласно (II), $\mu \in \sigma_p(T)$, ч. т. д.

4. Теорема. *Если спектр ограниченного нормального оператора T в $\mathfrak{H}$ счетен, то в $\mathfrak{H}$ существует ортонормальный базис B, состоящий из собственных векторов оператора T. Кроме того,*

$$x = \sum_{y \in B} (x, y) y, \qquad x \in \mathfrak{H},$$

и для каждого x все коэффициенты (x, y), за исключением, быть может, счетного числа, равны нулю.

Доказательство. Пусть $\sigma(T) = \{\mu_1, \mu_2, \ldots\}$ и $\mathfrak{H}_n = E(\mu_n)\mathfrak{H}$, где E — разложение единицы для T. Если $\mathfrak{H}_n \neq 0$, то из леммы 3 следует, что $\mathfrak{H}_n$ состоит целиком из собственных векторов оператора T. По теореме IV.4.12 в каждом подпространстве $\mathfrak{H}_n$ имеется ортонормальный базис B_n. Если мы положим $B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$, то каждый элемент из B будет собственным вектором оператора T. Так как $E(\mu_n)x = x$ для x из B_n и $E(\mu_n)E(\mu_m) = 0$ при

$n \neq m$, то B является ортонормальным множеством. Кроме того, по следствию 2.3

$$x = \int_{\sigma(T)} E(d\lambda)\,x = \sum_{n=1}^{\infty} E(\mu_n)\,x, \qquad x \in \mathfrak{H},$$

и, таким образом, не существует ненулевого вектора, ортогонального ко всем элементам множества B. Следовательно, B полно и по теореме IV.4.13 является ортонормальным базисом в $\mathfrak{H}$. Оставшиеся два утверждения теоремы следуют из определения IV.4.11 и теоремы IV.4.10.

$\longrightarrow$ 5. Следствие. *Спектр вполне непрерывного нормального оператора T в $\mathfrak{H}$ счетен и не имеет на комплексной плоскости предельных точек, кроме, быть может, точки $\mu = 0$. Каждая отличная от нуля точка спектра является собственным значением, и число соответствующих ей линейно независимых собственных векторов конечно. В $\mathfrak{H}$ существует ортонормальный базис, состоящий из собственных векторов оператора T.*

Доказательство. Первые утверждения следуют из теоремы VII.4.5, а последнее — из теоремы 4.

4. Унитарные, самосопряженные и положительные операторы

В этом параграфе мы вкратце рассмотрим некоторые специальные классы нормальных операторов, часто встречающиеся в математическом анализе.

1. Определение. Ограниченный оператор T в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ называется *унитарным*, если $TT^* = T^*T = I$; *самосопряженным*, *симметрическим* или *эрмитовым*, если $T = T^*$; *положительным*, если он самосопряжен[1]) и $(Tx, x) \geqslant 0$ для любого x из $\mathfrak{H}$; *положительно определенным*, если он положителен и $(Tx, x) > 0$ для любого $x \neq 0$ из $\mathfrak{H}$[2]).

Ясно, что операторы всех этих классов являются нормальными.

Унитарные операторы имеют ряд других характеристических свойств. Например, если U — унитарный оператор, то $(x, y) =$

---

[1]) При определении положительного оператора в комплексном пространстве достаточно ограничиться требованием $(Tx, x) \geqslant 0$, так как при его выполнении оператор T автоматически оказывается самосопряженным. — *Прим. перев.*

[2]) Иногда оператор T называют положительно определенным лишь в том случае, когда для некоторого $\alpha > 0$ и для всех $x \in \mathfrak{H}$ выполняется неравенство $(Tx, x) \geqslant \alpha\,|x|^2$. — *Прим. перев.*

$=(U^*Ux, y)=(Ux, U^{**}y)=(Ux, Uy)$. Обратно, пусть оператор U удовлетворяет равенству $(x, y)=(Ux, Uy)$. Тогда $(x, y)=(U^*Ux, y)$, и если оператор U имеет обратный, то $U^{-1}=U^*$; это означает, что оператор U унитарен. Другими словами, унитарный оператор представляет собой изоморфизм пространства $\mathfrak{H}$ на себя, сохраняющий скалярное произведение (и, следовательно, сохраняющий все свойства пространства $\mathfrak{H}$). По этой причине операторы A и B, действующие в $\mathfrak{H}$ и связанные соотношением $A=U^*BU$, где оператор U унитарен, обладают одинаковыми свойствами. Такие операторы называются *унитарно эквивалентными*.

Эрмитовы операторы образуют в $B(\mathfrak{H})$ подкласс, роль которого в $B(\mathfrak{H})$ во многом напоминает роль подкласса вещественных чисел в классе всех комплексных чисел. В частности, каждый оператор $T\in B(\mathfrak{H})$ однозначно представим в виде $T=A+iB$, где A и B — эрмитовы операторы. Очевидно, A и B должны определяться формулами

$$A=\frac{T+T^*}{2}, \qquad B=\frac{T-T^*}{2i}.$$

Ясно, что оператор T нормален тогда и только тогда, когда его «вещественная» и «мнимая» части A и B коммутируют.

Понятие положительного оператора позволяет нам ввести в пространстве $B(\mathfrak{H})$ отношение порядка: мы пишем $S\leqslant T$, если оператор $T-S$ положителен. Таким образом, $B(\mathfrak{H})$ становится частично упорядоченным векторным пространством и обладает, как таковое, многими интересными свойствами; некоторые из них приводятся в упражнениях в конце этой главы.

Связь между классами унитарных, эрмитовых и положительных операторов и соответственно комплексными числами, по модулю равными единице, вещественными числами и положительными числами иллюстрируется следующей теоремой.

2. Теорема. *Ограниченный нормальный оператор является унитарным, эрмитовым или положительным тогда и только тогда, когда его спектр лежит соответственно на единичной окружности, вещественной оси или неотрицательной вещественной полуоси.*

Доказательство. Если N — ограниченный нормальный оператор, то по следствию IX.3.15 соотношение $NN^*=N^*N=I$ выполняется тогда и только тогда, когда $\bar{\lambda}\lambda=1$ для каждого λ, принадлежащего спектру оператора N; аналогично соотношение $N=N^*$ равносильно тому, что $\lambda=\bar{\lambda}$ для каждого $\lambda\in\sigma(N)$. Пусть E — разложение единицы для самосопряженного оператора A. Если его спектр неотрицателен, то сам оператор положителен, поскольку по следствию 2.7 $(Ax, x) = \int\limits_{\sigma(A)} \lambda (E(d\lambda) x, x)$. Обратно, если открытый интервал δ отрицательной полуоси пересекается со спектром, то по лемме 3.3 (I) $E(\delta) \neq 0$. И если $0 \neq x = E(\delta) x$, то $(Ax, x) = \int\limits_{\sigma(A)} \lambda (E(d\lambda) E(\delta) x, x) = \int\limits_{\sigma(A)} \lambda (E(d\lambda \cap \delta) x, x) = \int\limits_{\sigma(A) \cap \delta} \lambda (E(d\lambda) x, x) < 0$, т. е. оператор A не является положительным, ч. т. д.

Установленные в этой теореме связи между спектром нормального оператора N и значениями формы (Nx, x) могут быть значительно углублены (см. упражнение 8.8). Здесь мы исследуем эти связи в частном случае вполне непрерывного самосопряженного оператора N. В этом случае, согласно следствию 3.5, спектр $\sigma(N)$ состоит из последовательности $\{\lambda_n^+\}$ (возможно, конечной или пустой) положительных чисел, последовательности отрицательных чисел $\{\lambda_n^-\}$ (возможно, конечной или пустой) и нуля (при условии, что пространство $\mathfrak{H}$ бесконечномерно). Кроме того, согласно следствию 3.5, множество собственных векторов, соответствующих любому ненулевому собственному значению, образует конечномерное пространство. Размерность этого пространства называют *кратностью* соответствующего собственного значения. Мы можем предположить, что положительные собственные значения занумерованы в порядке убывания, причем каждое из них повторяется столько раз, какова его кратность: $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots$. Последовательность $\{\lambda_n\}$ либо пуста (что мы пока исключим), либо конечна, либо бесконечна; в последнем случае $\lambda_n \to 0$. Тогда

$$(Nx, x) = \int\limits_{\sigma(T)} \lambda (E(d\lambda) x, x) \leqslant \lambda_1 |x|^2,$$

так что $(Nx, x)/|x|^2 \leqslant \lambda_1$. Следовательно, наибольшее положительное собственное число λ_1 можно охарактеризовать *соотношением Рэлея*

$$\text{(I)} \qquad \lambda_1 = \max_x \frac{(Nx, x)}{|x|^2}.$$

Как, зная λ_1, охарактеризовать λ_2? Легко видеть, что если x_1 — ненулевой собственный вектор, соответствующий значению λ_1, то

$$[*] \qquad \lambda_2 = \max_{(x, x_1)=0} \frac{(Nx, x)}{|x|^2}.$$

Так как эта формула явно содержит собственный вектор x_1, она во многих случаях оказывается неудобной. Более удовлетворительная характеристика λ_2 состоит в следующем. Для любого вектора y мы можем найти такую ненулевую линейную комбинацию $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ вектора x_1 и собственного вектора x_2, соответствующего собственному значению λ_2 и ортогонального к x_1, что $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = 0$. Поскольку $|\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2|^2 = |\alpha_1|^2 |x_1|^2 + |\alpha_2|^2 |x_2|^2$, мы имеем

$$(N(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2), \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \lambda_1 |\alpha_1|^2 |x_1|^2 + \lambda_2 |\alpha_2|^2 |x_2|^2 \geqslant \lambda_2 |\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2|^2.$$

Следовательно,

$$\lambda_2 \leqslant \max_{(x, y)=0} \frac{(Nx, x)}{|x|^2}.$$

С другой стороны, соотношение [*] показывает, что если положить $y = x_1$, то последний максимум в точности равен λ_2. Таким образом, мы получаем

$$\lambda_2 = \min_y \max_{(x, y)=0} \frac{(Nx, x)}{|x|^2}.$$

Таким же способом можно показать, что

$$\lambda_3 = \min_{y_1, y_2} \max_{\substack{(x, y_1)=0 \\ (x, y_2)=0}} \frac{(Nx, x)}{|x|^2}$$

и вообще

(II) $$\lambda_{k+1} = \min_{y_1, \ldots, y_k} \max_{\substack{(x, y_i)=0 \\ i=1, \ldots, k}} \frac{(Nx, x)}{|x|^2}, \qquad k \geqslant 1.$$

Следующая теорема резюмирует изложенное.

→ 3. Теорема. *Пусть $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots$ — положительные собственные значения вполне непрерывного самосопряженного оператора N, причем каждое из них повторяется столько раз, какова его кратность. Тогда собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ определяются формулами* (I) *и* (II).

Характеристика k-го по величине собственного значения, данная в теореме 3, кроме многих теоретических приложений, имеет многочисленные применения к приближенному вычислению собственных значений. Здесь мы лишь проиллюстрируем применение этой теоремы примером. Пусть L и M — вполне непрерывные самосопряженные операторы, а $\{\lambda_n\}$ и $\{\mu_n\}$ — последовательности их положительных собственных значений, расположенные в порядке убывания, причем каждое повторено столько раз, какова его кратность. Тогда если $L \leqslant M$, то $\lambda_n \leqslant \mu_n$. Доказательство очевидно, ибо $L \leqslant M$ влечет $(Lx, x) \leqslant (Mx, x)$. Следовательно, формулы для λ_n и μ_n, данные в теореме 3, показывают, что $\lambda_n \leqslant \mu_n$.

5. Спектральное представление

Пусть μ — конечная положительная мера, определенная на σ-алгебре $\mathscr{B}$ борелевских множеств комплексной плоскости и равная нулю на дополнении некоторого ограниченного множества S. Одним из простейших примеров ограниченного нормального оператора может служить оператор T, определенный формулой $(Tx)(\lambda) = \lambda x(\lambda)$, $x \in L_2(S, \mathscr{B}, \mu)$. Легко видеть, что спектр $\sigma(T)$ оператора T совпадает с носителем меры μ, т. е. с дополнением наибольшего открытого множества δ, для которого $\mu(\delta) = 0$. Спектральное разложение оператора T определяется для каждого борелевского множества e формулой $(E(e)x)(\lambda) = \chi_e(\lambda)x(\lambda)$; таким образом, для каждой ограниченной измеримой по Борелю функции F оператор $F(T)$ задается формулой $(F(T)x)(\lambda) = F(\lambda)x(\lambda)$. Первая цель настоящего параграфа — показать, что приведенный пример описывает в некотором смысле типичную структуру произвольного нормального оператора.

Говоря более ясно, если T — нормальный оператор, действующий в $\mathfrak{H}$, то существует такое унитарное отображение U пространства $\mathfrak{H}$ на подходящим образом выбранное функциональное пространство $L_2(S, \mathscr{B}, \mu)$ или на прямую сумму таких пространств, что оператор UTU^{-1} имеет вид «умножения на λ». Точный смысл этой фразы поясняется следующим ниже определением. Здесь и в дальнейшем символ $\sum_\alpha \mathfrak{H}_\alpha$ употребляется для обозначения прямой суммы гильбертовых пространств $\mathfrak{H}_\alpha$ (см. IV.4.18 и IV.4.19). Проекция элемента x из $\sum_\alpha \mathfrak{H}_\alpha$ в $\mathfrak{H}_\alpha$ обозначается x_α.

1. Определение. Пусть T — нормальный оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, а $\{\mu_\alpha\}$ — семейство конечных положительных регулярных мер на борелевских множествах комплексной плоскости. Отображение U пространства $\mathfrak{H}$ на $\sum_\alpha L_2(\mu_\alpha)$ называется *спектральным представлением $\mathfrak{H}$ в $\sum_\alpha L_2(\mu_\alpha)$ относительно оператора T*, если выполняются следующие условия:

(a) каждая мера μ_α равна нулю на дополнении спектра оператора T;

(b) оператор U является линейным отображением $\mathfrak{H}$ на все пространство $\sum_\alpha L_2(\mu_\alpha)$ и сохраняет скалярное произведение;

(с) для каждой борелевской функции f, ограниченной на спектре оператора T, любого x из $\mathfrak{H}$ и любого α

$$(U(f(T)x))_\alpha(\lambda) = f(\lambda)(Ux)_\alpha(\lambda)$$

почти всюду по мере μ_α.

Сначала мы рассмотрим случай, когда $\mathfrak{H}$ обладает спектральным представлением в пространстве $L_2(\mu)$.

2. Теорема. *Пусть T — нормальный оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Предположим, что для некоторого вектора x из $\mathfrak{H}$ линейные комбинации векторов вида $T^m T^{*n} x$, m, $n \geqslant 0$, всюду плотны в $\mathfrak{H}$. Тогда $\mathfrak{H}$ допускает спектральное представление относительно T в гильбертовом пространстве $L_2(\mu)$.*

Доказательство. Пусть E — разложение единицы для T, и пусть $\mu = (E(\cdot)x, x)$, а $\mathfrak{D}_1$ — линейное многообразие в $\mathfrak{H}$, состоящее из всех векторов вида $f(T)x$, где f — ограниченная борелевская функция на $\sigma(T)$. По предположению, $\mathfrak{D}_1$ всюду плотно в $\mathfrak{H}$. Заметим, что если $f(T)x = g(T)x$, то

$$0 = |\{f(T) - g(T)\}x|^2 = \int |f(\lambda) - g(\lambda)|^2 \mu(d\lambda),$$

откуда следует, что $f = g$ почти всюду относительно меры μ. Следовательно, мы можем определить оператор U_1, действующий из $\mathfrak{D}_1$ в $L_2(\mu)$, полагая $U_1 f(T)x = f$. Ясно, что оператор U_1 линеен, и для $y = f(T)x$, $z = g(T)x$ мы, согласно следствию 2.8, имеем

$$(y, z) = \int_{\sigma(T)} f(\lambda)\overline{g(\lambda)}\mu(d\lambda) = (U_1 y, U_1 z).$$

Это показывает, что U_1 сохраняет скалярное произведение и, таким образом, является взаимно однозначным и непрерывным. Поэтому он допускает единственное продолжение U на пространство $\overline{\mathfrak{D}_1} = \mathfrak{H}$, причем U отображает $\mathfrak{H}$ на замыкание по метрике пространства $L_2(\mu)$ множества всех ограниченных борелевских функций, т. е. на $L_2(\mu)$. С помощью элементарных соображений непрерывности можно показать, что U является изометрическим изоморфизмом между $\mathfrak{H}$ и $L_2(\mu)$. Если теперь $f_n(T)x \to y$, то $f_n \to Uy$ в $L_2(\mu)$, и поскольку $(Uf(T)f_n(T)x)(\lambda) = f(\lambda)f_n(\lambda)$, мы имеем $(Uf(T)y)(\lambda) = f(\lambda)(Uy)(\lambda)$, ч. т. д.

Рассмотрим теперь случай, когда T — произвольный ограниченный нормальный оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Назовем подпространство $\mathfrak{H}_1 \subseteq \mathfrak{H}$ допустимым, если $T\mathfrak{H}_1 \subseteq \mathfrak{H}_1$, $T^*\mathfrak{H}_1 \subseteq \mathfrak{H}_1$ и найдется такой вектор $x_1 \in \mathfrak{H}_1$, что линейные комбинации векторов $T^n T^{*m} x_1$ всюду плотны в $\mathfrak{H}_1$. С помощью леммы

Цорна можно показать, что существует максимальное семейство $\{\mathfrak{H}_\alpha\}$ взаимно ортогональных допустимых подпространств. Пусть $\mathfrak{N}$ — ортогональное дополнение к подпространству, порожденному семейством $\{\mathfrak{H}_\alpha\}$; ясно, что операторы T и T^* отображают $\mathfrak{N}$ в себя. Таким образом, если $\mathfrak{N} \neq 0$, то в нем содержится ненулевое допустимое подпространство, что противоречит максимальности семейства $\{\mathfrak{H}_\alpha\}$. Это показывает, что подпространства $\mathfrak{H}_\alpha$ в совокупности порождают все $\mathfrak{H}$. Ясно, что мы можем рассматривать $\mathfrak{H}$ как прямую сумму $\mathfrak{H} = \sum \mathfrak{H}_\alpha$ гильбертовых пространств $\mathfrak{H}_\alpha$ (см. лемму IV.4.19). Применяя теперь теорему 1 к сужению T_α оператора T на пространство $\mathfrak{H}_\alpha$, мы можем построить такую регулярную положительную меру μ_α, равную нулю на дополнении к $\sigma(T_\alpha)$ (а значит и на дополнении к $\sigma(T)$), и такое унитарное отображение U_α пространства $\mathfrak{H}_\alpha$ на $L_2(\mu_\alpha)$, что $(U_\alpha f(T)x)(\lambda) = f(\lambda)(U_\alpha x)(\lambda)$ для каждой ограниченной борелевской функции f и каждого x из $\mathfrak{H}_\alpha$. Мы можем резюмировать сделанные замечания в виде следующей теоремы.

3. Теорема. *Каждое гильбертово пространство $\mathfrak{H}$ допускает спектральное представление относительно произвольного ограниченного нормального оператора, определенного на $\mathfrak{H}$.*

Мы видели, что теорема 3 является следствием спектральной теоремы для нормальных операторов. Стоит отметить, что на самом деле эти теоремы эквивалентны. Действительно, если оператор UTU^{-1} в пространстве $\sum_\alpha L_2(\sigma(T), \mathscr{B}, \mu_\alpha)$ имеет вид, предписанный определением 1, и если для каждого борелевского множества $e \subseteq \sigma(T)$ оператор проектирования $P(e)$ определен соотношением $(P(e)Uy)_\alpha(\lambda) = \chi_e(\lambda)(Uy)_\alpha(\lambda)$, $y \in \mathfrak{H}$, то спектральная мера E, определенная равенством $E(e) = U^{-1}P(e)U$, является разложением единицы для T.

Часто бывает удобно выразить результат теоремы 3 несколько иначе.

4. Следствие. *Пусть T — нормальный оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Тогда существуют пространство (S, Σ, μ) с регулярной положительной мерой μ, ограниченная μ-измеримая скалярная функция f на S и изометрический изоморфизм U пространства $\mathfrak{H}$ на $L_2(S, \Sigma, \mu)$, сохраняющий скалярное произведение и такой, что для любого y из $\mathfrak{H}$*

$$(UTy)(s) = f(s)(Uy)(s)$$

для почти всех относительно μ точек s из S.

Доказательство. Используя обозначения предыдущей теоремы и ее доказательства, рассмотрим множества $S_\alpha = \sigma(T_\alpha)$ как подмножества различных экземпляров комплексной плоскости, так что для различных индексов α, β множества S_α, S_β не пересекаются. Пусть $S=\bigcup\limits_\alpha S_\alpha$, и пусть Σ состоит из всех множеств, имеющих вид $e=\bigcup\limits_\alpha e_\alpha$, где e_α — борелевское подмножество в S_α. Для таких e положим $\mu(e)=\sum\limits_\alpha \mu_\alpha(e_\alpha)$, если этот ряд содержит лишь счетное число ненулевых членов и сходится; в противном случае пусть $\mu(e)=\infty$. Определим расстояние между двумя точками s, t из S как обычное расстояние на комплексной плоскости, если s и t принадлежат одному и тому же S_α. В противном случае будем считать, что это расстояние равно $|T|$. Легко видеть, что (S, Σ, μ) — пространство с регулярной мерой. Для каждого s из S положим $f(s)=s$. Ясно, что функция f является μ-измеримой, и так как норма сужения оператора T на $\mathfrak{H}_\alpha$ не более $|T|$, то из леммы 3.2 следует, что $|f(s)|\leqslant|T|$. Пусть $\mathfrak{D}_1$ состоит из всех конечных сумм вида $x=\sum x_{\alpha_i}$, где $x_{\alpha_i}\in\mathfrak{H}_{\alpha_i}$, и пусть U_1 — отображение множества $\mathfrak{D}_1$ в $L_2(S, \Sigma, \mu)$, заданное равенством $U_1\left(\sum x_{\alpha_i}\right)=\sum U_{\alpha_i}x_{\alpha_i}$, где функции $U_\alpha x_\alpha$ для s из S_α определены так же, как в теореме 2, а для точек s, не принадлежащих S_α, доопределены соотношением $(U_\alpha x_\alpha)(s)=0$. Ясно, что отображение U_1 линейно, изометрично и сохраняет скалярное произведение. Поскольку область определения отображения U_1 плотна в $\mathfrak{H}$, а множество его значений плотно в $L_2(S, \Sigma, \mu)$, то это отображение допускает единственное непрерывное продолжение U, которое является изометрическим изоморфизмом между $\mathfrak{H}$ и $L_2(S, \Sigma, \mu)$ и сохраняет скалярное произведение. Так как для элемента $x=\sum x_{\alpha_i}$ из $\mathfrak{D}_1$ мы имеем

$$(U_1Tx)(s)=\sum (U_{\alpha_i}Tx_{\alpha_i})(s)=f(s)\left(\sum U_{\alpha_i}x_{\alpha_i}\right)(s)=f(s)(U_1x)(s),$$

то $UTx=f(\cdot)Ux$ для любого x из $\mathfrak{H}$, ч. т. д.

5. Следствие. *Если пространство $\mathfrak{H}$ сепарабельно, то меру μ в следствии 4 можно выбрать так, чтобы она была конечной.*

Доказательство. Если $\mathfrak{H}$ сепарабельно, то в нем существует счетная система взаимно ортогональных допустимых подпространств $\mathfrak{H}_n$, $n=1, 2, \ldots$, которые в совокупности порождают $\mathfrak{H}$. Достаточно так выбрать x_n из $\mathfrak{H}_n$, чтобы $|x_n|^2=1/2^n$ и чтобы линейные комбинации векторов $T^iT^{*j}x_n$, $i,j\geqslant 0$, были плотны в $\mathfrak{H}_n$. При таком выборе векторов x_n мы имеем $\mu_n(S_n)=1/2^n$ и $\mu(S)\leqslant 1$, ч. т. д.

Спектральное представление, рассмотренное в предыдущих теоремах, дает важную информацию о структуре нормального оператора. Ясно, однако, что меры, удовлетворяющие определению 1, могут быть выбраны многими способами. Сейчас будет показано, что в случае сепарабельности гильбертова пространства $\mathfrak{H}$ имеется в некотором смысле «наилучший» способ сделать выбор, и если этот «наилучший» выбор сделан, то полученное семейство мер характеризует оператор T с точностью до унитарной эквивалентности. Этот результат включает в себя то, что известно под названием теории *спектральных типов*.

6. Определение. Пусть T — ограниченный нормальный оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, и пусть E — его спектральное разложение. Вектор x из $\mathfrak{H}$ называется *максимальным* относительно T, если каждая мера вида $(E(\cdot)y, y)$, $y \in \mathfrak{H}$, абсолютно непрерывна относительно меры $(E(\cdot)x, x)$.

7. Лемма. *Пусть T — ограниченный нормальный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Пусть y_0 — заданный вектор из $\mathfrak{H}$. Тогда существует в $\mathfrak{H}$ такой максимальный относительно T вектор x, что y_0 лежит в подпространстве*

$$\mathfrak{H}(x) = \overline{\mathrm{sp}}\{T^n (T^*)^m x \mid n, m \geqslant 0\}$$

пространства $\mathfrak{H}$.

Доказательство. Очевидно, мы можем предположить, что $|y_0| = 1$. Пусть $y_0, y_1, y_2, \ldots$ — ортонормированный базис в $\mathfrak{H}$ с начальным элементом y_0. Пусть E — спектральное разложение для T; положим $v_n(e) = (E(e)y_n, y_n)$ для каждого борелевского множества e. Применяя теорему Лебега о разложении меры (III.4.14), построим последовательность борелевских множеств $\{e_n\}$, для которой $\sum_{j=0}^{n-1} v_j(e_n) = 0$, и такую, что если e — борелевское подмножество дополнения e_n' множества e_n и $\sum_{j=0}^{n-1} v_j(e) = 0$, то $v_n(e) = 0$. Пусть σ_0 — комплексная плоскость; положим $\sigma_n = \bigcup_{j=n}^{\infty} e_j$ при $n \geqslant 1$. Тогда $\{\sigma_n\}$ — убывающая последовательность борелевских множеств, причем $\sum_{j=0}^{n-1} v_j(\sigma_n) = 0$, и если e — борелевское подмножество множества σ_n' и $\sum_{j=0}^{n-1} v_j(e) = 0$, то $v_n(e) = 0$.

Положим $x = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} E(\sigma_j) y_j$. Чтобы показать, что вектор x максимален, рассмотрим борелевское множество e, для которого

$$(E(e)x, x) = |E(e)x|^2 = 0.$$

Так как $v_j(\sigma_n)=0$ при $j<n$, то $E(\sigma_n)y_j=0$ при $j<n$. Таким образом,

$$E(e\cap(\sigma_{n-1}-\sigma_n))x=\sum_{j=1}^{\infty}2^{-j}E(e\cap(\sigma_{n-1}-\sigma_n))E(\sigma_j)y_j=$$
$$=2^{-(n-1)}E(e\cap(\sigma_{n-1}-\sigma_n))y_{n-1},$$

так что

$$|E(e\cap(\sigma_{n-1}-\sigma_n))x|^2=2^{-2(n-1)}v_{n-1}(e\cap(\sigma_{n-1}-\sigma_n)).$$

Поэтому, учитывая, что $v_j(\sigma_{n-1})=0$ при $j<n-1$, имеем

$$\sum_{j=0}^{n-1}2^{-2j}v_j(e\cap(\sigma_{n-1}-\sigma_n))=|E(e\cap(\sigma_{n-1}-\sigma_n))x|^2=$$
$$=|E(\sigma_{n-1}-\sigma_n)E(e)x|^2=0.$$

Следовательно,

$$\sum_{j=0}^{n-1}v_j(e\cap(\sigma_{n-1}-\sigma_n))=0.$$

Так как $\sigma_{n-1}-\sigma_n\subseteq\sigma_n'$, то

$$\sum_{j=0}^{n}v_j(e\cap(\sigma_{n-1}-\sigma_n))=0.$$

Так как $\sigma_{n-1}-\sigma_n\subseteq\sigma_{n+1}'$, то

$$\sum_{j=0}^{n+1}v_j(e\cap(\sigma_{n-1}-\sigma_n))=0.$$

Продолжая по индукции, мы получаем, что $v_j(e\cap(\sigma_{n-1}-\sigma_n))=0$ для всех j. Суммируя по n, видим, что $v_j(e)=0$ для всех j. Таким образом, поскольку $v_j(e)=|E(e)y_j|^2$, имеем $E(e)y_j=0$ для всех j. Отсюда следует, что $E(e)y=0$ для всех y из $\mathfrak{H}$, ибо $\{y_j\}$ — ортонормированный базис в $\mathfrak{H}$. Итак, $(E(e)y,\ y)=0$ для всех y из $\mathfrak{H}$, т. е. вектор x максимален.

Ясно, что $y_0=E(\sigma_0-\sigma_1)x$. Следовательно, лемма будет доказана, если мы покажем, что

$$E(\sigma_0-\sigma_1)x\in\overline{\mathrm{sp}}\{T^n(T^*)^m x\mid n,\ m\geqslant 0\}.$$

По теореме Вейерштрасса об аппроксимации и следствию 2.8

$$\overline{\mathrm{sp}}\{T^n(T^*)^m x\mid n,\ m\geqslant 0\}=\overline{\mathrm{sp}}\{f(T)x\mid f\in C(\sigma(T))\}.$$

Пусть задано $\varepsilon>0$. Согласно замечанию, предшествующему следствию 2.4, мы можем найти такое открытое множество $U\supseteq\sigma_0-\sigma_1$ и такое замкнутое множество $C\subseteq\sigma_0-\sigma_1$, что $|E(U-C)x|<\varepsilon$. Тогда ясно, что если f — непрерывная функция, равная 0 на U' и 1 на C и всюду заключенная между 0 и 1, и если χ — характеристическая функция множества $\sigma_0 - \sigma_1$, то

$$|E(\sigma_0-\sigma_1)x - f(T)x|^2 = \int\limits_{U-C} |f(\lambda)-\chi(\lambda)|^2 (E(d\lambda)x, x) \leqslant \varepsilon.$$

Таким образом,

$$E(\sigma_0-\sigma_1)x \in \overline{\text{sp}}\,\{f(T)x \mid f \in C(\sigma(T))\},$$

ч. т. д.

8. Лемма. *Пусть T — ограниченный нормальный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, и пусть E обозначает его разложение единицы. Тогда существует такая последовательность $\{x_n\} \subseteq \mathfrak{H}$, что $\mathfrak{H} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathfrak{H}(x_i)$, где*

$$\mathfrak{H}(x_i) = \overline{\text{sp}}\,\{f(T)x_i \mid f \in C(\sigma(T))\},$$

и такая убывающая последовательность борелевских множеств $\{e_n\}$, что $(E(e)x_n, x_n) = (E(e \cap e_n)x_1, x_1)$, $n \geqslant 1$.

Доказательство. Пусть $\{y_n\}$ — полная ортонормальная система в $\mathfrak{H}$. Применяя лемму 7, выберем максимальный относительно T вектор z_1 таким образом, чтобы $y_1 \in \mathfrak{H}(z_1)$. Обозначим через T_2 сужение оператора T на ортогональное дополнение $\mathfrak{K}(z_1)$ подпространства $\mathfrak{H}(z_1)$. Так как операторы T и T^* отображают $\mathfrak{H}(z_1)$ в себя, то и подпространство $\mathfrak{K}(z_1)$ они отображают в себя. Отсюда непосредственно следует, что оператор T_2 нормален.

Выберем теперь в $\mathfrak{K}(z_1)$ такой максимальный относительно T_2 вектор z_2, чтобы подпространство $\mathfrak{H}(z_2) = \overline{\text{sp}}\,\{T^n(T^*)^m z_2 \mid n, m \geqslant 0\}$ содержало ортогональную проекцию вектора y_2 на $\mathfrak{K}(z_1)$. Тогда y_1 и y_2 лежат в $\mathfrak{H}(z_1) \oplus \mathfrak{H}(z_2)$. Кроме того, из максимальности z_1 следует, что мера $\mu_2 = (E(\cdot)z_2, z_2)$ абсолютно непрерывна относительно $\mu_1 = (E(\cdot)z_1, z_1)$.

Обозначим через T_3 сужение оператора T_2 на ортогональное дополнение $\mathfrak{K}(z_2)$ подпространства $\mathfrak{H}(z_2)$ в $\mathfrak{K}(z_1)$ и т. д. Ясно, что, продолжая по индукции, мы получаем такую последовательность $\{z_n\} \subseteq \mathfrak{H}$ и такие меры $\mu_n = (E(\cdot)z_n, z_n)$, что многообразия $\mathfrak{H}(z_n)$ взаимно ортогональны, векторы $y_1, \ldots, y_n$ принадлежат $\mathfrak{H}(z_1) \oplus \ldots \oplus \mathfrak{H}(z_n)$ и мера μ_{n+1} абсолютно непрерывна относительно μ_n для $n \geqslant 1$. Так как y_n для любого $n \geqslant 1$ лежит в $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathfrak{H}(z_i)$, то ясно, что

$$\mathfrak{H} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathfrak{H}(z_i).$$

Применяя теорему Радона—Никодима, обозначим через ϱ_n измеримую по Борелю плотность меры μ_n относительно μ_1, так что

$$\mu_n(e)=\int\limits_e \varrho_n(\lambda)\,\mu_1(d\lambda)$$

для каждого борелевского множества e. Так как обе меры μ_1 и μ_n неотрицательны, то мы можем выбрать плотность ϱ_n так, чтобы она тоже была неотрицательной. Пусть $e_n=\{\lambda\,|\,\varrho_n(\lambda)>0\}$. Так как мера μ_{n+1} абсолютно непрерывна относительно μ_n, то $\mu_1(e_{n+1}-e_n)=0$. Таким образом, изменяя ϱ_{n+1}, если это необходимо, на множестве μ_1-меры нуль, мы можем считать, что последовательность множеств e_n убывает и что e_1 совпадает со всей плоскостью.

Для $n\geqslant 2$ положим $x_n=\lim\limits_{k\to\infty} x_{nk}$, где

$$x_{nk}=\int\limits_{S_{nk}}\{\varrho_n(\lambda)\}^{-1/2}E(d\lambda)\,z_n,\qquad S_{nk}=\left\{\lambda\,|\,\varrho_n(\lambda)>\frac{1}{k}\right\}.$$

Этот предел существует, поскольку для $k>j$

$$|x_{nk}-x_{nj}|^2=\int\limits_{S_{nk}-S_{nj}}\varrho_n(\lambda)^{-1}\,|E(d\lambda)\,z_n|^2=$$

$$=\int\limits_{S_{nk}-S_{nj}}\varrho_n(\lambda)^{-1}\,\varrho_n(\lambda)\,\mu_1(d\lambda)=\mu_1(S_{nk}-S_{nj})\leqslant\mu_1(e_n-S_{nj}),$$

так что $|x_{nk}-x_{nj}|\to 0$, когда $j,\ k\to\infty$.

Полагая $x_1=z_1$, мы для $n>1$ получаем

$$(E(e)\,x_n,\ x_n)=|E(e)\,x_n|^2=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\int\limits_{e\cap S_{nk}}\varrho_n(\lambda)^{-1}\,|E(d\lambda)\,z_n|^2=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\int\limits_{e\cap S_{nk}}|E(d\lambda)\,x_1|^2=(E(ee_n)\,x_1,\ x_1),$$

ч. т. д. [1])

---

[1]) На самом деле доказательство не закончено: нужно еще показать, что $\mathfrak{H}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathfrak{H}(x_n)$. Для этого достаточно проверить, что $\mathfrak{H}(x_n)=\mathfrak{H}(z_n)$. При $n=1$ это тривиально, так как $x_1=z_1$. Пусть $n>1$. Непосредственно из определения x_n вытекает, что $x_n\in\mathfrak{H}(z_n)$, откуда $\mathfrak{H}(x_n)\subseteq\mathfrak{H}(z_n)$. Чтобы доказать обратное включение, покажем, что $z_n\in\mathfrak{H}(x_n)$. Рассмотрим ограниченные боре-

На протяжении оставшейся части этого параграфа запись $\mu_1 \lesssim \mu_2$ используется для обозначения того, что мера μ_1 абсолютно непрерывна относительно меры μ_2. Если $\mu_1 \lesssim \mu_2$ и $\mu_2 \lesssim \mu_1$, то мы употребляем запись $\mu_1 \cong \mu_2$.

9. Определение. Пусть μ — положительная мера, определенная на борелевских множествах комплексной плоскости, и пусть $\{e_n\}$ — убывающая последовательность борелевских множеств, причем e_1 есть вся плоскость. Спектральное представление сепарабельного гильбертова пространства $\mathfrak{H}$ в $\sum_{n=1}^{\infty} L_2(e_n, \mu)$ относительно ограниченного нормального оператора T называется *упорядоченным представлением* $\mathfrak{H}$ относительно T. Мера μ называется *мерой упорядоченного представления*. Множества e_n называются *множе-*

левские функции $\psi_{nkj}(\lambda)$, $n, k, j > 1$, определенные соотношениями

$$\psi_{nkj}(\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{если } \varrho_n(\lambda) \leqslant 1/k, \\ \varrho_n(\lambda)^{1/2}, & \text{если } \lambda \in S^j_{nk} = \left\{\lambda \,\middle|\, \frac{1}{k} < \varrho_n(\lambda) \leqslant j\right\}, \\ j^{1/2}, & \text{если } \lambda \in S^j_n = \{\lambda \mid \varrho_n(\lambda) > j\}. \end{cases}$$

С помощью несложной выкладки получаем, что если $k' > k$, то

$$\psi_{nkj}(T)\, x_{nk'} = E(S^j_{nk})\, z_n + j^{1/2} \int_{S^j_n} \{\varrho_n(\lambda)\}^{-1/2} E(d\lambda)\, z_n.$$

Так как правая часть не зависит от k', то при $k' \to \infty$ получаем

$$\psi_{nkj}(T)\, x_n = E(S^j_{nk})\, z_n + j^{1/2} \int_{S^j_n} \{\varrho_n(\lambda)\}^{-1/2} E(d\lambda)\, z_n.$$

Заметим, что

$$\left| j^{1/2} \int_{S^j_n} \{\varrho_n(\lambda)\}^{-1/2} E(d\lambda)\, z_n \right|^2 = j \int_{S^j_n} \{\varrho_n(\lambda)\}^{-1} (E(d\lambda)\, z_n, z_n) \leqslant \mu_n(S^j_n).$$

Ясно, что $\lim\limits_{\substack{k \to \infty \\ j \to \infty}} E(S^j_{nk})\, z_n = E(e_n)\, z_n$ и $\lim\limits_{j \to \infty} \mu_n(S^j_n) = 0$. Поэтому существует предел $\lim\limits_{k,\, j \to \infty} [\psi_{nkj}(T)\, x_n] = E(e_n)\, z_n = z_n - E(e_1 - e_n)\, z_n$. Далее, $|E(e_1 - e_n)\, z_n|^2 = \mu_n(e_1 - e_n) = \int_{e_1 - e_n} \varrho_n(\lambda)\, \mu_1(d\lambda) = 0$, и потому $\lim\limits_{k,\, j \to \infty} [\psi_{nkj}(T)\, x_n] = z_n$. Если $f \in C(\sigma(T))$, то $|\psi_{nkj}(T)\, x_n - f(T)\, x_n|^2 = \int |\psi_{nkj}(\lambda) - f(\lambda)|^2 (E(d\lambda)\, x_n, x_n)$, и так как непрерывные функции всюду плотны в гильбертовом пространстве $L_2\{(E(d\lambda)\, x_n, x_n)\}$, то $z_n \in \mathfrak{H}(x_n)$, что завершает доказательство. — *Прим. перев.*

ствами кратности упорядоченного представления. Если $\mu(e_k) > 0$ и $\mu(e_{k+1}) = 0$, то говорят, что упорядоченное представление имеет *кратность* k. Если $\mu(e_k) > 0$ для всех k, то представление имеет *бесконечную кратность*. Два упорядоченных представления U и $\tilde{U}$ пространства $\mathfrak{H}$ относительно операторов T и $\tilde{T}$ соответственно с мерами μ и $\tilde{\mu}$ и множествами кратности $\{e_n\}$ и $\{\tilde{e}_n\}$ называются *эквивалентными*, если $\mu \cong \tilde{\mu}$ и $\mu(e_n \Delta \tilde{e}_n) = 0 = \tilde{\mu}(e_n \Delta \tilde{e}_n)$ для $n = 1, 2, \ldots$.

Замечание. Отметим, что эквивалентные упорядоченные представления имеют одинаковую кратность. Действительно, если $\mu(e_k) = 0$ для некоторого k, то $\tilde{\mu}(e_k) = 0$, ибо $\mu \cong \tilde{\mu}$. Так как $\tilde{\mu}(e_k \Delta \tilde{e}_k) = 0$, то $\tilde{\mu}(\tilde{e}_k) = 0$. В силу симметрии заключаем, что $\tilde{\mu}(\tilde{e}_k) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mu(e_k) = 0$.

→ 10. Теорема. *Сепарабельное гильбертово пространство $\mathfrak{H}$ обладает упорядоченным представлением относительно любого ограниченного нормального оператора T в $\mathfrak{H}$, и любые два упорядоченных представления пространства $\mathfrak{H}$ относительно T эквивалентны.*

Доказательство. Первое утверждение вытекает из леммы 8 и теоремы 2 (см. доказательство теоремы 2). Следовательно, в доказательстве нуждается лишь утверждение о единственности.

Пусть U и $\tilde{U}$ — упорядоченные представления $\mathfrak{H}$ относительно T в гильбертовых пространствах $\mathfrak{K} = \sum_{n=1}^{\infty} L_2(e_n, \mu)$ и $\tilde{\mathfrak{K}} = \sum_{n=1}^{\infty} L_2(\tilde{e}_n, \tilde{\mu})$ соответственно. Символом $f = [f_1, f_2, \ldots]$, где $f_i \in L_2(e_i, \mu)$, будем обозначать элемент из $\mathfrak{K}$; аналогичное обозначение употребляется для элементов из $\tilde{\mathfrak{K}}$. Пусть $V = \tilde{U}U^{-1}$, так что V представляет собой изометрическое отображение $\mathfrak{K}$ на $\tilde{\mathfrak{K}}$. Напомним, что если F — ограниченная борелевская функция и y — элемент из $\mathfrak{H}$, то

$(UF(T)y)_n(\lambda) = F(\lambda)(Uy)_n(\lambda)$ почти всюду на e_n относительно меры μ,

$(\tilde{U}F(T)y)_n(\lambda) = F(\lambda)(\tilde{U}y)_n(\lambda)$ почти всюду на $\tilde{e}_n$ относительно меры $\tilde{\mu}$.

Отсюда следует, что

$$[*] \qquad V[F(\cdot)f_n(\cdot)] = [F(\cdot)(Vf)_n(\cdot)], \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Покажем теперь, что $\mu \cong \tilde{\mu}$. Вследствие симметрии достаточно доказать, что $\mu \lesssim \tilde{\mu}$. Будем доказывать это от противного. Допустим, что $\tilde{\mu}(e) = 0$ и $0 < \mu(e) < \infty$ для некоторого ограниченного борелевского множества e, и рассмотрим вектор

$$f=[\chi_e,\ 0,\ 0,\ \ldots]\in\mathfrak{K}.$$

Беря в равенстве [*] в качестве F функцию χ_e, получаем, что

$$Vf=V[\chi_e^2,\ 0,\ 0,\ \ldots]=[\chi_e(Vf)_1,\ \chi_e(Vf)_2,\ \ldots].$$

Далее, $|f|^2=\mu(e)>0$, но

$$|Vf|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{e_n}|\chi_e(\lambda)(Vf)_n(\lambda)|^2\tilde{\mu}(d\lambda)=$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{e_n\cap e}|(Vf)_n(\lambda)|^2\tilde{\mu}(d\lambda)=0;$$

это противоречит тому, что отображение V изометрично, и доказывает, что $\mu\lessapprox\tilde{\mu}$.

Покажем теперь по индукции, что $\mu(e_n\Delta\tilde{e}_n)=0=\tilde{\mu}(e_n\Delta\tilde{e}_n)$ для $n=1,\ 2,\ \ldots$. При $n=1$ это следует из того, что e_1 и $\tilde{e}_1$ совпадают со всей комплексной плоскостью. Допустим, уже известно, что

$$\mu(e_j\Delta\tilde{e}_j)=0=\tilde{\mu}(e_j\Delta\tilde{e}_j),\qquad 1\leqslant j\leqslant n.$$

Чтобы показать, что эти равенства справедливы также и для $j=n+1$, достаточно доказать, что $\mu(e_{n+1}-\tilde{e}_{n+1})=0$, ибо тогда в силу симметрии $\tilde{\mu}(\tilde{e}_{n+1}-e_{n+1})=0$, а так как $\mu\cong\tilde{\mu}$, то отсюда следует, что $\tilde{\mu}(e_{n+1}-\tilde{e}_{n+1})=0$ и $\mu(\tilde{e}_{n+1}-e_{n+1})=0$.

Допустим, что $\mu(e_{n+1}-\tilde{e}_{n+1})>0$, и пусть σ — произвольное фиксированное борелевское подмножество множества $e_{n+1}-\tilde{e}_{n+1}$, для которого $0<\mu(\sigma)<\infty$. Определим векторы $f^1,\ \ldots,\ f^{n+1}$ из $\mathfrak{K}$ соотношениями

$$\begin{aligned}
f^1&=[\chi_\sigma,\ 0,\ 0,\ \ldots],\\
f^2&=[0,\ \chi_\sigma,\ 0,\ \ldots],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
f^{n+1}&=[0,\ \ldots,\ 0,\ \chi_\sigma,\ 0,\ \ldots],
\end{aligned}$$

где в последней строке функция χ_σ стоит на $(n+1)$-м месте. Это векторы ненулевой длины, ортогональные в $\mathfrak{K}$. Следовательно, векторы $Vf^1,\ \ldots,\ Vf^{n+1}$ также имеют ненулевые длины и ортогональны в $\tilde{\mathfrak{K}}$. Пусть

$$Vf^i=[\tilde{f}_j^i],\quad j=1,\ 2,\ \ldots;\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\quad n+1.$$

Так как $\sigma\subseteq\tilde{e}_{n+1}$, а последовательность $\{\tilde{e}_m\}$ убывает, то $\tilde{\mu}(\sigma\cap\tilde{e}_m)=0$ для $m>n$, и потому $\tilde{f}_m^i(\lambda)=0$ почти всюду на σ

относительно меры μ при $m > n$. Пусть теперь δ — произвольное борелевское подмножество в σ, причем $\mu(\delta) > 0$; определим векторы $g^1, \ldots, g^{n+1}$ так же, как $f^1, \ldots, f^{n+1}$, но с заменой χ_σ на χ_δ. Тогда векторы Vg^i отличны от нуля и ортогональны в $\widetilde{\mathfrak{K}}$, и в силу соотношения [*]

$$Vg^i = [\chi_\delta \widetilde{f}_j^i].$$

Таким образом,

$$(Vg^i, Vg^k) = \int\limits_\delta \Bigl[\sum_{j=1}^n \widetilde{f}_j^i(\lambda)\overline{\widetilde{f}_j^k(\lambda)}\Bigr]\widetilde{\mu}(d\lambda) = \delta_{ik}\mu(\delta);$$
$$i, k = 1, \ldots, n+1.$$

Поскольку δ произвольно, то отсюда следует, что для почти всех относительно меры $\widetilde{\mu}$ точек λ из σ

$$\sum_{j=1}^n \widetilde{f}_j^i(\lambda)\overline{\widetilde{f}_j^k(\lambda)} = 0, \quad 1 \leqslant i \neq k \leqslant n+1,$$

$$\sum_{j=1}^n |\widetilde{f}_j^i(\lambda)|^2 > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n+1.$$

Если λ_0 — точка, в которой выполняются все эти соотношения, то стрóки $[\widetilde{f}_1^i(\lambda_0), \ldots, \widetilde{f}_n^i(\lambda_0)]$, $i = 1, \ldots, n+1$, представляют собой ненулевые попарно ортогональные векторы в n-мерном унитарном пространстве E^n, что невозможно. Это противоречие завершает доказательство.

11. Лемма. *Пусть (S, Σ, μ) и $(S, \Sigma, \widetilde{\mu})$ — пространства с мерами, причем $\mu \cong \widetilde{\mu}$. Тогда существует такое линейное изометрическое отображение U пространства $L_2(S, \Sigma, \mu)$ на пространство $L_2(S, \Sigma, \widetilde{\mu})$, что для любой функции f из $L_2(S, \Sigma, \mu)$ и характеристической функции χ_e любого множества e из Σ*

$$U^{-1}\chi_e U f = \chi_e f.$$

Доказательство. По теореме Радона — Никодима существуют такие положительные функции δ, $\widetilde{\delta}$, что

$$\widetilde{\mu}(e) = \int\limits_e \delta(\lambda)\,\mu(d\lambda); \quad \mu(e) = \int\limits_e \widetilde{\delta}(\lambda)\,\widetilde{\mu}(d\lambda), \quad e \in \Sigma.$$

Определим линейное отображение U, полагая для f из $L_2(S, \Sigma, \mu)$

$$Uf = [\widetilde{\delta}(\cdot)]^{1/2} f.$$

Тогда это отображение изометрично, так как

$$\int_S |f(\lambda)|^2 \mu(d\lambda) = \int_S |f(\lambda)|^2 \tilde{\delta}(\lambda)\tilde{\mu}(d\lambda) = \int_S |(Uf)(\lambda)|^2 \tilde{\mu}(d\lambda).$$

Чтобы показать, что U отображает $L_2(S, \Sigma, \mu)$ на все $L_2(S, \Sigma, \tilde{\mu})$, определим второе линейное отображение V из $L_2(S, \Sigma, \tilde{\mu})$ в $L_2(S, \Sigma, \mu)$, полагая $Vf = [\delta(\cdot)]^{1/2} f$. Ясно, что V изометрично. Так как для всех e из Σ

$$\mu(e) = \int_e \delta(\lambda)\tilde{\delta}(\lambda)\mu(d\lambda),$$

то почти всюду $\delta(\lambda)\tilde{\delta}(\lambda) = 1$. Следовательно, отображения U и V взаимно обратны. Поэтому U отображает $L_2(S, \Sigma, \mu)$ на все $L_2(S, \Sigma, \tilde{\mu})$. Непосредственно из определения U следует, что оно обладает требуемым свойством, ч. т. д.

В связи со следующей теоремой напомним, что два оператора T_1 и T_2 в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ называются *унитарно эквивалентными*, если они связаны соотношением $T_2 = VT_1V^{-1}$, где V — унитарный оператор в $\mathfrak{H}$. Было замечено (см. § X.4), что унитарно эквивалентные операторы в $\mathfrak{H}$ обладают одинаковыми свойствами.

12. Теорема. *Два ограниченных нормальных оператора в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ тогда и только тогда унитарно эквивалентны, когда эквивалентны соответствующие им упорядоченные представления пространства $\mathfrak{H}$.*

Доказательство. Пусть T, $\tilde{T}$ — ограниченные нормальные операторы в $\mathfrak{H}$, и пусть U и $\tilde{U}$ — отвечающие им упорядоченные представления $\mathfrak{H}$ в пространствах $\sum_{n=1}^{\infty} L_2(e_n, \mu)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} L_2(\tilde{e}_n, \tilde{\mu})$ соответственно. Предположим сначала, что T и $\tilde{T}$ унитарно эквивалентны, т. е. что $\tilde{T} = VTV^{-1}$, где V — унитарный оператор. Мы покажем, что при этом предположении существует упорядоченное представление $\mathfrak{H}$ относительно T в пространстве $\sum_{n=1}^{\infty} L_2(\tilde{e}_n, \tilde{\mu})$. Тогда из теоремы 10 будет следовать, что U и $\tilde{U}$ эквивалентны. Пусть E и $\tilde{E}$ — разложения единицы для T и $\tilde{T}$ соответственно. Из следствия 2.7 вытекает, что $\tilde{E} = VEV^{-1}$, и потому

$$F(\tilde{T}) = VF(T)V^{-1}$$

для любой ограниченной борелевской функции F. Отображение

$W=\widetilde{U}V$ пространства $\mathfrak{H}$ на $\sum_{n=1}^{\infty} L_2(\widetilde{e}_n, \widetilde{\mu})$, очевидно, изометрично, и

$$WF(T)x=\widetilde{U}VF(T)x=\widetilde{U}F(\widetilde{T})Vx=F(\lambda)\widetilde{U}Vx=F(\lambda)Wx.$$

Таким образом, W — упорядоченное представление $\mathfrak{H}$ относительно T в пространстве $\sum_{n=1}^{\infty} L_2(\widetilde{e}_n, \widetilde{\mu})$. Этим доказано, что U и $\widetilde{U}$ эквивалентны.

Для доказательства обратного утверждения допустим, что U и $\widetilde{U}$ эквивалентны. По лемме 11 существует изометрия V_n пространства $L_2(e_n, \mu)$ на пространство $L_2(\widetilde{e}_n, \widetilde{\mu})$. Определим изометрическое отображение V пространства $\sum_{n=1}^{\infty} L_2(e_n, \mu)$ на пространство $\sum_{n=1}^{\infty} L_2(\widetilde{e}_n, \widetilde{\mu})$, полагая $VL_2(e_n, \mu)=V_nL_2(e_n, \mu)$. Тогда линейное преобразование $Y=\widetilde{U}^{-1}VU$ представляет собой унитарный оператор в $\mathfrak{H}$ и, применяя лемму 11, имеем

$$YTx=\widetilde{U}^{-1}VUTx=\widetilde{U}^{-1}V(\lambda Ux)=\widetilde{U}^{-1}\lambda VUx=\widetilde{T}\widetilde{U}^{-1}VUx=\widetilde{T}Yx$$

для каждого x из $\mathfrak{H}$. Этим доказана унитарная эквивалентность операторов T и $\widetilde{T}$, ч. т. д.[1])

6. Формула для спектрального разложения

На практике важно иметь возможность вычислять разложение единицы для конкретных операторов. Следующая теорема дает метод вычисления разложения единицы для самосопряженного оператора T с помощью его резольвенты $R(\alpha; T)=(\alpha I-T)^{-1}$. Не лишне напомнить (см. теорему 4.2), что спектр самосопряженного оператора T вещественен, и потому его резольвента $R(\alpha, T)$ заведомо определена для всех невещественных значений α.

→ 1. Теорема. *Если E — разложение единицы для ограниченного самосопряженного оператора T и если (a, b) — интервал $a<\lambda<b$*

---

[1]) В приведенном доказательстве использовано усиление леммы 11, состоящее в том, что равенство $U^{-1}\chi_e Uf=\chi_e f$ (см. формулировку леммы) сохраняется, если характеристическую функцию χ_e заменить любой существенно ограниченной функцией $g(\lambda)$ (понятия существенной ограниченности относительно μ и $\widetilde{\mu}$ совпадают, так как $\mu\cong\widetilde{\mu}$); именно, нужен случай $g(\lambda)\equiv\lambda$ (это существенно ограниченная функция, ибо мера μ сосредоточена на компактном множестве — спектре оператора T). Это усиление легко получить, аппроксимируя $g(\lambda)$ линейными комбинациями характеристических функций. — *Прим. перев.*

вещественной оси, то в сильной операторной топологии

$$E((a, b)) = \lim_{\delta \to 0+} \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{2\pi i} \int_{a+\delta}^{b-\delta} [R(\mu - \varepsilon i;\ T) - R(\mu + \varepsilon i;\ T)]\, d\mu.$$

Доказательство. Положим для $\varepsilon > 0$, $0 < \delta < (b-a)/2$ и вещественных λ

$$f(\delta, \varepsilon, \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a+\delta}^{b-\delta} \left[\frac{1}{\mu - \varepsilon i - \lambda} - \frac{1}{\mu + \varepsilon i - \lambda} \right] d\mu.$$

Интегрируя, получаем

$$f(\delta, \varepsilon, \lambda) = \frac{1}{\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{b - \delta - \lambda}{\varepsilon} - \operatorname{arctg} \frac{a + \delta - \lambda}{\varepsilon} \right],$$

и потому $|f(\delta, \varepsilon, \lambda)| \leqslant 1$. Ясно, что

$$\lim_{\delta \to 0} \lim_{\varepsilon \to 0} f(\delta, \varepsilon, \lambda) = \chi_{(a, b)}(\lambda), \qquad -\infty < \lambda < \infty,$$

где $\chi_{(a, b)}$ — характеристическая функция интервала $a < \lambda < b$. Таким образом, в силу следствия 2.8 (III)

$$\lim_{\delta \to 0} \lim_{\varepsilon \to 0} f(\delta, \varepsilon, T)\, x = E((a, b))\, x, \qquad x \in \mathfrak{H}.$$

Поэтому для завершения доказательства достаточно показать, что

$$[*] \qquad f(\delta, \varepsilon, T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a+\delta}^{b-\delta} [R(\mu - \varepsilon i;\ T) - R(\mu + \varepsilon i;\ T)]\, d\mu.$$

Чтобы убедиться в этом, заметим, что функция, стоящая под знаком интеграла, определяющего $f(\delta, \varepsilon, \lambda)$, непрерывна по (λ, μ) для $\lambda \in \sigma(T)$ и $\mu \in [a + \delta,\ b - \delta]$. Поэтому римановские суммы, определяющие этот интеграл, сходятся к нему равномерно при $\lambda \in \sigma(T)$, и потому соотношение [*] вытекает из следствия IX.3.15.

7. Теория возмущений

Общую теорию возмущений, обсуждавшуюся в § VII.6, можно распространить на случай, когда рассматриваемые операторы являются нормальными операторами в гильбертовом пространстве. В настоящем параграфе нас будут интересовать возмущения в сильной операторной топологии. Мы находим удобным употреблять обозначение $T_n \to_s T$ для выражения того, что $T_n \to T$ в сильной операторной топологии, т. е. $T_n x \to T x$ для любого x из пространства, на котором определены операторы $T, T_1, T_2, \ldots$.

1. Лемма. *Пусть S, T, S_n, T_n $(n \geqslant 1)$ — ограниченные линейные операторы в гильбертовом пространстве, причем $S_n \to S$ и $T_n \to T$ в сильной операторной топологии. Тогда в этой топологии $S_n + T_n \to S + T$, $\alpha S_n \to \alpha S$ и $S_n T_n \to ST$. Если, кроме того, операторы S и S_n $(n \geqslant 1)$ нормальны, то $S_n^* \to S^*$ в сильной операторной топологии.*

Доказательство. Первые два утверждения очевидны. Согласно теореме II.3.21 о равномерной ограниченности, существует такая постоянная K, что $|S_n| \leqslant K$, откуда

$$|S_nT_nx - STx| \leqslant |S_nT_nx - S_nTx| + |S_nTx - STx| \leqslant$$
$$\leqslant K|T_nx - Tx| + |(S_n - S)Tx| \to 0,$$

что доказывает справедливость соотношения $S_nT_n \to ST$ в сильной операторной топологии. Предположим теперь, что все операторы S_n $(n \geqslant 1)$ и S нормальны. Тогда

$$|S_n^*x|^2 = (S_n^*x, S_n^*x) = (S_nS_n^*x, x) = (S_n^*S_nx, x) = (S_nx, S_nx) =$$
$$= |S_nx|^2 \to |Sx|^2 = (Sx, Sx) =$$
$$= (S^*Sx, x) = (SS^*x, x) = (S^*x, S^*x) = |S^*x|^2,$$

и, следовательно,

$$|S_n^*x - S^*x|^2 = |S_n^*x|^2 - (S^*x, S_n^*x) - (S_n^*x, S^*x) + |S^*x|^2 \to 0.$$

Это означает, что S_n^* сильно сходится к S^*, ч. т. д.

2. Теорема. *Пусть последовательность $\{T_n\}$ ограниченных нормальных операторов в гильбертовом пространстве сходится к нормальному оператору T в сильной операторной топологии. Тогда для всякой комплексной борелевской функции f, определенной на комплексной плоскости, $f(T_n) \to f(T)$ в сильной операторной топологии, если только разложение единицы для T обращается в нуль на некотором замкнутом множестве, содержащем все точки разрыва функции f.*

Доказательство. По принципу равномерной ограниченности (II.3.21) существует такая постоянная K, что $|T_n|$, $|T| \leqslant K$. Тогда, согласно лемме 3.2, спектры $\sigma(T_n)$, $\sigma(T)$ содержатся в замкнутом круге $D = \{|\lambda| \mid |\lambda| \leqslant K\}$, и поэтому мы можем рассматривать только ограниченные борелевские функции на D. Обозначим B^*-алгебру всех комплексных ограниченных борелевских функций на D с нормой $|f| = \sup\limits_{\lambda \in D} |f(\lambda)|$ через $\mathfrak{B}$, и пусть $\mathfrak{C}$ — подмножество в $\mathfrak{B}$, состоящее из всех таких функций f, для которых $f(T_n) \to f(T)$ в сильной операторной топологии. Множество $\mathfrak{C}$ замкнуто в $\mathfrak{B}$.

В самом деле, если $f_m \in \mathfrak{C}$ и $|f_m - f| \to 0$, то

$$|f(T_n)x - f(T)x| \leqslant |(f-f_m)(T_n)x - (f-f_m)(T)x| + $$
$$+ |f_m(T_n)x - f_m(T)x| \leqslant 2K|f-f_m||x| + |f_m(T_n)x - f_m(T)x|$$

и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |f(T_n)x - f(T)x| \leqslant 2K|f-f_m||x|, \quad m \geqslant 1.$$

Отсюда следует, что $f(T_n) \to {}_s f(T)$, поскольку $|f-f_m| \to 0$. Из леммы 1 вытекает, что $\mathfrak{C}$ является B^*-подалгеброй алгебры $\mathfrak{B}$. Так как функция $f(\lambda) \equiv \lambda$, по предположению, принадлежит $\mathfrak{C}$, то любой полином от λ и $\bar{\lambda}$ также принадлежит $\mathfrak{C}$. Таким образом, в силу теоремы Вейерштрасса $\mathfrak{C}$ содержит все непрерывные на D функции. Пусть теперь $E(\sigma) = 0$, где σ — замкнутое множество, содержащее все точки разрыва функции f. Согласно лемме Урысона (I.5.2), для каждого $m \geqslant 1$ найдется такая непрерывная функция g_m, что $0 \leqslant g_m(\lambda) \leqslant 1$, и

$$g_m(\lambda) = \begin{cases} 1, & \text{если расстояние } (\lambda, \sigma) \geqslant \dfrac{1}{m}, \\ 0, & \text{если } \lambda \in \sigma. \end{cases}$$

Таким образом, в силу следствия 2.8 (III) $g_m(T) \to I$ в сильной операторной топологии. Так как последовательность $\{f(T_n)\}$ равномерно ограничена, то, чтобы убедиться в сильной сходимости $f(T_n)$ к $f(T)$, достаточно показать, что $f(T_n)g_m(T_n)$ для любого $m \geqslant 1$ сильно сходится к $f(T)g_m(T)$. А это вытекает из того, что функция fg_m непрерывна.

3. Следствие. *Пусть E_n, E — разложения единицы для нормальных операторов T_n, T соответственно, и пусть $T_n \to T$ в сильной операторной топологии. Если E обращается в нуль на границе борелевского множества σ, то $E_n(\sigma) \to E(\sigma)$ в сильной операторной топологии.*

8. Упражнения

1. Доказать, что оператор в $\mathfrak{H}$ положителен тогда и только тогда, когда его можно представить в виде TT^*.

2. Если коммутативная B^*-алгебра операторов на $\mathfrak{H}$ не имеет нетривиальных инвариантных подпространств, то пространство $\mathfrak{H}$ одномерно.

3. Если слабо замкнутая B^*-алгебра $\mathfrak{A}$ операторов на $\mathfrak{H}$ не имеет нетривиальных инвариантных подпространств, то $\mathfrak{A} = B(\mathfrak{H})$. (Указание: воспользоваться второй теоремой § IX.5.)

4. Пусть $\mathfrak{A}$ является B^*-алгеброй операторов в конечномерном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Показать, что $\mathfrak{H}$ единственным

образом разлагается в прямую сумму $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}_1\oplus\ldots\oplus\mathfrak{H}_n$ инвариантных ортогональных подпространств $\mathfrak{H}_k$, не содержащих меньших нетривиальных инвариантных подпространств.

5. Пусть T — нормальный оператор в гильбертовом пространстве. Показать, что оператор T вполне непрерывен тогда и только тогда, когда

(a) $\sigma(T)$ представляет собой счетное множество $\{\lambda_n\}$;

(b) $\sigma(T)$ не имеет предельных точек, за исключением, быть может, 0;

(c) если $\lambda_n\neq 0$, то оператор $E(\lambda_n)$ конечномерен (т. е. отображает $\mathfrak{H}$ на конечномерное подпространство).

6. Из положительного оператора можно единственным образом извлечь положительный квадратный корень.

7. Произведение двух положительных коммутирующих операторов является положительным оператором.

8. Показать, что если оператор N нормален, то замыкание множества значений, принимаемых квадратичной формой (Nx, x) при $|x|=1$, представляет собой наименьшее замкнутое выпуклое множество, содержащее $\sigma(N)$.

9. Пусть $\mathfrak{A}$ — коммутативная B^*-алгебра операторов в конечномерном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Показать, что в $\mathfrak{H}$ существует ортонормальный базис, каждый элемент которого является собственным вектором для любого $T\in\mathfrak{A}$.

10. Положительный оператор T обладает ограниченным обратным тогда и только тогда, когда для некоторого $\varepsilon>0$ оператор $T-\varepsilon I$ является положительно определенным.

11. Ограниченный оператор T обладает ограниченным обратным тогда и только тогда, когда для некоторого $\varepsilon>0$ оба оператора $TT^*-\varepsilon I$ и $T^*T-\varepsilon I$ являются положительно определенными.

12. Нормальный проектор самосопряжен. Если E_1 и E_2 — самосопряженные проекторы, то справедливость неравенства $E_1\geqslant E_2$ в смысле § 4 равносильна его справедливости в смысле определения VI.3.4.

13. Если N — нормальный оператор в $\mathfrak{H}$ и E — его спектральное разложение, то E содержится в слабом замыкании B^*-алгебры, порожденной операторами N и N^* (т. е. для любого борелевского множества σ комплексной плоскости оператор $E(\sigma)$ принадлежит этому замыканию).

14. Слабо замкнутая B^*-алгебра $\mathfrak{A}$ порождается содержащимися в ней самосопряженными проекторами.

15. Обозначим через P прямое произведение счетного числа экземпляров комплексной плоскости, и пусть I — единичный интервал. Показать, что существует такое взаимно однозначное отображение h пространства P на I, что $h(e)$ является борелевским множеством тогда и только тогда, когда e — борелевское множе-

ство. (Указание: воспользоваться десятичным представлением вещественных чисел.)

16. Пусть N_1, N_2, ... — счетная последовательность нормальных операторов в $\mathfrak{H}$, коммутирующих между собой. Показать, что существует единственный эрмитов оператор T, для которого каждый из операторов N_k является борелевской функцией от T. (Указание: воспользоваться теоремой 2.1 и упражнением 15.)

17. Показать, что для операторов A, B и C в гильбертовом пространстве

(a) $A \leqslant B$ и $B \leqslant A$ влечет $A = B$;

(b) $A \leqslant B$ и $B \leqslant C$ влечет $A \leqslant C$;

(c) $A_1 \leqslant A_2$ и $B_1 \leqslant B_2$ влечет $A_1 + B_1 \leqslant A_2 + B_2$;

(d) $A \leqslant B$ и $\alpha \geqslant 0$ влечет $\alpha A \leqslant \alpha B$;

(e) $A \leqslant B$ влечет $-B \leqslant -A$;

(f) если оператор A эрмитов, то существуют такие числа m и M, что $mI \leqslant A \leqslant MI$.

18. Показать, что если операторы A и B коммутируют, то из $0 \leqslant A \leqslant B$ следует $A^2 \leqslant B^2$, но это не верно, если не предполагать перестановочности A и B[1]).

19. Если T — положительный оператор в $\mathfrak{H}$, то

$$|(Tx, y)|^2 \leqslant (Tx, x)(Ty, y).$$

20. Равномерно ограниченная обобщенная последовательность положительных операторов T_α в $\mathfrak{H}$ стремится к нулю в сильной операторной топологии тогда и только тогда, когда $T_\alpha \to 0$ в слабой операторной топологии, или, что то же, когда $(T_\alpha x, x) \to 0$ для любого $x \in \mathfrak{H}$. (Указание: воспользоваться упражнением 19.)

21. Если T_α — равномерно ограниченная обобщенная последовательность операторов в $\mathfrak{H}$ и если $\alpha \leqslant \beta$ влечет $T_\alpha \leqslant T_\beta$, то существует сильный предел $\lim\limits_\alpha T_\alpha$. (Указание: воспользоваться упражнением 20.)

22. Пусть T_1 и T_2 — вполне непрерывные эрмитовы операторы. Пусть λ_1, λ_2, ... — последовательность положительных собственных значений оператора T_1, расположенных в порядке убывания, причем каждое из них повторяется столько раз, какова его кратность; пусть μ_1, μ_2, ... и ν_1, ν_2, ... — аналогичные последовательности для операторов T_2 и $T_1 + T_2$. Тогда

(a) $\nu_{k+i-1} \leqslant \mu_k + \lambda_i$;

(b) $|\nu_k - \lambda_k| \leqslant |T_2|$.

23. Показать, что последовательность λ_1, λ_2, ... положительных собственных значений вполне непрерывного эрмитова опера-

[1]) Однако $0 \leqslant A \leqslant B$ влечет $A^\alpha \leqslant B^\alpha$ при $\alpha < 1$.— *Прим. ред.*

тора T, расположенных в порядке убывания и повторенных в соответствии с их кратностями, можно получить по формуле

$$\lambda_n = \max_{\mathfrak{S}_n} \min_{x \in \mathfrak{S}_n} \frac{(Tx, x)}{(x, x)},$$

где $\mathfrak{S}_n$ — произвольное n-мерное подпространство в $\mathfrak{H}$.

24. Рассмотреть в гильбертовом пространстве всех измеримых и интегрируемых с квадратом по Лебегу функций на отрезке $[0,1]$ интегральные операторы с ядрами

$$K_1(x, y) = i \operatorname{sgn}(x-y), \qquad K_2(x, y) = |x-y|$$

и вычислить их собственные значения и собственные функции.

25. Показать, что ограниченный оператор T в гильбертовом пространстве вполне непрерывен тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий:

(a) $Tx_n \to 0$ сильно, если $x_n \to 0$ слабо,

(b) $(Tx_n, x_n) \to 0$, если $x_n \to 0$ слабо.

(**Указание**: для доказательства достаточности условия (b) покажите, что из него вытекает, что $(Tx_n, y_n) \to 0$, если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ слабо сходятся к нулю.)

9. Примечания и дополнения

Основные результаты этой главы, относящиеся к спектральной теории эрмитовых операторов, восходят к работе Гильберта [1; IV]. Доказательства этих теорем даны также Ф. Риссом [20,6]; вклад в эту область был сделан также многими другими авторами. Мы отсылаем читателя к энциклопедическому обзору Хеллингера и Теплица [3], относящемуся к раннему периоду развития теории гильбертовых пространств, а также к трактату Уинтнера [1], в котором изложение ведется в терминах бесконечных матриц; в этих работах приведена обширная библиография. Около 1930 г., после периода относительного затишья, появились фундаментальные работы фон Неймана [7, 8, 2] и Стоуна [10,3], придавшие спектральной теории операторов в гильбертовом пространстве современную форму. Книга Стоуна [3] содержит полное изложение спектральной теории в сепарабельном гильбертовом пространстве, что делает ее весьма ценной; в ней главным образом рассматриваются неограниченные операторы. В книге Секефальви-Надя [3], как и в более новой книге Рисса и Секефальви-Надя [1], дается краткое изложение теории для ограниченного и неограниченного случаев. Халмош [6] рассматривает лишь ограниченные операторы, но зато развивает теорию спектральных типов. Укажем еще книги Ахиезера и Глазмана [1] и Кука [1], а также весьма ясное изложение, данное Ионеску [1].

Поскольку имеется целый ряд доступных работ, освещающих развитие спектральной теории в историческом аспекте, мы сделаем лишь краткие замечания, относящиеся к результатам, приведенным в тексте. Это даст нам возможность обсудить некоторые важные и интересные вопросы, которые мы формально не рассматривали.

Спектральная теорема. Спектральная теорема для ограниченных самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве принадлежит Гильберту [1; IV]. Читателю следует также познакомиться с доказательствами Ф. Рисса [20, 6], которые вполне современны по духу. Было дано много других доказательств спектральной теоремы для самосопряженных, унитарных и нормальных операторов, как для ограниченных, так и для неограниченных. Мы отсылаем читателя к монографиям Ахиезера и Глазмана [1], Уинтнера [1], Люмиса [1], Рисса и Секефальви-Надя [1], Секефальви-Надя [3], Стоуна [3] и Халмоша [6]. Кроме того, различные доказательства этой теоремы для ограниченных и неограниченных операторов можно найти в следующих работах: Веккен [1], Уинтнер [2], Иосида [11, 12; I], Иосида и Накаяма [1], Карлеман [1], Кодаира [2], Кристиан [1], Купер [1, 2], Купмен и Дуб [1], Леньел [1], Леньел и Стоун [1], Лорх [5], Мак-Шейн [3], Накано [7, 12, 13], фон Нейман [2, 7, 16, 22], Огасавара [7], Реллих [3], Ф. Рисс [14], Рисс и Лорх [1], Смит [1], Стоун [7], Тейхмюллер [2], Фридрихс [4], Хеллингер [1], Цудзи [1], Эберлейн [5] и Эссер [1]. В книге Кука [1] воспроизводятся некоторые из этих доказательств. См. также статью Фелла и Келли [1].

Фон Нейман [2; стр. 401] доказал, что коммутирующее семейство нормальных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве допускает одновременное спектральное приведение. Это же утверждение справедливо для счетной системы операторов в произвольном гильбертовом пространстве (см. также Хаар [2; стр. 781—790], Секефальви-Надь [3; стр. 66—69] и Рисс и Секефальви-Надь [1; § 130, 131]). Первое изложение этого вопроса для B^*-алгебры операторов без ограничения счетности, как в теореме 2.1, дано Данфордом [13], хотя слабо замкнутые алгебры ранее рассмотрел Иосида [12; I], а аналогичные результаты для абелевых колец операторов были получены Стоуном [7].

Систематическое употребление операторного исчисления в форме, данной в теореме 1.1, введено фон Нейманом [18] и Стоуном [3; гл. VI]; см. также Лорх [2, 11].

Следующая теорема доказана, по существу, фон Нейманом [2; стр. 393] и [18; стр. 213].

Теорема. *Пусть A — ограниченный самосопряженный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве, и пусть T — ограни-*

ченный оператор, который коммутирует со всеми операторами, перестановочными с A. Тогда существует такая ограниченная измеримая функция f, что $T = f(A)$.

В явном виде эту теорему доказал Ф. Рисс [21]. Мимура [1] упростил доказательство Рисса и распространил теорему на неограниченные операторы. Более элементарное доказательство дано Секефальви-Надем [3; стр. 63—65] (см. также Рисс и Секефальви-Надь [1; § 129], Накано [8, 9] и Веккен [2]). Эта теорема, как установлено, не верна в несепарабельном случае, однако Сигал [5; II, стр. 38] получил соответствующее ее распространение. Обобщение этого результата на B-пространства было получено Бейдом [3, 4]. Мы рассмотрим его в гл. XVII.

Спектр самосопряженного оператора. Теорема 4.3 представляет собой один из многих способов вычисления собственных значений вполне непрерывного самосопряженного оператора. Некоторые дополнительные соображения см. у Рисса и Секефальви-Надя [1; § 95, 96]. За более развернутым изложением методов Рэлея — Ритца, Вайнштейна и многих других читатель может обратиться к книге Коллаца [1]. Этой проблеме посвящен ряд недавних работ, выполненных Аронщайном и его сотрудниками; см., например, Аронщайн [3, 4], где можно найти дальнейшие ссылки. Леньел и Стоун [1] показали, что если оператор T является самосопряженным, то верхняя (нижняя) грань множества $\{(Tx, x) \mid |x| = 1\}$ достигается тогда и только тогда, когда она является собственным значением оператора T.

Иногда бывает удобно воспользоваться тем обстоятельством, что если оператор T нормален, то λ тогда и только тогда принадлежит его спектру $\sigma(T)$, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой вектор $x \neq 0$, что $|Tx - \lambda x| < \varepsilon |x|$. Доказательство см. у Халмоша [6; стр. 51]. По поводу некоторых результатов и библиографии, относящейся к спектру, в частности вполне непрерывных операторов, мы отсылаем читателя к работам Рисса и Секефальви-Надя [1; § 133, 134] и Цзяна [1].

Ссылки на классическую литературу по этому вопросу см. у Хеллингера и Теплица [3; § 32—35].

Спектральное представление и теория спектральных типов. Результаты § 5 тесно связаны с теорией спектральных типов, изучавшейся Хеллингером [1] и Ханом [5]. Более новое изложение см. у Стоуна [3; гл. 7] и фон Неймана [15] для случая сепарабельного гильбертова пространства и у Халмоша [6] для общего случая. Халмош интересуется кратностью спектральной меры, и его результаты обобщают работы Накано [10, 11], Плеснера и Рохлина [1] и Веккена [2]. В книге Ахиезера и Глазмана [1; §§ 69—73] рассматривается также случай неограниченных операторов.

Пусть T — самосопряженный оператор, и пусть $\mathfrak{A}(T)$ — кольцо всех ограниченных операторов, коммутирующих с T. Иосида [3] показал, что операторы T_1 и T_2 унитарно эквивалентны тогда и только тогда, когда между $\mathfrak{A}(T_1)$ и $\mathfrak{A}(T_2)$ существует *-изоморфизм, переводящий T_1 в T_2.

Другие формулировки теории спектральных типов, связанные с алгебрами операторов в гильбертовом пространстве, были даны Сигалом [5; II] и Келли [6]. Мы приведем теорему Сигала, которая часто может заменить спектральную теорему.

Теорема. *Максимальная симметричная абелева алгебра ограниченных операторов в гильбертовом пространстве унитарно эквивалентна алгебре всех операторов умножения на ограниченные измеримые функции в пространстве L_2 на некотором пространстве с мерой.*

Вычисление разложения единицы. Формула теоремы 6.1 принадлежит, по существу, Стильтьесу [1; стр. 72—75] и служит основным инструментом в работе Хеллингера [1]; См. также Стоун [3; стр. 183] и статьи Леньела [1] и Купмена и Дуба [1].

Теория возмущений. Литература по теории возмущений была уже указана в § VII.11. Результаты § 7 принадлежат в основном Реллиху [2; II]. См. также Рисс и Секефальви-Надь [1, § 134—136][1]).

Инвариантные подпространства. Если T — оператор в B-пространстве $\mathfrak{X}$, а $\mathfrak{M}$ — отличное от $\{0\}$ и всего $\mathfrak{X}$ замкнутое линейное подпространство, для которого $T\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}$, то $\mathfrak{M}$ называется (нетривиальным) *инвариантным подпространством* пространства $\mathfrak{X}$ относительно T. Если $\mathfrak{X}$ гильбертово, а $\mathfrak{M}$ и его ортогональное дополнение $\mathfrak{X} \ominus \mathfrak{M}$ являются инвариантными подпространствами в $\mathfrak{X}$ относительно T, то говорят, что подпространство $\mathfrak{M}$ *приводит* оператор T. Легко видеть, что нетривиальное подпространство гильбертова пространства может быть инвариантным подпространством для оператора, но не приводить его. В действительности оператор может иметь много нетривиальных инвариантных подпространств, но ни одного нетривиального приводящего (элементарный пример см. у Халмоша [6; стр. 40]).

---

1) Интересные приложения этой теории можно найти в книге В. П. Маслова [1*]. — *Прим. ред.*

Спектральная теорема гарантирует, что нормальный оператор (отличный от нулевого и тождественного) приводится по крайней мере одним нетривиальным подпространством. Для операторов, не являющихся нормальными, это далеко не ясно, и потому значительный интерес представляет отыскание нетривиальных инвариантных подпространств для заданного оператора. Неизвестно, обладает ли каждый оператор, отличный от нулевого и тождественного, нетривиальным инвариантным подпространством. Из теоремы VII.3.10 легко следует, что если T — ограниченный линейный оператор в B-пространстве $\mathfrak{X}$ и если $\sigma(T)$ содержит по крайней мере две компоненты связности, то T обладает инвариантным подпространством. Аронщайн и Смит [1] показали, что любой вполне непрерывный оператор имеет инвариантное подпространство, даже если $\sigma(T)=\{0\}$. Из одной теоремы Годмана [1; стр. 136] следует, что инвариантным подпространством обладает изометрический линейный оператор, отображающий B-пространство $\mathfrak{X}$ на себя. Если $T\in B(\mathfrak{X})$ и $|T^n|\leqslant K$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, то $\mathfrak{X}$ можно перенормировать таким образом, что оператор T станет изометрическим; поэтому T обладает инвариантным подпространством. Уэрмер [1] показал, что если $|T^n|=O(e^{|n|^\alpha})$ для некоторого α, $0<\alpha<1$, и если $\sigma(T)$ содержит по крайней мере две точки, то T имеет инвариантное подпространство. Он также доказал, что то же справедливо, если $|T^n|=O(|n|^k)$ для некоторого k (см. Уэрмер [2]).

Уэрмер [4; стр. 275] доказал, что если T — нормальный оператор, а $\sigma(T)$ не имеет внутренних точек и не разделяет плоскость, то каждое замкнутое инвариантное относительно T подпространство инвариантно также относительно T^* и потому приводит оператор T. В его статье рассматривается также следующая задача. Допустим, что множество собственных векторов оператора T из $B(\mathfrak{X})$ фундаментально в $\mathfrak{X}$. При каких условиях можно утверждать, что всякое замкнутое инвариантное относительно T подпространство $\mathfrak{M}$ порождается содержащимися в нем собственными векторами? Эта задача относится к проблеме спектрального синтеза, которую мы обсудим в § XI.4. Аналогичная задача изучалась Берлингом [4], которому удалось описать *все* замкнутые инвариантные подпространства для оператора умножения на z в гильбертовом пространстве функций, аналитических при $|z|<1$.

Сужение оператора. Пусть $\mathfrak{M}$ — замкнутое подпространство гильбертова пространства $\mathfrak{H}$. Легко видеть, что если $\mathfrak{M}$ служит инвариантным подпространством самосопряженного оператора T, то сужение оператора T на $\mathfrak{M}$ является самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве $\mathfrak{M}$. Для нормальных операторов ситуация радикально меняется. Например, если $\mathfrak{H}=L_2$ на окружности $|z|=1$, а $\mathfrak{M}$ — подпространство, представляющее собой замыкание в $\mathfrak{H}$ множества функций, аналитических в круге $|z|<1$ и непрерывных при $|z|\leqslant 1$, то оператор умножения на z нормален в $\mathfrak{H}$, но не в $\mathfrak{M}$, поскольку оператор, сопряженный к T в $\mathfrak{M}$, задается соотношением[1])

$$(T^*f)(z)=z^{-1}(f(z)-f(0)), \quad f\in\mathfrak{M}.$$

Теорема Уэрмера [4], цитированная в предыдущем абзаце, дает условия, при которых сужение нормального оператора на любое инвариантное подпространство снова является нормальным оператором. Уэрмер [5] изучал сужение оператора T на подпространство $\mathfrak{M}$, не инвариантное относительно T^{-1}, но такое, что для некоторого $x\in\mathfrak{M}$ множество векторов $T^n x$, $n=0, 1, 2, \ldots$, фундаментально в $\mathfrak{M}$. В этом случае сужение оператора T на $\mathfrak{M}$ допускает представление в виде оператора умножения на z в пространстве аналитических функций.

Халмош, Люмер и Шеффер [1] доказали, что сужение нормального оператора может обладать обратным оператором, но не допускать извлечения квадратного корня (см. также Халмош и Люмер [1]).

Продолжение оператора. Из предыдущего пункта следует, что важно знать, когда можно продолжить (в некотором смысле) данный оператор A в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ до оператора B в гильбертовом пространстве $\mathfrak{K}$, содержащем $\mathfrak{H}$, таким образом, чтобы B обладал свойствами, которыми A не обладает.

Одно из возможных определений продолжения таково: если гильбертово пространство $\mathfrak{K}$ содержит $\mathfrak{H}$ и если P — самосопряженный проектор $\mathfrak{K}$ на $\mathfrak{H}$, то оператор B называется *продолжением* оператора A, если $AP=PBP$. Халмош [1] доказал, что каждый ограниченный оператор A в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ допускает продолжение B на $\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{H}$, причем если A — оператор сжатия (т. е. $|A|\leqslant 1$), то оператор B можно выбрать так, чтобы он был унитарным. Далее, как подметил Майкл, если A — положительный оператор в $\mathfrak{H}$ и $|A|\leqslant 1$, то в $\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{H}$ существует самосопряженный проектор, являющийся продолжением оператора A. Из этого результата вытекает ряд интересных следствий; например, если $\mathfrak{H}$ — бесконечномерное гильбертово пространство, то замыкание

[1]) Функции из $\mathfrak{M}$ продолжаются по формуле Коши внутрь круга $|z|<1$, и потому имеет смысл говорить об их значениях во внутренних точках круга. — *Прим. перев.*

в слабой операторной топологии множества всех унитарных операторов совпадает с множеством всех сжатий, а замыкание множества всех самосопряженных проекторов совпадает с множеством всех положительных сжатий.

Следующая теорема, принадлежащая Секефальви-Надю [8, 10], является важным обобщением одного из цитированных выше результатов [1]).

Теорема. *Если A — оператор сжатия, определенный на гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, то существуют такое гильбертово пространство $\mathfrak{K} \supset \mathfrak{H}$ и такой унитарный оператор U, действующий в $\mathfrak{K}$, что если P — самосопряженный проектор $\mathfrak{K}$ на $\mathfrak{H}$, то $A^nP = PU^nP$, $n = 1, 2, \ldots$. Кроме того, $\mathfrak{K}$ может быть выбрано минимальным в том смысле, что оно порождается элементами $\{U^kx \mid x \in \mathfrak{H},\ k = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots\}$, причем в этом случае $\mathfrak{K}$ и U определяются однозначно с точностью до унитарной эквивалентности.*

Весьма элементарное доказательство этой теоремы, исключая условие минимальности, было дано Шеффером [1]. Распространение на случай B-пространств дано Секефальви-Надем [10; стр. 114], а аналогичные результаты для полугрупп сжатий можно найти у Секефальви-Надя [8, 10] (см. также Купер [3]). Первоначальное доказательство Секефальви-Надя опирается на следующую теорему, принадлежащую Наймарку [3].

Теорема. *Пусть S — абстрактное множество и Σ — алгебра (соответственно σ-алгебра) подмножеств в S. Пусть F — аддитивная (соответственно слабо счетно аддитивная) функция на Σ со значениями в множестве положительных операторов на гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, удовлетворяющая условиям $F(\varnothing) = 0$ и $F(S) = I$. Тогда существуют такое гильбертово пространство $\mathfrak{K} \supseteq \mathfrak{H}$ и такая аддитивная (соответственно слабо счетно аддитивная) функция E на Σ со значениями в множестве самосопряженных проекторов из $B(\mathfrak{K})$, что если P — самосопряженный проектор $\mathfrak{K}$ на $\mathfrak{H}$, то $F(e)P = PE(e)P$ для всех $e \in \Sigma$.*

Подробное обсуждение этих важных результатов и общую теорему, объединяющую их, см. у Секефальви-Надя [11].

Из работы Секефальви-Надя вытекает, что если A — оператор сжатия в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, то существует сильно счетно аддитивная функция F, определенная на борелевских подмножествах окружности $|z| = 1$, принимающая значения в мно-

---

1) Более общая теорема еще ранее была доказана И. М. Гельфандом [6]. — *Прим. ред.*

жестве положительных операторов на $\mathfrak{H}$ и такая, что

$$A^{(n)} = \int_0^{2\pi} e^{in\theta} F(d\theta),$$

где $A^{(n)} = A^n$, если $n \geqslant 0$, и $A^{(n)} = A^{*|n|}$, если $n < 0$. Шрейбер [1] воспользовался этим представлением, чтобы построить операторное исчисление для функций, являющихся граничными значениями ограниченных функций, аналитических при $|z| < 1$.

Расширение оператора. Пусть A — оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Интересно найти условия, при которых оператор A допускает нормальное расширение на некоторое гильбертово пространство $\mathfrak{K} \supseteq \mathfrak{H}$, т. е. условия, при которых в $\mathfrak{K}$ существует такой нормальный оператор B, что если P — самосопряженный проектор $\mathfrak{K}$ на $\mathfrak{H}$, то $AP = BP$. Брем [1], отправляясь от работы Халмоша [1], исчерпывающе исследовал такие операторы и назвал их субнормальными. В противоположность продолжению, нормальным расширением обладает не каждый оператор (ср. Халмош [1; стр. 133]). Следующий результат, принадлежащий Брему, представляет собой улучшение теоремы Халмоша (см. Секефальви-Надь [11; стр. 18]).

Теорема. *Для того чтобы ограниченный линейный оператор A в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ допускал нормальное расширение, необходимо и достаточно, чтобы для любого конечного набора элементов $x_0, x_1, \ldots, x_r$ из $\mathfrak{H}$ выполнялось неравенство*

$$\sum_{m,\,n=0}^{r} (A^n x_m, A^m x_n) \geqslant 0.$$

Если это условие выполнено, то минимальное нормальное расширение единственно с точностью до унитарной эквивалентности.

Другой критерий был дан Бремом в работе [1; стр. 79], где исследуется связь между спектрами оператора A и его минимального нормального расширения и другие вопросы. Соотношения между спектрами рассматривал также Халмош [9].

Спектральные множества Неймана. Фон Нейман [3] называет замкнутое множество S комплексной сферы *спектральным множеством* ограниченного линейного оператора T в гильбертовом пространстве, если для любой рациональной функции f, для которой $|f(z)| \leqslant 1$ при всех $z \in S$, существует $f(T)$ и $|f(T)| \leqslant 1$. Понятно, что если S — спектральное множество, то $\sigma(T) \subseteq S$, и что если оператор T нормален, то $\sigma(T)$ является спектральным множеством в этом смысле. Представляет интерес следующая теорема.

Теорема. *Если* $|T| \leqslant 1$, *а функция* f *аналитична в области, содержащей круг* $|z| \leqslant 1$, *и* $|f(z)| \leqslant 1$ *при* $|z| \leqslant 1$, *то* $|f(T)| \leqslant 1$.

Отсюда следует, что круг $|z| \leqslant 1$ является спектральным множеством оператора T тогда и только тогда, когда $|T| \leqslant 1$. Эта теорема была впервые доказана фон Нейманом [3; стр. 269]; другое доказательство было дано Гайнцем [2]; особенно простое доказательство принадлежит Секефальви-Надю [8, 11; стр. 15]. Доказано, что оператор T нормален тогда и только тогда, когда $\sigma(T)$ является спектральным множеством (ср. фон Нейман [3; стр. 280]), и что T самосопряжен (соответственно унитарен) тогда и только тогда, когда некоторое ограниченное подмножество вещественной оси (соответственно подмножество единичной окружности) является спектральным множеством. По поводу доказательств этих утверждений и некоторых дополнительных результатов см. фон Нейман [3] или Рисс и Секефальви-Надь [1; § 152—155].

Квадратный корень оператора. Говорят, что оператор B является *квадратным корнем* оператора A, если $B^2 = A$. Простым следствием спектральной теоремы является тот факт, что всякий положительный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве обладает положительным самосопряженным квадратным корнем. Доказательство, не использующее спектральную теорему, можно найти у Виссера [2], Веккена [1] или у Рисса и Секефальви-Надя [1; стр. 285]. Халмош, Люмер и Шеффер [1] показали, что существуют обратимые операторы в гильбертовом пространстве, не имеющие квадратного корня; на самом деле Халмош и Люмер [1] доказали, что операторы, из которых можно извлечь квадратный корень, не образуют среди операторов, обладающих обратным, даже плотного множества (относительно равномерной топологии). Аналогичный результат имеется у Шеффера [2]. Жюлиа [1—4] детально исследовал совокупность всех самосопряженных квадратных корней данного положительного оператора как в ограниченном, так и в неограниченном случаях. Распространение на случай корней n-й степени и несамосопряженные квадратные корни рассмотрены Жюлиа в работах [5, 6].

Перестановочность операторов. Тривиально доказывается, что если A и B — коммутирующие самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве, то оператор AB тоже самосопряжен. Было отмечено (см. упражнение X.8. 7), что если A и B — коммутирующие положительные операторы, то оператор AB тоже положителен. Если A — нормальный оператор, а B — оператор, коммутирующий с A, то B коммутирует с A^*. Это было высказано фон Нейманом и доказано Фуглидом [1] и Халмошем [3, 6; стр. 68]. Отсюда следует, что если A и B — коммутирующие нормальные операторы, то оператор AB нормален.

Браун [1] показал, что если каждый из операторов T и T^* коммутирует с TT^*, то оператор T нормален, а Путнам [3] доказал, что T нормален, если он коммутирует с TT^*-T^*T.

Обобщая результат Фуглида [1], Путнам [1] показал, что если операторы A и B нормальны, а T — такой обратимый оператор, что $A=TBT^{-1}$, то существует такой унитарный оператор U, что $A=UBU^*$.

Довольно неожиданным является то, что из нормальности операторов A, B и AB не следует, что оператор BA нормален (см. Капланский [6]). Однако, развивая некоторые исследования Вигмана [1], Капланский получил условия, при которых это верно (например, если в дополнение к сделанным предположениям хотя бы один из операторов A, B вполне непрерывен, то оператор BA нормален). Отметим еще, что если операторы A и AB нормальны, то оператор BA нормален тогда и только тогда, когда B коммутирует с A^*A.

Если заданы два оператора A и B, то величина их *коммутатора* $AB-BA$ является мерой того, насколько эти операторы не коммутируют. Уинтнер [3] показал, что если A и B — ограниченные самосопряженные операторы, то их коммутатор не может быть ненулевым кратным единичного оператора, а Путнам [2] заметил, что метод Уинтнера не требует самосопряженности. Виландт [2] получил более сильный результат, применимый к B-алгебрам. Халмош [10; II] (см. также Шеффер [2]) доказал, что если A коммутирует с $AB-BA$, то $AB-BA$ является двусторонним топологическим делителем нуля. По аналогии с теоремой Джекобсона Капланский высказал предположение, что если A коммутирует с $AB-BA$, то последний оператор квазинильпотентен, а Путнам [3] доказал это в предположении, что и B тоже коммутирует с $AB-BA$. Видав [1] дал другое доказательство результата Путнама, справедливое в любой B-алгебре. Несколько более сильный результат был получен Сингером и Уэрмером [1], которые доказали, что если A и B — ограниченные операторы в B-пространстве, то оператор $AB-BA$ квазинильпотентен, если он содержится в равномерно замкнутой алгебре, порожденной операторами A и I.

Полярное разложение. Полярное разложение, или каноническая факторизация, особенно важно для неограниченных операторов и будет изучено в § XII.7. Однако достаточный интерес оно представляет также в рассмотренном здесь случае ограниченных операторов. Оператор U в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ называется *частичной изометрией* с начальной областью определения $\mathfrak{M}$, если $|Ux|=|x|$ при $x\in\mathfrak{M}$ и $Ux=0$ при $x\in\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{M}$.

Теорема. *Каждое ограниченное линейное преобразование T в гильбертовом пространстве может быть представлено в форме UP, где U — частичная изометрия, а P — положительный оператор. Если оператор T нормален, то оператор U можно выбрать так, чтобы он был унитарным и чтобы операторы U и P коммутировали между собой и с каждым оператором, коммутирующим с T и T^*.*

Элементарное доказательство см. у Рисса и Секефальви-Надя [1; § 110]. Вообще говоря, U и P не коммутируют, но Браун [1] изучил операторы T, для которых U и P коммутируют, и доказал, что для этого необходимо и достаточно, чтобы оператор T коммутировал с T^*T. Понятно, что такой оператор T может быть разложен в прямую сумму нормального оператора и оператора обобщенного сдвига.

Неравенство Гайнца. Если A и B — положительные ограниченные операторы, а Q — такой ограниченный линейный оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, что $|Qx| \leqslant |Ax|$ и $|Q^*x| \leqslant |Bx|$ для всех x из $\mathfrak{H}$, то для каждого вещественного числа α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, и для всех x, y из $\mathfrak{H}$ справедливо неравенство $|(Qx, y)| \leqslant \leqslant |A^\alpha x| |B^{1-\alpha} y|$. Это — принадлежащее Като [5] усиление неравенства, доказанного Гайнцем [1]. Като и Гайнц показали, что это неравенство остается в силе и для неограниченных операторов. Другое доказательство, основанное на теореме Рисса о выпуклости и пригодное для полилинейных форм, было дано Диксмье [6]. Недавно Гайнц [4] дал короткое и элегантное доказательство этого результата.

Симметризуемые и нормализуемые операторы. Может случиться, что оператор T не является симметричным (или нормальным), но для некоторого нетривиального оператора A один из операторов AT или TA оказывается симметричным (или нормальным). В этом случае иногда удается получить важную информацию относительно спектральной природы оператора T. Такие операторы естественно возникают при изучении интегральных уравнений (ср. Хеллингер и Теплиц [3; § 38]). Интегральные операторы, а также и абстрактные операторы указанного типа были в значительной степени изучены, особенно в случае их полной непрерывности. По поводу этой теории мы отсылаем читателя к книге Заанена [5; гл. 12] и статьям Заанена [3, 7, 8], Рида [1, 2], Уилкинза [1] и Циммерберга [1, 2]. Особое внимание уделяется возможности разложения по собственным функциям.

ГЛАВА XI

Различные приложения

Эта глава посвящена приложениям спектральной теории нормальных операторов к задачам, относящимся к ряду различных областей математики. Поскольку рассматриваемые здесь вопросы лежат в стороне от основного русла наших интересов, мы не будем стремиться к сколько-нибудь исчерпывающему их изложению. Однако вследствие глубины и силы общей спектральной теории оказывается возможным не только дать удовлетворительное построение их основ, но и изложить их главные результаты; это мы и попытаемся сделать. К исследуемым в этой главе вопросам относятся: теория групп и теорема Петера — Вейля; теория почти периодических функций Гарольда Бора; преобразование Фурье, свертки и теория Планшереля в $L_2(G)$, где G — локально бикомпактная абелева группа; теоремы Винера о замкнутости в L_1 и связанные с ними классические тауберовы теоремы; операторы Гильберта — Шмидта и теория Фредгольма для них; преобразование Гильберта и неравенство Кальдерона — Зигмунда.

1. Бикомпактные группы

Этот параграф посвящен изучению бикомпактных топологических групп. Для таких групп при помощи одной из теорем о неподвижной точке из § V.10 доказывается существование меры Хаара (теорема 1). Мера Хаара используется для получения основополагающего результата Петера и Вейля, который в свою очередь применяется для доказательства основного свойства непрерывных характеров бикомпактной абелевой группы.

1. Теорема. *Для любой бикомпактной топологической группы G существует единственная неотрицательная регулярная счетно аддитивная мера μ, определенная на σ-алгебре Σ борелевских подмножеств в G, и такая, что $\mu(G)=1$ и $\mu(sE)=\mu(E)$ для каждого s из G и каждого E из Σ. Кроме того, $\mu(Es)=\mu(E)$ и $\mu(E^{-1})=\mu(E)$ для всех s из G и всех E из Σ.*

Доказательство. Обозначим через $C(G)$ банахово пространство всех непрерывных вещественных функций на G, и пусть e — функция, тождественно равная 1. Пусть K — подмножество в $C^*(G)$, состоящее из всех таких функционалов x^*, для которых $x^*(e)=1$ и $x^*(f)\geqslant 0$, если $f(s)>0$ для всех s из G. Ясно, что K выпукло и замкнуто в $C^*(G)$ относительно $C(G)$-топологии. Если функция f принадлежит единичному шару в $C(G)$, то $-e(s)\leqslant f(s)\leqslant e(s)$, и потому $-1\leqslant x^*(f)\leqslant 1$ при $x^*\in K$; это показывает, что $|x^*|\leqslant 1$ при $x^*\in K$. Таким образом, K является выпуклым подмножеством единичного шара в $C^*(G)$, замкнутым в $C(G)$-топологии. Из следствия V.4.3 вытекает, что K бикомпактно в этой топологии.

Для каждого s из G определим в $C(G)$ линейное отображение L_s соотношением $(L_sf)(t)=f(st)$. Ясно, что $L_sL_t=L_{st}$ и $L_1=1$, где 1 — единица группы G. Поскольку $L_t^*L_s^*=(L_sL_t)^*=L_{st}^*$, семейство $\{L_s^*\mid s\in G\}$ представляет собой группу операторов в $C^*(G)$. Очевидно также, что $L_s^*K\subseteq K$ для любого s из G.

Покажем прежде всего, что группа $\{L_s^*\mid s\in G\}$ операторов в $C^*(G)$ образует на множестве K равностепенно непрерывное (см. V.10.7) относительно $C(G)$-топологии семейство. Для этого рассмотрим в $C^*(G)$ окрестность нуля V, определенную положительным числом ε и функциями $f_1, \ldots, f_n$ из $C(G)$. Построим в $C^*(G)$ такую окрестность нуля U, что для каждой пары элементов x^*, y^* из K, для которой $x^*-y^*\in U$, вектор $L_s^*(x^*-y^*)$ при любом s из G принадлежит V.

Конечное множество $f_1, \ldots, f_n$ компактно в $C(G)$, и потому в силу следствия IV.6.9 каждому положительному числу δ соответствует такая окрестность единицы N в G, что для любой пары элементов t, u из G, для которой $u^{-1}t\in N$, выполняется неравенство

$$|f_j(u)-f_j(t)|<\delta, \qquad j=1, \ldots, n.$$

Предположим, что $u^{-1}t\in N$. Тогда для любого s из G элемент $(su)^{-1}(st)=u^{-1}t$ принадлежит N, и потому

$$|(L_sf_j)(u)-(L_sf_j)(t)| = |f_j(su)-f_j(st)|<\delta, \quad j=1, \ldots, n.$$

Из следствия IV.6.9 вытекает, что замыкание множества $\{L_sf_j\mid s\in G, j=1, \ldots, n\}$ компактно в $C(G)$ и поэтому в силу теоремы I.6.15 вполне ограничено. Следовательно, существуют в $C(G)$ такие функции $g_1, \ldots, g_m$, что каждый из элементов L_sf_j удален менее чем на $\varepsilon/4$ от одного из элементов $g_1, \ldots, g_m$. В качестве окрестности нуля U в $C^*(G)$ возьмем окрестность, определенную числом $\varepsilon/2$ и функциями $g_1, \ldots, g_m$. Если теперь x^* и y^* принадлежат K и $x^*-y^*\in U$, то, выбирая i подходящим образом и учитывая, что $|x^*|, |y^*| \leqslant 1$, получаем, что

$$|L_s^*(x^*-y^*)f_j| = |(x^*-y^*)L_sf_j| \leqslant$$
$$\leqslant |(x^*-y^*)(L_sf_j-g_i)| + |(x^*-y^*)g_i| \leqslant$$
$$\leqslant 2|L_sf_j-g_i| + |(x^*-y^*)g_i| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

для любого s из G. Таким образом, как и утверждалось, семейство $\{L_s^*\}$ равностепенно непрерывно на K.

Теперь можно применить теорему V.10.8, из которой следует существование такой точки $x^* \in K$, что $L_s^* x^* = x^*$ для любого s из G. Из теоремы Рисса о представлении линейных функционалов (IV.6.3) вытекает, что на семействе Σ борелевских подмножеств группы G существует однозначно определенная счетно аддитивная регулярная мера μ, для которой

$$x^*(f) = \int_G f(s)\,\mu(ds), \qquad f \in C(G).$$

Поскольку функционал x^* положителен, то из теоремы Рисса следует, что мера μ неотрицательна, а так как $x^*(e)=1$, то $\mu(G)=1$. Теперь если мера μ_s определена соотношением $\mu_s(E)=\mu(s^{-1}E)$, то, поскольку $x^*=x^*L_s$, мы имеем

$$\int_G f(t)\,\mu(dt) = \int_G f(st)\,\mu(dt) = \int_G f(t)\,\mu_s(dt), \qquad f \in C(G).$$

Легко проверить, что мера μ_s регулярна, и, следовательно, теорема Рисса и приведенное выше тождество показывают, что $\mu_s=\mu$; это доказывает первую часть теоремы (кроме утверждения о единственности инвариантной меры, доказываемого ниже).

Аналогично предыдущему доказывается, что существует такая неотрицательная регулярная счетно аддитивная функция множества ν, определенная на Σ, что $\nu(G)=1$ и $\nu(Es)=\nu(E)$ для каждого E из Σ и каждого s из G. Пусть ν_1 — какая-нибудь из таких функций, и пусть μ_1 — неотрицательная регулярная мера на Σ, причем $\mu_1(G)=1$ и $\mu_1(sE)=\mu_1(E)$. Мы покажем, что $\mu_1=\nu_1$; этим будет установлена единственность меры μ и показано, что $\mu(Es)=$ $=\mu(E)$. Итак, рассмотрим какую-нибудь непрерывную на G скалярную функцию f. Функция f_1, определенная на декартовом произведении $G \times G$ равенством $f_1(s,t)=f(st)$, непрерывна и, следовательно, измерима относительно $\nu_1 \times \nu_1$. Поскольку $\mu_1(G)=$ $=\nu_1(G)=1$, из теоремы Фубини (III.11.9) следует, что

$$\int_G f(t)\,\mu_1(dt) = \int_G f(st)\,\mu_1(dt) = \int_G \left\{\int_G f(st)\,\mu_1(dt)\right\}\nu_1(ds) =$$
$$= \int_G \left\{\int_G f(st)\,\nu_1(ds)\right\}\mu_1(dt) = \int_G f(st)\,\nu_1(ds) = \int_G f(s)\,\nu_1(ds).$$

Так как это справедливо для любой непрерывной функции f, то из теоремы Рисса (IV.6.3) следует, что $\mu_1=\nu_1$. Наконец, чтобы убедиться, что $\mu(E)=\mu(E^{-1})$, рассмотрим меру λ, определенную на Σ равенством $\lambda(E)=\mu(E^{-1})$. Тогда $\lambda(G)=1$, и $\lambda(sE)=\mu(E^{-1}s^{-1})=\mu(E^{-1})=\lambda(E)$. Кроме того, поскольку отображение $s\to s^{-1}$ является гомеоморфизмом G на себя, мера λ регулярна. Поэтому из единственности μ вытекает, что $\lambda=\mu$, ч. т. д.

2. Определение. Мера, существование и единственность которой установлены в теореме 1, называется *мерой Хаара* на бикомпактной группе G.

Используя меру Хаара, мы покажем, что класс непрерывных функций на G, являющихся конечномерными в смысле следующего определения, образует фундаментальное множество в $C(G)$, а также в $L_2(G, \Sigma, \mu)$.

3. Определение. Пусть f — комплекснозначная функция, определенная на группе G. Пусть для $s\in G$ функция f^s определена соотношением $f^s(t)=f(ts)$. Функция f^s называется *сдвигом* функции f на s. Будем говорить, что функция f *конечномерна*, если конечномерно комплексное векторное пространство функций, порожденное множеством $\{f^s \mid s\in G\}$ всех сдвигов функции f.

В доказательстве следующей теоремы используется спектральная теорема, и потому в качестве поля скаляров принимается поле комплексных чисел.

4. Теорема (*Петер — Вейль*). *Пусть G — бикомпактная топологическая группа с σ-алгеброй борелевских множеств Σ и мерой Хаара μ. Тогда множество комплексных непрерывных конечномерных функций фундаментально и в $C(G)$, и в $L_2(G, \Sigma, \mu)$.*

Доказательство. Пусть $L_2=L_2(G, \Sigma, \mu)$, и пусть $\mathfrak{N}$ — ортогональное дополнение в L_2 множества всех непрерывных конечномерных функций. Мы докажем, что последнее множество всюду плотно в L_2, показав, что $\mathfrak{N}=\{0\}$. Для этого достаточно доказать, что произвольный элемент из $\mathfrak{N}$ ортогонален к любому элементу множества $C(G)$, всюду плотного в L_2. Произвольный элемент f из $C(G)$ может быть записан в виде $f=h+ig$, где

$$h(s)=\frac{1}{2}[f(s)+\overline{f(s^{-1})}], \qquad g(s)=\frac{i}{2}[\overline{f(s^{-1})}-f(s)].$$

Так как функции h и g удовлетворяют соотношениям $\overline{h(s)}=h(s^{-1})$, $\overline{g(s)}=g(s^{-1})$, то достаточно показать, что всякая непрерывная функция g, для которой $\overline{g(s)}=g(s^{-1})$, ортогональна к $\mathfrak{N}$.

Доказательство этого утверждения опирается на некоторые свойства линейного оператора T_g, определенного в L_2 равенством

$$(T_g f)(s) = \int_G g(su^{-1}) f(u) \mu(du), \qquad f \in L_2.$$

Так как $g \in C(G)$, то из следствия IV.6.9 вытекает, что для каждого $\varepsilon > 0$ в G найдется такая окрестность единицы U, что если $st^{-1} \in U$, то $|g(s) - g(t)| < \varepsilon$. Пусть f принадлежит L_2 и имеет норму $|f| \leqslant 1$, и пусть $st^{-1} \in U$. Тогда, поскольку $(su^{-1})(tu^{-1})^{-1} = st^{-1}$ лежит в U, имеем

$$|(T_g f)(s) - (T_g f)(t)| = \left| \int_G \{g(su^{-1}) - g(tu^{-1})\} f(u) \mu(du) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \left\{ \int_G |f(u)| \mu(du) \right\} \leqslant \varepsilon \left\{ \int_G |f(u)|^2 \mu(du) \right\}^{1/2} \leqslant \varepsilon.$$

Ввиду следствия IV.6.9 это неравенство показывает, что T_g отображает единичный шар пространства L_2 в условно компактное множество в $C(G)$. Таким образом, оператор T_g, рассматриваемый как отображение L_2 в $C(G)$, вполне непрерывен (см. VI.5.1) и, a fortiori, он вполне непрерывен как отображение L_2 в L_2.

Затем, используя свойство $\overline{g(s)} = g(s^{-1})$, можно убедиться, что оператор T_g самосопряжен, ибо из теоремы Фубини следует, что любая пара элементов f, h из L_2 удовлетворяет соотношениям

$$(f, T_g h) = \int_G f(s) \left\{ \overline{\int_G g(st^{-1}) h(t) \mu(dt)} \right\} \mu(ds) =$$

$$= \int_G \overline{h(t)} \left\{ \int_G \overline{g(st^{-1})} f(s) \mu(ds) \right\} \mu(dt) =$$

$$= \int_G \overline{h(t)} \left\{ \int_G g(ts^{-1}) f(s) \mu(ds) \right\} \mu(dt) = (T_g f, h).$$

По теореме X.3.5 существует полная ортонормальная система $\{\varphi_\alpha\}$ собственных функций оператора T_g, а по VII.4.5 собственные функции, соответствующие собственному значению $\lambda \neq 0$, образуют конечномерное пространство. Если $T_g \varphi = \lambda \varphi$, $\lambda \neq 0$, то

$$\int_G g(su^{-1}) \varphi(u) \mu(du) = \lambda \varphi(s), \qquad s \in G,$$

так что функция $\varphi(s)$ непрерывна. Заменяя s на st и u на ut

и используя соотношение $\mu(Et)=\mu(E)$, мы видим, что

$$\int_G g(su^{-1})\,\varphi(ut)\,\mu(du)=\lambda\varphi(st),$$

т. е. любой сдвиг φ^t собственной функции φ, соответствующей собственному значению λ, также является собственной функцией с собственным значением λ. Таким образом, каждая собственная функция оператора T_g, соответствующая ненулевому собственному значению, является конечномерной непрерывной функцией. Следовательно, $\mathfrak{N}$ ортогонально к любой собственной функции оператора T_g, за исключением (быть может) собственных функций, соответствующих $\lambda=0$. Из теоремы X.3.4 следует, что всякий элемент h из $\mathfrak{N}$ можно представить в виде $h=\Sigma(h, \varphi_\alpha)\varphi_\alpha$, где суммирование производится по всем таким α, для которых $T_g\varphi_\alpha=0$. Таким образом, если $h\in\mathfrak{N}$, то $T_gh=0$, т. е.

$$0=\int_G g(su^{-1})\,h(u)\,\mu(du)=\int_G \overline{g(us^{-1})}\,h(u)\,\mu(du).$$

Если в этом равенстве s заменить на единичный элемент группы G, то оно сведется к равенству $(h, g)=0$, которое показывает, что функция g ортогональна к $\mathfrak{N}$. Итак, мы доказали, что конечномерные непрерывные функции образуют фундаментальное множество в L_2.

Осталось показать, что конечномерные непрерывные функции всюду плотны в $C(G)$. Предположим, что k — функция из $C(G)$ и что задано некоторое число $\varepsilon>0$. Как и выше, применяя следствие IV.6.9, находим такую окрестность V единицы группы G, что $|k(s)-k(st)|<\varepsilon/2$ для любых s из G и t из V. Так как отображение $s\to s^{-1}$ есть гомеоморфизм, то в G существует такая окрестность единицы W, что W и W^{-1} содержатся в V; таким образом, множество $U=W\cup W^{-1}$ является окрестностью единицы в G и обладает свойствами $U\subseteq V$ и $U=U^{-1}$. Поскольку бикомпактное пространство нормально (I.5.9), из теоремы Урысона (I.5.2) следует, что на G существует неотрицательная непрерывная функция $h\neq 0$, которая на дополнении множества U обращается в нуль. Эти свойства функции h сохраняются, если мы пронормируем ее, потребовав, чтобы ее $L_1(G, \Sigma, \mu)$-норма $|h|_1$ равнялась 1. Функция h', определенная соотношением $h'(s)=[h(s)+h(s^{-1})]/2$, обладает всеми перечисленными свойствами функции h и, кроме того, свойством $h'(s)=h'(s^{-1})$. Итак, мы можем предположить, что $h(s)=h(s^{-1})$. Далее, $C(G)$-норма функции $k-T_hk$ выражается формулой

$$|k-T_hk|=\sup_{s\in G}\left|k(s)-\int_G h(st^{-1})\,k(t)\,\mu(dt)\right|.$$

Заменяя t на ts, получаем

$$|k-T_h k| = \sup_{s\in G}\left|\int_G h(t^{-1})\{k(s)-k(ts)\}\mu(dt)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{s\in G}\int_U h(t^{-1})|k(s)-k(ts)|\mu(dt) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\int_U h(t^{-1})\mu(dt) = \frac{\varepsilon}{2}\int_U h(t)\mu(dt) = \frac{\varepsilon}{2}|h|_1 = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Согласно первой части теоремы, существует такая линейная комбинация g непрерывных конечномерных функций, что

$$|k-g|_2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2|h|_2}.$$

Так как

$$|T_h k - T_h g| = \sup_{s\in G}\left|\int_G h(st^{-1})\{k(t)-g(t)\}\mu(dt)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{s\in G}\left\{\int_G h(st^{-1})^2\mu(dt)\right\}^{1/2}|k-g|_2 \leqslant |h|_2|k-g|_2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

то $|k-T_h g| \leqslant \varepsilon$. Таким образом, для завершения доказательства достаточно показать, что функция $T_h g$ является линейной комбинацией конечномерных непрерывных функций и потому сама конечномерна. Мы уже отмечали, что функция $T_h g$ непрерывна, поэтому осталось показать только, что она конечномерна, если конечномерна функция g.

Так как

$$(T_h g)(s) = \int_G h(st^{-1})g(t)\mu(dt),$$

то, заменяя s на su и t на tu, получаем

$$(T_h g)(su) = \int_G h(st^{-1})g(tu)\mu(dt);$$

это означает, что $(T_h g)^u = T_h(g^u)$. Далее, если $g^{u_1}, \ldots, g^{u_n}$ образуют базис в пространстве сдвигов функции g, то для любого u из G сдвиг g^u можно представить в виде $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i g^{u_i}$, и потому

$$(T_h g)^u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T_h(g^{u_i}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (T_h g)^{u_i}.$$

Отсюда следует, что пространство сдвигов функции $T_h g$ конечномерно. Таким образом, $T_h g$ — конечномерная функция, ч. т. д.

В случае бикомпактной абелевой группы теорема 4 может быть до некоторой степени усилена.

5. Определение. Если G — абелева группа, то ее *характером* называется комплекснозначная функция χ, определенная на G и такая, что $\chi(e) = 1$ и $\chi(st) = \chi(s)\chi(t)$ для всех s, t из G.

6. Теорема. *Пусть G — бикомпактная абелева группа, Σ — σ-алгебра ее борелевских подмножеств, а μ — мера Хаара на Σ. Тогда множество непрерывных характеров*[1]) *фундаментально как в $C(G)$, так и в $L_2(G, \Sigma, \mu)$.*

Доказательство. В силу теоремы 4 достаточно доказать, что каждая непрерывная конечномерная функция f является линейной комбинацией непрерывных характеров. Для каждого $s \in G$ определим на L_2 оператор R_s соотношением $R_s g = g^s$. Поскольку группа G абелева, легко видеть, что $\{R_s \mid s \in G\}$ представляет собой коммутативное семейство унитарных операторов, определенных на L_2. По предположению, подпространство $\mathfrak{F}$, порожденное сдвигами функции f, конечномерно и инвариантно относительно каждого из операторов R_s.

Пусть $\mathfrak{F}_1 \neq \{0\}$ — подпространство в $\mathfrak{F}$, инвариантное относительно каждого из операторов R_s и не содержащее меньших нетривиальных инвариантных подпространств. Покажем, что тогда подпространство $\mathfrak{F}_1$ одномерно. Пусть s фиксировано, а $\lambda(s)$ — собственное значение оператора R_s, рассматриваемого на пространстве $\mathfrak{F}_1$. Пусть $\mathfrak{H} = \{h \in \mathfrak{F}_1 \mid R_s h = \lambda(s) h\}$; тогда, поскольку $R_s(R_t h) = \lambda(s)(R_t h)$, ясно, что $\mathfrak{H}$ инвариантно относительно множества операторов $\{R_t\}$, а так как $\mathfrak{H} \neq \{0\}$, то отсюда следует, что $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}_1$. Это означает, что в $\mathfrak{F}_1$ произвольный оператор R_s кратен единичному оператору, а именно $R_s = \lambda(s) I_{\mathfrak{F}_1}$; поэтому размерность пространства $\mathfrak{F}_1$ должна быть равна 1, так как в противном случае в $\mathfrak{F}_1$ имелись бы нетривиальные инвариантные подпространства. Поскольку операторы R_s унитарны, они оставляют инвариантным также подпространство $\mathfrak{F} \ominus \mathfrak{F}_1$, и мы можем, повторяя проведенные выше рассуждения, разложить $\mathfrak{F}$

---

[1]) Если $\chi(\cdot)$ — непрерывный характер бикомпактной абелевой группы G, то $|\chi(s)| = 1$, $s \in G$. Действительно, в этом случае χ принадлежит $L_2(G, \Sigma, \mu)$ и является для любого $s \in G$ собственной функцией *унитарного* оператора сдвига $R_s : g \longrightarrow g^s$ с собственным значением $\chi(s)$, и потому $|\chi(s)| = 1$. Это обстоятельство используется, в частности, при доказательстве леммы 2.3. В случае небикомпактной абелевой группы требование $|\chi(s)| = 1$ обычно включают в определение характера. —*Прим. перев.*

в прямую сумму $\mathfrak{F}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{F}_n$ нетривиальных ортогональных одномерных инвариантных подпространств. Кроме того, на каждом из подпространств $\mathfrak{F}_i$ каждый оператор R_s действует как умножение на скаляр $\lambda_i(s)$, т. е.

$$f_i(ts) = \lambda_i(s) f_i(t), \qquad f_i \in \mathfrak{F}_i.$$

Отсюда следует, что если $f_i \neq 0$, то f_i нигде не обращается в нуль, и потому, подставляя в предыдущее равенство вместо t единицу e группы G, мы видим, что функция λ_i принадлежит $\mathfrak{F}_i$ и потому непрерывна и что $\lambda_i(st) = \lambda_i(s)\lambda_i(t)$. Кроме того, полагая в том же равенстве еще и $s = e$, получаем, что $\lambda_i(e) = 1$. Таким образом, $\lambda_i(s)$ — непрерывный характер группы G. Поскольку $\mathfrak{F}_i$ одномерно, оно состоит из скалярных кратных характера λ_i. Итак, каждая функция из $\mathfrak{F}$ (и, в частности, функция f) является конечной линейной комбинацией непрерывных характеров группы G, ч. т. д.

2. Почти периодические функции

Изложенная в предыдущем параграфе теория бикомпактных групп имеет интересное и важное приложение к изучению пространства AP почти периодических функций на вещественной прямой $R = (-\infty, \infty)$. В настоящем параграфе эта теория будет применена для доказательства основного результата Г. Бора о почти периодических функциях. Ранее было показано (IV.7.6), что существует такое бикомпактное хаусдорфово пространство S, что AP изометрически *-изоморфно пространству $C(S)$. В действительности R может быть вложено в S в качестве всюду плотного подмножества, причем таким образом, что каждая функция f из AP допускает единственное продолжение до функции f_1 из $C(S)$. Это вытекает из следствия IV.6.19 и замечания, состоящего в том, что периодические (а значит, и почти периодические) функции различают точки из R. Кроме того, соответствие $f \longleftrightarrow f_1$ является изометрическим и алгебраическим изоморфизмом между AP и $C(S)$. Таким образом, AP можно рассматривать как семейство сужений всевозможных функций из $C(S)$ на всюду плотное в S множество R.

Следующий шаг состоит в доказательстве того, что групповая структура множества R может быть продолжена по непрерывности на S таким образом, что S становится бикомпактной абелевой топологической группой. Чтобы доказать это, мы воспользуемся следующей леммой.

1. Лемма. *Пусть $f \in AP$ и $\varepsilon > 0$. Тогда найдутся такое число $\delta > 0$ и такое конечное множество функций $h_1, \ldots, h_m$ из AP,*

что если x_1, x_2, y_1, y_2 — *какие-нибудь числа, для которых*

[*] $$|h_i(x_1)-h_i(x_2)|<\delta, \quad |h_i(y_1)-h_i(y_2)|<\delta$$

при $i=1, \ldots, m$, *то*

$$|f(x_1+y_1)-f(x_2+y_2)|<\varepsilon.$$

Доказательство. Пусть B — множество всех функций g вида $g(x)=f(x+u)$, где $-\infty<u<\infty$. Тогда B содержится в некотором бикомпактном подмножестве пространства AP (см. IV.7.2). Следовательно (I.6.15), в AP существует такое конечное множество функций $h_1, \ldots, h_m$, что для каждой функции g из B найдется такая функция h_i, что $|g-h_i|<\varepsilon/8$. Предположим, что соотношения [*] выполняются при $\delta=\varepsilon/4$. Тогда для любой функции g из B имеем

$$|g(x_1)-g(x_2)|\leqslant|g(x_1)-h_i(x_1)|+|h_i(x_1)-h_i(x_2)|+$$
$$+|h_i(x_2)-g(x_2)|<\frac{\varepsilon}{8}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{8}=\frac{\varepsilon}{2}.$$

Аналогично $|g'(y_1)-g'(y_2)|<\varepsilon/2$ для любой функции g' из B. Возьмем теперь в качестве g и g' функции из B, определенные соотношениями

$$g(x)=f(x+y_2), \quad g'(x)=f(x+x_1), \quad x\in R.$$

Так как $g(x_1)=f(x_1+y_2)=g'(y_2)$, то

$$|f(x_1+y_1)-f(x_2+y_2)|\leqslant|g'(y_1)-g'(y_2)|+$$
$$+|g(x_1)-g(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

что доказывает лемму.

2. Теорема. *Прямая R может быть таким образом вложена в качестве всюду плотной подгруппы в бикомпактную абелеву топологическую группу S, что AP оказывается семейством сужений $f\,|\,R$ на R всевозможных функций f из $C(S)$. При этом отображение $f\to f\,|\,R$ является изометрическим *-изоморфизмом $C(S)$ на AP. Группа S называется боровским бикомпактным расширением вещественной прямой.*

Доказательство. Справедливость всех утверждений этой теоремы, за исключением того, что S является абелевой топологической группой относительно операции, совпадающей на R со сложением, уже была установлена. Пусть s_1 и s_2 — точки из S; определим $s_1\oplus s_2$. Обозначим через $\mathcal{U}_1$ совокупность всех окрестностей точки s_1, а через $\mathcal{U}_2$ — совокупность всех окрестностей точки s_2. Положим для $U_i \in \mathcal{U}_i$, $i=1, 2$,

$$W(U_1, U_2) = \overline{(U_1 \cap R) + (U_2 \cap R)},$$

где сумма берется в R, а замыкание в S. Если $V_i \in \mathcal{U}_i$, то $W(U_1, U_2) \cap W(V_1, V_2) \supseteq W(U_1 \cap V_1, U_2 \cap V_2)$, и потому семейство множеств $\mathcal{W} = \{W(U_1, U_2) \mid U_i \in \mathcal{U}_i\}$ является центрированным, т. е. обладает тем свойством, что любое конечное число входящих в него множеств имеет непустое пересечение. Поскольку S бикомпактно, множество $T(s_1, s_2) = \bigcap \mathcal{W}$ не пусто. Покажем, что $T(s_1, s_2)$ содержит только одну точку, которую мы и обозначим $s_1 \oplus s_2$.

Допустим, что $T(s_1, s_2)$ содержит две различные точки t_1, t_2. По теореме Урысона (I.5.2) в $C(S)$ найдется такая неотрицательная функция f, что $f(t_1)=1$, $f(t_2)=0$. Применяя лемму 1 к сужению функции f на R, заключаем, что найдутся такие функции $h_1, \ldots, h_m$ из AP и такое число $\delta > 0$, что если для каких-нибудь четырех вещественных чисел x_1, x_2, y_1, y_2 при $i=1, \ldots, m$ выполняются неравенства $|h_i(x_1) - h_i(x_2)| < \delta$ и $|h_i(y_1) - h_i(y_2)| < \delta$, то $|f(x_1+y_1) - f(x_2+y_2)| < 1/2$. Каждая из функций h_i имеет единственное непрерывное продолжение на пространство S; мы обозначим это продолжение той же самой буквой h_i. Следовательно, найдутся такие окрестности U_1 и U_2 точек s_1 и s_2 соответственно, что $|h_i(s_1) - h_i(s)| < \delta/2$ для каждого s из U_1 и $|h_i(s_2) - h_i(s)| < \delta/2$ для каждого s из U_2 $(i=1, \ldots, m)$. Выберем x_1, x_2 в $U_1 \cap R$, а y_1, y_2 — в $U_2 \cap R$. Тогда $|h_i(x_1) - h_i(x_2)| < \delta$ и $|h_i(y_1) - h_i(y_2)| < \delta$ при $i=1, \ldots, m$, откуда получаем, что $|f(x_1+y_1) - f(x_2+y_2)| < 1/2$. Это показывает, что если u_1, u_2 принадлежат множеству $(U_1 \cap R) + (U_2 \cap R)$, то $|f(u_1) - f(u_2)| < 1/2$. В силу непрерывности f мы можем утверждать, что если u_1, u_2 лежат в $W(U_1, U_2)$, то $|f(u_1) - f(u_2)| \leqslant 1/2$. Так как t_1, t_2 принадлежат $W(U_1, U_2)$ при любом выборе U_1 и U_2, то

$$1 = |f(t_1) - f(t_2)| \leqslant \frac{1}{2},$$

что невозможно. Полученное противоречие доказывает, что $T(s_1, s_2)$ состоит в точности из одной точки, которую мы обозначим $s_1 \oplus s_2$.

Ясно, что если s_1 и s_2 принадлежат R, то $s_1 \oplus s_2 = s_1 + s_2$, так что операция $\oplus$ представляет собой распространение операции сложения с R на все S. Для того чтобы доказать, что операция $\oplus$ непрерывна на $S \times S$, рассмотрим какую-нибудь окрестность V точки $s_1 \oplus s_2$. Если для любых U_1 из $\mathcal{U}_1$ и U_2 из $\mathcal{U}_2$ множество $W(U_1, U_2)$ пересекается с дополнением V' окрестности V, то семейство множеств $\{V' \cap W(U_1, U_2) \mid U_i \in \mathcal{U}_i\}$ является центрированным и поэтому имеет непустое пересечение, т. е. $V' \cap T(s_1, s_2) = V' \cap (\cap W) \neq \varnothing$. Выше мы видели, что $T(s_1, s_2)$ содержит лишь единственную точку $s_1 \oplus s_2$, и потому сделанное предположение приводит к противоречию. Таким образом, найдутся такие окрестности $U_i \in \mathfrak{U}_i$, что $W(U_1, U_2) \subseteq V$. Если теперь $u_i \in U_i$, $i = 1, 2$, то

$$\{u_1 \oplus u_2\} = T(u_1, u_2) \subseteq W(U_1, U_2);$$

следовательно, $u_1 \oplus u_2 \in V$. Этим доказана непрерывность операции $\oplus$. Отсюда, из того что R всюду плотно в S и что операция $\oplus$ совпадает на R с обычным сложением, мы немедленно заключаем, что $s \oplus 0 = s$, $s_1 \oplus s_2 = s_2 \oplus s_1$ и $s_1 \oplus (s_2 \oplus s_3) = (s_1 \oplus s_2) \oplus s_3$.

Осталось показать, что для каждого s из S в S существует обратный относительно операции $\oplus$ элемент. Рассмотрим отображение H: $AP \to AP$, определенное соотношением $(Hg)(x) = g(-x)$, $x \in R$. Ясно, что H является алгебраическим изоморфизмом AP на себя, перестановочным с операцией перехода к комплексно сопряженной функции, т. е. $H(\overline{g}) = \overline{Hg}$, $g \in AP$. Так как AP эквивалентно $C(S)$, то отображение H можно рассматривать как оператор на $C(S)$. По теореме IV.6.26 существует такой гомеоморфизм h пространства S на себя, что $(Hf)(s) = f(h(s))$, $f \in C(S)$, $s \in S$. В частности, если $s \in R$, то $h(s) = -s$, так что $s \oplus h(s) = 0$ для всех s, принадлежащих всюду плотному в S множеству R, а потому и для всех s из S. Следовательно, $h(s)$ является обратным к элементу s, и S представляет собой топологическую группу, ч. т. д.

3. Лемма. *Непрерывные характеры бикомпактной абелевой группы S представляют собой продолжения на S функций вида $e^{i\lambda x}$, $x \in R$, где λ — произвольное вещественное число.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что если функция χ имеет вид $\chi(x) = e^{i\lambda x}$, $x \in R$, то, поскольку она периодична, она, a fortiori, является почти периодической и допускает непрерывное продолжение χ_1 на S. Кроме того, так как $\chi(x+y) = \chi(x)\chi(y)$ и $\chi(0) = 1$ для всех $x, y \in R$, то эти тождества имеют место и для продолжения χ_1; итак, χ_1 является непрерывным характером группы S.

Обратно, если χ_1 — непрерывный характер группы S, то обозначим через χ его сужение на R. Тогда $\chi(0) = 1$, $\chi(x+y) = \chi(x)\chi(y)$, $|\chi(x)| = 1$,[1] $x, y \in R$, и функция χ непрерывна на R.

[1]) См. сноску на стр. 100.—*Прим. перев.*

Пусть число $\alpha > 0$ таково, что $|\chi(x)-1| < 1$ при $|x| \leqslant \alpha$, и пусть $\chi(\alpha) = e^{i\theta}$, $|\theta| < \pi/3$. Так как $\chi(\alpha) = [\chi(\alpha/2)]^2$, то $\chi(\alpha/2) = e^{i\theta/2}$, и по индукции $\chi(\alpha/2^n) = e^{i\theta/2^n}$. Отсюда следует, что если $r = 2^{-n}m$, где m и n — целые числа, то $\chi(r\alpha) = e^{i\theta r}$. По непрерывности это соотношение справедливо для всех вещественных чисел r. Полагая $\lambda = \theta/\alpha$, имеем $\chi(x) = e^{i\lambda x}$, $x \in R$, как и утверждалось.

Имея в своем распоряжении эти предварительные результаты, мы в состоянии теперь доказать основную теорему относительно почти периодических функций на прямой.

4. Теорема (*Г. Бор*). *Непрерывная функция на прямой $R(-\infty, \infty)$ тогда и только тогда является почти периодической, когда она может быть равномерно аппроксимирована конечными линейными комбинациями функций, принадлежащих семейству $\{e^{i\lambda x} \mid \lambda \in R\}$.*

Доказательство. Так как AP является B-пространством (IV.7.5), то ясно, что семейство функций, принадлежащих замкнутому линейному многообразию, порожденному периодическими функциями, содержится в AP. С другой стороны, было показано (теорема 2), что AP изометрически изоморфно пространству $C(S)$, где S — бикомпактная абелева группа, а также (лемма 3), что непрерывные характеры группы S имеют вид $e^{i\lambda x}$. По теореме 1.6 множество непрерывных характеров фундаментально в $C(S)$; следовательно, их сужения на R образуют фундаментальное множество в пространстве AP, ч. т. д.

Из существования изометрического изоморфизма между пространствами AP и $C(S)$ и из теоремы Рисса о представлении линейных функционалов (IV.6.3) мы можем вывести следующий результат.

5. Теорема. *Пространство AP^* изометрически изоморфно пространству $rca(S)$ всех регулярных счетно аддитивных мер, определенных на борелевских подмножествах боровского бикомпактного расширения S вещественной прямой R. Изоморфизм $x^* \to \mu_1 \in rca(S)$ задается формулой*

$$x^*f = \int_S f_1(s)\,\mu_1(ds), \qquad f \in AP,$$

где f_1 — однозначно определенное продолжение на пространство S функции f из AP.

3. Алгебры со сверткой

В гл. IX мы видели, что некоторые функциональные пространства являются B-алгебрами относительно поточечного умножения; таким образом, теория таких алгебр может быть непосредственно применена к этим пространствам. Однако если L_1 обозначает пространство функций на вещественной прямой $(-\infty, \infty)$, интегрируемых по Лебегу, то L_1 не является B-алгеброй относительно поточечного умножения. Имеет место важная и полезная теорема, состоящая в том, что в пространстве L_1 можно определить умножение так, что после присоединения единицы L_1 станет B-алгеброй, к которой применимы результаты гл. IX. В качестве «произведения» двух функций f и g из L_1 мы возьмем их свертку $f*g$, задав ее соотношением

$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\,g(y)\,dy, \qquad -\infty<x<\infty.$$

Мы увидим, что изучение алгебры L_1 со сверткой в качестве умножения тесно связано с преобразованием Фурье.

Вместо того чтобы ограничить наше рассмотрение случаем аддитивной группы вещественных чисел, мы изучим общий случай локально бикомпактной абелевой группы, которую обозначим R. Будем предполагать, что группа R является σ-бикомпактной, т. е. представляет собой объединение счетного числа бикомпактных множеств. Для каждой такой группы существует неотрицательная счетно аддитивная мера, которая определена на σ-алгебре борелевских множеств Σ, конечна на бикомпактных множествах, положительна или бесконечна на открытых множествах, инвариантна относительно сдвигов, т. е. $\lambda(x+E)=\lambda(E)$ для E из Σ и x из R, и обладает свойством регулярности: $\sup \lambda(F)=\lambda(E)=\inf \lambda(G)$ для E из Σ, где F пробегает всевозможные замкнутые подмножества множества E, а G — всевозможные открытые множества, содержащие E. Такая мера единственна с точностью до положительного множителя и называется *мерой Хаара*. В случае $R=(-\infty, \infty)$ мера Хаара (после перенормировки, если она необходима) совпадает с мерой Лебега; для бикомпактной группы существование и единственность меры Хаара были доказаны в теореме 1.1. Читатель, не знакомый с мерой Хаара, может обратиться за справкой к примечаниям, помещенным в § 11 под заголовком *Алгебры со сверткой*. Он может также при первом чтении считать, что R — аддитивная группа вещественных чисел. Однако читатель, который хорошо знаком с теорией меры Хаара, естественно, заметит, что приведенные ниже доказательства без изменения применимы в общем случае локально бикомпактной σ-бикомпактной абелевой группы. Мы обращаем внимание такого читателя на то, что, начиная с доказательства леммы 3 и всюду далее в этом параграфе, мы считаем, что группа R *не дискретна*. Дискретный случай может быть без всякого труда изучен отдельно; некоторые замечания на этот счет имеются в примечаниях.

Итак, мы изучаем недискретную локально бикомпактную и σ-бикомпактную абелеву группу R; при этом мы пользуемся элементарными свойствами ее меры Хаара, хорошо известными в случае меры Лебега на прямой. Если интегрирование производится по мере Хаара, что имеет место в большинстве случаев, мы пишем dx вместо $\lambda(dx)$. Пространство $L_p(R, \Sigma, \lambda)$ будем обозначать через $L_p(R)$.

Начнем изложение с формулировки и доказательства некоторых основных свойств свертки.

1. Лемма. (a) *Функция $f(x-y)$ является $(\lambda\times\lambda)$-измеримой, если λ-измерима функция f.*

b) *При $f, g\in L_1(R)$ функция $f(x-y)g(y)$ интегрируема по y для почти всех x, а свертка $f*g$, определенная формулой*

$$(f*g)(x)=\int\limits_R f(x-y)g(y)\,dy,$$

принадлежит $L_1(R)$ и удовлетворяет неравенству

$$|f*g|_1\leqslant|f|_1|g|_1.$$

Линейное пространство $L_1(R)$ со сверткой в качестве умножения является коммутативной и ассоциативной алгеброй.

(c) *Для $f\in L_1(R)$ и $g\in L_2(R)$ свертка $\int\limits_R f(x-y)\,g(y)\,dy$ существует для почти всех x и принадлежит $L_2(R)$, причем $|f*g|_2\leqslant|f|_1|g|_2$. Произведение $f*g$ линейно по каждому из сомножителей и удовлетворяет равенству $h*(f*g)=(h*f)*g$ для h, f из $L_1(R)$ и g из $L_2(R)$. Если $f\in L_1(R)$, то гильбертовым сопряженным оператором к ограниченному линейному оператору $g\to f*g$ в $L_2(R)$ является оператор $g\to\tilde f*g$, где $\tilde f(x)=\overline{f(-x)}$.*

(d) *Если $f\in L_1(R)$ и $g\in L_\infty(R)$, то интеграл, задающий свертку $f*g$, существует для всех x и определяет функцию из $C(R)$ с нормой, не превосходящей $|f|_1|g|_\infty$.*

(e) *Если функции f и g принадлежат $L_2(R)$, то интеграл, представляющий их свертку, существует для всех x и определяет функцию из $C(R)$ с нормой, не превосходящей $|f|_2|g|_2$.*

(f) *Если $f\in L_p$, $1\leqslant p<\infty$, и если функция f_y определена соотношением $f_y(x)=f(x-y)$, $x\in R$, то отображение $y\to f_y$ группы R в пространство $L_p(R)$ непрерывно.*

Доказательство. Утверждение (a) было доказано в лемме VIII.1.24 для случая, когда R — аддитивная группа вещественных чисел. Общий случай будет рассмотрен в примечаниях в конце главы.

Поскольку подинтегральное выражение в интеграле, определяющем свертку, измеримо, мы, применяя теорему Тонелли (III.11.14), видим, что

$$\int_{R\times R} |f(x-y)g(y)|\,d(x\times y)=$$

$$=\int_R |g(y)|\left\{\int_R |f(x-y)|\,dx\right\}dy=|f|_1|g|_1;$$

таким образом, функция $f(x-y)g(y)$ является $(\lambda\times\lambda)$-интегрируемой. Тогда первое утверждение пункта (b) следует из теоремы Фубини (III.11.9). Остальные утверждения этого пункта доказываются при помощи простой замены переменных; это доказательство мы здесь опустим, так как оно встречалось уже раньше (см. лемму VIII.1.25).

Докажем (f). Если $1\leqslant p<\infty$, то из следствия III.3.8 и регулярности меры λ вытекает, что множество непрерывных финитных функций (т. е. таких, которые обращаются в нуль вне некоторого бикомпактного множества) плотно в $L_p(R)$. Пусть $f\in L_p(R)$, и пусть k — такая непрерывная финитная функция, что $|f-k|_p<\varepsilon$. Так как функция k равномерно непрерывна, то $|k_z-k_y|_p<\varepsilon$, если точка z достаточно близка к y. Следовательно,

$$|f_z-f_y|_p\leqslant|f_z-k_z|_p+|k_z-k_y|_p+|k_y-f_y|_p<3\varepsilon,$$

что и требовалось.

Утверждение (d) легко вывести из (f). В самом деле, поскольку $y\to f_y$ является непрерывным отображением R в $L_1(R)$, интеграл $\int f(x-y)g(y)\,dy$ при $g\in L_\infty(R)$ представляет собой непрерывную функцию от x [1]) и

$$\left|\int f(x-y)g(y)\,dy\right|\leqslant|f|_1|g|_\infty.$$

Пункт (e) доказывается аналогично.

[1]) Нужно воспользоваться вытекающей из предыдущего непрерывностью отображения $x\to f'_x=f(x-y)$. — *Прим. перев.*

Чтобы доказать (c), допустим, что $f \in L_1(R)$ и g, $h \in L_2(R)$. Из (e) вытекает, что интеграл

$$\int\limits_R |g(x-y)\overline{h(x)}|\,dx$$

является непрерывной функцией от y и ограничен величиной $|g|_2|h|_2$. Следовательно, по теореме Тонелли

$$\int\limits_{R\times R} |f(y)g(x-y)\overline{h(x)}|\,d(x\times y) =$$
$$= \int\limits_R |f(y)| \left\{ \int\limits_R |g(x-y)\overline{h(x)}|\,dx \right\} dy \leqslant |f|_1|g|_2|h|_2,$$

т. е. двойной интеграл, стоящий в левой части, конечен. Тогда в силу теоремы Фубини

$$|(f*g,\, h)| = \left| \int\limits_R \left\{ \int\limits_R f(x-y)g(y)\,dy \right\} \overline{h(x)}\,dx \right| =$$
$$= \left| \int\limits_R \left\{ \int\limits_R f(y)g(x-y)\,dy \right\} \overline{h(x)}\,dx \right| \leqslant |f|_1|g|_2|h|_2$$

для всех h из $L_2(R)$. Этим доказано, что $f*g$ принадлежит $L_2(R)$ и что $|f*g|_2 \leqslant |f|_1|g|_2$. Второе предложение пункта (c) следует из соответствующего утверждения пункта (b) и того факта, что $L_1(R) \cap L_2(R)$ всюду плотно в $L_2(R)$. Доказательство последнего утверждения пункта (c) сводится к проверке того, что $(f*g,\, h) = (g,\, \tilde{f}*h)$, т. е.

$$\int\limits_R \left\{ \int\limits_R f(x-y)g(y)\,dy \right\} \overline{h(x)}\,dx = \int\limits_R g(y) \left\{ \overline{\int\limits_R \tilde{f}(y-x)h(x)\,dx} \right\} dy.$$

Но это равенство следует из теоремы Фубини, утверждающей, что оба выписанных выше интеграла совпадают с двойным интегралом

$$\int\limits_{R\times R} f(x-y)g(y)\overline{h(x)}\,d(x\times y),$$

в существовании которого мы уже убедились. Лемма доказана.

Из пунктов (b) и (e) леммы 1 вытекает следующее утверждение.

2. Следствие. *Линейное пространство $L_1(R)$ со сверткой в качестве умножения удовлетворяет всем аксиомам коммутативной B-алгебры, за исключением, быть может, одной, посту-*

лирующей существование единицы. Кроме того, унарное отображение $f \to \tilde{f}$ алгебры $L_1(R)$ в себя является инволюцией, т. е.

$$\widetilde{(f+g)} = \tilde{f} + \tilde{g}, \qquad \widetilde{(fg)} = \tilde{g}\tilde{f},$$
$$\widetilde{(\alpha f)} = \bar{\alpha}\tilde{f}, \qquad \tilde{\tilde{f}} = f.$$

В дальнейшем мы присоединим к алгебре $L_1(R)$ единицу, превратив ее, таким образом, в коммутативную B-алгебру. Предыдущее следствие показывает, что расширенная алгебра $L_1(R)$ является коммутативной B-алгеброй с инволюцией. Однако она не является B^*-алгеброй, поскольку равенство $|\tilde{f} * f| = |f|^2$ не выполняется.

3. Лемма. *Пусть для $f \in L_1(R)$ оператор $T(f)$, действующий в $L_2(R)$, определен равенством*

$$T(f)\, g = f * g, \qquad g \in L_2(R).$$

Тогда отображение $f \to T(f)$ представляет собой непрерывный изоморфизм алгебры $L_1(R)$ на некоторую коммутативную алгебру $\mathfrak{A}_0$ операторов в гильбертовом пространстве $L_2(R)$, причем

$$T(f)^* = T(\tilde{f}), \qquad |T(f)| \leqslant |f|_1.$$

Кроме того, замыкание алгебры $\mathfrak{A}_0$ в равномерной операторной топологии не содержит единичного оператора.

Доказательство. Сравнение этого предложения с леммой 1 (с) показывает, что достаточно доказать лишь последнее утверждение и тот факт, что $T(f) = 0$ влечет $f = 0$.

В следующем ниже доказательстве впервые используется подразумеваемое, но не высказанное явно в формулировке леммы предположение о том, что группа R не дискретна. Допустим сначала, что замыкание алгебры $\mathfrak{A}_0$ в равномерной операторной топологии содержит единичный оператор, так что в $L_1(R)$ существует такая функция f, что $|f * g - g|_2 < (1/2)|g|_2$ для всех g из $L_2(R)$. Поскольку $L_1(R) \cap L_\infty(R)$ всюду плотно в $L_1(R)$, мы можем, без ограничения общности, предположить, что f принадлежит $L_1(R) \cap L_\infty(R)$. Так как мера одноточечного множества $\{0\}$ равна нулю, то из регулярности меры λ и того факта, что мера всякого открытого множества положительна, вытекает, что в R найдутся такие окрестности U_n, $n = 1, 2, \ldots$, точки 0, что $0 \neq \lambda(U_n) < 1/n^2$. Положим $g_n(x) = (\lambda(U_n))^{-1/2}$ при $x \in U_n$ и $g_n(x) = 0$ в остальных точках. Тогда функция g_n принадлежит

$L_1(R) \cap L_2(R)$, причем $|g_n|_2 = 1$, $|g_n|_1 \leqslant 1/n$. Следовательно,

$$\frac{1}{4} > |g_n - f * g_n|_2^2 = \int\limits_R |g_n(x) - (f * g_n)(x)|^2 \, dx \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{U_n} |g_n(x) - (f * g_n)(x)|^2 \, dx \geqslant$$

$$\geqslant \inf_{x \in U_n} \{|g_n(x) - (f * g_n)(x)|^2\} \lambda(U_n).$$

По лемме 1 (d) $|(f * g_n)(x)| \leqslant |f|_\infty n^{-1}$ для любого x из R, и потому из предыдущей цепочки неравенств мы заключаем, что

$$\frac{1}{4} > \{(\lambda(U_n))^{-1/2} - |f|_\infty n^{-1}\}^2 \lambda(U_n).$$

Поскольку правая часть стремится к 1, получаем противоречие. Таким образом, замыкание алгебры $\mathfrak{A}_0$ в равномерной операторной топологии не содержит единичного оператора.

Допустим, что $T(f) = 0$ для некоторой функции f из $L_1(R)$, так что для каждой функции g из $L_2(R)$ имеем $(f * g)(x) = 0$ для почти всех x. Пусть h — какая-нибудь функция из $L_\infty(R)$, обращающаяся в 0 вне некоторого бикомпактного множества C; тогда h принадлежит $L_1(R) \cap L_2(R)$. Так как $h \in L_2(R)$, то $(f * h)(x) = 0$ почти всюду, а поскольку $h \in L_\infty(R)$, из леммы 1 (d) вытекает, что функция $f * h$ непрерывна. Следовательно,

$$0 = (f * h)(0) = \int\limits_C f(-y) h(y) \, dy.$$

Далее, функция h, определенная соотношениями $h(y) = 0$, $y \notin C$, и $h(y) = |f(-y)| (f(-y))^{-1}$, $y \in C$, принадлежит, очевидно, $L_\infty(R)$. Приведенное выше рассуждение позволяет нам заключить, что

$$\int\limits_C |f(x)| \, dx = 0$$

для любого бикомпактного множества C; итак, $|f|_1 = 0$. Это доказывает, что отображение $f \to T(f)$ взаимно однозначно, ч. т. д.

Сейчас мы введем некоторые определения и обозначения, которые будут играть важную роль на протяжении оставшейся части этого параграфа. Поскольку многие из последующих результатов будут сформулированы в терминах, введенных в следующем абзаце, читатель должен изучить его особенно тщательно

В оставшейся части данного параграфа $\mathfrak{A}$ будет обозначать B^*-алгебру операторов $\overline{\mathfrak{A}_0} \oplus \{\alpha I\}$, где I — тождественный оператор в гильбертовом пространстве $L_2(R)$, а $\overline{\mathfrak{A}}_0$ — замыкание алгебры $\mathfrak{A}_0$ в равномерной операторной топологии. Буквой $\mathcal{M}$ обозначим пространство максимальных идеалов алгебры $\mathfrak{A}$, а τ: $\mathfrak{A} \to C(\mathcal{M})$ будет обозначать изометрический изоморфизм алгебры $\mathfrak{A}$ на $C(\mathcal{M})$, существование которого утверждается в следствии IX.3.8. Для f из $L_1(R)$ мы обычно пишем τf вместо $\tau(Tf)$. Буква E будет обозначать спектральную меру, определенную на борелевских подмножествах пространства $\mathcal{M}$, отвечающую в силу теоремы X.2.1 изоморфизму τ. Таким образом, для f из $L_1(R)$ и g из $L_2(R)$ имеем

$$f * g = \int_{\mathcal{M}} (\tau f)(m) E(dm) g.$$

Так как $h(I) = 1$ для каждого (комплекснозначного) нетривиального мультипликативного линейного функционала h и так как всякий такой функционал, согласно IX.2.3, непрерывен, то любой мультипликативный линейный функционал на $\mathfrak{A}$ полностью определяется своим сужением на $\mathfrak{A}_0$. Таким образом, в $\mathcal{M}$ существует единственная точка p_∞, для которой $(\tau f)(p_\infty) = 0$ при всех f из $L_1(R)$; эта точка p_∞ соответствует мультипликативному линейному функционалу h, определенному соотношениями $h(f) = 0$ при $f \in \overline{\mathfrak{A}}_0$ и $h(I) = 1$. Для любой другой точки p из $\mathcal{M}$ в $L_1(R)$ найдется такая функция f, что $(\tau f)(p) \neq 0$. Точку p_∞ мы впредь будем называть бесконечно удаленной точкой пространства $\mathcal{M}$. Для удобства положим еще $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M} - \{p_\infty\}$.

4. Лемма. *В обозначениях, введенных выше, мы имеем* $E(\{p_\infty\}) = 0$.

Доказательство. Пусть $g = E(\{p_\infty\}) g$, так что для борелевского множества δ, не содержащего точки p_∞, мы имеем $E(\delta) g = 0$ и, таким образом, для f из $L_1(R)$

$$f * g = \int_{\mathcal{M}} (\tau f)(m) E(dm) g = \int_{\{p_\infty\}} (\tau f)(m) E(dm) g.$$

Так как $(\tau f)(p_\infty) = 0$ для всех f из $L_1(R)$, то $f * g = 0$ для любой функции f из $L_1(R)$. Если f принадлежит $L_1(R) \cap L_2(R)$, то функция $f * g$ непрерывна (см. лемму 1 (e)), так что

$$0 = (f * g)(0) = \int_R f(-y) g(y) dy, \quad f \in L_1(R) \cap L_2(R).$$

Так как $L_1(R) \cap L_2(R)$ всюду плотно в $L_2(R)$, то $(g, h) = 0$ для всех h из $L_2(R)$. Таким образом, $g = 0$, ч. т. д.

5. Лемма. *Если e — такое борелевское подмножество пространства $\mathcal{M}$, что $\bar{e}$ не содержит p_∞, то оператор $E(e)$ огра-*

ничен не только как отображение $L_2(R)$ в $L_2(R)$, но и как отображение $L_2(R)$ в $C(R)$.

Доказательство. Поскольку $L_1(R) \cap L_2(R)$ является всюду плотным линейным подпространством в $L_1(R)$, для каждой точки p из $\bar{e}$ можно выбрать в $L_1(R) \cap L_2(R)$ такую функцию f, что $(\tau f)(p) = 2$. Так как по лемме 1 функция $f * \tilde{f}$ принадлежит $L_1(R) \cap L_2(R)$ и

$$(\tau(f * \tilde{f}))(m) = (\tau(T(f * \tilde{f}))(m) =$$
$$= (\tau(T(f)T(f)^*))(m) = |(\tau f)(m)|^2,$$

то можно считать, что функция τf неотрицательна на $\mathscr{M}$. Так как $(\tau f)(p) = 2$, то найдется такая окрестность $N(p)$ точки p, что $(\tau f)(m) > 1$ для всех m из $N(p)$. Поскольку множество $\bar{e}$ бикомпактно, существует конечный набор таких окрестностей $N(p_1), \ldots, N(p_n)$, покрывающий $\bar{e}$, причем соответствующие функции $f_1, \ldots, f_n$ обладают тем свойством, что для их суммы $g = f_1 + \ldots + f_n$ при всех m из $\mathscr{M}$ справедливо неравенство $(\tau g)(m) \geqslant 1$. Таким образом, $(\tau g)(m)^{-1} \leqslant 1$ на $\mathscr{M}$, и отсюда в силу теоремы X.1.1 следует, что оператор

$$P = \int_e (\tau g)(m)^{-1} E(dm),$$

действующий в $L_2(R)$, ограничен, причем $T(g)P = E(e)$. По лемме 1(e) $T(g)$ является ограниченным оператором из $L_2(R)$ в $C(R)$, а потому таким же является и оператор $E(e)$, ч. т. д.

Ввиду леммы 5 ясно, что для каждого функционала x^* из $C(R)^*$ и каждого борелевского подмножества e пространства $\mathscr{M}$, замыкание которого не содержит точки p_∞, скаляр $x^*E(e)g$ линейно и непрерывно зависит от функции g из $L_2(R)$. Тогда, согласно теореме IV.4.5, каждый функционал x^* из $C(R)^*$ единственным образом определяет в $L_2(R)$ такую функцию h, что $x^*E(e)g = (g, h)$ для всех g из $L_2(R)$. Это замечание в применении к функционалу δ из $C(R)^*$, заданному равенством

$$\delta f = f(0), \qquad f \in C(R),$$

мы используем в следующей лемме.

6. Лемма. *Существует единственная неотрицательная регулярная мера μ, определенная на семействе $\mathscr{B}$ всех борелевских подмножеств пространства $\mathscr{M}_0$ и обладающая следующими свойствами:*

(I) μ *конечна на бикомпактных множествах;*

(II) *если* $\mu(e) < \infty$, *то* e *содержится в счетном объединении бикомпактных множеств из* $\mathscr{M}_0$;

(III) μ *положительна на непустых открытых множествах*;

(IV) *для всякого борелевского множества* e, *для которого* $p_\infty \notin \bar{e}$, *справедливо равенство* $\mu(e) = |\psi(e)|^2$, *где* $\psi(e)$ — *функция из* $L_2(R)$, *однозначно определяемая соотношением*

$$\delta E(e)\, g = (g,\ \psi(e)), \qquad g \in L_2(R);$$

через δ *здесь обозначен функционал из* $C(R)^*$, *заданный формулой* $\delta f = f(0)$.

Доказательство. Пусть $\mathscr{B}_0$ состоит из всех таких множеств e из $\mathscr{B}$, для которых $p_\infty \notin \bar{e}$. В замечании, предшествовавшем формулировке леммы 6, было указано, что для всякого e из $\mathscr{B}_0$ в $L_2(R)$ существует единственная функция $\psi(e)$, удовлетворяющая соотношению $\delta E(e)\, g = (g,\ \psi(e))$, $g \in L_2(R)$. Пусть функция множества μ_0 определена на $\mathscr{B}_0$ равенством $\mu_0(e) = |\psi(e)|^2$. Сначала мы покажем, что функция μ_0 счетно аддитивна на $\mathscr{B}_0$, а затем установим, что она допускает продолжение на $\mathscr{B}$, обладающее нужными свойствами.

Если e_1, e_2 принадлежат $\mathscr{B}_0$, то, поскольку оператор $E(e_2)$ самосопряжен (X.2.1), для всех g из $L_2(R)$ мы имеем

$$\begin{aligned}(g,\ E(e_2)\,\psi(e_1)) &= (E(e_2)\, g,\ \psi(e_1)) = \\ = \delta E(e_1)\, E(e_2)\, g &= \delta E(e_1 \cap e_2)\, g = (g,\ \psi(e_1 \cap e_2)).\end{aligned}$$

Следовательно, $E(e_2)\,\psi(e_1) = \psi(e_1 \cap e_2)$; таким образом, $E(e_2)\,\psi(e_2) = \psi(e_2)$, и если e_1 и e_2 не пересекаются, то $E(e_2)\,\psi(e_1) = 0$, т. е. тогда функции $\psi(e_1)$ и $\psi(e_2)$ ортогональны, и

$$\begin{aligned}\psi(e_1 \cup e_2) &= E(e_1 \cup e_2)\,\psi(e_1 \cup e_2) = \\ &= [E(e_1) + E(e_2)]\,\psi(e_1 \cup e_2) = \\ &= E(e_1)\,\psi(e_1 \cup e_2) + E(e_2)\,\psi(e_1 \cup e_2) = \\ &= \psi(e_1) + \psi(e_2),\end{aligned}$$

так что векторнозначная функция $\psi(\cdot)$ аддитивна на $\mathscr{B}_0$. Поэтому если $e_1 \cap e_2 = \varnothing$, то функция множества μ_0 удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned}\mu_0(e_1 \cup e_2) &= (\psi(e_1 \cup e_2),\ \psi(e_1 \cup e_2)) = \\ &= (\psi(e_1) + \psi(e_2),\ \psi(e_1) + \psi(e_2)) = \\ &= (\psi(e_1),\ \psi(e_1)) + (\psi(e_2),\ \psi(e_2)) = \\ &= \mu_0(e_1) + \mu_0(e_2),\end{aligned}$$

т. е. μ_0 аддитивна на $\mathscr{B}_0$.

Чтобы убедиться в том, что функция множества μ_0 счетно аддитивна на $\mathscr{B}_0$, допустим, что e_n, $n \geqslant 1$, — непересекающиеся множества из $\mathscr{B}_0$, объединение которых e также принадлежит $\mathscr{B}_0$. Пусть $r_n = e_n \cup e_{n+1} \cup \ldots$, так что $E(r_n)g \to 0$ для любой функции g из $L_2(R)$, и, согласно лемме 5,

$$(g, \psi(r_n)) = \delta E(e) E(r_n) g \to 0.$$

Это рассуждение показывает, что векторнозначная аддитивная функция множества ψ слабо счетно аддитивна на σ-алгебре, состоящей из всех борелевских подмножеств множества e. В силу теоремы Петтиса (IV.10.1) она счетно аддитивна в сильной топологии, т. е. $|\psi(r_n)|^2 = \mu_0(r_n) \to 0$; этим доказано, что функция множества μ_0 счетно аддитивна на $\mathscr{B}_0$.

Теперь мы продолжим μ_0 до счетно аддитивной функции множества μ, определенной на всем $\mathscr{B}$. Пусть e — множество из $\mathscr{B}$. Если e содержится в объединении возрастающей последовательности $\{e_n\}$ множеств из $\mathscr{B}_0$, то положим

[*] $$\mu(e) = \lim_n \mu_0(ee_n),$$

а в противном случае пусть $\mu(e) = \infty$. Так как функция μ_0 неотрицательна, то последовательность $\{\mu_0(ee_n)\}$ не убывает, так что предел (быть может, бесконечный), определяющий $\mu(e)$, существует. Чтобы убедиться, что он зависит лишь от множества e, а не от выбора последовательности $\{e_n\}$, предположим, что $\{a_n\}$ — другая возрастающая последовательность множеств из $\mathscr{B}_0$, объединение которой содержит e. Пусть $b_n = e_n \cap a_n$. Очевидно, достаточно показать, что $\lim \mu_0(eb_n) = \lim \mu_0(ee_n)$. Поскольку $eb_n \supseteq ee_n$, то $\mu_0(eb_n) \geqslant \mu_0(ee_n)$, так что для того чтобы доказать единственность предела, достаточно показать, что если $\mu_0(eb_n) \geqslant k$ для некоторого n, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое m, что $\mu_0(ee_m) > k - \varepsilon$. Так как $\bigcup ee_m = e$, то $\{ee_m b_n, m \geqslant 1\}$ представляет собой возрастающую последовательность множеств с объединением eb_n. Поскольку функция μ_0 счетно аддитивна на $\mathscr{B}_0$, то $\mu_0(eb_n) = \lim_m \mu_0(ee_m b_n) \geqslant k$, так что для некоторого m справедливы неравенства $\mu_0(ee_m) \geqslant \mu_0(ee_m b_n) > k - \varepsilon$. Это показывает, что наше определение μ на $\mathscr{B}$ корректно.

Докажем теперь счетную аддитивность функции μ. Пусть $\{a_n\}$ — последовательность непересекающихся множеств из $\mathscr{B}$. Ясно, что $\mu(\bigcup a_n) \geqslant \mu(a_n)$, так что если $\mu(a_n) = \infty$ для какого-нибудь n, то справедливость равенства $\mu(\bigcup a_n) = \sum \mu(a_n)$ тривиальна. Поэтому мы можем считать, что $\mu(a_n) < \infty$ для всех n. Следовательно, существует такое счетное семейство возрастающих последовательностей $\{e_{nm}\}$ множеств из $\mathscr{B}_0$, что $a_n \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} e_{nm}$.

Полагая $e_k = \bigcup_{m+n \leqslant k} e_{mn}$, получаем такую возрастающую последовательность $\{e_k\}$ множеств из $\mathscr{B}_0$, что $a = \bigcup a_n \subseteq \bigcup e_k$. Так как последовательность положительных чисел $\mu_0(a_n e_k)$ с ростом k стремится, возрастая, к пределу $\mu(a_n)$, то (см. III.6.17) $\lim_k \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(a_n e_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(a_n)$. Таким образом, поскольку μ_0 счетно аддитивна на $\mathscr{B}_0$, имеем

$$\mu(a) = \lim_k \mu_0(ae_k) = \lim_k \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(a_n e_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(a_n).$$

Этим установлена счетная аддитивность функции μ.

Теперь докажем, что мера μ регулярна. Допустим, что $e \in \mathscr{B}$, $\mu(e) < \infty$ и $\{e_n\}$ — такая последовательность непересекающихся множеств из $\mathscr{B}_0$, что $e = \bigcup e_n$. Пусть задано $\varepsilon > 0$, и пусть N столь велико, что $\sum_{N+1}^{\infty} \mu(e_n) < \varepsilon/2$. Положим $\tilde{e} = \bigcup_1^N e_n$. Тогда $\tilde{e}$ принадлежит $\mathscr{B}_0$, так что $\psi(\tilde{e})$ имеет смысл. Поскольку в силу X.2.1 мера $|E(\cdot)\psi(\tilde{e})|^2 = (E(\cdot)\psi(\tilde{e}), \psi(\tilde{e}))$ для фиксированного $\tilde{e}$ регулярна, мы можем найти в $\tilde{e}$ такое замкнутое, а следовательно, и бикомпактное подмножество d, что

$$|E(d)\psi(\tilde{e})|^2 + \frac{\varepsilon}{2} \geqslant |E(\tilde{e})\psi(\tilde{e})|^2.$$

Как уже было отмечено, $E(e_2)\psi(e_1) = \psi(e_1 \cap e_2)$, так что $\mu_0(d) = |\psi(d)|^2 = |E(d)\psi(\tilde{e})|^2$ и $\mu_0(\tilde{e}) = |\psi(\tilde{e})|^2 = |E(\tilde{e})\psi(\tilde{e})|^2$. Таким образом,

$$\mu(d) + \varepsilon \geqslant \mu(\tilde{e}) + \frac{\varepsilon}{2} \geqslant \mu(e).$$

С другой стороны, поскольку $\mathscr{M}$ бикомпактно, а значит, и нормально, найдется такая последовательность $\{v_n\}$ открытых множеств из $\mathscr{B}_0$, что $e_n \subseteq v_n$. Так как мера $|E(\cdot)\psi(v_n)|^2$ регулярна, то для каждого n найдется такое открытое множество w_n, что $v_n \supseteq w_n \supseteq e_n$ и

$$|E(w_n)\psi(v_n)|^2 = |\psi(w_n)|^2 = \mu_0(w_n) = \mu(w_n) \leqslant \mu(e_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Таким образом, открытое множество $w = \bigcup_{n=1}^{\infty} w_n$ содержит e, причем $\mu(w) \leqslant \mu(e) + \varepsilon$. Следовательно, мера μ регулярна.

Если K — бикомпактное подмножество множества $\mathscr{M}_0$, то по определению $\mu(K) = \mu_0(K) < \infty$. Чтобы закончить доказательство, рассмотрим какое-нибудь непустое открытое подмножество u множества $\mathcal{M}_0$. Поскольку u содержит такое непустое открытое подмножество v множества $\mathcal{M}_0$, что $p_\infty \notin \bar{v}$, мы можем с самого начала считать, что $p_\infty \notin \bar{u}$. Достаточно показать, что в $L_2(R)$ существует такая функция g, что $(E(u)g)(0) \neq 0$. Если это не так, то $h(0)=0$ для каждой функции h из $L_2(R)$, для которой $E(u)h=h$. Так как все операторы S из $\mathfrak{A}$ коммутируют с $E(u)$, то $(Sh)(0)=0$, если $h=E(u)h$. Если, кроме того, f принадлежит $L_1(R) \cap L_2(R)$, то

$$0=[T(\tilde{f})h](0)=(\tilde{f}*h)(0)=\int_R \bar{f}(y)h(y)\,dy=(h,\ f).$$

Поскольку $L_1(R)\cap L_2(R)$ всюду плотно в $L_2(R)$, мы заключаем, что $h=0$, и, следовательно, $E(u)=0$. Пусть теперь F — непрерывная функция на $\mathcal{M}$, обращающаяся в 0 на дополнении множества u, но не равная 0 тождественно, и пусть $S_0=\tau^{-1}(F)$ — оператор из $\mathfrak{A}$, отвечающий функции F при изометрическом изоморфизме $\tau:\mathfrak{A}\longrightarrow C(\mathcal{M})$. По теореме X.2.1 (III)

$$S_0=\int_{\mathcal{M}} F(m)\,E(dm)=\int_u F(m)\,E(dm).$$

Если $E(u)=0$, то $E(a)=0$ для всех $a\subseteq u$, так что $S_0=0$. Противоречие, так как отображение τ взаимно однозначно.

Замечание. В процессе доказательства регулярности меры μ было показано, что если e принадлежит $\mathcal{B}$ и $\mu(e)<\infty$, то для всякого $\varepsilon>0$ найдутся такое открытое множество u и такое *бикомпактное* множество c, что $c\subseteq e\subseteq u$ и $\mu(u-c)<\varepsilon$.

В оставшейся части данного параграфа и в следующем параграфе буква μ будет обозначать меру, существование которой мы только что установили.

7. Лемма. *Если f принадлежит $L_1(R)\cap L_2(R)$ и если e — борелевское подмножество в $\mathcal{M}$, замыкание которого не содержит точки p_∞, то*

$$\int_e (\tau f)(m)\,\mu(dm)=\delta[E(e)f]=(f,\ \psi(e)),$$

где $\psi(e)$ — функция из $L_2(R)$, определенная в лемме 6.

Доказательство. Будем вместо $\psi(e)$ писать просто ψ. Тогда

$$(f,\ \psi)=\int_R f(x)\overline{\psi(x)}\,dx=\int_R f(x-0)\overline{\psi(x)}\,dx=$$

$$=\int_R \overline{\tilde{f}(0-x)\,\psi(x)}\,dx=\overline{(\tilde{f}*\psi)(0)}=\overline{\delta(\tilde{f}*\psi)}.$$

Поскольку оператор $T(\tilde{f})$ свертки с $\tilde{f}$ коммутирует с $E(e)$ и поскольку, как мы видели в доказательстве леммы 6, $E(e)\psi = \psi$, из определения ψ следует, что

$$\delta(\tilde{f} * \psi) = \delta(E(e)(\tilde{f} * \psi)) = (\tilde{f} * \psi, \psi).$$

Так как $T(\tilde{f}) = T(f)^*$, то предыдущие вычисления показывают, что

(I)
$$\delta E(e) f = (f, \psi) = \overline{\delta(\tilde{f} * \psi)} = (\psi, \tilde{f} * \psi) = \\ = (f * \psi, \psi) = \int_{\mathcal{M}} (\tau f)(m)(E(dm)\psi, \psi).$$

С другой стороны, если a — борелевское подмножество в $\mathcal{M}$, то, как показано при доказательстве леммы 6, $E(a)\psi(e) = \psi(ae)$ и потому

$$(\psi(ae), \psi(e)) = (E(a)\psi, \psi) = (E(a)^2\psi, \psi) = \\ = (E(a)\psi, E(a)\psi) = (\psi(ae), \psi(ae)) = \mu(ae).$$

Следовательно,

$$\int_{\mathcal{M}} (\tau f)(m)(E(dm)\psi, \psi) = \int_{e} (\tau f)(m)\mu(dm),$$

что в сочетании с формулой (I) завершает доказательство.

8. Лемма. *Если f принадлежит $L_1(R) \cap L_2(R)$, то*

$$\int_{\mathcal{M}_0} |(\tau f)(m)|^2 \mu(dm) = \int_R |f(x)|^2 dx.$$

Доказательство. Пусть e — борелевское подмножество в $\mathcal{M}_0$ с бикомпактным замыканием; тогда $E(e)(f * \tilde{f}) = E(e)T(f)\tilde{f} = f * (E(e)\tilde{f})$. Применяя предыдущую лемму, получаем

$$\delta|f * E(e)\tilde{f}| = \delta|E(e)(f * \tilde{f})| = \\ \int_e (\tau(f * \tilde{f}))(m)\mu(dm) = \int_e |(\tau f)(m)|^2 \mu(dm).$$

Так как функция τf непрерывна на $\mathcal{M}$ и равна 0 в точке p_∞, то множество $a_n = \{m \mid |(\tau f)(m)| > 1/n\}$ является борелевским подмножеством в $\mathcal{M}_0$ с бикомпактным замыканием; кроме того, функция τf обращается в 0 на дополнении к $\bigcup a_n$. По лемме 4, $E(p_\infty)\tilde{f} = 0$, а так как мера $|E(e)\tilde{f}|^2$ регулярна, то существует такая возрастающая последовательность $\{b_n\}$ бикомпактных подмножеств в $\mathcal{M}_0$, что $E(b_n)\tilde{f} \to \tilde{f}$ по норме пространства $L_2(R)$.

Полагая $e_n = a_n \cup b_n$, имеем

$$\int_{\mathcal{M}_0} |(\tau f)(m)|^2 \mu(dm) = \lim_{n\to\infty} \int_{e_n} |(\tau f)(m)|^2 \mu(dm) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \delta [f * E(e_n) \tilde{f}] = \lim_{n\to\infty} \delta [T(f) E(e_n) \tilde{f}].$$

Так как, согласно лемме 1 (e), $T(f)$ представляет собой ограниченное отображение пространства $L_2(R)$ в $C(R)$, то последнее выражение равно

$$\delta [T(f) \tilde{f}] = \delta (f * \tilde{f}) = \int_R f(0-y) \overline{f(-y)}\, dy = \int_R |f(y)|^2 dy.$$

Это доказывает лемму.

Здесь мы остановимся, чтобы сделать обзор полученных результатов. Мы видели, что каждая функция f из $L_1(R)$ порождает в гильбертовом пространстве $L_2(R)$ ограниченный линейный оператор, представляющий собой свертку с f. Привлекая к рассмотрению минимальную B^*-алгебру $\mathfrak{A}$ операторов, содержащую все указанные операторы свертывания, мы ввели бикомпактное топологическое пространство $\mathcal{M}$ максимальных идеалов алгебры $\mathfrak{A}$, так что каждому элементу из $\mathfrak{A}$ отвечает непрерывная функция на $\mathcal{M}$. Отбросив бесконечно удаленную точку пространства $\mathcal{M}$, мы получили локально бикомпактное пространство $\mathcal{M}_0$. Разложение единицы для алгебры $\mathfrak{A}$ мы использовали для построения на классе $\mathcal{B}$ борелевских множеств пространства $\mathcal{M}_0$ счетно аддитивной регулярной меры μ. Итак, каждой функции f из $L_1(R)$ соответствует некоторая непрерывная функция τf на $\mathcal{M}$, обращающаяся в нуль на бесконечности, причем всегда $|\tau f|_\infty = |T(f)| \leqslant |f|_1$. Однако если f принадлежит $L_1(R) \cap L_2(R)$, то отображение τ представляет собой изометрию в пространство $L_2(\mathcal{M}_0)$. Далее будет показано, что отображение τ единственным образом может быть продолжено до изометрического изоморфизма между $L_2(R)$ и $L_2(\mathcal{M}_0)$ и что если множество e принадлежит $\mathcal{B}$, то применению к функции f из $L_2(R)$ оператора проектирования $E(e)$ отвечает умножение соответствующей функции τf из $L_2(\mathcal{M}_0)$ на характеристическую функцию множества e. Аналогично свертке в $L_2(R)$ отвечает поточечное умножение в $L_2(\mathcal{M}_0)$.

9. Теорема. (a) (*Планшерель.*) *Отображение* $f \to \tau f$, *действующее из* $L_1(R, \Sigma, \lambda) \cap L_2(R, \Sigma, \lambda)$ *в* $L_2(\mathcal{M}_0, \mathcal{B}, \mu)$, *допускает единственное продолжение до изометрии пространства* $L_2(R, \Sigma, \lambda)$ *на пространство* $L_2(\mathcal{M}_0, \mathcal{B}, \mu)$.

(b) *Если обозначить это продолжение тем же самым символом* τ, *то* $\tau E(e)=\varphi(e)$ *для каждого борелевского подмножества* e *пространства* $\mathcal{M}_0$, *где* $[\varphi(e)f](m)=\tau f(m)$ *при* $m\in e$ *и* $[\varphi(e)f](m)=0$ *при* $m\notin e$. *Таким образом,* $E(e)=\tau^{-1}\varphi(e)\tau$.

Доказательство. Поскольку $L_1(R)\cap L_2(R)$ всюду плотно в $L_2(R)$, из предыдущей леммы и теоремы I.6.17 немедленно следует, что τ допускает единственное продолжение до изометрии пространства $L_2(R)$ в $L_2(\mathcal{M}_0)$. Таким образом, установлена справедливость утверждения (a), за исключением того, что продолжение, которое мы также обозначим τ, отображает $L_2(R)$ на все пространство $L_2(\mathcal{M}_0)$.

Докажем теперь утверждение (b). Напомним сначала, что если $f\in L_1(R)$, а $g\in L_1(R)\cap L_2(R)$, то

$$\tau(f*g)=\tau f\cdot\tau g.$$

Поскольку τ, рассматриваемое как отображение алгебры $\mathfrak{A}$ в $C(\mathcal{M})$, непрерывно, мы заключаем, что $\tau(Sg)=\tau S\cdot\tau g$ для S из $\mathfrak{A}_0$ и g из $L_1(R)\cap L_2(R)$. Но $\tau(Ig)=\tau g=\tau I\cdot\tau g$, и потому $\tau(Sg)=\tau S\cdot\tau g$ для S из $\mathfrak{A}$ и g из $L_1(R)\cap L_2(R)$. Так как $L_1(R)\cap L_2(R)$ всюду плотно в $L_2(R)$, а τ является непрерывным отображением пространства $L_2(R)$ в $L_2(\mathcal{M}_0)$, то

$$\tau(Tg)=\tau T\cdot\tau g,\qquad T\in\mathfrak{A},\qquad g\in L_2(R).$$

Если g_1 — какая-нибудь другая функция из $L_2(R)$, то

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{M}}(\tau T)(m)\,(E(dm)g,g_1)&=(Tg,g_1)=\\ &=(\tau(Tg),\tau g_1)=\int_{\mathcal{M}_0}(\tau(Tg))(m)\,\overline{(\tau g_1)(m)}\,\mu(dm)=\\ &=\int_{\mathcal{M}_0}(\tau T)(m)\,(\tau g)(m)\,\overline{(\tau g_1)(m)}\,\mu(dm)=\\ &=\int_{\mathcal{M}_0}(\tau T)(m)\,\nu(dm),\qquad T\in\mathfrak{A},\end{aligned}$$

где мы положили $\nu(e)=\int_{e-p_\infty}(\tau g)(m)\,\overline{(\tau g_1)(m)}\,\mu(dm)$. Поскольку мера ν абсолютно непрерывна относительно меры μ, ее регулярность следует из регулярности μ. Из полученного выше равенства, регулярности меры $(E(\cdot)g,g_1)$ и утверждения о единственности представляющей меры в теореме Рисса IV.6.2 следует, что

$$(E(e)g, g_1) = \nu(e)$$

для любого борелевского множества $e \subseteq \mathscr{M}_0$. Используя уже доказанную часть утверждения (a), получаем

$$(\tau E(e)g, \tau g_1) = (E(e)g, g_1) = \int_e (\tau g)(m)\overline{(\tau g_1)(m)}\,\mu(dm).$$

Так как это равенство справедливо для любой функции g_1 из $L_2(R)$, то $\tau(E(e)g)(m) = \tau g(m)$ для почти всех относительно меры μ точек m из e и $\tau(E(e)g)(m) = 0$ для почти всех m из $\mathscr{M}_0 - e$. Если мы теперь покажем, что отображение τ^{-1} определено всюду на $\mathscr{M}_0$, то утверждение (b) будет доказано.

Итак, нам осталось доказать, что τ отображает $L_2(R)$ на все $L_2(\mathscr{M}_0)$. Для этого достаточно показать, что $\tau L_2(R)$ содержит характеристическую функцию любого множества, для которого конечна мера μ; более того, как следует из замечания, сделанного после доказательства леммы 6, достаточно показать, что $\tau L_2(R)$ содержит характеристическую функцию любого множества e из $\mathscr{B}_0$. Как мы видели при доказательстве леммы 5, в $L_1(R) \cap L_2(R)$ найдется такая функция g, что $\tau g(p) > 1 > 0$ для всех p из $\bar{e}$. Пусть Q — такой ограниченный оператор из $\mathfrak{A}$, что τQ совпадает с функцией из $C(\mathscr{M})$, обратной к функции τg на множестве $\bar{e}$[1]). Из того, что уже было доказано, следует, что $\tau(Qg) = \tau Q \cdot \tau g$, так что $\tau(Qg)(p) = 1$ для p из $\bar{e}$. Из уже доказанной части утверждения (b) вытекает, что $\tau[E(e)Qg] = \varphi(e)\tau(Qg)$, так что $\tau[E(e)Qg]$ является характеристической функцией множества e, ч. т. д.

10. Следствие. *Положим для каждой функции f из $L_1(R)$ и каждого борелевского подмножества a комплексной плоскости $(\tau f)^{-1}(a) = \{m \in \mathscr{M}_0 \mid \tau f(m) \in a\}$, и пусть $M(a)$ — оператор умножения на характеристическую функцию множества $(\tau f)^{-1}(a)$ в пространстве $L_2(\mathscr{M}_0)$. Тогда спектральное разложение оператора свертки $T(f)$ в $L_2(R)$ может быть представлено в виде $\tau^{-1}M(\cdot)\tau$, а спектр оператора $T(f)$ совпадает с множеством значений функции τf. Комплексное число α принадлежит точечному спектру оператора $T(f)$ тогда и только тогда, когда $\mu((\tau f)^{-1}(\alpha)) \neq 0$.*

Доказательство. Первые два утверждения вытекают из предыдущей теоремы и следствий X.2.10 и X.2.9 (III). Для дока-

[1]) Говоря точнее, функцию $1/\tau g$, непрерывную на $\bar{e}$, нужно продолжить до непрерывной функции на всем $\mathscr{M}$ и взять оператор, соответствующий этому продолжению. — *Прим. перев.*

зательства утверждения, относящегося к точечному спектру, напомним, что если g принадлежит $L_2(R)$, то

$$\tau(f*g)=\tau f\cdot\tau g.$$

Если $\tau f(m)=\alpha$ для всех m из борелевского множества $e\subseteq\mathcal{M}_0$, то $g=\tau^{-1}\chi_e$ является собственной функцией оператора $T(f)$, соответствующей собственному значению α. Обратно, если $f*g=\alpha g$, то

$$(\tau f-\alpha)\cdot\tau g=0.$$

Так как по теореме 9 (а) отображение τ изометрично, то из $g\neq 0$ следует, что $\tau g(m)\neq 0$ на некотором множестве с положительной мерой μ, и потому на этом множестве $\tau f(m)=\alpha$, ч. т. д.

В следующем разделе этого параграфа будет показано, что имеется взаимно однозначное соответствие между точками пространства $\mathcal{M}_0$ и непрерывными гомоморфизмами группы R в мультипликативную группу комплексных чисел, равных по модулю единице. Множество всех таких гомоморфизмов образует абелеву группу. Так что пространство $\mathcal{M}_0$ может быть естественным образом наделено структурой локально бикомпактной абелевой группы.

Доказательство следующей теоремы использует представление пространства $L_\infty(R)$ как сопряженного к $L_1(R)$. В случае когда мера Хаара λ на R является σ-конечной, возможность такого представления следует из теоремы IV.8.5. Общий случай обсуждается в примечаниях, помещенных в конце настоящей главы[1])

11. Теорема. *Можно установить взаимно однозначное соответствие между точками m пространства $\mathcal{M}_0$ и непрерывными комплексными функциями h_m на R, удовлетворяющими соотношениям* $|h_m(x)|=1,\quad h_m(x+y)=h_m(x)h_m(y),\quad x,y\in R.$ *Это соответствие задается формулой*

$$(\tau f)(m)=\int_R h_m(x)f(x)\,dx,\quad f\in L_1(R).$$

Доказательство. Если m — точка из $\mathcal{M}_0$, то функция φ_m, определенная равенством $\varphi_m(f)=(\tau f)(m)$, $f\in L_1(R)$, представляет собой ненулевой линейный функционал на $L_1(R)$, удовлетворяющий тождеству $\varphi_m(f*g)=\varphi_m(f)\varphi_m(g)$. Так как $|\tau f|_\infty\leqslant|f|_1$, то норма функционала φ_m не превосходит 1, так что в силу тео-

[1]) Заметим, что из предположения о σ-бикомпактности группы R, сделанного в начале данного параграфа, вытекает, что мера λ является σ-конечной. По поводу общего случая см. также замечание после доказательства теоремы IV.8.5. — *Прим. перев.*

ремы IV.8.5 в $L_\infty(R)$ найдется такая, в существенном единственная, функция h_m, что $|h_m|_\infty \leqslant 1$ и

$$\varphi_m(f) = \int_R h_m(x) f(x)\, dx.$$

По теореме Фубини для любой пары функций f, g из $L_1(R)$ имеем

$$\int_R \{g(y) \int_R h_m(x) f(x-y)\, dx\}\, dy = \int_R \{h_m(x) \int_R f(x-y) g(y)\, dy\}\, dx =$$

$$= \varphi_m(f * g) = \varphi_m(f)\varphi_m(g) = \int_R \{g(y) \int_R h_m(x) h_m(y) f(x)\, dx\}\, dy.$$

Из равенства крайних членов для всех g из $L_1(R)$ заключаем, что

[*] $$\int_R h_m(x) f(x-y)\, dx = h_m(y) \int_R h_m(x) f(x)\, dx$$

для почти всех y. При подходящем выборе функции f интеграл, стоящий в правой части равенства [*], отличен от нуля, а так как по лемме 1 (d) интеграл в левой части непрерывен, то h_m почти всюду совпадает с непрерывной функцией. Изменяя функцию h_m на множестве меры нуль, мы можем считать, что она непрерывна. С помощью замены переменных в [*] получаем, что для всех f из $L_1(R)$

$$\int_R h_m(x+y) f(x)\, dx = \int_R h_m(y) h_m(x) f(x)\, dx,$$

откуда следует, что для любого y равенство $h_m(x+y) = h_m(y) h_m(x)$ выполняется для почти всех x. Так как обе части последнего равенства непрерывны, то $h_m(x+y) = h_m(x) h_m(y)$ для всех $x, y \in R$. Поскольку h_m не обращается в нуль тождественно, из $h_m(x) h_m(0) = h_m(x)$ следует $h_m(0) = 1$. Так как $|h_m|_\infty \leqslant 1$, то $|h_m(x)| \leqslant 1$ для всех x из R. Но $|h_m(x) h_m(-x)| = |h_m(0)| = 1$, так что $|h_m(x)| = 1$ для всех $x \in R$. Таким образом, описанная процедура сопоставляет каждой точке m из $\mathcal{M}_0$ функцию h_m, обладающую требуемыми свойствами. Очевидно, что функция h_m определяется однозначно.

Мы закончим доказательство теоремы, показав, что если дана непрерывная функция H, удовлетворяющая соотношениям $|H(x)| = 1$ и $H(x+y) = H(x) H(y)$, то существует такая (очевидно, единственная) точка m из $\mathcal{M}_0$, что $(\tau f)(m) = \int_R H(x) f(x)\, dx$ для всех f из $L_1(R)$. Пусть m_0 — точка из $\mathcal{M}_0$; воспользовавшись уже доказанным, найдем такую непрерывную на R функцию H_0, что $|H_0(x)|=1$, $H_0(x+y)=H_0(x)H_0(y)$ и

$$(\tau f)(m_0)=\int_R H_0(x)f(x)\,dx, \qquad f\in L_1(R).$$

Положим $H_1(x)=H(x)\overline{H_0(x)}$ и определим отображение Φ равенством

$$(\Phi f)(x)=H_1(x)f(x).$$

Тогда Φ можно рассматривать как сохраняющий норму линейный оператор как в $L_1(R)$, так и в $L_2(R)$. Так как $H_1^{-1}(x)=H_1(-x)$, то для всех f из $L_1(R)$ и всех g из $L_2(R)$ имеем

$$\{\Phi T(f)\Phi^{-1}g\}(x)=\int_R H_1(x)f(x-y)H_1(y)^{-1}g(y)\,dy=$$

$$=\int_R H_1(x-y)f(x-y)g(y)\,dy=\{T(\Phi f)g\}(x).$$

Таким образом, $\Phi T(f)\Phi^{-1}=T(\Phi f)$, и, следовательно, $\Phi T(L_1(R))\Phi^{-1}\subseteq T(L_1(R))$. Так как Φ является унитарным отображением пространства $L_2=L_2(R)$ в себя, то $A\to\Phi A\Phi^{-1}$ есть сохраняющее норму отображение, действующее в пространстве ограниченных линейных операторов, переводящих $L_2(R)$ в себя. Из соображений непрерывности немедленно следует, что $\Phi\mathfrak{A}\Phi^{-1}\subseteq\mathfrak{A}$. Таким образом, $A\to\Phi A\Phi^{-1}$ представляет собой сохраняющий норму изоморфизм алгебры $\mathfrak{A}$ на себя. Следовательно, отображение ψ, определенное на $C(\mathcal{M})$ формулой $\psi f=\tau(\Phi(\tau^{-1}f)\Phi^{-1})$, является изоморфизмом $C(\mathcal{M})$ на себя и сохраняет норму. Поскольку $\Phi AA_1\Phi^{-1}=\Phi A\Phi^{-1}\Phi A_1\Phi^{-1}$, отображение ψ в действительности является изоморфизмом *алгебры* $C(\mathcal{M})$ на себя и потому по теореме IV.6.26 имеет вид $(\psi f)(m)=f(\chi m)$, где χ — некоторый гомеоморфизм $\mathcal{M}$ на $\mathcal{M}$. Положим $m=\chi(m_0)$.

Как мы видели выше, $\Phi T(f)\Phi^{-1}=T(\Phi f)$ для f из $L_1(R)$, так что для таких f

$$(\tau f)(m)=(\psi\tau f)(m_0)=(\tau T(\Phi f))(m_0)=$$

$$=(\tau\Phi f)(m_0)=\int_R H_0(x)(\Phi f)(x)\,dx=$$

$$=\int_R H_0(x)H_1(x)f(x)\,dx=\int_R H(x)f(x)\,dx.$$

12. Следствие. *Функцию* h_m *из теоремы* 11, *соответствующую точке* $m\in\mathcal{M}_0$, *можно получить по формуле*

$$h_m(y)=\frac{(\tau f_y)(m)}{(\tau f)(m)},$$

где f — какая-нибудь функция из $L_1(R)$, для которой $(\tau f)(m) \neq 0$, а f_y — функция из $L_1(R)$, определенная равенством $f_y(x) = f(x-y)$, $x \in R$.

Доказательство. Это утверждение в точности представляет собой содержание формулы [*] из первой части доказательства теоремы 11.

Несколько следующих ниже предложений описывают топологию пространства $\mathcal{M}_0$ непосредственно в терминах функций h_m, введенных в теореме 11.

13. Определение. Пусть $\hat{R}$ — множество всех непрерывных функций h, определенных на R и удовлетворяющих соотношениям $h(x+y) = h(x)h(y)$, $|h(x)| = 1$. Очевидно, что $\hat{R}$ является абелевой группой относительно естественно определенной операции умножения функций, причем единичным элементом этой группы служит функция, тождественно равная 1. Группа $\hat{R}$ называется *группой характеров*, или *двойственной группой* группы R. Мы топологизируем $\hat{R}$, принимая за базис топологии множества вида

$$N(h, K, \varepsilon) = \{h_1 \in \hat{R} \mid |h_1(x) - h(x)| < \varepsilon, \ x \in K\},$$

где ε — любое положительное число, а K — произвольное бикомпактное подмножество группы R.

14. Лемма. *Группа характеров $\hat{R}$ является топологической группой.*

Доказательство. Проверку того, что множества $N(h, K, \varepsilon)$ образуют базис некоторой топологии, мы предоставляем читателю. Если $h_1 \in N(h, K, \varepsilon)$ и $h_2 \in N(h_0, K, \varepsilon)$, то $h_1 h_2 \in N(hh_0, K^2, \varepsilon)$, так что умножение непрерывно. Если $h_1 \in N(h, K, \varepsilon)$, то $h_1^{-1} \in N(h^{-1}, K, \varepsilon)$, и потому отображение $h \to h^{-1}$ также непрерывно, ч. т. д.

15. Теорема. *Взаимно однозначное отображение $m \to h_m$, существование которого было установлено в теореме* 11, *представляет собой гомеоморфизм $\mathcal{M}_0$ на $\hat{R}$.*

Доказательство[1]. Сначала мы покажем, что отображение $m \to h_m$ непрерывно. Пусть m_0 — произвольная точка в $\mathcal{M}_0$, $0 < \varepsilon < 1$, и пусть $N(h_{m_0}, K, \varepsilon)$ — окрестность функции h_{m_0}. Оче-

[1] В переводе первая часть этого доказательства немного изменена.— *Прим. перев.*

видно, в $L_1(R)$ найдется такая функция f, что $|f|_1 < 1$ и $(\tau f)(m_0) \neq 0$. Пусть $\alpha = |(\tau f)(m_0)|$, так что $0 < \alpha < 1$, и пусть U — такая окрестность точки m_0, что $|(\tau f)(m) - (\tau f)(m_0)| < \alpha\varepsilon/2$ для всех m из U. Тогда $(\tau f)(m) \neq 0$ для всех m из U, и потому, согласно следствию 12, имеем

$$[*] \qquad h_m(y) = \frac{(\tau f_y)(m)}{(\tau f)(m)}, \qquad m \in U.$$

По лемме 1 (f) $y \longrightarrow f_y$ является непрерывным отображением R в $L_1(R)$. Следовательно, отображение $y \longrightarrow \tau f_y$ группы R в $C(\mathcal{M})$ непрерывно. Из бикомпактности множества $K \subseteq R$ и теоремы IV.6.7 вытекает, что $\{\tau f_y \mid y \in K\}$ — равностепенно непрерывное множество в $C(\mathcal{M})$. Пусть $V \subseteq U$ — такая окрестность точки m_0, что $|(\tau f_y)(m) - (\tau f_y)(m_0)| < \alpha\varepsilon/2$ для всех m из V и всех y из K. Тогда для всех m из V и всех y из K

$$|h_m(y) - h_{m_0}(y)| \leqslant$$
$$\leqslant \left| \frac{(\tau f_y)(m)}{(\tau f)(m)} - \frac{(\tau f_y)(m)}{(\tau f)(m_0)} \right| + \left| \frac{(\tau f_y)(m)}{(\tau f)(m_0)} - \frac{(\tau f_y)(m_0)}{(\tau f)(m_0)} \right| =$$
$$= \frac{1}{\alpha} |h_m(y)| \cdot |(\tau f)(m) - (\tau f)(m_0)| + \frac{1}{\alpha} |(\tau f_y)(m) - (\tau f_y)(m_0)| <$$
$$< \frac{1}{\alpha} \cdot 1 \cdot \frac{\alpha\varepsilon}{2} + \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\alpha\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Следовательно, если $m \in V$, то $h_m \in N(h_{m_0}, K, \varepsilon)$, так что отображение $m \longrightarrow h_m$ непрерывно.

Обратно, пусть U — такая окрестность точки m_0, что $p_\infty \notin U$. Тогда существует такая непрерывная на $\mathcal{M}$ функция H, что $H(m_0) = 1$ и $H(m) = 0$ при $m \notin U$. Так как H принадлежит $\tau\overline{\mathfrak{A}}_0$, а операторы $T(f)$, соответствующие функциям f из $L_1(R)$, образуют всюду плотное подмножество в $\overline{\mathfrak{A}}_0$, то в $L_1(R)$ найдется такая функция f, что $(\tau f)(m_0) > 3/4$ и $|(\tau f)(m)| < 1/4$ для всех $m \notin U$. Пусть K — такое бикомпактное подмножество в R, что

$$\int_{R-K} |f(x)|\, dx < \frac{1}{16},$$

и пусть $\varepsilon = (8|f|_1)^{-1}$. Тогда если h_m принадлежит $N(h_{m_0}, K, \varepsilon)$, то из теоремы 11 и неравенства Гёльдера следует, что

$$|(\tau f)(m) - (\tau f)(m_0)| = \left| \int_R f(x) \{h_m(x) - h_{m_0}(x)\}\, dx \right| \leqslant$$
$$\leqslant 2 \int_{R-K} |f(x)|\, dx + \varepsilon \int_K |f(x)|\, dx < \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}.$$

Следовательно, $|(\tau f)(m)| > 1/2$, так что $m \in U$. Это показывает, что отображение $h_m \to m$ непрерывно и потому является гомеоморфизмом, ч. т. д.

Ввиду только что доказанной теоремы естественно определить в $\mathcal{M}_0$ групповую операцию формулой

$$h_{m_1+m_2}(x) = h_{m_1}(x)\, h_{m_2}(x).$$

При таком определении сложения множество $\mathcal{M}_0$ становится локально бикомпактной абелевой группой, топологически и алгебраически изоморфной группе характеров $\hat{R}$. Желательно было бы иметь более симметричное обозначение для $h_m(x)$, и для упрощения некоторых формул следующего параграфа мы введем обозначение

$$[x, m] = \overline{h_m(x)}.$$

Так как h_m — гомоморфизм, то гомоморфизмом является и $\bar{h}_m$. (Для некоторых целей удобнее пользоваться вместо h комплексно сопряженной функцией $\bar{h}$. Это соглашение имеет еще то дополнительное преимущество, что в случае, когда R является мультипликативной группой точек единичной окружности, наше обозначение согласуется с тем, которое используется обычно в теории рядов Фурье.) Ясно, что $|[x, m]| = 1$, $[x_1 + x_2, m] = [x_1, m]\,[x_2, m]$ и $[x, m_1 + m_2] = [x, m_1]\,[x, m_2]$ для всех x, x_1, x_2 из R и m, m_1, m_2 из $\hat{R}$. Из этих соотношений следует также, что $[-x, m] = [x, -m] = \overline{[x, m]}$. Кроме того, из определения 13 и теоремы 15 с очевидностью следует, что функция $[x, m]$ непрерывна по каждому из аргументов[1]). В этих обозначениях формула теоремы 11 принимает вид

$$(\tau f)(m) = \int_R \overline{[x, m]}\, f(x)\, dx, \qquad f \in L_1(R), \qquad m \in \mathcal{M}_0.$$

В теореме 9 отображение τ было продолжено на $L_2(R)$; мы хотим получить для этого продолжения аналогичное интегральное представление. Пусть $\mathcal{E}$ — семейство всех борелевских подмножеств в R с конечной мерой; упорядочим $\mathcal{E}$ по включению.

---

[1]) Более того, нетрудно показать, что она непрерывна как функция на $R \times \mathcal{M}_0$, т. е. по совокупности аргументов. Это следует из ее непрерывности по каждому аргументу, если учесть локальную бикомпактность R, формулу $h_m(y) = \dfrac{(\tau f_y)(m)}{(\tau f)(m)}$ и то обстоятельство, что для любого бикомпактного множества $K \subseteq R$ семейство непрерывных на $\mathcal{M}$ функций $\{\tau f_y \mid y \in K\}$ равностепенно непрерывно. — *Прим. перев.*

Если χ_e обозначает характеристическую функцию множества e из $\mathscr{E}$, а f принадлежит $L_2(R)$, то $\chi_e f$ принадлежит $L_1(R) \cap L_2(R)$, причем f является пределом по норме пространства $L_2(R)$ обобщенной последовательности $\{\chi_e f\}$. Следовательно, по теореме 9 функция τf является пределом обобщенной последовательности $\{\tau(\chi_e f)\}$ по норме пространства $L_2(\mathscr{M}_0)$. Поэтому

$$\tau f = \lim_e \int_e \overline{[x, \cdot\,]} f(x)\, dx, \qquad f \in L_2(R),$$

где предел понимается в смысле сходимости в $L_2(\mathscr{M}_0)$.

Теперь мы покажем, что при помощи аналогичной процедуры можно восстановить функцию f по τf.

16. Теорема. *Обозначим через $\hat{\mathscr{E}}$ семейство бикомпактных подмножеств $\mathscr{M}_0$, упорядоченное по включению. Тогда всякая функция f из $L_2(R)$ равна пределу по норме этого пространства обобщенной последовательности функций $\{f_e, e \in \hat{\mathscr{E}}\}$, определяемых формулой*

$$f_e(x) = \int_e [x, m]\,(\tau f)(m)\,\mu(dm), \qquad x \in R.$$

Доказательство. Из следствия 12 вытекает, что

$$[*] \qquad (\tau f_y)(m) = \overline{[y, m]}\,(\tau f)(m),$$

если $f \in L_1(R)$, $y \in R$, $m \in \mathscr{M}_0$ и $(\tau f)(m) \neq 0$. Если $(\tau f)(m) = 0$, то должно быть и $(\tau f_y)(m) = 0$, ибо в противном случае, применяя следствие 12, мы получили бы

$$(\tau f)(m) = (\tau (f_y)_{-y})(m) = \overline{[-y, m]}\,(\tau f_y)(m) \neq 0.$$

Таким образом, равенство [*] справедливо также и в случае $(\tau f)(m) = 0$. Замена y на $-x$ в равенстве [*] дает

$$[**] \qquad [x, m]\,(\tau f)(m) = (\tau f_{-x})(m).$$

Если e — борелевское подмножество в $\mathscr{M}_0$ и f принадлежит $L_1(R) \cap L_2(R)$, то из соотношения [**] и теоремы 9(b) следует, что

$$\tau\,[E(e) f_y] = \chi_e \tau(f_y) = \overline{[-y, \cdot\,]}\,\chi_e \tau f = \tau\,[(E(e) f)_y];$$

таким образом, $E(e) f_y = (E(e) f)_y$. Используя это равенство, лемму 7 и формулу [**], получаем

$$\int_e [x, m]\,(\tau f)(m)\,\mu(dm) = \delta\,[E(e)(f_{-x})] = \delta\,[(E(e) f)_{-x}] = (E(e) f)(x),$$

если $f \in L_1(R) \cap L_2(R)$. Интеграл в этом равенстве существует и в том случае, когда $f \in L_2(R)$ и $e \in \hat{\mathscr{E}}$. Так как $L_1(R) \cap L_2(R)$ всюду плотно в $L_2(R)$, то

$$\int\limits_e [x, m](\tau f)(m)\,\mu(dm) = (E(e)f)(x), \quad e \in \hat{\mathscr{E}}, \quad f \in L_2(R).$$

Теорема доказана, поскольку обобщенная последовательность $\{E(e)f, e \in \hat{\mathscr{E}}\}$ сходится к f по норме пространства $L_2(R)$.

17. Следствие. *Если* $f \in L_1(R)$, то $(\tau f_y)(m) = \overline{[y, m]}(\tau f)(m)$ *для всех* m *из* $\mathscr{M}_0$. *Если* $f \in L_2(R)$, *то это равенство справедливо для почти всех относительно меры* μ *точек* m *из* $\mathscr{M}_0$.

Доказательство. Случай $f \in L_1(R)$ уже был рассмотрен в доказательстве предыдущей теоремы. Если $f \in L_2(R)$, то сформулированное утверждение следует из теоремы Планшереля, из того, что $L_1(R) \cap L_2(R)$ всюду плотно в $L_2(R)$, и из того, что предел сходящейся последовательности функций из $L_2(\mathscr{M}_0)$ определяется однозначно с точностью до его значений на множестве меры нуль.

Следующая лемма содержит аналогичный результат для $L_2(\mathscr{M}_0)$.

18. Лемма. *Если* $F \in L_2(\mathscr{M}_0)$, *а функция* F_p *определена равенством* $F_p(m) = F(m-p)$, $m \in \mathscr{M}_0$, *то* $(\tau^{-1}F_p)(x) = [x, p](\tau^{-1}F)(x)$ *для почти всех* x *из* R. *Если* $h \in L_1(R)$ *и* $h_1(x) = [x, p]h(x)$ *для всех* x *из* R, *то* $(\tau h_1)(m) = (\tau h)(m-p)$ *для всех* m *из* $\mathscr{M}_0$.

Доказательство. Чтобы доказать второе утверждение, заметим, что функция $h_1(x)$ также принадлежит $L_1(R)$, ибо модуль характера равен 1. Следовательно,

$$(\tau h_1)(m) = \int\limits_R \overline{[x, m]}\,h_1(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_R \overline{[x, m-p]}\,h(x)\,dx = (\tau h)(m-p), \quad m \in \mathscr{M}_0.$$

Для доказательства первого утверждения[1]) воспользуемся тем, что существует такая последовательность функций $\{F^n\}$, сходящаяся к F по норме пространства $L_2(\mathscr{M}_0)$, что $\tau^{-1}F^n \in L_1(R) \cap L_2(R)$, $n = 1, 2, \ldots$. Функции h^n, определенные для $x \in R$ равенством $h^n(x) = [x, p](\tau^{-1}F^n)(x)$, принадлежат $L_1(R) \cap L_2(R)$ и образуют последовательность Коши в $L_2(R)$. По доказанному

[1]) Изложение этой части доказательства в переводе изменено. — *Прим. перев.*

выше $(\tau h^n)(m) = F_p^n(m)$ для всех m из $\mathcal{M}_0$, и потому в силу теоремы Планшереля последовательность $\{F_p^n\}$ сходится в $L_2(\mathcal{M}_0)$ к некоторой функции G. С другой стороны, учитывая III.3.6 и III.6.13 (а), можно считать, что $F^n(m) \longrightarrow F(m)$ почти всюду на $\mathcal{M}_0$, следовательно, $F_p^n(m) = F^n(m - p) \longrightarrow F(m-p) = F_p$ почти всюду на $\mathcal{M}_0$. Поэтому $G(m) = F_p(m)$ почти всюду на $\mathcal{M}_0$, откуда следует, что последовательность $\{F_p^n\}$ сходится к F_p в $L_2(\mathcal{M}_0)$. Но тогда $\tau^{-1}F_p^n \longrightarrow \tau^{-1}F_p$ в $L_2(R)$. В то же время $\tau^{-1}F_p^n = h^n = [\cdot, p](\tau^{-1}F^n) \longrightarrow [\cdot, p](\tau^{-1}F)$ в $L_2(R)$. Так как предельная функция последовательности, сходящейся в $L_2(R)$, определена однозначно с точностью до значений на множестве меры нуль, то $(\tau^{-1}F_p)(x) = [x, p](\tau^{-1}F)(x)$ почти всюду на R, ч. т. д.

19. Теорема. *Мера μ на $\mathcal{M}_0 = \hat{R}$ инвариантна относительно сдвигов, т. е.*

$$\mu(e+p) = \mu(e), \qquad e \in \mathcal{B}, \qquad p \in \mathcal{M}_0.$$

Доказательство. Заметим сначала, что утверждение тривиально, если $\mu(e+p) = \mu(e) = \infty$, так что мы должны рассмотреть лишь тот случай, когда по крайней мере одно из чисел $\mu(e+p)$, $\mu(e)$ конечно. Пусть $\mu(e) < \infty$, и пусть для $F \in L_2(\mathcal{M}_0)$ функция F_p определена равенством $F_p(m) = F(m-p)$; $m, p \in \mathcal{M}_0$. Если χ_e обозначает характеристическую функцию множества e, то легко видеть, что $(\chi_e)_p = \chi_{e+p}$. Из предыдущей леммы следует, что

$$(\tau^{-1}\chi_{e+p})(x) = [x, p](\tau^{-1}\chi_e)(x), \qquad x \in R.$$

Поскольку всякий характер по модулю равен 1, из теоремы Планшереля вытекает, что

$$\{\mu(e+p)\}^2 = \{\mu(e)\}^2.$$

Итак, мы доказали, что если $\mu(e) < \infty$, то величина $\mu(e+p)$ также конечна и равна $\mu(e)$. Если известно, что конечна величина $\mu(e+p)$, то, заменяя в только что приведенном доказательстве e и p на $e+p$ и $-p$, приходим к выводу, что величина $\mu(e) = \mu(e+p-p)$ конечна и равна $\mu(e+p)$, ч. т. д.

Предположим теперь, что R обозначает группу вещественных чисел, и покажем, что тогда группа характеров $\hat{R}$ группы R алгебраически и топологически изоморфна R.

20. Теорема. *Пусть R — аддитивная группа вещественных чисел, и пусть $\hat{R}$ — ее группа характеров. Тогда существует такое гомеоморфное и изоморфное отображение t группы $\hat{R}$ на*

всю группу R, *что*

$$[x, m] = e^{ixt(m)}, \qquad x \in R, \qquad m \in \hat{R},$$

$$2\pi\mu(e) = \lambda(t(e)), \qquad e \in \mathscr{B},$$

где $\mathscr{B}$ — *семейство борелевских подмножеств в* $\hat{R}$, *а* λ — *мера Хаара на* R.

Доказательство. Для фиксированной точки m из $\mathscr{M}_0 = \hat{R}$ характер $[x, m]$, $x \in R$, является непрерывной функцией от x, удовлетворяющей для всех x и y из R соотношениям $|[x, m]| = 1$ и $[x, m][y, m] = [x + y, m]$. Хорошо известно (см. VIII.1.2, где содержится более общая формулировка этого элементарного утверждения), что в этом случае существует такое вещественное число $t(m)$, что

$$[x, m] = e^{ixt(m)}, \qquad x \in R.$$

Если $t(m_1) = t(m_2)$, то $[x, m_1] = [x, m_2]$ для всех x из R, поэтому в силу теоремы 11 отображение $m \to t(m)$ взаимно однозначно. Так как функция $h(x) = e^{ixt}$ удовлетворяет соотношениям $|h(x)| = 1$ и $h(x+y) = h(x)h(y)$, то $m \to t(m)$ отображает $\hat{R}$ на все R. Чтобы убедиться, что отображение t есть гомеоморфизм, заметим, что

$$|[x, 0] - [x, m]| = |1 - e^{ixt(m)}| = \{(1 - \cos xt(m))^2 + (\sin xt(m))^2\}^{1/2}$$

и что эта величина тогда и только тогда будет малой для всех x из бикомпактного множества $|x| \leqslant K$, когда мала величина $|t(m)|$. Таким образом, характер m тогда и только тогда близок к характеру, тождественно равному 1, когда величина $t(m)$ близка к нулю. Так как

$$|[x, m_1] - [x, m_2]| = |[x, 0] - [x, m_2 - m_1]|,$$

то отображение $t: \hat{R} \to R$ является гомеоморфизмом. Тождество

$$e^{ixt(m_1+m_2)} = [x, m_1 + m_2] = [x, m_1][x, m_2] = e^{ix\{t(m_1)+t(m_2)\}}$$

показывает, что $t(m_1 + m_2) = t(m_1) + t(m_2)$, так что t является алгебраическим изоморфизмом.

Чтобы доказать заключительное утверждение теоремы, определим на семействе борелевских подмножеств e группы R функцию множества λ_1, полагая $\lambda_1(e) = \mu(t^{-1}(e))$. По теореме 19 функция множества λ_1 инвариантна относительно сдвигов, т. е. $\lambda_1(e) = \lambda_1(e + x)$ для всех x из R, так что в силу единственности меры Хаара существует такая постоянная c, что $\lambda_1 = c\lambda$. Покажем, что $c = 1/2\pi$, и тем самым закончим доказательство. Вычислим сначала образ при отображении τ функции $f(x) = e^{-x^2/2}$, $x \in R$, принадлежащей $L_1(R) \cap L_2(R)$. Обозначая $t(m)$ просто через t, имеем

$$(\tau f)(m) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} e^{-x^2/2}\, dx = e^{-t^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+it)^2/2}\, dx.$$

Выражение

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+zt)^2/2}\, dx$$

определяет целую функцию от z, которая при всех вещественных z, а значит, и вообще при всех z, равна

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx = (2\pi)^{1/2}.$$

Следовательно,

$$(\tau f)(m) = (2\pi)^{1/2} e^{-\{t(m)\}^2/2}.$$

По теореме Планшереля

$$\int_{-\infty}^{\infty} |e^{-x^2/2}|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx = \int_{\mathcal{M}_0} |(\tau f)(m)|^2 \mu(dm).$$

Заменяя в последнем интеграле переменную интегрирования m на $t = t(m)$ и вспоминая, что $\lambda_1(e) = \mu(t^{-1}(e)) = c\lambda(e)$ для любого борелевского множества $e \subseteq \mathscr{B}$, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |e^{-x^2/2}|^2\, dx = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-t^2/2}|^2 \lambda_1(dt) = 2\pi c \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-t^2/2}|^2\, dt,$$

так что $2\pi c = 1$, и доказательство закончено.

Теорема 20 оправдывает отождествление пространств R и $\hat{R}$ при условии, что преобразование Фурье определяется таким образом, чтобы компенсировать множитель 2π. Это замечание позволяет нам переформулировать теорему Планшереля и теорему об обращении (теоремы 9 и 16) в более принятых обозначениях.

→21. Теорема. *Пусть R — аддитивная группа вещественных чисел. Тогда для любой функции f из $L_2(R)$ существует предел*

$$\text{(a)} \quad g(t) = (Kf)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} f(x) e^{-ixt}\, dx$$

в смысле сходимости по норме пространства $L_2(R)$. Отображение K представляет собой унитарный оператор, действующий *в гильбертовом пространстве $L_2(R)$, и называется «L_2-преобразованием Фурье»*[1]).

(b) *Обратный к K оператор задается формулой*

$$f(x)=(K^{-1}g)(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N} g(t)\,e^{ixt}\,dt,$$

где предел существует в смысле сходимости по норме в $L_2(R)$.

(c) *Если $h\in L_1(R)$, то спектр оператора свертки, определенного на функциях f из $L_2(R)$ по формуле $T(h)f=h*f$, совпадает с замыканием множества значений «L_1-преобразования Фурье» функции h, которое задается равенством*

$$(\tau h)(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,e^{-ixt}\,dx.$$

Функция τh непрерывна, и точечный спектр оператора $T(h)$ совпадает с множеством всех чисел α, для которых множество $\{t\in R\mid \alpha=(\tau h)(t)\}$ имеет положительную меру.

(d) *Если $h\in L_1(R)$ и $f\in L_2(R)$, то*

$$T(h)f=h*f=(K^{-1}M(\tau h)K)f,$$

где через $M(\tau h)$ обозначен оператор умножения на непрерывную функцию τh.

Аналогичным образом можно изучить случай локально бикомпактной аддитивной группы R^n вещественных n-мерных векторов $x=[x_1, \ldots, x_n]$. Читатель, несколько модифицируя метод, использованный в доказательстве теоремы 20, легко докажет следующую теорему, дающую аналитическое представление характеров группы R^n.

22. Теорема. *Пусть R^n — аддитивная группа вещественных n-мерных векторов, и пусть $\hat{R}^n$ — ее группа характеров. Тогда существует такое гомеоморфное и изоморфное отображение t группы $\hat{R}^n$ на всю группу R^n, что*

$$[x, m]=e^{i(x,\, t(m))}=\exp\{i(x_1t_1(m)+\ldots+x_nt_n(m))\}$$

и

$$(2\pi)^n\mu(e)=\lambda(t(e)),\qquad e\in\mathscr{B}^n,$$

где $\mathscr{B}^n$ — семейство борелевских подмножеств в $\hat{R}^n$, а λ — мера Лебега на R^n.

---

[1]) Употребляется еще термин «преобразование Фурье—Планшереля». — *Прим. перев.*

В рассматриваемом случае также можно придать теореме Libra Планшереля несколько более конкретную форму, если воспользоваться полученным выше представлением характеров группы R^n. Как легко видеть, в этой теореме утверждается, что если $f \in L_2(R^n)$, то предел

$$g(t_1, \ldots, t_n) = (2\pi)^{-n/2} \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} \ldots \int_{-N}^{N} f(x_1, \ldots, x_n) \times$$
$$\times \exp\{-i(t_1x_1 + \ldots + t_nx_n)\}\, dx_1 \ldots dx_n$$

существует в смысле сходимости по норме в $L_2(R^n)$ и определяет в этом пространстве унитарный оператор, обратный к которому задается формулой

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (2\pi)^{-n/2} \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} \ldots \int_{-N}^{N} g(t_1, \ldots, t_n) \times$$
$$\times \exp\{i(t_1x_1 + \ldots + t_nx_n)\}\, dt_1 \ldots dt_n.$$

При этом последний предел также существует в смысле сходимости по норме в $L_2(R^n)$.

Ясно, что и остальные утверждения теоремы 21 можно обобщить на случай нескольких переменных, но мы не будем здесь входить в детали. Вместо этого укажем, как можно использовать теорему Планшереля в случае двух переменных для того, чтобы получить некоторые сведения относительно преобразования Ганкеля. Воспользуемся полярными координатами r, θ на плоскости и рассмотрим функции F из $L_2(R^2)$ специального вида $F(x, y) = f(r)e^{in\theta}$, где n — целое число. Так как

$$\infty > \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x, y)|^2\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} |f(r)|^2 r\, dr\, d\theta = 2\pi \int_0^{\infty} r\,|f(r)|^2\, dr,$$

то преобразование U_n, определенное соотношением

$$(U_nf)(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{f(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt[4]{x^2+y^2}} e^{in \operatorname{arctg}(y/x)},$$

представляет собой изометрический изоморфизм пространства $L_2(0, \infty)$ на некоторое (необходимо замкнутое) подпространство $\mathfrak{X}$ пространства $L_2(R^2)$. Преобразование Фурье G функции F имеет вид

$$G(u, v) = \lim_{\rho\to\infty} \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\rho^2} f(r)\, e^{in\theta} e^{-i(xu+yv)}\, dx\, dy,$$

где предел берется в смысле сходимости по норме в $L_2(R^2)$. Вводя полярные координаты $u = s\cos\varphi$, $v = s\sin\varphi$, получаем $xu + yv = rs\cos(\theta - \varphi)$, так что

$$G(u, v) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^R f(r)\, r\, dr \int_0^{2\pi} e^{-i\{rs\cos(\theta-\varphi) - n\theta\}}\, d\theta.$$

После подстановки $\theta' = \theta - \varphi + (\pi/2)$ и упрощений имеем

$$G(u, v) = \frac{1}{2\pi}(-ie^{i\varphi})^n \lim_{R\to\infty} \int_0^R f(r)\, r\, dr \int_0^{2\pi} e^{i(n\theta' - rs\sin\theta')}\, d\theta'.$$

С помощью *бесселевой функции* J_n порядка n,

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n\theta - z\sin\theta)}\, d\theta,$$

можно записать $G(u, v)$ в виде

$$G(u, v) = \lim_{R\to\infty} (-ie^{i\varphi})^n \int_0^R rf(r)\, J_n(rs)\, dr,$$

а применяя изометрический изоморфизм U_n, введенный выше, получаем

$$G(u, v) = \lim_{R\to\infty} \sqrt{2\pi}\, i^{-n} (U_n \tilde{g}_R)(u, v),$$

где

$$\tilde{g}_R(s) = s^{1/2} \int_0^R rf(r)\, J_n(rs)\, dr.$$

Таким образом, полагая $\dot{f}(r) = r^{1/2} f(r)$ и

$$(H_n\dot{f})(s) = \lim_{R\to\infty} \int_0^R (rs)^{1/2} J_n(rs)\, \dot{f}(r)\, dr,$$

видим, что предел, определяющий H_n, существует в смысле сходимости по норме в $L_2(0, \infty)$ и что $H_n = i^{-n} U_n^{-1} K U_n$, где K обозначает преобразование Фурье. Далее, формулу обращения преобразования Фурье можно интерпретировать как утверждение, что $K^2 = M$, где $(Mf)(x, y) = f(-x, -y)$. Так как

$$M(f(r)\, e^{in\theta}) = f(r)\, e^{in(\theta+\pi)} = (-1)^n f(r)\, e^{in\theta},$$

то $U_n^{-1} M U_n = (-1)^n I$. Таким образом,

$$H_n^2 = (i)^{-2n} U_n^{-1} K U_n U_n^{-1} K U_n = (i)^{-2n} U_n^{-1} M U_n = (-1)^{-n} (-1)^n I = I.$$

Это доказывает следующую теорему.

23. Теорема. *Пусть f принадлежит пространству $L_2(0, \infty)$ функций, интегрируемых с квадратом по мере Лебега. Тогда предел*

$$(H_n f)(s) = \lim_{R\to\infty} \int_0^R (rs)^{1/2} J_n(rs) f(r)\, dr$$

существует в смысле сходимости по норме в $L_2(0, \infty)$ и преобразование Ганкеля, определенное этой формулой, представляет собой изометрический изоморфизм пространства $L_2(0, \infty)$ на себя, причем обратное к H_n преобразование совпадает с H_n.

В гл. XIII мы обобщим этот результат на нецелые значения n и покажем, как можно получить более сложные унитарные преобразования такого типа.

4. Теоремы замкнутости

Как и в предыдущем параграфе, буквой R будем обозначать недискретную локально бикомпактную абелеву группу, а интегрировать всегда будем по мере Хаара на этой группе. В следствии 3.2 было отмечено, что комплексное B-пространство $L_1(R)$ является коммутативной B-алгеброй[1]) с операцией свертки в качестве умножения. В настоящем параграфе мы изучим эту алгебру с целью дать представление о теоремах замкнутости, группирующихся вокруг знаменитой теоремы Норберта Винера (теорема 7), в которой утверждается, что необращение в нуль преобразования Фурье функции из $L_1(R)$ есть необходимое и достаточное условие того, что линейные комбинации сдвигов этой функции всюду плотны в $L_1(R)$. Эта теорема Винера о замкнутости приобретает особое значение, если ее интерпретировать как теорему тауберова типа; такого рода приложения можно найти в § 5. Более глубокое представление о теории замкнутости в L_1 можно получить при изучении задачи Берлинга о возможности спектрального синтеза, которая также обсуждается в настоящем параграфе. Проблема спектрального синтеза состоит в том, чтобы узнать, содержится ли заданная ограниченная и измеримая на R функция φ в L_1-замкнутом линейном подпространстве пространства $L_\infty(R)$, порожденном теми характерами группы R, которые принадлежат L_1-замкнутому подпространству пространства $L_\infty(R)$, натянутому на всевозможные сдвиги функции φ. Анализ этой

[1]) Точнее, полной нормированной алгеброй; B-алгеброй $L_1(R)$ становится после присоединения единицы.— *Прим. перев.*

задачи приводит к результатам, более общим, чем первоначальная теорема Винера о замкнутости; см. теорему 21.

Изучение свойств замкнутости в $L_1(R)$ будет основано на рассмотрении двух тесно связанных коммутативных алгебр операторов в гильбертовом пространстве $L_2(R)$. С одной из этих алгебр—с алгеброй $\mathfrak{A}$ предыдущего параграфа—мы уже встречались раньше. Для удобства мы повторим здесь ее определение и некоторые свойства. Для каждой функции f из $L_1(R)$ свертка

$$(f*g)(x)=\int\limits_R f(x-y)\,g(y)\,dy, \qquad g\in L_2(R),$$

задает в гильбертовом пространстве $L_2(R)$ ограниченный линейный оператор $T(f)$:

$$T(f)\,g=f*g, \qquad g\in L_2(R).$$

Свертка $f*g$ определена также и тогда, когда обе функции f, g принадлежат $L_1(R)$, но в этом случае она содержится в $L_1(R)$, а не обязательно в $L_2(R)$. Комплексное B-пространство $L_1(R)$ является коммутативной нормированной алгеброй с операцией свертки в качестве умножения, и отображение $f\to T(f)$ представляет собой непрерывный изоморфизм алгебры $L_1(R)$ в алгебру $B(L_2(R))$ ограниченных линейных операторов, действующих в $L_2(R)$. Ни алгебра $T(L_1(R))$, ни ее замыкание $\overline{T(L_1(R))}$ в равномерной операторной топологии не содержат единицы I алгебры $B(L_2(R))$. Алгебра $\mathfrak{A}$ есть по определению B-алгебра, получающаяся присоединением единицы I к $\overline{T(L_1(R))}$. Ее элементы имеют вид $\alpha I+A$, где A принадлежит $\overline{T(L_1(R))}$. Эта алгебра $\mathfrak{A}$ является также B^*-алгеброй, и для f из $L_1(R)$ гильбертов сопряженный оператор к $T(f)$ задается соотношениями

$$T(f)^*=T(\tilde{f}), \qquad \tilde{f}(x)=\overline{f(-x)}.$$

Если для каждой функции f из $L_1(R)$ определить новую норму оператора $T(f)$, полагая $|T(f)|_1=|f|_1$, где $|f|_1$—норма функции f в $L_1(R)$, то алгебра $T(L_1(R))$ с такой нормой изометрически изоморфна $L_1(R)$ и, таким образом, удовлетворяет всем аксиомам B-алгебры, за исключением существования единицы. Единицу I можно присоединить, как это описано в § IX.1, рассматривая все пары $(\alpha, T(f))$, где α принадлежит полю комплексных чисел Φ, а f—функция из $L_1(R)$. Обозначим эту алгебру пар $(\alpha, T(f))$ с нормой

$$|(\alpha, T(f))|_1=|\alpha|+|f|_1$$

через $\mathfrak{A}_1$. Поскольку подалгебры алгебры $\mathfrak{A}_1$, состоящие из элементов вида $(\alpha, 0)$ или $(0, T(f))$, эквивалентны соответственно алгебрам Φ и $T(L_1(R))$ с L_1-нормой, то можно иногда вместо $(\alpha, T(f))$ писать $\alpha I + T(f)$. Таким образом, символу $(\alpha, T(f))$, или $\alpha I + T(f)$, где f принадлежит $L_1(R)$, можно сопоставить две нормы: одну как элементу алгебры $\mathfrak{A}$, а другую как элементу алгебры $\mathfrak{A}_1$. Эти две нормы связаны неравенством

$$|\alpha I + T(f)| \leqslant |\alpha I + T(f)|_1, \qquad f \in L_1(R).$$

Доказательства предыдущих утверждений можно найти в начале § 3.

Буквы $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_1$ мы будем употреблять для обозначения структурных пространств алгебр $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ соответственно. Буквой τ будем обозначать естественное гомоморфное отображение коммутативной B-алгебры в пространство всех непрерывных функций, определенных на ее структурном пространстве (IX.2.9). Так как $\mathfrak{A}$ является B^*-алгеброй, то отображение $\tau : \mathfrak{A} \to C(\mathcal{M})$ представляет собой изометрический $*$-изоморфизм алгебры $\mathfrak{A}$ на всю алгебру $C(\mathcal{M})$ (IX.3.8). Напомним (IX.2.2), что для любой коммутативной B-алгебры $\mathfrak{A}$ существует взаимно однозначное соответствие между ее максимальными идеалами и ненулевыми гомоморфизмами в поле комплексных чисел. Это соответствие задается равенством

$$H(x) = (\tau x)(m), \qquad x \in \mathfrak{A},$$

где H — гомоморфизм алгебры $\mathfrak{A}$, отвечающий максимальному идеалу m. Такой гомоморфизм непрерывен (следствие IX.2.3). Поскольку как для $\mathfrak{A}$, так и для $\mathfrak{A}_1$ любой ненулевой гомоморфизм H в поле комплексных чисел непрерывен, причем $H(I) = 1$, то он полностью определяется своими значениями на элементах вида $T(f)$, где $f \in L_1(R)$. Таким образом, каждое из пространств $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_1$ имеет бесконечно удаленную точку p_∞, соответствующую гомоморфизму H, который определяется равенствами

$$H(I) = 1, \quad H(T(f)) = 0, \quad f \in L_1(R).$$

Итак, если p — какая-нибудь точка, отличная от p_∞, то $(\tau T(f))(p) \neq 0$ для некоторой функции f из $L_1(R)$. Как и раньше, иногда нам будет удобно употреблять символ $\mathcal{M}_0$ для обозначения множества $\mathcal{M} - \{p_\infty\}$.

1. Теорема. *Структурные пространства алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}_1$ гомеоморфны, причем этот гомеоморфизм задается отображением, сопоставляющим каждому максимальному идеалу алгебры $\mathfrak{A}$ его пересечение с $\mathfrak{A}_1$.*

Доказательство. Это доказательство удобнее провести в терминах нетривиальных гомоморфизмов в поле комплексных чисел, а не на языке максимальных идеалов. Если H — такой гомоморфизм алгебры $\mathfrak{A}$, то его сужение $H_1 = H \mid \mathfrak{A}_1$ является нетривиальным гомоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}_1$ в Φ. Таким образом, отображение $H \longrightarrow H_1$ определяет отображение $\mathscr{M}$ в $\mathscr{M}_1$. Поскольку оба эти гомоморфизма непрерывны (IX.2.3) и $\mathfrak{A}_1$ всюду плотно в $\mathfrak{A}$, это отображение взаимно однозначно. Чтобы убедиться в том, что множество его значений совпадает со всем $\mathscr{M}_1$, рассмотрим какой-нибудь ненулевой гомоморфизм H_1 алгебры $\mathfrak{A}_1$. Если $H_1(T(f)) = 0$ для всех f из $L_1(R)$, то H_1 является сужением гомоморфизма H алгебры $\mathfrak{A}$, определенного равенством $H(\alpha I + A) = \alpha$. Если $H_1(T(f))$ не обращается в нуль тождественно для всех f из $L_1(R)$, то, как было показано в первой части доказательства теоремы 3.11, существует такой непрерывный характер h группы R, что

$$H_1(T(f)) = \int_R h(x) f(x)\, dx, \qquad f \in L_1(R).$$

В той же теореме 3.11 показывается, что этот характер определяет гомоморфизм алгебры $\mathfrak{A}$, сужение которого на $\mathfrak{A}_1$ совпадает с H_1. Итак, $H \longrightarrow H_1 = H \mid \mathfrak{A}_1$ порождает взаимно однозначное отображение пространства $\mathscr{M}$ на все $\mathscr{M}_1$. Далее, по определению (IX.2.7) базисы открытых множеств в $\mathscr{M}$, $\mathscr{M}_1$ строятся при помощи всевозможных конечных множеств элементов из $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ соответственно, так что непрерывность отображения $\mathscr{M} \longrightarrow \mathscr{M}_1$ вытекает непосредственно из определения топологии в $\mathscr{M}$ и $\mathscr{M}_1$. Поскольку эти пространства бикомпактны (IX.2.8), из леммы I.5.8 следует, что отображение $\mathscr{M} \longrightarrow \mathscr{M}_1$ является гомеоморфизмом, ч. т. д.

В силу теорем 1 и 3.15 структурное пространство алгебры $\mathfrak{A}_1$ гомеоморфно бикомпактному расширению $\hat{R} \cup \{p_\infty\}$ группы характеров группы R. Обозначение $\hat{R} \cup \{p_\infty\}$ оправдывается тем, что при указанных в теоремах 1 и 3.15 гомеоморфизмах пространств $\mathscr{M}$, $\mathscr{M}_1$ и $\hat{R} \cup \{p_\infty\}$ «бесконечно удаленные точки» этих пространств переходят друг в друга. Часто нам будет удобно считать эти пространства отождествленными посредством указанных гомеоморфизмов.

Если пространства $\mathscr{M}$, $\mathscr{M}_1$ и $\hat{R} \cup \{p_\infty\}$ отождествлены при помощи этих гомеоморфизмов, то функция $(\tau T(f))(m)$, которая, как показано в предыдущем доказательстве, для некоторого непрерывного характера h группы R задается интегралом $\int_R h(x) f(x)\, dx$, принимает в точке m одно и то же значение независимо от того, рассматривается $T(f)$ как элемент алгебры $\mathfrak{A}$ или $\mathfrak{A}_1$. Таким образом, в то время как в символе $T(f)$ все еще заключена некоторая неопределенность, поскольку его норма может быть определена только после указания той из алгебр $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, элементом которой мы его считаем, такое указание относительно символа $\tau T(f)$ не является больше необходимым. Так как $\tau T(f)$ зависит лишь от f, то нам будет иногда удобно обозначать эту функцию символом τf или $\hat{f}$. Таким образом, отображение $f \to \hat{f}$ является изоморфизмом между алгеброй $L_1(R)$ со сверткой в качестве умножения и некоторой подалгеброй алгебры $C(\mathcal{M}) = C(\mathcal{M}_1) = C(\hat{R} \cup \{p_\infty\})$.

2. Лемма. *Пусть точка $p \neq p_\infty$ принадлежит дополнению бикомпактного подмножества C пространства $\mathcal{M}$. Тогда найдется такая функция f из $L_1(R) \cap L_2(R)$ и такая окрестность N точки p, что*

$$0 \leqslant \hat{f}(m) \leqslant 1, \quad m \in \mathcal{M};$$

$$\hat{f}(m) = 0, \quad m \in C; \quad \hat{f}(m) = 1, \quad m \in N.$$

Доказательство. Будем считать, что пространство $\mathcal{M}$ отождествлено с бикомпактным расширением $\hat{R} \cup \{p_\infty\}$ группы характеров. Допустим сначала, что $p = 0$, и выберем окрестность W точки 0 так, что ее замыкание бикомпактно, не содержит p_∞ и не пересекается с C. Пусть V — такая окрестность 0, что $-V = V$ и $V + V + V \subseteq W$. Пусть g_1, g_2 — характеристические функции множеств V, $V + V$ соответственно, а μ — мера, введенная в лемме 3.6. Из этой леммы следует, что $\mu(W) < \infty$, и потому функции g_1, g_2 принадлежат $L_2(\hat{R}, \mathcal{B}, \mu)$, где $\mathcal{B}$ — семейство борелевских подмножеств в $\hat{R}$. По теореме Планшереля (3.9) функции $h_i = \tau^{-1} g_i$, $i = 1, 2$, принадлежат $L_2(R)$, так что функция h, определенная на R равенством $h(x) = h_1(x)\overline{h_2(x)}$, принадлежит $L_1(R)$. Из теоремы 3.9 (b) вытекает, что $E(W) h_i = h_i$; следовательно, по лемме 3.5 функция h непрерывна и ограничена и потому принадлежит $L_2(R)$. Далее,

$$\hat{h}(m) = \int_R \overline{[x, m]}\, h_1(x)\, \overline{h_2(x)}\, dx.$$

Пусть $g_{1,m}$ — сдвиг функции g_1, определенный соотношением $g_{1,m}(q) = g_1(q+m)$. Тогда, применяя лемму 3.18, находим, что

$$(\tau^{-1} g_{1,m})(x) = [x, -m](\tau^{-1} g_1)(x) = \overline{[x, m]}\, h_1(x);$$

таким образом, поскольку отображение τ^{-1} унитарно,

$$\hat{h}(m) = \int_R (\tau^{-1} g_{1,m})(x)\, \overline{(\tau^{-1} g_2)(x)}\, dx = \int_{\hat{R}} g_1(q+m)\, \overline{g_2(q)}\, \mu(dq).$$

Если $m \in V$, то $g_1(q+m)\overline{g_2(q)} = g_1(q+m)$, так что из теоремы 3.19 следует, что $(\tau h)(m) = \mu(V)$ при $m \in V$. Если $m \notin V+V+V$, то подинтегральное выражение обращается в нуль, поэтому $\hat{h}(m)=0$ для таких m; в частности, $\hat{h}(m)=0$ для всех m из C. Для всех q и m имеем $g_1(q+m)\overline{g_2(q)} \leqslant g_1(q+m)$, и так как мера μ инвариантна, то

$$\hat{h}(m) \leqslant \int_{\hat{R}} g_1(q+m)\,\mu(dq) = \mu(V).$$

Беря в качестве f функцию $h/\mu(V)$, получаем утверждение леммы для $p=0$. Справедливость леммы в общем случае вытекает из предыдущего и из тождества

$$(\tau f)(m-p) = (\tau\{[\cdot, p]\, f(\cdot)\})(m),$$

которое было доказано в лемме 3.18.

3. Лемма. *Пусть C_1, C_2 — непересекающиеся бикомпактные подмножества пространства $\mathcal{M}$, причем $p_\infty \notin C_2$. Тогда в $L_1(R) \cap L_2(R)$ существует такая функция f, что*

$$0 \leqslant \hat{f}(m) \leqslant 1, \quad m \in \mathcal{M};$$
$$\hat{f}(m) = 0, \quad m \in C_1; \qquad \hat{f}(m) = 1, \quad m \in C_2.$$

Доказательство. Согласно предыдущей лемме, для каждой точки p из C_2 найдется такая окрестность N_p и такая функция f_p из $L_1(R) \cap L_2(R)$, что $\hat{f}_p$ обращается в нуль на C_1, тождественно равняется 1 на N_p и $0 \leqslant \hat{f}_p(m) \leqslant 1$ для всех m. Так как C_2 бикомпактно, то имеется такой конечный набор $f_1, \ldots, f_n$ функций из $L_1(R) \cap L_2(R)$, что соответствующие этим функциям окрестности $N_1, \ldots, N_n$ покрывают C_2. Функция $f = f_1 + f_2 - f_1 * f_2$ принадлежит $L_1(R) \cap L_2(R)$, причем

$$\hat{f}(m) = \hat{f}_1(m) + \hat{f}_2(m) - \hat{f}_1(m)\hat{f}_2(m) = 1, \quad m \in N_1 \cup N_2;$$
$$\hat{f}(m) = 0, \quad m \in C_1; \qquad 0 \leqslant \hat{f}(m) \leqslant 1, \quad m \in \mathcal{M}.$$

Ясно, что, повторив этот процесс конечное число раз, мы получим функцию, обладающую желаемыми свойствами.

4. Теорема. *Пусть функции f и g интегрируемы на R, и пусть C — бикомпактное подмножество пространства $\mathcal{M}$, не содержащее бесконечно удаленной точки. Если $\hat{g}$ обращается в нуль на дополнении к C, а $\hat{f}$ ни в одной точке множества C не равняется нулю, то существует такая интегрируемая функция h, что $g = f * h$.*

Доказательство. Так как τ является *-изоморфизмом между $\mathfrak{A}$ и $C(\mathcal{M})$, то из леммы 3.1 (с) следует, что $\tau\widetilde{f}=\overline{\tau f}$, так что $\tau(f*\widetilde{f})(m)=|\hat{f}(m)|^2$. Таким образом, $\tau(f*\widetilde{f})(m)\geqslant\varepsilon$ для некоторого положительного числа ε и всех точек m из некоторой окрестности N множества C. Из предыдущей леммы вытекает, что в $L_1(R)\cap L_2(R)$ найдется такая функция k, что

$$0\leqslant\hat{k}(m)\leqslant 1, \quad m\in\mathcal{M};$$

$$\hat{k}(m)=1, \quad m\in C; \quad \hat{k}(m)=0, \quad m\notin N.$$

Следовательно, $\hat{k}(m)\hat{g}(m)=\hat{g}(m)$ для всех m из $\mathcal{M}$, а так как отображение $f\longrightarrow\hat{f}$ представляет собой изоморфизм, то $k*g=g$. Так как $\tau(I+T(-k+f*\widetilde{f})(m)>0$ для всех m из $\mathcal{M}$, то оператор $I+T(-k+f*\widetilde{f})$ не принадлежит ни одному максимальному идеалу алгебры $\mathfrak{A}_1$, и потому по лемме IX.1.12 (е) в $\mathfrak{A}_1$ найдется обратный к нему элемент $\alpha I+T(a)$. Таким образом, для всех m из $\mathcal{M}$

$$\hat{g}(m)=(\alpha+\hat{a}(m))(1-\hat{k}(m)+\hat{f}(m)\hat{\widetilde{f}}(m))\hat{g}(m)=$$

$$=(\alpha+\hat{a}(m))\hat{f}(m)\hat{\widetilde{f}}(m)\hat{g}(m),$$

откуда следует, что функция h, определенная равенством $h=\alpha\widetilde{f}*g+a*\widetilde{f}*g$, обладает тем свойством, что $\hat{g}(m)=\hat{h}(m)\hat{f}(m)$ для всех m из $\mathcal{M}$. Так как отображение $f\longrightarrow\hat{f}$ является изоморфизмом, то это означает, что $g=h*f$, ч. т. д.

5. Лемма. *Множество функций f из $L_1(R)$, для которых $\hat{f}$ обращается в нуль в окрестности бесконечно удаленной точки, всюду плотно в $L_1(R)$.*

Доказательство. По лемме 3.6 множество всех функций из $L_2(\hat{R}, \mathscr{B}, \mu)$, равных нулю вне бикомпактных множеств, всюду плотно в этом пространстве, а по теореме Планшереля множество всех функций f из $L_2(R)$, для которых $\hat{f}$ обращается в нуль всюду, за исключением некоторого бикомпактного подмножества в $\hat{R}$, плотно в $L_2(R)$. Так как $[f, g]\longrightarrow f\overline{g}$ является непрерывным отображением пространства $L_2(R)\times L_2(R)$ на все пространство $L_1(R)$, то множество произведений $f\overline{g}$, где f и g — такие функции из $L_2(R)$, что их преобразования $\hat{f}$ и $\hat{g}$ обращаются в нуль вне некоторых бикомпактных подмножеств $\hat{R}$, всюду плотно в $L_1(R)$. Итак, для завершения доказательства достаточно показать, что если $f, g\in L_2(R)$ и $\hat{f}, \hat{g}$ обращаются в нуль вне бикомпактного множества $C\subseteq\hat{R}$, для которого $C=-C$, то $\tau(f\overline{g})$ равно нулю вне бикомпактного множества $C+C$. В силу теоремы Планшереля отображение τ унитарно, и потому из леммы 3.18 следует, что

$$\tau(f\bar{g})(m)=\int_R \overline{[x, m]}\, f(x)\overline{g(x)}\,dx=\int_{\hat{R}} \hat{f}(p+m)\,\overline{\hat{g}(p)}\,\mu(dp).$$

Доказательство закончено, так как подинтегральная функция равна нулю, если только m не принадлежит множеству $C+C$.

Напомним, что y-сдвиг f_y функции f на R определяется равенством $f_y(x)=f(x-y)$. Говорят, что множество функций на R замкнуто относительно сдвигов, если для каждого y из R функция f_y принадлежит этому множеству всякий раз, когда ему принадлежит функция f.

6. Лемма. *Замкнутое линейное многообразие, порожденное всевозможными сдвигами функций из некоторого множества $S\subseteq L_1(R)$, совпадает с замкнутым идеалом алгебры $L_1(R)$, порожденным множеством S.*

Доказательство. Заметим сначала, что если $f, g\in L_1(R)$ и $\varphi\in L_\infty(R)$, то функция $\varphi(x)f(x-y)g(y)$ является $\lambda\times\lambda$-интегрируемой, так что

$$\text{(I)}\qquad \int_R \varphi(x)(f*g)(x)\,dx=\int_R \varphi(x)\left\{\int_R f(x-y)\,g(y)\,dy\right\}dx=$$
$$=\int_R g(y)\left\{\int_R \varphi(x)f(x-y)\,dx\right\}dy.$$

Пусть теперь $\mathfrak{L}$ — замкнутое линейное многообразие, порожденное сдвигами функций из S, а $\mathfrak{J}$ — наименьший замкнутый идеал в $L_1(R)$, содержащий S. Из инвариантности меры λ относительно сдвигов следует, что $\mathfrak{L}$ замкнуто относительно сдвигов. Пусть F — непрерывный линейный функционал на $L_1(R)$, равный 0 на $\mathfrak{L}$, и пусть φ — ограниченная измеримая функция, представляющая F (IV.8.5); пусть f — какая-нибудь функция из $\mathfrak{L}$. Тогда, так как $0=Ff_y=\int_R \varphi(x)f(x-y)\,dx$, из равенства (I) следует, что $F(f*g)=0$ для любой функции g из $L_1(R)$. Отсюда в силу следствия II.3.13 получаем, что $f*g\in\mathfrak{L}$ для любой функции g из $L_1(R)$, а это означает, что $\mathfrak{L}$ является идеалом; итак, $\mathfrak{L}\supseteq\mathfrak{J}$. Обратно, пусть f принадлежит замкнутому идеалу $\mathfrak{J}$ алгебры $L_1(R)$, а F — непрерывный линейный функционал, равный 0 на $\mathfrak{J}$. Тогда если функция φ представляет F, то

$$\int_R \varphi(x)(f*g)(x)\,dx=0,\qquad g\in L_1(R).$$

Из равенства (I) следует, что функция $\int\limits_R \varphi(x) f(x-y)\,dx$ равна 0 для почти всех y из R, а так как она непрерывна по y (лемма 3.1 (d)), то равна 0 для всех y из R. Таким образом, в силу следствия II.3.13 все сдвиги функции f принадлежат $\mathfrak{J}$, т. е. идеал $\mathfrak{J}$ инвариантен относительно сдвигов. Это показывает, что $\mathfrak{J} \supseteq \mathfrak{L}$, и завершает доказательство леммы.

→ 7. Теорема (*теорема Винера о L_1-замкнутости*). *Линейные комбинации сдвигов функции f из $L_1(R)$ всюду плотны в $L_1(R)$ тогда и только тогда, когда ее преобразование $\hat{f}$ не равно нулю ни в одной точке группы характеров группы R.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{L}$ — замкнутое линейное подпространство, натянутое на сдвиги функции f из $L_1(R)$; допустим, что $\hat{f}(m) \neq 0$ для каждой точки m из $\mathcal{M}$, отличной от p_∞. Тогда $\mathfrak{L}$ замкнуто относительно сдвигов и по предыдущей лемме является идеалом. Если g — такая функция из $L_1(R)$, что $\hat{g}$ обращается в нуль на дополнении некоторого бикомпактного подмножества в $\mathcal{M}_0$, то по теореме 4 в $L_1(R)$ найдется такая функция h, что $g = f * h$. Это показывает, что $\mathfrak{L}$ содержит любую такую функцию g. Из леммы 5 следует, что $\mathfrak{L} = L_1(R)$.

Обратно, предположим, что линейные комбинации сдвигов функции f из $L_1(R)$ всюду плотны в $L_1(R)$, и допустим, что $\hat{f}(m) = 0$ для некоторой точки $m \neq p_\infty$. По лемме 6 функции вида $h = f * g$, где $g \in L_1(R)$, всюду плотны в $L_1(R)$, ибо они образуют идеал, который в силу очевидного соотношения $f_y * g = f * g_y$ содержит все сдвиги функции f. Для такой функции h имеем $\hat{h}(m) = \hat{f}(m)\,\hat{g}(m) = 0$, откуда в силу непрерывности отображения $h \to \hat{h}$ следует, что $\hat{h}(m) = 0$ для всех h из $L_1(R)$. Поскольку $m \neq p_\infty$, это противоречит лемме 2; доказательство закончено.

8. Теорема. *Если $\mathfrak{L}$ — собственное замкнутое линейное подпространство в $L_1(R)$, инвариантное относительно сдвигов, то в $\hat{R}$ найдется такая точка m, для которой $\hat{f}(m) = 0$ для всех f из $\mathfrak{L}$.*

Доказательство. Допустим противное. Пусть C — бикомпактное подмножество в $\hat{R}$, а g — функция из $L_1(R)$, преобразование которой $\hat{g}$ равно нулю на дополнении к C. По предположению для каждой точки p из C в $\mathfrak{L}$ найдется такая функция f_p, что $\hat{f}_p(p) \neq 0$. Так как $\mathfrak{L}$ — идеал (лемма 6), то $f_p * \tilde{f}_p$ принадлежит $\mathfrak{L}$, а поскольку $\tau(f_p * \tilde{f}_p)\,(m) = |\hat{f}_p(m)|^2$, можно считать, что функции f_p выбраны таким образом, что $\hat{f}_p(m) \geqslant 0$ для всех

m из $\hat{R}$. Пусть N_p — окрестность точки p, на которой функция $\hat{f}_p$ положительна. Так как C бикомпактно, то конечное число этих окрестностей $N_{p_1}, \ldots, N_{p_n}$ покрывает C. Функция $f = f_{p_1} + \ldots \ldots + f_{p_n}$ принадлежит $\mathfrak{L}$ и $\hat{f}(m) > 0$ на C. По теореме 4 в $L_1(R)$ существует такая функция h, что $g = f * h$. Из леммы 6 следует, что g принадлежит $\mathfrak{L}$. Так как g и C были взяты произвольно, то по лемме 5 $\mathfrak{L} = L_1(R)$, что противоречит условию теоремы.

Следующий результат можно рассматривать как двойственный к только что доказанному.

9. Теорема. *Ненулевое линейное подпространство пространства $L_\infty(R)$, инвариантное относительно сдвигов и $L_1(R)$-замкнутое в $L_\infty(R)$, содержит по крайней мере один характер группы R.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{K}$ — подпространство в $L_\infty(R)$, обладающее указанными свойствами, и пусть $\mathfrak{L}$ — сопряженно-ортогональное дополнение к $\mathfrak{K}$, т. е. множество всех h из $L_1(R)$, для которых

$$\int_R \overline{h(x)}\, \varphi(x)\, dx = 0 \tag{I}$$

при всех φ из $\mathfrak{K}$. Так как $\mathfrak{K}$ содержит ненулевые векторы, то $\mathfrak{L}$ — собственное подпространство пространства $L_1(R)$. Из инвариантности $\mathfrak{K}$ следует, что если $h \in \mathfrak{L}$ и $\varphi \in \mathfrak{K}$, то $\varphi_{-y} \in \mathfrak{K}$ и

$$0 = \int_R \overline{h(x)}\, \varphi_{-y}(x)\, dx = \int_R \overline{h(x)}\, \varphi(x+y)\, dx =$$

$$= \int_R \overline{h(x-y)}\, \varphi(x)\, dx = \int_R \overline{h_y(x)}\, \varphi(x)\, dx,$$

а это означает, что h_y принадлежит $\mathfrak{L}$, и доказывает инвариантность $\mathfrak{L}$ относительно сдвигов. В предыдущей теореме доказывается, что в $\hat{R}$ найдется такая точка m_0, что $\hat{h}(m_0) = 0$ для всех h из $\mathfrak{L}$. Кроме того, так как $\mathfrak{K}$ замкнуто в $L_\infty(R)$ относительно $L_1(R)$-топологии, то из следствия V.3.12 вытекает, что $\mathfrak{K}$ является сопряженно-ортогональным дополнением к $\mathfrak{L}$, т. е. если равенство (I) справедливо для некоторой функции φ из $L_\infty(R)$ и всех h из $\mathfrak{L}$, то φ принадлежит $\mathfrak{K}$. Таким образом, если $h_{m_0} = [\cdot, m_0]$ — характер, соответствующий точке m_0 (теорема 3.11), то для любой функции h из $\mathfrak{L}$

$$0 = \hat{h}(m_0) = \int_R h(x)\, \overline{[x, m_0]}\, dx = \int_R \overline{h(x)}\, [x, m_0]\, dx,$$

откуда следует, что характер $[\cdot, m_0]$ принадлежит $\mathfrak{K}$, ч. т. д.

10 Заказ № 134

Только что доказанная теорема показывает, что если ограниченная и измеримая на R функция φ отлична от нуля на некотором множестве положительной меры, то в L_1-замкнутом линейном подпространстве $\mathfrak{K}(\varphi)$ пространства $L_\infty(R)$, порожденном сдвигами функции φ, содержится по крайней мере один характер группы R. Проблема *спектрального синтеза* для функции, поставленная А. Берлингом, состоит в определении того, содержится ли функция φ в L_1-замкнутом линейном подпространстве пространства $L_\infty(R)$, натянутом на характеры, принадлежащие $\mathfrak{K}(\varphi)$. Хотя это не всегда имеет место, мы увидим, что иногда это справедливо. В определении 10 вводится основное понятие, которым пользуются при изучении проблемы спектрального синтеза.

10. Определение. *Спектральным множеством* $\sigma(\varphi)$ ограниченной измеримой функции φ на R называется множество всех характеров группы R, содержащихся в L_1-замкнутом подпространстве $\mathfrak{K}(\varphi)$ пространства $L_\infty(R)$, порожденном сдвигами функции φ.

Следующая лемма содержит некоторые элементарные свойства спектральных множеств, которыми мы будем пользоваться при изучении спектрального синтеза.

11. Лемма. *Пусть φ и ψ — функции из $L_\infty(R)$, α — комплексное число, $\varphi_y(x)=\varphi(x-y)$ и $\tilde{\varphi}(x)=\overline{\varphi(-x)}$ при $x, y \in R$. Тогда*

(a) *спектральное множество $\sigma(\varphi)$ является замкнутым подмножеством в $\hat{R}$, причем оно пусто тогда и только тогда, когда $\varphi=0$;*

(b) $\sigma(\alpha\varphi)=\sigma(\varphi), \quad \alpha\neq 0;$

(c) $\sigma(\varphi_y)=\sigma(\varphi), \quad \sigma(\tilde{\varphi})=\sigma(\varphi);$

(d) *если $[\cdot, m]$ — характер группы R, то*

$$\sigma([\cdot, m]\,\varphi(\cdot))=\sigma(\varphi)+m;$$

(e) $\sigma(\varphi+\psi)\subseteq\sigma(\varphi)\cup\sigma(\psi).$

Доказательство. Из теоремы 9 следует, что $\sigma(\varphi)$ пусто тогда и только тогда, когда $\varphi=0$. Чтобы убедиться в том, что $\sigma(\varphi)$ замкнуто, рассмотрим в $L_1(R)$ сопряженно-ортогональное дополнение $\mathfrak{L}(\varphi)$ к $\mathfrak{K}(\varphi)$. По следствию V.3.12 характер m из $\hat{R}$ тогда и только тогда принадлежит $\sigma(\varphi)$, когда

$$\text{(I)} \qquad \hat{f}(m)=\int_R \overline{[x, m]}\,f(x)\,dx=0, \qquad f\in\mathfrak{L}(\varphi).$$

Так как функция $\hat{f}$ непрерывна, то множество $\{m \mid m\in\hat{R},\ \hat{f}(m)=0\}$ замкнуто; поэтому множество $\sigma(\varphi)$, представляющее собой пересечение таких множеств по всем $f\in\mathfrak{L}(\varphi)$, также замкнуто. Это доказывает (a). Утверждения (b) и $\sigma(\varphi_y)=\sigma(\varphi)$ очевидны, так как они следуют непосредственно из определения подпространства $\mathfrak{K}(\varphi)$, согласно которому $\mathfrak{K}(\varphi)=\mathfrak{K}(\alpha\varphi)=\mathfrak{K}(\varphi_y)$. С помощью простой выкладки получаем, что $\widetilde{f}\in\mathfrak{L}(\widetilde{\varphi})$ тогда и только тогда, когда $f\in\mathfrak{L}(\varphi)$, а так как нули функций τf и $\tau\widetilde{f}$ совпадают, то, учитывая равенство (I), убеждаемся в справедливости утверждения (c). Положим теперь $\psi(x)=[x, m]\,\varphi(x)$, так что $f\in\mathfrak{L}(\psi)$ тогда и только тогда, когда $\overline{[\cdot, m]}\,f(\cdot)$ принадлежит $\mathfrak{L}(\varphi)$. Таким образом, используя условие (I), получаем, что m_1 принадлежит $\sigma(\varphi)$ тогда и только тогда, когда

$$\int_R \overline{[x, m_1]}\,\overline{[x, m]}\,f(x)\,dx=0, \qquad f\in\mathfrak{L}(\psi).$$

Очевидно, что это равносильно тому, что $m_1+m\in\sigma(\psi)$, т. е. $\sigma(\varphi)+m=\sigma(\psi)$. Утверждение (d) доказано.

Пункт (e) мы докажем от противного, предполагая, что в $\sigma(\varphi+\psi)$ имеется точка m, не принадлежащая ни одному из спектральных множеств $\sigma(\varphi)$, $\sigma(\psi)$. Из условия (I) следует, что найдутся такие функции f, g из $\mathfrak{L}(\varphi)$ и $\mathfrak{L}(\psi)$ соответственно, что $\hat{f}(m)\neq 0$, $\hat{g}(m)\neq 0$. Положим $h=f*g$, так что $\hat{h}(m)=$ $=\hat{f}(m)\,\hat{g}(m)\neq 0$. Так как $f\in\mathfrak{L}(\varphi)$, то

$$\begin{aligned}\int_R h(x)\,\overline{\varphi(x-y)}\,dx&=\int_R\int_R f(x-z)\,g(z)\,\overline{\varphi(x-y)}\,dx\,dz=\\&=\int_R\int_R f(x)\,\overline{\varphi(x+z-y)}\,g(z)\,dx\,dz=\\&=\int_R 0\cdot g(z)\,dz=0.\end{aligned}$$

Итак, $h\in\mathfrak{L}(\varphi)$. Аналогичным образом убеждаемся в том, что $h\in\mathfrak{L}(\psi)$; следовательно, $h\in\mathfrak{L}(\varphi+\psi)$. Так как m принадлежит $\sigma(\varphi+\psi)$, то из условия (I) получаем, что $\hat{h}(m)=0$. Противоречие.

Лемма 12 связывает понятие спектрального множества с операцией свертки.

12. Лемма. *Пусть* $\varphi\in L_\infty(R)$ *и* $f\in L_1(R)$.

(a) *Характер* m *принадлежит* $\sigma(\varphi)$ *тогда и только тогда, когда* $\hat{g}(m)=0$ *для тех* g *из* $L_1(R)$, *для которых* $g*\varphi=0$.

(b) $\sigma(f*\varphi)\subseteq\sigma(\varphi)$.

(c) *Спектральное множество $\sigma(f*\varphi)$ не пересекается ни с одним открытым множеством в $\hat{R}$, на котором $\hat{f}$ обращается в нуль*[1]).

Доказательство. Функция $f*\varphi$ ограничена и непрерывна (лемма 3.1 (d)), так что утверждения, которые должны быть доказаны, имеют смысл. Чтобы доказать (a), заметим сначала, что $g*\varphi=0$ тогда и только тогда, когда функция $\tilde{g}$ принадлежит подпространству $\mathfrak{L}(\varphi)$, представляющему собой сопряженно-ортогональное дополнение к $\mathfrak{K}(\varphi)$ в пространстве $L_1(R)$. При доказательстве предыдущей теоремы было отмечено, что характер m принадлежит $\sigma(\varphi)$ тогда и только тогда, когда $\hat{g}(m)=0$ для всех g из $\mathfrak{L}(\varphi)$. Утверждение же пункта (a) состоит в том, что m принадлежит $\sigma(\varphi)$ тогда и только тогда, когда $\hat{g}(m)=0$ для тех g из $L_1(R)$, для которых $\tilde{g}\in\mathfrak{L}(\varphi)$. Легко видеть, что эти два утверждения равносильны, ибо $(\tau\tilde{g})(m)=\overline{\hat{g}(m)}$.

Пусть теперь $\tilde{g}\in\mathfrak{L}(\varphi)$. Тогда, как показано в предыдущем абзаце, $g*\varphi=0$. Следовательно, $g*f*\varphi=0$, так что $\tilde{g}\in\mathfrak{L}(f*\varphi)$. Это доказывает, что $\mathfrak{L}(\varphi)\subseteq\mathfrak{L}(f*\varphi)$. Отсюда немедленно следует справедливость (b), ибо $m\in\sigma(\varphi)$ тогда и только тогда, когда $\hat{g}(m)=0$ для всех $\tilde{g}$ из $\mathfrak{L}(\varphi)$, и $m\in\sigma(f*\varphi)$ в том и только том случае, когда $\hat{g}(m)=0$ для всех $\tilde{g}$ из $\mathfrak{L}(f*\varphi)$.

Наконец, пусть $\hat{f}(m)=0$ для всех m из открытого множества N. Пусть $p\in N$. Применяя лемму 3, выберем в $L_1(R)$ такую функцию h, для которой $\hat{h}(p)=1$ и $\hat{h}(m)=0$ на дополнении к N. Тогда $\tau(h*f)=\hat{h}\hat{f}=0$, и так как τ — изоморфизм, то $h*f=0$. Таким образом, $h*(f*\varphi)=0$. Так как $\hat{h}(p)\neq 0$, то из пункта (a) следует, что $p\notin\sigma(f*\varphi)$, ч. т. д.

13. Теорема. *Если φ — ограниченная и измеримая функция на R, $\sigma(\varphi)$ — ее спектральное множество, а N — какая-нибудь его окрестность, то φ содержится в L_1-замкнутом линейном подпространстве пространства $L_\infty(R)$, порожденном характерами из N. Обратно, если φ принадлежит L_1-замкнутому линейному многообразию, порожденному характерами из некоторого замкнутого множества F, то $\sigma(\varphi)\subseteq F$.*

Доказательство. Допустим, что φ не принадлежит L_1-замкнутому подпространству, порожденному характерами из N. По следствию V.3.12 в $L_1(R)$ найдется такая функция f, что $\hat{f}(m)=0$

[1]) Иными словами, $\sigma(f*\varphi)$ не содержит ни одной точки, являющейся внутренней для множества нулей функции $\hat{f}$.— *Прим. перев.*

для всех m из N и $\int\limits_R f(x)\overline{\varphi(x)}\,dx \neq 0$. Так как $(\tau\tilde{f})(m) = \overline{\hat{f}(m)}$, то $(\tau\tilde{f})(m) = 0$ для всех m из N; таким образом, из леммы 12 (c) следует, что пересечение $\sigma(\tilde{f} * \varphi) \cap N$ пусто. По леммме 12 (b) $\sigma(\tilde{f} * \varphi) \subseteq \sigma(\varphi) \subseteq N$, так что $\sigma(\tilde{f} * \varphi)$ пусто, и по лемме 11 (a) имеем $\tilde{f} * \varphi = 0$. В силу леммы 3.1 (d) функция $\tilde{f} * \varphi$ непрерывна и потому равна 0 тождественно; в частности,

$$0 = (\tilde{f} * \varphi)(0) = \int\limits_R \tilde{f}(x)\,\varphi(-x)\,dx = \int\limits_R \overline{f(x)}\,\varphi(x)\,dx,$$

что противоречит выбору функции f.

Для того чтобы доказать обратное утверждение, допустим, что в $\sigma(\varphi)$ имеется характер p, не принадлежащий множеству F. По лемме 2 в $L_1(R)$ найдется такая функция f, что $\hat{f}(p) = 1$ и $\hat{f}(m) = 0$ для всех m из F. Тогда

$$\int\limits_R f(x)\,\overline{[x, m]}\,dx = \hat{f}(m) = 0, \qquad m \in F,$$

и потому $\int\limits_R f(x)\,\overline{\psi(x)}\,dx = 0$ для всех ψ из L_1-замкнутого подпространства $\mathfrak{K}$, порожденного характерами из F. Так как $[x+y, m] = [x, m]\,[y, m]$, то L_1-замкнутое линейное многообразие $\mathfrak{K}$, порожденное характерами из F, инвариантно относительно сдвигов. Таким образом, поскольку φ по предположению лежит в $\mathfrak{K}$, все ее сдвиги также принадлежат $\mathfrak{K}$. Так как $\mathfrak{K}$ является L_1-замкнутым, то из определения 10 следует, что $[\cdot, p]$ принадлежит $\mathfrak{K}$. Но тогда $\hat{f}(p) = \int\limits_R f(x)\,\overline{[x, p]}\,dx = 0$, и мы получаем противоречие.

В дальнейшем теорема 13 будет усилена, а именно, в теореме 20 мы покажем, что функция φ принадлежит подпространству, порожденному характерами из $\sigma(\varphi)$, если граница ее спектрального множества не содержит непустых совершенных подмножеств. Перед тем как доказывать это, полезно получить некоторую предварительную информацию. С этой целью мы вводим, как это указано ниже, линейное отображение Φ пространства $L_2(R)$ в $L_2(\hat{R})$. Пусть $\varphi \in L_\infty(R)$, так что для любой функции f из $L_2(R)$ функция φf также принадлежит $L_2(R)$, причем $|\varphi f|_2 \leqslant |\varphi|_\infty |f|_2$. Отображение Φ определяется для $f \in L_2(R)$

равенством $\Phi(f) = \tau(\varphi f)$. По теореме Планшереля Φ непрерывно. Из леммы 3.18 следует, что если φ — характер m_0 из $\hat{R}$, т. е. $\varphi(x) = [x, m_0]$, $x \in R$, то $\Phi(f)$ представляет собой сдвиг $(\tau f)_{m_0}$ функции τf, который задается формулой $(\Phi f)(m) = \hat{f}(m - m_0)$. В следующих леммах нас будет интересовать тот частный случай, когда функция φ из $L_\infty(R)$ такова, что $\sigma(\varphi) = \{0\}$.

14. Лемма. *Пусть* $\varphi \in L_\infty(R)$, $\sigma(\varphi) = \{0\}$ *и* $f \in L_1(R) \cap L_2(R)$. *Тогда функция* $\Phi(f)$ *равна нулю на каждом открытом подмножестве в* $\hat{R}$, *на котором* $\hat{f}$ *обращается в нуль.*

Доказательство. Пусть m — произвольная точка открытого множества N, на котором $\hat{f}$ обращается в нуль, и пусть V — такая окрестность нуля в $\hat{R}$, что $V = -V$ и $m + V \subseteq N$. По теореме 13 найдется такая обобщенная последовательность, элементами которой являются линейные комбинации $\varphi_\alpha(x) = \sum_{i=1}^{r} c_i [x, m_i]$ характеров $[\cdot, m_i]$, $m_i \in V$, что

$$\text{(I)} \qquad \int_R \varphi(x) g(x)\, dx = \lim_\alpha \int_R \varphi_\alpha(x) g(x)\, dx, \qquad g \in L_1(R).$$

Так как $m + V = m - V \subseteq N$, то $m - m_i \in N$, откуда следует, что для линейного оператора Φ_α, соответствующего функции φ_α, равенство $(\Phi_\alpha f)(m) = 0$ выполняется при всех α. Из равенства (I) получаем

$$(\Phi f)(m) = \int_R \overline{[x, m]}\, \varphi(x) f(x)\, dx =$$

$$= \lim_\alpha \int_R \overline{[x, m]}\, \varphi_\alpha(x) f(x)\, dx = \lim_\alpha (\Phi_\alpha f)(m) = 0,$$

т. е. Φf обращается в нуль в произвольной точке m из N, ч. т. д.

15. Лемма. *Пусть функция* φ *из* $L_\infty(R)$ *такова, что* $\sigma(\varphi) = \{0\}$. *Тогда существует такое комплексное число* α, *что*

$$\Phi(\tau^{-1}\chi_V) = \alpha \chi_V$$

для любого открытого в $\hat{R}$ *множества* V, *замыкание которого бикомпактно.*

Доказательство. Из леммы 3.6 (I) вытекает, что $\mu(V) < \infty$; таким образом, как было отмечено в замечании, следующем за доказательством этой леммы, для каждого целого положительного n найдется такое открытое множество $U_n \subseteq V$, что $\overline{U}_n \subseteq V$ и $\mu(V \cap U_n') < 1/n$. Можно считать, что $\overline{U}_n \subseteq U_{n+1}$,

$n=1, 2, \ldots$. По лемме 3 в $L_1(R)\cap L_2(R)$ существуют такие функции f_n, что $\hat{f}_n$ обращаются в 0 на дополнении к V, $\hat{f}_n(m)=1$ для $m\in\overline{U}_n$ и все значения $\hat{f}_n$ заключены между 0 и 1. Ясно, что последовательность $\{\hat{f}_n\}$ стремится к χ_V по норме в $L_2(\hat{R})$, так что $\{\Phi(f_n)\}$ сходится в этом же пространстве к $\Phi(\tau^{-1}\chi_V)$. По следствию III.6.13 (a) некоторая подпоследовательность этой последовательности сходится почти всюду, и потому можно считать, что $\{\Phi f_n\}$ сходится почти всюду к $\Phi(\tau^{-1}\chi_V)$.

Так как $\hat{f}_n$ обращается в 0 на дополнении к V, то из предыдущей леммы следует, что Φf_n также обладает этим свойством (нужно учесть, что $\overline{V}$ бикомпактно, а функция Φf_n непрерывна, ибо $f_n\in L_1(R)$). Покажем, что функция Φf_n постоянна на U_n. Пусть m_1, $m_2\in U_n$. По лемме 3.18 функции g_n и g'_n, определенные на R соотношениями $g_n(x)=\overline{[x, m_1]}\, f_n(x)$ и $g'_n(x)=\overline{[x, m_2]}\, f_n(x)$, имеют преобразования $\hat{g}_n(m)=\hat{f}_n(m+m_1)$ и $\hat{g}'_n(m)=\hat{f}_n(m+m_2)$. Из той же леммы и из замечания, предшествующего лемме 14, следует, что $(\Phi g_n)(m)=(\Phi f_n)(m+m_1)$ и $(\Phi g'_n)(m)=(\Phi f_n)(m+m_2)$ для всех m. Таким образом,

$$\tau(g_n-g'_n)(m)=\hat{f}_n(m+m_1)-\hat{f}_n(m+m_2)=0,$$

если только m принадлежит пересечению W множеств U_n-m_1 и U_n-m_2. Понятно, что W — окрестность нуля в $\hat{R}$. Таким образом, из леммы 14 следует, что $(\Phi g_n)(m)=(\Phi g'_n)(m)$ для всех m из W, а это означает, что $(\Phi f_n)(m+m_1)=(\Phi f_n)(m+m_2)$ при $m\in W$, и, следовательно, a fortiori, $(\Phi f_n)(m_1)=(\Phi f_n)(m_2)$. Итак, доказано, что функция Φf_n равна 0 на дополнении к V и постоянна на U_n.

Так как разность $f_{n+1}-f_n$ равна 0 на U_n, то $\Phi f_{n+1}=\Phi f_n$ на U_n (лемма 14). Таким образом, существует такое комплексное число α_V, зависящее, быть может, от V, но не зависящее от n, что $(\Phi f_n)(m)=\alpha_V$ для каждого m из $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ при всех достаточно больших n. Итак, для почти всех m

$$(\Phi\tau^{-1}\chi_V)(m)=\lim_n(\Phi f_n)(m)=\alpha_V\chi_V(m).$$

Осталось доказать, что число α_V на самом деле не зависит от открытого множества V. Если $f\in L_1(R)\cap L_2(R)$, а $\hat{f}=0$ на дополнении к V и $\hat{f}(m)=1$ для всех m из открытого подмножества V_0 множества V, то приведенное выше рассуждение показывает, что $(\Phi f)(m)=\alpha_V$ для всех m из V_0, а потому $\alpha_{V_0}=\alpha_V$. Пусть теперь V_1 — произвольное открытое подмножество в $\hat{R}$

с бикомпактным замыканием. Тогда из только что доказанного утверждения следует, что $\alpha_{V_1} = \alpha_{V \cup V_1} = \alpha_V$, т. е. α_V не зависит от V, ч. т. д.

16. Теорема. *Если спектральное множество ограниченной измеримой функции φ состоит из единственной точки m, то существует такое комплексное число α, что $\varphi(x) = \alpha[x, m]$ для почти всех x из R.*

Доказательство. В силу леммы 11 (d) достаточно доказать теорему для $m = 0$. В этом случае предыдущая лемма дает такое α, что

$$(\mathrm{I}) \qquad \tau\varphi\tau^{-1}\chi_V = \alpha\chi_V$$

для каждого открытого множества $V \subseteq \hat{R}$ с бикомпактным замыканием. Поскольку всякое бикомпактное подмножество в $\hat{R}$ содержится в некотором открытом множестве с бикомпактным замыканием, то из замечания, сделанного после доказательства леммы 3.6, следует, что равенство (I) справедливо для любого открытого множества конечной меры. Тогда из регулярности меры μ вытекает справедливость его для любого борелевского подмножества в $\hat{R}$ конечной меры. Так как $\tau\varphi\tau^{-1}f$ линейно и непрерывно зависит от $f \in L_2(R)$, то $\tau\varphi\tau^{-1}f = \alpha f$ и $\varphi\tau^{-1}f = \alpha\tau^{-1}f$ для всех f из $L_2(R)$. Следовательно, $\varphi(x) = \alpha$ для почти всех x из R, ч. т. д.

17. Следствие. *Если преобразование τf функции f из $L_1(R)$ равно 0 в точке m_0, то f представима как предел в $L_1(R)$ такой последовательности $\{f_n\}$, что каждая из функций τf_n равна 0 в какой-нибудь окрестности точки m_0.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{L}$ — замыкание множества всех таких функций h из $L_1(R)$, для которых преобразование τh равно 0 в какой-нибудь окрестности точки m_0. Покажем, что f содержится в $\mathfrak{L}$.

Если $g \in \mathfrak{L}$, то найдется такая сходящаяся к g последовательность $\{g_n\}$, что каждая из функций $\hat{g}_n$ равна 0 в какой-нибудь окрестности точки m_0. Тогда $h * g_n \to h * g$ для любой функции h из $L_1(R)$, а так как $\tau(h * g_n) = \hat{h}\hat{g}_n$, то $h * g$ принадлежит $\mathfrak{L}$, так что $\mathfrak{L}$ является идеалом. Из леммы 6 следует, что идеал $\mathfrak{L}$ замкнут относительно сдвигов. Поэтому $\mathfrak{K}$, сопряженно-ортогональное дополнение к $\mathfrak{L}$ в $L_\infty(R)$, также замкнуто относительно сдвигов. Далее, $[\cdot, m_0]$ — единственный характер, принадлежащий $\mathfrak{K}$, так как если $m \neq m_0$, то по лемме 3 в $L_1(R)$ найдется такая функция g, что ее преобразование $\hat{g}$ равно 0 в окрестности m_0, а в точке m отлично от 0. Но тогда $[\cdot, m]$ не принадлежит $\mathfrak{K}$, так что $[\cdot, m_0]$ — действительно единственный характер из $\mathfrak{K}$. Из предыдущей теоремы следует, что $\mathfrak{K}$ состоит из функций, отличающихся от $[\cdot, m_0]$ лишь скалярным множителем. Так как $\hat{f}(m_0) = 0$, то f принадлежит сопряженно-ортогональному дополнению к $\mathfrak{K}$, которое по следствию V.3.12 совпадает с $\mathfrak{L}$, ч. т. д.

18. Следствие. *Пусть m_0 — точка множества $\hat{R}$. Тогда в $L_1(R)$ существует такая обобщенная последовательность $\{h_\alpha\}$, что $\hat{h}_\alpha(m_0) = 1$, $|h_\alpha|_1 = 1$ для всех α и $h_\alpha * f \longrightarrow 0$ в $L_1(R)$ для тех функций f из $L_1(R)$, для которых $\hat{f}(m_0) = 0$.*

Доказательство. Пусть V — окрестность нуля в $\hat{R}$ с бикомпактным замыканием, и пусть W — такая окрестность нуля, что $W = -W$ и $W + W \subseteq V$. Тогда характеристическая функция χ_W принадлежит $L_2(\hat{R})$ и имеет норму $|\chi_W|_2 = \mu(W)^{1/2}$. Из теоремы Планшереля следует, что неотрицательная функция $p_V = (\tau^{-1}\chi_W)\overline{(\tau^{-1}\chi_W)}\,\mu(W)^{-1}$ имеет в $L_1(R)$ норму $|p_V|_1 = 1$. Поскольку отображение τ унитарно, то по лемме 3.18

$$\hat{p}_V(m_1) = \frac{1}{\mu(W)} \int\limits_{\hat{R}} \chi_W(m + m_1)\,\overline{\chi_W(m)}\,\mu(dm),$$

так что $\hat{p}_V(0) = 1$ и $\hat{p}_V(m) = 0$ при $m \notin V$. Положим $h_V(x) = [x, m_0]\,p_V(x)$ для $x \in R$. Тогда $h_V \in L_1(R)$, $|h_V|_1 = 1$ и $\hat{h}_V(m_0) = \hat{p}_V(0) = 1$. В качестве направленного множества $\{E, \leqslant\}$ индексов α, используемого при построении нужной нам обобщенной последовательности, возьмем семейство окрестностей нуля в $\hat{R}$ с бикомпактным замыканием, упорядоченное таким образом, что $V \leqslant U$ означает, что $U \subseteq V$. Тогда искомая обобщенная последовательность есть $\{h_V\}$, где функции h_V определены выше. Нам осталось лишь показать, что $h_V * f \longrightarrow 0$ в $L_1(R)$, если $f \in L_1(R)$ и $\hat{f}(m_0) = 0$. Из леммы 3.18 следует, что $\hat{h}_V(m) = 0$, если $m \notin m_0 + V$. Далее, если $\varepsilon > 0$, то по предыдущему следствию в $L_1(R)$ найдется такая функция g, что $\hat{g}$ равняется 0 в некоторой окрестности U точки m_0 и $|f - g|_1 < \varepsilon$. В $\{E, \leqslant\}$ найдется такая окрестность V_ε, что $m_0 + V \subseteq U$ для каждой окрестности V из $\{E, \leqslant\}$, для которой $V_\varepsilon \leqslant V$. Следовательно, если $V_\varepsilon \leqslant V$, то функция $\tau(h_V * g) = \hat{h}_V \hat{g}$ равна 0 тождественно, и потому $h_V * g = 0$. Отсюда, учитывая лемму 3.1 (b), имеем

$$|h_V * f|_1 = |h_V * f - h_V * g|_1 \leqslant |f - g|_1 < \varepsilon, \quad V_\varepsilon \leqslant V.$$

Доказательство закончено.

19. Лемма. *Если $\varphi \in L_\infty(R)$, $f \in L_1(R)$ и $\hat{f}(m) = 0$ для всех m из спектрального множества $\sigma(\varphi)$, то множество $\sigma(f * \varphi)$ не имеет изолированных точек.*

Доказательство. Будем доказывать эту лемму от противного, предположив, что m_0 — изолированная точка множества $\sigma(f * \varphi)$. Так как по лемме 12 $\sigma(f * \varphi) \subseteq \sigma(\varphi)$, то $\hat{f}(m_0) = 0$. Пусть h — такая функция из $L_1(R)$, что $\hat{h}(m_0) = 1$ и $\hat{h}(m) = 0$ для m из некоторого открытого множества, содержащего $\sigma(f * \varphi) - \{m_0\}$. Из леммы 12 следует, что множество $\sigma(h * f * \varphi)$ содержит не более одной точки m_0, а тогда по теоремам 9, 16 и лемме 3.1 (d) существует такое число α, что $(h * f * \varphi)(x) = \alpha [x, m_0]$ для всех x из R. Чтобы показать, что $\alpha = 0$, рассмотрим обобщенную последовательность $\{h_V\}$, о которой говорится в следствии 18. Тогда, поскольку $\hat{f}(m_0) = 0$, из этого следствия вытекает, что $h_V * f \longrightarrow 0$ в $L_1(R)$, и потому $h_V * (h * f * \varphi) \longrightarrow 0$. С другой стороны,

$$h_V * (h * f * g)(x) = \alpha \int_R [x - y, m_0] h_V(y)\, dy =$$

$$= \alpha [x, m_0] \int_R \overline{[y, m_0]}\, h_V(y)\, dy = \alpha [x, m_0].$$

Так как $\alpha [x, m_0]$ не зависит от V, то $\alpha = 0$ и $(h * f * \varphi)(x) = \alpha [x, m_0] = 0$ для всех x из R. Поскольку $\hat{h}(m_0) = 1$, из леммы 12 (a) следует, что $m_0 \notin \sigma(f * \varphi)$, а это противоречит нашему предположению.

Используя эти предварительные результаты, покажем теперь, что если спектральное множество ограниченной измеримой функции φ таково, что всякое непустое замкнутое подмножество его границы содержит изолированную точку, то φ является пределом в L_1-топологии пространства $L_\infty(R)$ некоторой обобщенной последовательности линейных комбинаций характеров из $\sigma(\varphi)$.

20. Теорема. *Если граница спектрального множества ограниченной измеримой функции φ не содержит непустых совершенных подмножеств, то φ принадлежит L_1-замкнутому подпространству пространства $L_\infty(R)$, порожденному характерами из $\sigma(\varphi)$.*

Доказательство. Если φ не принадлежит L_1-замкнутому подпространству, натянутому на характеры из $\sigma(\varphi)$, то по следствию V.3.12 в $L_1(R)$ найдется такая функция f, для которой

$\hat{f}(m) = 0$ при всех m из $\sigma(\varphi)$, причем

$$\int_R f(x)\overline{\varphi(x)}\,dx = 1.$$

Так как по лемме 3.1 (d) функция $\tilde{f} * \varphi$ непрерывна, то из этого равенства следует, что $\tilde{f} * \varphi \neq 0$. Из леммы 12 (b) получаем, что $\sigma(\tilde{f} * \varphi) \subseteq \sigma(\varphi)$, а из леммы 12 (c) и соотношения $\tau\tilde{f} = \overline{\tau f}$ следует, что $\sigma(\tilde{f} * \varphi)$ не содержит внутренних точек множества $\sigma(\varphi)$. Следовательно, $\sigma(\tilde{f} * \varphi)$ — замкнутое подмножество границы множества $\sigma(\varphi)$. Так как $\tilde{f} * \varphi \neq 0$, то по лемме 11 (a) множество $\sigma(\tilde{f} * \varphi)$ непусто. Таким образом, по предположению $\sigma(\tilde{f} * \varphi)$ содержит изолированную точку, что противоречит лемме 19.

Следующий результат устанавливает поразительную связь между проблемой спектрального синтеза и первоначальной теоремой Винера о L_1-замкнутости.

21. Теорема. *Пусть $f, g \in L_1(R)$, и пусть $\hat{f} = 0$ в каждой точке, в которой $\hat{g} = 0$. Если при этом граница множества нулей функции $\hat{g}$ не содержит непустых совершенных подмножеств, то f принадлежит замкнутому линейному подпространству пространства $L_1(R)$, порожденному сдвигами функции g.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{L}$ — замкнутое линейное подпространство пространства $L_1(R)$, натянутое на сдвиги функции g, и пусть $\mathfrak{K}$ — сопряженно-ортогональное дополнение к $\mathfrak{L}$ в пространстве $L_\infty(R)$. Тогда $\mathfrak{K}$ замкнуто относительно сдвигов. Кроме того, множество характеров, принадлежащих $\mathfrak{K}$, состоит в точности из тех характеров $[\cdot, m]$, для которых m является элементом множества σ нулей функции $\hat{g}$. Если f не содержится в $\mathfrak{L}$, то по следствию II.3.13 найдется такой функционал x^*, равный 0 на $\mathfrak{L}$, что $x^*f = 1$. Если $\bar{\varphi}$ — ограниченная измеримая функция, представляющая этот функционал, как в теореме IV.8.5, то φ принадлежит $\mathfrak{K}$ и $\int_R f(x)\overline{\varphi(x)}\,dx = 1$, поскольку $x^*\mathfrak{L} = 0$. Так как свертка $\tilde{f} * \varphi$ является непрерывной функцией (лемма 3.1 (d)), то $\tilde{f} * \varphi \neq 0$. Далее из определения 10 следует включение $\sigma(\varphi) \subseteq \sigma$, ибо $\varphi \in \mathfrak{K}$. Так как $\tau\tilde{f} = \overline{\tau f}$, то $\tau\tilde{f} = 0$ на σ. Тогда из леммы 12 следует, что $\sigma(\tilde{f} * \varphi)$ — замкнутое подмножество границы множества σ, которая по предположению не содержит непустых совершенных подмножеств. Поэтому, поскольку $\tilde{f} * g \neq 0$, из леммы 11(а) получаем, что $\sigma(\widetilde{f}*g)$ имеет изолированные точки, что противоречит лемме 19.

22. Теорема. *Если спектральное множество $\sigma(\varphi)$ ограниченной измеримой функции φ конечно, то φ является линейной комбинацией характеров из $\sigma(\varphi)$.*

Доказательство. Пусть $\sigma(\varphi)$ состоит из характеров $[\cdot, m_1], \ldots$ $\ldots, [\cdot, m_r]$. Согласно теореме 20, φ содержится в L_1-замкнутом линейном многообразии в $L_\infty(R)$, натянутом на эти характеры. Из следствия V.3.12 вытекает, что если $f \in L_1(R)$ и

$$\int_R f(x)[x, m_i]\,dx = 0, \qquad i = 1, \ldots, r,$$

то $\int_R f(x)\varphi(x)\,dx = 0$. Но тогда по лемме V.3.10 φ является линейной комбинацией характеров $[\cdot, m_1], \ldots, [\cdot, m_r]$, ч. т. д.

Следующий результат, дающий описание спектрального множества ограниченной измеримой функции, особенно интересен, поскольку его можно обобщить на случай неограниченной функции. Мы будем употреблять обозначение, введенное перед леммой 14, связывающее с каждой функцией φ из $L_\infty(R)$ линейное отображение Φ пространства $L_2(R)$ в $L_2(\hat{R})$, определенное равенством $\Phi(f) = \tau(\varphi f)$. Так как $\varphi f \in L_1(R) \cap L_2(R)$, если $f \in L_1(R) \cap L_2(R)$, то Φ преобразует каждую функцию из $L_1(R) \cap L_2(R)$ в непрерывную функцию на $\hat{R} \cup \{p_\infty\}$, равную нулю в точке p_∞.

23. Теорема. *Пусть φ — ограниченная измеримая функция на R. Точка m_0 из $\hat{R}$ тогда и только тогда принадлежит дополнению спектрального множества функции φ, когда в $\hat{R}$ существует такая окрестность нуля V и такая окрестность U точки m_0, что $\tau(\varphi f) = 0$ на U для всякой функции f из $L_1(R) \cap L_2(R)$, преобразование которой τf равно 0 на дополнении к V.*

Доказательство. Если $m_0 \notin \sigma(\varphi)$, то в $\hat{R}$ найдутся такая окрестность нуля V и такая окрестность U точки m_0, что множество $U \cap (\sigma(\varphi) + V + V)$ пусто. Пусть f — такая функция из $L_1(R) \cap L_2(R)$, что $\tau f = 0$ на дополнении к V, и пусть $\mathfrak{A}$ — линейное многообразие в $L_\infty(R)$, состоящее из функций вида

$$\varphi_V(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i [x, m_i],$$

где $m_i \in \sigma(\varphi) + V$. Для каждой такой функции φ_V определим отображение $\Phi_V : L_2(R) \to L_2(\hat{R})$ по формуле $\Phi_V(f) = \tau(\varphi_V f)$, и пусть $\Phi(f)=\tau(\varphi f)$. Тогда

$$(\Phi_V f)(m)=\sum_{i=1}^{n} c_i \int_R \overline{[x,\ m-m_i]}\, f(x)\,dx=\sum_{i=1}^{n} c_i \hat{f}(m-m_i).$$

Это означает, что $\Phi_V f=0$ на U, так как если $m\in U$, то $m-m_i$ принадлежит дополнению к V. Согласно теореме 13, φ является пределом в L_1-топологии пространства $L_\infty(R)$ некоторой обобщенной последовательности $\{\varphi_\alpha\}$ функций из $\mathfrak{A}$. Таким образом, для m из U

$$(\Phi f)(m)=\int_R \overline{[x,\ m]}\, \varphi(x)\, f(x)\,dx =$$
$$=\lim_{\alpha} \int_R \overline{[x,\ m]}\, \varphi_\alpha(x)\, f(x)\,dx=\lim_{\alpha}(\Phi_\alpha f)(m)=0,$$

т. е. $\tau(\varphi f)=0$ на U.

Обратно, пусть f — такая функция из $L_1(R)\cap L_2(R)$, что $\hat{f}(0)\neq 0$ и $\hat{f}(m)=0$ на дополнении к V (существование такой функции утверждается в лемме 2), и пусть $g=f_y$ — сдвиг функции f. Тогда по следствию 3.17 $\hat{g}(0)\neq 0$ и $\hat{g}(m)=0$ для всех m из дополнения к V. Таким образом, по предположению функция $\Phi(g)=\tau(\varphi g)$ обращается в нуль на U. Следовательно, для всех m из U

$$0=[y,\ m](\Phi g)(m)=[y,\ m]\int_R \overline{[x,\ m]}\, f(x-y)\,\varphi(x)\,dx=$$
$$=\int_R \overline{[x-y,\ m]}\, f(x-y)\,\varphi(x)\,dx.$$

Положим теперь $h(x)=[x,\ m_0]\, f(-x)$, $x\in R$. Тогда, так как $m_0\in U$, то из предыдущего равенства следует, что $h*\varphi=0$. Но

$$\hat{h}(m_0)=\int_R \overline{[x,\ m_0]}\, h(x)\,dx=\int_R \overline{[x,\ m_0]}\,[x,\ m_0]\, f(-x)\,dx=$$
$$=\int_R f(x)\,dx=\hat{f}(0)\neq 0,$$

и по лемме 12 (а) $m_0\notin\sigma(\varphi)$, ч. т. д.

В случае когда R — аддитивная группа $(-\infty,\ \infty)$ вещественных чисел, спектральное множество ограниченной измеримой функции можно описать в терминах теории аналитических функций. Такое описание позволяет распространить понятие спектрального множества ограниченной измеримой функции на некоторые неограниченные функции. Ниже буквой t мы будем обозначать общий элемент группы характеров $\hat{R} = (-\infty, \infty)$ и будем считать, что группа $\hat{R}$ естественным образом вложена в плоскость комплексного переменного z.

24. Теорема. *Пусть φ — комплексная измеримая существенно ограниченная функция вещественного переменного, а f — комплексная функция комплексного переменного z, определенная формулой*

[*] $$f(z) = \begin{cases} \int\limits_0^\infty e^{-izx}\varphi(x)\,dx, & \operatorname{Im} z < 0, \\ -\int\limits_{-\infty}^0 e^{-izx}\varphi(x)\,dx, & \operatorname{Im} z > 0. \end{cases}$$

Тогда спектральное множество функции φ состоит из всех таких вещественных чисел t, для которых не существует аналитического продолжения функции f в окрестность точки t.

Доказательство. Предположим, что функция f допускает аналитическое продолжение в некоторую окрестность точки t_0 вещественной оси. Для $\varepsilon > 0$ положим

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(x)\,e^{-\varepsilon|x|}, \qquad x \in R,$$

так что $\varphi_\varepsilon(x)$ ограниченно сходится[1]) к $\varphi(x)$, когда $\varepsilon \to 0$. Тогда

$$\hat{\varphi}_\varepsilon(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt}e^{-\varepsilon|x|}\varphi(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-ix(t+i\varepsilon)}\varphi(x)\,dx + \int\limits_{0}^{\infty} e^{-ix(t-i\varepsilon)}\varphi(x)\,dx =$$

$$= -f(t+i\varepsilon) + f(t-i\varepsilon).$$

Так как функция f аналитична вблизи t_0, то она равномерно непрерывна на некоторой бикомпактной окрестности U точки t_0, и потому $\hat{\varphi}_\varepsilon(t)$ сходится к 0 равномерно по $t \in U$ при $\varepsilon \to 0$. По лемме 2 в $L_1(R) \cap L_2(R)$ найдется такая функция h, что $\hat{h}(t_0) \neq 0$ и $\hat{h}(t) = 0$ для всех t из дополнения к U. Поскольку

[1]) То есть $\operatorname{vrai}\sup\limits_{x \in K} |\varphi(x) - \varphi_\varepsilon(x)| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ для любого бикомпактного множества $K \subset R$, и существует такое число $C > 0$, что $|\varphi_\varepsilon|_\infty \leqslant C$ для всех $\varepsilon > 0$. — *Прим. перев.*

$\varphi_\varepsilon(x)$ ограниченно сходится к $\varphi(x)$,

$$(\tilde{h}*\varphi)(y)=\int_{-\infty}^{\infty}\overline{h(x-y)}\,\varphi(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{h(x-y)}\,\varphi_\varepsilon(x)\,dx.$$

Согласно следствию 3.17, $\hat{h}_y(t)=e^{-ty t}\hat{h}(t)$, где $h_y(x)=h(x-y)$. Таким образом, так как $\hat{h}=0$ на дополнении к U, а $\hat{\varphi}_\varepsilon$ при $\varepsilon\to 0$ стремится к 0 равномерно на U и $\varphi_\varepsilon\in L_2(R)$, то по теореме Планшереля

$$(\tilde{h}*\varphi)(y)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iyt}\,(\tau h)(t)\,(\tau\varphi_\varepsilon)(t)\,dt=0.$$

Поскольку $\tilde{h}*\varphi=0$, а $(\tau\tilde{h})(t_0)=\overline{(\tau h)(t_0)}\neq 0$, из леммы 12 следует, что t_0 не принадлежит спектральному множеству $\sigma(\varphi)$.

Обратно, допустим, что $t_0\notin\sigma(\varphi)$. Пусть U — такая окрестность точки t_0, что ее замыкание не пересекается с $\sigma(\varphi)$. Тогда по теореме 13 функция φ содержится в L_1-замкнутом линейном подпространстве пространства $L_\infty(-\infty,\infty)$, натянутом на такие характеры e^{itx}, для которых t принадлежит дополнению к U. Для каждой функции ψ из $L_\infty(-\infty,\infty)$ определим функцию f_ψ соотношениями [*] с заменой φ на ψ, и пусть $\mathfrak{S}(U)$ — линейное многообразие всех таких функций ψ из $L_\infty(-\infty,\infty)$, для которых f_ψ допускает аналитическое продолжение на открытое множество N_ψ комплексной плоскости, содержащее U. С помощью элементарной выкладки можно показать, что функция f_ψ, соответствующая $\psi(x)=e^{itx}$, имеет вид $f_\psi(z)=i(t-z)^{-1}$. Следовательно, если t лежит в дополнении к U, то эта специальная функция ψ принадлежит $\mathfrak{S}(U)$. Поскольку φ содержится в L_1-замкнутом линейном подпространстве пространства $L_\infty(-\infty,\infty)$, натянутом на функции e^{itx}, $t\notin U$, и так как эти функции принадлежат $\mathfrak{S}(U)$, то, для того чтобы показать, что $\varphi\in\mathfrak{S}(U)$, достаточно доказать, что $\mathfrak{S}(U)$ является L_1-замкнутым. Теорема Крейна—Шмульяна (V.5.7) показывает, что достаточно проверить L_1-замкнутость пересечения $\mathfrak{S}(U)$ с каждым положительным кратным единичного шара в $L_\infty(-\infty,\infty)$. Так как пространство $L_1(-\infty,\infty)$ сепарабельно, то в силу теоремы V.5.1 достаточно показать, что предел сходящейся в L_1-топологии ограниченной последовательности функций из $\mathfrak{S}(U)$ также принадлежит $\mathfrak{S}(U)$.

Для этого рассмотрим ограниченную последовательность $\{\psi_n\}$ функций из $\mathfrak{S}(U)$, сходящуюся в L_1-топологии к функции ψ, и пусть $f_n=f_{\psi_n}$. Мы должны доказать, что f_ψ допускает аналитическое продолжение на некоторое открытое множество, содержащее U. Для каждого фиксированного числа z, для которого $\operatorname{Im} z<0$, функция h, определенная соотношениями

$$h(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ e^{-izx}, & x \geqslant 0, \end{cases}$$

принадлежит $L_1(-\infty, \infty)$; таким образом, поскольку ψ_n стремится к ψ в L_1-топологии пространства $L_\infty(-\infty, \infty)$, можно утверждать, что $f_n(z) \longrightarrow f_\psi(z)$ равномерно на каждом бикомпактном подмножестве полуплоскости $\operatorname{Im} z<0$. Аналогичные доводы показывают, что $f_n(z) \longrightarrow f_\psi(z)$ равномерно на каждом бикомпактном подмножестве полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$. Если бы было известно, что последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится в некоторой окрестности множества U, то аналитичность ее предела f_ψ была бы очевидна. К сожалению, пока не ясно, сходится ли последовательность $\{f_n\}$ равномерно в какой-нибудь области, содержащей интервал вещественной оси, так что необходимо дополнительное рассмотрение.

Пусть U — открытый интервал (a, b) и Q — контур прямоугольника с вершинами $a \pm i$, $b \pm i$. Ясно, что последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится на любой части контура Q, замыкание которой не содержит точек a и b. Пусть M — мажоранта последовательности ψ_n, так что

$$|f_n(a+is)| \leqslant M \int_0^\infty |e^{-iax}|\, e^{sx}\, dx = \frac{M}{|s|}, \quad -1 \leqslant s<0.$$

Аналогичным образом получаем, что $|f_n(a+is)| \leqslant M|s|^{-1}$, когда $0<s \leqslant 1$. Подобные оценки величины $|f_n(z)|$ можно получить и при $z=b+is$. Следовательно, последовательность $\{g_n\}$, определенная формулой

$$g_n(z)=\begin{cases} f_n(z)(z-a)^2(z-b)^2, & z \neq a,\ b, \\ 0, & z=a,\ b, \end{cases}$$

равномерно сходится на Q и ее предел равен

$$g(z)=\begin{cases} f_\psi(z)(z-a)^2(z-b)^2, & z \neq a,\ b, \\ 0, & z=a,\ b. \end{cases}$$

Из принципа максимума модуля следует, что последовательность $\{g_n\}$ сходится равномерно в области, ограниченной контуром Q, к аналитической функции G, которая в каждой точке этой области, не лежащей на вещественной оси, удовлетворяет соотношению

$$G(z)=f_\psi(z)(z-a)^2(z-b)^2.$$

Таким образом, функция $G(z)(z-a)^{-2}(z-b)^{-2}$ является аналитическим продолжением функции f_ψ в открытую область, ограниченную контуром Q. Это показывает, что ψ содержится в $\mathfrak{S}(U)$. Теорема доказана.

5. Упражнения

А. *Упражнения по почти периодическим функциям*

1. Показать, что если $F \in AP$ и $\inf\limits_{-\infty<x<\infty} |F(x)| > 0$, то функция $1/F(\cdot)$ также принадлежит AP.

2. Если $F \in AP$, то существует предел

$$M(F) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} F(x)\,dx.$$

Кроме того, $\lim\limits_{T\to\infty}(1/2T)\int\limits_{-T}^{T} F(x+a)\,dx = M(F)$ равномерно по a.

3. Пусть $F \in AP$; определим для $-\infty < \lambda < \infty$ функцию F_λ равенством $F_\lambda(x) = e^{i\lambda x}F(x)$, и пусть $g(x) = F(x)\overline{F(x)}$. Положим $a(\lambda) = M(F_\lambda)$, где M определяется так же, как в упражнении 2. Показать, что $a(\lambda) = 0$ всюду, за исключением, быть может, счетного числа значений λ_i, $i = 1, 2, \ldots$, и что $M(g) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} |a(\lambda_i)|^2$.

4. Если f — неотрицательная функция из AP и $M(f) = 0$ (в обозначениях упражнения 2), то $f = 0$.

5. Непрерывная функция f двух вещественных переменных $x = (x_1, x_2)$ называется почти периодической, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое число $L(\varepsilon)$, что в каждом круге радиуса $L(\varepsilon)$ на плоскости переменных (x_1, x_2) найдется вектор y, для которого $|f(x) - f(x+y)| < \varepsilon$. Показать, что каждая такая функция может быть равномерно аппроксимирована линейными комбинациями функций вида $\exp i(t_1x_1 + t_2x_2)$.

6. Непрерывная функция f на топологической группе G называется почти периодической, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое бикомпактное множество $K(\varepsilon) \subseteq G$, что для всякого элемента $g \in G$ в множестве $K(\varepsilon)g$ найдется элемент h, для которого $|f(x) - f(xh)| < \varepsilon$. Показать, что множество всех непрерывных функций $x(\cdot)$, для которых линейное пространство, натянутое на всевозможные сдвиги $x(\cdot g)$, конечномерно, фундаментально в пространстве почти периодических функций; это последнее пространство является нормированным, норма задается равенством

$$|f| = \sup_{x\in G} |f(x)|.$$

11 Заказ № 131

Показать, что если группа G абелева, то всякая почти периодическая функция может быть равномерно аппроксимирована линейными комбинациями непрерывных функций x, для которых

$$|x(g)|=1, \qquad x(g_1g_2)=x(g_1)\,x(g_2).$$

B. *Две задачи о мере Хаара*

7. Обозначим через $\overset{\circ}{U}_2$ группу унитарных преобразований двумерного комплексного гильбертова пространства с определителем 1. Показать, что матрица u из $\overset{\circ}{U}_2$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_1+iy_1 & x_2+iy_2 \\ x_2-iy_2 & -x_1+iy_1 \end{pmatrix},$$

где $x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2=1$. Показать, что отображение $\varphi: u \longrightarrow (x_1, y_1, x_2, y_2)$ является гомеоморфизмом группы $\overset{\circ}{U}_2$ на поверхность S единичного шара в четырехмерном пространстве. Показать, что существует такая постоянная K, что мера Хаара любого борелевского множества $e \subseteq \overset{\circ}{U}_2$ равна $K\sigma(\varphi(e))$, где $\sigma(\varphi(e))$ — гиперплощадь подмножества $\varphi(e)$ поверхности S; вычислить абсолютную постоянную K.

8. Пусть U_n обозначает группу всех унитарных преобразований n-мерного комплексного гильбертова пространства E^n. Показать, что мера Хаара множества F всех u из U_n, для которых $\det(u+I)=0$, равна 0. Показать, что отображение

$$\varphi: u \longrightarrow i\,\frac{u-I}{u+I}$$

является гомеоморфизмом между $U_n - F$ и множеством Σ всех эрмитовых операторов в E^n. Построить взаимно однозначный линейный гомеоморфизм ψ пространства Σ на n^2-мерное вещественное евклидово пространство E^{n^2}. Найти явное выражение для меры v, определенной для каждого борелевского подмножества e пространства E^{n^2} формулой $v(e)=\mu((\psi\varphi)^{-1}e)$, где μ — мера Хаара на группе U_n.

C. *Теорема Винера о замкнутости как теорема тауберова типа*

9. (Тауберова теорема Винера.) Пусть f — функция из $L_\infty(-\infty, \infty)$, а φ — функция из $L_1(-\infty, \infty)$, преобразование Фурье которой нигде не обращается в 0. Допустим, что для

некоторой постоянной α

$$\lim_{x\to\infty} (\varphi * f)(x) = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, dt.$$

Тогда

$$\lim_{x\to\infty} (\psi * f)(x) = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)\, dt$$

для любой функции ψ из L_1.

10. Пусть $\varphi \in L_1(0, \infty)$, $f \in L_\infty(0, \infty)$, и предположим, что

$$\int_0^\infty \varphi(t)\, t^{ix}\, dt \neq 0, \qquad -\infty < x < +\infty.$$

Допустим, что для некоторой постоянной α

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \int_0^\infty \varphi\left(\frac{t}{x}\right) f(t)\, dt = \alpha \int_0^\infty \varphi(t)\, dt.$$

Тогда

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \int_0^\infty \psi\left(\frac{t}{x}\right) f(t)\, dt = \alpha \int_0^\infty \psi(t)\, dt$$

для любой функции ψ из $L_1(0, \infty)$. (Указание: воспользоваться упражнением 9.)

11. (Обобщение теоремы Таубера, принадлежащее Харди и Литлвуду; непрерывный случай.) Пусть $f \in L_\infty(0, \infty)$ и

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \int_0^\infty e^{-t/x} f(t)\, dt = A.$$

Тогда

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt = A.$$

12. Пусть функция f измерима, ограничена на каждом ограниченном подмножестве положительной полуоси и неотрицательна. Тогда если интеграл $\int_0^\infty e^{-t/x} f(t)\, dt$ существует для всех $x > 0$ и

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \int_0^\infty e^{-t/x} f(t)\, dt = A,$$

то

(I) функция $\frac{1}{x}\int\limits_0^x f(t)\,dt$ ограничена при $x > 0$,

(II) $$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int\limits_0^\infty \frac{t}{x}e^{-t/x}F(t)\,dt = A,$$

где

$$F(t) = t^{-1}\int\limits_0^t f(s)\,ds.$$

Кроме того,

(III) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\varepsilon}{x^\varepsilon}\int\limits_0^x t^{\varepsilon-1}F(t)\,dt = A, \qquad \varepsilon > 0,$$

(IV) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}\int\limits_0^1 (1-t^{\varepsilon-1})\,f(xt)\,dt = A, \qquad \varepsilon > 0,$$

(V) $$\lim_{x\to\infty}\int\limits_0^1 f(xt)\,dt = A,$$

(VI) $$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int\limits_0^x f(t)\,dt = A.$$

13. Пусть f — вещественная измеримая ограниченная снизу функция, ограниченная на каждом ограниченном подмножестве положительной полуоси. Тогда если интеграл $\int\limits_0^\infty e^{-t/x}f(t)\,dt$ существует при всех $x > 0$ и

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int\limits_0^\infty e^{-t/x}f(t)\,dt = A,$$

то

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int\limits_0^x f(t)\,dt = A.$$

(Указание: воспользоваться упражнением 12. Сравнить посылки и заключение с упражнением 11.)

14. Пусть $f \in L_\infty(0, \infty)$. Если

$$\lim_{t\to\infty}\int\limits_{c_i t}^t \frac{f(x)}{x}\,dx = A\log\frac{1}{c_i}, \quad i = 1, 2,$$

для двух таких чисел c_1, c_2, что $0<c_1<c_2<1$ и что $\log c_1$ не является рациональным кратным $\log c_2$, то

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t f(x)\,dx=A.$$

Заключение перестает быть справедливым, если $\log c_1$ является рациональным кратным $\log c_2$.

15. Пусть $b(x)$ — измеримая неотрицательная функция, ограниченная на каждом ограниченном подмножестве полуоси $(0, \infty)$. Предположим, что при $x \to \infty$

$$\int_1^x b(y)\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)dy=\alpha_1\log x+\alpha_2+o(1).$$

Тогда

(I) функция $\frac{1}{x}\int_{x/2}^x b(y)\,dy$ ограничена при $x\geqslant 2$;

(II) функция $B(x)=\frac{1}{x}\int_1^x b(y)\,dy$ ограничена при $x\geqslant 1$;

(III) $$\int_1^x \frac{B(y)}{y}\,dy=\alpha_1\log x+\alpha_2+o(1),\qquad x\to\infty;$$

(IV) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\varepsilon}{x^\varepsilon}\int_0^x t^{\varepsilon-1}B(t)\,dt=\alpha_1,\qquad \varepsilon>0;$$

(V) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}\int_0^1 (1-t^{\varepsilon-1})\,b(xt)\,dt=\alpha_1,\qquad \varepsilon>0;$$

(VI) $$\lim_{x\to\infty}\int_0^1 b(xt)\,dt=\alpha_1;$$

(VII) $$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x b(t)\,dt=\alpha_1.$$

(Указание: воспользоваться упражнением 14.)

16. Пусть b — вещественная измеримая ограниченная функция на $(0, \infty)$. Тогда если

$$\lim_{x\to\infty}\int_1^x b(y)\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)dy=\alpha,$$

то

$$\lim_{x\to\infty}\int_1^x \frac{b(y)}{y}\,dy=\alpha.$$

(Указание: воспользоваться упражнением 15.)

17. (Харди — Литлвуд.) Пусть b — измеримая вещественная функция на $[0, \infty)$. Предположим, что она ограничена на каждом ограниченном подмножестве полуоси $[0, \infty)$, а функция $xb(x)$ ограничена при $0\leqslant x<\infty$. Тогда если

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x\left\{\int_0^t b(s)\,ds\right\}dt=\alpha,$$

то

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t b(s)\,ds=\alpha.$$

(Указание: воспользоваться упражнением 16.)

18. (Харди — Литлвуд.) Пусть b — измеримая вещественная функция на $[0, \infty)$. Предположим, что она ограничена на каждом ограниченном подмножестве полуоси $[0, \infty)$, а функция $xb(x)$ ограничена при $0\leqslant x<\infty$. Пусть, кроме того, интеграл

$$\int_0^\infty e^{-t/x}b(t)\,dt$$

существует для всех $x>0$. Тогда если

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^\infty e^{-t/x}b(t)\,dt=\alpha,$$

то

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^x b(t)\,dt=\alpha.$$

(Указание: показать, пользуясь методом упражнения II.4.53, что функция $\int_0^x b(t)\,dt$ ограничена, и воспользоваться упражнениями 13 и 17.)

19. (Харди — Литлвуд.) Пусть последовательность вещественных чисел a_n ограничена снизу, и пусть ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

сходится при $|x| < 1$. Тогда если

$$\lim_{x \to 1-0} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A,$$

то

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} a_m = A.$$

(Указание: положить $f(t) = a_n$ при $n \leqslant t < n+1$ и воспользоваться упражнением 13.)

20. (Харди — Литлвуд.) Пусть a_n — последовательность вещественных чисел, и пусть последовательность na_n ограничена. Пусть ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится при $|x| < 1$. Тогда если

$$\lim_{x \to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A,$$

то

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{m=0}^{n} a_m = A.$$

(Указание: положить $f(t) = a_n$ при $n \leqslant t < n+1$ и воспользоваться упражнением 18. Это знаменитая теорема Харди и Литлвуда, обобщающая теорему Таубера из упражнения II.4.54. Сравнить предпосылки и методы доказательства этих теорем.)

21. Пусть f — вещественная измеримая и ограниченная функция на $[0, \infty)$. Предположим, что для каждого $s > 0$ существует интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{f(t)}{(s+t)^2}\, dt.$$

Тогда если

$$\int_0^{\infty} \frac{f(t)}{(s+t)^2}\, dt \sim \frac{A}{s} \qquad \text{при } s \to 0+,$$

то

$$\int_0^{\infty} f(t)\, dt \sim As \qquad \text{при } s \to 0+,$$

а если

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{(s+t)^2}\,dt \sim \frac{A}{s} \qquad \text{при } s \to \infty,$$

то

$$\int_0^\infty f(t)\,dt \sim As \qquad \text{при } s \to \infty.$$

22. Пусть f — измеримая вещественная функция на $[0, \infty)$, а $xf(x)$ ограничена при $0 \leqslant x < \infty$. Предположим, что f ограничена на каждом ограниченном подмножестве полуоси $[0, \infty)$ и что интеграл

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{s+t}\,dt$$

существует для всех $s > 0$. Тогда если

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{s+t}\,dt \sim as^{-1} \qquad \text{при } s \to \infty,$$

то

$$\lim_{s\to\infty} \int_0^s f(t)\,dt = a.$$

(Указание: приспособить метод доказательства упражнения 18.)

23. Пусть функция f определена на $[0, \infty)$ и обладает двумя непрерывными производными. Предположим, что $f''(x) = O(x^{-3})$ при $x \to \infty$ и что $xf(x) \to A$ при $x \to \infty$. Тогда $x^2 f'(x) \to -A$ при $x \to \infty$. (Указание: положить $p(t) = t^3 f''(t)$ при $t \geqslant 1$ и применить результат упражнения 10 к ограниченной функции p.)

24. Пусть функция f определена на $[0, \infty)$ и имеет две непрерывные производные. Пусть $\alpha > 2$, $f''(x) = O(x^{-\alpha})$ при $x \to \infty$ и $x^{\alpha-2} f(x) \to A$ при $x \to \infty$. Тогда $x^{\alpha-1} f'(x) \to (2-\alpha) A$ при $x \to \infty$.

6. Операторы Гильберта — Шмидта

В этом параграфе развивается теория операторов Гильберта — Шмидта и доказываются довольно глубокие фундаментальные теоремы о полноте системы собственных функций таких операторов и связанных с ними неограниченных операторов. Эти результаты основаны на одном сильном неравенстве, принадлежащем Карлеману, которое также выводится в настоящем параграфе. Некоторые из этих результатов используются в последующих главах.

В качестве приложения упомянутых результатов в ряде упражнений § 8 развивается в общей форме классическая теория Фредгольма интегральных операторов.

Формальное определение класса операторов Гильберта — Шмидта в гильбертовом пространстве будет дано ниже; однако в порядке введения укажем здесь, что если гильбертово пространство представлено как пространство $L_2(S, \Sigma, \mu)$ с положительной мерой μ, то операторами Гильберта — Шмидта являются такие операторы K, которые допускают представление вида

$$(Kf)(s) = \int_S k(s, t) f(t) \mu(dt), \quad f \in L_2(S, \Sigma, \mu),$$

где

$$\int_S \int_S |k(s, t)|^2 \mu(ds) \mu(dt) < \infty.$$

Эти операторы вполне непрерывны, однако они обладают некоторыми важными свойствами, не присущими произвольным вполне непрерывным операторам. В некоторых изложениях теории Гильберта — Шмидта предполагается, что ядро k эрмитово-симметрично, так что оператор K является самосопряженным. Мы не накладываем здесь никаких ограничений такого рода, и потому полученные теоремы о полноте применимы к некоторым классам несамосопряженных краевых задач.

В большинстве последующих рассмотрений удобнее работать с абстрактным гильбертовым пространством, а не с каким-нибудь его представлением в виде пространства L_2; в связи с этим дадим общее определение класса операторов Гильберта — Шмидта.

1. Определение. Пусть $\{x_\alpha, \alpha \in A\}$ — полное ортонормальное множество в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Ограниченный линейный оператор T называется *оператором Гильберта — Шмидта*, если величина $\|T\|$, определенная равенством

$$\|T\| = \Big\{ \sum_{\alpha \in A} |Tx_\alpha|^2 \Big\}^{1/2},$$

конечна. Число $\|T\|$ иногда называется *нормой Гильберта — Шмидта* или *дубль-нормой* оператора T. Класс всех операторов Гильберта — Шмидта на $\mathfrak{H}$ будет обозначаться HS.

В этом определении класса HS участвует некоторая ортонормальная система. Следующая лемма показывает, что класс HS зависит лишь от самого гильбертова пространства, а не от выбранного в нем базиса.

2. Лемма. *Норма Гильберта — Шмидта не зависит от выбора ортонормального базиса, участвующего в ее определении. Если T*

принадлежит HS, а U — унитарный оператор в $\mathfrak{H}$, то оператор $U^{-1}TU$ принадлежит HS и $\|T\| = \|U^{-1}TU\|$. Кроме того, $|T| \leqslant \|T\|$ и $\|T\| = \|T^*\|$.

Доказательство. Пусть $\|T\|_A$ и $\|T\|_B$ — дубль-нормы оператора T, определенные при помощи полных ортонормальных систем $\{x_\alpha, \alpha \in A\}$ и $\{y_\beta, \beta \in B\}$ соответственно. Используя тождество $|x|^2 = \sum_\beta |(x, y_\beta)|^2$, которое было доказано в теореме IV.4.13, получаем

$$\|T\|_A^2 = \sum_\alpha |Tx_\alpha|^2 = \sum_\alpha \sum_\beta |(Tx_\alpha, y_\beta)|^2 =$$
$$= \sum_\beta \sum_\alpha |(x_\alpha, T^* y_\beta)|^2 = \sum_\beta |T^* y_\beta|^2 = \|T^*\|_B^2.$$

Если в качестве двух полных ортонормальных систем взять одну и ту же систему, то это тождество показывает, что $\|T^*\|_B = \|T\|_B$; таким образом, $\|T\|_A = \|T^*\|_B = \|T\|_B$, что доказывает первое и последнее утверждения леммы.

Если U — унитарный оператор, то множество $\{Ux_\alpha, \alpha \in A\}$ также является полной ортонормальной системой в $\mathfrak{H}$, а так как $|x| = |U^{-1}x|$, то

$$\|U^{-1}TU\|^2 = \sum_{\alpha \in A} |U^{-1}TUx_\alpha|^2 = \sum_{\alpha \in A} |TUx_\alpha|^2 = \|T\|^2;$$

это означает, что $U^{-1}TU$ есть оператор Гильберта — Шмидта, если таковым является T.

Наконец, если $\varepsilon > 0$, найдем такой элемент x_0, что $|x_0| = 1$ и $|T|^2 < |Tx_0|^2 + \varepsilon$. Так как существует полная ортонормальная система, содержащая элемент x_0, то ясно, что $|T|^2 \leqslant \|T\|^2 + \varepsilon$, и потому $|T| \leqslant \|T\|$, ч. т. д.

3. Следствие. *Если $T \in HS$ и $\{x_\alpha, \alpha \in A\}$ — какая-нибудь полная ортонормальная система в $\mathfrak{H}$, то*

$$\|T\| = \Big\{ \sum_{\alpha, \beta \in A} |(Tx_\alpha, x_\beta)|^2 \Big\}^{1/2}.$$

Доказательство. Это следует из того, что $|Tx_\alpha|^2 = \sum_{\beta \in A} |(Tx_\alpha, x_\beta)|^2$; двойная сумма существует, так как все члены неотрицательны.

4. Теорема. *Множество HS всех операторов Гильберта — Шмидта с дубль-нормой представляет собой B-пространство. Кроме того, HS является алгеброй, причем $\|TS\| \leqslant \|T\| \cdot \|S\|$ для любых S и T из HS.*

Доказательство. Очевидно, что если $T \in HS$, а a — скаляр, то $\|aT\| = |a| \cdot \|T\|$. Пусть $T, S \in HS$ и $\{x_\alpha, \alpha \in A\}$ — полная ортонормальная система в $\mathfrak{H}$. Из следствия 3 и неравенства Минковского вытекает, что

$$\|T+S\| = \{\sum_{\alpha,\beta} |((T+S)x_\alpha, x_\beta)|^2\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \{\sum_{\alpha,\beta} |(Tx_\alpha, x_\beta)|^2\}^{1/2} + \{\sum_{\alpha,\beta} |(Sx_\alpha, x_\beta)|^2\}^{1/2} = \|T\| + \|S\|,$$

так что $T+S \in HS$. Чтобы доказать полноту пространства HS, рассмотрим последовательность $\{T_n\}$ операторов из HS, для которой $\|T_n - T_m\| \to 0$. Из леммы 2 следует, что $|T_n - T_m| \to 0$, и потому существует такой линейный ограниченный оператор T, что $|T - T_n| \to 0$. Чтобы убедиться в том, что T принадлежит HS, обозначим через k верхнюю грань последовательности $\{\|T_n\|\}$. Если A_1 — какое-нибудь конечное подмножество множества A, то

$$\sum_{\alpha \in A_1} |Tx_\alpha|^2 = \lim_{n \to \infty} \sum_{\alpha \in A_1} |T_n x_\alpha|^2 \leqslant k^2,$$

и потому $\|T\|^2 = \sum_{\alpha \in A} |Tx_\alpha|^2 \leqslant k^2$, откуда следует, что $T \in HS$. Пусть $m(\varepsilon)$ выбрано так, что $\|T_n - T_m\| < \varepsilon$ при $n, m \geqslant m(\varepsilon)$. Тогда при $m > m(\varepsilon)$

$$\sum_{\alpha \in A_1} |(T - T_m) x_\alpha|^2 = \lim_{n \to \infty} \sum_{\alpha \in A_1} |(T_n - T_m) x_\alpha|^2 \leqslant \overline{\lim_{n \to \infty}} \|T_n - T_m\|^2 \leqslant \varepsilon^2;$$

поэтому $\|T - T_m\| \leqslant \varepsilon$ при $m > m(\varepsilon)$. Итак, HS с нормой Гильберта — Шмидта является B-пространством.

Наконец, пусть $T \in HS$, и пусть B — какой-нибудь ограниченный линейный оператор в $\mathfrak{H}$. Тогда

$$\|BT\|^2 = \sum_{\alpha \in A} |BTx_\alpha|^2 \leqslant |B|^2 \sum_{\alpha \in A} |Tx_\alpha|^2 = |B|^2 \|T\|^2,$$

$$\|TB\| = \|(TB)^*\| = \|B^*T^*\| \leqslant |B| \, \|T\|.$$

В частности, если $S \in HS$, то $\|ST\| \leqslant |S| \, \|T\| \leqslant \|S\| \cdot \|T\|$, поскольку $|S| \leqslant \|S\|$, ч. т. д.

5. Следствие. *Множество операторов Гильберта — Шмидта является двусторонним идеалом в B-алгебре всех ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Кроме того, если T принадлежит HS, а B — ограниченный оператор, то $\|TB\| \leqslant \|T\| \cdot |B|$ и $\|BT\| \leqslant |B| \cdot \|T\|$.*

Доказательство. В ходе доказательства предыдущей теоремы мы видели, что HS является подалгеброй алгебры $B(\mathfrak{H})$, а последний абзац этого доказательства показывает, что HS — двусторонний идеал и что неравенства, приведенные в формулировке следствия, справедливы.

6. Теорема. *Каждый оператор Гильберта — Шмидта вполне непрерывен и представим в виде предела по норме Гильберта — Шмидта последовательности конечномерных операторов (т. е. операторов с конечномерными областями значений).*

Доказательство. Пусть $\{x_\alpha,\ \alpha \in A\}$ — полная ортонормальная система в $\mathfrak{H}$, и пусть $T \in HS$. Так как

$$\|T\|^2 = \sum_{\alpha \in A} |Tx_\alpha|^2 < \infty,$$

то лишь счетное число слагаемых $|Tx_\alpha|^2$ может быть отлично от нуля. По этой же причине для каждого натурального n найдется такое конечное множество $A_n \subseteq A$, что

$$\sum_{\alpha \notin A_n} |Tx_\alpha|^2 < \frac{1}{n^2}.$$

Пусть для каждого n линейный оператор T_n определен соотношениями $T_n x_\alpha = Tx_\alpha$ при $\alpha \in A_n$ и $T_n x_\alpha = 0$ при $\alpha \notin A_n$. Тогда область значений оператора T_n конечномерна.

Кроме того,

$$\|T - T_n\|^2 = \sum_{\alpha \notin A_n} |Tx_\alpha|^2 < \frac{1}{n^2},$$

так что $|T - T_n| \leqslant \|T - T_n\| < \frac{1}{n}$. Следовательно, оператор T является пределом последовательности $\{T_n\}$ как в HS, так и в равномерной операторной топологии. Из леммы VI.5.3 следует, что оператор T вполне непрерывен.

Однако не всякий вполне непрерывный оператор принадлежит HS. Например, пусть $\{x_n\}$ — полная ортонормальная система в сепарабельном гильбертовом пространстве, и пусть T — оператор, определенный соотношениями $Tx_n = n^{-1/2}x_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Этот оператор вполне непрерывен (см. упражнение X.8.5), но не принадлежит HS.

Выше было отмечено, что класс операторов Гильберта — Шмидта с нормой $\|\cdot\|$ представляет собой банахову алгебру (без единицы, если $\mathfrak{H}$ бесконечномерно). Легко показать, что если в этой алгебре определить скалярное произведение

$$((S,\ T)) = \sum_{\alpha} (Sx_\alpha,\ Tx_\alpha),$$

где $\{x_\alpha\}$ — полная ортонормальная система, то оно удовлетворяет всем требованиям, накладываемым обычно на скалярное произведение в гильбертовом пространстве, причем $((T,\ T)) = \|T\|^2$.

Таким образом, алгебра HS является гильбертовым пространством, в котором имеется еще инволюция $S \to S^*$, удовлетворяющая отношению

$$((ST,\ R)) = ((T,\ S^*R)).$$

Такие алгебры, известные под названием H^*-алгебр, изучал Амброз [1], который показал, что всякая H^*-алгебра топологически и алгебраически изоморфна алгебре операторов Гильберта — Шмидта в некотором гильбертовом пространстве.

7. Теорема. *Если T — оператор Гильберта — Шмидта, а f — однозначная аналитическая функция, определенная в окрестности его спектра и равная 0 в нуле, то $f(T)$ — также оператор Гильберта — Шмидта, и отображение $T \to f(T)$ пространства HS в себя непрерывно. Кроме того, если $\{f_n\}$ — последовательность таких функций, имеющих в качестве общей области определения некоторую окрестность N спектра оператора T, и если $f_n(\lambda) \to f(\lambda)$ равномерно для λ из N, то $f_n(T) \to f(T)$ в HS.*

Доказательство. Если гильбертово пространство $\mathfrak{H}$ конечномерно, то результат тривиален, так что мы предположим, что $\mathfrak{H}$ бесконечномерно. По теореме 4 HS является B-пространством и алгеброй, в которой $\|TS\| \leqslant \|T\| \|S\|$. Способом, описанным в § IX.1, к HS можно присоединить единицу, в результате чего получается B-алгебра, состоящая из всех пар вида $[\alpha,\ T]$, где α — скаляр, а T — оператор из HS. Норма в этой алгебре определяется равенством $|[\alpha,\ T]| = |\alpha| + \|T\|$. Алгебру, полученную присоединением единицы к HS, мы будем обозначать HS^+.

Поскольку пространство $\mathfrak{H}$ бесконечномерно, из теорем 6 и IV.3.5 следует, что единичный оператор не принадлежит HS, так что HS — алгебра без единицы.

Заметим сначала, что элемент $[\alpha,\ T]$ из HS^+ обладает обратным тогда и только тогда, когда оператор $\alpha I + T$ обратим в алгебре $B(\mathfrak{H})$ всех ограниченных операторов в $\mathfrak{H}$. Действительно, если $[\beta,\ S] = [\alpha,\ T]^{-1}$, то $[1,\ 0] = [\alpha,\ T][\beta,\ S] = [\alpha\beta,\ \alpha S + \beta T + TS]$, и потому $\beta = \alpha^{-1}$ и $\alpha S + \beta T + TS = 0$. С помощью простой выкладки получаем, что тогда $\beta I + S = (\alpha I + T)^{-1}$. Обратно, пусть $B = (\alpha I + T)^{-1}$. Так как оператор T вполне непрерывен, а пространство $\mathfrak{H}$ бесконечномерно, то α не может быть равно нулю, ибо если $\alpha = 0$, то из следствия 5 и теоремы 6 следует, что единичный оператор $I = BT$ вполне непрерывен, что противоречит теореме IV.3.5. Пусть $S = B - \alpha^{-1} I$. Тогда $\alpha^{-1} BT = \alpha^{-1} B(T + \alpha I - \alpha I) = \alpha^{-1}(I - \alpha B) = -S$. Поэтому $S = -\alpha^{-1} BT$ и по следствию 5 S принадлежит HS. Этим доказано, что если оператор $(\alpha I + T)^{-1}$ существует и ограничен, то $[\alpha,\ T]^{-1}$ существует в HS^+ и совпадает с $[\alpha^{-1},\ S]$.

Следовательно, спектр оператора T из HS, если рассматривать T как элемент B-алгебры HS^+, совпадает со спектром оператора T, если его рассматривать как элемент алгебры $B(\mathfrak{H})$ всех ограниченных операторов в $\mathfrak{H}$. Поскольку в любой B-алгебре операция перехода к обратному элементу непрерывна (IX.1.3), отображение $\lambda \to [\lambda, -T]^{-1}$ непрерывно при $\lambda \notin \sigma(T)$. Если θ — отображение алгебры HS^+ в $B(\mathfrak{H})$, переводящее $[\alpha, T]$ в $\alpha I + T$, то θ непрерывно и $\theta\{[\lambda, -T]^{-1}\} = R(\lambda; T)$.

Так как $[\lambda, -T]^{-1}$ является непрерывной функцией от λ на дополнении спектра $\sigma(T)$, то интеграл

$$[*] \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\lambda)\, [\lambda, -T]^{-1}\, d\lambda,$$

где C — положительно ориентированная спрямляемая жорданова кривая, содержащаяся в области определения функции f и охватывающая спектр $\sigma(T)$, существует в смысле нормы пространства HS^+. Если $[\mu, U]$ — элемент из HS^+, равный интегралу [*], то по теореме III.2.19

$$\mu I + U = \theta\{[\mu, U]\} = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\lambda)\, R(\lambda; T)\, d\lambda = f(T).$$

Покажем, что $\mu = 0$. Пусть η — мультипликативный линейный функционал на HS^+, определенный равенством $\eta\{[\alpha, T]\} = \alpha$. Так как η является гомоморфизмом, то $\eta\{[\lambda, T]^{-1}\} = \lambda^{-1}$, а так как η непрерывен, то из теоремы III.2.19 (c) следует, что

$$\mu = \eta\{[\mu, U]\} = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\lambda)\, \lambda^{-1}\, d\lambda = f(0).$$

По предположению $f(0) = 0$, так что $f(T) = U$, и потому $f(T)$ принадлежит HS.

Если $\lim T_n = T$ по норме пространства HS, то из леммы VII.6.5 следует, что для всех достаточно больших n контур C, по которому берется интеграл [*], охватывает спектр $\sigma(T_n)$. Из следствия VII.6.3 получаем, что в смысле сходимости по норме в HS^+

$$\lim_{n\to\infty} [\lambda, -T_n]^{-1} = [\lambda, -T]^{-1}$$

равномерно относительно $\lambda \in C$. Таким образом, по теореме III.2.19

$$\lim_{n\to\infty} f(T_n) = \lim_{n\to\infty} \theta\left\{\frac{1}{2\pi i} \int_C f(\lambda)\, [\lambda, -T_n]^{-1}\, d\lambda\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\lambda)\, R(\lambda; T)\, d\lambda = f(T),$$

где предел понимается в смысле сходимости по норме в HS.

При доказательстве последней части настоящей теоремы мы, очевидно, можем предполагать, что контур C в интеграле [*] лежит целиком внутри множества N. Тогда

$$f(T)=\theta\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_C f(\lambda)[\lambda, -T]^{-1}d\lambda\right\}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\theta\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_C f_n(\lambda)[\lambda, -T]^{-1}d\lambda\right\}=\lim_{n\to\infty} f_n(T)$$

в смысле сходимости по норме в HS, ч. т. д.

Как было показано в предыдущей теореме, алгебра операторов Гильберта — Шмидта возникает из алгебры конечномерных операторов при замыкании последней по норме более сильной, чем обычная норма в $B(\mathfrak{H})$. Поэтому естественно ожидать, что некоторые свойства конечномерных операторов, которые в случае общего линейного оператора в гильбертовом пространстве безвозвратно теряются, сохранятся для операторов Гильберта — Шмидта. Чтобы показать, что это в самом деле так, нам понадобится вывести ряд неравенств для операторов в конечномерном гильбертовом пространстве. Наиболее важными из них являются хорошо известное «детерминантное неравенство Адамара», открытие которого в начале этого века проложило путь к пониманию интегральных операторов, и замечательное неравенство Карлемана, приведенное в теореме 15.

В следующих нескольких теоремах мы будем иметь дело с конечномерными гильбертовыми пространствами и изложим некоторые элементарные факты, связанные с понятием следа оператора.

8. Определение. Пусть $\{x_1, \ldots, x_n\}$ — базис в конечномерном комплексном гильбертовом пространстве E^n. Пусть A — оператор в E^n, и пусть[1]) $Ax_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$, $i=1, \ldots, n$. *След* оператора A, обозначаемый символом $\operatorname{tr}(A)$, определяется равенством

$$\operatorname{tr}(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

---

[1]) Заметим, что такое определение матрицы, соответствующей оператору A, отличается от того, которое обычно применяется. Это отличие приводит к тому, что если $A\longrightarrow(a_{ij})$, $B\longrightarrow(b_{ij})$, то $AB\longrightarrow(b_{ij})(a_{ij})$ вместо обычного $AB\longrightarrow(a_{ij})(b_{ij})$. Это следует иметь в виду и при доказательстве леммы 6.21, где речь идет о приведении оператора к треугольному виду.— *Прим. перев.*

В лемме 9 будет показано, что след оператора A не зависит от выбора базиса $\{x_i\}$, участвующего в его определении. Вполне очевидно, что след является линейной функцией от A.

9. Лемма. *След оператора A в E^n не зависит от базиса, используемого при его определении. Кроме того, если A и B — какие-нибудь операторы в E^n, то* $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Доказательство. Докажем сначала второе утверждение. Пусть $Bx_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j$. Тогда

$$ABx_i = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} b_{ij}a_{jk}x_k, \qquad BAx_i = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ij}b_{jk}x_k.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij}a_{ji} = \operatorname{tr}(BA).$$

Чтобы установить справедливость первого утверждения, рассмотрим в E^n какой-нибудь другой базис $\{y_1, \ldots, y_n\}$. Тогда оператор C, определенный соотношениями $y_i = Cx_i$, $i = 1, \ldots, n$, взаимно однозначно отображает E^n на себя. Вычислим след оператора A по отношению к базису $\{y_1, \ldots, y_n\}$. Заметим, что

$$AC^{-1}y_i = Ax_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = C^{-1} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j,$$

так что

$$CAC^{-1}y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j.$$

Отсюда следует, что след оператора CAC^{-1}, вычисленный относительно базиса $\{y_j\}$, равен $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. По уже доказанному след оператора CAC^{-1} совпадает со следом оператора $A = C^{-1}CA$ при условии, что оба следа вычисляются относительно базиса $\{y_1, \ldots, y_n\}$. Это доказывает справедливость первого утверждения.

Напомним, что *характеристический многочлен* $\Delta(\lambda)$ оператора A в E^n находят, представляя оператор A матрицей в каком-нибудь удобном базисе пространства E^n и вычисляя определитель матрицы $\lambda I - A$, а именно

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda I - A).$$

Используя элементарные свойства определителей, легко показать, что $\Delta(\lambda)$ не зависит от выбора базиса.

10. Лемма. (a) *След оператора A в E^n равен коэффициенту при λ^{n-1} его характеристического многочлена, взятому с обратным знаком.*

(b) *След оператора в E^n равен сумме всех чисел, принадлежащих спектру оператора, причем каждое из этих чисел считается столько раз, какова его кратность как корня характеристического многочлена.*

(c) *След нильпотентного оператора в E^n равен нулю.*

Доказательство. Если $\{x_1, \ldots, x_n\}$ — базис в E^n и $Ax_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$, то

$$\Delta(\lambda) = \det\begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \ldots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \ldots & -a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \ldots & \lambda - a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Вычисляя этот определитель, мы видим, что он представляет собой многочлен $\Delta(\lambda) = \lambda^n - c_1\lambda^{n-1} + \ldots + c_n$, где $c_1 = \operatorname{tr}(A)$. Чтобы доказать утверждение (b), достаточно вспомнить, что спектр $\sigma(A)$ состоит из всех чисел λ, для которых матрица $\lambda I - A$ сингулярна, т. е. из всех λ, для которых $\Delta(\lambda) = 0$. Так как сумма корней уравнения $\Delta(\lambda) = 0$, если считать m-кратный корень m раз, равна c_1, то утверждение (b) доказано. Наконец, если оператор A нильпотентен, то $\sigma(A) = \{0\}$, так что в силу (b), $\operatorname{tr}(A) = 0$, ч. т. д.

11. Лемма. *Если A — линейный оператор в пространстве E^n, $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ и если $m_i = \dim E(\lambda_i; A)E^n$, $i = 1, \ldots, k$, то $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{k} m_i\lambda_i$.*

Доказательство. Если $\lambda_i \in \sigma(A)$, то по теореме VII.1.7 оператор $A - \lambda_i I$ нильпотентен на $E(\lambda_i; A)E^n$. Следовательно, $AE(\lambda_i; A) = \lambda_i E(\lambda_i; A) + N_i$, где N_i — нильпотентный оператор в E^n. Так как $I = \sum_{i=1}^{k} E(\lambda_i; A)$, то

$$A = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i E(\lambda_i; A) + \sum_{i=1}^{k} N_i.$$

След является линейной функцией оператора; кроме того, если P — проектор, то, выбирая в качестве базиса в E^n теоретико-множественное объединение базиса в PE^n и базиса в $(I-P)E^n$, получаем немедленно, что $\operatorname{tr}(P)=\dim PE^n$. Из этого замечания и леммы 10 (с) следует, что $\operatorname{tr}(A)=\sum_{i=1}^{k} m_i\lambda_i$, ч. т. д.

Замечание. Число $\dim E(\mu;\,A)E^n$ равно кратности μ как корня характеристического многочлена оператора A. Этот результат содержится в упражнении VII.2.3; учитывая это, заключаем, что в формуле $\operatorname{tr}(A)=\sum_{i=1}^{k} m_i\lambda_i$ леммы 11 число m_i можно считать кратностью λ_i как корня характеристического многочлена. Так определенная кратность точки спектра μ отлична от размерности многообразия $\{x \mid x\in E^n,\ Ax=\mu x\}$ собственных векторов оператора A, соответствующих собственному значению μ. Для самосопряженных, или эрмитово-симметричных, матриц эти два понятия кратности совпадают. Если A — оператор в E^n, то мы будем говорить, что $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — *собственные значения оператора A с учетом их кратностей*, если каждое λ_i является собственным значением оператора A и каждое собственное значение μ оператора A встречается в этом списке m раз, где $m=\dim E(\mu;\,A)E^n$. Аналогичная терминология будет в дальнейшем употребляться для операторов Гильберта — Шмидта.

12. Теорема. (*Неравенство Адамара.*) *Если (a_{ij}) есть $n\times n$-матрица комплексных чисел, то*

$$[*] \qquad |\det(a_{ij})| \leqslant \prod_{j=1}^{n}\Big\{\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|^2\Big\}^{1/2}.$$

Заметим, что это неравенство можно интерпретировать как утверждение, что объем n-мерного параллелепипеда никогда не превосходит объема прямоугольного параллелепипеда со сторонами той же длины.

Доказательство. Это неравенство очевидно для $n=1$ и легко может быть проверено для $n=2$. Предположим, что оно справедливо для $n-1$, и продолжим по индукции. Пусть (a_{ij}) есть $n\times n$-матрица. Рассмотрим в пространстве E^n множество, состоящее из n элементов $u_j=[a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}]$, $j=1, \ldots, n$. Если $u_1=0$, то обе части неравенства [*] обращаются в нуль, и результат тривиален. Если $|u_1|=\Big\{\sum_{j=1}^{n}|a_{j1}|^2\Big\}^{1/2}\neq 0$, то, поскольку обе части неравенства [*] однородны по u_1, можно считать, что $|u_1|=1$. Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_n$ — ортонормальный базис в E^n, причем $v_1=u_1$, и пусть W — унитарный оператор, определенный равенствами $Wv_1 = [1, 0, 0, \ldots, 0]$, $Wv_2 = [0, 1, 0, \ldots, 0]$, $\ldots$, $Wv_n = [0, 0, 0, \ldots, 1]$. Так как абсолютная величина определителя унитарного оператора в E^n равна 1, то

$$|\det(a_{ij})| = |\det(u_1, u_2, \ldots, u_n)| = |\det(W)\det(u_1, u_2, \ldots, u_n)| = \\ = |\det(Wu_1, Wu_2, \ldots, Wu_n)|.$$

Пусть $[w_{1k}, \ldots, w_{nk}]$ — координаты вектора Wu_k. Тогда, так как $Wu_1 = [1, 0, 0, \ldots, 0]$, то

$$\det(Wu_1, Wu_2, \ldots, Wu_n) = \begin{vmatrix} 1 & w_{12} & \ldots & w_{1n} \\ 0 & w_{22} & \ldots & w_{2n} \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & w_{n2} & \ldots & w_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w_{22} & \ldots & w_{2n} \\ . & \ldots & . \\ w_{n2} & \ldots & w_{nn} \end{vmatrix}.$$

Используя предположение индукции, заключаем, что

$$|\det(a_{ij})| \leqslant \prod_{j=2}^{n} \left\{\sum_{i=2}^{n} |w_{ij}|^2\right\}^{1/2}.$$

Но так как

$$\left\{\sum_{i=2}^{n} |w_{ij}|^2\right\}^{1/2} \leqslant \left\{\sum_{i=1}^{n} |w_{ij}|^2\right\}^{1/2} = |Wu_j| = |u_j|, \quad j = 1, \ldots, n,$$

и $|u_1| = 1$, то это доказывает теорему.

Неравенство Адамара ниже будет применено в следующей ситуации. Пусть (a_{ij}) — матрица оператора A в E^n относительно ортонормального базиса $\delta_1 = [1, 0, \ldots, 0]$, $\ldots$, $\delta_n = [0, \ldots, 0, 1]$. Обозначим через A_{ij} алгебраическое дополнение элемента a_{ij}, т. е. A_{ij} представляет собой умноженный на $(-1)^{i+j}$ определитель $(n-1)\times(n-1)$-матрицы, получающейся из матрицы (a_{ij}) вычеркиванием i-й строки и j-го столбца. Тогда $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$ и $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik} = 0$ при $j \neq k$. Если оператор A взаимно однозначен, то из правила Крамера для вычисления A^{-1} получаем, что матрица оператора $\det(A)\,A^{-1}$ относительно базиса $\delta_1, \ldots, \delta_n$ совпадает с матрицей, транспонированной к матрице (A_{ij}). Следовательно, если $x = [\xi_1, \ldots, \xi_n]$ и $y = [\zeta_1, \ldots, \zeta_n]$, то

$$\det(A)(A^{-1}x, y) = \sum_{i,\, j=1}^{n} A_{ij}\xi_i\overline{\zeta}_j.$$

С другой стороны,

$$\det(A)(A^{-1}x,\ y) = -\begin{vmatrix} 0 & \bar{\zeta}_1 & \dots & \bar{\zeta}_n \\ \xi_1 & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ . & . & \dots & . \\ \xi_n & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

в чем можно убедиться, разлагая определитель в правой части по первому столбцу и первой строке и учитывая предыдущее равенство. Неравенство Адамара будет применено для оценки этого определителя.

13. Лемма. *Пусть (a_{ij}) — матрица взаимно однозначного оператора A в E^n относительно базиса $\delta_1 = [1, 0, \dots, 0], \dots, \delta_n = [0, \dots, 0, 1]$. Тогда дубль-норма оператора A выражается формулой*

$$\|A\| = \Big\{\sum_{i,\,j=1}^{n} |a_{ij}|^2\Big\}^{1/2}.$$

Кроме того, если $x = [\xi_1, \dots, \xi_n]$ и $y = [\zeta_1, \dots, \zeta_n]$ — два вектора в E^n, то

$$[']\qquad \left|\begin{vmatrix} 0 & \zeta_1 & \dots & \bar{\zeta}_n \\ \xi_1 & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ . & . & \dots & . \\ \xi_n & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}\right| \leqslant \frac{|x|\cdot|y|\cdot\|A\|^{n-1}}{(n-1)^{(n-1)/2}}.$$

Доказательство. Первое утверждение, которое справедливо и без предположения о взаимной однозначности оператора A, вытекает из следствия 3. Если $x = 0$, то неравенство ['] тривиально. В силу однородности этого неравенства по x достаточно рассмотреть случай, когда $|x| = 1$. По аналогии с доказательством теоремы 12 рассмотрим такой унитарный оператор W, действующий в E^n, что $x = W\delta_n$. Из предыдущих замечаний следует, что последнее утверждение леммы равносильно неравенству

$$|\det(A)(A^{-1}x,\ y)| \leqslant |y|\ \|A\|^{n-1}(n-1)^{-(n-1)/2}.$$

Так как оператор W унитарен, то $\det(A) = \det(W^{-1}AW)$ и $(A^{-1}x,\ y) = (A^{-1}W\delta_n,\ y) = (W^{-1}A^{-1}W\delta_n,\ W^{-1}y)$. Полагая $B = W^{-1}AW$, имеем $B^{-1} = W^{-1}A^{-1}W$, а из леммы 2 следует, что $\|B\| = \|A\|$. Кроме того, поскольку оператор W унитарен, вектор $z = W^{-1}y$ имеет норму $|z| = |y|$. Следовательно, утверждение, которое требуется доказать, может быть записано в виде

$$|\det(B)(B^{-1}\delta_n,\ z)| \leqslant |z|\ \|B\|^{n-1}(n-1)^{-(n-1)/2}.$$

Выписывая определитель, стоящий в левой части этого неравенства, видим, что достаточно доказать лемму в частном случае, когда $0=\xi_1=\ldots=\xi_{n-1}$ и $1=\xi_n$. Таким образом, определитель, который требуется оценить, имеет вид

$$\begin{vmatrix} \bar{\zeta}_1 & \ldots & \bar{\zeta}_n \\ a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{n-1,1} & \ldots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{\zeta}_1 & a_{11} & \ldots & a_{n-1,1} \\ & & & \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \bar{\zeta}_n & a_{1n} & \ldots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}.$$

Пусть D обозначает абсолютную величину этого определителя. Тогда неравенство Адамара показывает, что

[*] $$D\leqslant |y| \prod_{i=1}^{n-1} \Big\{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2\Big\}^{1/2}.$$

Так как среднее геометрическое конечного набора положительных чисел не превосходит их среднего арифметического (ср. VI.11.34), то

$$\prod_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \leqslant \Big[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\Big]^{n-1} \leqslant \Big[\frac{\|A\|^2}{n-1}\Big]^{n-1}.$$

Извлекая из обеих частей этого неравенства квадратный корень и комбинируя получающееся неравенство с [*], видим, что

$$D\leqslant \frac{|y|\,\|A\|^{n-1}}{(n-1)^{(n-1)/2}}.$$

Лемма доказана.

14. Лемма. *Пусть A — оператор в n-мерном гильбертовом пространстве E^n; предположим, что* $\operatorname{tr}(A)=0$. *Тогда в E^n существует такой ортонормальный базис $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, что $(A\varphi_i, \varphi_i)=0$, $1\leqslant i\leqslant n$.*

Доказательство. Если $n=1$, то $A=0$, поскольку $\operatorname{tr}(A)=0$, и утверждение очевидно. Докажем по индукции, что в E^n найдется такой ненулевой вектор φ, для которого $(A\varphi, \varphi)=0$. Рассмотрим сначала случай $n=2$ и предположим, что в E^2 выбран такой ортонормальный базис, в котором матрица оператора A имеет треугольный вид

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & -a \end{pmatrix}.$$

Пусть $\varphi=[1, z]$, так что $(A\varphi, \varphi)=a(1-|z|^2)+b\bar{z}$. Если $a=0$, мы полагаем $z=0$. Если же $a\neq 0$, то пусть $z=re^{i\theta}$, где θ выбирается так, чтобы число $c = ba^{-1}e^{-i\theta}$ было вещественным, а r — положительный корень уравнения $r^2 - cr - 1 = 0$. Легко видеть, что в обоих случаях $(A\varphi, \varphi) = 0$.

Пусть теперь $n > 2$. Допустим, что утверждение, которое мы должны доказать, неверно. Тогда

$$\min_{|\varphi|=1} |(A\varphi, \varphi)| > 0.$$

Так как единичная сфера в E^n компактна, то на некотором векторе φ_1 этот минимум достигается. Пусть $m = (A\varphi_1, \varphi_1)$. Выбирая ортонормальный базис $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, имеем по предположению

$$\operatorname{tr}(A) = m + \sum_{i=2}^{n} (A\varphi_i, \varphi_i) = 0.$$

Это равенство можно переписать в виде

$$\sum_{i=2}^{n} \left(E \left(A + \frac{m}{n-1} I \right) \varphi_i, \varphi_i \right) = 0,$$

где E — самосопряженный оператор проектирования пространства E^n на подпространство S, порожденное векторами $\varphi_2, \ldots, \varphi_n$. Очевидно, что оператор $E\left(A + \frac{m}{n-1} I\right)$ отображает S в себя. Поэтому из предположения индукции следует, что в S найдется единичный вектор φ, для которого

$$\left(E \left(A + \frac{m}{n-1} I \right) \varphi, \varphi \right) = 0.$$

Поскольку $E\varphi = \varphi$, это означает, что

$$(A\varphi, \varphi) = -\frac{m}{n-1}.$$

Таким образом,

$$|(A\varphi, \varphi)| = \frac{|m|}{n-1} < |(A\varphi_1, \varphi_1)|,$$

что противоречит определению вектора φ_1. Следовательно, $(A\varphi_1, \varphi_1) = 0$.

Мы можем теперь закончить доказательство леммы по индукции. Пусть φ — такой вектор нормы 1, что $(A\varphi, \varphi) = 0$. Пусть S_0 — ортогональное дополнение к одномерному подпространству, натянутому на φ, и пусть E_0 — оператор ортогонального проектирования пространства E^n на S_0. Было отмечено, что лемма справедлива в случае $n = 1$; предположим теперь, что она справедлива для $(n-1)$-мерного пространства. Тогда в S_0 существует такой ортонормальный базис $\{\psi_2, \ldots, \psi_n\}$, для которого $(E_0 A\psi_i, \psi_i) =$

$=(A\psi_i,\ \psi_i)=0,\ 2\leqslant i\leqslant n$ [1]). Ясно, что $\{\varphi, \psi_2, \ldots, \psi_n\}$ представляет собой искомый базис в E^n, ч. т. д.

15. Теорема. *Пусть A — оператор в E^n и $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — его собственные значения с учетом их кратностей; пусть $\lambda\neq 0$ — комплексное число, не принадлежащее спектру оператора A. Тогда*

$$\left|\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{\lambda_i}{\lambda}\right)e^{\lambda_i/\lambda}(\lambda I-A)^{-1}\right|\leqslant|\lambda|\left\{\exp\frac{1}{2}\left(1+\frac{\|A\|^2}{|\lambda|^2}\right)\right\}.$$

Доказательство. Пусть $B=A/\lambda$, так что по теоремам VII.3.11 и VII.3.19 $\sigma(B)=\{\lambda_1/\lambda, \ldots, \lambda_n/\lambda\}$ и $E(\lambda_i/\lambda;\ B)=E(\lambda_i;\ A)$. Кроме того, $\operatorname{tr}(B)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i/\lambda=\operatorname{tr}(A)/\lambda$. Пусть N — какое-нибудь целое число больше $|\operatorname{tr}(B)|$. Для каждого такого N определим в пространстве $E^n\oplus E^N$ оператор B_N соотношением $B_N[x,\ y]=[Bx, (-1/N)\operatorname{tr}(B)y]$. Ясно, что $\operatorname{tr}(B_N)=0$ и что собственными значениями оператора $I-B_N$ являются числа

$$1-\frac{\lambda_1}{\lambda}, \ldots, \quad 1-\frac{\lambda_n}{\lambda}, \quad 1+\frac{\operatorname{tr}(B)}{N}, \ldots, \quad 1+\frac{\operatorname{tr}(B)}{N}.$$

Следовательно, определитель $\det(I-B_N)$ равен произведению этих чисел, т. е.

$$\text{(I)}\qquad |\det(I-B_N)|=\left|\left(1+\frac{\operatorname{tr}(B)}{N}\right)^N\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{\lambda_i}{\lambda}\right)\right|.$$

Так как $(1/N)|\operatorname{tr}(B)|<1$ и $\lambda\neq\lambda_k$, то обратный оператор $(I-B_N)^{-1}$ существует, и легко видеть, что

$$(I-B_N)^{-1}[x,\ y]=\left[(I-B)^{-1}x, \quad \left(1+\frac{1}{N}\operatorname{tr}(B)\right)^{-1}y\right].$$

Поэтому $|(I-B)^{-1}|\leqslant|(I-B_N)^{-1}|$, так что

$$\text{(II)}\qquad |\det(I-B_N)|\cdot|(I-B)^{-1}|\leqslant|\det(I-B_N)|\cdot|(I-B_N)^{-1}|.$$

Из леммы 13 следует, что

$$\text{(III)}\qquad |\det(I-B_N)|\cdot|(I-B_N)^{-1}|\leqslant\frac{\|I-B_N\|^{N+n-1}}{(N+n-1)^{(N+n-1)/2}}.$$

Далее, так как $\operatorname{tr}(B_N)=0$, то по лемме 14 в $E^n\oplus E^N$ существует такой ортонормальный базис $z_1, \ldots, z_{n+N}$, что $(B_Nz_k,\ z_k)=0$. На главной диагонали матрицы оператора $I-B_N$ относительно

[1]) Здесь используется то обстоятельство, что след сужения оператора E_0A на подпространство S_0 равен нулю; это легко следует из равенства $(A\varphi,\ \varphi)=0$ и предположения $\operatorname{tr}(A)=0$.— *Прим перев.*

базиса $z_1, \ldots, z_{n+N}$ стоят единицы, а на остальных местах — соответствующие элементы матрицы B_N, взятые с обратными знаками. Следовательно,

(IV) $\| I - B_N \|^2 = N + n + \| B_N \|^2 = N + n + N^{-1} | \operatorname{tr}(B) |^2 + \| B \|^2.$

Комбинируя формулы (I) — (IV), получаем

$$\left| \left(1 + \frac{\operatorname{tr}(B)}{N}\right)^N \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{\lambda_i}{\lambda}\right) (I - B)^{-1} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(N + n + N^{-1} | \operatorname{tr}(B) |^2 + \| B \|^2)^{(N+n-1)/2}}{(N + n - 1)^{(N+n-1)/2}} =$$

$$= \frac{\left(1 + \dfrac{| \operatorname{tr}(B) |^2}{N(N+n)} + \dfrac{\| B \|^2}{N+n}\right)^{(N+n-1)/2}}{\left(1 - \dfrac{1}{N+n}\right)^{(N+n-1)/2}}.$$

Это неравенство выполняется для всех достаточно больших N, и потому

$$\left| e^{\operatorname{tr}(B)} \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{\lambda_i}{\lambda}\right) (I - B)^{-1} \right| \leqslant \exp\left\{\frac{1}{2}(1 + \| B \|^2)\right\}.$$

Отсюда немедленно следует справедливость утверждения леммы, если вспомнить, что $B = A/\lambda$ и что $\operatorname{tr}(B) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i/\lambda$.

Установив эти предварительные теоремы, относящиеся к случаю конечномерного пространства, вернемся теперь к изучению операторов в общем гильбертовом пространстве. Желательно было бы обобщить понятие следа на некоторые операторы в гильбертовом пространстве; на первый взгляд может показаться, что данное выше определение следа непосредственно применимо к операторам Гильберта — Шмидта. Однако, как показывает следующий пример, это неверно. Пусть $\{x_n\}$ — ортонормальный базис в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, и пусть T — линейный оператор, определенный равенствами $Tx_n = x_n/n$. Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} | Tx_n |^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

сходится, так что T является оператором Гильберта — Шмидта, в то время как ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (Tx_n, x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

который мы могли бы надеяться использовать для определения следа $\operatorname{tr}(T)$, расходится. Итак, след не может быть определен таким способом для любого оператора из класса HS. Мы увидим, однако, что если $T=UV$, где *оба оператора U и V принадлежат классу HS*, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(Tx_n,\ x_n)=\sum_{n=1}^{\infty}(Vx_n,\ U^*x_n)$$

сходится и определяет полезное понятие «следа». Это незначительное изменение в подходе по сравнению с конечномерным случаем оказывается достаточным для того, чтобы можно было развить теорию вплоть до обобщения теоремы 15 на произвольные операторы Гильберта — Шмидта.

16. Лемма. *Если S и T — операторы Гильберта — Шмидта в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ и если $\{x_\alpha\}$ — полный ортонормальный базис в $\mathfrak{H}$, то ряд $\sum_\alpha (Sx_\alpha,\ T^*x_\alpha)$ абсолютно сходится к пределу, не зависящему от базиса.*

Доказательство. Пусть $\{x_\alpha\}$ и $\{y_\beta\}$ — два ортонормальных базиса в $\mathfrak{H}$. В силу неравенства Шварца и теоремы IV.4.13

$$\sum_{\alpha,\beta}|(Sx_\alpha,\ y_\beta)\overline{(T^*x_\alpha,\ y_\beta)}|\leqslant\Big\{\sum_{\alpha,\beta}|(Sx_\alpha,\ y_\beta)|^2\Big\}^{1/2}\Big\{\sum_{\alpha,\beta}|(T^*x_\alpha,\ y_\beta)|^2\Big\}^{1/2}=$$
$$=\Big\{\sum_\alpha|Sx_\alpha|^2\Big\}^{1/2}\Big\{\sum_\alpha|T^*x_\alpha|^2\Big\}^{1/2}=\|S\|\cdot\|T^*\|.$$

Таким образом, двойной ряд

$$[']\qquad \sum_{\alpha,\beta}(Sx_\alpha,\ y_\beta)\overline{(T^*x_\alpha,\ y_\beta)}$$

абсолютно сходится; поэтому соответствующие повторные ряды сходятся и их суммы равны. По теореме IV.4.13

$$['']\qquad \sum_\alpha(Sx_\alpha,\ T^*x_\alpha)=\sum_\alpha\sum_\beta(Sx_\alpha,\ y_\beta)\overline{(T^*x_\alpha,\ y_\beta)}=$$
$$=\sum_\beta\sum_\alpha(Ty_\beta,\ x_\alpha)\overline{(S^*y_\beta,\ x_\alpha)}=\sum_\beta(Ty_\beta,\ S^*y_\beta).$$

Таким образом, сходимость и равенство повторных рядов, соответствующих двойному ряду $[']$, влечет сходимость и равенство только что выписанных одинарных рядов. Беря в качестве $\{y_\beta\}$ тот же самый базис $\{x_\alpha\}$, видим, что $\sum_\alpha(Sx_\alpha,\ T^*x_\alpha)=\sum_\alpha(Tx_\alpha,\ S^*x_\alpha)$, так что это выражение симметрично относительно S и T. Отсюда, еще раз применяя [″], получаем, что это выражение не зависит от базиса, ч. т. д.

17. Определение. Если S и T — операторы Гильберта — Шмидта в $\mathfrak{H}$, *то следом пары* S, T назовем выражение

$$\operatorname{tr}(S, T) = \sum_{\alpha} (Sx_\alpha, T^*x_\alpha),$$

где $\{x_\alpha\}$ — какой-нибудь ортонормальный базис в $\mathfrak{H}$.

18. Теорема. *След является симметричной билинейной функцией, определенной на произведении пространства HS на себя. Кроме того, если S и T принадлежат HS, то*

$$|\operatorname{tr}(S, T)| \leqslant \|S\| \cdot \|T\|, \quad \operatorname{tr}(T, T^*) = \|T\|^2.$$

Доказательство. Симметрия следа и неравенство $|\operatorname{tr}(S, T)| \leqslant \leqslant \|S\| \cdot \|T\|$ были установлены в ходе доказательства предыдущей леммы. Билинейность и соотношение $\operatorname{tr}(T, T^*) = \|T\|^2$ вытекают непосредственно из определений 1 и 17.

Из полученных выше результатов легко следует, что HS — гильбертово пространство относительно скалярного произведения $[S, T] = \operatorname{tr}(S, T^*)$. Хотя этот факт представляет определенный интерес, но он не найдет в дальнейшем изложении сколько-нибудь значительных применений. Однако сам по себе след является полезным инструментом.

19. Следствие. *Функция* $\operatorname{tr}(S, T)$, *рассматриваемая как отображение пространства $HS \oplus HS$ в поле комплексных чисел, непрерывна.*

20. Лемма. *Пусть T — ограниченный конечномерный линейный оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Пусть $\mathfrak{N}$ — нуль-пространство оператора T, а E — оператор ортогонального проектирования на какое-нибудь конечномерное подпространство пространства $\mathfrak{H}$, содержащее $\mathfrak{N}^\perp$. Тогда*

(a) *спектры операторов T и ET совпадают;*

(b) *если f — аналитическая функция из класса $\mathcal{F}(T)$ (ср. VII.3), такая, что $f(0) = 0$, то $f(ET) = Ef(T)$, $f(T) = f(T)E$, $\operatorname{tr}(f(T), T) = \operatorname{tr}(f(ET), ET)$, а $\operatorname{tr}(f(ET), ET)$ совпадает со следом сужения оператора $ETf(T)$ на конечномерное подпространство $E\mathfrak{H}$.*

Доказательство. (a) Поскольку пространство $\mathfrak{H}$ бесконечномерно, точка 0 принадлежит спектру каждого из операторов T и ET. Допустим, что число $\lambda \neq 0$ принадлежит спектру оператора T. Так как оператор T вполне непрерывен, то по теореме VII.4.5 λ является его собственным значением, т. е. $Tx = \lambda x$

для некоторого ненулевого вектора x из $\mathfrak{H}$, и потому $(ET)(Ex) = \lambda Ex$, ибо $T = TE$. Следовательно, λ принадлежит спектру оператора ET[1]. Обратно, предположим, что отличное от 0 число λ принадлежит спектру оператора ET. Тогда для некоторого ненулевого вектора x из $E\mathfrak{H}$ имеем $ETx = \lambda x$. Поэтому $Tx = \lambda x + y$, где y принадлежит подпространству $(I - E)\mathfrak{H}$, а потому и нуль-пространству оператора T. Положим $u = \lambda^{-1}y$. Тогда $T(x+u) = \lambda(x+u)$; следовательно, λ является собственным значением оператора T.

(b) Пусть λ принадлежит резольвентному множеству оператора T. Легко проверить справедливость тождества

$$\lambda I - T = (\lambda I - ET)\lambda^{-1}(I - E)(\lambda I - T) + (\lambda I - ET)E,$$

раскрывая скобки в правой части и учитывая, что $T = TE$. Умножим это тождество слева на $(\lambda I - ET)^{-1}$ и справа на $(\lambda I - T)^{-1}$, получим

[*] $$(\lambda I - ET)^{-1} = \lambda^{-1}(I - E) + E(\lambda I - T)^{-1}.$$

Предположим, что аналитическая функция f принадлежит классу $\mathcal{F}(T)$, а значит, в силу (a) и классу $\mathcal{F}(ET)$, и что $f(0) = 0$. Учитывая соотношение [*], выбирая подходящий контур интегрирования C и используя определение оператора $f(T)$, данное в § VII.3, получаем

$$f(ET) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(\lambda)(\lambda I - ET)^{-1}\,d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_C \frac{f(\lambda)}{\lambda}\,d\lambda\right\}(I - E) + $$
$$+ \frac{1}{2\pi i}E\int_C f(\lambda)(\lambda I - T)^{-1}\,d\lambda = f(0)(I - E) + Ef(T) = Ef(T).$$

Почти таким же способом можно доказать, что $f(T)E = f(TE)$, а это показывает, что $f(T)E = f(T)$, поскольку $T = TE$.

Пусть $\{x_\alpha,\ \alpha \in A\}$ — ортонормальный базис в $\mathfrak{H}$. Так как подпространство $E\mathfrak{H}$ конечномерно, без ограничения общности можно предположить, что в A имеется такое конечное подмножество B, что $\{x_\alpha,\ \alpha \in B\}$ — ортонормальный базис в $E\mathfrak{H}$, а $\{x_\alpha,\ \alpha \in A - B\}$ — ортонормальный базис в $(I - E)\mathfrak{H}$. Тогда, поскольку $T = TE$, имеем $T^* = ET^*$ и

['] $$\operatorname{tr}(f(ET),\ ET) = \operatorname{tr}(Ef(T), ET) =$$
$$= \sum_{\alpha \in A}(Ef(T)x_\alpha,\ (ET)^* x_\alpha) =$$

[1]) Вектор Ex не равен нулю, ибо в противном случае $x \in \mathfrak{N}$, откуда $\lambda x = Tx = 0$. — *Прим. перев.*

$$= \sum_{\alpha \in B} (f(T) x_\alpha, T^* x_\alpha) =$$
$$= \sum_{\alpha \in B} (ETf(T) x_\alpha, x_\alpha) =$$
$$= \operatorname{tr}(ETf(T) \mid E\mathfrak{H}).$$

Так как $f(T) E = f(T)$, то $f(T)(I-E) = 0$ и $f(T) x_\alpha = 0$ для $\alpha \in A - B$; и из третьей строки соотношений [′] следует, что

$$\operatorname{tr}(f(T), T) = \sum_{\alpha \in A} (f(T) x_\alpha, T^* x_\alpha) =$$
$$= \sum_{\alpha \in B} (f(T) x_\alpha, T^* x_\alpha) =$$
$$= \operatorname{tr}(f(ET), ET).$$

Доказательство закончено.

21. Лемма. *Пусть T — линейный оператор в конечномерном гильбертовом пространстве E^n, и пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — его собственные значения с учетом кратностей. Тогда в E^n найдется такой ортонормальный базис $\{x_i\}$, для которого*

$$(Tx_i, x_i) = \lambda_i, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Доказательство. Покажем, что в E^n существует ортонормальный базис $\{x_i\}$, в котором матрица (a_{ij}) оператора T имеет треугольный вид, т. е. $a_{ij} = 0$ при $j > i$. Докажем это индукцией по n. Если $n = 1$, то утверждение очевидно. Пусть $n > 1$, и пусть $\hat{\lambda}$ — собственное значение оператора T. Тогда оператор $T - \hat{\lambda} I$ отображает E^n в некоторое подпространство $S_0 \neq E^n$. Пусть S — такое $(n-1)$-мерное подпространство в E^n, что $S \supseteq S_0$. Тогда поскольку подпространство S инвариантно относительно оператора $T - \hat{\lambda} I$, в нем по предположению индукции найдется такой ортонормальный базис $\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$, что $((T - \hat{\lambda} I) x_i, x_j) = 0$ при $j > i$. Пусть x_n — вектор с нормой 1, ортогональный к S, так что $\{x_1, \ldots, x_n\}$ — ортонормальный базис в E^n. Тогда матрица оператора $T - \hat{\lambda} I$ в базисе $\{x_1, \ldots, x_n\}$ имеет своими элементами числа $((T - \hat{\lambda} I) x_i, x_j)$, причем $((T - \hat{\lambda} I) x_i, x_j) = 0$ при $j > i$. Нужный ортонормальный базис построен.

Таким образом, определитель $\det(\lambda I - T)$ можно вычислить по формуле

$$\det(\lambda I - T) = (\lambda - (Tx_1, x_1)) \ldots (\lambda - (Tx_n, x_n)).$$

Следовательно, из замечания, предшествовавшего теореме 12, вытекает, что последовательность (Tx_i, x_i), $i = 1, \ldots, n$, является последовательностью собственных значений оператора T с учетом их кратностей, ч. т. д.

Замечание. Пользуясь разложением в степенной ряд показательной функции от оператора, легко показать, что если матрица оператора A в E^n относительно базиса $\{x_1, \ldots, x_n\}$ имеет треугольный вид с диагональными элементами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, то матрица оператора e^A в том же самом базисе также имеет треугольный вид с диагональными элементами $e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}$; таким образом, определитель этой последней матрицы равен

$$e^{\lambda_1} \ldots e^{\lambda_n} = e^{(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)} = e^{\operatorname{tr}(A)}.$$

Это означает, что $\det e^A = e^{\operatorname{tr}(A)}$. Поскольку, согласно доказательству предыдущей леммы, для любого оператора найдется базис, в котором его матрица имеет треугольный вид, это тождество справедливо и в общем случае. Если A — такой оператор в E^n, для которого существует A^{-1}, так что может быть определен оператор $\log A$, то указанное тождество можно переписать в виде

$$\det A = \det e^{\log A} = e^{\operatorname{tr}(\log A)}.$$

Это тождество будет нам полезно в дальнейшем.

В лемме 22 и в следствии из нее мы делаем существенный технический шаг, необходимый для перенесения результатов, полученных для конечномерного пространства, на бесконечномерный случай.

22. Лемма. *Пусть λ, z — комплексные числа, причем $\lambda z \neq 1$, и пусть*

$$f(\lambda, z) = z^{-1} [\log(1 - \lambda z) + \lambda z].$$

Пусть $\{x_\alpha\}$ — ортонормальный базис в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, и пусть T — оператор Гильберта — Шмидта, спектр которого не содержит точки λ^{-1}. Тогда для каждого конечного подмножества $B \subset \{x_\alpha\}$ справедливо неравенство

$$\begin{gathered}|\exp[\operatorname{tr}(f(\lambda, T), T)]| \leqslant \\ \leqslant \exp\left\{\frac{1}{2} \sum_{x_\alpha \notin B} |\lambda T x_\alpha|^2\right\} \left[\exp\left\{\frac{1}{2} \sum_{x_\alpha \in B} \operatorname{Re}(\lambda T x_\alpha, x_\alpha)\right\}\right] \times \\ \times \prod_{x_\alpha \in B} (1 - 2\operatorname{Re}(\lambda T x_\alpha, x_\alpha) + |\lambda T x_\alpha|^2)^{1/2}.\end{gathered}$$

Доказательство. Уже было отмечено, что $T x_\alpha = 0$ для всех, кроме, быть может, счетного числа векторов x_α. Пусть $\{x_{\alpha_i}\}$ — множество всех тех x_α, для которых $T x_\alpha \neq 0$; положим $x_i = x_{\alpha_i}$. Можно считать, что $B = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Пусть T_k — линейный оператор, определенный следующими равенствами:

$$T_k x_i = T x_i, \qquad 1 \leqslant i \leqslant k,$$
$$T_k x_i = 0, \qquad i > k,$$
$$T_k x_\alpha = 0, \qquad x_\alpha \notin B.$$

Область значений оператора T_k конечномерна, и последовательность $\{T_k\}$ сходится к T по норме Гильберта—Шмидта.

Если $\lambda = 0$, то утверждение леммы тривиально. Пусть $\lambda \neq 0$; тогда $f(\lambda, 0) = 0$. Пусть $\mathfrak{H}_k$ — подпространство в $\mathfrak{H}$, натянутое на $x_1, \ldots, x_k$. Обозначим через E_k оператор ортогонального проектирования $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{H}_k$, и пусть $\hat{T}_k = E_k T_k \mid \mathfrak{H}_k$ — сужение оператора $E_k T_k$ на $\mathfrak{H}_k$. По лемме 20

$$\operatorname{tr}(f(\lambda, T_k), T_k) = \operatorname{tr}(\hat{T}_k f(\lambda, \hat{T}_k)).$$

Таким образом, используя теорему 12 и замечание, предшествующее формулировке доказываемой леммы, имеем

$$\begin{aligned}
|e^{\operatorname{tr}(f(\lambda, T_k), T_k)}| &= |e^{\operatorname{tr}(\log(I-\lambda\hat{T}_k)+\lambda\hat{T}_k)}| = \\
&= |e^{\operatorname{tr}(\log(I-\lambda\hat{T}_k))} e^{\lambda \operatorname{tr}(\hat{T}_k)}| = \\
&= |\det(I-\lambda\hat{T}_k)|\,|e^{\lambda \operatorname{tr}(\hat{T}_k)}| \leqslant \\
&\leqslant \prod_{i=1}^{k} |(I-\lambda\hat{T}_k)x_i|\, e^{\operatorname{Re}(\lambda \operatorname{tr}(\hat{T}_k))} \leqslant \\
&\leqslant \prod_{i=1}^{k} |(I-\lambda T_k)x_i|\, e^{\operatorname{Re}(\lambda \operatorname{tr}(\hat{T}_k))} =
\end{aligned}$$

$$= \prod_{i=1}^{k} [1 - 2\operatorname{Re}(\lambda T_k x_i, x_i) + |\lambda T_k x_i|^2]^{1/2} e^{\operatorname{Re}(\lambda \operatorname{tr}(\hat{T}_k))} =$$

$$= \prod_{i=1}^{k} [1 - 2\operatorname{Re}(\lambda T x_i, x_i) + |\lambda T x_i|^2]^{1/2} \exp\left\{\sum_{i=1}^{k} \operatorname{Re}(\lambda T x_i, x_i)\right\}.$$

Задавшись натуральным числом n, выберем $k > n$. Тогда, применяя неравенство $1 + \xi \leqslant e^{\xi}$ для $\xi = -2\operatorname{Re}(\lambda T x_i, x_i) + |\lambda T x_i|^2$, получаем, что последнее выражение в приведенной выше последовательности неравенств не превосходит

$$\prod_{i=1}^{n} [1 - 2\operatorname{Re}(\lambda T x_i, x_i) + |\lambda T x_i|^2]^{1/2} \times$$

$$\times e^{-\sum_{i=n+1}^{k} \operatorname{Re}(\lambda T x_i, x_i)}\, e^{(1/2)\sum_{i=n+1}^{k} |\lambda T x_i|^2}\, e^{\sum_{i=1}^{k} \operatorname{Re}(\lambda T x_i, x_i)} =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} [1 - 2\operatorname{Re}(\lambda T x_i, x_i) + |\lambda T x_i|^2]^{1/2} \times$$

$$\times e^{\sum\limits_{i=1}^{n} \operatorname{Re}(\lambda T x_i, x_i)} e^{(1/2) \sum\limits_{i=n+1}^{k} |\lambda T x_i|^2}.$$

Таким образом, для каждого $k > n$

$$[\prime]\ |\exp[\operatorname{tr}(f(\lambda, T_k), T_k)]| \leqslant \prod_{i=1}^{n} [1 - 2\operatorname{Re}(\lambda T x_i, x_i) + |\lambda T x_i|^2]^{1/2} \times$$

$$\times \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \operatorname{Re}(\lambda T x_i, x_i)\right) \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{i=n+1}^{k} |\lambda T x_i|^2\right).$$

По теореме 7, $f(\lambda, T_k)$ сходится к $f(\lambda, T)$ по норме Гильберта — Шмидта. Следовательно, в силу непрерывности функции следа (см. следствие 19)

$$\operatorname{tr}(f(\lambda, T_k), T_k) \longrightarrow \operatorname{tr}(f(\lambda, T), T).$$

Устремляя в $[\prime]$ k к бесконечности, получаем требуемое неравенство.

23. Следствие. *Для любого* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{|\lambda| \to \infty} e^{-\varepsilon|\lambda|^2} |\exp[\operatorname{tr}(f(\lambda, T), T)]| = 0.$$

Доказательство. Выберем конечное множество B столь большим, чтобы выполнялось неравенство

$$\sum_{\alpha \notin B} |T x_\alpha|^2 < \varepsilon.$$

Обозначим для удобства $M = \sum\limits_{\alpha \in B} |(T x_\alpha, x_\alpha)|$. Из леммы 22 следует, что

$$e^{-\varepsilon|\lambda|^2} |\exp[\operatorname{tr}(f(\lambda, T), T)]| \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{\alpha \in B} [1 - 2\operatorname{Re}(\lambda T x_\alpha, x_\alpha) + |\lambda T x_\alpha|^2]^{1/2} e^{(-\varepsilon|\lambda|^2 + |\lambda| M)/2}.$$

Выражение, стоящее в правой части неравенства, стремится, очевидно, к нулю, ч. т. д.

Теперь мы можем пожинать плоды своих трудов, получая бесконечномерные обобщения основных конечномерных результатов. Эти обобщения даются в следующих двух теоремах и далее в теореме 27.

На протяжении нескольких следующих страниц полезно помнить, что оператор N в гильбертовом пространстве квазинильпотентен, если $\lim\limits_{n\to\infty}|N^n|^{1/n}=0$ (см. VII.5.12 и IX.2.5). По лемме VII.3.4 это равносильно условию $\sigma(N)=\{0\}$.

24. Теорема. *Пусть N — квазинильпотентный оператор Гильберта — Шмидта. Тогда* $\operatorname{tr}(N, N)=0$.

Доказательство. Поскольку $\sigma(N)=\{0\}$, функция $f(\lambda, N)$ из леммы 22 определена для любого комплексного числа λ и по теореме 7 имеет своим значением оператор Гильберта — Шмидта. Так как для каждого λ

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{f(\lambda+\Delta\lambda, z)-f(\lambda, z)}{\Delta\lambda}=\frac{\partial f(\lambda, z)}{\partial\lambda}$$

равномерно по z в некоторой окрестности точки $z=0$, то из теоремы 7 следует, что предел

$$\lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{f(\lambda+\Delta\lambda, N)-f(\lambda, N)}{\Delta\lambda}$$

существует в смысле сходимости по норме в HS и равен $\partial f(\lambda, N)/\partial\lambda$. Таким образом, $f(\lambda, N)$ — аналитическая функция со значениями в пространстве HS. Из следствия 19 вытекает, что функция g, определенная равенством

$$g(\lambda)=\operatorname{tr}(f(\lambda, N), N),$$

аналитична для всех λ. Ясно также (это следует из определения $f(\lambda, N)$), что $g(0)=0$. Предыдущее следствие показывает, что $|\exp(g(\lambda))|=o(e^{\varepsilon|\lambda|^2})$ при $\lambda\to\infty$ для всякого положительного ε. Таким образом, для каждого $\varepsilon>0$

$$[*]\qquad \overline{\lim_{|\lambda|\to\infty}}\,[\operatorname{Re}(g(\lambda))-\varepsilon|\lambda|^2]\leqslant 0.$$

Теперь, применяя простую и хорошо известную теорему Каратеодори из теории функций комплексного переменного (ее формулировка и доказательство даны ниже в лемме 32), из последнего неравенства получаем, что

$$\lim_{|\lambda|\to\infty}\frac{|g(\lambda)|}{|\lambda|^2}=0.$$

Таким образом, функция $g(\lambda)/\lambda^2$ в точке $\lambda=\infty$ аналитична и равна нулю. Отсюда непосредственно следует, что $g(\lambda)$ в окрестности точки $\lambda=\infty$ разлагается в ряд Лорана

$$g(\lambda)=a\lambda+b+\frac{c}{\lambda}+\ldots .$$

Следовательно, функция $g(\lambda)-a\lambda$ аналитична при любом λ, конечном или бесконечном, и равна 0 при $\lambda=0$. По теореме Лиувилля отсюда следует, что $g(\lambda)-a\lambda=0$, т. е. $g(\lambda)=a\lambda$.

Далее, поскольку $f(\lambda, z)=z^{-1}[\log(1-\lambda z)+\lambda z]$, ясно, что

$$f(\lambda, z)=-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^k z^{k-1}}{k},$$

причем этот ряд равномерно сходится для достаточно малых λ и z. Таким образом, из теоремы 7 следует, что ряд

$$f(\lambda, N)=-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^k N^{k-1}}{k}$$

сходится по норме пространства HS для всех достаточно малых λ. По следствию 19

$$a\lambda=g(\lambda)=-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k}\operatorname{tr}(N^{k-1}, N).$$

Отсюда немедленно следует, что $\operatorname{tr}(N, N)=0$, ч. т. д.

25. Теорема. *Пусть T — оператор Гильберта — Шмидта, пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ — последовательность его ненулевых собственных значений с учетом их кратностей. Если f и g — функции, аналитические в окрестности спектра оператора T и равные нулю в начале, то $f(T)$ и $g(T)$ — операторы Гильберта — Шмидта, и*

$$\operatorname{tr}(f(T), g(T))=\sum_{i=1}^{\infty}f(\lambda_i)\,g(\lambda_i),$$

причем ряд в правой части абсолютно сходится.

Доказательство. Покажем сначала, что

$$[*]\qquad \sum_{i=1}^{\infty}|f(\lambda_i)|^2<\infty.$$

Из теоремы 7 и теоремы об отображении спектра (VII.3.19) следует, что достаточно рассмотреть случай $f(z)=z$ и доказать, что

$$[**]\qquad \sum_{i=1}^{\infty}|\lambda_i|^2<\infty.$$

Пусть $E(\lambda_i;\ T)$ — проектор, определенный в § VII.3, и пусть T_n — сужение оператора T на подпространство

$$\mathfrak{H}_n = \sum_{i=1}^{n} E(\lambda_i;\ T)\,\mathfrak{H}.$$

Ясно, что $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ являются собственными значениями оператора T_n в $\mathfrak{H}_n$. Так как, кроме того, $\|T_n\| \leqslant \|T\|$, а из леммы 21 и следствия 3 мы имеем

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \leqslant \|T_n\|^2,$$

то неравенство [**] справедливо.

Таким образом, абсолютная сходимость ряда $\sum_{i=1}^{\infty} f(\lambda_i)\,g(\lambda_i)$ следует из [*] и неравенства Шварца. Пусть $\mathfrak{H}'$ — замыкание подпространства $\sum_{i=1}^{\infty} E(\lambda_i;\ T)\,\mathfrak{H}$, и пусть $\mathfrak{H}''$ — ортогональное дополнение к $\mathfrak{H}'$. Пусть $\{\varphi_n\}$ — ортонормальный базис в $\mathfrak{H}'$, выбранный так, что $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{n_1}\}$ — базис в $\mathfrak{H}_1$, $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{n_2}\}$ — базис в $\mathfrak{H}_2$ и т. д. Пусть $\{\psi_\alpha\}$ — ортонормальный базис в $\mathfrak{H}''$. Тогда, очевидно, из определения 17 следует, что

$$\operatorname{tr}(f(T),\ g(T)) = \sum_{i=1}^{\infty} (f(T)\,\varphi_i,\ g(T)^*\,\varphi_i) + \sum_{\alpha} (f(T)\,\psi_\alpha,\ g(T)^*\,\psi_\alpha).$$

По теоремам VII.3.20, VII.3.19 и лемме 10

$$\sum_{i=1}^{\infty} (f(T)\,\varphi_i,\ g(T)^*\,\varphi_i) = \lim_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{n_j} (f(T)\,\varphi_i,\ g(T)^*\,\varphi_i) =$$
$$= \lim_{j\to\infty} \operatorname{tr}((gf)(T)\,|\,\mathfrak{H}_j) = \sum_{i=1}^{\infty} g(\lambda_i)\,f(\lambda_i).$$

Доказательство настоящей теоремы будет, следовательно, закончено, если мы покажем, что $\sum_{\alpha} (f(T)\,\psi_\alpha,\ g(T)^*\,\psi_\alpha) = 0$.

Поскольку $(f(T)\,\psi_\alpha,\ g(T)^*\,\psi_\alpha) = (g(T)\,\psi_\alpha,\ f(T)^*\,\psi_\alpha)$, справедливость нужного нам равенства следует, очевидно, из справедливости трех соотношений

$$\sum_{\alpha} (f(T)\,\psi_\alpha,\ f(T)^*\,\psi_\alpha) = 0,$$
$$[']\qquad \sum_{\alpha} (g(T)\,\psi_\alpha,\ g(T)^*\,\psi_\alpha) = 0,$$
$$\sum_{\alpha} ((f+g)(T)\,\psi_\alpha,\ (f+g)(T)^*\,\psi_\alpha) = 0,$$

которые все имеют одну и ту же форму; поэтому достаточно привести доказательство первого из них. По теореме VII.3.20 оператор $f(T)$ отображает пространство $\mathfrak{H}'$ в себя, а потому $f(T)^*$ отображает $\mathfrak{H}''$ в себя. Пусть $f(T)^* \mid \mathfrak{H}'' = S$. Тогда по теореме 7, лемме 2 и определению 1 S является оператором Гильберта — Шмидта. Имеем

$$(Pf(T)x,\ y) = (f(T)x,\ y) = (x,\ f(T)^* y), \qquad x, y \in \mathfrak{H}'',$$

где P — оператор ортогонального проектирования на $\mathfrak{H}''$. Таким образом, $Pf(T) \mid \mathfrak{H}'' = S^*$. Следовательно, первое из соотношений ['] равносильно утверждению

$$[''] \qquad \operatorname{tr}(S,\ S) = 0.$$

Из теоремы 24 следует, что для того чтобы доказать [''], достаточно показать, что оператор S квазинильпотентен. Если S не является квазинильпотентным оператором, то по теореме VII.4.5 существуют такое ненулевое комплексное число μ и такой ненулевой вектор $x \in \mathfrak{H}''$, что $Sx = \mu x$. Поэтому снова по теореме VII.4.5 $E(\mu;\ f(T)^*)\mathfrak{H}'' \neq \{0\}$. Из абзаца, следующего за определением VII.3.17, леммы VI.2.10 и определения VII.3.9 следует, что

$$E(\mu;\ f(T)^*) = E(\bar{\mu};\ f(T))^*.$$

Тогда, согласно теореме VII.3.20, найдется такое ненулевое комплексное число ν, что $E(\nu;\ T)^* \mathfrak{H}'' \neq \{0\}$. Однако, поскольку по определению $(\mathfrak{H}'',\ E(\nu;\ T)\mathfrak{H}) = 0$ для любого ненулевого комплексного числа ν, мы получаем противоречие, которое доказывает справедливость настоящей теоремы.

26. Теорема. *Пусть T — оператор Гильберта — Шмидта с ненулевыми собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ с учетом их кратностей. Тогда бесконечное произведение*

$$\varphi_\lambda(T) = \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda_i}{\lambda}\right) e^{\lambda_i/\lambda}$$

сходится и определяет функцию, аналитическую при $\lambda \neq 0$. Для каждого фиксированного $\lambda \neq 0$ эта функция является непрерывной комплекснозначной функцией на B-пространстве всех операторов Гильберта — Шмидта.

Доказательство. Заметим сначала, что если ζ — комплексное число и $|\zeta| < 1$, то

$$[*] \qquad \log e^{\zeta}(1-\zeta) = \zeta - \left(\zeta + \frac{1}{2}\zeta^2 + \frac{1}{3}\zeta^3 + \ldots\right) = O(|\zeta|^2)$$

при $\zeta \to 0$. Пусть $f(\zeta)=\zeta^{-1}\log\{e^{\zeta}(1-\zeta)\}$ и $g(\zeta)=\zeta$, так что функции f и g аналитичны всюду, кроме $\zeta=1$, и равны 0 при $\zeta=0$. Если T — оператор Гильберта — Шмидта, все ненулевые собственные значения которого $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ отличны от 1, и если $\lambda \neq 0$, то, согласно VII.3.11, оператор T/λ имеет собственные значения $\lambda_1/\lambda, \lambda_2/\lambda, \ldots$. Применяя теорему 25, получаем

$$\operatorname{tr}\left(f\left(\frac{T}{\lambda}\right), \frac{T}{\lambda}\right)=\sum_{k=1}^{\infty} \log\left\{e^{\lambda_k/\lambda}\left(1-\frac{\lambda_k}{\lambda}\right)\right\},$$

причем ряд в правой части абсолютно сходится, если $\lambda \neq \lambda_k$ для всех k.

Так как $\lambda_k \to 0$, то из оценки [*] следует, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \log\left\{e^{\lambda_k/\lambda}\left(1-\frac{\lambda_k}{\lambda}\right)\right\}$$

сходится равномерно и абсолютно на каждом компактном множестве чисел λ, не содержащем ни точки 0, ни никакой из точек λ_k. Поэтому, потенцируя, получаем, что произведение

$$\varphi_\lambda(T)=\prod_{k=1}^{\infty} e^{\lambda_k/\lambda}\left(1-\frac{\lambda_k}{\lambda}\right)$$

равномерно сходится на каждом таком компактном множестве. Так как это произведение, очевидно, сходится к нулю при $\lambda=\lambda_k$, то легко видеть, что функция $\varphi_\lambda(T)$ аналитична при $\lambda \neq 0$ и обращается в нуль лишь при $\lambda \in \sigma(T)$.

Осталось показать, что если $\lambda \neq 0$, то функция $\varphi_\lambda(T)$ непрерывна по T относительно нормы Гильберта — Шмидта в HS. Рассмотрим в HS такую последовательность $\{T_n\}$, что $\|T_n-T\| \to 0$. Тогда если C — компактное подмножество множества $\varrho(T)$, то из неравенства $|T_n-T| \leqslant \|T_n-T\|$ и леммы VII.6.3 следует, что $C \subseteq \varrho(T_n)$ для всех достаточно больших n. Если f — функция, введенная в начале доказательства, то для достаточно больших n операторы $f(T_n/\lambda)$ определены для всех λ из C и по теореме 7 принадлежат HS. Из теоремы 7 следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\left\| f\left(\frac{T_n}{\lambda}\right)-f\left(\frac{T}{\lambda}\right)\right\|=0$$

равномерно по λ на компактном множестве C. Таким образом, по теореме 14

$$\operatorname{tr}\left(f\left(\frac{T}{\lambda}\right), \frac{T}{\lambda}\right)=\lim_{n\to\infty}\operatorname{tr}\left(f\left(\frac{T_n}{\lambda}\right), \frac{T_n}{\lambda}\right)$$

равномерно по λ на C.

Далее, поскольку $\varphi_\lambda(T) = \exp\{\operatorname{tr}(f(T/\lambda), T/\lambda)\}$ для λ из $\varrho(T)$, из предыдущего соотношения следует, что

$$\varphi_\lambda(T) = \lim_{n\to\infty} \varphi_\lambda(T_n)$$

равномерно по λ на C. Но для каждого n функция $\varphi_\lambda(T_n)$ аналитична при $\lambda \neq 0$. Следовательно, если C — контур, не охватывающий точку $\lambda = 0$, то из равномерной сходимости последовательности $\{\varphi_\lambda(T_n)\}$ на C и принципа максимума модуля вытекает равномерная сходимость этой последовательности внутри контура C, даже если C охватывает ненулевые точки спектра $\sigma(T)$. Поэтому $\varphi_\lambda(T_n) \to \varphi_\lambda(T)$ для всех $\lambda \neq 0$, что доказывает непрерывность на HS отображения $T \to \varphi_\lambda(T)$, ч. т. д.

Предыдущие результаты дают довольно много информации относительно распределения собственных значений оператора Гильберта — Шмидта. Мы видели, что такой оператор может иметь не более счетного числа собственных значений, причем они должны достаточно быстро сходиться к единственной предельной точке $\lambda = 0$, чтобы ряд $\sum |\lambda_i|^2$ сходился. Кроме того, существует такая аналитическая при $\lambda \neq 0$ функция $\varphi_\lambda(T)$, что ее нули в точности совпадают с ненулевыми собственными значениями оператора, причем эта аналитическая функция является довольно простой. Используя свойства функции $\varphi_\lambda(T)$, изложенные в теореме 26, мы в состоянии теперь распространить фундаментальное неравенство Карлемана, полученное в теореме 15 для операторов в конечномерном пространстве, на произвольные операторы Гильберта — Шмидта.

При изложении следующего результата мы продолжаем пользоваться обозначением

$$\varphi_\lambda(T) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda}\right) e^{\lambda_k/\lambda};$$

напомним, что функция $\varphi_\lambda(T)$ аналитична при $\lambda \neq 0$ и равна нулю на множестве $\sigma(T) - \{0\}$.

27. Теорема (*Карлеман*). *Если λ принадлежит резольвентному множеству оператора Гильберта — Шмидта T, то*

$$|\varphi_\lambda(T)(\lambda I - T)^{-1}| \leqslant |\lambda| \exp\left\{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\|T\|^2}{|\lambda|^2}\right)\right\}.$$

Доказательство. Из теорем 26, 6 и леммы VII.6.1 следует, что достаточно рассмотреть случай, когда область значений $\mathfrak{R}$ оператора T конечномерна. Пусть $\mathfrak{H}$ — область определения оператора T, и пусть $\mathfrak{N} = \{x \in \mathfrak{H} \mid Tx = 0\}$. Тогда оператор T отображает $\mathfrak{N}^\perp$ взаимно однозначно на $\mathfrak{R}$. Таким образом, подпространство $\mathfrak{N}^{\perp}$ должно быть конечномерным. Пусть $\mathfrak{S}$ — одномерное подпространство в $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{N}^{\perp} + \mathfrak{R} + \mathfrak{S}$ и $\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_1^{\perp}$. Тогда $T\mathfrak{M}_2 = 0$ и $T\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}_1$. Положим $T_1 = T \mid \mathfrak{M}_1$. Тогда ясно, что $\|T_1\| = \|T\|$, $\sigma(T_1) = \sigma(T)$, $\varphi_\lambda(T_1) = \varphi_\lambda(T)$. Кроме того, если $m_1 \in \mathfrak{M}_1$ и $m_2 \in \mathfrak{M}_2$, то $(\lambda I - T)^{-1}(m_1 + m_2) = (\lambda I - T_1)^{-1} m_1 + \lambda^{-1} m_2$. Таким образом,

$$|(\lambda I - T)^{-1}| = \max(|\lambda^{-1}|, \ |(\lambda I - T_1)^{-1}|).$$

С другой стороны, неравенство

$$|\lambda|^{-1} > |(\lambda I - T_1)^{-1}|$$

не может иметь места, поскольку тогда из леммы VII.6.1 следовало бы, что оператор T_1 обратим, что невозможно, ибо собственные векторы из $\mathfrak{S}$ принадлежат его области определения $\mathfrak{M}_1$. Итак,

$$|(\lambda I - T)^{-1}| = |(\lambda I - T_1)^{-1}|.$$

Следовательно, настоящая теорема вытекает непосредственно из теоремы 15.

28. Следствие. *Пусть N — квазинильпотентный оператор Гильберта — Шмидта. Тогда для всякого $\lambda \neq 0$*

$$|R(\lambda;\ N)| \leqslant |\lambda| \exp\left\{\frac{1}{2}\left(1 + \left\|\frac{N}{\lambda}\right\|^2\right)\right\}.$$

Эффективность неравенства Карлемана при изучении свойств полноты системы собственных функций операторов Гильберта — Шмидта станет ясной из следующей теоремы, в которой в весьма общем случае при помощи рассуждений теоретико-функционального характера, основанных на принципе Фрагмена — Линделефа, устанавливается важное свойство полноты.

В следующей теореме и в ее следствиях символом $\operatorname{sp}(T)$, где T — ограниченный или неограниченный оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, будет обозначаться замкнутое подпространство, порожденное всеми векторами x из гильбертова пространства $\mathfrak{H}$, удовлетворяющими уравнению $(\lambda I - T)^n x = 0$ для какого-нибудь комплексного λ и какого-нибудь неотрицательного целого n.

29. Теорема. *Пусть $\gamma_1, \ldots, \gamma_5$ — непересекающиеся дифференцируемые дуги на комплексной плоскости, выходящие из начала координат. Предположим, что каждая из пяти областей, на которые эти дуги делят плоскость, содержится в секторе с углом раствора меньшим, чем $\pi/2$. Пусть $N > 0$ — целое число, и пусть T — оператор Гильберта — Шмидта в гильбертовом*

пространстве $\mathfrak{H}$, *резольвента которого допускает оценку*

$$|R(\lambda;\ T)| = O(|\lambda|^{-N}),$$

если $\lambda \longrightarrow 0$ *вдоль какой-нибудь из дуг* γ_i. *Тогда подпространство* $\operatorname{sp}(T)$ *содержит подпространство* $T^N\mathfrak{H}$.

Доказательство. По теореме Хана — Банаха (II.3.13) достаточно показать, что всякий элемент y из $\mathfrak{H}$, удовлетворяющий соотношению $(x,\ y) = 0$ для всех x из $\operatorname{sp}(T)$, удовлетворяет также соотношению $(T^N x,\ y) = 0$ для всех x из $\mathfrak{H}$.

Пусть y — такой элемент. По теореме VII.4.5 функция $y(\lambda) = \lambda^N R(\lambda;\ T^*)\, y$ аналитична всюду на комплексной плоскости, кроме, быть может, точки $\lambda = 0$ и счетного множества изолированных точек λ_m, таких, что $\lambda_m \longrightarrow 0$; в точках λ_m функция $y(\lambda)$ может иметь полюсы. Если λ содержится в малой окрестности точки λ_m и $\lambda \neq \lambda_m$, то

$$\begin{aligned} y(\lambda) &= \lambda^N E(\lambda_m;\ T^*)\, R(\lambda;\ T^*)\, y + \lambda^N R(\lambda;\ T^*)\,(I - E(\lambda_m;\ T^*))\, y = \\ &= \lambda^N E(\bar{\lambda}_m;\ T)^* R(\bar{\lambda};\ T)^* y + y_1(\lambda); \end{aligned}$$

из теоремы VII.3.20 и леммы VII.3.2 следует, что функция $y_1(\lambda)$ аналитична и при $\lambda = \lambda_m$. Покажем теперь, что функция $y_2(\lambda) = \lambda^N E(\bar{\lambda}_m;\ T)^* R(\bar{\lambda};\ T)^* y$ равна нулю; этим будет доказано, что функция $y(\lambda)$ аналитична во всех точках λ_m, так что может не быть аналитической лишь в точке $\lambda = 0$. Заметим, что

$$\begin{aligned} (y_2(\lambda),\ x) &= (\lambda^N E(\bar{\lambda}_m;\ T)^* R(\bar{\lambda};\ T)^* y,\ x) = \\ &= \lambda^N (y,\ E(\bar{\lambda}_m;\ T)\, R(\bar{\lambda};\ T)\, x). \end{aligned}$$

Из теоремы VII.4.5 следует, что элемент $E(\bar{\lambda}_m;\ T)\, R(\bar{\lambda};\ T)\, x$ принадлежит $\operatorname{sp}(T)$. Так как y принадлежит $\operatorname{sp}(T)^{\perp}$, то $(y_2(\lambda),\ x) = 0$ для каждого x из $\mathfrak{H}$; таким образом (II.3.14), $y_2(\lambda) = 0$. Итак, функция $\lambda^N R(\lambda;\ T^*)\, y$ аналитична на всей плоскости, кроме, быть может, начала координат. Допустим, что нам известно, что эта функция аналитична также и в начале. Тогда из тождества

$$T^{*N} R(\lambda;\ T^*)\, y = \lambda^N R(\lambda;\ T^*)\, y - \lambda^{N-1} y - \lambda^{N-2} T^* y - \ldots - T^{*(N-1)} y$$

следует, что функция $T^{*N} R(\lambda;\ T^*)\, y$ аналитична на всей плоскости. Поскольку эта функция на бесконечности обращается в нуль, то из теоремы Лиувилля вытекает, что $T^{*N} R(\lambda;\ T^*)\, y = 0$; поэтому, разлагая резольвенту в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки, получаем, что $T^{*N} y = 0$ (ср. VII.3.4). Итак, $(y,\ T^N x) = 0$ для всех x из $\mathfrak{H}$, что мы и собирались доказать.

Таким образом, доказательство основывается на утверждении, что функция $y(\lambda)=\lambda^N R(\lambda;\ T^*)y$ аналитична в начале. Чтобы доказать справедливость этого утверждения, поступим следующим образом. Поскольку функция $y(\lambda)$ имеет самое большее единственную изолированную особенность в точке $\lambda=0$, она допускает разложение в ряд Лорана (ср. § III.14)

$$y(\lambda)=\ldots+a_{-s}\lambda^{-s}+\ldots,$$

справедливое при $\lambda\neq 0$. Таким образом, для каждого x из $\mathfrak{H}$ функция $(y(\lambda),\ x)$ разлагается в ряд Лорана

$$(y(\lambda),\ x)=\ldots+(a_{-s},\ x)\lambda^{-s}+\ldots.$$

Ниже мы покажем, что для всякого x из $\mathfrak{H}$ эта последняя функция аналитична на всей плоскости. Отсюда будет следовать, что $(a_{-s},\ x)=0$ для каждого $s>0$ и каждого x из $\mathfrak{H}$; так что по теореме Хана—Банаха $a_{-s}=0$ для всякого $s>0$. Следовательно, функция $y(\lambda)$ аналитична при $\lambda=0$. Итак, чтобы закончить доказательство, мы должны лишь показать, что функция $f(\lambda)=(\lambda^N R(\lambda;\ T^*)y,\ x)$ при всяком x из $\mathfrak{H}$ аналитична в начале координат. Оператор T^* отображает ортогональное дополнение $\operatorname{sp}(T)^{\perp}$ подпространства $\operatorname{sp}(T)$ в себя. Пусть S — сужение оператора T^* на $\operatorname{sp}(T)^{\perp}$. Допустим, что оператор S не является квазинильпотентным. Поскольку по лемме 2 и теореме 6 оператор S вполне непрерывен, то из теоремы VII.4.5 следует, что существуют такое ненулевое комплексное число μ и такой ненулевой вектор x в $\operatorname{sp}(T)^{\perp}$, что $Sx=\mu x$. Таким образом, снова по теореме VII.4.5 $E(\mu;\ T^*)(\operatorname{sp}(T)^{\perp})\neq\{0\}$. Из абзаца, следующего за определением VII.3.17, леммы VI.2.10 и определения VII.3.9 вытекает, что

$$E(\mu;\ T^*)=E(\bar{\mu};\ T)^*.$$

Согласно теореме VII.4.5, $E(\bar{\mu};\ T)\mathfrak{H}\subseteq\operatorname{sp}(T)$ и, таким образом, $(\operatorname{sp}(T)^{\perp},\ E(\bar{\mu};\ T)\mathfrak{H})=0$. Поэтому $(E(\mu;\ T^*)\operatorname{sp}(T)^{\perp},\ \mathfrak{H})=0$, а это противоречит тому, что $E(\mu;\ T^*)\operatorname{sp}(T)^{\perp}\neq\{0\}$. Полученное противоречие показывает, что оператор S квазинильпотентен. По следствию 28 резольвента оператора S допускает оценку

$$|R(\lambda;\ S)|=O(e^{\|S\|^2/2|\lambda|^2})\qquad\text{при } \lambda\to 0.$$

Итак, функция f обладает следующими двумя свойствами:

(a) $|f(\lambda)|=|(\lambda^N R(\lambda;\ T^*)y,\ x)|=O(e^{\|S\|^2/2|\lambda|^2})$ при $\lambda\to 0$;

(b) f ограничена на каждой из пяти дуг γ_i (по условию теоремы).

Из принципа Фрагмена — Линделефа следует, что функция f аналитична в начале координат, ч. т. д.

Для удобства читателя набросок доказательства принципа Фрагмена — Линделефа приложен в конце настоящего параграфа.

30. Следствие. *Пусть дуги* $\gamma_1, \ldots, \gamma_5$ *выбраны так же, как в предыдущей теореме; предположим, что, когда* λ *стремится к нулю вдоль какой-нибудь из этих дуг, резольвента* $R(\lambda;\ T)$ *оператора Гильберта — Шмидта* T *допускает оценку* $|(R(\lambda;\ T)| = O(|\lambda|^{-1})$. *Тогда подпространство* $\operatorname{sp}(T)$ *совпадает со всем гильбертовым пространством* $\mathfrak{H}$.

Доказательство. Так как из предыдущей теоремы следует, что подпространство $\operatorname{sp}(T)$ содержит замыкание области значений оператора T, то достаточно показать, что совместная замкнутая линейная оболочка области значений $\mathfrak{R}(T)$ и нуль-пространства $\mathfrak{N}(T)$ совпадает со всем пространством $\mathfrak{H}$. Пусть $\{\lambda_n\}$ — сходящаяся к нулю последовательность комплексных чисел, лежащих на одной из двух γ_i, и пусть x — произвольный вектор из $\mathfrak{H}$. Тогда по предположению последовательность $\{\lambda_n R(\lambda_n;\ T)x\}$ ограничена. Поэтому без ограничения общности можно считать (см. IV.4.7), что эта последовательность слабо сходится к некоторому элементу y. Доказательство будет закончено, если мы покажем, что (a) $Ty = 0$ и что (b) вектор $x - y$ принадлежит подпространству $\overline{\mathfrak{R}(T)}$. Для того чтобы доказать (a), заметим, что для всякого z из $\mathfrak{H}$

$$
\begin{aligned}
|(Ty,\ z)| &= |(y,\ T^*z)| = |\lim_{n\to\infty}(x,\ \bar{\lambda}_n R(\bar{\lambda}_n;\ T^*)\,T^*z)| = \\
&= |\lim_{n\to\infty}[(x,\ \bar{\lambda}_n^2 R(\bar{\lambda}_n;\ T^*)\,z) - \lambda_n(x,\ z)]| \leqslant \\
&\leqslant \lim_{n\to\infty}|\lambda_n|\cdot|x|\cdot|z|\cdot|\bar{\lambda}_n R(\bar{\lambda}_n;\ T^*)| + \lim_{n\to\infty}|\lambda_n|\,|x|\,|z| = \\
&= \lim_{n\to\infty}|\lambda_n|\,O(1) = 0.
\end{aligned}
$$

Чтобы доказать (b), заметим, что для любого z из ортогонального дополнения к $\mathfrak{R}(T)$

$$(x - y,\ z) = \lim_{n\to\infty}(x - \lambda_n R(\lambda_n;\ T)\,x,\ z) = -\lim_{n\to\infty}(TR(\lambda_n;\ T)\,x,\ z) = 0,$$

и, следовательно, $x - y$ принадлежит $(\mathfrak{R}(T)^{\perp})^{\perp} = \overline{\mathfrak{R}(T)}$, ч. т. д.

31. Следствие. *Пусть* T — *неограниченный оператор в гильбертовом пространстве* $\mathfrak{H}$, *определенный на всюду плотном под-*

множестве и обладающий тем свойством, что для некоторого λ_0 из резольвентного множества $\varrho(T)$ оператор $R(\lambda_0; T)$ принадлежит классу Гильберта — Шмидта. Пусть $\gamma_1, \ldots, \gamma_5$ — непересекающиеся дифференцируемые дуги, каждая из которых имеет предельное направление на бесконечности, причем угол, образуемый на бесконечности любыми двумя соседними дугами, меньше чем $\pi/2$. Предположим, что резольвента $R(\lambda; T)$ допускает оценку $|R(\lambda; T)| = O(|\lambda|^M)$, когда $\lambda \to \infty$ вдоль какой-нибудь из дуг γ_i. Тогда подпространство $\operatorname{sp}(T)$ совпадает со всем гильбертовым пространством $\mathfrak{H}$.

Доказательство. Допустим определенности ради, что $\lambda_0 = 0$, так что T^{-1} является оператором Гильберта — Шмидта. Из тождества

$$R(\lambda^{-1};\ T^{-1}) = \lambda I - \lambda^2 R(\lambda;\ T)$$

следует, что при некотором целом положительном N оператор T^{-1} удовлетворяет условиям теоремы 29. Из теоремы VII.9.8 легко следует, что множество всех векторов x, удовлетворяющих при каком-нибудь комплексном λ и каком-нибудь целом неотрицательном n уравнению $(\lambda I - T)^n x = 0$, совпадает с множеством всех векторов x, удовлетворяющих при каком-нибудь комплексном μ и каком-нибудь неотрицательном целом m уравнению $(\mu I - T^{-1})^m x = 0$. Отсюда и из теоремы 30 мы заключаем, что существует такое целое положительное N, для которого $\operatorname{sp}(T) \supseteq (T^{-1})^N \mathfrak{H}$. Так как область определения оператора T всюду плотна в $\mathfrak{H}$, то $\overline{T^{-1}\mathfrak{H}} = \mathfrak{H}$ и, следовательно, $\overline{(T^{-1})^N \mathfrak{H}} = \mathfrak{H}$, ч. т.д.

Закончим этот параграф доказательством двух хорошо известных теорем из теории функций комплексного переменного, которыми мы воспользовались выше.

32. Лемма (*Каратеодори*). *Пусть f — функция, аналитическая в круге $|z| \leqslant R$ комплексной плоскости, и пусть $f(0) = 0$. Тогда, если $\operatorname{Re} f(z) \leqslant M$ при $|z| = R$, то $|f(z)| \leqslant 2M$ при $|z| \leqslant R/2$.*

Доказательство. Изменяя масштабы измерения зависимого и независимого переменного, можно, очевидно, предположить, что $M = R = 1$. Пусть

$$g(z) = \frac{f(z)}{2 - f(z)}.$$

Тогда, так как отображение $\zeta \to \zeta(2-\zeta)^{-1}$ переводит полуплоскость $\operatorname{Re}\zeta \leqslant 1$ в единичный круг и оставляет точку $\zeta = 0$ на месте, $|g(z)| \leqslant 1$ при $|z| = 1$, $g(0) = 0$. Применяя к функции

$g(z)/z$ принцип максимума модуля, находим, что

$$\frac{|f(z)|}{2+|f(z)|} \leqslant \left| \frac{f(z)}{2-f(z)} \right| \leqslant \frac{1}{2}$$

при $|z| \leqslant 1/2$. Таким образом, $1-|f(z)|/2 \geqslant 0$ при $|z| \leqslant 1/2$, ч. т. д.

33. Лемма (*Фрагмен — Линделеф*). *Пусть g — функция комплексного переменного z, аналитическая внутри замкнутого углового сектора σ единичного круга, образованного парой непересекающихся дифференцируемых жордановых дуг γ_1 и γ_2, идущих из начала к единичной окружности и образующих в начале угол с раствором меньшим, чем $\pi/2$. Предположим также, что функция g аналитична в окрестности каждой из полуоткрытых дуг $\gamma_1-\{0\}$ и $\gamma_2-\{0\}$, ограничена на каждой из этих полуоткрытых дуг и допускает оценку*

$$|g(z)| = O(e^{|z|^{-2}}),$$

когда $z \longrightarrow 0$, оставаясь внутри σ. Тогда

$$|g(z)| = O(1),$$

если $z \longrightarrow 0$, оставаясь внутри сектора σ.

Доказательство. Очевидно, что, поворачивая (если нужно) комплексную плоскость, мы можем без ограничения общности предположить, что σ является подмножеством углового сектора

$$\sigma_1 = \left\{ z \,\middle|\, |z| \leqslant 1, \ |\arg z| < \frac{\pi}{4} - \delta \right\},$$

где δ — малое положительное число. Пусть M — верхняя грань для $|g|$ на множестве, составленном из полуоткрытых дуг $\gamma_1-\{0\}$, $\gamma_2-\{0\}$ и дуги

$$\gamma_3 = \left\{ z \in \sigma \,\middle|\, |z| = \frac{1}{2} \right\}.$$

Для каждого $\varepsilon > 0$ рассмотрим функцию

$$h_\varepsilon(z) = \exp(-\varepsilon z^{-2-\delta})\, g(z).$$

Так как $|\arg(z^{-2-\delta})| < (2+\delta)(\pi/4-\delta) \leqslant \pi/2-\delta$ для всех z из σ_1, то

['] $$|\exp(-\varepsilon z^{-2-\delta})| \leqslant 1, \qquad z \in \sigma_1,$$

и даже

["] $$|\exp(-\varepsilon z^{-2-\delta})| \leqslant \exp(-\varepsilon |z|^{-2-\delta} \sin\delta), \qquad z \in \sigma_1.$$

Итак, поскольку $|g(z)| = O(e^{|z|^{-2}})$, из ["] следует, что $|h_\varepsilon(z)|$ сходится к нулю, когда z стремится к нулю, оставаясь в σ.

Поэтому из ['] вытекает, что величина $|h_\varepsilon(z)|$ ограничена постоянной M на всей границе области

$$\sigma_2 = \left\{ z \in \sigma \,\middle|\, |z| \leqslant \frac{1}{2} \right\}.$$

Применяя принцип максимума модуля, мы выводим отсюда, что величина $|h_\varepsilon(z)|$ ограничена постоянной M всюду на σ_2. Если $\varepsilon \to 0$, то $h_\varepsilon(z) \to g(z)$. Таким образом, полагая $\varepsilon \to 0$, получаем, что модуль функции $g(z)$ ограничен внутри σ_2 постоянной M, ч. т. д.

7. Преобразование Гильберта и неравенство Кальдерона — Зигмунда

В настоящем параграфе мы рассмотрим некоторые важные сингулярные интегральные операторы и некоторые неравенства для этих операторов, полученные в одномерном случае Гильбертом и М. Риссом, а в n-мерном случае — Кальдероном и Зигмундом. Эти операторы и неравенства, интересные и сами по себе, найдут также определенные применения в последующих главах[1]).

Мы будем рассматривать интеграл свертки

$$(1) \qquad (k * f)(x) = \int_{E^n} k(x-y) f(y)\, dy$$

как оператор в $L_p(E^n)$ и дадим условия, при которых можно утверждать, что линейное отображение T_k: $f \to k * f$ является ограниченным оператором в $L_p(E^n)$. Если $\int_{E^n} |k(y)|\, dy < \infty$, то из леммы 3.1 следует, что интеграл свертки (1) существует для почти всех x и определяет ограниченное отображение пространства $L_p(E^n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, в себя. Для $p=1$, $p=\infty$ и $p=2$ норма этого отображения может быть точно вычислена. Если $p=2$, то n-мерный аналог теоремы 3.21 (d) (см. обсуждение теоремы 3.22) дает

$$|T_k|_2 = \sup_{y \in E^n} \left| \int_{E^n} e^{i(x,y)} k(x)\, dx \right|.$$

Так как $L_1^* = L_\infty$, то из теоремы IV.8.5 следует, что

$$|T_k|_\infty = \int_{E^n} |k(x)|\, dx.$$

---

[1]) Особенно большие применения имеют эти неравенства в теории общих граничных задач эллиптических уравнений (Агмон, Дуглис, Ниренберг [1*]) и сингулярных уравнений (Михлин [2*]).— *Прим. ред.*

А так как $|T_k^*| = |T_k|$, то ясно также, что

$$|T_k|_1 = \int_{E^n} |k(x)|\, dx.$$

Поскольку в некоторых случаях интегралу

$$\int_{E^n} e^{i(x,y)} k(x)\, dx \tag{2}$$

можно придать смысл, даже если $\int_{E^n} |k(x)|\, dx = \infty$ (например, по теоремам Планшереля XI.3.9 и XI.3.22 это можно сделать, если $\int_{E^n} |k(x)|^2 dx < \infty$), это наводит на мысль попытаться определить оператор T_k и тогда, когда $\int_{E^n} |k(x)|\, dx = \infty$. В этих случаях мы можем надеяться, что интеграл (1) существует в «среднем» или в смысле «главного значения» и определяет ограниченное отображение пространства $L_2(E^n)$ в себя, если только интеграл (2) существует в некотором аналогичном смысле и является ограниченной функцией от y.

Рассмотрим, например, случай $n = 1$ и возьмем $k(x) = 1/x$. Интеграл (1) принимает вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{x-y}\, dy; \tag{3}$$

этот интеграл изучался Гильбертом. Интеграл (2) можно интерпретировать в смысле главного значения Коши:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixy}}{x}\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \left\{ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \right\} \frac{e^{ixy}}{x}\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{ixy} - e^{-ixy}}{x}\, dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} 2i \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\sin xy}{x}\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0} 2i \operatorname{sgn}(y) \int_{\varepsilon|y|}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx =$$

$$= 2i \operatorname{sgn}(y) \int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \pi i \operatorname{sgn}(y).$$

Это ограниченная функция. Таким образом, имеются причины ожидать, что интеграл Гильберта (3) определяет отображение пространства $L_2(-\infty, \infty)$ в себя и что норма этого отображения равна в точности π. Вскоре будет показано, что это в самом деле так. Поскольку $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|^{-1}\,dx = \infty$, интеграл (3) не определяет ограниченного отображения в $L_1(-\infty, \infty)$ (аналогично, он не определяет ограниченного отображения в $L_\infty(-\infty, \infty)$). М. Рисс показал, что этот интеграл определяет ограниченный оператор в пространствах $L_p(-\infty, \infty)$, $1 < p < \infty$. В этом параграфе мы приведем принадлежащее ему красивое доказательство этого факта. Неравенство М. Рисса является значительно более глубоким, чем рассматривавшееся как его прототип элементарное неравенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} k(x-y) f(y)\,dy \right|^p dx \leqslant \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} |k(x)|\,dx \right\}^p \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p\,dx,$$

справедливое при $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |k(x)|\,dx < \infty$; об этом свидетельствует нарушение неравенства М. Рисса в предельных случаях $p = 1$ и $p = \infty$.

В связи с рассмотрением интеграла Гильберта (3) следует подчеркнуть, что примененная здесь регуляризация интеграла пригодна лишь потому, что функция $1/x$ при отрицательных x принимает значения, равные по величине и противоположные по знаку значениям, принимаемым ею при положительных x. Это обстоятельство приводит, например, к тому, что

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = 0$$

(в смысле главного значения). Если мы попытались бы в качестве ядра в интеграле свертки взять функцию $|x|^{-1}$, т. е. рассмотрели бы вместо (3) интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{|x-y|}\,dx,$$

то все наши рассуждения оказались бы несостоятельными.

В многомерном случае мы рассмотрим интеграл свертки вида

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^n} f(y)\,dy, \tag{4}$$

изучавшийся Кальдероном и Зигмундом. Здесь Ω — функция, задающая зависимость величины

$$\frac{\Omega(x)}{|x|^n}$$

от направления вектора x; следовательно, предполагается, что она удовлетворяет условию $\Omega(x)=\Omega(tx)$, $t>0$. Например, в частном случае интеграла Гильберта (3) $\Omega(x)=\operatorname{sgn} x$. В случае когда Ω является нечетной функцией, т. е. $\Omega(-x)=-\Omega(x)$, используя неравенство М. Рисса, легко показать, что если поверхностный интеграл от Ω по единичной сфере в E^n конечен, то интеграл (4) определяет ограниченное отображение пространства $L_p(E^n)$ в себя при $1<p<\infty$. Это будет сделано ниже. Однако, даже если $\Omega(-x)\neq-\Omega(x)$, может все же случиться (при $n>1$, но не при $n=1$), что поверхностный интеграл от Ω по единичной сфере в E^n равен нулю. Примером этого при $n=2$ является важный интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f(w)}{(z-w)^2}\,du\,dv,$$

где $z=x+iy$, $w=u+iv$. Этот интеграл имеет вид интеграла (4), где $\Omega(z)=(|z|/z)^2$ — четная функция, а поверхностный интеграл от Ω по единичной сфере в E^2 есть

$$\int\limits_{0}^{2\pi} e^{-2i\theta}\,d\theta=0.$$

Если поверхностный интеграл от Ω по единичной сфере равен нулю, то интеграл (4) определяет ограниченное отображение пространства $L_p(E^n)$ в себя для $1<p<\infty$ независимо от того, является функция Ω нечетной или нет. Это утверждение, которое справедливо при слабых предположениях относительно гладкости функции Ω, составляет содержание неравенства Кальдерона — Зигмунда. Бо́льшая часть настоящего параграфа посвящена его доказательству. Как было отмечено, трудности возникают для четной функции Ω; эти трудности можно обойти сведением случая, когда Ω четна, к случаю, когда Ω нечетна.

Поскольку здесь будут рассматриваться ядра со свойством «радиальной» симметрии, мы имеем веские причины на протяжении этого параграфа производить вычисления в «сферических полярных коо́рдинатах». Поэтому поясним способ, которым можно ввести эти координаты. Пусть E^n — евклидово n-мерное пространство, S — единичная сфера в E^n, λ_n — лебегова мера в E^n, $E_0^n=E^n-\{0\}$ и R — положительная вещественная полуось. Поскольку E_0^n и E^n отличаются лишь на единственную точку, то с точки зрения теории меры их можно считать идентичными. Каждую точку x из E_0^n можно единственным образом представить в виде $x=r\omega$, где $r\in R$, $\omega\in S$, и отображение $[r,\ \omega]\to x=r\omega$ является, очевидно, гомеоморфизмом $R\times S$ на E_0^n. Таким образом, σ-алгебра $\mathscr{B}_n$ борелевских подмножеств в E_0^n является произведением σ-алгебры $\mathscr{B}_R$ борелевских подмножеств в R и σ-алгебры $\mathscr{B}_S$ борелевских подмножеств в S в смысле определения III.11.3. Имеем

$$(1)\qquad \int_{E^n} f(tx)\,dx=|t|^{-n}\int_{E^n} f(x)\,dx,\quad t\neq 0,\quad f\in L_1(E^n).$$

Таким образом, мера

$$\alpha(e)=\int_e \frac{dx}{|x|^{n-1}},\qquad e\in\mathscr{B}_n,$$

обладает тем свойством, что

$$(2)\qquad \alpha(te)=|t|\,\alpha(e).$$

Определим меру μ на $\mathscr{B}_S$, полагая

$$\mu(e)=\alpha((1,\,2]\times e),\qquad e\in\mathscr{B}_S.$$

Эта мера μ, по причинам, которые станут ясны ниже, называется *мерой гиперповерхности на* S. Используя равенство (2), получаем

$$2^{-n}\mu(e)=\alpha((2^{-n},\,2^{-n+1}]\times e),\qquad e\in\mathscr{B}_S,\qquad n\geqslant 0,$$

и, складывая все эти неравенства, имеем

$$2\mu(e)=\alpha((0,\,2]\times e),\qquad e\in\mathscr{B}_S.$$

Используя еще раз равенство (2), находим, что

$$t\mu(e)=\alpha((0,\,t]\times e),\qquad e\in\mathscr{B}_S,\qquad t>0,$$

так что

$$(b-a)\,\mu(e)=\alpha((a,\,b]\times e),\qquad e\in\mathscr{B}_S,\qquad \infty>b>a>0.$$

Отсюда при помощи стандартных рассуждений теории меры получаем, что

$$\lambda_1(d)\,\mu(e)=\alpha(d\times e),\qquad d\in\mathscr{B}_R,\qquad e\in\mathscr{B}_S.$$

Таким образом, пространство с мерой $(E_0^n,\,\mathscr{B}_n,\,\alpha)$ является прямым произведением пространств с мерой $(R,\,\mathscr{B}_R,\,\lambda_1)\times(S,\,\mathscr{B}_S,\,\mu)$. Применяя теорему Фубини III.11.9, теоремы III.11.14 и III.10.4, находим, что для всякой λ_n-интегрируемой функции f, а также для всякой неотрицательной λ_n-измеримой функции f

$$\int_{E^n} f(x)\,dx=\int_0^\infty\int_S \{f(r\omega)\,r^{n-1}\}\,\mu(d\omega)\,dr.$$

Применение этой формулы, а также связанного с ней частного случая теоремы Фубини мы будем называть «записью интеграла $\int\limits_{E^n} f(x)\,dx$ в сферических полярных координатах». В оставшейся части этого параграфа мы будем свободно пользоваться такой заменой переменных, иногда не оговаривая этого.

Мера μ гиперповерхности на S удовлетворяет двум полезным тождествам

$$\mu(-e)=\mu(e), \qquad e\in\mathscr{B}_{\text{н}},$$
$$\mu(e)=\mu(Ve), \qquad e\in\mathscr{B}_{\text{н}},$$

где V — произвольное вращение пространства E^n. Кроме того,

$$\mu(S) = \int\limits_{1\leqslant|x|\leqslant 2} \frac{dx}{|x|^{n-1}} < \infty,$$

чем мы будем постоянно пользоваться.

Мы начнем формальное изложение с рассмотрения измеримых по Лебегу функций f, определенных на n-мерном евклидовом пространстве E^n и имеющих в конечном числе точек неинтегрируемые по Лебегу особенности, и с определения для таких функций интеграла, аналогичного интегралу в смысле главного значения Коши.

1. Определение. Пусть f — измеримая по Лебегу функция, определенная на n-мерном евклидовом пространстве E^n. Предположим, что в E^n существует такое конечное множество точек $p_1, \ldots, p_k$, что для любых $\varepsilon>0$ и $R>0$ функция f интегрируема по Лебегу на множестве

$$S(R, \varepsilon; p_1, \ldots, p_k)=\{x\in E^n \mid |x|\leqslant R, \quad |x-p_i|\geqslant\varepsilon, \quad i=1, \ldots, k\}.$$

Тогда если существует предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0,\, R\to\infty} \int\limits_{S(R, \varepsilon; p_1, \ldots, p_k)} f(x)\,dx=\alpha,$$

то будем говорить, что функция f *интегрируема в смысле главного значения*, и писать

$$\mathscr{P}\int\limits_{E^n} f(x)\,dx=\alpha.$$

Если f неинтегрируема по Лебегу в окрестности каждой из точек $p_1, \ldots, p_k$, то будем называть эти точки ее *особенностями*.

2. Лемма. *Пусть f и g — измеримые функции на E^n; предположим, что f и g интегрируемы в смысле главного значения. Тогда*

(I) *если α и β — скаляры, то функция $\alpha f + \beta g$ интегрируема в смысле главного значения и*

$$\mathcal{P}\int_{E^n} \{\alpha f(x) + \beta g(x)\}\,dx = \alpha\mathcal{P}\int_{E^n} f(x)\,dx + \beta\mathcal{P}\int_{E^n} g(x)\,dx;$$

(II) *для всякого ненулевого вещественного числа α функция h, определенная соотношением $h(x) = f(\alpha x)$, интегрируема в смысле главного значения и*

$$\mathcal{P}\int_{E^n} h(x)\,dx = |\alpha|^{-n}\mathcal{P}\int_{E^n} f(x)\,dx;$$

(III) *если U — однородное линейное изометрическое отображение пространства E^n в себя, то функция h, определенная соотношением $h(x) = f(Ux)$, интегрируема в смысле главного значения и*

$$\mathcal{P}\int_{E^n} h(x)\,dx = \mathcal{P}\int_{E^n} f(x)\,dx;$$

(IV) *если $|f(x)| = o(|x|^{1-n})$ при $|x| \to \infty$, то для любого x_0 из E^n функция h, определенная соотношением $h(x) = f(x + x_0)$, интегрируема в смысле главного значения и*

$$\mathcal{P}\int_{E^n} h(x)\,dx = \mathcal{P}\int_{E^n} f(x)\,dx.$$

Доказательство. Утверждение (I) очевидно. Утверждения (II) и (III) являются очевидными следствиями определения 1 и формул

$$\int_{E^n} \varphi(x)\,dx = \int_{E^n} \varphi(Ux)\,dx,$$

$$\int_{E^n} \varphi(\alpha x)\,dx = |\alpha|^{-n} \int_{E^n} \varphi(x)\,dx,$$

справедливых для всякой интегрируемой по Лебегу функции φ. Утверждение (IV) будет доказано таким же способом, как только мы покажем, что условие $|f(x)| = o(|x|^{1-n})$ влечет за собой соотношение

$$\lim_{R\to\infty} \int_{S(0,\,R)\Delta S(x_0,\,R)} f(x)\,dx = 0,$$

где $S(y, R)=\{x \in E^n \mid |x-y| \leqslant R\}$, а $b \Delta e=(b \cup e)(b \cap e)'$ обозначает симметрическую разность множеств b и e. Так как $S(0, R) \Delta S(x_0, R) \subseteq (S(0, R+|x_0|))(S(0, R-|x_0|))'$ и $|f(x)| = o(|x|^{1-n})$ при $|x| \to \infty$, то ясно, что достаточно показать, что

$$\alpha_R=\lambda_n[S(0, R+|x_0|)(S(0, R-|x_0|))']=O(R^{n-1})$$

при $R \to \infty$. Но переходя к сферическим полярным координатам и обозначая через ω_n меру μ единичной сферы в E^n, имеем

$$\alpha_R=\omega_n \int_{R-|x_0|}^{R+|x_0|} r^{n-1}\, dr \leqslant 2\omega_n |x_0| (R+|x_0|)^{n-1}=O(R^{n-1}),$$

ч. т. д.

В следующей лемме мы вводим один специальный класс сингулярных интегралов, с которым мы главным образом и будем иметь дело.

3. Лемма. *Пусть g — измеримая функция, определенная на E^n. Предположим, что точки $p_1, \ldots, p_k$ из E^n таковы, что для некоторого $\varepsilon>0$ функция g интегрируема по Лебегу на множестве $\{x \mid |x-p_i|>\varepsilon,\ i=1, \ldots, k\}$. Предположим также, что в ε-окрестности каждой из точек $p_1, \ldots, p_k$ функция g имеет вид*

$$\frac{\Omega_i(x-p_i)}{|x-p_i|^n} f_i(x),$$

где $\Omega_i(x)=\Omega_i(tx)$, $t>0$, причем функция Ω_i интегрируема по единичной сфере в E^n и поверхностный интеграл от нее равен нулю, а функция f_i непрерывно дифференцируема. Тогда интеграл в смысле главного значения

$$\mathcal{P} \int_{E^n} g(x)\, dx$$

существует.

Доказательство. Если $\mu(e)$ означает гиперповерхностную меру борелевского подмножества e единичной сферы S в E^n, то для $i=1, \ldots, k$

$$\int_{\delta>|x-p_i|>\delta_1} \frac{\Omega_i(x-p_i)}{|x-p_i|^n} f_i(p_i)\, dx=f_i(p_i) \int_{\delta_1}^{\delta} \frac{dr}{r} \int_S \Omega_i(\omega)\, \mu(d\omega)=0.$$

Отсюда следует, что для некоторой постоянной K и для достаточно малых $\delta > \delta_1 > 0$

$$\left| \int\limits_{\delta > |x-p_i| > \delta_1} g(x)\,dx \right| \leqslant \int\limits_{\delta_1}^{\delta} \frac{dr}{r} \int\limits_S |\Omega_i(\omega)|\,|f_i(x-p_i)-f_i(p_i)|\,\mu(d\omega) \leqslant$$

$$\leqslant K \int\limits_{\delta_1}^{\delta} \frac{r\,dr}{r} \int\limits_S |\Omega_i(\omega)|\,\mu(d\omega) =$$

$$= K(\delta-\delta_1) \int\limits_S |\Omega_i(\omega)|\,\mu(d\omega).$$

Таким образом,

$$\lim_{\substack{\delta\to 0\\ \delta_1\to 0}} \int\limits_{\delta>|x-p_i|>\delta_i} g(x)\,dx = 0, \qquad i=1, \ldots, k.$$

Существование предела

$$\lim_{\delta\to 0} \int\limits_{\substack{\{x\in E^n \mid |x-p_i|>\delta,\\ i=1,\ldots,k\}}} g(x)\,dx$$

следует теперь из критерия сходимости Коши.

4. Определение. Пусть $\Omega(x)$ — функция от $x \in E^n$, определенная при $x \neq 0$ и такая, что

(I) $\Omega(x) = \Omega\left(\frac{x}{|x|}\right)$, $x \neq 0$, $x \in E^n$;

(II) поверхностный интеграл от Ω по множеству S существует и равен нулю.

Тогда выражение

$$K_\Omega(x, y) = \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^n}, \quad x \neq y, \quad x, y \in E^n,$$

называется ядром типа Кальдерона — Зигмунда.

5. Лемма. *Пусть Ω_1 и Ω_2 — бесконечно дифференцируемые функции, обладающие свойствами* (I) *и* (II) *предыдущего определения. Предположим, что Ω_1 — нечетная, а Ω_2 — четная функции. Тогда найдется такая нечетная функция Ω_3, обладающая свойствами* (I) *и* (II), *что интеграл*

(1)
$$\mathcal{P}\int\limits_{E^n} \frac{\Omega_1(x-u)}{|x-u|^n}\cdot\frac{\Omega_2(u-y)}{|u-y|^n}\,du,$$

существующий при $x \neq y$ по лемме 3, может быть записан в виде

$$\frac{\Omega_3(x-y)}{|x-y|^n}.$$

Доказательство. Обозначим через $K(x, y)$ функцию, определенную для $x \neq y$, $x, y \in E^n$, интегралом в смысле главного значения (1). Тогда по лемме 2 $K(x, y) = K(x-y, 0) = K_1(x-y)$, где через K_1 мы обозначили функцию $K_1(x) = K(x, 0)$. Так как $\Omega_i(\alpha x) = \Omega_i(x)$, $i = 1,2$, $\alpha > 0$, то по лемме 2 $K_1(\alpha x) = \alpha^{-n} K_1(x)$ при $\alpha > 0$, так что функция $\Omega_3(x) = |x|^n K_1(x)$ удовлетворяет условию (I) предыдущего определения, и

$$K(x, y) = \frac{\Omega_3(x-y)}{|x-y|^n}.$$

Из леммы 2 следует, что функция Ω_3 является нечетной, ибо

$$K_1(-x) = \mathcal{P} \int_{E^n} \frac{\Omega_1(-x-u)}{|x+u|^n} \cdot \frac{\Omega_2(u)}{|u|^n} du =$$
$$= -\mathcal{P} \int_{E^n} \frac{\Omega_1(x+u)}{|x+u|^n} \cdot \frac{\Omega_2(u)}{|u|^n} du =$$
$$= -\mathcal{P} \int_{E^n} \frac{\Omega_1(x-v)}{|x-v|^n} \cdot \frac{\Omega_2(v)}{|v|^n} dv = -K_1(x).$$

Так как $\Omega_3(x) = -\Omega_3(-x)$, то ясно, что поверхностный интеграл от Ω_3 по единичной сфере равен нулю[1]); таким образом, лемма полностью доказана.

6. Определение. Если функции Ω_1, Ω_2 и Ω_3 связаны между собой так же, как в лемме 5, то ядро K_{Ω_3} называется *сверткой* ядер K_{Ω_1} и K_{Ω_2}. При этом мы пишем $K_{\Omega_3} = K_{\Omega_1} * K_{\Omega_2}$. Аналогично символом $K_{\Omega_1} * f$ обозначается функция g, определенная интегралом в смысле главного значения

$$g(x) = \mathcal{P} \int_{E^n} \frac{\Omega_1(x-y)}{|x-y|^n} f(y) dy,$$

если этот интеграл существует.

7. Лемма. *Пусть K_Ω — ядро типа Кальдерона — Зигмунда в n-мерном евклидовом пространстве E^n; предположим, что функция Ω бесконечно дифференцируема при $x \neq 0$. Пусть f — функция из C^∞, равная нулю вне некоторого ограниченного подмножества пространства E^n. Тогда функция $K_\Omega * f$ при-*

---

[1]) Этот интеграл существует, так как функция Ω_3 ограничена на S, что легко показать, используя прием, примененный при доказательстве леммы 3. — *Прим. перев.*

надлежит $L_p(E^n)$ *при* $p>1$ *и*

$$F(K_\Omega * f)(x)=F(f)(x)\cdot \mathcal{P}\int_{E^n}\frac{\Omega(y)}{|y|^n}e^{i(x,y)}\,dy,$$

где $F(g)$ *обозначает* L_2*-преобразование Фурье функции* g *из* $L_2(E^n)$, *т. е.*

$$F(g)(x)=\underset{R\to\infty}{\text{l.i.m.}}\,(2\pi)^{-n/2}\int_{|y|\leqslant R}g(y)\,e^{i(x,y)}\,dy.$$

В частности, интеграл в смысле главного значения

$$\mathcal{P}\int_{E^n}\Omega(y)\,|y|^{-n}e^{i(x,y)}\,dy$$

существует.

Доказательство. Допустим, что $f(y)=0$ при $|y|\geqslant R_0$. Тогда если $|x|>R_0+1$, то

$$|(K_\Omega * f)(x)|=\left|\mathcal{P}\int_{E^n}\frac{\Omega(y)}{|y|^n}f(x-y)\,dy\right|\leqslant$$

$$\leqslant M\frac{1}{(|x|-R_0)^n}\int_{E^n}|f(y)|\,dy,$$

где M — верхняя грань функции $|\Omega(y)|$. Итак, $(K_\Omega * f)(x)=O(|x|^{-n})$ при $|x|\to\infty$. Так как

$$(K_\Omega * f)(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|y|\geqslant\varepsilon}\frac{\Omega(y)}{|y|^n}f(x-y)\,dy,$$

то функция $(K_\Omega * f)(x)$ измерима.

Пусть M_1 — общая мажоранта для $|f(y)|$ и

$$\left\{\left|\frac{\partial}{\partial y_1}f(y)\right|^2+\left|\frac{\partial}{\partial y_2}f(y)\right|^2+\ldots+\left|\frac{\partial}{\partial y_n}f(y)\right|^2\right\}^{1/2},$$

и пусть χ — характеристическая функция шара радиуса $2(R_0+1)$. Согласно определению 4 (II), $\int_S \Omega(\omega)\,\mu(d\omega)=0$, так что

$$\mathcal{P}\int_{E^n}\frac{\Omega(y)}{|y|^n}\chi(y)\,dy=0,$$

а потому при $|x| \leqslant R_0 + 1$

$$[*] \qquad |(K_\Omega * f)(x)| \leqslant \mathscr{P} \int\limits_{E^n} \frac{|\Omega(y)|}{|y|^n} |f(x-y) - f(x)\chi(y)| \, dy \leqslant$$

$$\leqslant MM_1\omega_n \int\limits_0^{2(R_0+1)} dr =$$

$$= 2MM_1\omega_n (R_0 + 1),$$

где ω_n, как и выше, обозначает меру μ единичной сферы в E^n. Таким образом, функция $K_\Omega * f$ ограничена. Заметим (мы воспользуемся этим ниже), что почти таким же рассуждением можно показать, что интегралы

$$\left| \int\limits_{|y| \geqslant \varepsilon} \frac{\Omega(y)}{|y|^n} f(x-y) \, dy \right|$$

равномерно ограничены при $\varepsilon > 0$. Если положительные постоянные C_0, C_1 и α таковы, что $|(K_\Omega * f)(x)| \leqslant C_0$ при $x \in E^n$ и $|(K_\Omega * f)(x)| \leqslant \leqslant C_1 |x|^{-n}$ при $|x| \geqslant \alpha$, то

$$\int\limits_{E^n} |(K_\Omega * f)(x)|^p \, dx \leqslant \omega_n C_0^p \alpha^n + \int\limits_{|x| \geqslant \alpha} C_1^p |x|^{-np} \, dx =$$

$$= \omega_n C_0^p \alpha^n + C_1^p \omega_n \int\limits_\alpha^\infty r^{-n(p-1)-1} \, dr =$$

$$= \omega_n C_0^p \alpha^n + \omega_n C_1^p (n(p-1))^{-1} \alpha^{-n(p-1)} < \infty.$$

Итак, $K_\Omega * f$ принадлежит пространству $L_p(E^n)$.

Из теоремы Планшереля 3.9 и теоремы 3.22 следует, что если $\{R_j\}$ — последовательность положительных чисел, стремящаяся к бесконечности, то

$$(1)\ F(K * f)(u) = (2\pi)^{-n/2} \operatorname*{l.i.m.}_{j \to \infty} \int\limits_{|x| \leqslant R_j} e^{iux} \left\{ \mathscr{P} \int\limits_{E^n} \frac{\Omega(y)}{|y|^n} f(x-y) \, dy \right\} dx =$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \operatorname*{l.i.m.}_{j \to \infty} \int\limits_{|x| \leqslant R_j} e^{iux} \left\{ \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{|y| \geqslant \varepsilon} \frac{\Omega(y)}{|y|^n} f(x-y) \, dy \right\} dx;$$

здесь и ниже мы употребляем запись ux для скалярного произведения (u, x). Поскольку, как было отмечено выше, интегралы, заключенные в последней формуле в фигурные скобки, ограничены равномерно по ε, из теоремы Лебега об ограниченной сходимости (III.6.16) и из теоремы Фубини III.11.9 следует, что равенство (1) можно записать в виде

$$F(K*f)(u)=(2\pi)^{-n/2}\operatorname*{l.i.m.}_{j\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{|x|\leqslant R_j} e^{iux}\left\{\int\limits_{|y|\geqslant\varepsilon}\frac{\Omega(y)}{|y|^n}f(x-y)\,dy\right\}dx=$$

$$=(2\pi)^{-n/2}\operatorname*{l.i.m.}_{j\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{|y|\geqslant\varepsilon}\frac{\Omega(y)}{|y|^n}\left\{\int\limits_{|x|\leqslant R_j} e^{iux}f(x-y)\,dx\right\}dy=$$

$$=(2\pi)^{-n/2}\operatorname*{l.i.m.}_{j\to\infty}\mathcal{P}\int\limits_{E^n}\frac{\Omega(y)}{|y|^n}\left\{\int\limits_{|x|\leqslant R_j} e^{iux}f(x-y)\,dx\right\}dy.$$

Переходя к подпоследовательности, мы без ограничения общности можем считать (см. III.6.3. и III.3.6), что для почти всех u из E^n

$$F(K*f)(u)=\lim_{j\to\infty}(2\pi)^{-n/2}\mathcal{P}\int\limits_{E^n}\frac{\Omega(y)}{|y|^n}\left\{\int\limits_{|x|\leqslant R_j} e^{iux}f(x-y)\,dx\right\}dy. \tag{2}$$

Если $f(x)=0$ при $|x|\geqslant R_0$, то

$$\int\limits_{|x|\leqslant R_j} e^{iux}f(x-y)\,dx=\begin{cases}\displaystyle\int\limits_{E^n} e^{iux}f(x-y)\,dx, & |y|<R_j-R_0,\\ 0, & |y|>R_j+R_0.\end{cases}$$

Итак, если χ_j — характеристическая функция множества $\{x\,|\,|x|\leqslant R_j+R_0\}$, то

$$\left|\mathcal{P}\int\limits_{E^n}\frac{\Omega(y)}{|y|^n}\left\{\int\limits_{|x|\leqslant R_j} e^{iux}f(x-y)\,dx\right\}dy-\right.$$

$$\left.-\mathcal{P}\int\limits_{E^n}\frac{\Omega(y)}{|y|^n}\chi_j(y)\left\{\int\limits_{E^n} e^{iux}f(x-y)\,dx\right\}dy\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{\substack{R_j-R_0\leqslant|y|\leqslant\\ \leqslant R_j+R_0}}\frac{|\Omega(y)|}{|y|^n}\,dy\cdot\int\limits_{E^n}|f(x)|\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\max_{|x|=1}|\Omega(x)|\cdot\int\limits_{E^n}|f(x)|\,dx\cdot\mu(S)\int\limits_{R_j-R_0}^{R_j+R_0}\frac{dr}{r}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2R_0}{R_j-R_0}\mu(S)\max_{|x|=1}|\Omega(x)|\int\limits_{E^n}|f(x)|\,dx,$$

что, очевидно, стремится к нулю при $j \to \infty$. Таким образом, равенство (2) дает

$$F(K*f)(u) = (2\pi)^{-n/2} \lim_{j\to\infty} \mathcal{P} \int_{E^n} \frac{\Omega(y)}{|y|^n} \chi_j(y) \left\{ \int_{E^n} e^{iux} f(x-y)\, dx \right\} dy =$$

$$= \left\{ \lim_{j\to\infty} \mathcal{P} \int_{E^n} \frac{\Omega(y)}{|y|^n} \chi_j(y) e^{iuy}\, dy \right\} F(f)(u),$$

если только существует предел, заключенный в последнем равенстве в фигурные скобки. Итак, для завершения доказательства настоящей леммы достаточно показать, что

$$(3) \qquad \theta(u) = \mathcal{P} \int_{E^n} \frac{\Omega(y)}{|y|^n} e^{iyu}\, dy = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}} \int_{\varepsilon \leqslant |y| \leqslant R} \frac{\Omega(y)}{|y|^n} e^{iyu}\, dy$$

существует при любом u. По лемме 2 интеграл $\theta(tu)$ существует, если существует $\theta(u)$ и $t > 0$; по той же лемме интеграл $\theta(Vu)$, где V — вращение пространства E^n, существует и равен

$$\mathcal{P} \int_{E^n} \frac{\Omega(x)}{|x|^n} e^{i(x,\, Vu)}\, dx = \mathcal{P} \int_{E^n} \frac{\Omega(Vy)}{|y|^n} e^{i(y,\, u)}\, dy,$$

если только существует интеграл

$$\mathcal{P} \int_{E^n} \frac{\Omega(Vy)}{|y|^n} e^{i(y,\, u)}\, dy.$$

Таким образом, для того чтобы доказать существование интеграла (3) в общем случае, достаточно рассмотреть случаи $u = 0$ и $u = [1, 0, \ldots, 0]$. Если $u = 0$, то очевидно, что

$$\mathcal{P} \int_{E^n} \frac{\Omega(x)}{|x|^n}\, dx = 0,$$

ибо $\int_S \Omega(\omega)\, \mu(d\omega) = 0$. Следовательно, достаточно показать, что существует интеграл $\mathcal{P} \int_{E^n} e^{ix_1} \Omega(x) |x|^{-n}\, dx$. Пусть χ_0 — характеристическая функция единичного шара. Тогда по лемме 3 существует интеграл

$$\mathcal{P} \int_{E^n} e^{ix_1} \chi_0(x) \frac{\Omega(x)}{|x|^n}\, dx.$$

Поэтому достаточно доказать существование предела

$$[*]\qquad \lim_{R\to\infty}\int\limits_{1\leqslant|x|\leqslant R} e^{ix_1}\frac{\Omega(x)}{|x|^n}\,dx=\lim_{R\to\infty}\int\limits_S \Omega(\omega)\left\{\int\limits_1^R \frac{e^{ir\omega_1}}{r}\,dr\right\}\mu(d\omega),$$

где ω_1 обозначает первую компоненту единичного вектора ω. Так как предел $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_1^R r^{-1}e^{ir\omega_1}\,dr$ существует для всех ω, для которых $\omega_1\neq 0$, т. е. для почти всех относительно меры μ значений ω, то существование предела [*] будет следовать из теоремы Лебега об ограниченной сходимости, если мы сумеем найти такую μ-интегрируемую функцию $\varphi(\omega)$, что

$$\left|\int\limits_1^R \frac{e^{ir\omega_1}}{r}\,dr\right|\leqslant\varphi(\omega),\quad \omega\in S,\quad R\geqslant 1.$$

Заметим, что при $-1\leqslant\omega_1\leqslant 1$, $\omega_1\neq 0$ и $R\geqslant 1$

$$\left|\int\limits_1^R \frac{e^{ir\omega_1}}{r}\,dr\right|=\left|\int\limits_{|\omega_1|}^{R|\omega_1|}\frac{e^{ir\,\mathrm{sgn}\,\omega_1}}{r}\,dr\right|\leqslant$$

$$\leqslant-\log|\omega_1|+\left|\int\limits_1^{R|\omega_1|}\frac{e^{ir\,\mathrm{sgn}\,\omega_1}}{r}\,dr\right|\leqslant-\log|\omega_1|+K,$$

где K — постоянная, ограничивающая $\left|\int\limits_1^{R|\omega_1|}\exp(\pm ir)\,dr/r\right|$ при $R\geqslant 1$; такая постоянная существует, поскольку существуют пределы $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_1^R\exp(\pm ir)\,dr/r$. Итак, для завершения доказательства достаточно показать, что функция $\varphi(\omega)=-\log|\omega_1|$ является μ-интегрируемой на S. Теорема Фубини дает

$$\int\limits_{1/2\leqslant|x|\leqslant 1}\frac{-\log|x_1|}{|x|^{n-1}}\,dx=\int\limits_{1/2}^1 dr\left\{\int\limits_S(-\log r-\log|\omega_1|)\,\mu(d\omega)\right\},$$

так что

$$\int\limits_S\varphi(\omega)\,\mu(d\omega)=2\int\limits_{1/2\leqslant|x|\leqslant 1}\frac{-\log|x_1|}{|x|^{n-1}}\,dx+2\mu(S)\int\limits_{1/2}^1\log(r)\,dr,$$

и достаточно доказать, что первый интеграл в правой части конечен. А это легко установить, ибо функция $|x|^{1-n}$ в области

$1/2 \leqslant |x| \leqslant 1$ ограничена, а

$$\int\limits_{1/2 \leqslant |x| \leqslant 1} (-\log|x_1|)\,dx \leqslant \int\limits_{\max|x_i| \leqslant 1} (-\log|x_1|)\,dx = 2^{n-1}\int\limits_{-1}^{1} (-\log|x_1|)\,dx_1 < \infty.$$

Следующая теорема содержит неравенство М. Рисса.

8. Теорема. *Пусть* $1 < p < \infty$, *и пусть функция* f *принадлежит классу* $C^\infty(-\infty, \infty)$ *и вне некоторого ограниченного множества обращается в нуль. Тогда существует такая конечная постоянная* K_p, *что интеграл Гильберта*

$$(Hf)(x) = \mathscr{P}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{x-y}\,dy,$$

понимаемый в смысле главного значения, удовлетворяет неравенству $|Hf|_p \leqslant K_p |f|_p$.

Доказательство. Мы знаем из леммы 7, что $\{F(Hf)\}(y) = \pi i \operatorname{sgn}(y)\{F(f)\}(y)$, где $F(g)$ обозначает преобразование Фурье функции g. По теореме Планшереля (3.21) $|Hf|_2 \leqslant \pi |f|_2$. Покажем сначала, что постоянную K_p, обладающую свойством, указанным в формулировке нашей теоремы, можно найти при $p = 2n$, а затем используем этот факт и некоторые вспомогательные соображения (теорему Рисса о выпуклости и рассуждение, привлекающее сопряженный к H оператор) для того, чтобы получить этот же результат при других значениях p. Пусть $J = \pi i I + H$[1]. Тогда ясно (см. лемму 7), что

$$F(Jf)(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \quad f \in L_2(-\infty, \infty), \\ 2\pi i F(f)(y), & y \geqslant 0. \end{cases}$$

Пусть функция f принадлежит классу $C^\infty(-\infty, \infty)$ и обращается в нуль вне некоторого ограниченного множества, и пусть $g = F(Jf)$. Так как функция $F(f)$ принадлежит $L_1(-\infty, \infty)$ и ограничена,

---

[1]) Оператор H первоначально определен для функций f из класса $C^\infty(-\infty, \infty)$, обращающихся в нуль вне ограниченного множества. Такие функции всюду плотны в $L_2(-\infty, \infty)$, и коль скоро для них доказано неравенство $|Hf|_2 \leqslant K_2 |f|_2$, оператор H можно продолжить по непрерывности на все $L_2(-\infty, \infty)$; такое продолжение единственно, обозначается той же буквой H и удовлетворяет неравенству $|Hg|_2 \leqslant K_2 |g|_2$ для всех g из L_2. Таким образом, оператор $J = \pi i I + H$ можно считать определенным на всем пространстве $L_2(-\infty, \infty)$. — *Прим. перев.*

то функция $F(Jf)$ тоже принадлежит $L_1(-\infty, \infty)$ и ограничена. Если положить $g_1 = g$, $g_n = g * g_{n-1}$, то из соображений индукции следует, что каждая функция g_n равняется нулю для почти всех $x < 0$. Кроме того, согласно 3.21,

$$g_n = F((Jf)^n).$$

Точно так же, как во втором абзаце доказательства леммы 7, можно показать, что функция $(Hf)(x)$ равномерно ограничена и что $|(Hf)(x)| = O(|x|^{-1})$ при $|x| \to \infty$. При $n > 1$ функция $(Jf)^n$ принадлежит $L_1(-\infty, \infty)$, так что по 3.21

$$g_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \{(Jf)(y)\}^n e^{ixy}\, dy,$$

и функция g_n непрерывна; таким образом, $g_n(0) = 0$ при $n \geqslant 2$. Следовательно, полагая $x \to 0$, находим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\pi i f(y) + (Hf)(y))^{2m}\, dy = 0, \quad m \geqslant 1. \tag{1}$$

Пусть f вещественна, так что Hf также вещественна. Тогда, беря вещественную часть равенства (1), получаем

$$\sum_{k=0}^{m} \int_{-\infty}^{\infty} (-1)^{m-k} \binom{2m}{2k} \{f(y)\}^{2(m-k)} \{(Hf)(y)\}^{2k}\, dy = 0.$$

В силу неравенства Гёльдера это дает

$$|Hf|_{2m}^{2m} - \sum_{k=0}^{m-1} \binom{2m}{2k} |Hf|_{2m}^{2k} |f|_{2m}^{2(m-k)} \leqslant 0.$$

Положим $\alpha = |Hf|_{2m}/|f|_{2m}$. Тогда

$$\alpha^{2m} - \sum_{k=0}^{m-1} \binom{2m}{2k} \alpha^{2k} \leqslant 0.$$

Следовательно, α не превосходит наибольшего вещественного корня r_m уравнения

$$t^{2m} - \sum_{k=0}^{m-1} \binom{2m}{2k} t^{2k} = 0.$$

Таким образом, $|Hf|_{2m} \leqslant r_m |f|_{2m}$. Поскольку комплексная функция может быть представлена как сумма своей вещественной и мнимой частей, это доказывает нашу теорему для специального случая $p=2m$.

Отсюда немедленно следует, что при $p=2m$ оператор H единственным способом может быть продолжен до ограниченного отображения пространства $L_p(-\infty, \infty)$ в себя. Справедливость этого утверждения для всех $p \geqslant 2$ сразу же следует из теоремы Рисса о выпуклости (VI.10.11).

Теперь обратим внимание на область $1<p\leqslant 2$. Так как по лемме 7 FHF^{-1} представляет собой оператор умножения на функцию $\pi i \operatorname{sgn}(y)$, то $(FHF^{-1})^* = -FHF^{-1}$. Так как по теореме Планшереля (3.21) оператор F унитарен, то $H^* = -H$ и потому

$$(Hf, g) = -(f, Hg), \qquad f, g \in L_2.$$

Таким образом, если $2<p<\infty$ и $1/p+1/p'=1$, а функция f принадлежит C^∞ и равна 0 вне ограниченного множества, то по непрерывности получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} (Hf)(x)\overline{g(x)}\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{Hg(x)}\,dx, \quad g \in L_p(-\infty, \infty).$$

Поэтому по теореме IV.8.1, по теореме Хана — Банаха (II.3.14) и неравенству Гёльдера имеем

$$|Hf|_{p'} = \sup\left|\int_{-\infty}^{\infty} Hf(x)\overline{g(x)}\,dx\right| \leqslant K_p |f|_{p'},$$

и теорема доказана для всех p, $1<p<\infty$.

Доказав основное неравенство М. Рисса, перейдем к доказательству общего неравенства Кальдерона — Зигмунда. Наш первый шаг состоит в том, что мы придадим результату М. Рисса эквивалентную прежней, но технически более удобную форму. Это делается в следующей лемме.

9. Лемма. *Пусть $1<p<\infty$. Существует такая конечная постоянная Λ_p, что если функция f из $C^\infty(-\infty, \infty)$ равна нулю вне ограниченного множества, то функция g, определенная равенством*

$$g(x) = \int_{|y|\geqslant 1} \frac{1}{y} f(x-y)\,dy,$$

удовлетворяет неравенству $|g|_p \leqslant \Lambda_p |f|_p$.

Доказательство. Пусть φ — бесконечно дифференцируемая неотрицательная функция, равная нулю при $|t|\geqslant 1$ и удовлетворяющая соотношению $\int_{-1}^{1} \varphi(t)\,dt = 1$. Пусть

$$(Hf)(x) = \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{y} f(x-y)\,dy = \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{x-y}\,dy.$$

Тогда по леммам 7 и 3.1 $\varphi * Hf = H\varphi * f$.

Далее, из рассуждений, аналогичных приведенным во втором абзаце доказательства леммы 7, следует, что функция $H(\varphi)(y)$ ограничена. Таким образом, так как

$$\left| H(\varphi)(y) - \frac{1}{y} \right| \leqslant \int_{y-1}^{y+1} \left| \frac{1}{u} - \frac{1}{y} \right| \varphi(y-u)\,du \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{|y| \cdot \left| |y| - 1 \right|} = O(|y|^{-2}) \quad \text{при } |y| \to \infty,$$

то $H(\varphi) - \psi \in L_1$, где функция ψ определена равенствами $\psi(y) = y^{-1}$, $|y| > 1$; $\psi(y) = 0$, $|y| < 1$. Следовательно, по теореме 8, лемме 3.1 и теореме Рисса о выпуклости [1]) имеем

$$|g|_p = |\psi * f|_p = |\varphi * H(f) - H(\varphi) * f + \psi * f|_p \leqslant$$
$$\leqslant |\varphi * H(f)|_p + |(H(\varphi) - \psi) * f|_p \leqslant$$
$$\leqslant \{K_p + |H(\varphi) - \psi|_1\} |f|_p,$$

ч. т. д.

Теперь для *нечетного* ядра типа Кальдерона — Зигмунда легко получить неравенство, совершенно аналогичное установленному в лемме 9.

10. Лемма. *Пусть Ω — такая нечетная функция, определенная на E^n, что $\Omega(tx) = \Omega(x)$ при $t > 0$; предположим, что Ω бесконечно дифференцируема в окрестности единичной сферы* [2]) *S пространства E^n. Пусть функция f принадлежит $C^\infty(E^n)$ и равна нулю вне ограниченного множества. Тогда если $1 < p < \infty$ и Λ_p — постоянная из леммы 9, то $L_p(E^n)$-норма функции g, определенной равенством*

$$g(x) = \int_{|u| \geqslant 1} \frac{\Omega(u)}{|u|^n} f(x-u)\,du,$$

не превосходит $2^{-1} \Lambda_p |f|_p \int_S |\Omega(\omega)|\, \mu(d\omega)$, где μ — мера гиперповерхности на S.

---

[1]) В силу этой теоремы из пунктов (b) и (d) леммы 3.1 следует, что если $u \in L_1$, $v \in L_p$, то $|u * v|_p \leqslant |u|_1 |v|_p$. Это используется при оценке $|g|_p$. — *Прим. перев.*

[2]) То есть всюду, за исключением начала координат. — *Прим. перев.*

Доказательство. Записывая интеграл в полярных координатах, видим, что[1])

$$g(x)=\int_S \Omega(\omega)\mu(d\omega)\int_1^\infty f(x-\omega r)\frac{dr}{r}=$$
$$=\frac{1}{2}\int_S \Omega(\omega)\mu(d\omega)\int_{|t|\geqslant 1}\frac{f(x-\omega t)}{t}dt.$$

Из леммы III.11.16 (b) и теорем III.11.17 и III.2.20(a) следует, что

(1)
$$\left\{\int_B\left|\int_A F(a,\ b)\,\nu_1(da)\right|^p\nu_2(db)\right\}^{1/p}\leqslant$$
$$\leqslant\int_A\left\{\int_B|F(a,\ b)|^p\nu_2(db)\right\}^{1/p}v(\nu_1,\ da)$$

для всякой $(\nu_1\times\nu_2)$-измеримой функции F на произведении $(A,\ \nu_1)\times(B,\ \nu_2)$ пространств с мерой, если только мера ν_2 положительна. Поэтому

$$|g|_p\leqslant\frac{1}{2}\int_S|\Omega(\omega)|\mu(d\omega)\left\{\int_{E^n}\left|\int_{|t|\geqslant 1}\frac{f(x-\omega t)}{t}dt\right|^p dx\right\}^{1/p},$$

и достаточно доказать, что

(2)
$$\int_{E^n}\left|\int_{|t|\geqslant 1}\frac{f(x-\omega t)}{t}dt\right|^p dx\leqslant\Lambda_p^p|f|_p^p.$$

Так как наружный интеграл в неравенстве (2) инвариантен относительно вращения системы координат, то можно, не ограничивая общности, выбрать в E^n такую систему координат, в которой $\omega=[1,\ 0,\ldots,0]$. Тогда неравенство, которое мы должны доказать, примет вид

(3)
$$\int_{E^n}\left|\int_{|t|\geqslant 1}\frac{f(x_1-t,\ x_2,\ldots,x_n)}{t}dt\right|^p dx_1dx_2\ldots dx_n\leqslant$$
$$\leqslant\Lambda_p^p\int_{E^n}|f(x_1,\ x_2,\ldots,x_n)|^p dx_1dx_2\ldots dx_n.$$

---

[1]) Это единственное место в доказательстве, где используется нечетность функции Ω.— *Прим. перев.*

Далее, неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{|t|\geqslant 1}\frac{f(x_1-t,\,x_2,\,\ldots,\,x_n)}{t}\,dt\right|^p dx_1\leqslant$$

$$\leqslant\Lambda_p^p\int_{-\infty}^{\infty}|f(x_1,\,\ldots,\,x_n)|^p dx_1,\quad -\infty<x_j<\infty,\qquad j=2,\,\ldots,\,n,$$

является очевидным следствием леммы 9. Интегрируя его по $x_2,\,\ldots,\,x_n$, получаем неравенство (3).

Теперь мы в состоянии установить неравенство Кальдерона — Зигмунда для *нечетного* ядра.

11. Теорема. *Пусть $1<p<\infty$. Пусть Ω — такая нечетная измеримая ограниченная функция, определенная на E^n, что $\Omega(x)=\Omega(tx)$ при $t>0$. Тогда для всякой функции f из $L_p(E^n)$ предел*

$$(K_\Omega*f)(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|u|\geqslant\varepsilon}\frac{\Omega(u)}{|u|^n}f(x-u)\,du$$

существует в смысле сходимости в среднем порядка p, и если Λ_p — постоянная из предыдущей леммы, то

$$|K_\Omega*f|_p\leqslant\Lambda_p\int_S|\Omega(\omega)|\,\mu(d\omega)\cdot|f|_p.$$

Доказательство. Докажем сначала, что функция g, определенная равенством

$$g(x)=\int_{|u|\geqslant 1}\frac{\Omega(u)}{|u|^n}f(x-u)\,du, \tag{1}$$

удовлетворяет неравенству $|g|_p\leqslant I\Lambda_p|f|_p$, где $I=\int_S|\Omega(\omega)|\mu(d\omega)$.

Для этого рассмотрим такую последовательность $\{\Omega_m\}$ нечетных функций, бесконечно дифференцируемых в окрестности единичной сферы и удовлетворяющих соотношениям $\Omega_m(tx)=\Omega_m(x)$, $t>0$, $m\geqslant 1$, что

$$\lim_{m\to\infty}\int_S|\Omega_m(\omega)-\Omega(\omega)|\,\mu(d\omega)=0.$$

Допустим, что функция f бесконечно дифференцируема и равна нулю вне некоторого ограниченного множества. Пусть

$$g_m(x)=\int_{|u|\geqslant 1}\frac{\Omega_m(u)}{|u|^n}f(x-u)\,du.$$

По предыдущей лемме $\{g_m\}$ является последовательностью Коши в $L_p(E^n)$ и, следовательно, сходится по норме в $L_p(E^n)$ к некоторой функции φ из $L_p(E^n)$, которая по той же лемме удовлетворяет неравенству $|\varphi|_p \leqslant \Lambda_p I |f|_p$. Переходя к подпоследовательности, можно считать, что $g_m(x) \to \varphi(x)$ для почти всех x. Но ясно, что $g_m(x) \to g(x)$ для всех x. Следовательно, $\varphi = g$; это доказывает, что $|g|_p \leqslant \Lambda_p I |f|_p$, если f принадлежит $C^\infty(E^n)$ и обращается в нуль вне ограниченного множества.

Пусть теперь f принадлежит $L_p(E^n)$, и пусть $\{f_m\}$ — такая последовательность финитных функций из $C^\infty(E^n)$, что $|f - f_m|_p \to 0$. Положим

$$h_m(x) = \int\limits_{|u| \geqslant 1} \frac{\Omega(u)}{|u|^n} f_m(x-u)\, du.$$

По только что доказанному $\{h_m\}$ является последовательностью Коши в $L_p(E^n)$ и, следовательно, сходится по норме в $L_p(E^n)$ к некоторой функции ψ из $L_p(E^n)$, которая удовлетворяет неравенству $|\psi|_p \leqslant \Lambda_p I |f|_p$. Переходя к подпоследовательности, можно считать, что $h_m(x) \to \psi(x)$ для почти всех x. С другой стороны, поскольку для всякого $q > 1$

$$\int\limits_{|x| \geqslant 1} \left| \frac{\Omega(x)}{|x|^n} \right|^q dx \leqslant \max_{x \in S} |\Omega(x)|^q \int\limits_1^\infty r^{-n(q-1)-1} dr =$$
$$= \max_{x \in S} |\Omega(x)|^q \cdot (n(q-1))^{-1} < \infty,$$

то ясно, что $h_m(x) \to g(x)$ для любого x. Итак, интеграл (1) существует для любого x из E^n и любой f из $L_p(E^n)$, и функция g, определенная этим интегралом, удовлетворяет неравенству $|g|_p \leqslant \Lambda_p I |f|_p$.

Далее, для каждого $\varepsilon > 0$ определим следующим образом отображение H_ε пространства $L_p(E^n)$ в себя:

$$(H_\varepsilon f)(x) = \int\limits_{|u| \geqslant \varepsilon} \frac{\Omega(u)}{|u|^n} f(x-u)\, du, \quad f \in L_p(E^n).$$

Ясно, что, полагая $u = \varepsilon v$, получаем

$$(H_\varepsilon f)(x) = \int\limits_{|v| \geqslant 1} \frac{\Omega(v)}{\varepsilon^n |v|^n} f(x - \varepsilon v)\, \varepsilon^n dv = (T_\varepsilon^{-1} H_1 T_\varepsilon f)(x),$$

где T_ε обозначает отображение пространства $L_p(E^n)$ в себя, определенное равенством $(T_\varepsilon f)(x) = f(\varepsilon x)$. Так как

$$|T_\varepsilon f|_p = \left\{ \varepsilon^{-n} \int\limits_{E^n} |f(v)|^p dv \right\}^{1/p} = \varepsilon^{-n/p} |f|_p, \qquad f \in L_p,$$

то из уже доказанного немедленно следует, что $|H_\varepsilon|_p = |H_1|_p \leqslant \leqslant \Lambda_p l$. Покажем, что предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} H_\varepsilon f$ существует в смысле сходимости по норме в $L_p(E^n)$ для всех f из некоторого фундаментального в $L_p(E^n)$ множества; тогда в силу II.3.6 наша теорема будет доказана. Предположим, что f принадлежит $C^\infty(E^n)$ и обращается в нуль вне множества $\{x \mid |x| \leqslant R\}$. Тогда, как было показано в начале доказательства леммы 7, интеграл в смысле главного значения

$$(K_\Omega * f)(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} (H_\varepsilon f)(x) \tag{2}$$

существует и является ограниченной функцией[1]) от x. Так как $f(y) = 0$ при $|y| > R$, то при $|x| > R+1$ и $0 < \varepsilon < 1$ имеем $(H_\varepsilon f)(x) = (K_\Omega * f)(x)$, так что достаточно доказать, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{|x|\leqslant R+1} |(H_\varepsilon f)(x) - (K_\Omega * f)(x)|^p dx = 0.$$

По следствию III.6.16 это будет вытекать из равенства (2), если будет показано, что функции $(H_\varepsilon f)(x)$, $\varepsilon > 0$, ограничены в совокупности. Пусть L — верхняя грань для $\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} |(\partial/\partial y_i) f(y)|^2\right\}^{1/2}$. Тогда, пользуясь теоремой о среднем из дифференциального исчисления и определением 4 (I), (II), получаем

$$\begin{aligned} |(H_\varepsilon f)(x)| &= \left| \int\limits_{\varepsilon\leqslant|u|\leqslant 2(R+1)} \frac{\Omega(u)}{|u|^n} \{f(x-u) - f(x)\}\, du \right| \leqslant \\ &\leqslant L\mu(S) \max_{|u|=1} |\Omega(u)| \int\limits_0^{2(R+1)} dr = \\ &= 2L\mu(S)(R+1) \max_{|u|=1} |\Omega(u)| < \infty, \end{aligned}$$

что завершает доказательство.

Введем теперь полезную *нечетную* вспомогательную функцию.

12. Лемма. *Существует такая ненулевая постоянная c, что*

$$\mathcal{F} \int\limits_{E^n} \frac{x_j}{|x|^{n+1}} e^{i(x,y)} dx = c \frac{y_j}{|y|}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Доказательство. В эвристических рассуждениях относительно интеграла Гильберта в четвертом абзаце данного параграфа мы

---

[1]) Предполагавшаяся в лемме 7 бесконечная дифференцируемость функции Ω при доказательстве этого факта не использовалась. — *Прим. перев.*

уже вычислили искомый интеграл при $n=1$ и нашли, что $c=\pi i$. Поэтому здесь мы рассмотрим лишь случай $n>1$. При этом можно ограничиться случаем $j=1$. Обозначим интеграл, стоящий в левой части рассматриваемой формулы, через $\varphi(y)$. Тогда по лемме 2

(I) $$\varphi(ty)=\varphi(y), \qquad t>0,$$

(II) $$\varphi(y)=-\varphi(-y),$$

(III) $$\varphi(Uy)=\varphi(y),$$

если U — вращение в E^n, оставляющее точку $[1, 0, \ldots, 0]$ на месте. Любые две точки $u, v \in E^n$, для которых $u_1=v_1$ и $|u|=|v|$, могут быть переведены одна в другую одним из вращений, описанных в (III). Следовательно, при $y\neq 0$ и $j=1$ функцию $\varphi(y)$ можно записать в виде $\varphi(y)=\psi(y_1/|y|, \ |y|)$. В силу равенства (I) ψ не зависит от второго из своих аргументов, а в силу (II) является нечетной функцией. Таким образом, $\varphi(y)=\psi(y_1/|y|)$.

Пусть $\Phi(y)$ обозначает интеграл

$$\mathcal{P}\int_{E^n} \frac{x_1+ix_2}{|x|^{n+1}} e^{i(x,\, y)}dx.$$

Тогда ясно, что

(IV) $$\Phi(y)=\psi\left(\frac{y_1}{|y|}\right)+i\psi\left(\frac{y_2}{|y|}\right).$$

Пусть V — вращение в плоскости y_1, y_2 (т. е. вращение в E^n, которое оставляет на месте все точки подпространства $y_3, \ldots, y_n$). Тогда V переводит y_1+iy_2 в $e^{i\theta}(y_1+iy_2)$ и x_1+ix_2 в $e^{i\theta}(x_1+ix_2)$. По лемме 2

(V) $$\Phi(Vy)=e^{i\theta}\Phi(y).$$

Пусть $\eta(y_1+iy_2)=\Phi([y_1, \ y_2, \ 0, \ldots, 0])$. В силу (IV) и (V) имеем

(VI) $$\eta(e^{i\theta}z)=e^{i\theta}\eta(z), \qquad z\neq 0,$$

(VII) $$\eta(tz)=\eta(z), \qquad t>0, \qquad z\neq 0.$$

В силу (VI) $\eta(re^{i\theta})=e^{i\theta}\eta(r)$, в силу (IV) и (II) величина $\eta(r)$ — чисто мнимая и наконец в силу (VII) $\eta(r)=c$ не зависит от r. Таким образом, $\eta(re^{i\theta})=ce^{i\theta}$, и потому

$$\psi\left(\frac{y_1}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}}\right)=\varphi(y_1, \ y_2, \ 0, \ldots, 0)=i\operatorname{Im}\Phi(y_1, \ y_2, \ 0, \ldots, 0)=$$
$$=i\operatorname{Im}\eta(y_1+iy_2)=i\operatorname{Im}\eta(e^{i\theta})=c\cos\theta=c\cdot\frac{y_1}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}},$$

так что $\psi(x)=cx$, и настоящая лемма будет доказана, если мы покажем, что $c\neq 0$.

Если $c=0$, то по лемме 7 $K_\Omega * f=0$ для всякой функции f из $C^\infty(E^n)$, обращающейся в нуль вне ограниченного множества; здесь мы положили

$$\Omega(x)=\frac{x_1}{|x|}.$$

Пусть функция $f\neq 0$ выбрана таким образом, что она неотрицательна, а при $x_1>0$ равна нулю. Тогда при $y_1>0$

$$(K_\Omega * f)(y)=\mathcal{P}\int_{E^n}\frac{x_1}{|x|^{n+1}}f(y-x)\,dx=\int_{x_1>y_1}\frac{x_1}{|x|^{n+1}}f(y-x)\,dx>0,$$

что противоречит тому, что $K_\Omega * f=0$, ч. т. д.

13. Лемма. *Пусть ψ принадлежит $L_2(E^n)$, f принадлежит $L_1(E^n)$, и пусть Ω удовлетворяет условиям теоремы* 11. *Тогда*

$$K_\Omega*(\psi*f)=(K_\Omega*\psi)*f. \tag{1}$$

Доказательство. По теореме 11 и лемме 3.1 обе части этого равенства меняются непрерывно в топологии пространства $L_2(E^n)$ при непрерывном изменении ψ и f в топологиях пространств $L_2(E^n)$ и $L_1(E^n)$ соответственно. Следовательно, соображения непрерывности показывают, что достаточно доказать равенство (1) для случая, когда обе функции f и ψ принадлежат $C^\infty(E^n)$ и равны 0 вне некоторого ограниченного множества. Пусть $\hat f$ и $\hat\psi$ — преобразования Фурье от f и ψ соответственно, и пусть

$$\hat K(y)=\mathcal{P}\int_{E^n}\frac{\Omega(u)}{|u|^n}e^{iyu}du.$$

Тогда по леммам 7 и 3.15 преобразование Фурье как левой, так и правой части формулы (1) равно $\hat K\hat f\hat\psi$, так что настоящая лемма вытекает из теоремы Планшереля (3.9 и 3.22).

14. Лемма. *Пусть Ω_1, Ω_2 и Ω_3 связаны между собой так же, как в лемме* 5 *и определении* 6. *Положим*

$$\psi_2(x)=\begin{cases}\dfrac{\Omega_2(x)}{|x|^n}, & |x|\geqslant 1,\\ 0, & |x|<1;\end{cases}\qquad \psi_3(x)=\begin{cases}\dfrac{\Omega_3(x)}{|x|^n}, & |x|\geqslant 2,\\ 0, & |x|<2.\end{cases}$$

Пусть $\varepsilon>0$, S — единичная сфера в E^n, а μ — мера гиперповерхности на S. Тогда существует такая постоянная K_ε, завися-

щая лишь от ε *и* Ω_1, *что*

(I) $$\int_S |\Omega_3(\omega)|\,\mu(d\omega) \leqslant K_\varepsilon \left\{ \int_S |\Omega_2(\omega)|^{1+\varepsilon} \mu(d\omega) \right\}^{1/(1+\varepsilon)},$$

(II) $$\int_{E^n} |\psi_3(x) - (K_{\Omega_1} * \psi_2)(x)|\,dx \leqslant K_\varepsilon \left\{ \int_S |\Omega_2(\omega)|^{1+\varepsilon} \mu(d\omega) \right\}^{1/(1+\varepsilon)}.$$

Кроме того, функция Ω_3 *нечетна и ограничена.*

Доказательство. При $|x| \geqslant 2$

(1) $$(K_{\Omega_1} * \psi_2)(x) = \mathscr{P} \int_{E^n} \frac{\Omega_2(u)}{|u|^n} \cdot \frac{\Omega_1(x-u)}{|x-u|^n}\,du - \mathscr{P} \int_{E^n} \chi(u) \frac{\Omega_2(u)}{|u|^n} \cdot \frac{\Omega_1(x-u)}{|x-u|^n}\,du =$$
$$= \psi_3(x) - \mathscr{P} \int_{E^n} \chi(u) \frac{\Omega_2(u)}{|u|^n} \cdot \frac{\Omega_1(x-u)}{|x-u|^n}\,du,$$

где через χ обозначена характеристическая функция множества $\{x \mid |x| \leqslant 1\}$. Функция $|u|^{-n}\Omega_1(u)$ бесконечно дифференцируема при $|u| \geqslant 1$, и ее производная по u_i равна

$$-nu_i|u|^{-n-2}\Omega_1(u) + \left(\frac{\partial}{\partial u_i}\Omega_1\right)(u)\,|u|^{-n}.$$

Так как $\Omega_1(tu) = \Omega_1(u)$ при $t > 0$, то

$$t\left(\frac{\partial}{\partial u_i}\Omega_1\right)(tu) = \left(\frac{\partial}{\partial u_i}\Omega_1\right)(u),\quad i = 1, \ldots, n;\ t > 0,\ |u| > 0.$$

Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial u_i}\{|u|^{-n}\Omega_1(u)\} = -nu_i|u|^{-n-2}\Omega_1(u) + \left(\frac{\partial}{\partial u_i}\Omega_1\right)\left(\frac{u}{|u|}\right)|u|^{-n-1} =$$
$$= O(|u|^{-n-1}).$$

По теореме о среднем из дифференциального исчисления существует такая конечная постоянная L (зависящая лишь от Ω_1), что

$$\left| \frac{1}{|u|} \left\{ \frac{\Omega_1(x-u)}{|x-u|^n} - \frac{\Omega_1(x)}{|x|^n} \right\} \right| \leqslant L|x|^{-n-1}$$

при $|u| \leqslant 1$, $|x| \geqslant 2$. Поэтому при $|x| \geqslant 2$ второй интеграл в формуле (1) оценивается следующим образом:

$$\left| \int_{|u| \leqslant 1} \frac{\Omega_2(u)}{|u|^n} \left\{ \frac{\Omega_1(x-u)}{|x-u|^n} - \frac{\Omega_1(x)}{|x|^n} \right\} du \right| \leqslant$$
$$\leqslant L|x|^{-n-1} \int_S |\Omega_2(\omega)|\,\mu(d\omega) \cdot \int_0^1 dr \leqslant$$
$$\leqslant \{\mu(S)\}^{\varepsilon/(1+\varepsilon)} L|x|^{-n-1} \left(\int_S |\Omega_2(\omega)|^{1+\varepsilon} \mu(d\omega) \right)^{1/(1+\varepsilon)}.$$

Следовательно,

$$(2)\qquad \int\limits_{|u|\geqslant 2} |\psi_3(u)-(K_{\Omega_1}*\psi_2)(u)|\,du \leqslant K_\varepsilon \left\{\int\limits_S |\Omega_2(\omega)|^{1+\varepsilon}\mu(d\omega)\right\}^{1/(1+\varepsilon)},$$

где

$$K_\varepsilon=\{\mu(S)\}^\delta L\int\limits_2^\infty r^{-2}\,dr=\frac{1}{2}L\{\mu(S)\}^\delta$$

и $\delta=\varepsilon/(1+\varepsilon)$, так что ясно, что K_ε зависит лишь от ε и Ω_1. (В оставшейся части доказательства мы продолжаем пользоваться символом K_ε для обозначения постоянной, зависящей только от ε и Ω_1.) Тем же способом мы можем прийти к выводу, что существует другая постоянная K_ε, такая, что

$$(3)\qquad \int\limits_{|u|\geqslant 2} |\psi_3(u)-(K_{\Omega_1}*\psi_2)(u)|^{1+\varepsilon}\,du \leqslant K_\varepsilon \int\limits_S |\Omega_2(\omega)|^{1+\varepsilon}\mu(d\omega).$$

Так как по теореме 11 существует такая постоянная K_ε, что

$$(4)\qquad |K_{\Omega_1}*\psi_2|_{1+\varepsilon}\leqslant K_\varepsilon|\psi_2|_{1+\varepsilon}=$$
$$=K_\varepsilon\left\{\int\limits_1^\infty r^{-n\varepsilon-1}\,dr\right\}^{1/(1+\varepsilon)}\left\{\int\limits_S |\Omega_2(\omega)|^{1+\varepsilon}\mu(d\omega)\right\}^{1/(1+\varepsilon)}=$$
$$=K_\varepsilon\left\{\int\limits_S |\Omega_2(\omega)|^{1+\varepsilon}\mu(d\omega)\right\}^{1/(1+\varepsilon)},$$

то из неравенства (3) следует существование такой постоянной K_ε, что

$$|\psi_3|_{1+\varepsilon}=\left\{\int\limits_S |\Omega_3(\omega)|^{1+\varepsilon}\mu(d\omega)\right\}^{1/(1+\varepsilon)}\left\{\int\limits_2^\infty r^{-n\varepsilon-1}\,dr\right\}^{1/(1+\varepsilon)}\leqslant$$
$$\leqslant K_\varepsilon\left\{\int\limits_S |\Omega_2(\omega)|^{1+\varepsilon}\mu(d\omega)\right\}^{1/(1+\varepsilon)}.$$

Итак,

$$\int\limits_S |\Omega_3(\omega)|\,\mu(d\omega)\leqslant\{\mu(S)\}^{\varepsilon/(1+\varepsilon)}\left\{\int\limits_S |\Omega_3(\omega)|^{1+\varepsilon}\mu(d\omega)\right\}^{1/(1+\varepsilon)}\leqslant$$
$$\leqslant \mu(S)^{\varepsilon/(1+\varepsilon)}K_\varepsilon\left\{\int\limits_2^\infty r^{-n\varepsilon-1}\,dr\right\}^{-1/(1+\varepsilon)}\left\{\int\limits_S |\Omega_2(\omega)|^{1+\varepsilon}\mu(d\omega)\right\}^{1/(1+\varepsilon)},$$

что доказывает справедливость неравенства (I).

Применяя соотношения (4) и неравенство Гёльдера, получаем

$$\int\limits_{|x|\leqslant 2} |(K_{\Omega_1} * \psi_2)(x)|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant [2^n \mu(S)]^{\varepsilon/(1+\varepsilon)} \Big\{ \int\limits_{|x|\leqslant 2} |(K_{\Omega_1} * \psi_2)(x)|^{1+\varepsilon}\,dx \Big\}^{1/(1+\varepsilon)} \leqslant$$

$$\leqslant [2^n \mu(S)]^{\varepsilon/(1+\varepsilon)} K_\varepsilon \Big\{ \int\limits_S |\Omega_2(\omega)|^{1+\varepsilon} \mu(d\omega) \Big\}^{1/(1+\varepsilon)};$$

отсюда и из неравенства (2) вытекает справедливость утверждения (II). Нечетность функции Ω_3 следует из леммы 5. Наконец, для того чтобы доказать ограниченность функции Ω_3, заметим, что мы должны лишь показать, что функция $K_{\Omega_1} * \psi_2$ при $|x| \geqslant 2$ ограничена, ибо, как уже было доказано, при $|x| \geqslant 2$ второй интеграл в правой части равенства (1) ограничен. Если положить $\psi_1(x) = \Omega_1(x)|x|^{-n}$ при $|x| \geqslant 1$ и $\psi_1(x) = 0$ при $|x| < 1$, то ясно, что

$$(5) \qquad (K_{\Omega_1} * \psi_2)(x) = (\psi_1 * \psi_2)(x) + \mathcal{P} \int\limits_{E^n} \chi(u) \frac{\Omega_1(u)}{|u|^n} \frac{\Omega_2(x-u)}{|x-u|^n}\,du.$$

Точно так же, как мы сделали это для второго интеграла в правой части равенства (1), можно показать, что второй интеграл в правой части соотношения (5) ограничен. Поскольку $|(\psi_1 * \psi_2)(x)| \leqslant \leqslant |\psi_1|_2 |\psi_2|_2$, лемма полностью доказана.

15. Лемма. *Пусть* $1 < p < \infty$, *и пусть* Ω — *четная функция, определенная на* E^n, *бесконечно дифференцируемая на поверхности единичного шара и удовлетворяющая соотношению* $\Omega(tx) = \Omega(x)$, $t > 0$. *Пусть* f — *бесконечно дифференцируемая функция, определенная на* E^n *и равная нулю вне некоторого ограниченного множества. Пусть* $\varepsilon > 0$ *и*

$$I_\varepsilon = \Big\{ \int\limits_S |\Omega(\omega)|^{1+\varepsilon} \mu(d\omega) \Big\}^{1/(1+\varepsilon)},$$

где S — *единичная сфера в* E^n, *а* μ — *мера гиперповерхности на* S. *Тогда существует такая конечная постоянная* $\Lambda_{\varepsilon, p}$, *зависящая лишь от* p *и* ε, *что* $L_p(E^n)$-*норма функции* g, *определенной равенством*

$$g(x) = \int\limits_{|u|\geqslant 1} \frac{\Omega(u)}{|u|^n} f(x-u)\,du,$$

не превосходит $\Lambda_{\varepsilon,p} I_\varepsilon |f|_p$.

Доказательство. Положим $\Omega_i(x) = c^{-1}x_i|x|^{-1}$, где c — постоянная из леммы 12. Тогда по леммам 12 и 7

$$F(K_{\Omega_i} * f)(y) = y_i|y|^{-1}F(f)(y)$$

для всякой функции f из $C^\infty(E^n)$, равной нулю вне ограниченного множества; здесь $F(g)$ обозначает преобразование Фурье функции g. По теореме Планшереля (3.9) и теореме 11 обе части этого равенства являются непрерывными линейными операторами в пространстве $L_2(E^n)$ (точнее, результатами применения таких операторов к функции f), так что

$$F(K_{\Omega_i} * h)(y) = \frac{y_i}{|y|}F(h)(y), \qquad h \in L_2(E^n).$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} K_{\Omega_i} * (K_{\Omega_i} * h) = h, \qquad h \in L_2(E^n).$$

Пусть $\psi(u) = \Omega(u)|u|^{-n}$ при $|u| \geqslant 1$ и $\psi(u) = 0$ при $|u| < 1$. По лемме 13 и теореме 11

$$|g|_p = \left|\sum_{i=1}^{n} K_{\Omega_i} * (K_{\Omega_i} * \psi) * f\right|_p \leqslant$$
$$\leqslant \Lambda_p nL \max_{1\leqslant i\leqslant n} |(K_{\Omega_i} * \psi) * f|_p,$$

где $L = \int\limits_S |y_1|\mu(d\omega)$, а Λ_p — постоянная, зависящая лишь от p (поскольку постоянная Λ_p, фигурирующая в теореме 11, совпадает с постоянной леммы 9). По лемме 14 $K_{\Omega_i} * \psi$ можно представить в виде

$$K_{\Omega_i} * \psi = \varphi_i + h_i,$$

где $\varphi_i(u) = \Omega_3^{(i)}(u)|u|^{-n}$, $|u| \geqslant 1$; $\varphi_i(u) = 0$, $|u| < 1$; $\Omega_3^{(i)}(u) = \Omega_3^{(i)}(tu)$, $t > 0$; при этом функция $\Omega_3^{(i)}$ нечетна и ограничена;

$$\int\limits_S |\Omega_3^{(i)}(\omega)|\mu(d\omega) \leqslant K_\varepsilon I_\varepsilon$$

и

$$\int\limits_{E^n} |h_i(x)|\,dx \leqslant K_\varepsilon I_\varepsilon.$$

Тогда по леммам 10 и 3.1

$$|(K_{\Omega_i} * \psi) * f|_p \leqslant (1 + 2^{-1}\Lambda_p) K_\varepsilon I_\varepsilon |f|_p,$$

ч. т. д.

Теперь мы можем доказать общую теорему Кальдерона — Зигмунда.

16. Теорема (*Кальдерон — Зигмунд*). *Пусть* $1 < p < \infty$ *и* $\varepsilon < 0$. *Пусть* Ω — *такая ограниченная измеримая функция, определенная на* E^n, *что* $\Omega(x) = \Omega(tx)$ *при* $t > 0$ *и*

$$\int_S \Omega(\omega)\,\mu(d\omega) = 0,$$

где S — *единичная сфера в* E^n, *а* μ — *мера гиперповерхности на* S. *Тогда для всякой функции* f *из* $L_p(E^n)$ *предел*

$$(K_\Omega * f)(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geqslant \varepsilon} \frac{\Omega(u)}{|u|^n} f(x-u)\,du$$

существует в смысле сходимости в среднем порядка p, *и существует такая конечная постоянная* $\Lambda_{\varepsilon, p}$, *зависящая только от* p *и* ε, *что*

$$|K_\Omega * f|_p \leqslant \Lambda_{\varepsilon, p} I_\varepsilon |f|_p,$$

где

$$I_\varepsilon = \left\{ \int_S |\Omega(\omega)|^{1+\varepsilon} \mu(d\omega) \right\}^{1/(1+\varepsilon)} < \infty.$$

Доказательство. Пусть $\omega_n = \mu(S)$. Тогда в силу неравенства Гёльдера

$$\int_S |\Omega(\omega)|\,\mu(d\omega) \leqslant \omega_n^{\varepsilon/(1+\varepsilon)} I_\varepsilon.$$

Следовательно, по теореме 11 настоящая теорема справедлива, если функция Ω нечетна. Поскольку Ω можно представить в виде суммы ее четной и нечетной частей, достаточно рассмотреть случай четной функции[1]). Но в этом случае теорема выводится из леммы 15 точно так же, как теорема 11 выводится из леммы 10.

---

[1]) Пусть $\Omega_1(x) = \dfrac{\Omega(x) + \Omega(-x)}{2}$ и $\Omega_2(x) = \dfrac{\Omega(x) - \Omega(-x)}{2}$ — четная и нечетная части функции Ω. Если обозначить через $I_\varepsilon(\Omega_1)$, $I_\varepsilon(\Omega_2)$ и $I_\varepsilon(\Omega)$ интегралы I_ε, вычисленные для функций Ω_1, Ω_2 и Ω соответственно, то из инвариантности меры μ относительно отображения $\omega \to -\omega$ и неравенства Минковского следует, что $I_\varepsilon(\Omega_1) + I_\varepsilon(\Omega_2) \leqslant 2I_\varepsilon(\Omega)$. — *Прим. перев.*

8. Упражнения

А. *Упражнения на интегралы Фурье*[1])

1. Пусть $\mathfrak{L}_1^+$ — подпространство пространства $L_1(-\infty, \infty)$, состоящее из функций от t, равных нулю при $t<0$. Показать, что $\mathfrak{L}_1^+$ образует замкнутую подалгебру алгебры со сверткой $L_1(-\infty, \infty)$ и что если m — мультипликативный линейный функционал на алгебре $\mathfrak{L}_1^+$, то существует такое комплексное число z с $\operatorname{Im} z>0$, что

$$m(f)=\int_0^\infty e^{izx}f(x)\,dx, \quad f\in\mathfrak{L}_1^+.$$

2. Пусть f_1 и f_2 — функции из $L_2(-\infty, \infty)$, и пусть $f(x)=f_1(x)f_2(x)$. Показать, что если F, F_1, F_2 — преобразования Фурье функций f, f_1, f_2 соответственно, то

$$F(x)=\int_{-\infty}^{\infty} F_1(x-y)\,F_2(y)\,dy.$$

3. Обобщить упражнение 2 на случай произвольной локально бикомпактной абелевой топологической группы.

4. Пусть $p\geqslant 1$, и пусть f — функция из $L_1(-\infty, \infty)$, а g — функция из $L_p(-\infty, \infty)$. Показать, что свертка

$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\,g(y)\,dy$$

существует для почти всех x и принадлежит $L_p(-\infty, \infty)$ и что

$$|f*g|_p\leqslant|f|_1\,|g|_p.$$

5. Показать, что если $f, g\in L_1(-\infty, \infty)\cap L_2(-\infty, \infty)$ и

$$g(x)=\int_a^x f(y)\,dy,$$

то преобразования Фурье F и G функций f и g соответственно связаны соотношением

$$-itG(t)=F(t).$$

---

[1]) Обращаем внимание читателя на то, что в этом параграфе прямое преобразование Фурье записывается в виде $\int e^{itx}f(x)\,dx$, в отличие от § 3, где под интегралом стояло e^{-itx}. — *Прим. перев.*

6. Пусть $1 \leqslant p \leqslant 2$, и пусть f — функция из $L_p(-\infty, \infty)$. Показать, что предел

$$F(t) = \lim_{A \to \infty} \int_{-A}^{A} e^{itx} f(x)\, dx$$

существует в смысле сходимости по норме в пространстве $L_q(-\infty, \infty)$, где $p^{-1} + q^{-1} = 1$. (Указание: см. VI.11.43.)

7. Показать, что в предположениях и обозначениях упражнения 6

$$\lim_{A \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^{A} F(t)\, e^{-itx}\, dt = f(x)$$

в топологии пространства $L_p(-\infty, \infty)$. (Указание: см. IV.4.19.)

8. Показать, что в предположениях и обозначениях упражнения 6

$$\int_{-\infty}^{\infty} |b(t)|^{2-p}\, |F(t)|^p\, dt < \infty$$

для всякой функции b из $L_p(-\infty, \infty)$.

9. Пусть λ — такая вещественная функция вещественного переменного, что $\lambda(\cdot) F(\cdot)$ является преобразованием Фурье функции из пространства $L_1(-\infty, \infty)$ всякий раз, когда $F(\cdot)$ является преобразованием Фурье функции из этого пространства. Показать, что если $1 \leqslant p \leqslant 2$, то $\lambda(\cdot)\, F(\cdot)$ является преобразованием Фурье функции из $L_p(-\infty, \infty)$ всякий раз, когда $F(\cdot)$ является преобразованием Фурье функции из $L_p(-\infty, \infty)$; преобразование Фурье определяется так же, как в упражнении 6.

10. Пусть λ — такая функция, определенная на $(-\infty, \infty)$, что ее полная вариация конечна. Показать, что если $1 < p \leqslant 2$ и F — преобразование Фурье функции из $L_p(-\infty, \infty)$, то такова же функция $\lambda(\cdot) F(\cdot)$. Преобразование Фурье определяется так же, как в упражнении 6. (Указание: воспользоваться неравенством М. Рисса.)

11. Пусть λ_n — числовая последовательность, определенная при $-\infty < n < \infty$ и имеющая конечную полную вариацию. Показать, что если $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}$ является рядом Фурье функции из $L_p(0, 2\pi)$, то о ряде $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \lambda_n e^{inx}$ можно сказать то же самое.

12. Пусть f — функция из $L_1(-\infty, \infty)$, и пусть F — ее преобразование Фурье. Показать, что если функция f в окрестности

точки x имеет ограниченную вариацию, то

$$f(x)=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}F(t)\,e^{-itx}\,dt.$$

(Указание: см. IV.14.17.)

13. Показать, что утверждение упражнения 12 остается справедливым, если условие $f\in L_1(-\infty,\infty)$ заменить требованием $f\in L_2(-\infty,\infty)$.

14. Показать, что в $L_1(-\infty,\infty)\cap L_2(-\infty,\infty)$ найдется такая непрерывная функция f, что предел, фигурирующий в упражнении 12, не существует при $x=0$.

15. Показать, что в $L_1(-\infty,\infty)$ существует функция f, для которой семейство функций

$$f_A(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}F(t)\,e^{-itx}\,dt,$$

где F обозначает преобразование Фурье функции f, не удовлетворяет неравенству

$$\sup_{A>0}\int|f_A(x)|\,dx<\infty.$$

16. Показать, что не всякая непрерывная функция, определенная при $-\infty<t<\infty$ и стремящаяся к нулю, когда t стремится к $+\infty$ или к $-\infty$, является преобразованием Фурье некоторой функции f из $L_1(-\infty,\infty)$.

17. Найти в $L_1(-\infty,\infty)$ такую функцию f, что она является неопределенным интегралом некоторой другой функции из $L_1(-\infty,\infty)$ и что преобразование Фурье F функции f удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{\infty}|F(t)|\,dt=\infty.$$

Показать, что это невозможно, если f является интегралом функции из $L_2(-\infty,\infty)$.

18. Пусть f — функция из $L_1(-\infty,\infty)$, и пусть F — ее преобразование Фурье. Тогда

$$\alpha(0)\,f(x)=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(t)\,e^{-itx}\alpha\left(\frac{t}{A}\right)dt,$$

если функция α ограничена, непрерывно дифференцируема в начале и принадлежит $L_1(-\infty,\infty)$ вместе со своим преобразованием Фурье. Предел понимается в смысле топологии пространства $L_1(-\infty, \infty)$. Кроме того, если дополнительно предположить, что преобразование Фурье функции α ограничено сверху четной монотонно убывающей функцией из L_1, то

$$\alpha(0) f(x) = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-itx} \alpha\left(\frac{t}{A}\right) dt$$

(I) для почти всех x и (II) для каждого x, при котором функция f непрерывна. (Указание: см. VIII.9.5.)

19. Пусть $f \in L_1(-\infty, \infty)$ и предположим, что преобразование Фурье F функции f также принадлежит $L_1(-\infty, \infty)$. Показать, что почти всюду

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} F(t)\, dt.$$

(Указание: воспользоваться упражнением 18.)

20. Пусть $1 \leqslant p \leqslant 2$, и пусть E^n обозначает n-мерное вещественное евклидово пространство, а f принадлежит $L_p(E^n)$; в качестве меры в E^n возьмем меру Лебега. Показать, что предел

$$F(t_1, \ldots, t_n) = \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} \ldots \int_{-A}^{A} e^{i(t_1x_1 + \ldots + t_nx_n)} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$$

существует в смысле сходимости по норме в $L_q(E^n)$, где $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Показать также, что

$$f(x_1, \ldots, x_n) =$$
$$= \lim_{A\to\infty} (2\pi)^{-n} \int_{-A}^{A} \ldots \int_{-A}^{A} e^{-i(t_1x_1 + \ldots + t_nx_n)} F(t_1, \ldots, t_n)\, dt_1 \ldots dt_n$$

в топологии пространства $L_p(E^n)$. (Указание: см. упражнения 6 и 7.)

B. *Упражнения на неравенства и сингулярные интегралы*

21. (Харди и Литлвуд.) Пусть для функции f из $L_1(0, 2\pi)$

$$c_n(f) = \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx}\, dx = 0, \qquad n < 0.$$

Показать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|c_n(f)|}{n} \leqslant K \int_0^{2\pi} |f(x)|\, dx,$$

где K — некоторая абсолютная постоянная. (Указание: показать, используя упражнение IV.14.88, что в $L_2(0, 2\pi)$ существуют такие две функции f_1, f_2, что $c_n(f_i)=0$, $n<0$, $i=1, 2$, и что $f=f_1f_2$. Затем воспользоваться упражнением 3.)

22. (Сопряженный тригонометрический ряд.) Пусть f — функция из $L_p(0, 2\pi)$, где $1<p<\infty$. Положим

$$c_n(f)=\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx, \qquad -\infty<n<\infty.$$

Показать, что ряд

$$[*] \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(n)\, c_n(f)\, e^{inx} = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=-m}^{m} \operatorname{sgn}(n)\, c_n(f)\, e^{inx}$$

сходится в среднем порядка p к функции, определяемой сингулярным интегралом

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{y-\pi}{2}} f(x-y)\, dy.$$

Здесь этот интеграл понимается как предел

$$['] \qquad I=\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_0^{\pi-\varepsilon} + \int_{\pi+\varepsilon}^{2\pi}\right\} \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{y-\pi}{2}} f(x-y)\, dy,$$

который существует в смысле сходимости в среднем порядка p. (Указание: воспользоваться методом упражнения IV.14.19 для доказательства сходимости в среднем ряда и теоремой 7.8 для доказательства сходимости в среднем интеграла.)

23. (Кальдерон — Зигмунд.) Пусть $1<p<\infty$, и пусть Ω — функция, определенная на E^n и обладающая следующими свойствами:

$$\text{(I)} \qquad \Omega(tx)=\Omega(x), \qquad t>0;$$

$$\text{(II)} \qquad \int_S \Omega(\omega)\, \mu(d\omega)=0,$$

где S — единичная сфера в E^n, а μ — мера гиперповерхности на S;

(III) $\Omega(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция от x при $x\neq 0$.

Показать, что если $f \in L_p(E^n)$, то сингулярный интеграл $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(J^\varepsilon f)(y)$, где

$$(J^\varepsilon f)(y) = \int\limits_{|x|>\varepsilon} \frac{\Omega(x)}{|x|^n} f(y-x)\,dx,$$

существует для почти всех y. (Указание: пусть φ — обращающаяся в нуль вне ограниченного множества неотрицательная функция из $C^\infty(E^n)$, интеграл от которой равен единице. Положим $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^n \varphi(\varepsilon x)$ для каждой функции φ. Показать, что в $L_1(E^n)$ найдется такая функция ϱ, что

$$J^\varepsilon f - \varphi_\varepsilon * (K_\Omega * f) = \varrho_\varepsilon * f.$$

Затем воспользоваться подходящим обобщением упражнения VIII.9.6.)

24. Пусть $1 < p < \infty$; тогда для всякой функции f из L_p предел ['] из упражнения 22 существует почти всюду.

C. *Упражнения на локализацию собственных значений*[1])

25. (А. Брауэр.)[2]) Пусть $A = (a_{jk})$ есть $(n \times n)$-матрица, рассматриваемая как линейное преобразование в комплексном n-мерном пространстве E^n. Для каждого k, $1 \leqslant k \leqslant n$, обозначим через C_k круг радиуса

$$r_k = \min\Big(\sum_{j\neq k} |a_{jk}|, \sum_{j\neq k} |a_{kj}|\Big)$$

с центром в точке a_{kk}. Показать, что каждое собственное значение матрицы A лежит в некотором круге C_k. (Указание: пусть $[x_1, \ldots, x_n]$ — собственный вектор, принадлежащий собственному значению λ; показать, что если

$$|x_k| = \max_{1\leqslant j\leqslant n} |x_i|, \quad \text{то} \quad |\lambda - a_{kk}| \leqslant \sum_{j\neq k} |a_{jk}|.)$$

26. (А. Брауэр.) Предположим, что все круги C_k из упражнения 25 попарно не пересекаются. Показать, что каждый из них содержит в точности одно простое собственное значение матрицы A. Если, кроме того, предположить, что все элементы матрицы A вещественны, то все ее собственные значения вещественны. (Указание: пусть D — матрица, диагональные элементы которой

---

[1]) Доказательства многих утверждений этого раздела можно найти в книге Пароди М. [1*]. —*Прим. перев.*

[2]) Впервые этот результат получен советским математиком С. А. Гершгориным [1*]. —*Прим. перев.*

совпадают с соответствующими элементами матрицы A, а остальные элементы равны нулю; рассмотреть матрицы $\alpha A+(1-\alpha)D$, $0\leqslant\alpha\leqslant 1$.)

27. Показать, что в обозначениях упражнения 25

$$|\det(A)|\geqslant\prod_{k=1}^{n}(|a_{kk}-r_k),$$

если все сомножители произведения положительны.

28. (Перрон.) Пусть A есть $(n\times n)$-матрица, и пусть $c_1, \ldots, c_n$ — произвольные положительные числа. Тогда каждое собственное значение λ матрицы A удовлетворяет неравенству

$$|\lambda|\leqslant\max_{1\leqslant j\leqslant n} c_j^{-1}\sum_{k=1}^{n}|a_{jk}|c_k.$$

29. Для каждого n и каждого $m\leqslant n$ обозначим через E_m^n пространство всех кососимметрических функций $a(i_1, i_2, \ldots, i_m)$ от m индексов, каждый из которых изменяется от 1 до n. (Это означает, что $a(i_1, i_2, \ldots, i_m) = -a(j_1, j_2, \ldots, j_m)$, если упорядоченные последовательности $i_1, \ldots, i_m$ и $j_1, \ldots, j_m$ отличаются единственной перестановкой.) Положим

$$(a, b) = \sum_{i_1, \ldots, i_m} a(i_1, \ldots, i_m)\overline{b(i_1, \ldots, i_m)},$$

превратив тем самым E_m^n в гильбертово пространство. Если $A=(a_{jk})$ есть $(n\times n)$-матрица, то через $A^{(m)}$ обозначим преобразование в E_m^n, определенное равенством

$$(A^{(m)}b)(i_1, \ldots, i_m)=\sum_{j_1, \ldots, j_m} a_{i_1j_1}\ldots a_{i_mj_m}b(j_1, \ldots, j_m).$$

Показать, что $(AB)^{(m)}=A^{(m)}B^{(m)}$ и что $(A^*)^{(m)}=(A^{(m)})^*$. Показать, что если $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — собственные значения матрицы A (каждое собственное значение повторено столько раз, какова размерность области значений оператора $E(\lambda; A)$), то собственными значениями преобразования $A^{(m)}$ являются числа $\lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\ldots\lambda_{i_m}$, где $i_1, i_2, \ldots, i_m$ — произвольная последовательность целых чисел, такая, что $1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_m\leqslant n$.

30. (Г. Вейль.) Пусть A и $\{\lambda_i\}$ означают то же, что и в упражнении 29. Пусть B — единственный положительный квадратный корень из AA^*, и пусть $\{\mu_i\}$ — собственные значения матрицы B. Предположим, что $\{\lambda_i\}$ и $\{\mu_i\}$ расположены в порядке убывания их абсолютных величин. Показать, что

$$|\lambda_1|\leqslant\mu_1,\quad |\lambda_1\lambda_2|\leqslant\mu_1\mu_2,\quad |\lambda_1\lambda_2\lambda_3|\leqslant\mu_1\mu_2\mu_3,\quad \text{и т. д.}$$

(Замечание: этот результат — наилучший из возможных (Горн).)

31. (Г. Вейль.) Пусть $\{\lambda_i\}$ и $\{\mu_i\}$ означают то же, что в упражнении 30. Показать, что из неравенств упражнения 30 следует, что

$$\sum_{i=1}^{j} |\lambda_i|^p \leqslant \sum_{i=1}^{j} \mu_i^p, \quad p \geqslant 1, \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

(Указание: $k_1 + k_2 k_1^{-1} + k_3 k_2^{-1} + \ldots$ является возрастающей функцией каждой из своих переменных, пока

$$k_1^2 \geqslant k_2, \quad k_2^2 \geqslant k_1 k_3, \quad k_3^2 \geqslant k_2 k_4, \quad \text{и т. д.)}$$

32. (Г. Вейль.) Пусть $\{\lambda_i\}$ и $\{\mu_i\}$ означают то же, что в упражнении 30. Показать, что

$$\sum_{i \neq j} |\lambda_i \lambda_j|^p \leqslant \sum_{i \neq j} (\mu_i \mu_j)^p, \quad p \geqslant 1,$$

$$\sum_{i \neq j \neq k} |\lambda_i \lambda_j \lambda_k|^p \leqslant \sum_{i \neq j \neq k} (\mu_i \mu_j \mu_k)^p, \quad p \geqslant 1,$$

и т. д.

33. Пусть A — оператор в n-мерном гильбертовом пространстве, и пусть $B = (A + A^*)/2$. Пусть μ_- и μ_+ — соответственно наименьшее и наибольшее собственные значения оператора B, и пусть λ — собственное значение оператора A. Тогда

$$\mu_- \leqslant \mathrm{Re}(\lambda) \leqslant \mu_+.$$

34. (Бендиксон.) Пусть A — то же, что в упражнении 25; предположим также, что элементы матрицы A вещественны. Пусть $C = (A - A^*)$, и пусть g — максимум абсолютных величин элементов матрицы C. Тогда

$$|\mathrm{Im}\,\lambda| \leqslant g \left(\frac{n(n-1)}{2} \right)^{1/2}.$$

(Указание: воспользоваться упражнением 33 и упражнением 31 для случая $p = 2$.)

35. (Пик.) Пусть C — вещественная кососимметрическая $(n \times n)$-матрица с элементами (c_{ij}); рассмотрим C как отображение n-мерного гильбертова пространства в себя. Показать, что

$$|C| \leqslant g \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n},$$

где g — максимум абсолютных величин элементов матрицы C. Следовательно, неравенство упражнения 34 может быть усилено, а именно справедливо неравенство

$$|\lambda| \leqslant g \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n} \leqslant g \left(\frac{n(n-1)}{2} \right)^{1/2}.$$

(Указание: располагая компоненты x_i вектора x в таком порядке, что $\operatorname{Im}(x_k\bar{x}_j - x_j\bar{x}_k) \geqslant 0$ при $k < j$, показать, что

$$|(Cx, x)| \leqslant -ig \sum_{k<j} (x_k\bar{x}_j - x_j\bar{x}_k) \leqslant g\,|x|\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}\text{ .)}$$

36. (Паркер.) Пусть матрица A такова, как в упражнении 26. Показать, что если λ — собственное значение матрицы A, то

$$|\lambda| \leqslant \frac{1}{2} \max_k \sum_{i=1}^{n} \{ |a_{ik}| + |a_{ki}| \}.$$

37. (Фробениус.) Пусть A — матрица, все элементы которой положительны. Показать, что

(I) наибольшее по модулю собственное значение λ является простым и, кроме того, вещественным и положительным;

(II) в собственном подпространстве, соответствующем собственному значению λ, имеется вектор x с положительными компонентами;

(III) всякий собственный вектор матрицы A, имеющий положительные компоненты, пропорционален вектору x;

(IV) собственное значение λ совпадает с наибольшим из чисел λ_0, для которых существует такой вектор y с положительными компонентами, что каждая компонента вектора Ay не меньше соответствующей компоненты вектора $\lambda_0 y$. (Указание: воспользоваться теоремой Брауэра о неподвижной точке; еще лучше — рассмотреть итерации A^n.)[1])

38. Пусть $p \geqslant 1$, и пусть (S, Σ, μ) — пространство с положительной мерой, а A — вполне непрерывный оператор в $L_p(S, \Sigma, \mu)$. Предположим, что A переводит положительные функции в положительные. Показать, что существует такое положительное собственное значение λ оператора A, которое не меньше, чем модуль любого другого собственного значения, и которому соответствует неотрицательная собственная функция.

39. Пусть A и B являются $(n \times n)$-матрицами, и пусть $\{\lambda_i\}$ — последовательность собственных значений матрицы AB. Показать, что

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \leqslant \|A\|\,\|B\|.$$

(Указание: привести матрицу AB к треугольному виду; $\|A\|$ — норма Гильберта — Шмидта оператора A.)

40. (Лалеско.) Пусть A и B — операторы Гильберта — Шмидта.

[1]) Далеко идущие обобщения этого примера можно найти в книге М. А. Красносельского [5*]. — *Прим. ред.*

Пусть $\{\lambda_i\}$ — последовательность собственных значений оператора AB с учетом их кратностей. Показать, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i| \cdot \ \|A\|\,\|B\|.$$

D. Упражнения по теории Фредгольма операторов Гильберта — Шмидта

В следующей группе упражнений A — заданный оператор Гильберта — Шмидта, $\{\lambda_i\}$ — последовательность его ненулевых собственных значений, каждое из которых повторяется столько раз, какова его кратность, $\delta(\lambda)$ — функция, определенная сходящимся бесконечным произведением

$$\delta(\lambda) = \prod_{i=1}^{\infty} (1 - \lambda\lambda_i)\, e^{\lambda\lambda_i},$$

а $\Delta(\lambda)$ — аналитическая операторнозначная функция

$$R(\lambda^{-1};\ A)\,\delta(\lambda)$$

(ср. теорему 6.26).

41. (Смитис.) Показать, что

(a) если $f(z, \lambda) = z^{-1}[\log(1 - \lambda z) + \lambda z]$, то

$$\delta(\lambda) = \exp\{\operatorname{tr}(f(A, \lambda),\ A)\}, \qquad \lambda \neq \lambda_i^{-1};$$

(b) $\delta(\lambda) = \exp\left\{-\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n}\sigma_n\right\}$,

где

$$\sigma_n = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^n, \qquad n \geqslant 2;$$

(c) $\delta'(\lambda) = \left(-\sum_{n=2}^{\infty} \lambda^{n-1}\sigma_n\right)\delta(\lambda)$;

(d) $\delta(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!}\det(P_n)$,

где $P_0 = 1$, а если $n \geqslant 1$, то P_n есть $(n \times n)$-матрица

$$P_n = \begin{pmatrix} 0 & n-1 & 0 & \dots & . & . & 0 \\ \sigma_2 & 0 & n-2 & \dots & . & . & 0 \\ \sigma_3 & \sigma_2 & 0 & \dots & . & . & 0 \\ . & . & . & \dots & . & . & . \\ . & . & . & \dots & . & . & 1 \\ \sigma_n & . & . & \dots & \sigma_3 & \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

42. (Смитис.) Показать, что

(a) $(I-\lambda A)\Delta(\lambda)=\lambda\delta(\lambda)I$;

(b) если $\delta(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\delta_n\lambda^n$ и $\Delta(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\Delta_n\lambda^n$, то $\Delta_0=0$ и

$$\Delta_n=\delta_{n-1}I+A\delta_{n-2}+A^2\delta_{n-3}+\ldots+A^{n-1}\delta_0;$$

(c) оператор Δ_n может быть записан в виде символического $(n\times n)$-определителя

$$\Delta_n=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\det\left(\begin{array}{c|c} I & n-1\ 0\ \ldots\ 0 \\ \hline A & \\ \cdot & \\ \vdots & P_{n-1} \\ A^{n-1} & \end{array}\right),\qquad n\geqslant 2,$$

где P_{n-1} есть $(n-1)\times(n-1)$-матрица из пункта (d) предыдущего упражнения.

43. (Смитис.) Функция $\Delta(\lambda)-\lambda\delta(\lambda)I$ является аналитической функцией от λ, даже если рассматривать ее как функцию со значениями в пространстве HS операторов Гильберта — Шмидта. Следовательно, ряд

$$\Delta(\lambda)-\lambda\delta(\lambda)I=\sum_{n=2}^{\infty}(\Delta_n-\delta_{n-1}I)\lambda^n,$$

где Δ_n и δ_n определены так же, как в предыдущем упражнении, сходится по норме Гильберта — Шмидта.

44. Пусть (S, Σ, μ) — пространство с положительной мерой. Оператор A, действующий в пространстве $L_2(S, \Sigma, \mu)$, тогда и только тогда является оператором Гильберта — Шмидта, когда на $S\times S$ существует такая $(\mu\times\mu)$-измеримая функция $A(\cdot,\cdot)$, что

(I) $$\left\{\int_S\int_S|A(s,t)|^2\mu(ds)\,\mu(dt)\right\}^{1/2}<\infty$$

и

(II) $$(Af)(s)=\int_S A(s,t)f(t)\,\mu(dt),\qquad f\in L_2(S,\Sigma,\mu),$$

почти всюду на S, т. е. тогда и только тогда, когда оператор A может быть представлен как интегральный оператор с ядром, удовлетворяющим условию (I). Если такое ядро $A(\cdot,\cdot)$ существует, то оно единственно (с точностью до значений на множестве

$(\mu \times \mu)$-меры нуль) и норма $\|A\|$ в точности равна конечной величине (I). Следовательно, если $A(\cdot, \cdot)$ есть $(\mu \times \mu)$-измеримая функция, определенная на $S \times S$ и удовлетворяющая условию (I), то формула (II) определяет оператор A, действующий в $L_2(S, \Sigma, \mu)$ и принадлежащий классу Гильберта — Шмидта.

45. Допустим, что в качестве гильбертова пространства $\mathfrak{H}$ упражнения 43 рассматривается пространство $L_2(S, \Sigma, \mu)$ упражнения 44. Пусть $\Delta_n(s, t)$ — ядро, которое представляет в смысле упражнения 44 оператор $\Delta_n - \delta_{n-1} I$ из упражнения 42. Тогда степенной ряд

$$\Delta(s, t; \lambda) = \sum_{n=2}^{\infty} \lambda^n \Delta_n(s, t)$$

сходится для почти всех относительно меры $\mu \times \mu$ точек $[s, t]$ из $S \times S$, и $\Delta(s, t; \lambda)$ является ядром, представляющим оператор $\Delta(\lambda) - \lambda\delta(\lambda) I$ в смысле упражнения 44.

46. (Гильберт.) Допустим, что выполняются предположения предыдущего упражнения.

(a) Показать, что постоянные δ_n и операторы Δ_n из упражнения 42 однозначно определяются равенствами $\delta_0 = 1$, $\delta_1 = 0$, $\Delta_0 = 0$, $\Delta_1 = \delta_0 I$ и рекуррентными соотношениями

$$\Delta_n = \delta_{n-1} I + A\Delta_{n-1}$$

и

$$\delta_n = -\frac{1}{n} \operatorname{tr}(\Delta_n - \delta_{n-1} I, A).$$

(b) Пусть $A(\cdot, \cdot)$ — ядро, представляющее оператор A в смысле упражнения 44. Пусть $\hat{\delta}_n$ — последовательность постоянных, определенная формулами $\hat{\delta}_0 = 1$,

$$\hat{\delta}_n = \frac{(-1)^n}{n!} \int_S \ldots \int_S B_n(s_1, \ldots, s_n)\, \mu(ds_1) \ldots \mu(ds_n), \qquad n \geqslant 1,$$

где $B_n(s_1, \ldots, s_n)$ — определитель $(n \times n)$-матрицы, общий элемент которой (т. е. элемент, стоящий в i-й строке и в j-м столбце) равен $A(s_i, s_j)$, если $i \neq j$, и 0, если $i = j$. Пусть $\hat{\Delta}_n(s, t)$ — функции, определенные формулами $\hat{\Delta}_2(s, t) = A(s, t)$ и

$$\hat{\Delta}_{n+2}(s, t) = \frac{(-1)^n}{n!} \int_S \ldots \int_S \widetilde{B}_n(s, t; s_1, \ldots, s_n)\, \mu(ds_1) \ldots \mu(ds_n),$$

$$n \geqslant 1,$$

где $\widetilde{B}_n(s, t;\ s_1, \ldots, s_n)$ — определитель $(n+1)\times(n+1)$-матрицы, общий элемент которой α_{ij} задается равенствами

$$\begin{aligned}
&\alpha_{11} = A(s, t); && \\
&\alpha_{1j} = A(s, s_{j-1}), && n+1 \geqslant j > 1; \\
&\alpha_{j1} = A(s_{j-1}, t), && n+1 \geqslant j > 1; \\
&\alpha_{ij} = 0, && n+1 \geqslant i = j > 1; \\
&\alpha_{ij} = A(s_{i-1}, s_{j-1}), && n+1 \geqslant i \neq j > 1.
\end{aligned}$$

Показать, что функция $\hat{\Delta}_n(s, t)$ удовлетворяет условию (I) упражнения 44 и, следовательно, представляет некоторый оператор $\hat{\Delta}_n$ типа Гильберта — Шмидта. Показать, наконец, что если $\Delta_n(s, t)$ — функции из предыдущего упражнения, то $\hat{\Delta}_n(s, t) = \Delta_n(s, t)$ для почти всех относительно меры $\mu\times\mu$ точек $[s, t]$ и что

$$\hat{\delta}_n = \delta_n, \qquad n \geqslant 2.$$

47. Пусть σ_1 — произвольное число и $d(\lambda) = \delta(\lambda)\exp(-\lambda\sigma_1)$. Показать, что[1])

$$d'(\lambda) = \left(-\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1}\sigma_n\right) d(\lambda)$$

и что

$$d(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \det(R_n),$$

где $R_0 = 1$, а если $n \geqslant 1$, то R_n есть $(n\times n)$-матрица

$$R_n = \begin{pmatrix}
\sigma_1 & n-1 & 0 & \ldots & 0 \\
\sigma_2 & \sigma_1 & n-2 & \ldots & 0 \\
\sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 & \ldots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\sigma_n & \cdot & \cdot & \ldots & \sigma_1
\end{pmatrix}.$$

Показать, что операторнозначная функция $D(\lambda) = d(\lambda)(\lambda^{-1}I - A)^{-1}$ аналитична по λ и что $D(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n\lambda^n$, где $D_0 = 0$, $D_1 = I$, а при

[1]) Определение постоянных σ_n, $n \geqslant 2$, см. в упражнении 41. — *Прим. перев.*

$n \geqslant 2$ оператор D_n представляется символическим определителем

$$\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \det \begin{pmatrix} I & n-1 \quad 0 \ldots 0 \\ A & \\ \cdot & R_{n-1} \\ \cdot & \\ \cdot & \\ A^{n-1} & \end{pmatrix}.$$

48. (Детерминантный ряд Фредгольма.) Пусть выполнены предпосылки предыдущего упражнения; предположим, что в качестве гильбертова пространства рассматривается $L_2(S, \Sigma, \mu)$, где (S, Σ, μ) — пространство с положительной мерой. Пусть $A(\cdot, \cdot)$ — ядро, представляющее оператор A в смысле упражнения 44. Предположим, что это ядро выбрано таким образом, что формула $f(s) = A(s, s)$ определяет μ-измеримую μ-интегрируемую функцию[1]). Возьмем в качестве числа σ_1 из предыдущего упражнения

$$\sigma_1 = \int_S A(s, s)\, \mu(ds).$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

(a) Числа $d_n = \det(R_n)$ можно вычислить по формулам $d_0 = 1$ и

$$d_n = \int_S \ldots \int_S C(s_1, \ldots, s_n)\, \mu(ds_1) \ldots \mu(ds_n), \qquad n \geqslant 1,$$

где $C(s_1, \ldots, s_n)$ — определитель $(n \times n)$-матрицы с общим элементом $A(s_i, s_j)$.

(b) Формулы $D_2(s, t) = A(s, t)$ и

$$D_{n+2}(s, t) = \int_S \ldots \int_S \widetilde{C}'(s, t; s_1, \ldots, s_n)\, \mu(ds_1) \ldots \mu(ds_n), \qquad n \geqslant 1,$$

---

[1]) Назовем множество $E \in \Sigma$ *точным атомом*, если $\mu(E) \neq 0$ и если из того, что $F \in \Sigma$, $F \subseteq E$, вытекает, что либо $F = E$, либо $F = \varnothing$. (Ср. с определением IV.9.6; заметим, кстати, что следующее за этим определением утверждение, что пространство с конечной положительной мерой может иметь не более чем счетное множество несовпадающих атомов, неверно; оно становится верным, если атомы заменить на точные атомы или если два атома считать совпадающими, когда мера их симметрической разности равна нулю. Если всякое одноточечное подмножество пространства S измеримо, то точными атомами являются все одноточечные подмножества ненулевой меры, и только они.) Заметим, что изменение функции $A(s, t)$ на множестве $(\mu \times \mu)$-меры нуль не меняет оператора A. Легко показать, что если S содержит не более конечного числа точных атомов, то, изменяя (если это необходимо) функцию $A(s, t)$ на некотором множестве $(\mu \times \mu)$-меры нуль, можно считать, что функция $A(s, s)$ является μ-интегрируемой. Если же число точных атомов бесконечно, то требование μ-интегрируемости функции $A(s, s)$ является дополнительным ограничением на оператор A, даже если мера μ конечна. — *Прим. перев.*

где $\widetilde{C}'(s, t; s_1, \ldots, s_n)$ — определитель $(n+1)\times(n+1)$-матрицы, элементы которой задаются равенствами

$$\begin{aligned}
&\alpha_{11} = A(s, t);\\
&\alpha_{1j} = A(s, s_{j-1}), \quad \alpha_{j1} = A(s_{j-1}, t), \qquad n+1 \geqslant j > 1;\\
&\alpha_{ij} = A(s_{i-1}, s_{j-1}), \qquad\qquad\qquad n+1 \geqslant i, j > 1;
\end{aligned}$$

определяют ядра, удовлетворяющие условию (I) упражнения 44 и представляющие операторы $D_n - \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} d_{n-1} I$ из предыдущего упражнения. Кроме того, для почти всех относительно меры $\mu\times\mu$ точек $[s, t]$ ряд

$$D(s, t; \lambda) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{(n-2)!} D_n(s, t)$$

сходится при всех λ, и $D(s, t; \lambda)$ является ядром, представляющим (в смысле упражнения 44) оператор $D(\lambda) - \lambda d(\lambda) I$ из предыдущего упражнения.

Показать, наконец, что, выбирая $A(s, t)$ так, что $A(s, s) = 0$ для всех s из S, мы получаем результат упражнения 46 как следствие результатов данного упражнения[1]). (Указание: обобщить метод упражнения 46.)

49. Говорят, что оператор Гильберта — Шмидта A *обладает следом*, если $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i| < \infty$. След $\operatorname{tr}(A)$ такого оператора определяется по формуле $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i$. Доказать следующие утверждения.

(a) Если оператор A упражнения 47 обладает следом и постоянная σ_1 этого упражнения выбрана так, что $\sigma_1 = \operatorname{tr}(A)$, то $d(\lambda) = \prod_{i=1}^{\infty} (1 - \lambda_i\lambda)$, причем это бесконечное произведение сходится абсолютно и равномерно по λ на всяком ограниченном множестве.

(b) Произведение A двух операторов A_1 и A_2 типа Гильберта — Шмидта обладает следом, причем $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(A_1, A_2)$.

(c) Пусть операторы A, A_1 и A_2 пункта (b) являются операторами, действующими в $L_2(S, \Sigma, \mu)$, где (S, Σ, μ) — пространство с положительной мерой, и пусть $A_1(\cdot, \cdot)$, $A_2(\cdot, \cdot)$ — ядра, представляющие в смысле упражнения 44 операторы A_1 и A_2 соответ-

[1]) Если $E \subset S$ — точный атом (см. примечание на стр. 247), то функция $f(s) = A(s, s)$ постоянна на E, причем величина этой постоянной однозначно определяется оператором A и не может быть изменена без изменения оператора A. Поэтому в случае, когда в S имеются точные атомы (например, когда мера μ дискретна), результаты упражнения 46 не являются, вообще говоря, следствиями результатов упражнения 48. — *Прим. перев.*

ственно. Тогда ядро $A(\cdot, \cdot)$, определенное формулой

$$A(s, t) = \int_S A_1(s, r) A_2(r, t) \mu(dr)$$

для всех s и t, для которых интеграл в правой части существует, представляет оператор A в смысле упражнения 44. Кроме того,

$$\operatorname{tr}(A) = \int_S A(s, s) \mu(ds).$$

(d) Если оператор $(AA^*)^{1/2}$ обладает следом, то оператор A также обладает следом (Указание: воспользоваться неравенством Вейля из упражнения 30.)

E. *Различные упражнения*

50. (Хальберг.) Пусть (S, Σ, μ) — пространство с σ-конечной мерой. Пусть T_p — однопараметрическое семейство ограниченных операторов, определенное на некотором подинтервале I интервала $1 \leqslant p \leqslant \infty$, причем оператор T_p действует в пространстве $L_p(S, \Sigma, \mu)$. Допустим, что для любых p_1, p_2 из I операторы T_{p_1} и T_{p_2} совпадают на пересечении пространств $L_{p_1}(S, \Sigma, \mu)$ и $L_{p_2}(S, \Sigma, \mu)$. Доказать, что $\log |\sigma(T_p)|$ — выпуклая функция от p.

51. Пусть выполнены предположения упражнения 50. Показать, что

$$\sigma(T_{p_2}) \subseteq \sigma(T_{p_1}) \cup \sigma(T_{p_3}), \quad \text{если} \quad p_1 \leqslant p_2 \leqslant p_3; \quad p_1, p_2, p_3 \in I.$$

52. Пусть выполнены предположения упражнения 50. Показать, что если p_1 и p_2 принадлежат I, то каждая компонента множества $\sigma(T_{p_1})$ пересекается с $\sigma(T_{p_2})$.

53. Пусть выполнены предпосылки упражнения 50; предположим, что число 2 содержится в I и что оператор T_2 эрмитов. Показать, что $\sigma(T_2) \subseteq \sigma(T_p)$ для любого p из I.

54. Пусть выполнены предпосылки упражнения 50; предположим дополнительно, что мера μ конечна. Пусть $p, q \in I$, $p < q$, и $\lambda \notin \sigma(T_p)$. Тогда $\lambda \notin \sigma(T_q)$ в том и только том случае, когда $(\lambda I - T_p)(L_p - L_q) \subseteq L_p - L_q$.

55. Пусть выполнены предпосылки упражнения 50; предположим дополнительно, что S — множество целых чисел и что каждая точка из S имеет меру 1. Пусть $p, q \in I$, $p > q$, и $\lambda \notin \sigma(T_p)$. Тогда $\lambda \notin \sigma(T_q)$ в том и только том случае, когда

$$(\lambda I - T_p)(L_p - L_q) \subseteq L_p - L_q.$$

56. (Шмидт.) Пусть выполнены предпосылки упражнения 44; предположим, что оператор A эрмитов. Пусть $\{\varphi_i\}$ — ортонор-

мальная последовательность собственных функций оператора A, а $\{\mu_i\}$ — последовательность соответствующих собственных значений. Показать, что

$$A(s, t) = \sum_i \mu_i \varphi_i(s) \overline{\varphi_i(t)},$$

причем этот ряд сходится в топологии пространства $L_2((S, \Sigma, \mu) \times (S, \Sigma, \mu))$.

57. Пусть S — бикомпактное пространство и (S, Σ, μ) — пространство с конечной регулярной мерой. Пусть $K(s, t)$ — непрерывная функция на $S \times S$; предположим, что

$$K(s, t) = \overline{K(t, s)},$$

так что формула

$$(Kf)(s) = \int K(s, t) f(t) \mu(dt)$$

определяет вполне непрерывный эрмитов оператор K в $L_2(S, \Sigma, \mu)$. Пусть $\{\varphi_i\}$ — последовательность собственных функций оператора K, а $\{\mu_i\}$ — последовательность соответствующих собственных значений. Показать, что если $g = Kf$ для некоторой функции f из $L_2(S, \Sigma, \mu)$, то функция g непрерывна и ее разложение в ряд по собственным функциям сходится равномерно и абсолютно.

58. (Мерсер.) Пусть выполнены предпосылки предыдущего упражнения; предположим, что оператор K неотрицателен. Показать, что

$$K(s, t) = \sum_i \mu_i \varphi_i(s) \overline{\varphi_i(t)},$$

причем ряд в правой части равномерно сходится. (Указание: показать, что $K(t, t) = \sum_i \mu_i |\varphi_i(t)|^2$, и отсюда вывести, что последний ряд равномерно сходится. Воспользоваться упражнениями 57 и 56.)

59. Пусть φ_n — такое ортонормальное множество функций в гильбертовом пространстве $L_2(S, \Sigma, \mu)$, что $|\varphi_n(s)| \leqslant M < \infty$ при $s \in S$ и $n = 1, 2, \ldots$. Для каждой функции f из L_1 положим $c_n = \int_S f(s) \overline{\varphi_n(s)} \mu(ds)$. Показать, что для любого p, $1 < p \leqslant 2$, существует такая конечная постоянная K_p, что

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^p n^{p-2} \right)^{1/p} \leqslant K_p \left\{ \int_S |f(s)|^p \mu(ds) \right\}^{1/p}.$$

(Указание: воспользоваться интерполяционной теоремой Марцинкевича, приведенной в параграфе «Примечания и дополнения», завершающем настоящую главу.)

9. Классы C_p вполне непрерывных операторов. Обобщенные неравенства Карлемана[1]

Если T — вполне непрерывный оператор в гильбертовом пространстве, то неотрицательный самосопряженный оператор T^*T вполне непрерывен (следствие VI. 5.5); таким образом, по следствиям X.3.5, VI.5.5 и X.2.8 оператор $A=(T^*T)^{1/2}$ также является вполне непрерывным, неотрицательным и самосопряженным. Ненулевые собственные значения $\mu_1, \mu_2, \ldots$ оператора A, расположенные в убывающем порядке и повторенные в соответствии с их кратностями, образуют по теореме VII.4.5 последовательность чисел, стремящуюся к нулю (если область значений оператора A бесконечномерна). Эти числа называются *характеристическими числами* оператора T; через $\mu_n(T)$ мы обозначаем n-е характеристическое число оператора T.

В терминах характеристических чисел можно описать различные классы вполне непрерывных операторов, определяя для них различные нормы.

1. Определение. (a) $|T|_p = \left\{\sum_{n=1}^{\infty} \{\mu_n(T)\}^p\right\}^{1/p}, \quad 0<p<\infty$; (b) $|T|_\infty = \sup_{1\leqslant n<\infty} |\mu_n(T)| = \mu_1(T) = |T|$; (c) класс C_p состоит из всех вполне непрерывных операторов, для которых величина $|T|_p$ конечна.

Последнее равенство пункта (b) следует из теоремы X.2.1 и леммы IX.3.2. В лемме 2 и ее следствиях устанавливаются основные свойства характеристических чисел.

2. Лемма. *Характеристические числа $\mu_n(T)$ вполне непрерывного оператора можно найти по формуле*

$$\mu_{n+1}(T) = \min_{\varphi_1, \ldots, \varphi_n} \max_{\substack{|\varphi|=1 \\ (\varphi, \varphi_1)=\ldots=(\varphi, \varphi_n)=0}} |T\varphi|, \qquad n \geqslant 0.$$

Доказательство. Эту формулу можно записать в виде

$$(\mu_{n+1}(T))^2 = \min_{\varphi_1, \ldots, \varphi_n} \max_{\substack{|\varphi|=1 \\ (\varphi, \varphi_1)=\ldots=(\varphi, \varphi_n)=0}} |T\varphi|^2.$$

Так как $|T\varphi|^2 = (T\varphi, T\varphi) = (T^*T\varphi, \varphi)$, то ясно, что наша лемма является частным случаем «минимаксной формулы» для собственных значений вполне непрерывного самосопряженного оператора, содержащейся в теореме X.4.3.

В дальнейшем будет удобно принять формулу леммы 2 за определение характеристического числа $\mu_n(T)$ в случае, когда

[1] Более полно эти вопросы, а также и многие другие связанные с ними излагаются в книге И. Ц. Гохберга и М. Г. Крейна [2*]. — *Прим. ред.*

оператор T не является вполне непрерывным. Заметим, что при таком определении формула $|T| = \mu_1(T)$ приобретает совершенно общий характер.

3. Следствие. *Характеристические числа вполне непрерывных (или просто ограниченных) операторов удовлетворяют неравенствам*

$$\mu_{n+m+1}(T_1 + T_2) \leqslant \mu_{n+1}(T_1) + \mu_{m+1}(T_2),$$
$$\mu_{n+m+1}(T_1 T_2) \leqslant \mu_{n+1}(T_1)\,\mu_{m+1}(T_2).$$

Доказательство. В самом деле, имеем

$$\min_{\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+m}} \max_{\substack{|\varphi|=1 \\ (\varphi, \varphi_1)=\ldots=(\varphi, \varphi_{n+m})=0}} |(T_1 + T_2)\varphi| \leqslant$$
$$\leqslant \min_{\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+m}} \max_{\substack{|\varphi|=1 \\ (\varphi, \varphi_1)=\ldots=(\varphi, \varphi_{n+m})=0}} (|T_1\varphi| + |T_2\varphi|) \leqslant$$
$$\leqslant \min_{\varphi_1, \ldots, \varphi_n} \max_{\substack{|\varphi|=1 \\ (\varphi, \varphi_1)=\ldots=(\varphi, \varphi_n)=0}} |T_1\varphi| +$$
$$+ \min_{\varphi_{n+1}, \ldots, \varphi_{n+m}} \max_{\substack{|\varphi|=1 \\ (\varphi, \varphi_{n+1})=\ldots=(\varphi, \varphi_{n+m})=0}} |T_2\varphi|;$$

это доказывает справедливость первого утверждения.

Аналогично

$$\min_{\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+m}} \max_{\substack{|\varphi|=1 \\ (\varphi, \varphi_1)=\ldots=(\varphi, \varphi_{n+m})=0}} |T_1 T_2 \varphi| \leqslant$$
$$\leqslant \min_{\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+m}} \max_{\substack{|\varphi|=1 \\ (\varphi, T_2^*\varphi_1)=\ldots=(\varphi, T_2^*\varphi_n)=0 \\ (\varphi, \varphi_{n+1})=\ldots=(\varphi, \varphi_{n+m})=0}} |T_1 T_2 \varphi| =$$
$$= \min_{\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+m}} \max_{\substack{(T_2\varphi, \varphi_1)=\ldots=(T_2\varphi, \varphi_n)=0 \\ (\varphi, \varphi_{n+1})=\ldots=(\varphi, \varphi_{n+m})=0}} \left(\frac{|T_1(T_2\varphi)|}{|T_2\varphi|}\right)\cdot\left(\frac{|T_2\varphi|}{|\varphi|}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \Big\{ \min_{\varphi_1, \ldots, \varphi_n} \max_{\substack{|\psi|=1 \\ (\psi, \varphi_1)=\ldots=(\psi, \varphi_n)=0}} |T_1\psi| \Big\} \times$$
$$\times \Big\{ \min_{\varphi_{n+1}, \ldots, \varphi_{n+m}} \max_{\substack{|\varphi|=1 \\ (\varphi, \varphi_{n+1})=\ldots=(\varphi, \varphi_{n+m})=0}} |T_2\varphi| \Big\},$$

что доказывает справедливость второго утверждения.

4. Следствие. (a) $|\mu_n(T_1) - \mu_n(T_2)| \leqslant |T_1 - T_2|$.

(b) $\mu_n(TA) \leqslant \mu_n(T)\,|A|$; $\mu_n(AT) \leqslant |A|\,\mu_n(T)$.

(c) $\mu_n(TU) = \mu_n(T)$, *если* $|U| = |U^{-1}| = 1$, *и, в частности, если оператор* U *унитарен.*

Доказательство. Утверждения (a) и (b) являются частными случаями неравенств леммы 3; утверждение (c) сразу следует из (b).

Неравенство (a) предыдущего следствия дает возможность получить некоторые результаты относительно аппроксимации общих вполне непрерывных операторов вполне непрерывными операторами, имеющими конечномерную область значений. Такая аппроксимация является основным техническим приемом настоящего параграфа. Следующая лемма содержит полезное для приложений вспомогательное утверждение, показывающее, что́ происходит при этом с собственными значениями аппроксимирующих операторов.

5. Лемма. *Пусть T_n, T — вполне непрерывные операторы, и пусть $T_n \to T$ в равномерной операторной топологии. Пусть $\lambda_m(T)$ — последовательность ненулевых собственных значений оператора T, каждое из которых повторяется столько раз, какова его кратность. Тогда существует такая последовательность $\lambda_m(T_n)$ ненулевых собственных значений оператора T_n (с учетом их кратностей), что*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_m(T_n) = \lambda_m(T), \qquad m \geqslant 1,$$

причем эта сходимость равномерна по m.

Доказательство. Выберем такую убывающую и стремящуюся к нулю последовательность чисел ε_k, что граница круга C_{ε_k} радиуса ε_k с центром в начале лежит целиком в резольвентном множестве вполне непрерывного оператора T. Найдем такую убывающую последовательность положительных чисел $\delta_k < \varepsilon_k$, что круги радиуса δ_k с центрами в точках спектра $\sigma(T)$, лежащих вне C_{ε_k}, попарно не пересекаются. Тогда по леммам VII.6.4, VII.6.5 и VII.6.7 найдется такая возрастающая последова ельность натуральных чисел n_k, что при $n \geqslant n_k$ каждая точка из $\sigma(T_n)$ либо содержится в C_{ε_k}, либо удалена не более чем на δ_k от некоторой ненулевой точки из $\sigma(T)$. Кроме того, если каждую точку из $\sigma(T_n)$ считать столько раз, какова ее кратность, то число точек из $\sigma(T_n)$, удаленных не более чем на δ_k от точки $\lambda \in \sigma(T) - C_{\varepsilon_k}$, в точности равно кратности λ.

При $n_k \leqslant n < n_{k+1}$ занумеруем точки из $\sigma(T_n)$ следующим образом.

(I) Расположим точки $\tilde{\lambda}_1, \ldots, \tilde{\lambda}_l$ из $\sigma(T) - C_{\varepsilon_k}$ в том порядке, в котором они встречаются в последовательности $\lambda_m(T)$. Пронумеруем сначала все точки из $\sigma(T_n)$, лежащие в δ_k-окрестности точки $\tilde{\lambda}_1$, затем все точки из $\sigma(T_n)$, лежащие в δ_k-окрестности точки $\tilde{\lambda}_2$, и, наконец, все точки, лежащие в δ_k-окрестности точки $\tilde{\lambda}_l$. Во всех случаях мы повторяем каждую точку столько раз, какова ее кратность.

(II) Перенумеруем точки из $\sigma(T_n) \cap C_{\varepsilon_k}$ любым способом, но с учетом их кратностей.

Пусть теперь $\varepsilon > 0$; выберем такое натуральное M, что $|\lambda_j(T)| < \varepsilon$ при $j > M$. Легко видеть, что можно найти столь большое k, что $\varepsilon_k < \varepsilon$ и все точки $\lambda_1(T), \ldots, \lambda_M(T)$ лежат вне C_{ε_k}, в то время как $|\lambda_j(T)| + \delta_k < \varepsilon$ при $j > M$. Пусть $n > n_k$. По построению $|\lambda_j(T_n) - \lambda_j(T)| < \delta_k$ при $j \leqslant M$, в то время как $|\lambda_j(T_n)|$ и $|\lambda_j(T)|$ не превосходят ε при $j > M$. Таким образом, лемма доказана.

6. Лемма. *Пусть T — вполне непрерывный оператор и $\lambda_n(T)$ — расположенная в порядке убывания абсолютных величин последовательность его собственных значений, каждое из которых повторяется столько раз, какова его кратность. (Если имеется лишь конечное число N ненулевых собственных значений, полагаем $\lambda_n(T) = 0$ при $n > N$.) Тогда для любого целого положительного m*

(a) $|\lambda_1(T) \ldots \lambda_m(T)| \leqslant \mu_1(T) \ldots \mu_m(T)$;

(b) $\sum\limits_{j=1}^{m} |\lambda_j(T)|^p \leqslant \sum\limits_{j=1}^{m} \{\mu_j(T)\}^p, \quad p \geqslant 1$;

(c) $\mu_m(T) = \mu_m(T^*)$.

Доказательство. Мы объединили эти три слабо связанных друг с другом утверждения по причине сходства их доказательств. По лемме 5 и следствию 4, а также в силу того простого факта, что всякий вполне непрерывный оператор можно аппроксимировать по норме последовательностью $\{T_n\}$ конечномерных операторов, достаточно доказать лемму в частном случае, когда конечномерна область значений оператора T.

Заметим, что если T имеет конечномерную область значений, то $T = ET$, где E — оператор ортогонального проектирования на область значений оператора T. Поэтому $T^* = T^*E^*$, так что область значений оператора T^* также конечномерна. В дальнейшем мы будем время от времени пользоваться этим замечанием без особой оговорки.

Пусть $\mathfrak{S}$ — конечномерное подпространство, содержащее области значений операторов T и T^*; обозначим через d его размерность. Тогда ясно, что $\mathfrak{S}$ инвариантно относительно T и T^*, а так как $(T\mathfrak{S}^\perp, x) = (\mathfrak{S}^\perp, T^*x) = 0$ для всех x, то $T\mathfrak{S}^\perp = \{0\}$; аналогично

$T^*\mathfrak{S}^\perp = \{0\}$. Таким образом, легко видеть, что

$$\begin{aligned}
&\lambda_n(T) = \lambda_n(T \mid \mathfrak{S}), && 1 \leqslant n \leqslant d; && \lambda_n(T) = 0, && n > d;\\
(1)\qquad &\mu_n(T) = \mu_n(T \mid \mathfrak{S}), && 1 \leqslant n \leqslant d; && \mu_n(T) = 0, && n > d;\\
&\mu_n(T^*) = \mu_n((T \mid \mathfrak{S})^*), && 1 \leqslant n \leqslant d; && \mu_n(T^*) = 0, && n > d.
\end{aligned}$$

Следовательно, достаточно доказать утверждения (a), (b) и (c) для операторов в *конечномерном* гильбертовом пространстве.

В этом случае (a) и (b) представляют собой известные неравенства Вейля, приведенные в § 8 в качестве упражнений 8.31 и 8.32. Для доказательства (c) заметим, что всякий оператор в конечномерном пространстве может быть сколь угодно точно аппроксимирован невырожденными операторами; таким образом, не ограничивая общности, мы можем считать, что оператор T невырожден. Пусть $U = (T^*T)^{1/2}T^{-1}$. Тогда ясно, что оператор U — невырожденный и $U^*U = (T^*)^{-1}T^*TT^{-1} = I$, так что U — унитарный оператор. Имеем $UT = (T^*T)^{1/2}$; поэтому $UTT^*U^{-1} = T^*T$, так что $U(TT^*)^{1/2}U^{-1} = (T^*T)^{1/2}$. Отсюда следует справедливость (c), ибо унитарно эквивалентные операторы имеют одинаковые собственные значения.

7. Следствие. *Если* $T \in C_p$, $0 < p < \infty$, *то ряд* $\sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i(T))^p$ *абсолютно сходится и*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i(T)|^p \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \{\mu_i(T)\}^p.$$

Доказательство. Это следует из пункта (b) предыдущей леммы.

8. Следствие. *Если* $T \in C_1$, *то ряд* $\operatorname{tr}(T) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(T)$ *абсолютно сходится и*

$$|\operatorname{tr}(T)| \leqslant |T|_1.$$

Замечание. Величина $\operatorname{tr}(T)$ называется *следом* оператора T.

В следующей лемме доказываются полезные элементарные свойства пространств C_p. Приведенные в этой лемме неравенства для норм при $1 \leqslant p < \infty$ являются грубыми и будут улучшены несколько позже.

9. Лемма. (a) *Если* $p \leqslant p'$, то $C_p \subseteq C_{p'}$; $|T|_p$ *убывает с ростом* p.

(b) *Если* $T_1, T_2 \in C_p$, *то* $T_1 + T_2 \in C_p$ *и* $|T_1 + T_2|_p \leqslant 2^{1/p}|T_1|_p + 2^{1/p}|T_2|_p$, $p \geqslant 1$; $|T_1 + T_2|_p^p \leqslant 2|T_1|_p^p + 2|T_2|_p^p$, $0 < p < 1$.

(c) *Если* $T_1 \in C_{r_1}$ *и* $T_2 \in C_{r_2}$, то $T_1T_2 \in C_r$, *где* $1/r_1 + 1/r_2 = 1/r$. *Кроме того,*

$$|T_1T_2|_r \leqslant 2^{1/r} |T_1|_{r_1} |T_2|_{r_2}, \quad 0 < r < \infty.$$

(d) *Если* $T \in C_r$, *а* A *— ограниченный оператор, то операторы* AT *и* TA *принадлежат* C_r; *кроме того,*

$$|AT|_r \leqslant |A|\,|T|_r; \qquad |TA|_r \leqslant |T|_r\,|A|.$$

(e) C_2 *совпадает с классом операторов Гильберта—Шмидта и* $|T|_2 = \|T\|$ *при* $T \in C_2$.

Доказательство. Часть (d) сразу следует из пункта (b) следствия 4. Если $\{\varphi_i\}$ — ортонормированная система собственных векторов оператора T^*T, отвечающих собственным значениям $\{(\mu_i(T))^2\}$, то [1])

$$|T|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n(T))^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |T\varphi_n|^2 = \|T\|^2.$$

Это доказывает справедливость утверждения (e).

Утверждение (a) следует прямо из определения 1.

Чтобы доказать (b), положим $T = T_1 + T_2$ и заметим, что по следствию 3

$$\mu_{2n+1}(T_1 + T_2) \leqslant \mu_{n+1}(T_1) + \mu_{n+1}(T_2),$$
$$\mu_{2n+2}(T_1 + T_2) \leqslant \mu_{n+1}(T_1) + \mu_{n+2}(T_2).$$

Пусть сначала $p \geqslant 1$. Тогда по неравенству Минковского

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} |\mu_{2n+1}(T)|^p\Big)^{1/p} \leqslant \Big\{\sum_{n=0}^{\infty} |\mu_{n+1}(T_1)|^p\Big\}^{1/p} + \Big\{\sum_{n=0}^{\infty} |\mu_{n+1}(T_2)^p|\Big\}^{1/p} \leqslant$$
$$\leqslant |T_1|_p + |T_2|_p.$$

Таким же способом получаем

$$\Big\{\sum_{n=0}^{\infty} |\mu_{2n+2}(T)|^p\Big\}^{1/p} \leqslant |T_1|_p + |T_2|_p.$$

Возводя эти неравенства в степень p и складывая, получаем первое из утверждений (b). Утверждение пункта (b), относящееся к области $0 < p \leqslant 1$, доказывается точно так же с заменой неравенства Минковского на элементарное неравенство $|x|^p + |y|^p \geqslant |x+y|^p$, справедливое в этой области значений p.

---

[1]) Последнее из следующих ниже равенств вытекает из того, что систему $\{\varphi_i\}$ можно дополнить до ортонормального базиса в $\mathfrak{H}$ таким образом, чтобы оператор T переводил добавленные векторы в 0.— *Прим. перев.*

Аналогично, применяя следствие 3 и неравенство Гёльдера

$$\{\sum|\alpha_i\beta_i|^r\}^{1/r}\leqslant\{\sum|\alpha_i|^{r_1}\}^{1/r_1}\{\sum|\beta_i|^{r_2}\}^{1/r_2},$$

справедливое, если $r_1^{-1}+r_2^{-1}=r^{-1}$ и $0<r_1,\ r_2,\ r<\infty$, получаем (c).

Некоторая неортодоксальность «неравенства треугольника», приведенного в пункте (b) предыдущей леммы, не мешает нам воспользоваться нашими «нормами» для определения топологии в C_p. Множество $U\subseteq C_p$ называется *открытым*, если для каждого T из U найдется такое $\varepsilon>0$, что $\{T'\,|\,|T'-T|_p<\varepsilon\}\subseteq U$. Из леммы 6 (c) сразу же следует, что отображение $T\to T^*$ пространства C_p в себя непрерывно. Из леммы 9 следует, что отображение $T\to T$ пространства C_p в $C_{p'}$ при $p'>p$, отображение $[T_1, T_2]\to T_1+T_2$ пространства $C_p\times C_p$ в C_p, а также отображение $[T_1, T_2]\to T_1T_2$ пространства $C_p\times C_q$ в C_r, где $r^{-1}=p^{-1}+q^{-1}$, являются напрерывными. Из обычных свойств метрического пространства теряется пока лишь утверждение, что $|T|_p$ является непрерывной функцией на C_p. Позднее, когда мы уточним (для случая $1\leqslant p<\infty$) лемму 9 (b), избавившись от лишнего множителя $2^{1/p}$, мы сможем доказать и это.

Пространство C_p обладает свойством полноты, сформулированным в следующей лемме.

10. Лемма. *Если $T_n\in C_p$ — такая последовательность операторов, что $|T_n-T_m|_p\to 0$ при $m,\ n\to\infty$, то существует такой вполне непрерывный оператор T, что $T_n\to T$ (в топологии пространства C_p) при $n\to\infty$.*

Доказательство. По лемме 9 (a) и следствию VI.5.5, согласно которому семейство вполне непрерывных операторов замкнуто в равномерной операторной топологии, существует такой вполне непрерывный оператор T, что $T_n\to T$ в равномерной топологии. Таким образом, по следствию 4 (a) $\lim\limits_{m\to\infty}\mu_k(T_n-T_m)=\mu_k(T_n-T)$. Отсюда следует, что

$$\{\sum_{k=1}^{N}|\mu_k(T_n-T)|^p\}^{1/p}\leqslant\varlimsup_{m\to\infty}\{\sum_{k=1}^{\infty}|\mu_k(T_n-T_m)|^p\}^{1/p}=\varlimsup_{m\to\infty}|T_n-T_m|_p.$$

Поэтому, устремляя N к бесконечности, получаем

$$|T_n-T|_p\leqslant\varlimsup_{m\to\infty}|T_n-T_m|_p,$$

так что

$$\lim_{n\to\infty}|T_n-T|_p\leqslant\lim_{m,\ n\to\infty}|T_n-T_m|_p=0,$$

ч. т. д.

Впоследствии нам будет полезна следующая простая лемма.

11. Лемма. *Пусть T — вполне непрерывный оператор. Тогда существует такая последовательность T_n вполне непрерывных операторов с конечномерными областями значений, что*

(a) *$T_n \to T$ в равномерной топологии при $n \to \infty$;*
(b) *если $T \in C_p$, то $|T_n - T|_p \to 0$ при $n \to \infty$;*
(c) *если $T \in C_p$, то $|T_n|_p \to |T|_p$ при $n \to \infty$.*

Доказательство[1]). Пусть $\mathfrak{H}_0 = \{x \mid T^*Tx = 0\}$, $\mathfrak{H}_\infty = \mathfrak{H}_0^\perp$ и E_0 — оператор ортогонального проектирования на $\mathfrak{H}_0$. Из спектральной теоремы для вполне непрерывного самосопряженного оператора T^*T легко следует, что ортонормальная система $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ собственных векторов этого оператора, соответствующих собственным значениям $(\mu_1(T))^2$, $(\mu_2(T))^2, \ldots$, является базисом пространства $\mathfrak{H}_\infty$. Пусть E_n — оператор ортогонального проектирования на подпространство, порожденное векторами $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, а $\widetilde{E}_n = E_n + E_0$ и $E'_n = I - \widetilde{E}_n$. Положим $T_n = T\widetilde{E}_n$ и $T'_n = TE'_n$; тогда $T = T_n + T'_n$. Заметим, что $\{x \mid Tx = 0\} = \{x \mid T^*Tx = 0\} = \mathfrak{H}_0$ (одно включение тривиально, другое следует из равенства $(T^*Tx, x) = |Tx|^2$). Поэтому $T_n = T\widetilde{E}_n = TE_n + TE_0 = TE_n$, так что оператор T_n имеет конечномерную область значений.

Так как $E'_n \to 0$ в сильной топологии, то $|E'_n x| \to 0$ равномерно по x на всяком компактном множестве. Поэтому $E'_n T^* x \to 0$ равномерно по x на всяком ограниченном множестве и, следовательно, $|E'_n T^*| = |T'_n| \to 0$. Это доказывает пункт (a).

Так как $T_n^* T_n = E_n T^* T E_n = T^* T E_n$, то ясно, что

$$\mu_m(T_n) = \mu_m(T), \quad m \leqslant n; \qquad \mu_m(T_n) = 0, \quad m > n.$$

Поэтому справедливость утверждения (c) очевидна. По тем же причинам

$$\mu_m(T'_n) = \mu_{m+n}(T), \quad m \geqslant 1,$$

откуда следует справедливость утверждения (b).

В конце концов нам придется доказать непрерывность (или, что то же, аддитивность) функции $\operatorname{tr}(T)$, введенной в следствии 8. К сожалению, в этом доказательстве имеется одна тонкость, аналогичная уже доставившей нам трудности на пути к теоремам XI.6.24 и XI.6.25. Мы преодолеем это препятствие, используя методы теории функций комплексного переменного, почти совпадающие с примененными ранее в § 6.

[1]) В оригинале доказательство леммы 11 содержит неточности. Оно не проходит, если ядро оператора T нетривиально. Кроме того, в нем неявно предполагается сепарабельность пространства $\mathfrak{H}$, что совсем не обязательно. В переводе доказательство исправлено.— *Прим. перев.*

12. Лемма. *Если T_1 и T_2 — конечномерные операторы, то* $\operatorname{tr}(T_1+T_2)=\operatorname{tr}(T_1)+\operatorname{tr}(T_2)$. *Следовательно, для таких операторов* $|\operatorname{tr}(T_1)-\operatorname{tr}(T_2)|\leqslant|T_1-T_2|_1$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{S}$ — конечномерное подпространство гильбертова пространства, содержащее области значений операторов T_1, T_2, T_1^* и T_2^*. Положим $T_3=T_1+T_2$. Из соображений, аналогичных приведенным в третьем абзаце доказательства леммы 6, следует, что $\operatorname{tr}(T_1)=\operatorname{tr}(T_1\mid\mathfrak{S})$, $\operatorname{tr}(T_2)=\operatorname{tr}(T_2\mid\mathfrak{S})$ и $\operatorname{tr}(T_3)=\operatorname{tr}(T_3\mid\mathfrak{S})$. Поэтому первое утверждение нашей леммы вытекает из соответствующего утверждения для операторов в конечномерном пространстве (см. определение 6.8 и лемму 6.10). Второе утверждение следует из первого и из следствия 8, если учесть, что $\operatorname{tr}(\alpha T)=\alpha\operatorname{tr}(T)$.

Лемма 12 показывает, что функция $\operatorname{tr}(T)$ допускает единственное продолжение по непрерывности с плотного в C_1 множества конечномерных операторов на все C_1. Обозначим это продолжение через $\widetilde{\operatorname{tr}}(T)$. Следующей основной вехой наших рассуждений будет доказательство того, что функции $\operatorname{tr}(T)$ и $\widetilde{\operatorname{tr}}(T)$ совпадают на C_1. Сначала установим некоторые легко доказываемые свойства функции $\widetilde{\operatorname{tr}}(T)$.

13. Лемма[1]. (a) *Функция $\widetilde{\operatorname{tr}}(T)$ линейна и непрерывна на пространстве C_1.*

(b) *Если $\{\varphi_\alpha\}$ — ортонормальный базис, то*

$$\widetilde{\operatorname{tr}}(T)=\sum_\alpha(T\varphi_\alpha,\varphi_\alpha),$$

причем ряд сходится абсолютно.

Доказательство. Утверждение (a) немедленно следует из предыдущей леммы и из определения $\widetilde{\operatorname{tr}}(T)$.

Пусть $\mathfrak{H}_0=\{x\mid(TT^*)^{1/2}x=0\}$ и $\mathfrak{H}_\infty=\mathfrak{H}_0^\perp$. Тогда ортонормальная система собственных векторов ψ_1, ψ_2, ... оператора $(TT^*)^{1/2}$, соответствующих собственным значениям $\mu_1(T)$, $\mu_2(T)$, ..., является базисом в $\mathfrak{H}_\infty$. Пусть $\{\psi'_\beta\}$ — ортонормальный базис в $\mathfrak{H}_0$. Заметим, что если $x\in\mathfrak{H}_0$, то $|T^*x|^2=|(TT^*)^{1/2}x|^2=0$; поэтому

[1] В оригинале формулировка и доказательство леммы 13 содержат неточности. В формулировке неявно предполагается сепарабельность пространства $\mathfrak{H}$, что излишне, а доказательство не проходит, если $\operatorname{Ker}(TT^*)^{1/2}\neq\{0\}$. В переводе сделаны соответствующие изменения. — *Прим. перев.*

$T^*\psi'_\beta=0$. Кроме того, ясно, что $|T^*\psi_j|=\mu_j(T)$. Поэтому

$$[*]\ \sum_\alpha |(T\varphi_\alpha, \varphi_\alpha)| = \sum_\alpha \Big| \sum_{j=1}^\infty (T\varphi_\alpha, \psi_j)(\psi_j, \varphi_\alpha) + \sum_\beta (T\varphi_\alpha, \psi'_\beta)(\psi'_\beta, \varphi_\alpha)\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_\alpha \sum_{j=1}^\infty |(T^*\psi_j, \varphi_\alpha)|\,|(\psi_j, \varphi_\alpha)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^\infty \Big\{\sum_\alpha |(T^*\psi_j, \varphi_\alpha)|^2\Big\}^{1/2} \Big\{\sum_\alpha |(\psi_j, \varphi_\alpha)|^2\Big\}^{1/2} = \sum_{j=1}^\infty \mu_j(T) = |T|_1.$$

Это доказывает абсолютную сходимость ряда в правой части соотношения (b); так как сумма этого ряда линейна по T, то из неравенства [*] следует, что она зависит от T непрерывно. Поэтому в силу леммы 11 формула (b) будет доказана в общем случае, если мы сумеем обосновать ее для оператора T с конечномерной областью значений. Такой оператор является суммой конечного числа операторов с одномерными областями значений. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что область значений T одномерна, т. е. что T имеет вид $x \longrightarrow (x, v)u$. Для такого оператора след легко вычисляется: $\operatorname{tr}(T)=(u, v)$; таким образом, формула (b) сводится к формуле

$$(u, v) = \sum_\alpha (u, \varphi_\alpha)(\varphi_\alpha, v),$$

которая является простым следствием полноты ортонормального базиса $\{\varphi_\alpha\}$.

Следующая лемма позволяет уточнить неравенства леммы 9 для норм, относящиеся к случаю пространств C_p с $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

14. Лемма. (a) *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *и* $q^{-1}+p^{-1}=1$. *Пусть* C^0 *обозначает множество всех ненулевых ограниченных операторов с конечномерными областями значений. Тогда если* $A \in C_p$, *то*

$$(1)\qquad |A|_p = \sup_{B \in C^0} \frac{|\widetilde{\operatorname{tr}}(AB)|}{|B|_q}.$$

(b) *Если* p *и* q *такие же, как в пункте* (a), $A \in C_p$ *и* $B \in C_q$, *то* AB *и* BA *принадлежат* C_1,

$$(2)\qquad \widetilde{\operatorname{tr}}(AB) = \widetilde{\operatorname{tr}}(BA)$$

и $|\widetilde{\operatorname{tr}}(AB)| \leqslant |A|_p |B|_q$.

(c) *Если* p, q, A *и* B *такие же, как в пункте* (b), *то*

$$|AB|_1 \leqslant |A|_p |B|_q.$$

(d) *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *и пусть* A *и* A_1 *принадлежат* C_p. *Тогда*

$$|A + A_1|_p \leqslant |A|_p + |A_1|_p.$$

Доказательство. Ясно, что неравенство (d) следует из формулы (1) пункта (a). Аналогично, если (a) и (b) уже доказаны, то по лемме 9 (d)

$$|AA_1|_1 = \sup_{B \in C^0} \frac{|\widetilde{\operatorname{tr}}(AA_1B)|}{|B|} \leqslant \sup_{B \in C^0} \frac{|A|_p |A_1B|_q}{|B|} \leqslant |A|_p |A_1|_q.$$

Таким образом, в доказательстве нуждаются лишь пункты (a) и (b).

Допустим, что утверждение (a) доказано в частном случае, когда область значений оператора A конечномерна. Для любого A из C_p можно, согласно лемме 11, найти последовательность A_n конечномерных операторов, сходящуюся к оператору A в равномерной топологии и в топологии пространства C_p. Если $B \in C^0 \subseteq C_1$, то из непрерывности отображения $[A, B] \to AB$ пространства $C_\infty \times C_1$ в C_1 и из непрерывности функции $\widetilde{\operatorname{tr}}$ на C_1 следует, что

$$|\widetilde{\operatorname{tr}}(AB)| = \lim_{n\to\infty} |\widetilde{\operatorname{tr}}(A_nB)| \leqslant \lim_{n\to\infty} |A_n|_p |B|_q \leqslant |A|_p |B|_q.$$

С другой стороны, найдется такая последовательность $\{B_n\}$ операторов из C^0, что $|B_n|_q = 1$ и $|\widetilde{\operatorname{tr}}(A_nB_n)| \geqslant |A_n|_p - 1/n$. Так как оператор $AB_n - A_nB_n$ принадлежит C^0, то по леммам 12 и 9(c)

$$|\widetilde{\operatorname{tr}}(AB_n - A_nB_n)| \leqslant |(A - A_n) B_n|_1 \leqslant 2 |A - A_n|_p,$$

так что

$$|\widetilde{\operatorname{tr}}(AB_n)| \geqslant |A_n|_p - 2|A - A_n|_p - \frac{1}{n} \to |A|_p.$$

Следовательно, из справедливости утверждения (a) для операторов с конечномерными областями значений вытекает его справедливость в общем случае. С помощью простых рассуждений, подобных примененным в третьем абзаце доказательства леммы 6 (детальное их проведение мы оставляем читателю), можно показать, что для обоснования утверждения (a) в общем случае достаточно рассмотреть случай, когда гильбертово пространство конечномерно.

В этом частном случае доказательство проводится так. Пусть $p < \infty$. Поскольку обе части соотношения (1) непрерывны по A, а всякая конечная матрица может быть сколь угодно точно аппроксимирована невырожденными матрицами, достаточно рассмотреть случай невырожденного преобразования A. При этом оператор $T = (AA^*)^{1/2}$ также невырожден, и если $U = T^{-1}A$, то $UU^* = T^{-1}T^2T = I$, так что оператор U унитарен и $A = TU$. Пусть $B_0 = U^{-1}T^{p-1}$. Тогда $AB_0 = T^p$, так что $\operatorname{tr}(AB_0) = \sum \{\mu_i(A)\}^p$.

С другой стороны, $B_0B_0^* = U^{-1}T^{2(p-1)}U$, так что $\mu_i(B_0) = \mu_i(A)^{p-1}$ и

$$|B_0|_q = \left\{\sum [\mu_i(A)]^{pq-q}\right\}^{1/q} = \left\{\sum [\mu_i(A)]^p\right\}^{1-1/p}.$$

Отсюда

$$\frac{|\operatorname{tr}(AB_0)|}{|B_0|_q} = |A|_p,$$

и потому правая часть формулы (1) не меньше ее левой части.

Для доказательства обратного неравенства достаточно показать, что

$$(3) \qquad |\operatorname{tr}(AB)| \leqslant |A|_p |B|_q;$$

как и выше, мы видим, что это неравенство достаточно доказать для случая, когда A и B невырождены. Поскольку, как было показано выше, невырожденная матрица имеет вид $A = TU$, где U — унитарная, а T — положительно определенная эрмитова матрица, и так как по спектральной теореме T можно представить в виде $T = VDV^*$, где D — положительная диагональная матрица с теми же собственными значениями, что и T, то неравенство (3) вытекает из неравенства

$$|\operatorname{tr}(VD_1V'D_2V'')| \leqslant |D_1|_p |D_2|_q.$$

В силу тождества $\operatorname{tr}(SS') = \operatorname{tr}(S'S)$ достаточно доказать, что для любой пары унитарных матриц U, $\widetilde{U}$ и любой пары положительных диагональных матриц D_1, D_2

$$(4) \qquad |\operatorname{tr}(D_1UD_2\widetilde{U})| \leqslant |D_1|_p |D_2|_q.$$

Неравенство (4) можно записать в виде

$$\Big|\sum_{i,\,j} u_{ij}\widetilde{u}_{ji}(d_1)_i(d_2)_j\Big| \leqslant \left(\sum (d_1)_i^p\right)^{1/p} \left(\sum (d_2)_i^q\right)^{1/q}.$$

По теореме Рисса о выпуклости (VI.10.7) последнее неравенство справедливо в общем случае, если оно справедливо в частных случаях $p = 1$, $q = \infty$ и $q = 1$, $p = \infty$; но в этих случаях оно вытекает из очевидных неравенств

$$\sum_j |u_{ij}\widetilde{u}_{ji}| \leqslant 1, \qquad \sum_i |u_{ij}\widetilde{u}_{ji}| \leqslant 1,$$

справедливых для любой пары унитарных матриц U, $\widetilde{U}$. Таким образом, соотношение (1) доказано при $p \neq \infty$. Несложное распространение этого доказательства на случай $p = \infty$ мы оставляем читателю.

Поскольку линейный функционал $\widetilde{\operatorname{tr}}$ непрерывен на C_1 и поскольку, как было отмечено в абзаце, следующем за леммой 9, отображение $[A, B] \to AB$ пространства $C_p \times C_q$ в C_1 непрерывно, из леммы 11 следует, что для доказательства утверждений пункта (b) в общем случае достаточно доказать их в случае, когда операторы A и B конечномерны. Но для таких операторов неравенство пункта (b) является, очевидно, следствием формулы (1), а тождество (2) вытекает из соответствующего тождества для операторов в конечномерном пространстве. Это завершает доказательство настоящей леммы.

Из леммы 9(d), неравенства $|A| \leqslant |A|_p$, леммы 10 и предыдущей леммы немедленно следует, что при $p \geqslant 1$ семейство операторов C_p с нормой $|\cdot|_p$ является полной нормированной алгеброй; если гильбертово пространство бесконечномерно, то это алгебра без единицы. Поэтому соображения, использованные при доказательстве теоремы 6.7, с незначительными изменениями могут быть применены для доказательства следующей леммы.

15. Лемма. *Если $p \geqslant 1$, $T \in C_p$ и f — однозначная аналитическая функция в окрестности спектра оператора T, равная 0 в нуле, то $f(T) \in C_p$ и отображение $T \to f(T)$ пространства C_p в себя непрерывно. Кроме того, если $\{f_n\}$ — последовательность таких функций, имеющих в качестве общей области определения некоторую окрестность N спектра оператора T, и если $f_n(\lambda) \to f(\lambda)$ равномерно на N, то $f_n(T) \to f(T)$ в топологии пространства C_p.*

Изменения, необходимые для распространения доказательства теоремы 6.7 с частного случая $p=2$ на общий случай $p \geqslant 1$, столь незначительны, что не могут причинить читателю особого беспокойства. Поэтому мы их опустим.

Пусть $T \in C_1$. По лемме 15 отображение $T \to \log(I+zT)$ определено при $-z^{-1} \notin \sigma(T)$ и непрерывно по T. Поэтому функция $\det(I+zT) = \exp(\widetilde{\operatorname{tr}}(\log(I+zT)))$ определена и непрерывна по T, если $-z^{-1}$ лежит в резольвентном множестве оператора T. Так как при $-z^{-1} \notin \sigma(T)$ предел

$$\lim_{h \to 0} \frac{\log(1+(z+h)\zeta) - \log(1+z\zeta)}{h}$$

существует в смысле равномерной по ζ сходимости в окрестности спектра $\sigma(T)$, то из леммы 15 следует, что предел

$$\lim_{h \to 0} \frac{\log(I+(z+h)T) - \log(I+zT)}{h}$$

существует в смысле сходимости в топологии пространства C_1. Поэтому $\widetilde{\operatorname{tr}}(\log(I+zT))$ является аналитической функцией от z при всех z, для которых $-z^{-1} \notin \sigma(T)$. Следующая лемма устанавливает для этой функции важное неравенство.

16. Лемма. *Пусть* $T \in C_1$. *Тогда*

(a) $|\det(I+zT)| \leqslant \prod\limits_{n=1}^{\infty} (1+|z|\mu_n(T))$;

(b) *функция* $\det(I+zT)$ *имеет в точках* z, *для которых* $-z^{-1} \in \sigma(T)$, *устранимые особенности, и потому можно считать, что она аналитична по* z *при всех* z.

Доказательство. Левая часть неравенства (a) непрерывна по T. В ходе доказательства леммы 11 было показано, как построить такую последовательность конечномерных операторов T_n, что $|T_n - T|_1 \to 0$, $\mu_m(T_n) = \mu_m(T)$ при $m \leqslant n$ и $\mu_m(T_n) = 0$ при $m > n$. Поэтому неравенство (a) будет доказано в общем случае, если мы установим его справедливость для операторов T с конечномерными областями значений. Рассуждая так же, как в третьем абзаце доказательства леммы 6, мы можем даже, не ограничивая общности, считать, что T — оператор в гильбертовом пространстве конечной размерности d.

Для конечной невырожденной матрицы A справедлива формула $e^{\operatorname{tr}(\log A)} = \det(A)$, где $\det(A)$ обозначает определитель матрицы A. Поскольку определитель матрицы A равен произведению ее собственных значений, то из леммы 6 (a) следует, что

$$|\det(I+zT)| = \prod_{n=1}^{d} |\lambda_n(I+zT)| \leqslant$$
$$\leqslant \prod_{n=1}^{d} \mu_n(I+zT) \leqslant \prod_{n=1}^{d} (1+|z|\mu_n(T)),$$

что завершает доказательство пункта (a).

Если T_n — оператор в конечномерном пространстве или, более общо, оператор с конечномерной областью значений, то $\det(I+zT_n)$ является целой аналитической функцией (и даже полиномом) от z. Так как ограниченная сходящаяся последовательность аналитических функций сходится к аналитической функции, то функция $\det(I+zT)$ аналитична при $-z^{-1} \notin \sigma(T)$. Так как, согласно (a), функция $\det(I+zT)$ ограничена (во всякой ограниченной области), то ее особенности устранимы[1]), и утверждение (b) доказано.

Замечание. По принципу максимума модуля ограниченная последовательность аналитических функций, сходящаяся вне некоторого множества, состоящего из изолированных точек, сходится всюду; поэтому $\det(I+T)$ является непрерывной функцией от T для всех $T \in C_1$ независимо от того, принадлежит точка -1

[1]) Напомним, что эта функция имеет особенности лишь в изолированных точках $-\lambda_n^{-1}$, где λ_n — ненулевые собственные значения оператора T. — *Прим. перев.*

спектру $\sigma(T)$ или нет. Столь же очевидно, что предыдущее рассуждение достаточно для доказательства следующей, несколько более общей леммы.

17. Лемма. *Пусть* $T, B \in C_1$. *Тогда функция* $\det(I+T+zB)$ *аналитична при всех* z.

Теперь мы в состоянии доказать, что $\operatorname{tr}(T)=\widetilde{\operatorname{tr}}(T)$. В лемме 18 мы делаем первый шаг, доказывая это равенство для квазинильпотентного оператора T.

18. Лемма. *Если оператор* $N \in C_1$ *квазинильпотентен, то* $\widetilde{\operatorname{tr}}(N)=0$.

Доказательство. Так как $\sigma(N)=\{0\}$, то $-z^{-1} \notin \sigma(N)$ для всех z. Поэтому $L(z)=\widetilde{\operatorname{tr}}(\log(I+zN))$ — целая функция от z. Выберем столь большое k, что $\sum_{n=k+1}^{\infty} \mu_n(N) < \varepsilon$. Тогда из леммы 16(a) следует, что

$$|\exp(L(z))| \leqslant \prod_{n=1}^{k}(1+|z|\mu_n(N)) \exp\left(|z| \sum_{n=k+1}^{\infty} \mu_n(N)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{n=1}^{k}(1+|z|\mu_n(N)) \exp(\varepsilon|z|);$$

здесь мы воспользовались неравенством $1+\alpha \leqslant e^{\alpha}$ при $\alpha>0$. Следовательно, $\operatorname{Re} L(z) \leqslant 2\varepsilon|z|$ для достаточно больших $|z|$. Тогда из леммы 6.32 следует, что $|L(z)| \leqslant 8\varepsilon|z|$ для достаточно больших $|z|$, так что

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{|L(z)|}{|z|}=0.$$

Поэтому функция $L(z)/z$ аналитична и равна нулю при $z=\infty$. Следовательно, ряд Лорана для $L(z)$ в окрестности точки $z=\infty$ имеет вид

$$L(z)=a+\frac{b}{z}+\ldots,$$

так что функция L ограничена на бесконечности и по теореме Лиувилля постоянна. Так как $L(0)=\widetilde{\operatorname{tr}}(\log I)=\operatorname{tr}(0)=0$, то $L=0$. По лемме 15

$$\log(I+zN)=\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}N^k z^k}{k},$$

откуда

$$0 = L(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} z^k \widetilde{\mathrm{tr}}(N^k)}{k}.$$

Таким образом, $\widetilde{\mathrm{tr}}(N^k) = 0$ при $k \geqslant 1$, ч. т. д.

Пусть теперь T — произвольный оператор из C_1. Пусть $E_i = E(\lambda_i(T); T)$ — конечномерный проектор, соответствующий ненулевой изолированной точке $\lambda_i(T)$ из $\sigma(T)$. Пусть

$$\mathfrak{H}_n = \sum_{i=1}^{n} E(\lambda_i(T); T)\,\mathfrak{H},$$

$\mathfrak{H}_\infty$ — замыкание множества $\bigcup_n \mathfrak{H}_n$, а $\mathfrak{H}^\perp$ — ортогональное дополнение к $\mathfrak{H}_\infty$.

Пусть $\{\varphi_n\}$ — ортонормальный базис в $\mathfrak{H}_\infty$, выбранный таким образом, что $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{n_1}\}$ — базис в $\mathfrak{H}_1$, $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{n_2}\}$ — базис в $\mathfrak{H}_2$, и т. д. Пусть $\{\psi_\alpha\}$ — ортонормальный базис в $\mathfrak{H}^\perp$. Очевидно, из леммы 13 (b) следует, что

[*] $$\widetilde{\mathrm{tr}}(T) = \sum_{i=1}^{\infty} (T\varphi_i, \varphi_i) + \sum_{\alpha} (T\psi_\alpha, \psi_\alpha).$$

С другой стороны, по лемме 6.10 и определению $\mathrm{tr}(T)$

$$\sum_{i=1}^{\infty} (T\varphi_i, \varphi_i) = \lim_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{n_j} (T\varphi_i, \varphi_i) = \lim_{j\to\infty} \mathrm{tr}(T \mid \mathfrak{H}_j) =$$
$$= \lim_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{n_j} \lambda_i(T) = \mathrm{tr}(T).$$

Таким образом, для доказательства равенства $\widetilde{\mathrm{tr}}(T) = \mathrm{tr}(T)$ мы должны лишь показать, что вторая сумма в формуле [*] равна нулю.

Так как подпространство $\mathfrak{H}_\infty$ инвариантно относительно T, то подпространство $\mathfrak{H}^\perp = (\mathfrak{H}_\infty)^\perp$ инвариантно относительно T^*. По лемме 13 (b) имеем

$$\sum_{\alpha} (T\psi_\alpha, \psi_\alpha) = \sum_{\alpha} \overline{(T^*\psi_\alpha, \psi_\alpha)} = \overline{\widetilde{\mathrm{tr}}(T^* \mid \mathfrak{H}^\perp)}.$$

Если бы вполне непрерывный оператор $T^* \mid \mathfrak{H}^\perp$ не был квазинильпотентным, то по теореме VII.4.5 существовали бы такое ненулевое комплексное число μ и такой ненулевой вектор $x \in \mathfrak{H}^\perp$, что $T^*x = \mu x$. Поэтому снова по теореме VII.4.5 мы имели бы $E(\mu; T^*)\,\mathfrak{H}^\perp \neq \{0\}$. Из абзаца, следующего за определением

VII.3.17, леммы VI.2.10 и определения VII.3.9 вытекает, что

$$E(\mu;\ T^*) = E(\bar{\mu};\ T)^*.$$

Следовательно, мы имели бы $E(\bar{\mu};\ T)^*\mathfrak{H}^{\perp} \neq \{0\}$, т. е. $(\mathfrak{H}^{\perp},\ E(\bar{\mu};\ T)\mathfrak{H}) \neq 0$. Но это невозможно, ибо $E(\mu;\ T)\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{H}_\infty = (\mathfrak{H}^{\perp})^{\perp}$. Отсюда следует, что оператор $T^* \mid \mathfrak{H}^{\perp}$ квазинильпотентен; поэтому по предыдущей лемме $\widetilde{\operatorname{tr}}(T^* \mid \mathfrak{H}^{\perp}) = 0$. Это завершает доказательство того, что $\widetilde{\operatorname{tr}}(T) = \operatorname{tr}(T)$ для всех $T \in C_1$. Сформулируем этот важный результат в виде отдельной теоремы.

19. Теорема. *Функционал* $\operatorname{tr}(T)$ *непрерывен и линеен на* C_1. *Для всех* $T \in C_1$ *справедливо равенство* $\operatorname{tr}(T) = \widetilde{\operatorname{tr}}(T)$, *где* $\widetilde{\operatorname{tr}}(T)$ — *выражение из леммы* 13(b).

Теперь мы остановимся на уточнении других неравенств леммы 9.

20. Лемма. *Пусть* $A_1 \in C_{r_1}$, $A_2 \in C_{r_2}$, $A_3 \in C_{r_3}$, *где* $r_1^{-1} + r_2^{-1} + r_3^{-1} = 1$. *Тогда*

(a) $|\operatorname{tr}(A_1A_2A_3)| \leqslant |A_1|_{r_1} |A_2|_{r_2} |A_3|_{r_3}$.

(b) *Если* $r^{-1} = r_1^{-1} + r_2^{-1}$, $r_1,\ r_2,\ r \geqslant 1$, *то* $|A_1A_2|_r \leqslant |A_1|_{r_1} |A_2|_{r_2}$.

Доказательство. По лемме 11, а также в силу непрерывности $\operatorname{tr}(T)$ при $T \in C_1$, непрерывности произведения TS, отмеченной в абзаце, следующем за леммой 9, и непрерывности нормы, следующей из неравенства треугольника леммы 14(d), можно, не ограничивая общности, считать, что все рассматриваемые операторы имеют конечномерные области значений. По тем же соображениям, что и в третьем абзаце доказательства леммы 6, можно считать, что наше гильбертово пространство имеет конечную размерность d. Лемма 14(a) показывает, что (b) немедленно следует из (a). Таким образом, мы должны доказать лишь трилинейное неравенство (a) для операторов в d-мерном гильбертовом пространстве.

Рассуждая так же, как в абзаце доказательства леммы 14, следующем за формулой (3), где мы доказали билинейное неравенство, вполне аналогичное рассматриваемому здесь трилинейному, мы видим, что достаточно доказать неравенство

$$|\operatorname{tr}(D_1U_1D_2U_2D_3U_3)| \leqslant |D_1|_{r_1} |D_2|_{r_2} |D_3|_{r_3}, \tag{1}$$

где U_i — унитарные, а D_i — положительные диагональные матрицы. Из теоремы Рисса о выпуклости (точнее, из леммы VI.10.7) следует, что для доказательства справедливости неравенства (1) достаточно доказать его в трех частных случаях: $r_1 = 1$, $r_2 = \infty$, $r_3 = \infty$; $r_1 = \infty$, $r_2 = 1$, $r_3 = \infty$ и $r_1 = \infty$, $r_2 = \infty$, $r_3 = 1$. Но неравенство

$$|\operatorname{tr}(D_1U_1D_2U_2D_3U_3)| \leqslant |D_1|_1 |D_2|_\infty |D_3|_\infty$$

(и два другие, аналогичные ему) немедленно следует из леммы 9(d) и следствия 8.

Теперь можно приступить к главной цели настоящего параграфа — выводу неравенств для резольвенты оператора из C_p, обобщающих неравенство Карлемана, установленное в теореме 6.27. Сначала введем соответствующее семейство обобщенных определителей.

21. Определение. Пусть $0 \leqslant p \leqslant k$, где k — целое число не меньше 1, и пусть $T \in C_p$. Пусть $\lambda_i = \lambda_i(T)$, $i \geqslant 1$. Тогда

$$\det_k(I+T) = \prod_{i=1}^{\infty} \left\{(1+\lambda_i)\exp\left(-\lambda_i + \frac{\lambda_i^2}{2} - \ldots + \frac{(-1)^{k-1}}{k-1}\lambda_i^{k-i}\right)\right\}.$$

22. Лемма. *Пусть p и k такие же, как в определении* 21.

(a) *Произведение, определяющее* $\det_k(I+T)$, *абсолютно сходится.*

(b) $\det_k(I+T)$ *является непрерывной на C_p функцией от T.*

(c) *Если $T' \in C_p$, то* $\det_k(I+T+zT')$ *является целой аналитической функцией комплексного переменного z, причем все производные этой функции непрерывно зависят от T и T'.*

(d) *Если $k-1 \leqslant p \leqslant k$, то существует такая конечная постоянная Γ, зависящая только от k и p, что*

$$|\det_k(I+T)| \leqslant \exp(\Gamma |T|_p^p).$$

(e) *Если $k \geqslant 2$ и $p \leqslant k-1$, то*

$$\det_k(I+T) = \exp\left(\frac{(-1)^{k-1}}{k-1}\operatorname{tr}(T^{k-1})\right)\det_{k-1}(I+T).$$

(f) $\det_1(I+T)$ *совпадает с функцией* $\det(I+T)$ *из леммы* 16.

Доказательство. Очевидно, что

$$\left|\log(1+\lambda) - \lambda + \frac{\lambda^2}{2} - \ldots + \frac{(-1)^{k-1}}{k-1}\lambda^{k-1}\right| = \begin{cases} O(|\lambda|^k) \text{ при } |\lambda| \to 0, \\ O(|\lambda|^{k-1}) \text{ при } |\lambda| \to \infty. \end{cases}$$

Поэтому, используя элементарное неравенство $|e^z - 1| \leqslant |z| e^{|z|}$, находим, что для некоторой достаточно большой постоянной Γ

$$(1)\qquad \left|(1+\lambda)\exp\left(-\lambda + \ldots + \frac{(-1)^{k-1}}{k-1}\lambda^{k-1}\right) - 1\right| \leqslant \leqslant \Gamma \frac{|\lambda|^k}{1+|\lambda|}\exp\left(\Gamma \frac{|\lambda|^k}{1+|\lambda|}\right)$$

как в окрестности $\lambda=0$, так и в окрестности $\lambda=\infty$. Поскольку в ограниченной области, не содержащей точку $\lambda=0$, правая часть этого неравенства не обращается в нуль, а функция, стоящая в левой части, ограничена, то можно, увеличивая Γ, считать, что неравенство (1) имеет место для всех λ.

Аналогично если $k-1\leqslant p\leqslant k$, то можно найти такую постоянную Γ, зависящую лишь от p, что

$$(2)\qquad \left|(1+\lambda)\exp\left(-\lambda+\dots+\frac{(-1)^{k-1}}{k-1}\lambda^{k-1}\right)\right|\leqslant\exp(\Gamma|\lambda|^p).$$

Следовательно, абсолютная сходимость произведения, определяющего $\det_k(I+T)$, вытекает из сходимости ряда

$$(3)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\lambda_n|^k}{1+|\lambda_n|}\exp\left(\Gamma\frac{|\lambda_n|^k}{1+|\lambda_n|}\right).$$

Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|^k<\infty$, то все величины $|\lambda_n|$, кроме, быть может, конечного числа, не превосходят 1; значит, если ряд $\sum|\lambda_n|^k$ сходится, то сходится и ряд (3). Поэтому по следствию 7 произведение из определения 21 абсолютно сходится, если $T\in C_p$ и $p\leqslant k$. Это доказывает справедливость утверждения (a).

Справедливость оценки (d) при $k-1\leqslant p\leqslant k$ следует из неравенства (2).

Если $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|\lambda_i(T)|^k<\infty$, то по уже доказанному произведения, определяющие $\det_k(I+T)$ и $\det_{k+1}(I+T)$, сходятся, и прямо из определения 21 получаем, что

$$\det_k(I+T)\exp\left\{\frac{(-1)^k}{k}\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^k\right\}=\det_{k+1}(I+T).$$

Отсюда сразу вытекает (e), ибо по теореме об отображении спектра (VII.3.19) $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\lambda_i^k=\operatorname{tr}(T^k)$.

Докажем теперь пункт (b). При $|\lambda|\leqslant1$, увеличивая, если необходимо, постоянную Γ, неравенство (1) можно записать в виде

$$(4)\qquad \left|(1+\lambda)\exp\left(-\lambda+\dots+\frac{(-1)^{k-1}}{k-1}\lambda^{k-1}\right)-1\right|\leqslant\Gamma|\lambda|^k.$$

Заметим, что из тождества

$$a_1\dots a_n-1=(a_1-1)a_2\dots a_n+(a_2-1)a_3\dots a_n+\dots+(a_n-1)$$

и очевидного неравенства $|1+x| \leqslant e^{|x|}$ следует, что

$$\left|\prod_{n=1}^{\infty}(1+\alpha_n)-1\right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|\right)\exp\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|\right).$$

Поэтому если все числа $|\lambda_i|$ меньше 1, то

$$\left|\prod_{i=1}^{\infty}\left\{(1+\lambda_i)\exp\left(-\lambda_i+\ldots+\frac{(-1)^{k-1}}{k-1}\lambda_i^{k-1}\right)\right\}-1\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left\{\Gamma\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda_i|^k\right\}\exp\left\{\Gamma\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda_i|^k\right\}.$$

Если $\lambda_i(m)$ — такое семейство последовательностей, зависящих от натурального параметра m, что

(I) $\lambda_i(m) \to \lambda_i$ равномерно по i при $m \to \infty$,

(II) $\lim\limits_{r\to\infty}\sum\limits_{i=r}^{\infty}|\lambda_i(m)|^k = 0$ равномерно по m,

то

(III) суммы $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|\lambda_i(m)|^k$ ограничены постоянной, не зависящей от m, и

(IV) $\lambda_i(m) \to 0$ при $i \to \infty$ равномерно по m.

Поэтому, в силу полученного выше неравенства, для такого семейства последовательностей

$$\lim_{r\to\infty}\prod_{i=r+1}^{\infty}\left\{(1+\lambda_i(m))\exp\left(-\lambda_i(m)+\ldots+\frac{(-1)^{k-1}}{k-1}\lambda_i^{k-1}(m)\right)\right\}=1$$

равномерно по m, так что

$$\prod_{i=1}^{r}\left\{(1+\lambda_i(m))\exp\left(-\lambda_i(m)+\ldots+\frac{(-1)^{k-1}}{k-1}\lambda_i^{k-1}(m)\right)\right\} \to$$
$$\to \prod_{i=1}^{\infty}\left\{(1+\lambda_i(m))\exp\left(-\lambda_i(m)+\ldots+\frac{(-1)^{k-1}}{k-1}\lambda_i^{k-1}(m)\right)\right\}$$

равномерно по m при $r \to \infty$. С другой стороны, в силу (I)

$$\lim_{m\to\infty}\prod_{i=1}^{r}\left\{(1+\lambda_i(m))\exp\left(-\lambda_i(m)+\ldots+\frac{(-1)^{k-1}}{k-1}\lambda_i^{k-1}(m)\right)\right\}=$$
$$=\prod_{i=1}^{r}\left\{(1+\lambda_i)\exp\left(-\lambda_i+\ldots+\frac{(-1)^{k-1}}{k-1}\lambda_i^{k-1}\right)\right\}.$$

Поскольку порядок двух последовательных предельных переходов можно изменить, если при одном из них сходимость равномерна, из (I) и (II) следует, что

$$\lim_{m\to\infty}\prod_{i=1}^{\infty}\left\{(1+\lambda_i(m))\exp\left(-\lambda_i(m)+\ldots+\frac{(-1)^{k-1}}{k-1}\lambda_i^{k-1}(m)\right)\right\}=$$

$$=\prod_{i=1}^{\infty}\left\{(1+\lambda_i)\exp\left(-\lambda_i+\ldots+\frac{(-1)^{k-1}}{k-1}\lambda_i^{k-1}\right)\right\}.$$

Так как

$$\sum_{i=r}^{\infty}|\lambda_i(m)|^k\leqslant\max_{i\geqslant r}|\lambda_i(m)|^{\varepsilon}\sum_{i=r}^{\infty}|\lambda_i(m)|^{k-\varepsilon},$$

то свойства (I), (II) вытекают из следующих свойств (I′), (II′):

(I′) $\lambda_i(m)\to\lambda_i$ равномерно по i при $m\to\infty$,

(II′) суммы $\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda_i(m)|^{k-\varepsilon}$ ограничены постоянной, не зависящей от m.

Поэтому, используя определение 21, лемму 5 и следствие 7, находим, что

$$\det{}_k(I+T_m)\to\det{}_k(I+T),$$

если T_m, $T\in C_{k-\varepsilon}$ и $T_m\to T$ в топологии пространства $C_{k-\varepsilon}$. Это доказывает утверждение (b) при $p<k$.

Для того чтобы справиться с предельным случаем $p=k$, заметим, что если $T_m\to T$ в топологии пространства C_k, то из уже доказанного следует, что

$$\det{}_{k+1}(I+T_m)\to\det{}_{k+1}(I+T).$$

Но, согласно (e),

$$\det{}_{k+1}(I+T_m)=\exp\left(\frac{(-1)^k}{k}\operatorname{tr}(T_m^k)\right)\det{}_k(I+T_m),$$

$$\det{}_{k+1}(I+T)=\exp\left(\frac{(-1)^k}{k}\operatorname{tr}(T^k)\right)\det{}_k(I+T).$$

По замечанию, сделанному после доказательства леммы 9, $T_m^k\to T^k$ в топологии пространства C_1; но тогда по теореме 19 $\operatorname{tr}(T_m^k)\to\operatorname{tr}(T^k)$. Следовательно, (b) справедливо и при $p=k$.

Поскольку ограниченная сходящаяся последовательность аналитических функций сходится равномерно вместе со всеми производными, то из утверждения (b) и леммы 11 следует, что для доказательства утверждения (c) в общем случае достаточно рассмотреть частный случай, когда оба оператора T, T' конечномерны. Соображения, высказанные в третьем абзаце доказательства леммы 6, сводят этот случай к случаю, когда конечномерно гильбертово пространство. Так как определитель (в обычном смысле) матрицы T в d-мерном гильбертовом пространстве равен произведению ее собственных значений, а след — сумме собственных значений, то

$$\prod_{i=1}^{d}\left\{(1+\lambda_i(T))\exp\left(-\lambda_i(T)+\ldots+\frac{(-1)^{k-1}}{k-1}\lambda_i^{k-1}(T)\right)\right\}=$$
$$=\det(I+T)\exp\left(-\operatorname{tr}(T)+\ldots+\frac{(-1)^{k-1}}{k-1}\operatorname{tr}(T^{k-1})\right).$$

Ясно, что последнее выражение зависит от элементов конечной матрицы T аналитически; таким образом, (c) доказано.

В ходе доказательства леммы 16 мы видели (см. замечание, следующее за этой леммой), что функция $\det(I+T)$ непрерывна по T. Поэтому, согласно (b) и лемме 11, для доказательства утверждения (f) в общем случае достаточно проверить его справедливость в частном случае, когда оператор T конечномерен. Рассуждения третьего абзаца доказательства леммы 6 позволяют свести этот случай к случаю оператора в конечномерном гильбертовом пространстве. Но в этом последнем случае каждая из функций $\det_1(I+T)$ и $\det(I+T)$ совпадает с обычным определителем матрицы $I+T$. Для $\det_1(I+T)$ это было установлено только что, а для $\det(I+T)$ это было показано в предпоследнем абзаце доказательства леммы 16. Таким образом, утверждение (f) справедливо, и лемма доказана.

В следующей лемме приводится формула дифференцирования, являющаяся ключом наших дальнейших построений.

23. Лемма. *Пусть k — целое число, не меньшее 2, и пусть T, $B\in C_k$. Тогда если $(-1)\notin\sigma(T)$, то*

[*]
$$\frac{d}{dz}\det_k(I+T+zB)\,|_{z=0}=$$
$$=\det_k(I+T)\operatorname{tr}[\{(I+T)^{-1}-I+\ldots+(-1)^{k-1}T^{k-2}\}B].$$

Доказательство. Заметим сначала, что так как функция $g(\zeta)=$ $=(1+\zeta)^{-1}-1+\ldots+(-1)^{k-1}\zeta^{k-2}$ имеет $(k-1)$-кратный нуль при $\zeta=0$ и аналитична на спектре оператора T, то ее можно представить в виде $g(\zeta)=h(\zeta)\zeta^{k-2}$, где функция $h(\zeta)$ аналитична на $\sigma(T)$, а в нуле равна 0. Следовательно,

$$g(T)=(I+T)^{-1}-I+\ldots+(-1)^{k-1}T^{k-2}=T^{k-2}h(T).$$

Согласно лемме 15 и замечаниям, следующим за леммой 9, отсюда вытекает, что если $T_n\to T$ и $B_n\to B$ в топологии пространства

C_k, то $g(T_n) \to g(T)$ в топологии пространства $C_{k/(k-1)}$, в то время как $g(T_n) B_n \to g(T) B$ в топологии пространства C_1. Поэтому по теореме 19 след в правой части формулы [*] определен и непрерывен по T и B. В силу утверждения (с) предыдущей леммы и по лемме 11 для доказательства справедливости формулы [*] в общем случае достаточно рассмотреть лишь частный случай, когда T и B имеют конечномерные области значений. Рассуждая, как в третьем абзаце доказательства леммы 6, мы сводим этот случай к случаю гильбертова пространства конечной размерности n. В этом последнем случае, как мы видели в конце доказательства предыдущей леммы,

$$\det_k (I+T+zB) =$$
$$= \det(I+T+zB) \exp\left\{\operatorname{tr}\left[-(T+zB)+\ldots+\frac{(-1)^{k-1}}{k-1}(T+zB)^{k-1}\right]\right\}.$$

Так как

$$\frac{d}{dz}(T+zB)^j|_{z=0} = \sum_{l=0}^{j-1} T^l B T^{j-1-l},$$

то

$$\frac{d}{dz}\operatorname{tr}((T+zB)^j)|_{z=0} = j\operatorname{tr}(T^{j-1}B).$$

Поэтому

$$['] \frac{d}{dz}\exp\left\{\operatorname{tr}\left[-(T+zB)+\ldots+\frac{(-1)^{k-1}}{k-1}(T+zB)^{k-1}\right]\right\}\Big|_{z=0} =$$
$$= \exp\left\{\operatorname{tr}\left[-T+\ldots+\frac{(-1)^{k-1}}{k-1}T^{k-1}\right]\right\}\times$$
$$\times \operatorname{tr}\left[\left(-I+\ldots+(-1)^{k-1}T^{k-2}\right)B\right].$$

С другой стороны, если (a_{ij}) и (b_{ij}) — матрицы линейных преобразований A и B в n-мерном пространстве, то, поскольку определитель является линейной функцией каждой своей строки, мы имеем

$$\frac{d}{dz}\det(A+zB)|_{z=0} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \ldots & a_{n-1,n} \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, применяя формулу разложения Лагранжа и формулу Крамера для обратной матрицы, получаем

$$\frac{d}{dz}\det(A+zB)|_{z=0} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\gamma_{ji} = \det(A)\operatorname{tr}(A^{-1}B),$$

где γ_{ij} обозначает алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A. Подставляя $A=I+T$ и учитывая [′], мы сразу получаем формулу [*].

Замечание. Утверждение (с) леммы 22 показывает, что выражение в левой части формулы [*] непрерывно по T и B. Таким образом, функция, стоящая в правой части формулы [*], может быть доопределена по непрерывности для всех T независимо от того, принадлежит точка -1 спектру оператора T или нет. Это соответствует следующему факту: так как $\det_k(I+\mu T)$ имеет n-кратный нуль в каждой точке μ, для которой $\lambda=-\mu^{-1}\in\sigma(T)$ является n-кратным собственным значением, тогда как $(I+\mu T)^{-1}$ в такой точке имеет полюс порядка не выше n (см. VII.3.20, VII.3.18), то функция

$$\det_k(I+T)(I+T)^{-1}-I+\ldots+(-1)^{k-1}T^{k-2}$$

может быть доопределена по непрерывности и для тех операторов T, для которых $(-1)\in\sigma(T)$. В дальнейшем мы будем свободно пользоваться этим замечанием, явно этого не оговаривая.

Теперь совсем легко вывести обобщенное неравенство Карлемана.

24. Теорема. *Пусть k — целое число не меньше 2, и пусть $k-1\leqslant p\leqslant k$. Тогда существует такая постоянная* Γ, *зависящая лишь от p, что*

$$|\det_k(I+T)\{(I+T)^{-1}-I+\ldots+(-1)^{k-1}T^{k-2}\}|_q\leqslant\exp(\Gamma(|T|_p^p+1)),$$

где $p^{-1}+q^{-1}=1$.

25. Следствие. *Если $k\geqslant 2$ — целое число и $k-1\leqslant p\leqslant k$, то существует такая постоянная* Γ, *зависящая лишь от p, что*

$$|\det_k(I+T)(I+T)^{-1}|\leqslant\exp(\Gamma(|T|_p^p+1)).$$

Доказательство теоремы 24. Используя формулу леммы 23 и формулу дифференцирования

$$f'(0)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)}{\zeta^2}\,d\zeta$$

из теории функций комплексного переменного, получаем

$$\det_k(I+T)\operatorname{tr}[\{(I+T)^{-1}-I+\ldots+(-1)^{k-1}T^{k-2}\}B]=$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\zeta^{-2}\det_k(I+T+\zeta B)\,d\zeta.$$

Таким образом, по лемме 22 (d) существуют такие постоянные Γ и Γ', зависящие лишь от p, что

$$|\operatorname{tr}[\det_k(I+T)\{(I+T)^{-1}-I+\ldots+(-1)^{k-1}T^{k-2}\}B]|\leqslant$$
$$\leqslant \exp\{\Gamma'(|T|_p+|B|_p)^p\}\leqslant \exp(\Gamma(|T|_p^p+1))$$

при $B\in C_p$ и $|B|_p\leqslant 1$. Поэтому теорема 24 немедленно следует из леммы 14 (a).

Доказательство следствия 25. Справедливость этого следствия вытекает из теоремы 24 и леммы 9, ибо существует такая постоянная Γ, зависящая лишь от p, что

$$|T^j|\leqslant|T^j|_p\leqslant \exp(\Gamma(|T|_p^p+1)),\qquad j=1,\ldots,k-2.$$

При $0<p\leqslant 1$ нельзя рассуждать точно так же, как выше, но некоторая модификация нашего метода доказательства позволяет и в этом случае без труда получить соответствующие результаты.

$\longrightarrow$ 26. Теорема. *Пусть* $0<p\leqslant 1$. *Тогда существует такая постоянная* Γ, *зависящая лишь от* p, *что*

$$|\det(I+T)(I+T)^{-1}|\leqslant \exp(\Gamma|T|_p^p).$$

Доказательство. Из того что $(I+\mu T)^{-1}$ зависит от μ аналитически, сразу следует, что достаточно доказать нашу теорему в случае, когда $(-1)\notin\sigma(T)$. Если $T_n\longrightarrow T$ в топологии пространства C_p, то по лемме 9 (a) и определению 1 (b) $T_n\longrightarrow T$ равномерно, так что при условии $(-1)\notin\sigma(T)$ выражение

$$|\det(I+T_n)(I+T_n)^{-1}|$$

стремится к выражению, стоящему в левой части доказываемого неравенства. По леммам 11 и 9 (b) достаточно доказать нашу теорему в частном случае, когда оператор T имеет конечномерную область значений. Соображения, аналогичные изложенным в третьем абзаце доказательства леммы 6, показывают, что можно ограничиться случаем конечномерного гильбертова пространства. В действительности мы покажем, что для невырожденного оператора S в d-мерном гильбертовом пространстве

$$(1)\qquad |(\det S)S^{-1}|\leqslant\prod_{i=1}^{d-1}\mu_i(S).$$

Отсюда будет следовать справедливость нашей теоремы, так как по следствию 3 $\mu_i(I+T)\leqslant 1+\mu_i(T)$ и так как при $p\leqslant 1$ существует такая постоянная Γ, зависящая только от p, что

$$1+|\mu|\leqslant e^{\Gamma|\mu|^p}.$$

Поскольку в третьем абзаце доказательства леммы 14 мы показали, что $S=UMU'$, где U и U' — унитарные, а M — диагональная матрица с элементами $\mu_1(S), \ldots, \mu_d(S)$, можно при доказательстве неравенства (1) без ограничения общности считать, что $S=M$. Но тогда $(\det M)M^{-1}$ — также диагональная матрица, причем ее n-й диагональный элемент равен

$$\prod_{\substack{i=1\\ i\neq n}}^{d} \mu_i(S).$$

Так как числа $\mu_i(S)$ занумерованы в порядке убывания, то наибольший из диагональных элементов матрицы $(\det M)M^{-1}$ совпадает с выражением, стоящим в правой части неравенства (1), что доказывает теорему.

В частном случае квазинильпотентного оператора из теорем 26 и 24 вытекает следующее следствие.

27. Следствие. *Пусть N — квазинильпотентный оператор и $N\in C_p$, где $0<p<\infty$. Тогда в окрестности точки $\lambda=0$ резольвента $R(\lambda;\ N)$ допускает оценку*

$$|R(\lambda;\ N)|\leqslant e^{\Gamma|\lambda|^{-p}},$$

где Γ — некоторая конечная постоянная, зависящая от p и N.

Теперь доказательство теоремы 6.29 без труда может быть перенесено на случай вполне непрерывного оператора из класса C_p. Это доказательство основывалось на неравенстве из следствия 6.28, непосредственным обобщением которого является неравенство из предыдущего следствия, и на теореме Фрагмена — Линделёфа (лемма 6.33). Нужная нам здесь общая формулировка теоремы Фрагмена — Линделёфа такова.

28. Лемма (*Фрагмен — Линделёф*). *Пусть g — функция комплексного переменного z, аналитическая внутри углового сектора σ, ограниченного двумя непересекающимися дифференцируемыми жордановыми дугами γ_1 и γ_2, выходящими из начала координат и образующими угол, меньший π/p. Предположим, что функция g аналитична также в окрестности каждой из полуоткрытых дуг $\gamma_1-\{0\}$ и $\gamma_2-\{0\}$, ограничена на каждой из этих полуоткрытых дуг и $|g(z)|=O(\exp|z|^{-p})$, когда $z\to 0$, оставаясь внутри сектора σ. Тогда $|g(z)|=O(1)$, когда $z\to 0$, оставаясь внутри σ.*

Доказательство. Применить лемму 6.33 к функции $h(z)=$ $=g(z^{2/p})$.

Теперь, имея следствия 27 и 28, можно воспользоваться доказательством теоремы 6.29, для того чтобы получить следующую теорему.

29. Теорема. *Пусть $0 < p < \infty$, и пусть $T \in C_p$. Пусть $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ — семейство непересекающихся дифференцируемых дуг на комплексной плоскости, выходящих из начала координат. Допустим, что каждая из s областей, на которые эти дуги делят плоскость, содержится в секторе с вершиной в начале и углом раствора, меньшим π/p. Пусть $N > 0$ — целое число, и пусть резольвента оператора T допускает оценку*

$$|R(\lambda;\ T)| = O(|\lambda|^{-N}),$$

когда $\lambda \to 0$ вдоль какой-нибудь из дуг γ_i. Тогда подпространство $\mathrm{sp}(T)$ содержит подпространство $T^N\mathfrak{H}$.

Весьма незначительные изменения доказательства теоремы 6.29, необходимые для получения доказательства теоремы, сформулированной выше, мы оставляем читателю.

Заметим, что число дуг s должно быть не менее $[2p]+1$.

30. Следствие. *Предположим, что, когда λ стремится к нулю вдоль какой-нибудь из дуг γ_i предыдущей теоремы, резольвента оператора T допускает оценку $|R(\lambda;\ T)| = O(|\lambda|^{-1})$. Тогда подпространство $\mathrm{sp}(T)$ совпадает со всем гильбертовым пространством $\mathfrak{H}$.*

31. Следствие. *Пусть T — неограниченный оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ со всюду плотной областью определения, и пусть $0 < p < \infty$. Допустим, что для некоторого λ_0 из резольвентного множества оператора T резольвента $R(\lambda_0;\ T)$ принадлежит классу C_p. Пусть $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ — непересекающиеся дифференцируемые дуги, каждая из которых имеет предельное направление на бесконечности; предположим, что угол, образованный в бесконечности любой парой соседних дуг, меньше π/p. Допустим, что, когда $\lambda \to \infty$ вдоль какой-нибудь из дуг γ_i, резольвента $R(\lambda;\ T)$ допускает оценку $|R(\lambda;\ T)| = O(|\lambda|^N)$. Тогда подпространство $\mathrm{sp}(T)$ совпадает со всем гильбертовым пространством $\mathfrak{H}$.*

Доказательство следствия 30 слово в слово совпадает с доказательством следствия 6.30; доказательство следствия 31 отличается от доказательства следствия 6.31 лишь незначительными деталями; их мы оставляем читателю.

Для того чтобы применять предыдущие теоремы, необходимо иметь критерии, обеспечивающие принадлежность данного оператора классу C_p. Ниже приводится ряд простых условий такого рода.

32. Лемма. *Пусть* $0<p\leqslant 2$. *Пусть* $\{\varphi_\alpha\}$ — *полное ортонормальное множество в* $\mathfrak{H}$, *а* T — *ограниченный оператор. Если*

$$\{\sum_\alpha |T\varphi_\alpha|^p\}^{1/p}<\infty,$$

то $T\in C_p$.

Доказательство. При $p=2$ справедливость леммы следует из определения 6.1. Пусть $p<2$, и пусть $\gamma_\alpha=|T\varphi_\alpha|$. Определим оператор B равенствами $B\varphi_\alpha=(T\varphi_\alpha)\gamma_\alpha^{p/2-1}$. Тогда ясно, что

$$\sum_\alpha |B\varphi_\alpha|^2=\sum_\alpha (\gamma_\alpha^{p/2})^2<\infty,$$

так что по определению 6.1 оператор B принадлежит классу C_2 операторов Гильберта — Шмидта. Если положить $A\varphi_\alpha=\gamma_\alpha^{1-p/2}\varphi_0$, то ясно, что оператор A самосопряжен и принадлежит классу C_r, где $r(1-p/2)=p$, т. е. $r=p(1-p/2)^{-1}$. Таким образом, по лемме 9 оператор $T=BA$ принадлежит классу C_s, где $s^{-1}=$ $=1/2+(1-p/2)p^{-1}=p^{-1}$, т. е. T принадлежит C_p, ч. т. д.

Если оператор A действует в пространстве $L_2(0, 2\pi)$ и отображает e^{inx} в $(in)^{-1}$ при $n\neq 0$, а $1=e^{i0\pi}$ в $-x$, то его область значений двумерна и

$$\int_0^x e^{iny}\,dy=\begin{cases}\dfrac{1}{in}e^{inx}-A(e^{inx}), & n\neq 0,\\ 0-A(e^{inx}), & n=0.\end{cases}$$

Отсюда, очевидно, следует, что оператор интегрирования принадлежит каждому из классов $C_{1+\varepsilon}$ (но не классу C_1)[1]). Поэтому, например, если $K(x, y)$ — такое ядро типа Гильберта — Шмидта, что

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\partial}{\partial y}K(x, y)\right|^2 dx\,dy<\infty,$$

то

$$\int_0^{2\pi}K(x, y)f(y)\,dy=$$

$$=-\int_0^{2\pi}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial y}K(x, y)\right)\int_0^y f(t)\,dt\right\}dy+K(x, 2\pi)\int_0^{2\pi}f(y)\,dy,$$

[1]) Легко показать, что если $I_{2\pi}$ — оператор интегрирования в $L_2(0, 2\pi)$, то $\mu_k(I_{2\pi})=4(2k-1)^{-1}$, $k=1, 2, \ldots$. — *Прим. перев.*

так что по лемме 9 $K \in C_r$, где $r^{-1} = 2^{-1} + (1+\varepsilon)^{-1}$; таким образом, $K \in C_{2/3+\varepsilon}$ для любого ε. Аналогично, если

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \left| \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^s K(x, y) \right|^2 dx\, dy < \infty, \qquad 0 \leqslant s \leqslant k,$$

то K принадлежит классу $C_{2/(2k+1)+\varepsilon}$. Если

$$\sup_{0\leqslant y\leqslant 2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \left| \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^s K(x, y) \right| + \left| \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^s K(y, x) \right| \right\} dx < \infty,$$
$$0 \leqslant s \leqslant k,$$

то таким же образом можно показать, что K принадлежит классу $C_{1/k+\varepsilon}$.

Аналогичные результаты легко получить прямой оценкой характеристических чисел $\mu_n(T)$. Предположим, например, что ядро K удовлетворяет условию Гёльдера

$$(1) \qquad h^{-\alpha} \left\{ \int_0^1 |K(x, y+h) - K(x, y)|^2 dx \right\}^{1/2} \leqslant \Gamma,$$
$$0 \leqslant x, \ y \leqslant 1, \qquad h > 0.$$

Тогда если f — функция из $L_2(0, 1)$, удовлетворяющая n линейным условиям

$$(2) \qquad \int_{j/n}^{(j+1)/n} f(x)\, dx = 0, \quad j = 0, \ldots, \quad n-1,$$

то

$$(3) \quad (Kf)(x) = \int_0^1 K(x, y) f(y)\, dy = \int_0^1 \{K(x, y) - K_n(x, y)\} f(y)\, dy,$$

где

$$K_n(x, y) = K\left(x, \frac{j}{n}\right), \quad \frac{j}{n} \leqslant y < \frac{j+1}{n}, \quad 0 \leqslant j \leqslant n-1.$$

Если μ_n — убывающая последовательность положительных чисел, то ясно, что

$$n\mu_n^2 \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^2;$$

поэтому $\mu_n(K) \leqslant n^{-1/2} |K|_2$. Условия (2) можно записать в виде $(f, \varphi_k) = 0$, $k = 1, \ldots, n$, где $\varphi_k(x)$ — характеристическая функция отрезка $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$. В силу леммы 2

$$\mu_{2n}(K) \leqslant \min_{\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}} \max_{\substack{|f|=1 \\ (f, \varphi_1)=\ldots=(f, \varphi_n)=0 \\ (f, \psi_1)=\ldots=(f, \psi_{n-1})=0}} |Kf| =$$

$$= \min_{\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}} \max_{\substack{|f|=1 \\ (f, \varphi_1)=\ldots=(f, \varphi_n)=0 \\ (f, \psi_1)=\ldots=(f, \psi_{n-1})=0}} |(K-K_n) f| \leqslant$$

$$\leqslant \mu_n(K-K_n) \leqslant n^{-1/2}\left\{\int_0^1\int_0^1 |K(x, y)-K_n(x, y)|^2\, dx\, dy\right\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \Gamma\left\{\int_0^{1/n} t^{2\alpha}\, dt\right\}^{1/2} = \Gamma' n^{-1/2-\alpha},$$

т. е.

$$\mu_{2n}(K) \leqslant \Gamma' n^{-1/2-\alpha}. \tag{4}$$

Поэтому $K \in C_p$ при $p(1/2+\alpha) > 1$, т. е. при $p > 2/(1+2\alpha)$.

Много подобных результатов можно найти в работе Хилле и Тамаркина [1].

Аналогичные результаты такого типа для бесконечного интервала можно получить следующим образом. Так как отображение $I_A: f(x) \longrightarrow \int_0^x f(y)\, dy$, действующее в пространстве $L_2(0, A)$, после деления на A связано с формально идентичным ему отображением I_1 в пространстве $L_2(0, 1)$ унитарным преобразованием $f(x) \longrightarrow f(Ax) A^{1/2}$, то из проведенных ранее вычислений следует существование такой постоянной M, что $\mu_n(I_A) \leqslant MAn^{-1}$. Таким образом, если K — такое ядро на $[0, \infty) \times [0, \infty)$, что

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \left\{|K(x, y)|^2 + \left|\frac{\partial}{\partial y} K(x, y)\right|^2\right\} dx\, dy < \infty,$$

то $K = K_B + K'_B I_B$, где K_B и K'_B — интегральные операторы с ядрами

$$K_B(x, y) = K(x, B), \quad y \leqslant B; \quad K_B(x, y) = K(x, y), \quad y > B;$$

$$K'_B(x, y) = 0, \quad y > B; \quad K'_B(x, y) = -\frac{\partial}{\partial y} K(x, y), \quad y \leqslant B.$$

Поэтому в силу следствия 3 и оценки для характеристических чисел оператора Гильберта — Шмидта, использованной выше, имеем

$$\mu_{3n}(K) \leqslant M'Bn^{-3/2} + n^{-1/2}\left\{\int_0^\infty\int_0^\infty |K_B(x, y)|^2\, dx\, dy\right\}^{1/2}.$$

Предположим теперь, что

$$\int_0^\infty \int_0^\infty |K_B(x, y)|^2 \, dx\, dy = O(B^{-\alpha}).$$

Тогда полученное выше неравенство можно записать в виде

$$\mu_{3n}(K) \leqslant M'' n^{-1/2} [Bn^{-1} + B^{-\alpha}],$$

где M'' — некоторая конечная постоянная. Поскольку B мы можем выбрать по своему усмотрению,

$$\mu_{3n}(K) \leqslant M''' n^{-(1/2+\alpha/(\alpha+1))}.$$

Поэтому $K \in C_p$, если $p > (2\alpha+2)/(3\alpha+1)$.

Рассуждения, основанные на формуле (3), легко приспособить к случаю, когда переменные x и y ядра $K(x, y)$ изменяются в ограниченной области d-мерного пространства. В этом случае область следует разделить на n^d подобластей. Поэтому если K удовлетворяет условию Гёльдера (1), то результат, соответствующий неравенству (4), имеет вид

$$\mu_{2n^d}(K) \leqslant \Gamma'' n^{-d/2} n^{-\alpha}.$$

Это неравенство можно записать в форме

$$\mu_n(K) \leqslant \Gamma''' n^{-(1/2+\alpha/d)}.$$

Аналогично если производные по y ядра K до порядка s включительно квадратично интегрируемы, то

$$\mu_n(K) \leqslant \Gamma''' n^{-(1/2+s/d)}.$$

Поэтому $K \in C_p$ при $p > 2d/(d+2\alpha)$ в первом случае и $K \in C_p$ при $p > 2d/(d+2s)$ во втором случае.

10. Субдиагонализация[1]) вполне непрерывных операторов

Всякий эрмитов оператор в конечномерном пространстве может быть приведен к диагональному виду унитарным преобразованием. Как показывает теорема о приведении к жордановой нормальной форме, это утверждение становится неверным, если опустить слово «эрмитов». Неверно даже, что всякая конечная матрица может быть приведена к диагональному виду невырожденным преобразованием. С другой стороны, как показывает доказательство леммы 6.21, каждая конечная матрица может быть приведена унитарным преобразованием к *треугольному* виду. В этом

[1]) В русской литературе чаще употребляется термин «приведение к треугольному виду». В переводе мы пользуемся и тем и другим. — *Прим. перев.*

параграфе мы рассмотрим аналог этого результата для произвольного вполне непрерывного оператора в гильбертовом пространстве. Наше исследование приведет к ряду интересных неравенств, которые позволят получить полезное обобщение результатов предыдущего параграфа. На протяжении данного параграфа мы для простоты изложения предполагаем, что гильбертово пространство сепарабельно[1]).

Представление оператора в треугольном виде связано с изучением его инвариантных подпространств. Таким образом, ключом к ситуации, которую мы хотим исследовать, является следующая общая, интересная и важная теорема Ароншайна и Смита.

→1. Теорема. *Пусть T — вполне непрерывный оператор в B-пространстве $\mathfrak{X}$ размерности больше 1. Тогда в $\mathfrak{X}$ существует такое собственное ненулевое замкнутое подпространство $\mathfrak{Y}$, что $T\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{Y}$.*

Доказательство. Если $\mathfrak{X}$ конечномерно, то результат тривиален, так как в этом случае существует собственный вектор. Поэтому будем считать, что $\mathfrak{X}$ бесконечномерно и не содержит собственных векторов оператора T. Выберем вектор $\bar{x}$ с $|\bar{x}| = 1$. Поскольку замкнутое подпространство $\mathfrak{X}_0$, порожденное векторами $T^i\bar{x}$, $i \geqslant 1$, инвариантно, мы можем предполагать, что $\mathfrak{X}_0 = \mathfrak{X}$. Если бы вектор $T^n\bar{x}$ линейно выражался через векторы множества $A = \{T^{n-1}\bar{x}, \ldots, \bar{x}\}$, то вектор $T^{n+1}\bar{x}$ также выражался бы через векторы из A, равно как и все векторы $T^{n+j}\bar{x}$, так что $\mathfrak{X}$ было бы конечномерным. Резюмируя вышеизложенное, мы можем, без ограничения общности, считать, что

(I) векторы $\bar{x}$, $T\bar{x}$, ... линейно независимы;

(II) замкнутое линейное подпространство, порожденное векторами $\bar{x}$, $T\bar{x}$, ..., совпадает с $\mathfrak{X}$.

Пусть $\mathfrak{X}^{(k)}$ для каждого натурального k означает $(k+1)$-мерное подпространство, порожденное векторами $\bar{x}$, $T\bar{x}$, ..., $T^k\bar{x}$.

---

[1]) Это предположение не слишком обременительно, ибо если $\mathfrak{H}$ — произвольное гильбертово пространство, а T — вполне непрерывный оператор в $\mathfrak{H}$ (именно такие операторы изучаются в основном в этом параграфе), то пространство $\mathfrak{H}$ можно разложить в прямую сумму $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_0$ двух таких ортогональных подпространств $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_0$, что (1) $\mathfrak{H}_1$ *сепарабельно*, инвариантно относительно операторов T, T^* и содержит *все* векторы вида Tx, T^*x ($x \in \mathfrak{H}$); (2) если $x \in \mathfrak{H}_0$, то $Tx = T^*x = 0$. Для доказательства этого утверждения достаточно положить $\mathfrak{H}_0 = \{x \mid Tx = T^*x = 0\}$, $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_0^{\perp}$, и заметить, что тогда $\mathfrak{H}_1 = \overline{\mathrm{sp}}\{T^m x_n \mid m \geqslant 0,\ n \geqslant 1\}$, где x_1, x_2, ... — ортонормальная последовательность собственных векторов вполне непрерывного самосопряженного оператора T^*T, соответствующих всем ненулевым собственным значениям этого оператора. — *Прим. перев.*

Для каждого замкнутого подпространства $\mathfrak{Y}$ пространства $\mathfrak{X}$ и всякого $x \in \mathfrak{X}$ обозначим через $\varrho(x, \mathfrak{Y})$ величину

$$\inf_{y \in \mathfrak{Y}} |x-y|.$$

Тогда легко проверить, что

(III) $\varrho(x+\tilde{x}, \mathfrak{Y}) \leqslant \varrho(x, \mathfrak{Y}) + \varrho(\tilde{x}, \mathfrak{Y})$,

(IV) $\varrho(\alpha x, \mathfrak{Y}) = |\alpha| \varrho(x, \mathfrak{Y})$,

(V) $\varrho(x, \mathfrak{Y}) \leqslant |x|$.

В силу (II) имеем

(VI) $\lim\limits_{k\to\infty} \varrho(x, \mathfrak{X}^{(k)}) = 0, \quad x \in \mathfrak{X}.$

Для каждой последовательности $\mathfrak{Y}_k$ подпространств пространства $\mathfrak{X}$ положим

$$\underline{\lim}\, \mathfrak{Y}_k = \{x \mid \lim_{k\to\infty} \varrho(x, \mathfrak{Y}_k) = 0\}.$$

Из (III), (IV) и (V) легко следует, что $\underline{\lim}\, \mathfrak{Y}_k$ является замкнутым подпространством в $\mathfrak{X}$.

Пусть для всякого подпространства $\mathfrak{Y}$ пространства $\mathfrak{X}$ и всякого x символ $\mathfrak{Y}(x)$ обозначает некоторый вектор $y \in \mathfrak{Y}$, такой, что $|\mathfrak{Y}(x) - x| \leqslant 2\varrho(x, \mathfrak{Y})$. Определим линейное преобразование T_k пространства $\mathfrak{X}^{(k)}$ в себя, полагая

$$T_k(\alpha_0 \bar{x} + \ldots + \alpha_k T^k \bar{x}) = \alpha_0 T\bar{x} + \ldots + \alpha_{k-1} T^k \bar{x} + \alpha_k \mathfrak{X}^{(k)}(T^{k+1}\bar{x}).$$

Ясно, что

$$|(T-T_k)(\alpha_0\bar{x} + \ldots + \alpha_k T^k \bar{x})| \leqslant$$
$$\leqslant 2|\alpha_k| \varrho(T^{k+1}\bar{x}, \mathfrak{X}^{(k)}) = 2\varrho(\alpha_k T^{k+1}\bar{x}, \mathfrak{X}^{(k)}).$$

Таким образом, так как $\varrho(x+y, \mathfrak{Y}) = \varrho(x, \mathfrak{Y})$ для любого $y \in \mathfrak{Y}$, то

(VII) $|(T-T_k)x| \leqslant 2\varrho(Tx, \mathfrak{X}^{(k)}), \quad x \in \mathfrak{X}^{(k)}.$

Так как пространство $\mathfrak{X}^{(k)}$ конечномерно, то лемма 6.21 показывает, что в $\mathfrak{X}^{(k)}$ существует такая возрастающая цепочка подпространств

$$\{0\} = \mathfrak{X}^{(k,0)} \subseteq \mathfrak{X}^{(k,1)} \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{X}^{(k,k)} = \mathfrak{X}^{(k)},$$

что $\mathfrak{X}^{(k,j)}$ имеет размерность j и $T_k \mathfrak{X}^{(k,j)} \subseteq \mathfrak{X}^{(k,j)}$.

Теперь мы докажем, что если k_i, j_i — какая-нибудь пара последовательностей, такая, что $k_i \to \infty$ и $0 \leqslant j_i \leqslant k_i$, то $\mathfrak{Z} = \underline{\lim}\, \mathfrak{X}^{(k_i, j_i)}$ является инвариантным подпространством. В самом деле, предположим, что $z \in \mathfrak{Z}$, так что существует последовательность векторов x_n из $\mathfrak{X}^{(kn, jn)}$, сходящаяся к вектору z при $n \to \infty$. Положим $Tz = u$; тогда $Tx_n \to u$. Кроме того, $T_{kn} x_n \in \mathfrak{X}^{(kn, jn)}$, тогда как в силу (III)—(VII)

$$\begin{aligned}|u - T_{kn} x_n| &\leqslant |u - Tx_n| + |(T - T_{kn}) x_n| \leqslant \\ &\leqslant |u - Tx_n| + 2\varrho(Tx_n, \mathfrak{X}^{(kn)}) \leqslant \\ &\leqslant |u - Tx_n| + 2\varrho(u - Tx_n, \mathfrak{X}^{(kn)}) + 2\varrho(u, \mathfrak{X}^{(kn)}) \leqslant \\ &\leqslant 3|u - Tx_n| + 2\varrho(u, \mathfrak{X}^{(kn)}) \to 0,\end{aligned}$$

что доказывает наше утверждение.

Заметим, что в действительности мы доказали несколько более сильное утверждение, а именно:

(VIII) если $\mathfrak{Z} = \underline{\lim}\, \mathfrak{X}^{(kn, jn)}$ и $u = \lim Tx_n$, где $x_n \in \mathfrak{X}^{(kn, jn)}$, то $u \in \mathfrak{Z}$.

Осталось лишь построить такие последовательности k_n, j_n, для которых инвариантное подпространство $\mathfrak{Z}$ отлично от $\{0\}$ и от $\mathfrak{X}$. Это делается так.

Выберем $\alpha > 0$ столь малым, что $\alpha < 1$ и $|T\bar{x}| > \alpha |T|$. Поскольку $\bar{x} \in \mathfrak{X}^{(k)} = \mathfrak{X}^{(k, k)}$ для всех k, то числа $\varrho(\bar{x}, \mathfrak{X}^{(k, 0)}), \ldots, \varrho(\bar{x}, \mathfrak{X}^{(k, k)})$ убывают от 1 до 0. Таким образом, для каждого k существует единственное $j(k)$, для которого

(IX) $\varrho(\bar{x}, \mathfrak{X}^{(k, j(k))}) \geqslant \alpha > \varrho(\bar{x}, \mathfrak{X}^{(k, j(k)+1)})$.

Выберем такую последовательность $x_n \in \mathfrak{X}^{(n, j(n)+1)}$, что $|x_n - \bar{x}| \leqslant \alpha$. Тогда найдется такая подпоследовательность x_{k_i}, что Tx_{k_i} сильно сходится к некоторому элементу y (поскольку оператор T вполне непрерывен). Положим $\mathfrak{Z}_i = \mathfrak{X}^{(k_i, j(k_i))}$, $\mathfrak{Z}'_i = \mathfrak{X}^{(k_i, j(k_i)+1)}$, и пусть $\mathfrak{Z} = \underline{\lim}\, \mathfrak{Z}_i$, $\mathfrak{Z}' = \underline{\lim}\, \mathfrak{Z}'_i$. Так как $\mathfrak{Z}_i \subseteq \mathfrak{Z}'_i$ для всех i, то легко видеть, что $\mathfrak{Z} \subseteq \mathfrak{Z}'$. Из (VIII) следует, что $y \in \mathfrak{Z}'$, а так как $|y - T\bar{x}| = \lim |T(x_{k_i} - \bar{x})| \leqslant \alpha |T|$ и $|T\bar{x}| > \alpha |T|$, то $y \neq 0$ и потому $\mathfrak{Z}' \neq \{0\}$. С другой стороны, согласно (IX), ни в одном из подпространств $\mathfrak{Z}_i$ нет точек, удаленных от $\bar{x}$ менее чем на α; поэтому нет таких точек и в подпространстве $\mathfrak{Z}$, так что $\mathfrak{Z} \neq \mathfrak{X}$.

Если предположить, что в $\mathfrak{X}$ нет собственного инвариантного подпространства, то должно быть $\mathfrak{Z} = \{0\}$ и $\mathfrak{Z}' = \{\mathfrak{X}\}$. Тогда из условия (IX) и из полной непрерывности оператора T следует, что

(X) $Tx_i \to 0$, если $\{x_i\}$ — ограниченная последовательность и $x_i \in \mathfrak{Z}_i$.

С другой стороны, поскольку $\dim(\mathfrak{Z}'_i/\mathfrak{Z}_i) = 1$, существует такой вектор $u_i \in \mathfrak{Z}'_i$, что $\mathfrak{Z}_i + (u_i) = \mathfrak{Z}'_i$. Так как $\mathfrak{Z}_i$ конечномерно, то можно даже считать, что вектор u_i выбран таким образом, что $|u_i|=1$ и

$$\inf_{z \in \mathfrak{Z}_i} |z-u_i| = |u_i| = 1.$$

Тогда ясно, что

(XI) $|z_i+\beta u_i| \geqslant |\beta|$ и $2|z_i+\beta u_i| \geqslant |z_i|$, $z_i \in \mathfrak{Z}_i$.

Поскольку $\mathfrak{Z}'=\mathfrak{X}$, можно найти такие последовательности z_i, $\tilde{z}_i \in \mathfrak{Z}_i$ и такие β_i, $\tilde{\beta}_i$, что

$$z_i+\beta_i u_i \to \bar{x} \quad \text{и} \quad \tilde{z}_i+\tilde{\beta}_i u_i \to T\bar{x}.$$

Согласно (XI), последовательности β_i, $\tilde{\beta}_i$, z_i, $\tilde{z}_i$ ограничены, а тогда, согласно (X), $\beta_i T u_i \to T\bar{x}$ и $\tilde{\beta}_i T u_i \to T^2\bar{x}$. Поэтому последовательность $|\beta_i|$ должна быть ограничена снизу положительной постоянной, но тогда подпоследовательность ограниченной последовательности $\tilde{\beta}_i/\beta_i$ сходится к некоторой постоянной γ, и мы получаем $\gamma T\bar{x}=T^2\bar{x}$, что противоречит свойству (I).

2. Определение. Пусть T — оператор, а E — проектор. Мы говорим, что E является *субдиагонализирующим проектором для T*, если область значений проектора E инвариантна относительно T, т. е. если $ETE=TE$.

3. Лемма. *Для всякого оператора T в гильбертовом пространстве существует максимальное линейно упорядоченное множество $\mathcal{F}$ ортогональных субдиагонализирующих проекторов, т. е. линейно упорядоченное множество субдиагонализирующих проекторов, не содержащееся ни в каком большем линейно упорядоченном множестве субдиагонализирующих проекторов*[1]. *Каждое такое семейство $\mathcal{F}$ содержит сильные пределы всех монотонно убывающих и всех монотонно возрастающих последовательностей проекторов из $\mathcal{F}$.*

Доказательство. Первое утверждение сразу следует из теоремы Хаусдорфа I.2.6. Пусть $\{E_n\}$ — монотонно возрастающая последовательность проекторов из $\mathcal{F}$, E_∞ — ее сильный предел и E — проектор из $\mathcal{F}$. Если $E_n \leqslant E$ для всех n, то $E_\infty \leqslant E$; если $E_n \geqslant E$ для некоторого n, то $E_\infty \geqslant E$. Таким образом, если E_∞ присоединить к $\mathcal{F}$, то $\mathcal{F}$ останется линейно упорядоченным. С другой стороны, так как $E_nTE_n=TE_n$, то в пределе мы получаем $E_\infty TE_\infty = TE_\infty$. Поэтому область значений проектора E_∞ инвариантна

[1]) Поскольку общая проблема Банаха о существовании инвариантного подпространства у ограниченного оператора пока не решена, не исключен, быть может, случай, когда $\mathcal{F}$ состоит только из нулевого оператора 0 и из тождественного оператора I. Если T вполне непрерывен, то теорема 1 избавляет нас от этой неприятности. — *Прим. перев.*

относительно T. Из максимальности $\mathscr{F}$ следует, что $E_\infty \in \mathscr{F}$. Доказательство для случая монотонно убывающей последовательности проекторов из $\mathscr{F}$ аналогично.

Если E и F — операторы ортогонального проектирования и $E \geqslant F$, то $EF = FE = F$. Поэтому все проекторы из максимального линейно упорядоченного семейства $\mathscr{F}$ ортогональных проекторов коммутируют. Пусть $\{x_n\}$ — всюду плотное множество векторов в гильбертовом пространстве; положим

$$\varphi(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|Ex_n|^2}{(1+|x_n|^2)\,2^n}.$$

Тогда ясно, что функция $\varphi(E)$ возрастает вместе с проектором E. Если E, $E_1 \in \mathscr{F}$ и $\varphi(E) = \varphi(E_1)$, то $E = E_1$. Действительно, так как $\mathscr{F}$ линейно упорядочено, мы можем, для определенности, считать, что $E \leqslant E_1$; тогда $|Ex_n|^2 = |E_1x_n|^2$ для всех n, так что $Ex_n = E_1x_n$ и $E = E_1$. Аналогично из неравенства $\varphi(E) \leqslant \varphi(E_1)$ следует неравенство $E \leqslant E_1$ при условии, что E, $E_1 \in \mathscr{F}$. Если E_n, $E \in \mathscr{F}$ и $\varphi(E_n)$, возрастая, стремится к пределу $\varphi(E)$, то из уже доказанного следует, что $\{E_n\}$ — возрастающая последовательность проекторов, причем $E_n \leqslant E$. Если E_∞ — ее сильный предел, то $E_\infty \leqslant E$ и $\varphi(E_\infty) = \varphi(E)$. Отсюда следует, что $E_\infty = E$. Итак, доказано, что если $\varphi(E_n)$, возрастая, стремится к $\varphi(E)$, то E_n возрастает и сильно сходится к E. Точно таким же образом можно показать, что если $E_n, E \in \mathscr{F}$ и $\varphi(E_n)$, убывая, стремится к $\varphi(E)$, то последовательность $\{E_n\}$ убывает и сильно сходится к E. Поскольку всякая сходящаяся последовательность содержит монотонную сходящуюся подпоследовательность, из доказанного следует, что если E_n, $E \in \mathscr{F}$ и $\varphi(E_n) \to \varphi(E)$, то $E_n \to E$ в сильной топологии. Следовательно, если выбрать такое счетное множество $\{E_i\} \subseteq \mathscr{F}$, что множество $\{\varphi(E_i)\}$ всюду плотно в области значений функции φ на $\mathscr{F}$, то всякий проектор E из $\mathscr{F}$ будет сильным пределом некоторой монотонной последовательности проекторов из $\{E_i\}$. Ниже будет показано, что существует такой эрмитов оператор H, что все проекторы E_i принадлежат его спектральному семейству и что всякий проектор из спектрального семейства оператора H является сильным пределом линейных комбинаций проекторов E_i. Предположим пока, что это уже доказано. Тогда ясно, что все проекторы E из $\mathscr{F}$ принадлежат спектральному семейству оператора H. Мы воспользуемся этим для того, чтобы при помощи результатов гл. X о спектральном представлении оператора H получить спектральное представление для максимального линейно упорядоченного семейства $\mathscr{F}$ субдиагонализирующих ортогональных проекторов вполне непрерывного оператора T.

Это можно осуществить следующим образом. По лемме X.5.8 существует такая последовательность $\{x_n\}$, $n \geqslant 0$, векторов нашего гильбертова пространства $\mathfrak{H}$, что $\mathfrak{H}$ разлагается в прямую сумму ортогональных подпространств $\mathfrak{H}(x_i)$, где

$$\mathfrak{H}(x_i) = \overline{\mathrm{sp}}\,\{f(H)\,x_i \mid f \in C(\sigma(H))\}, \tag{1}$$

и существует такая убывающая последовательность множеств $\widetilde{e}_n$, что $(E(e)\,x_n, x_n) = (E(e\widetilde{e}_n)\,x_0, x_0)$, $n \geqslant 0$, для всех борелевских множеств e. (Здесь $E(\cdot)$ — спектральное семейство (разложение единицы) оператора H.)

Кроме того, можно считать, что $|x_0| = 1$.

Положим $\lambda(E) = |Ex_0|^2$. Тогда, как и выше, мы видим, что $\lambda(E)$ — возрастающая функция от E и что если $E_1, E_2 \in \mathscr{F}$, то $\lambda(E_1) = \lambda(E_2)$ влечет $E_1 = E_2$, а $\lambda(E_1) \leqslant \lambda(E_2)$ влечет $E_1 \leqslant E_2$. Кроме того, если $E_n, E \in \mathscr{F}$ и $\lambda(E_n) \to \lambda(E)$, то $E_n \to E$ в сильной топологии. С другой стороны, ясно, что из $E_n \to E$ следует $\lambda(E_n) \to \lambda(E)$. Таким образом, в силу леммы 3 область значений C функции λ на $\mathscr{F}$ является замкнутым подмножеством отрезка $[0,1]$. Так как отображение $E \to \lambda(E)$ множества $\mathscr{F}$ на C взаимно однозначно, то его можно обратить и тем самым параметризовать максимальное множество $\mathscr{F}$ субдиагонализирующих проекторов, а именно $\mathscr{F} = \{E_\lambda \mid \lambda \in C\}$. Как отмечалось выше, E_λ непрерывно зависит от λ и возрастает с ростом λ; кроме того, $|E_\lambda x_0|^2 = \lambda$.

Пусть (a, b) — смежный интервал[1]) замкнутого множества C. Тогда, поскольку $\mathscr{F}$ максимально, в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ не существует замкнутого подпространства $\mathfrak{X}$, инвариантного относительно T и удовлетворяющего условиям $E_a\mathfrak{H} \subset \mathfrak{X} \subset E_b\mathfrak{H}$ (оба включения строгие). Рассмотрим теперь отображение $T_0 = (E_b - E_a)\,T \mid (E_b - E_a)\,\mathfrak{H}$. Если $\mathfrak{X}_0$ — замкнутое собственное подпространсто гильбертова пространства $(E_b - E_a)\,\mathfrak{H}$, инвариантное относительно T_0, то ясно, что $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_0 \oplus E_a\mathfrak{H}$ замкнуто, инвариантно относительно T и удовлетворяет условиям $E_a\mathfrak{H} \subset \mathfrak{X} \subset E_b\mathfrak{H}$. Таким образом, T_0 не имеет собственных замкнутых инвариантных подпространств. Поскольку оператор T_0 вполне непрерывен, из теоремы 1 немедленно следует, что пространство $(E_b - E_a)\,\mathfrak{H}$ одномерно.

Пусть g — функция, определенная на отрезке $[0, 1]$, непрерывная справа и принимающая лишь конечное число значений, причем каждое из них — на некотором подинтервале отрезка $[0, 1]$, и пусть все ее точки разрыва принадлежат замкнутому множеству C. Такая функция имеет вид

$$g(s) = \alpha_i, \qquad a_i \leqslant s < a_{i+1}, \tag{2}$$

---

[1]) То есть один из счетного семейства непересекающихся открытых (на $[0, 1]$) интервалов, составляющих множество $[0, 1] - C$. — *Прим. перев.*

где

$$(3)\qquad 0=a_1<a_2<\ldots<a_{n+1}=1,$$

и числа α_i попарно различны. Обозначим класс всех таких функций через $\mathfrak{Z}$. Пусть U_m — отображение, переводящее функцию $g\in\mathfrak{Z}$ в вектор

$$(4)\qquad \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,(E_{a_{i+1}}-E_{a_i})\,x_m.$$

Тогда

$$|U_0 g|^2=\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^2(a_{i+1}-a_i)=\int_0^1|g(s)|^2\,ds;$$

поэтому отображение U_0 можно единственным образом расширить до изометрии между замыканием множества $\mathfrak{Z}$ в $L_2[0, 1]$ и замыканием в $\mathfrak{H}(x_0)$ множества векторов вида (4) (с $m=0$). Легко видеть, что замыкание множества $\mathfrak{Z}$ в $L_2[0, 1]$ состоит из всех функций, постоянных на каждом смежном интервале замкнутого множества C; обозначим это подпространство пространства $L_2[0, 1]$ символом $\widetilde{L}_2(C)$. Так как всякий проектор из спектрального семейства оператора H, а потому и всякая непрерывная функция от H, является сильным пределом линейных комбинаций проекторов E_i, то из (1) вытекает, что замыкание в $\mathfrak{H}(x_m)$ векторов вида (4) совпадает с $\mathfrak{H}(x_m)$. Отсюда при $m=0$ следует, что U_0 можно расширить до изометрического изоморфизма между $\widetilde{L}_2(C)$ и $\mathfrak{H}(x_0)$; этот изоморфизм мы будем тоже обозначать через U_0.

Пусть S — ограниченный оператор в $\mathfrak{H}(x_0)$, коммутирующий с каждым проектором E_λ. Пусть 1 — функция из $\widetilde{L}_2(C)$, тождественно равная 1. Если $U_0^{-1}SU_0(1)=h(x)$, то ясно, что $(U_0^{-1}SU_0g)(x)=$ $=g(x)\,h(x)$ для всякой функции $g\in\mathfrak{Z}$, так что, поскольку $\mathfrak{Z}$ плотно в $\widetilde{L}_2(C)$, имеем $(U_0^{-1}SU_0g)(x)=g(x)\,h(x)$ для всех $g\in\widetilde{L}_2(C)$. Для того чтобы оператор S был ограниченным, необходимо, очевидно, чтобы функция h была ограниченной, а для того чтобы S был проектором, необходимо, чтобы $h(x)=0$ или 1 почти всюду. В частности, для каждого проектора $E(\tilde{e})$ из спектрального семейства оператора H должно существовать такое борелевское подмножество e отрезка $[0, 1]$, что $(U_0^{-1}E(\tilde{e})\,U_0g)(x)=\chi_e(x)\,g(x)$, где χ_e — характеристическая функция множества e. Если $E(\tilde{f})$ — другой проектор из спектрального семейства оператора H и $\tilde{f}\subseteq\tilde{e}$, то $E(\tilde{e})\,E(\tilde{f})=$ $=E(\tilde{f})$, и потому $(U_0^{-1}E(\tilde{f})\,U_0g)(x)=\chi_f(x)\,g(x)$, где $f\subseteq e$. С другой стороны, из определения отображения U_0 легко следует, что $(U_0^{-1}E_\lambda U_0g)(x)=\chi_{[0,\,\lambda)}(x)\,g(x)$. Из доказанного вытекает, что должно существовать такое убывающее семейство $e_1 \supseteq e_2 \supseteq \supseteq e_3 \supseteq \ldots$ борелевских подмножеств отрезка $[0, 1]$, что

$$(5) \qquad (E_\lambda x_m, x_m) = (E_\lambda E(\widetilde{e}_m) x_0, x_0) = \mu([0, \lambda) \cap e_m), \quad m \geqslant 1,$$

где μ — мера Лебега на $[0, 1]$.

Пусть (a, b) — смежный интервал замкнутого множества C. Тогда при $m \geqslant 1$ векторы $(E_b - E_a) x_m$ и $(E_b - E_a) x_0$ ортогональны. Как было показано выше, область значений проектора $E_b - E_a$ одномерна, и потому $(E_b - E_a) x_m = 0$. Таким образом, $e_m \cap (a, b) = \varnothing$ [1]. Итак, множества $e_1, e_2, \ldots$ содержатся в множестве C.

Из формулы (5) следует, что если $m \geqslant 1$ и $g \in \mathfrak{Z}$, то

$$|U_m g|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 \mu([a_i, a_{i+1}] \cap e_m) = \int_{e_m} |g(s)|^2 ds.$$

Поэтому отображение U_m можно расширить до изометрии между замыканием множества $\mathfrak{Z}$ в пространстве $L_2(e_m, \mu)$ и замыканием в $\mathfrak{H}(x_m)$ множества векторов вида (4). Так как каждый проектор из спектрального семейства оператора H, а потому и всякая непрерывная функция от H, является сильным пределом линейных комбинаций проекторов E_i, то из (1) следует, что замыкание множества векторов вида (4) совпадает с $\mathfrak{H}(x_m)$. С другой стороны, поскольку $e_m \subseteq C$, легко видеть, что замыкание множества $\mathfrak{Z}$ в пространстве $L_2(e_m, \mu)$ совпадает со всем пространством $L_2(e_m, \mu)$. Таким образом, U_m можно расширить до изометрического изоморфизма между $L_2(e_m, \mu)$ и $\mathfrak{H}(x_m)$; это расширение мы будем обозначать также через U_m. Из определения U_m следует, что $(U_m^{-1} E_\lambda U_m g)(x) = \chi_{[0, \lambda)}(x) g(x)$, $m \geqslant 1$.

Поскольку гильбертово пространство $\mathfrak{H}$ разлагается в прямую сумму ортогональных подпространств $\mathfrak{H}(x_i)$, отображение

$$U\colon [g_0(x), g_1(x), \ldots] \to \sum_{m=0}^{\infty} U_m g_m$$

является изометрическим изоморфизмом между пространствами $\widetilde{L}_2(C) \oplus L_2(e_1, \mu) \oplus L_2(e_2, \mu) \oplus \ldots$ и $\mathfrak{H}$. С другой стороны, ясно, что отображение $U^{-1} E_\lambda U$ имеет вид

$$[g_0(x), g_1(x), \ldots] \to [\chi_{[0, \lambda)}(x) g_0(x), \chi_{[0, \lambda)}(x) g_1(x), \ldots].$$

Изложенное исследование приводит нас к следующей теореме.

[1] Точнее, из доказанного вытекает, что $\mu((a, b) \cap e_m) = 0$. Так как удаление из e_m множества точек меры нуль не нарушает справедливости равенств (5) и так как число смежных интервалов множества C не более чем счетно, то можно считать, что $(a, b) \cap e_m = \varnothing$. — *Прим. перев.*

4. Теорема *Пусть $\mathcal{F}$ — максимальное линейно упорядоченное семейство субдиагонализирующих ортогональных проекторов вполне непрерывного оператора T в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Тогда на отрезке $[0, 1]$ существует такое замкнутое множество C и такая последовательность $e_1 \supseteq e_2 \supseteq \ldots$ борелевских подмножеств этого множества, что $\mathcal{F}$ изометрически эквивалентно семейству проекторов $\{E_\lambda \mid \lambda \in C\}$ в пространстве*

$$\mathfrak{H}_0 = \tilde{L}_2(C, \mu) \oplus L_2(e_1, \mu) \oplus L_2(e_2, \mu) \oplus \ldots,$$

определяемых формулой

$$E_\lambda [g_0(x), g_1(x), \ldots] = [\chi_\lambda(x) g_0(x), \chi_\lambda(x) g_1(x), \ldots],$$

где $\chi_\lambda(x)$ — характеристическая функция полуинтервала $[0, \lambda)$, а μ — мера Лебега на $[0, 1]$.

Доказательство. Для завершения доказательства этой теоремы мы должны лишь показать, что если E_i — счетное линейно упорядоченное семейство ортогональных проекторов, то существует такой эрмитов оператор H, что

(a) все операторы E_i принадлежат спектральному семейству оператора H;

(b) всякий проектор из спектрального семейства оператора H является сильным пределом линейных комбинаций проекторов E_i.

Пусть $\mathfrak{A}$ — коммутативная B^*-алгебра операторов, порожденная проекторами E_i, и пусть Λ — ее спектр. Если ω — какой-нибудь элемент из Λ, т. е. какой-нибудь непрерывный гомоморфизм алгебры $\mathfrak{A}$ в поле комплексных чисел, то обозначим через $S(\omega)$ последовательность $[\omega(E_1), 0, \omega(E_2), 0, \omega(E_3), 0, \ldots]$. Так как $E_i^2 = E_i$, то последовательность $S(\omega)$ состоит из нулей и единиц, и мы можем рассматривать ее как двоичное разложение некоторого вещественного числа $r(\omega)$ из отрезка $[0, 1]$.

Пусть $E(e)$ — спектральное разложение[1]) для алгебры $\mathfrak{A}$, так что $E(e)$ — счетно аддитивная регулярная борелевская мера на Λ, значениями которой являются операторы ортогонального проектирования в $\mathfrak{H}$ (см. теорему X.2.1). По теореме X.2.1

$$\int_\Lambda \omega(E_n) E(d\omega) = E_n.$$

Определим оператор H формулой

$$H = \int_\Lambda r(\omega) E(d\omega).$$

[1]) Точнее, $E(\cdot)$ — спектральная мера, соответствующая каноническому $*$-изоморфизму $A \to \omega(A)$ алгебры $\mathfrak{A}$ на алгебру $C(\Lambda)$. Напомним (см. теорему X.2.1), что каждому $*$-изоморфизму $\mathfrak{A}$ на $C(\Lambda)$ соответствует некоторая спектральная мера. Здесь нужна именно указанная мера. — *Прим. перев.*

Легко видеть, что

$$r(\omega)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^{n-1}}\omega(E_n);$$

этот ряд равномерно сходится на Λ, а так как все функции $\omega(E_n)$ непрерывны на Λ, то $r(\omega)$ — непрерывная вещественная функция. Поэтому оператор H эрмитов и принадлежит $\mathfrak{A}$.

Если $\tilde{E}$ — спектральная мера на отрезке $[0, 1]$, определенная формулой $\tilde{E}(e)=E(r^{-1}(e))$, $e\subseteq[0, 1]$, то, применяя правило замены меры при интегрировании, получаем

$$H=\int_0^1 r\tilde{E}(dr).$$

Поэтому, согласно следствию X.2.7, $\tilde{E}(e)$ является разложением единицы для эрмитова оператора H. Если $d_n(r)$ обозначает n-й двоичный знак в двоичном разложении вещественного числа r, то

$$\begin{aligned}\tilde{E}(\{r\mid d_{2n-1}(r)=1\})&=E(\{\omega\mid d_{2n-1}(r(\omega))=1\})=\\&=E(\{\omega\mid\omega(E_n)=1\})=\int_\Lambda\omega(E_n)E(d\omega)=E_n.\end{aligned}$$

Таким образом, каждый проектор E_n принадлежит спектральному семейству эрмитова оператора H.

С другой стороны, пусть задано борелевское множество $e\subseteq\Lambda$. Выберем в гильбертовом пространстве всюду плотное множество векторов x_n. Поскольку мера $E(e)$ регулярна, то для каждого натурального m существуют такое замкнутое множество $f_m\subseteq e$ и такое открытое множество $O_m\supseteq e$, что

$$\begin{aligned}&|E(e)x_n|^2-\frac{1}{m}\leqslant|E(f_m)x_n|^2\leqslant\\&\leqslant|E(O_m)x_n|^2\leqslant|E(e)x_n|^2+\frac{1}{m},\quad 1\leqslant n\leqslant m.\end{aligned}$$

С помощью теоремы Урысона (I.5.2) можно найти такую непрерывную на Λ функцию $\varphi_m(\omega)$, что $0\leqslant\varphi_m(\omega)\leqslant 1$, $\varphi_m(\omega)=0$ при $\omega\notin O_m$ и $\varphi_m(\omega)=1$ при $\omega\in f_m$. Тогда если

$$\Phi_m=\int\varphi_m(\omega)E(d\omega),$$

то

$$|(E(e)-\Phi_m)x_n|^2=\int|\chi_e(\omega)-\varphi_m(\omega)|^2|E(d\omega)x_n|^2\leqslant\frac{4}{m},\quad 1\leqslant n\leqslant m.$$

Поэтому $E(e)$ является сильным пределом операторов Φ_m. С другой стороны, из теоремы X.2.1 следует, что оператор Φ_m принадлежит алгебре $\mathfrak{A}$, так что Φ_m является пределом линейных комбинаций произведений операторов E_i. Поскольку проекторы E_i образуют линейно упорядоченное семейство, произведение любого конечного набора этих проекторов равно наименьшему из E_i, входящих в этот набор (т. е. проектору с наименьшей областью значений). Таким образом, $E(e)$ является сильным пределом линейных комбинаций проекторов E_i.

Это доказывает справедливость утверждений (a) и (b) и завершает доказательство теоремы 4.

В частном случае операторов Гильберта — Шмидта мы не встречаем существенных технических трудностей при доказательстве теоремы о субдиагонализации, так как всегда существует представление таких операторов при помощи ядер. В лемме 5 описывается это представление и излагаются некоторые его простые свойства.

5. Лемма. *Пусть T — оператор Гильберта — Шмидта в пространстве $\mathfrak{H}_0$, введенном в теореме* 4. *Тогда существует единственное семейство ядер $K_{ij}(s, t)$, определенных и квадратично интегрируемых на $[0, 1]\times[0, 1]$, и таких, что*

(I) $K_{ij}(s, t)=0$, *если* $s\notin e_{i-1}$, $i\geqslant 2$, *или если* $t\notin e_{j-1}$, $j\geqslant 2$;

(II) $K_{1j}(s, t)=K_{1j}(s', t)$, *если s и s' лежат в одном и том же смежном интервале множества C*;

(III) $K_{i1}(s, t)=K_{i1}(s, t')$, *если t и t' лежат в одном и том же смежном интервале множества C*;[1])

$$\text{(IV)}\quad \|K\|^2=\sum_{i,j=1}^{\infty}\int_0^1\int_0^1 |K_{ij}(s, t)|^2\,ds\,dt<\infty;$$

$$\text{(V)}\quad T[f_1(s), f_2(s), \ldots]=[g_1(s), g_2(s), \ldots],$$

[1]) Функции $K_{ij}(s, t)$ определены с точностью до значений на множестве $(\mu\times\mu)$-меры нуль, поэтому условия (I)—(III) нуждаются в некотором разъяснении. Поясним, например, как следует понимать (III). Пусть $I_1, I_2, \ldots$ — совокупность всех смежных интервалов множества C; тогда множество $M=[0, 1]\times\bigcup_{n=1}^{\infty}\{I_n\times I_n\}$ можно рассматривать как подмножество куба $[0, 1]\times[0, 1]\times[0, 1]$ в пространстве переменных s, t, t'. Условие (III) означает, что функция $K_{i1}(s, t)-K_{i1}(s, t')$ равна нулю почти всюду на M относительно меры $\mu\times\mu\times\mu$. — *Прим. перев.*

где

$$g_i(s)=\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^1 K_{ij}(s,\ t)\,f_j(t)\,dt,$$

причем этот ряд безусловно сходится в топологии пространства L_2. *Обратно, если семейство ядер* $K_{ij}(s,\ t)$ *удовлетворяет условиям* (I)—(IV), *то формула* (V) *определяет оператор Гильберта—Шмидта в пространстве* $\mathfrak{H}_0$ *и дубль-норма этого оператора может быть вычислена по формуле* (IV).

Доказательство. Пусть $A=[0,\ 1]\times N$, где N — множество целых чисел $n\geqslant 1$. Если рассматривать N как пространство с мерой, считая, что каждое натуральное число имеет меру 1, а на отрезке [0, 1] рассматривать обычную меру Бореля — Лебега, то можно считать, что A — пространство с мерой ν, равной произведению этих мер. Сначала мы установим, что каждый оператор Гильберта — Шмидта K в $L_2(A)$ представляется единственным ядром $K(\cdot\ ,\ \cdot)\in L_2(A\times A)$ таким образом, что

$$\|K\|^2=\int_A\int_A |K(a,\ b)|^2\,\nu(da)\,\nu(db)<\infty \tag{1}$$

и

$$(Kf)(a)=\int_A K(a,\ b)\,f(b)\,\nu(db). \tag{2}$$

Мы покажем также (это понадобится в дальнейшем), что если K представляется ядром $K(a,\ b)$, то сопряженный оператор K^* представляется ядром $\overline{K(b,\ a)}$. Обратно, если ядро $K(\cdot\ ,\ \cdot)$ удовлетворяет условию (1), то формула (2) определяет оператор Гильберта — Шмидта.

Для доказательства этих утверждений рассмотрим в $L_2(A)$ ортонормальный базис $\{\varphi_i\}$. Тогда из определения произведения пространств с мерой следует, что каждая функция из $L_2(A\times A)$ может быть аппроксимирована линейной комбинацией характеристических функций множеств вида $e\times f$, где e и f — измеримые подмножества в A. Поэтому линейные комбинации функций вида $\psi(a)\,\eta(b)$ всюду плотны в $L_2(A\times A)$. Таким образом, функции $\{\varphi_i(a)\,\overline{\varphi_j(b)}\}$ образуют ортонормальный базис пространства $L_2(A\times A)$. Пусть K — оператор Гильберта — Шмидта в $L_2(A)$. Тогда если $C_{ij}=(K\varphi_j,\ \varphi_i)$, то по следствию 6.3 $\sum|C_{ij}|^2=\|K\|^2<\infty$. Поэтому в $L_2(A\times A)$ существует функция $K(a,\ b)$, коэффициенты Фурье которой относительно базиса $\{\varphi_i(a)\,\overline{\varphi_j(b)}\}$ равны C_{ij}. Очевидно, $K(\cdot\ ,\ \cdot)$ удовлетворяет условию (1). Из теорем III.2.20, III.11.17

и неравенства Шварца вытекает, что

$$\left\{\int\limits_A \left|\int\limits_A K(a, b) f(b)\,\nu(db)\right|^2 \nu(da)\right\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\int\limits_A \left\{\int\limits_A |K(a, b)|^2 \nu(da)\right\} \nu(db)\right\}^{1/2} \left\{\int\limits_A |f(b)|^2 \nu(db)\right\}^{1/2};$$

поэтому интеграл, стоящий в правой части равенства (2), задает ограниченный оператор $\widetilde{K}$. Из определения ядра $K(\cdot\,,\cdot)$ следует, что

$$(K\varphi_j, \varphi_i) = (\widetilde{K}\varphi_j, \varphi_i)$$

для всех i и j. В силу линейности и непрерывности скалярного произведения

$$(Kf, g) = (\widetilde{K}f, g), \qquad f, g \in L_2(A),$$

так что $K = \widetilde{K}$, и условие (2) выполняется.

Поскольку $(K^*\varphi_j, \varphi_i) = (K\varphi_i, \varphi_j) = C_{ji}$, то ядро, представляющее оператор K^*, имеет коэффициенты Фурье $\overline{C}_{ji}$ и потому совпадает с функцией $K(b, a) = K^*(a, b)$[1]).

Если $K(a, b)$ — ядро, удовлетворяющее неравенству (1), то мы видели, что правая часть формулы (2) определяет ограниченный оператор $\widetilde{K}$. Так как числа $(\widetilde{K}\varphi_j, \varphi_i)$ равны, очевидно, коэффициентам Фурье функции $K(a, b)$ относительно ортонормального базиса $\{\varphi_i(a)\overline{\varphi_j(b)}\}$, то из следствия 6.3 вытекает, что $\widetilde{K} \in HS$ и дубль-норма оператора $\widetilde{K}$ определяется равенством (1). Следовательно, если ядро $K(\cdot\,,\cdot)$ представляет оператор 0, то $K(a, b) = 0$ почти всюду по мере $\nu \times \nu$. Таким образом, все сформулированные выше вспомогательные утверждения доказаны.

Так как A является произведением пространств с мерой $[0, 1] \times N$, то ясно, что всякий элемент из $L_2(A)$ можно рассматривать как последовательность

$$f = [f_1(s), \quad f_2(s), \ \ldots]$$

функций из $L_2[0, 1]$; норма такой последовательности определяется формулой

$$|f|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_0^1 |f_i(s)|^2\, ds.$$

[1]) Здесь используется доказываемая ниже единственность представляющего ядра. — *Прим. перев.*

Аналогично функцию $K(\cdot\,,\,\cdot)\in L_2(A\times A)$ можно рассматривать как бесконечную матрицу $K_{ij}(s,\ t)$ функций из $L_2([0,\ 1]\times[0,\ 1])$. Поэтому наши предыдущие выводы можно переформулировать следующим образом.

Если K — оператор Гильберта — Шмидта в $L_2(A)$, то существует единственное семейство ядер $K_{ij}(s,\ t)$, представляющее K в том смысле, что

(3) $$K[f_1(s),\ f_2(s),\ \ldots]=[g_1(s),\ g_2(s),\ \ldots],$$

где

(4) $$g_i(s)=\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^1 K_{ij}(s,\ t)\,f_j(t)\,dt,$$

причем ряд сходится безусловно в топологии пространства L_2. Кроме того, выполняется соотношение (IV). Сопряженный оператор K^* представляется семейством ядер

$$K^*_{ij}(s,\ t)=\overline{K_{ji}(t,\ s)}.$$

Наконец, если $K_{ij}(s,\ t)$ — какое-нибудь семейство ядер, удовлетворяющих неравенству в (IV), то формулы (3), (4) определяют оператор Гильберта — Шмидта K в $L_2(A)$, удовлетворяющий равенству в (IV).

Ясно, что гильбертово пространство $\mathfrak{H}_0$, введенное в теореме 4, является подпространством пространства $L_2(A)$. Легко проверить, что оператор E ортогонального проектирования $L_2(A)$ на $\mathfrak{H}_0$ определяется формулой

$$E[f_1(s),\ f_2(s),\ \ldots]=[g_1(s),\ g_2(s),\ \ldots],$$

где $g_j(s)=\chi_{e_{j-1}}(s)\,f_j(s)$, $j\geqslant 2$, а $e_1,\ e_2,\ \ldots$ — борелевские множества из теоремы 4, и

$$g_1(s)=f_1(s),\qquad s\in C,$$
$$g_1(s)=\frac{1}{\mu(I)}\int_I f_1(t)\,dt,\qquad s\in I,$$

где I — произвольный смежный интервал замкнутого множества C, а $\mu(I)$ — его мера Лебега.

Мы можем выбрать в $L_2(A)$ ортонормальный базис, являющийся объединением ортонормального базиса пространства $\mathfrak{H}_0$ и ортонормального базиса пространства $\mathfrak{H}_0^{\perp}$; поэтому из определения 6.1 следует, что если T — оператор Гильберта — Шмидта в $\mathfrak{H}_0$, то $K=TE$ — оператор Гильберта — Шмидта в $L_2(A)$. Ясно, что

$$EKE=K,\quad K\,|\,\mathfrak{H}_0=T,\quad K^*\,|\,\mathfrak{H}_0=T^*.$$

Кроме того, по определению 6.1 $\|K\|=\|T\|$. Таким образом, класс операторов Гильберта—Шмидта в $\mathfrak{H}_0$ состоит из сужений на $\mathfrak{H}_0$ операторов Гильберта—Шмидта в $L_2(A)$, удовлетворяющих условию $EKE=K$, или, что то же, $EK=KE=K$. Отображение класса таких операторов, действующих в $L_2(A)$, на множество их сужений на $\mathfrak{H}_0$ изометрично.

Так как очевидно, что оператор K тогда и только тогда удовлетворяет условиям $EK=KE=K$, когда представляющие ядра $K_{ij}(s, t)$ удовлетворяют условиям (I), (II) и (III), то настоящая лемма полностью доказана.

Мы доказали также следующее следствие.

6. Следствие. *Оператор, сопряженный к оператору T предыдущей леммы, представляется семейством ядер K_{ij}^*, определенных формулой*

$$K_{ij}^*(s, t)=\overline{K_{ji}(t, s)}.$$

Теорема 7 показывает, что полученное представление оператора Гильберта—Шмидта ядрами K_{ij} является треугольным.

7. Теорема. *Пусть $\mathcal{F}$ и T—такие же, как в теореме 4, и пусть T—оператор Гильберта—Шмидта. Тогда ядра K_{ij}, построенные в лемме 5, при $s>t$ удовлетворяют условию*

$$K_{ij}(s, t)=0,$$

кроме, быть может, случая, когда $i=j=1$, а s и t принадлежат одному и тому же смежному интервалу множества C [1]*. Обратно, если семейство ядер K_{ij} обладает этим свойством, то $\mathcal{F}$—максимальное семейство субдиагонализирующих ортогональных проекторов для T* [2]).

[1]) Точный смысл этого условия таков. Пусть $I_1, I_2, \ldots$—смежные интервалы множества C. Положим $N_{ij}=\{(s, t) \mid s>t, K_{ij}(s, t)\neq 0\}$ и $N=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{(s, t) \mid s, t\in I_n\}$. Тогда $(\mu\times\mu)(N_{ij})=0$ при $i+j>2$ и $(\mu\times\mu)(N_{11}-N)=0$. Следует иметь в виду, что в доказательстве этой теоремы рассуждения ведутся «с точностью до множеств $(\mu\times\mu)$-меры нуль», что в тексте явно не оговорено.— *Прим. перев.*

[2]) Здесь имеется в виду следующее. Пусть T—оператор Гильберта—Шмидта в $\mathfrak{H}$, C—замкнутое подмножество отрезка $[0, 1]$, содержащее точки 0 и 1, $e_1\supseteq e_2\supseteq e_3\supseteq\ldots$—борелевские подмножества в C, и пусть $\mathfrak{H}_0=\widetilde{L}_2(C)\oplus L_2(e_1, \mu)\oplus L_2(e_2, \mu)\oplus\ldots$. Допустим, что существует такой изометрический изоморфизм $U:\mathfrak{H}_0\to\mathfrak{H}$, что ядра K_{ij}, представляющие оператор Гильберта—Шмидта $U^{-1}TU$, действующий в $\mathfrak{H}_0$, обладают указанным в формулировке теоремы свойством. Положим $E_\lambda=U\widetilde{E}_\lambda U^{-1}$, где $\lambda\in C$, а $\widetilde{E}_\lambda$—проектор в $\mathfrak{H}_0$, определенный равенством $\widetilde{E}_\lambda[g_1(x), g_2(x), \ldots]=[\chi_\lambda(x)g_1(x), \chi_\lambda(x)g_2(x), \ldots]$. Тогда утверждается, что $\mathcal{F}=\{E_\lambda \mid \lambda\in C\}$ является максимальным линейно упорядоченным семейством субдиагонализирующих ортогональных проекторов для T.— *Прим. перев.*

Кроме того, для того чтобы оператор T был квазинильпотентным, необходимо и достаточно, чтобы $K_{11}(s, t) = 0$ всякий раз, когда s и t лежат в одном и том же смежном интервале множества C.

Доказательство. Поскольку область значений проектора E_λ инвариантна относительно T, то $(I - E_\lambda) T E_\lambda = 0$. Из найденного в теореме 4 представления проектора E_λ следует, что ядра, представляющие оператор $(I - E_\lambda) T E_\lambda$, имеют вид

$$\tilde{\chi}_\lambda(s) K_{ij}(s, t) \chi_\lambda(t),$$

где χ_λ — характеристическая функция полуинтервала $[0, \lambda)$, а $\tilde{\chi}_\lambda$ — характеристическая функция отрезка $[\lambda, 1]$. Поэтому если существует такое $\lambda \in C$, что $s \geqslant \lambda > t$, то $K_{ij}(s, t) = 0$. Другими словами, если $s > t$, то $K_{ij}(s, t) = 0$, кроме, быть может, случая, когда s и t принадлежат одному и тому же смежному интервалу множества C. Так как по лемме 5 $K_{ij}(s, t) = 0$, если $i + j > 2$ и s, t принадлежат одному и тому же смежному интервалу множества C, то наше первое утверждение доказано.

Обратно, допустим, что ядра K_{ij} обладают свойством, описанным в формулировке настоящей теоремы. Тогда, обращая шаг за шагом предыдущее рассуждение, мы заключаем, что $(I - E_\lambda) T E_\lambda = 0$ для каждого λ из C. Поэтому область значений проектора E_λ инвариантна относительно T, т. е. E_λ является субдиагонализирующим проектором для T. Для доказательства второго утверждения теоремы мы должны лишь проверить, что если E — такой субдиагонализирующий проектор, что для всякого λ из C либо $E \geqslant E_\lambda$, либо $E \leqslant E_\lambda$, то E содержится в $\mathcal{F}$. Положим $\lambda_0 = \sup \{\lambda \mid \lambda \in C,\ E \geqslant E_\lambda\}$ [1]. Легко видеть, что $E \geqslant E_{\lambda_0}$, тогда как $E \leqslant E_\lambda$ при $\lambda > \lambda_0$. Поэтому если $\lambda_1 = \inf \{\lambda \mid \lambda \in C,\ \lambda > \lambda_0\}$ [2], то $E \leqslant E_{\lambda_1}$. Ясно, что либо $\lambda_1 = \lambda_0$, либо (λ_0, λ_1) — смежный интервал замкнутого множества C. Если $\lambda_1 = \lambda_0$, то $E_{\lambda_0} \leqslant E \leqslant E_{\lambda_0}$, так что $E \in \mathcal{F}$. Если же (λ_0, λ_1) — смежный интервал замкнутого множества C, то нетрудно показать, что область значений проектора $E_{\lambda_1} - E_{\lambda_0}$ одномерна [3]. Так как $E_{\lambda_0} \leqslant E \leqslant E_{\lambda_1}$, то отсюда

---

[1] Если $\{\lambda \mid \lambda \in C,\ E \geqslant E_\lambda\} = \varnothing$, то $E \leqslant E_\lambda$ для всех $\lambda \in C$. Так как $0 \in C$ (см. второе примечание к формулировке теоремы), то $E \leqslant E_0$. Так как проектору E_λ в пространстве $\mathfrak{H}_0$ соответствует оператор покоординатного умножения на $\chi_\lambda(x)$, то $E_0 = 0$ и потому $E = 0 = E_0 \in \mathcal{F}$. — *Прим. перев.*

[2] Если $\{\lambda \mid \lambda \in C,\ \lambda > \lambda_0\} = \varnothing$, то $E \geqslant E_\lambda$ для всех $\lambda \in C$; рассуждая как в предыдущем примечании, мы получаем, что $E = I = E_1 \in \mathcal{F}$. — *Прим. перев.*

[3] Действительно, проектору $E_{\lambda_1} - E_{\lambda_0}$ в пространстве $\mathfrak{H}_0$ соответствует оператор покоординатного умножения на функцию $\chi_{[\lambda_0, \lambda_1)}(x)$. Но всякая

следует, что либо $E=E_{\lambda_0}$, либо $E=E_{\lambda_1}$, так что и в этом случае $E\in\mathscr{F}$ и второе утверждение теоремы доказано.

Предположим теперь, что оператор T квазинильпотентен. Пусть (a, b) — смежный интервал множества C, а χ — его характеристическая функция. Пусть $K_{11}(s, t)=c$ при $s, t\in(a, b)$ (см. утверждения (II) и (III) леммы 5). Тогда из уже доказанного следует, что если f — вектор

$$f=[\chi,\ 0,\ 0,\ \ldots],$$

то

$$Tf=[c(b-a)\chi+g_1,\ g_2,\ \ldots],$$

где $[g_1, g_2, \ldots]$ принадлежит области значений проектора E_a. (Здесь пространства $\mathfrak{H}_0$ и $\mathfrak{H}$ считаются отождествленными при помощи изоморфизма U, и потому не делается различия между операторами в $\mathfrak{H}$ и соответствующими им операторами в $\mathfrak{H}_0$.) Поскольку область значений проектора E_a инвариантна относительно T, то по индукции мы получаем

$$T^nf=[c^n(b-a)^n\chi+g_1^{(n)},\ g_2^{(n)},\ \ldots],$$

где $[g_1^{(n)}, g_2^{(n)}, \ldots]$ принадлежит области значений проектора E_a. Поэтому

$$(T^nf, f)=c^n(b-a)^{n+1}.$$

Так как оператор T квазинильпотентен, то для всякого положительного ε имеем $|T^n|=O(\varepsilon^n)$ при $n\to\infty$. Поэтому $c=0$, т. е. $K_{11}(s, t)=0$, если s и t принадлежат одному и тому же смежному интервалу множества C.

Обратно, предположим, что $K_{11}(s, t)=0$, если s и t принадлежат одному и тому же смежному интервалу множества C. Докажем, что тогда оператор T квазинильпотентен. По леммам 6.2, VII.6.7, VII.6.8 и теоремам 6.6, VII.4.5 предел по норме Гильберта — Шмидта последовательности квазинильпотентных операторов Гильберта — Шмидта является квазинильпотентным оператором. Поэтому из леммы 5 следует, что можно, не ограничивая общности, считать, что $|K_{ij}(s, t)|\leqslant M$ для некоторого конечного числа M и что (для некоторого конечного d) $K_{ij}(s, t)=0$, если $i\geqslant d$ или $j\geqslant d$. Очевидно, что n-я степень T^n оператора T

функция из $\widetilde{L}_2(C)$ постоянна на $[\lambda_0, \lambda_1)$, а всякая функция из $L_2(e_n, \mu)$ $(n\geqslant 1)$ на $[\lambda_0, \lambda_1)$ равна 0; поэтому последний оператор сводится к ортогональному проектированию на одномерное подпространство пространства $\mathfrak{H}_0$, порожденное элементом $[\chi_{[\lambda_0, \lambda_1)}(x), 0, 0\ldots]$. — *Прим. перев.*

представляется семейством ядер $K_{ij}^{(n)}$, определенных формулами

$$K_{ij}^{(n)}(s, t)=0, \quad \text{если} \quad i \geqslant d \quad \text{или} \quad j \geqslant d,$$

$$K_{ij}^{(n)}(s, t)=$$

$$=\sum_{i_1, \ldots, i_{n-1}=1}^{d} \int_0^1 \ldots \int_0^1 K_{ii_1}(s, \sigma_{i_1}) K_{i_1 i_2}(\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}) \ldots K_{i_{n-1} j}(\sigma_{i_{n-1}}, t)\, d\sigma_{i_1} \ldots d\sigma_{i_{n-1}},$$

$$\text{если} \quad 1 \leqslant i, \quad j \leqslant d.$$

Следовательно, учитывая, что ядра K_{ij} ограничены числом M и что $K_{ij}(s, t)=0$ при $s>t$, можно получить для $K_{ij}^{(n)}(s, t)$ оценку

$$|K_{ij}^{(n)}(s, t)| \leqslant (dM)^n \int_{0 \leqslant \sigma_1 \leqslant \sigma_2 \leqslant \ldots \leqslant \sigma_{n-1} \leqslant 1} \ldots \int d\sigma_1 \ldots d\sigma_{n-1}=\frac{(dM)^n}{(n-1)!}.$$

Таким образом, по леммам 5 и 6.2 $|T^n|=o(\varepsilon^n)$ для всякого $\varepsilon>0$; поэтому оператор T квазинильпотентен, ч. т. д.

8. Лемма. *Пусть H — такой вполне непрерывный самосопряженный оператор в пространстве $\mathfrak{H}_0$, что область значений каждого из проекторов E_λ, введенных в теореме 4, инвариантна относительно H. Тогда*

$$H[f_1(s), f_2(s), \ldots]=[m(s) f_1(s), 0, 0, \ldots],$$

где $m(s)$ — ограниченная функция, равная нулю на C и постоянная на каждом смежном интервале множества C.

Доказательство. Если $E_\lambda H E_\lambda=H E_\lambda$, то, переходя к сопряженным операторам, имеем $E_\lambda H=E_\lambda H E_\lambda=H E_\lambda$. Поэтому H коммутирует со всяким ортогональным проектором, область значений которого инвариантна относительно H. Пусть e — такое борелевское множество, что каждый смежный интервал множества C либо целиком содержится в e, либо не пересекается с e. Определим в пространстве $\mathfrak{H}_0$ проектор $E(e)$ по формуле

$$E(e)[f_1(s), f_2(s), \ldots]=[\chi_e(s) f_1(s), \chi_e(s) f_2(s), \ldots],$$

где χ_e — характеристическая функция множества e. Если $I_j=(a, b)$ — смежный интервал множества C, то $E(I_j) H=H E(I_j)$ (ибо $E(I_j)=E_b-E_a$); поэтому $H E(C)=E(C) H$. Таким образом, область значений $\mathfrak{X}$ проектора $E(C)$ инвариантна относительно H, а сужение $\widetilde{H}$ оператора H на $\mathfrak{X}$ является вполне непрерывным эрмитовым оператором в гильбертовом пространстве $\mathfrak{X}$. Мы хотим показать, что $\widetilde{H}=0$.

Допустим, что это не так. Тогда, согласно следствиям X.3.5 и X.2.8, существует такое число $\lambda \neq 0$, что подпространство $\mathfrak{X}_0 = \{x \mid \widetilde{H}x = \lambda x\}$ нетривиально и конечномерно. По теореме X.2.1 в $\mathfrak{X}_0$ должен существовать такой вектор $x \neq 0$, что для всякого борелевского множества e, для которого определен оператор $E(e)$, либо $E(e)x = x$, либо $E(e)x = 0$[1]. Поскольку $E(C)x = x$, отсюда следует, что если C разложено в сумму 2^n непересекающихся борелевских множеств e_j с диаметрами, не превосходящими 2^{-n}, то для одного (и только для одного) из них $E(e_j)x = x$. Таким образом, для каждого натурального n существует такое борелевское множество $\widetilde{e}_n \subset C$, что диаметр его не превосходит 2^{-n} и $E(\widetilde{e}_n)x = x$. Поскольку $\widetilde{e}_n$ можно, сохраняя нужные нам свойства, заменить на $\bar{e}_n = \bigcup\limits_{m>n} \widetilde{e}_m$, можно даже считать, что множества $\widetilde{e}_n$ образуют монотонно убывающую последовательность. Но тогда из определения проекторов $E(e)$ легко следует, что $E(\widetilde{e}_n)y \to 0$ для любого y. Следовательно, мы получаем противоречие, которое показывает, что $\widetilde{H} = 0$, так что $H = HE(C')$, где C' — дополнение к C.

Если I_j — смежный интервал множества C, то, как было показано при доказательстве теоремы 4, область значений проектора $E(I_j)$ одномерна. Поэтому существует такая постоянная m_j, что $|m_j| \leqslant |T|$ и $HE(I_j) = m_j E(I_j)$. Если определить функцию $m(s)$ равенствами $m(s) = m_j$ для $s \in I_j$ и $m(s) = 0$ для $s \in C$ и положить

$$M[f_1(s), f_2(s), \ldots] = [m(s) f_1(s), 0, 0, \ldots],$$

то ясно, что $HE(I_j) = ME(I_j)$, так что $HE([0, 1] - C) = ME([0, 1] - C)$. Отсюда, поскольку $HE(C) = ME(C) = 0$, следует, что $H = M$, и лемма доказана.

---

[1] Пусть $\mathscr{D}$ — совокупность всех борелевских множеств, для которых выше был определен оператор $E(e)$. Если бы было доказано, что $HE(e) = E(e)H$ для всех $e \in \mathscr{D}$, то отсюда легко следовало бы, что $\mathfrak{X}_0$ инвариантно относительно $E(e)$, $e \in \mathscr{D}$. Тогда, применяя теорему X.2.1 к B^*-алгебре $\mathfrak{A}$ операторов, порожденной сужениями проекторов $E(e)$ $(e \in \mathscr{D})$ на пространство $\mathfrak{X}_0$, и учитывая, что $\mathfrak{X}_0$ конечномерно, мы получили бы, что в $\mathfrak{X}_0$ существует вектор x, собственный для всех операторов из $\mathfrak{A}$. Так как $E(e)$ — проектор, то либо $E(e)x = x$, либо $E(e)x = 0$. Для доказательства равенства $HE(e) = E(e)H$ можно сначала рассмотреть случай открытого множества e из $\mathscr{D}$ (концы интервалов, составляющих открытое множество $e \in \mathscr{D}$, принадлежат C), а затем применить предельный переход, учитывая, что если $e, e_n \in \mathscr{D}$, $e_n \supseteq e$ и $\mu(e_n - e) \to 0$, то $E(e_n) \to E(e)$ в сильной топологии. (Заметим, что при этом, быть может, придется аппроксимировать открытыми множествами $e_n \in \mathscr{D}$ не само множество e, так как это не всегда возможно, а некоторое другое множество $e' \in \mathscr{D}$, такое, что $e' \subset e$ и $\mu(e - e') = 0$.) — *Прим. перев.*

Напомним, что если T — оператор в гильбертовом пространстве, то $(T+T^*)/2$ называется его *вещественной*, или *эрмитовой, частью*, а $(T-T^*)/2i$ — *мнимой*, или *антиэрмитовой*, *частью*.

Заметим, что, как было показано, квазинильпотентный оператор

$$J: f(x) \longrightarrow i \int_0^x f(y)\,dy$$

в $L_2[0, 1]$ принадлежит классу $C_{1+\varepsilon}$ для каждого положительного ε, но не принадлежит классу C_1. С другой стороны, сопряженный к J оператор имеет вид

$$J^*: f(x) \longrightarrow -i \int_x^1 f(y)\,dy.$$

Поэтому

$$(2i)^{-1}(J-J^*)f(x) = 2^{-1} \int_0^1 f(y)\,dy,$$

т. е. мнимая часть оператора J является одномерным оператором. Отсюда ясно, что лишь в случае $p>1$ можно надеяться вывести принадлежность оператора N классу C_p из предположения, что его мнимая часть принадлежит C_p. Следующая теорема показывает, что это действительно можно сделать для $p>1$.

9. Теорема. *Если $1<p<\infty$ и T — вполне непрерывный квазинильпотентный оператор, мнимая часть которого принадлежит классу C_p, то сам оператор T принадлежит классу C_p.*

Докажем сначала несколько предварительных лемм и теорем. Начнем с теоремы о выпуклости для классов C_p, которая во многом аналогична теореме Рисса о выпуклости из § VI.10 и даже тесно связана с этой теоремой.

10. Теорема. *Пусть $1 \leqslant p, r, p', r' \leqslant \infty$, $p>p'$. Пусть $\mathcal{S}$ — ограниченное линейное преобразование, отображающее класс вполне непрерывных операторов C_p в класс вполне непрерывных операторов C_r. Предположим, что $\mathcal{S}$ является также ограниченным линейным преобразованием подкласса $C_{p'}$ класса C_p в класс $C_{r'}$. Тогда если $0<\alpha<1$, $1/p''=\alpha/p+(1-\alpha)/p'$, $1/r''=\alpha/r+(1-\alpha)/r'$, то $\mathcal{S}$ является ограниченным линейным преобразованием класса $C_{p''}$ в $C_{r''}$.*

Доказательство. Для каждого T из C_p и каждого вполне непрерывного оператора B с конечномерной областью значений положим

$$\Phi(T, B) = \operatorname{tr}((\mathcal{S}T)B).$$

Лемма 9.14 показывает, что для того чтобы получить желаемый результат, достаточно установить существование такой постоянной Г, что

$$|\Phi(T,\ B)| \leqslant \Gamma |T|_{p''} |B|_{q''},$$

где

$$\frac{1}{q''} = \frac{\alpha}{q} + \frac{1-\alpha}{q'}, \qquad \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1, \qquad \frac{1}{q'} + \frac{1}{r'} = 1.$$

Так как по лемме 9.14 при каждом операторе B с конечномерной областью значений $\Phi(T,\ B)$ непрерывно зависит от T, то из леммы 9.11 следует, что можно без ограничения общности считать, что и T конечномерен.

Далее, с помощью рассуждений третьего абзаца доказательства леммы 9.6 можно свести нашу теорему к следующему предложению.

Если $\Phi(T,\ B)$ — билинейная форма, определенная на семействе всех матриц в d-мерном гильбертовом пространстве, и если

$$|\Phi(T,\ B)| \leqslant \Gamma |T|_p |B|_q,$$
$$|\Phi(T,\ B)| \leqslant \Gamma |T|_{p'} |B|_{q'},$$

то

$$|\Phi(T,\ B)| \leqslant \Gamma |T|_{p''} |B|_{q''}, \tag{1}$$

где p, p', p'' и q, q', q'' связаны приведенными выше соотношениями. Так как множество невырожденных матриц всюду плотно в множестве всех конечных матриц, то при доказательстве неравенства (1) можно считать, что T и B невырождены. Для этого случая в четвертом абзаце доказательства леммы 9.14 было показано, что $T = U_1 D_1 U_2$, $B = V_1 D_2 V_2$, где U_1, U_2, V_1, V_2 — унитарные, а D_1, D_2 — диагональные матрицы. Таким образом, наша теорема вытекает из следующего утверждения.

Если $\Phi(T,\ B)$ — билинейная форма на множестве всех матриц в d-мерном гильбертовом пространстве и если

$$|\Phi(U_1 D_1 U_2,\ V_1 D_2 V_2)| \leqslant \Gamma |D_1|_p |D_2|_q,$$
$$|\Phi(U_1 D_1 U_2,\ V_1 D_2 V_2)| \leqslant \Gamma |D_1|_{p'} |D_2|_{q'}$$

для любых унитарных матриц U_1, U_2, V_1, V_2 и диагональных матриц D_1, D_2, то

$$|\Phi(U_1 D_1 U_2,\ V_1 D_2 V_2)| \leqslant \Gamma |D_1|_{p''} |D_2|_{q''}.$$

Из определения 9.1 нормы в классе C_p видно, что это утверждение является непосредственным следствием теоремы Рисса о выпуклости (лемма VI.10.7), ч. т. д.

11. Следствие. *Если* $1 \leqslant p < \infty$, $T \in C_p$ *и* $\{\varphi_i\}$ — *ортонормальное множество векторов, то*

$$\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |(T\varphi_i, \varphi_i)|^p\right\}^{1/p} \leqslant |T|_p.$$

Доказательство. Ясно, что отображение $\mathscr{S}$, переводящее T в оператор $\mathscr{S}T$, определенный формулой

$$(\mathscr{S}T)(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (T\varphi_i, \varphi_i)\, \varphi_i(x, \varphi_i),$$

ограничено, если его рассматривать как отображение класса C_∞ в себя (его норма не больше 1). Лемма 9.13 показывает, что если $T \in C_1$, то ряд $\sum_{i=1}^{\infty} (T\varphi_i, \varphi_i)$ абсолютно сходится и

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(T\varphi_i, \varphi_i)| \leqslant |T|_1.$$

Поэтому преобразование $\mathscr{S}$, рассматриваемое как отображение класса C_1 в себя, ограничено. Теперь наше утверждение сразу следует из предыдущей теоремы.

Пусть K_{ij} — семейство ядер, представляющих оператор Гильберта — Шмидта K в смысле леммы 5[1]). Положим

$\varrho(s, t) = 0$, если s и t принадлежат одному и тому же смежному интервалу множества C;

$\varrho(s, t) = \operatorname{sgn}(t - s)$ в противном случае;

$\eta(s, t) = (\varrho(s, t))^2$.

Пусть ϱK — оператор Гильберта — Шмидта, представляемый ядрами $K_{ij}(s, t)\varrho(s, t)$, а ηK — оператор Гильберта — Шмидта, представляемый ядрами $K_{ij}(s, t)\eta(s, t)$. Из леммы 5 следует, что

[1]) Ниже (до конца доказательства теоремы 9) рассматривается следующая ситуация: C — фиксированное замкнутое подмножество (положительной меры Лебега) отрезка $[0,1]$, содержащее точки 0 и 1; $e_1 \supseteq e_2 \supseteq \ldots$ — фиксированные борелевские подмножества в C; $\mathfrak{H}_0 = \widetilde{L}_2(C) \oplus L_2(e_1, \mu) \oplus L_2(e_2, \mu) \oplus \ldots$; U — фиксированный изометрический изоморфизм бесконечномерного сепарабельного гильбертова пространства $\mathfrak{H}$ на пространство $\mathfrak{H}_0$; $\mathscr{F} = \{E_\lambda \mid \lambda \in C\}$ — семейство проекторов в $\mathfrak{H}_0$, действующих по формуле, указанной в формулировке теоремы 4. Каждому оператору в $\mathfrak{H}$ при изоморфизме U соответствует некоторый оператор в $\mathfrak{H}_0$, и обратно (эти операторы обозначаются одним и тем же символом). Таким образом, определяемые ниже отображения ϱ и η классов C_p зависят от выбора множеств C, e_1, e_2, ... и изоморфизма U; непосредственно в доказательстве теоремы 9 в качестве множеств C, e_1, e_2, ... и изоморфизма U выбираются множества и изоморфизм, соответствующие (по теореме 4) рассматриваемому вполне непрерывному оператору T. — *Прим. перев.*

ϱ и η являются ограниченными линейными преобразованиями класса C_2 операторов Гильберта — Шмидта в себя. Лемма 12 показывает, что соответствующее утверждение справедливо также при $p \neq 2$.

12. Лемма. *Пусть $1 < p < \infty$. Тогда определенные выше линейные преобразования ϱ и η могут быть продолжены*[1]) *до линейных ограниченных отображений класса C_p в себя.*

Доказательство проводится по той же схеме, что и доказательство неравенства М. Рисса (теорема 7.8). Именно, мы

(a) рассматриваем случай $p = 2k$, где k — натуральное число;

(b) при помощи интерполяции распространяем результат пункта (a) на общий случай $2 \leqslant p < \infty$;

(c) используя соображения «двойственности», переходим от случая $2 \leqslant p < \infty$ к случаю $1 < p \leqslant 2$.

Детали таковы (предполагается, что $1 \leqslant p < \infty$ и $K \in C_p \cap C_2$): если s и t не принадлежат одному и тому же смежному интервалу множества C, то $\eta(s, t) = 1$; поэтому из леммы 5 следует, что оператор Гильберта — Шмидта $K - \eta K$ представляется таким семейством ядер $\tilde{K}_{ij}$, что $\tilde{K}_{ij} = 0$, если $i + j > 2$, $\tilde{K}_{11}(s, t) = 0$, если s и t не принадлежат одному и тому же смежному интервалу множества C, и $\tilde{K}_{11}(s, t) = K_{11}(s, t)$, если s и t принадлежат одному и тому же смежному интервалу множества C.

Пусть I_j — последовательность всех смежных интервалов множества C, и пусть

$$\tilde{\varphi}_j(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{(\mu(I_j))^{1/2}}, & s \in I_j, \\ 0, & s \notin I_j, \end{cases}$$

где μ обозначает меру Лебега, так что $\{\tilde{\varphi}_j\}$ — ортонормальное множество функций. Положим

$$\varphi_j = [\tilde{\varphi}_j, 0, 0, \ldots],$$

так что φ_j — ортонормальное множество векторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}_0$ теоремы 4. Из отмеченных выше свойств оператора $K - \eta K$ и из леммы 5(II), (III) следует, что

$$(K - \eta K)x = \sum_{j=1}^{\infty} (K\varphi_j, \varphi_j)\varphi_j(x, \varphi_j).$$

[1]) Если $p \leqslant 2$, то $C_p \subseteq C_2$, так что в этом случае ϱ и η уже определены на C_p и нужно лишь доказать их ограниченность по норме $|\cdot|_p$. Если же $p > 2$, то ϱ и η определены на $C_p \cap C_2$, и так как $C_p \cap C_2$ всюду плотно в C_p, то достаточно проверить, что ϱ и η ограничены по норме $|\cdot|_p$ на $C_p \cap C_2$. — *Прим. перев.*

Таким образом, по предыдущей лемме $K \to K - \eta K$ является ограниченным отображением класса C_p в себя, так что $K \to \eta K$ — также ограниченное отображение класса C_p в себя, $1 \leqslant p < \infty$.

По леммам 9.6 (c), 9.14 и определению 9.1 оператор принадлежит C_p тогда и только тогда, когда его вещественная и мнимая части принадлежат C_p; поэтому для доказательства нашей леммы достаточно доказать существование такой постоянной Γ_p, что $|\varrho H|_p \leqslant \Gamma_p |H|_p$ для всякого эрмитова оператора H из $C_p \cap C_2$.

Пусть H — эрмитов оператор из C_2. Тогда, согласно следствию 6, оператор ϱH антиэрмитов, а ηH эрмитов. Кроме того, по теореме 7 оператор $(\varrho + \eta) H$ квазинильпотентен[1]). Так как произведение коммутирующих квазинильпотентных операторов является квазинильпотентным оператором, то $\operatorname{tr}(((\varrho+\eta)H)^{2k}) = 0$ для каждого целого $k \geqslant 1$. Поскольку вещественная часть следа оператора равна следу его эрмитовой части, имеем

$$(1) \qquad \sum_{j=0}^{k} \binom{2k}{2j} \operatorname{tr}((\varrho H)^{2j} (\eta H)^{2k-2j}) = 0.$$

Так как по лемме 9.14 и следствию 9.8

$$|\operatorname{tr}((\varrho H)^{2j} (\eta H)^{2k-2j})| \leqslant |\varrho H|_{2k}^{2j} |\eta H|_{2k}^{2k-2j},$$

а по определению 9.1

$$\operatorname{tr}((\varrho H)^{2k}) = |\varrho H|_{2k}^{2k},$$

то из равенства (1) получаем

$$(2) \qquad |\varrho H|_{2k}^{2k} - \sum_{j=0}^{k-1} \binom{2k}{2j} |\varrho H|_{2k}^{2j} |\eta H|_{2k}^{2k-2j} \leqslant 0 .$$

Отсюда сразу следует, что

$$\frac{|\varrho H|_{2k}}{|\eta H|_{2k}} \leqslant \alpha,$$

---

[1]) Пусть H_{ij} — семейство ядер, представляющих оператор H в пространстве $\mathfrak{H}_0$; тогда оператор $(\varrho + \eta) H$ представляется семейством ядер $\widetilde{H}_{ij}(s, t) = (\varrho(s, t) + \eta(s, t)) H_{ij}(s, t)$. Из определения функций $\varrho(s, t)$ и $\eta(s, t)$ следует, что $\widetilde{H}_{ij}(s, t) = 0$, если $s > t$ или если s и t принадлежат одному и тому же смежному интервалу множества C. Применяя *обратное* утверждение теоремы 7, заключаем, что семейство $\mathcal{F} = \{E_\lambda \mid \lambda \in C\}$ является максимальным семейством субдиагонализирующих проекторов для оператора $(\varrho + \eta) H$ (см. примечание 1 на стр. 303 и второе примечание к формулировке теоремы 7). Поэтому к оператору $(\varrho + \eta) H$ можно применить последнее утверждение теоремы 7. — *Прим. перев.*

где α — наибольший корень уравнения

$$\alpha^{2k}-\sum_{j=0}^{k-1}\binom{2k}{2j}\alpha^{2j}=0.$$

Отсюда вытекает справедливость настоящей леммы при $p=2k$, где k — натуральное число, ибо мы уже видели, что отображение $H\to\eta H$ ограничено в C_p. А тогда по теореме 10 данная лемма верна для любого $p\geqslant 2$, $p<\infty$.

Теперь докажем тождество

$$\operatorname{tr}((\varrho A)B)=\operatorname{tr}(A(\varrho B)) \tag{3}$$

для операторов A и B из класса C_2. Это тождество сразу следовало бы из определения отображения ϱ, если бы мы знали, что для любых A и B из C_2

$$\operatorname{tr}(AB)=\sum_{i,\,j=1}^{\infty}\int_0^1\int_0^1 A_{ij}(s,\,t)\,B_{ji}(t,\,s)\,ds\,dt, \tag{4}$$

где $\{A_{ij}\}$ и $\{B_{ij}\}$ — семейства ядер, представляющие в смысле леммы 5 операторы A и B соответственно. Равенство (4) можно записать в несколько более удобной эквивалентной форме

$$\operatorname{tr}(AB^*)-\sum_{i,\,j}\int_0^1\int_0^1 A_{ij}(s,\,t)\,\overline{B_{ij}(s,\,t)}\,ds\,dt=0. \tag{5}$$

Для того чтобы проверить соотношение (5), заметим, что его левая часть определяет в C_2 такую эрмитову билинейную форму $[A,\,B]$, что (по лемме 5) $[A,\,A]=0$ для каждого A из C_2. Поэтому

$$2\operatorname{Re}[A,\,B]=[A+B,\,A+B]-[A,\,A]-[B,\,B]=0$$

для всех A, B из C_2, и аналогично $\operatorname{Im}[A,\,B]=0$, так что $[A,\,B]=0$; это доказывает тождества (5), (4) и (3).

Теперь справедливость настоящей леммы при $1<p\leqslant 2$ сразу следует из ее справедливости при $2\leqslant p<\infty$ и из леммы 9.14.

Дальше мы будем пользоваться символами ϱ и η для обозначения непрерывных продолжений отображений ϱ и η леммы 12 на класс операторов C_p. Введем также обозначение $\tau=i(\varrho+\eta)$. Отметим следующее следствие.

13. Следствие. (a) *Отображение τ является ограниченным отображением класса C_p в себя, $1<p<\infty$.*

(b) *Если оператор H эрмитов, то антиэрмитова часть оператора τH равна ηH.*

(c) *Область значений каждого из проекторов E_λ теоремы 4 инвариантна относительно оператора τH.*

Доказательство. Утверждения (a) и (b) были доказаны раньше. Для доказательства (c) достаточно заметить, что обе части равенства $E_\lambda(\tau H)E_\lambda = (\tau H)E_\lambda$ зависят от оператора H непрерывно. Таким образом, по лемме 9.11 достаточно проверить утверждение (c) для операторов H с конечномерной областью значений. Так как по теореме 7 оно справедливо для всякого оператора H типа Гильберта—Шмидта, то наше следствие доказано.

14. Следствие. *Если $A \in C_p$—оператор в пространстве $\mathfrak{H}_0$ теоремы 4 и $(A\varphi, \varphi) = 0$ для характеристической функции*[1] *φ любого смежного интервала множества C, то $A = \eta A$.*

Доказательство. Пусть $\{I_j\}$—последовательность всех смежных интервалов множества C, и пусть φ_j—векторы, введенные в третьем абзаце доказательства леммы 12. Тогда

$$(A - \eta A)x = \sum_{j=1}^{\infty} (A\varphi_j, \varphi_j)\varphi_j(x, \varphi_j),$$

если $A \in C_2$. Согласно следствию 11 и лемме 12, обе части этого равенства непрерывны по $A \in C_p$; поэтому из леммы 9.11 следует, что оно справедливо для всех $A \in C_p$. Отсюда немедленно вытекает справедливость данного следствия.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 9.

Доказательство теоремы 9. Используя теорему 4, можно, не ограничивая общности, считать, что область значений каждого из проекторов E_λ инвариантна относительно T. Пусть (a, b)—смежный интервал множества C, а χ—его характеристическая функция. Тогда если f—вектор

$$f = [\chi, 0, 0, \ldots],$$

то Tf можно представить в виде

$$Tf = [c\chi + g_1, g_2, \ldots],$$

где $[g_1, g_2, \ldots]$ принадлежит области значений проектора E_a. Отсюда по индукции

$$T^n f = [c^n\chi + g_1^{(n)}, g_2^{(n)}, \ldots],$$

где $[g_1^{(n)}, g_2^{(n)}, \ldots]$ принадлежит области значений проектора E_a. Поэтому

$$(T^n f, f) = c^n(b - a).$$

---

[1]) Точнее, φ—вектор в $\mathfrak{H}_0$, первая компонента которого равна характеристической функции некоторого смежного интервала, а остальные компоненты равны 0.— *Прим. перев.*

Поскольку оператор T квазинильпотентен, для всякого положительного ε имеем $|T^n| = o(\varepsilon^n)$ при $n \to \infty$. Следовательно, $c = 0$. Поэтому $(T\varphi_i, \varphi_i) = 0$, где φ_i — ортонормальные векторы, введенные в третьем абзаце доказательства леммы 12. Пусть H — мнимая часть оператора T. Тогда $(H\varphi_i, \varphi_i) = 0$ для всех i, так что по следствию 14 $H = \eta H$. Согласно следствию 13, оператор ηH равен мнимой части оператора τH; поэтому T и τH имеют одинаковые мнимые части, так что оператор $S = T - \tau H$ эрмитов. По тому же следствию 13 области значений проекторов E_λ инвариантны относительно оператора S. Из определения преобразования τ и его непрерывности следует, что $((\tau H)\varphi_i, \varphi_i) = 0$ для всех i, так что $(S\varphi_i, \varphi_i) = 0$ для всех i. Но оператор S имеет специальный вид, указанный в лемме 8. Поэтому $S = 0$. Следовательно, $T = \tau H$, и теорема 9 следует из леммы 12.

Теперь совсем просто получить полезное усиление теорем полноты из § 6 и 9. Из первых трех абзацев доказательства теоремы 6.29 легко усмотреть, что справедливость теоремы о полноте (6.29) для любого вполне непрерывного оператора T следует из аналитичности функции $\lambda^N R(\lambda; T^* | \mathfrak{X})$ в начале координат; здесь $\mathfrak{X}$ — такое инвариантное относительно T^* подпространство гильбертова пространства, что сужение оператора T^* на $\mathfrak{X}$ является квазинильпотентным оператором. Если предположить, что мнимая часть оператора T принадлежит классу C_p, то ясно, что мнимая часть H_1 оператора T^* также принадлежит классу C_p. Пусть E — оператор ортогонального проектирования на $\mathfrak{X}$. Тогда легко видеть, что мнимая часть оператора $T^* | \mathfrak{X}$ совпадает с сужением на $\mathfrak{X}$ оператора EH_1E; поэтому мнимая часть оператора $T^* | \mathfrak{X}$ принадлежит C_p. По теореме 9 сам оператор $T^* | \mathfrak{X}$ должен принадлежать C_p. Как только установлен этот основной факт, можно продолжить рассуждение так же, как при доказательстве теоремы 6.29. Таким образом, учитывая обобщение, отмеченное в теореме 9.29, мы получаем следующий результат.

15. Теорема. *Пусть* $1 < p < \infty$, *и пусть мнимая часть вполне непрерывного оператора* T *в гильбертовом пространстве* $\mathfrak{H}$ *принадлежит классу* C_p. *Пусть* $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ — *непересекающиеся дифференцируемые дуги на комплексной плоскости, выходящие из начала координат. Допустим, что каждая из* s *областей, на которые эти дуги делят плоскость, содержится в секторе с вершиной в начале и углом раствора, меньшим* π/p. *Пусть* $N > 0$ — *целое число, и пусть резольвента оператора* T *допускает оценку*

$$|R(\lambda; T)| = O(|\lambda|^{-N}),$$

когда $\lambda \to 0$ *вдоль какой-нибудь из дуг* γ_i. *Тогда подпространство* $\mathrm{sp}(T)$ *содержит подпространство* $T^N \mathfrak{H}$.

Рассуждая, как при доказательстве следствий 6.30 и 6.31, мы получаем следующие утверждения, обобщающие следствия 9.30 и 9.31.

16. Следствие. *Пусть дуги* $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ *выбраны так же, как в предыдущей теореме, и предположим, что, когда* λ *стремится к нулю вдоль какой-нибудь из этих дуг, резольвента вполне непрерывного оператора* T $(\mathrm{Im}\, T \in C_p,\ 1 < p < \infty)$ *допускает оценку* $|R(\lambda;\ T)| = O(|\lambda|^{-1})$. *Тогда подпространство* $\mathrm{sp}(T)$ *совпадает со всем гильбертовым пространством* $\mathfrak{H}$.

$\to$ 17. Следствие. *Пусть* $1 < p < \infty$, *и пусть* T — *неограниченный оператор в гильбертовом пространстве* $\mathfrak{H}$, *имеющий всюду плотную область определения. Допустим, что для некоторого* λ_0 *из резольвентного множества оператора* T *оператор* $R(\lambda_0;\ T)$ *вполне непрерывен, а его мнимая часть принадлежит классу* C_p. *Пусть* $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ — *непересекающиеся дифференцируемые дуги, каждая из которых имеет предельное направление на бесконечности, а угол, образованный в бесконечности любой парой соседних дуг, меньше* π/p. *Допустим, что, когда* $\lambda \to \infty$ *вдоль какой-нибудь из этих дуг, резольвента* $R(\lambda;\ T)$ *допускает оценку* $|R(\lambda;\ T)| = O(|\lambda|^N)$. *Тогда подпространство* $\mathrm{sp}(T)$ *совпадает со всем гильбертовым пространством* $\mathfrak{H}$.

11. Примечания и дополнения

Бикомпактные группы. Теорема 1.1 является частным случаем сформулированной ниже теоремы 3. Простое доказательство существования меры Хаара на бикомпактной группе со счетной базой было дано фон Нейманом [12] и повторено у Понтрягина [1; § 29]. Фундаментальная теорема Петера — Вейля [1] сначала была доказана для бикомпактных групп Ли; см. также Люмис [1; § 38], Понтрягин [1; § 33] и А. Вейль [1; § 21].

Теорема Петера — Вейля 1.4 является основной в теории представлений бикомпактных групп. Мы приведем наиболее важные определения и теоремы этой теории.

Определение. Пусть G — топологическая группа, а $\mathfrak{X}$ — банахово пространство. Тогда *представлением* R группы G в $\mathfrak{X}$ называется сильно непрерывный гомоморфизм $g \to R(g)$ группы G в группу ограниченных обратимых линейных операторов, действующих в $\mathfrak{X}$. Если $\mathfrak{X}$ — конечномерное комплексное евклидово пространство, то представление R называется конечномерным.

Если $\mathfrak{X}$ — гильбертово пространство и $R(g)$ для каждого $g \in G$ является унитарным оператором, то представление R называется *унитарным*.

Определение. Пусть G — топологическая группа, а R_1 и R_2 — два ее представления, действующие в пространстве $\mathfrak{X}$. Тогда R_1 и R_2 называются *эквивалентными*, если существует такое ограниченное и обладающее ограниченным обратным линейное преобразование T пространства $\mathfrak{X}$, что $R_1(g) = T^{-1}R_2(g)T$ для всякого $g \in G$.

Используя существование на бикомпактной группе инвариантной меры, легко доказать следующую теорему.

Теорема. *Всякое конечномерное представление бикомпактной группы G эквивалентно конечномерному унитарному представлению.*

Определение. Пусть G — топологическая группа, а R — ее представление в B-пространстве $\mathfrak{X}$. Тогда R называется *неприводимым*, если $\mathfrak{X}$ не содержит собственного замкнутого подпространства, инвариантного относительно всех операторов $R(g)$, $g \in G$.

Определение. Пусть G — топологическая группа, а R — ее представление в B-пространстве $\mathfrak{X}$. Пусть $\mathfrak{X}$ разлагается в прямую сумму $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{X}_n$ замкнутых подпространств, инвариантных относительно всех операторов $R(g)$. Положим $R_i(g) = R(g) \mid \mathfrak{X}_i$, $i = 1, \ldots, n$, так что R_i — представления группы G. Тогда пишут $R = R_1 \oplus \ldots \oplus R_n$ и говорят, что R является *прямой суммой* представлений $R_1, \ldots, R_n$.

Следующую теорему легко доказать по индукции в случае, когда представление R унитарно, а в силу сформулированной выше теоремы она будет справедлива и в общем случае.

Теорема. *Всякое конечномерное представление бикомпактной группы G разлагается в прямую сумму неприводимых представлений.*

Эта теорема показывает, что при изучении конечномерных представлений бикомпактной группы G можно, не теряя общности, ограничиться рассмотрением неприводимых конечномерных унитарных представлений. Если такое представление действует в конечномерном пространстве E^n, то, вводя в E^n базис, можно описать это представление семейством унитарных матриц $\{U_{ij}(g)\}$. Функции $U_{ij}(g)$ называются *матричными элементами* представления; они непрерывно зависят от g. Сумма $\sum_{i=1}^{n} U_{ii}(g) = \operatorname{tr}(R(g))$ называется *следом* представления.

Теорема. *Пусть R и $\hat{R}$ — два неприводимых конечномерных унитарных представления бикомпактной группы G, а μ — мера Хаара на G. Пусть $\{U_{ij}(g)\}$ и $\{\hat{U}_{kl}(g)\}$ — матричные элементы этих представлений. Тогда если R и $\hat{R}$ не эквивалентны, то*

$$\int_G U_{ij}(g)\overline{\hat{U}_{kl}(g)}\mu(dg)=0 \quad \text{для всех} \quad i,\ j,\ k,\ l.$$

Кроме того,

$$\int_G U_{kl}(g)\overline{U_{ij}(g)}\mu(dg)=0,$$

если $k \neq i$ или $l \neq j$.

Символом $L_2(G)$ мы обозначаем гильбертово пространство всех квадратично интегрируемых по мере Хаара функций на G. Из предыдущей теоремы и теоремы Петера — Вейля 1.4 вытекает следующая теорема.

Теорема. *Пусть G — бикомпактная топологическая группа, и пусть $\{R^{(\alpha)}\}$ — максимальное множество её попарно не эквивалентных унитарных представлений. Пусть $\{U_{ij}^{(\alpha)}(g)\}$ — соответствующее семейство матричных элементов. Тогда $\{U_{ij}^{(\alpha)}(\cdot)\}$ — полная ортогональная система функций в $L_2(G)$.*

Определение. Множество $\{R^{(\alpha)}\}$ конечномерных неприводимых унитарных представлений бикомпактной группы G называется *полной системой представлений группы* G, если

(a) никакие два из представлений $R^{(\alpha)}$ не являются эквивалентными;

(b) всякое неприводимое представление группы G эквивалентно одному из представлений $R^{(\alpha)}$.

Следствие. Если G — бесконечная бикомпактная топологическая группа, удовлетворяющая второй аксиоме счетности, то всякая полная система представлений группы G счетна. Полная система представлений конечной группы конечна.

Определение. Пусть G — бикомпактная группа; функция $f \in L_2(G)$ называется *инвариантной относительно внутренних автоморфизмов*[1], или, для краткости, просто *инвариантной*, если $f(h)=f(ghg^{-1})$ для любого $g \in G$ и для почти всех h из G. *Классом сопряженных элементов* элемента h из G называется множество $\{ghg^{-1} \mid g \in G\}$.

Инвариантные функции образуют замкнутое подпространство в $L_2(G)$. След любого конечномерного представления группы G является инвариантной функцией.

[1] В оригинале «class function» — функция класса.— *Прим. перев.*

Теорема. *Два неприводимых представления бикомпактной группы G эквивалентны тогда и только тогда, когда их следы совпадают, и не эквивалентны тогда и только тогда, когда их следы ортогональны. Следы полной системы представлений группы G образуют полный ортогональный базис в подпространстве пространства $L_2(G)$, состоящем из всех инвариантных функций.*

Следствие. *Если группа G конечна, то число представлений, входящих в полную систему ее представлений, равно числу различных классов в G.*

Главная цель теории представлений бикомпактных групп состоит в точном описании полной системы представлений для заданной группы.

Это было сделано для многих конечных групп. По поводу вычисления представлений группы $\pi(n)$ всех перестановок из n объектов см. Литлвуд [1]. Вычисление представлений знакопеременной подгруппы $\alpha(n)$ группы $\pi(n)$ можно найти у Фробениуса [4].

Представления бесконечных бикомпактных групп наиболее исчерпывающим образом изучены для *связных бикомпактных групп Ли*. Это такие связные бикомпактные группы со счетной базой, которые обладают окрестностью единицы, гомеоморфной области конечномерного евклидова пространства. Этот гомеоморфизм может быть выбран таким образом, что в «координатах», вводимых с его помощью в окрестности единицы, основные групповые операции $h \to h^{-1}$ и $[g, h] \to gh$ описываются функциями, которые не только непрерывны, но и бесконечно дифференцируемы. Структура связных бикомпактных групп Ли хорошо изучена. Пусть G — такая группа. Тогда существуют такая связная топологическая группа H и такой гомоморфизм h группы H на G, что множество $h^{-1}(e)$ не имеет в H предельных точек. При этом H является прямой суммой конечного числа групп H_i, каждая из которых изоморфна либо

(1) аддитивной группе вещественных чисел, либо

(2) группе $SU(n)$ всех комплексных унитарных матриц порядка n с определителем 1, либо

(3) группе $SpU(2n)$ всех комплексных унитарных матриц V порядка $2n$, для которых $[Vx, Vy] = [x, y]$, где $[x, y]$ — невырожденная билинейная форма, определяемая равенством $[x, y] = x_1y_2 - y_1x_2 + x_3y_4 + \ldots + x_{2n-1}y_{2n} - y_{2n-1}x_{2n}$, либо

(4) группе $\widehat{UR}(n)$, допускающей гомоморфизм типа два-один[1]) на группу $UR(n)$ всех вещественных унитарных матриц порядка n с определителем 1, либо

[1]) То есть такой гомоморфизм, ядро которого (прообраз единичной матрицы) изоморфно циклической группе второго порядка.— *Прим. перев.*

(5) одной из пяти других бикомпактных групп, известных под названием *особых простых бикомпактных групп* (см. Э. Картан [1]).

Сформулированная выше теорема о структуре связных бикомпактных групп Ли показывает, что можно найти неприводимые представления таких групп, если известны все неприводимые унитарные представления перечисленных типов (1)—(5) основных групп Ли. Поскольку аддитивная группа вещественных чисел коммутативна, все ее неприводимые унитарные представления одномерны и имеют вид $x \to \exp(i\alpha x)$, где $-\infty < \alpha < \infty$. Полная система представлений $\{R^{(\alpha)}\}$ для каждой из групп $SU(n)$ и $SpU(2n)$ описана в известной книге Г. Вейля [10]. Пространства, в которых действуют операторы $R^{(\alpha)}$, являются неприводимыми пространствами тензоров; для каждого тензора χ и каждого элемента g группы $SU(n)$ или $SpU(2n)$ тензор $R^{(\alpha)}(g)\chi$ определяется естественным для тензорного анализа способом. Вейль описал также полную систему представлений для группы вращений $RU(n)$; эти представления тоже реализуются в неприводимых пространствах тензоров. Группа $\widehat{RU}(n)$ имеет еще и другие представления, которые, если бы мы попытались описать их через представления группы вращений, оказались бы двузначными. Это так называемые *спинорные представления* группы $\widehat{RU}(n)$ (или, допуская вольность речи, группы вращений $RU(n)$). По поводу описания этих представлений см. работу Брауэра и Г. Вейля [1], а также обзорную статью П. К. Рашевского [1]. Полная классификация неприводимых конечномерных унитарных представлений пяти особых простых бикомпактных групп содержится в статье Г. Вейля [11].

Теория представлений групп, которые не являются ни бикомпактными, ни коммутативными, несравненно сложнее и до сих пор полностью не разработана. Однако для некоторых важных небикомпактных некоммутативных групп полностью классифицированы неприводимые унитарные представления в гильбертовом пространстве и получены некоммутативные обобщения различных важных теорем гармонического анализа (например, обобщение теоремы Планшереля). Для ознакомления с теорией представлений таких групп рекомендуем работу И. М. Гельфанда и М. А. Наймарка [3]. Важный частный случай представлений группы Лоренца изложен в статье Наймарка [14].

Почти периодические функции. Основная теорема теории почти периодических функций принадлежит Г. Бору (см. Бор [2; § 84], где изложено другое доказательство). Другие доказательства этой теоремы и дополнительные результаты можно найти у Люмиса [1; § 41] и А. Вейля [1; § 33—35], а также в литературе, указанной в разделе § IV.16, относящемся к пространству AP.

Алгебры со сверткой. В рассуждениях § 3 мы свободно пользовались свойствами меры Лебега на вещественной прямой. Здесь будут доказаны соответствующие свойства меры Хаара, необходимые в различных доказательствах. Таким образом, читатель получит замкнутое изложение этой темы (за исключением доказательства существования меры Хаара на локально бикомпактной σ-бикомпактной абелевой группе). Как было отмечено в тексте, развитая в этом параграфе теория справедлива для произвольной недискретной локально бикомпактной σ-бикомпактной абелевой группы. Однако мы хотели бы сделать несколько замечаний относительно общего некоммутативного случая. Прежде всего в теореме 2 мы докажем, что локально бикомпактная группа автоматически является нормальным топологическим пространством; этот факт иногда использовался в тексте. Далее мы сформулируем фундаментальную теорему относительно существования меры Хаара и докажем некоторые из наиболее важных элементарных свойств этой меры, которые достаточно убедительно показывают, что эта мера весьма похожа на меру Лебега на вещественной прямой.

Следует отметить, что группы, при изучении которых мы пользуемся мерой Хаара, не только локально бикомпактны, но и σ-бикомпактны, т. е. они являются счетным объединением бикомпактных множеств. Мы кратко рассмотрим частный случай бикомпактной группы R, а также случай, когда группа R дискретна, исключенный в § 3. Наконец, мы докажем знаменитую теорему двойственности Понтрягина.

В дальнейшем мы будем записывать групповую операцию в виде сложения, поскольку в § 3 и 4 рассматривались абелевы группы.

1. Лемма. *Если R — локально бикомпактное пространство, а F — замкнутое подмножество в R, не содержащее точку p, то найдется такая вещественная непрерывная на R функция f, что $f(p)=0$, $f(F)=1$ и $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ при $x \in R$.*

Замечание. Эта лемма утверждает, что локально бикомпактное пространство является вполне регулярным (IV.6.21) топологическим пространством.

Доказательство. Присоединим к пространству R точку ∞ и будем считать ее окрестностями в $R \cup \{\infty\}$ дополнения бикомпактных подмножеств R. Тогда $R \cup \{\infty\}$ станет бикомпактным хаусдорфовым пространством и потому (I.5.9) нормальным. Множество $F_1 = F \cup \{\infty\}$ замкнуто в $R \cup \{\infty\}$. Пусть f_1 — такая вещественная непрерывная на $R \cup \{\infty\}$ функция, что $f_1(p)=0$, $f_1(F_1)=1$ и $0 \leqslant f_1(x) \leqslant 1$ при $x \in R \cup \{\infty\}$. Тогда сужение функции f_1 на R является искомой функцией, ч. т. д.

2. Теорема. *Локально бикомпактное σ-бикомпактное топологическое пространство R нормально.*

Доказательство. Пусть K_n — такая возрастающая последовательность бикомпактных множеств, что $R = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Заметим, что если A и B — непересекающиеся замкнутые подмножества в R и n — натуральное число, то найдется такое открытое множество $U \subseteq R$, что $A \cap K_n \subseteq U$ и $\overline{U} \cap B = \varnothing$. Действительно, для любого $p \in A \cap K_n$ найдется такое открытое множество $U(p)$, что $p \in U(p)$ и $\overline{U(p)} \cap B = \varnothing$; в силу бикомпактности $A \cap K_n$ в качестве U можно взять объединение конечного числа множеств $U(p)$. Для доказательства нормальности пространства R воспользуемся этим замечанием и принципом индукции.

Пусть F_1 и F_2 — непересекающиеся замкнутые множества в R. Выберем в R такое открытое множество G_1, что

$$F_1 \cap K_1 \subseteq G_1, \qquad \overline{G_1} \cap F_2 = \varnothing,$$

и такое открытое множество H_1, что

$$F_2 \cap K_1 \subseteq H_1, \qquad \overline{H_1} \cap (F_1 \cup \overline{G_1}) = \varnothing.$$

Применяя индукцию, построим такие открытые множества G_n и H_n, что

$$F_1 \cap K_n \subseteq G_n, \qquad \overline{G_n} \cap (F_2 \cup \overline{H_1} \cup \ldots \cup \overline{H_{n-1}}) = \varnothing,$$

$$F_2 \cap K_n \subseteq H_n, \qquad \overline{H_n} \cap (F_1 \cup \overline{G_1} \cup \ldots \cup \overline{G_n}) = \varnothing.$$

Это построение гарантирует, что $G_n \cap H_m = \varnothing$ для всех натуральных n и m. Положим $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ и $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$, так что G и H — непересекающиеся открытые множества. Так как $\bigcup K_n = R$, то $F_1 \subseteq G$, $F_2 \subseteq H$ и теорема доказана.

Теперь перейдем к теории меры на локально бикомпактной группе.

3. Теорема (*Хаар*). *Если локально бикомпактная топологическая группа R является объединением счетного числа бикомпактных множеств, то существует такая неотрицательная счетно аддитивная мера λ, определенная на σ-алгебре Σ борелевских подмножеств R, что $\lambda(U) > 0$ для всякого открытого множества U, $\lambda(K) < \infty$ для всякого бикомпактного множества K и $\lambda(x+E) = \lambda(E)$ для всех $x \in R$ и $E \in \Sigma$. Мера λ обладает свойством регулярности*

$$\sup_{F \subseteq E} \lambda(F) = \lambda(E) = \inf_{G \supseteq E} \lambda(G), \qquad E \in \Sigma,$$

где F — замкнутое, а G — открытое множества. Кроме того, мера λ единственная в том смысле, что всякая другая мера, удовлетворяющая перечисленным условиям, отличается от λ положительным множителем.

Отметим, что мы пользовались этой теоремой только для случая абелевой или бикомпактной группы, причем для бикомпактных групп она была доказана в теореме 1.1. Мы не будем доказывать эту теорему, а отошлем читателя к книге Халмоша [5; стр. 244—248].

Существование инвариантной меры на группе, удовлетворяющей второй аксиоме счетности, впервые было доказано Хааром [1], а вопрос единственности впервые рассматривался фон Нейманом [17]. Другие доказательства существования или единственности были предложены А. Картаном [1], Какутани [17], Какутани и Кодаира [1], Люмисом [1, 3], фон Нейманом [12], Райковым [1, 2] и А. Вейлем [1, 2]. Другие результаты о мерах, инвариантных относительно преобразований, можно найти у Окстоби и Улама [1].

Теперь мы изложим некоторые полезные свойства меры Хаара, хотя и простые, но не являющиеся совсем уж очевидными следствиями свойства инвариантности.

4. Лемма. *Пусть R — локально бикомпактная σ-бикомпактная*[1]) *абелева топологическая группа, Σ есть σ-алгебра ее борелевских подмножеств, а λ — мера Хаара на R. Тогда $\lambda(E+x)=\lambda(E)$ и $\lambda(-E)=\lambda(E)$ для любых E из Σ и x из R.*

Доказательство. Инвариантность меры Хаара относительно правых сдвигов немедленно следует из коммутативности группы R. Тот факт, что $\lambda(-E)=\lambda(E)$, является простым следствием единственности меры Хаара.

5. Следствие. *Пусть R, Σ и λ — такие же*[2]), *как в лемме 4. Тогда $\lambda(R)<\infty$ в том и только том случае, когда группа R бикомпактна. Точки из R тогда и только тогда имеют положительную меру, когда группа R дискретна.*

Доказательство. Если группа R бикомпактна, то из теоремы 3 следует, что $\lambda(R)<\infty$. Обратно, допустим, что R небикомпактна, и пусть V — окрестность нуля с бикомпактным замыканием. Поскольку никакой конечный набор сдвигов окрестности V не покрывает R, можно выбрать такую последовательность $\{x_n\}$, что $x_{n+1} \notin \bigcup_{i=1}^{n} (x_i+V)$. Пусть $U=-U$ есть такая непустая окрест-

---

[1]) Условие σ-бикомпактности можно отбросить.— *Прим. перев.*

[2]) В этом следствии предположения о коммутативности и σ-бикомпактности группы R излишни.— *Прим. перев.*

ность нуля, что $U+U\subseteq V$. Тогда открытые множества $\{x_n+U\}$ попарно не пересекаются, так что

$$\infty=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(x_n+U)=\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(x_n+U)\right)\leqslant\lambda(R)$$

и

$$\lambda(R)=\infty.$$

Если группа R дискретна, то множество, состоящее из единственной точки, открыто и потому имеет положительную меру. Обратно, если точки имеют положительную меру α, то каждую точку p можно заключить в открытое множество U_p с мерой, меньшей $3\alpha/2$, откуда следует, что U_p не может содержать точек, отличных от p. Поэтому одноточечные множества одновременно открыты и замкнуты, ч. т. д.

Поскольку (R, Σ, λ) — пространство с σ-конечной мерой, теория интегрирования, развитая в гл. III, может служить основой для построений § 3 и 4. Отметим, в частности, что произведение групп $R\times R$ является локально бикомпактной σ-бикомпактной (абелевой) группой, если такой является группа R. Поэтому это произведение групп обладает мерой Хаара $\lambda^{(2)}$, определенной на σ-алгебре $\Sigma^{(2)}$ его борелевских множеств. Естественно ожидать, что произведение мер $\lambda\times\lambda$ совпадает, с точностью до постоянного множителя, с $\lambda^{(2)}$. Этот факт устанавливается в теореме 7.

6. Лемма. *Пусть локально бикомпактная абелева*[1]) *группа R является счетным объединением бикомпактных множеств. Пусть λ — мера Хаара на R, а Σ есть σ-алгебра борелевских подмножеств R. Тогда если функция f является λ-измеримой, то функция g, определенная равенством $g(x, y)=f(x-y)$, будет $(\lambda\times\lambda)$-измеримой.*

Доказательство[2]). Для произвольного локально бикомпактного σ-бикомпактного пространства X обозначим через $K_0(X)$ класс

---

[1]) Условие коммутативности в этой лемме можно опустить.— *Прим. перев.*

[2]) Доказательства леммы 6 и теоремы 7, приведенные в оригинале, содержат ошибку: авторы утверждают, что всякое открытое подмножество произведения $R\times R$ принадлежит σ-алгебре $\Sigma\times\Sigma$; это утверждение (равносильное тому, что $\Sigma^{(2)}=\Sigma\times\Sigma$) неверно, как показывает пример, приведенный по другому поводу у Халмоша [5; § 59, упр. 2]. Но если R удовлетворяет второй аксиоме счетности, то равенство $\Sigma^{(2)}=\Sigma\times\Sigma$ все же справедливо, ибо в этом случае всякое открытое множество $U\subseteq R\times R$ можно представить в виде объединения *счетного* числа множеств вида $V\times W$, где V, W — открытые подмножества в R. Из этого равенства и теоремы Фубини сразу следует, что если множество E является λ^*-измеримым, то множество $p(E)=\{[x, y]\mid x-y\in E\}$ будет $(\lambda\times\lambda)^*$-измеримым, после чего доказательство леммы 6 заканчивается так же, как в тексте.— *Прим. перев.*

всех бикомпактных подмножеств в X типа G_δ, и пусть $\Sigma_0(X)$ — минимальная σ-алгебра, содержащая класс $K_0(X)$. Множества, принадлежащие $\Sigma_0(X)$, будем называть *бэровскими*. Ясно, что всякое бэровское множество является борелевским, т. е. $\Sigma_0(X) \subseteq \Sigma(X)$. Если X и Y — локально бикомпактные σ-бикомпактные пространства, то $\Sigma_0(X \times Y) = \Sigma_0(X) \times \Sigma_0(Y)$ (Халмош [5; § 51, теорема 5]; определение произведения σ-алгебр см. в III.11.3).

Пусть S — отображение группы $R \times R$ на R, определяемое формулой $S([x, y]) = x - y$; для всякого множества $E \subseteq R$ положим $p(E) = S^{-1}(E) = \{[x, y] \mid x - y \in E\}$. Докажем, что если $E \in \Sigma_0(R)$, то $p(E) \in \Sigma_0(R) \times \Sigma_0(R)$. Так как $p(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} p(E_i)$, $p(E') = (p(E))'$ и $p(\varnothing) = \varnothing$, то достаточно доказать, что если $K \in K_0(R)$, то $p(K) \in \Sigma_0(R \times R)$. Итак, пусть $K \in K_0(R)$. Так как K — бикомпактное множество типа G_δ, а R нормально (теорема 2), то, применяя теорему Урысона (I.5.3), нетрудно построить такую непрерывную на R вещественную функцию g, что $\{x \in R \mid g(x) = 0\} = K$. Положим $h([x, y]) = g(S([x, y]))$. Так как отображение S непрерывно, то h — вещественная непрерывная функция на $R \times R$, причем $\{[x, y] \mid h([x, y]) = 0\} = S^{-1}(K) = p(K)$. Так как $R \times R$ локально бикомпактно и σ-бикомпактно, то функция h измерима относительно σ-алгебры $\Sigma_0(R \times R)$ (Халмош [5; § 51, теорема 2]), и потому $p(K) \in \Sigma_0(R \times R)$. Таким образом, из того, что $E \in \Sigma_0(R)$, следует, что $p(E) \in \Sigma_0(R) \times \Sigma_0(R) \subseteq \Sigma \times \Sigma$.

Пусть теперь $E \in \Sigma_0(R)$ и $\lambda(E) = 0$. По теореме Фубини (III.11.9)

$$\int_{R \times R} \chi_{p(E)}(s, t)\, (\lambda \times \lambda)(d[s, t]) = \int_{R \times R} \chi_E(s - t)\, (\lambda \times \lambda)(d[s, t]) =$$

$$= \int_R \left\{ \int_R \chi_E(s - t)\, \lambda(ds) \right\} \lambda(dt) = \int_R 0 \cdot \lambda(dt) = 0.$$

Таким образом, если $E \in \Sigma_0(R)$ и $\lambda(E) = 0$, то $(\lambda \times \lambda)(p(E)) = 0$. Отсюда и из доказанного выше следует, что если E принадлежит λ-пополнению σ-алгебры $\Sigma_0(R)$ (т. е. если существуют такие $E_1, E_2 \in \Sigma_0(R)$, что $E \subseteq E_1$, $E_1 - E \subseteq E_2$ и $\lambda(E_2) = 0$), то $p(E)$ принадлежит $(\lambda \times \lambda)$-пополнению σ-алгебры $\Sigma_0(R) \times \Sigma_0(R)$, а потому и $(\lambda \times \lambda)$-пополнению более широкой σ-алгебры $\Sigma \times \Sigma$. Но из регулярности меры λ (точнее, из ее регулярной пополнимости; см. Халмош [5; стр. 224—225 и § 64, теорема 9]) следует, что λ-пополнение σ-алгебры $\Sigma_0(R)$ совпадает с λ-пополнением σ-алгебры Σ. Таким образом, если E принадлежит λ-пополнению Σ, то $p(E)$ принадлежит $(\lambda \times \lambda)$-пополнению $\Sigma \times \Sigma$.

Пусть, наконец, f есть λ-измеримая функция, U — открытое множество комплексных чисел, $E = \{x \mid f(x) \in U\}$ и $D = \{[s, y] \mid f(s - y) \in U\}$.

Тогда $D=p(E)$, и измеримость функции $f(x-y)$ немедленно следует из теоремы III.6.10.

Первостепенное значение при работе с мерой Хаара имеет следующий результат.

7. Теорема[1]). *Пусть Σ есть σ-алгебра борелевских множеств локально бикомпактной σ-бикомпактной группы R, и пусть λ — мера Хаара на R. Тогда мера $\lambda\times\lambda$ (определенная первоначально на σ-алгебре $\Sigma\times\Sigma$) допускает единственное продолжение $\widetilde{\lambda\times\lambda}$ на σ-алгебру $\Sigma^{(2)}$ всех борелевских подмножеств $R\times R$, причем это продолжение является мерой Хаара на $R\times R$.*

Доказательство. Пусть $\lambda^{(2)}$ — мера Хаара на $R\times R$. Докажем сначала существование такой постоянной $c>0$, что

$$\text{(I)}\qquad \lambda^{(2)}(E)=c(\lambda\times\lambda)(E),\qquad E\in\Sigma\times\Sigma.$$

Для этого в силу следствия III.11.6 достаточно показать, что

$$\text{(II)}\qquad \lambda^{(2)}(A\times B)=c\lambda(A)\lambda(B),\qquad A,\ B\in\Sigma.$$

Для каждого множества $E\in\Sigma^{(2)}$ положим $\mu(E)=\lambda^{(2)}(hE)$, где h — гомеоморфный гомоморфизм группы $R\times R$ на себя, определяемый формулой

$$h([x,\ y])=[y,\ x],\qquad [x,\ y]\in R\times R.$$

Легко проверить, что μ является мерой Хаара на $R\times R$, и потому существует такая постоянная c, что $\mu(E)=c\lambda^{(2)}(E)$ для всех $E\in\Sigma^{(2)}$. Отсюда следует, что $\lambda^{(2)}(A\times B)=c\lambda^{(2)}(B\times A)$ для любой пары множеств A, B из Σ. На самом деле $c=1$. Это можно заметить, выбирая в качестве A и B открытые множества с бикомпактными замыканиями, так что $0<\lambda^{(2)}(A\times B)<\infty$. Поэтому

$$\text{(III)}\qquad \lambda^{(2)}(A\times B)=\lambda^{(2)}(B\times A),\qquad A,\ B\in\Sigma.$$

Пусть теперь B — такое фиксированное множество из Σ, что $0<\lambda(B)<\infty$; рассмотрим меру на Σ, которая на множестве A принимает значение $\lambda^{(2)}(A\times B)$. Легко видеть, что эта мера является мерой Хаара на R, и потому для некоторой постоянной $c(B)$, не зависящей от A,

$$\text{(IV)}\qquad \lambda^{(2)}(A\times B)=c(B)\lambda(A),\qquad A\in\Sigma.$$

Если и множество A удовлетворяет условию, наложенному на B, т. е. $0<\lambda(A)<\infty$, то, меняя ролями A и B и используя равенства (III) и (IV), получаем $c(B)\lambda(A)=c(A)\lambda(B)$. Таким образом, для множеств A и B из Σ, имеющих конечную положи-

[1]) Формулировка теоремы 7 в оригинале содержит неточность. В переводе формулировка и доказательство теоремы изменены.— *Прим. перев.*

тельную меру λ, отношение

$$\frac{c(A)}{\lambda(A)} = \frac{c(B)}{\lambda(B)}$$

равно некоторой постоянной c, не зависящей ни от A, ни от B, т. е. $c(B) = c\lambda(B)$, а это ввиду (IV) означает, что равенство (II) справедливо, если $0 < \lambda(B) < \infty$. Используя счетную аддитивность мер $\lambda^{(2)}$ и λ, а также σ-бикомпактность группы R, немедленно получаем, что (II) имеет место для всех B из Σ. Поэтому (I) справедливо для всех $E \in \Sigma \times \Sigma$. Так как мера Хаара $\lambda^{(2)}$ определена на σ-алгебре $\Sigma^{(2)}$, то в силу (I) равенство

$$\text{(V)} \qquad \widetilde{(\lambda \times \lambda)}(E) = \frac{1}{c}\lambda^{(2)}(E), \qquad E \in \Sigma^{(2)},$$

определяет продолжение $\widetilde{\lambda \times \lambda}$ меры $\lambda \times \lambda$ с $\Sigma \times \Sigma$ на $\Sigma^{(2)}$. Для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что любое другое продолжение ν меры $\lambda \times \lambda$ на σ-алгебру $\Sigma^{(2)}$ совпадает с $\widetilde{\lambda \times \lambda}$.

Покажем сначала, что ν — борелевская мера, т. е. что $\nu(K) < \infty$ для всякого бикомпактного множества $K \subseteq R \times R$. Пусть ν_0 и $\lambda_0^{(2)}$ — сужения мер ν и $\lambda^{(2)}$ на σ-алгебру бэровских множеств $\Sigma_0(R \times R)$. Так как $\Sigma_0(R \times R) = \Sigma_0(R) \times \Sigma_0(R) \subseteq \Sigma \times \Sigma$, то $\nu(E) = (\lambda \times \lambda)(E) = c^{-1}\lambda^{(2)}(E)$ для любого бэровского множества E, откуда следует, что $\nu_0 = c^{-1}\lambda_0^{(2)}$. Для всякого бикомпактного множества K найдется такое бикомпактное множество K_0 типа G_δ, что $K \subset K_0$ (Халмош [5; § 50, теорема 4]). Но тогда $\nu(K) \leqslant \nu(K_0) = c^{-1}\lambda^{(2)}(K_0) < \infty$.

Заметим теперь, что мера ν регулярна. Действительно, мера $c^{-1}\lambda^{(2)}$ как мера Хаара регулярно пополнима[1]) (Халмош [5; § 64, теорема 9]). Отсюда в силу доказанного равенства $\nu_0 = c^{-1}\lambda_0^{(2)}$ вытекает, что мера ν регулярно пополнима, а потому регулярна.

Итак, меры ν и $c^{-1}\lambda^{(2)}$ регулярны и совпадают на всех бэровских множествах; но тогда (Халмош [5; § 52, теорема 8]) они совпадают и на всех борелевских множествах. Так как по определению $\widetilde{\lambda \times \lambda} = c^{-1}\lambda^{(2)}$, то $\nu = \widetilde{\lambda \times \lambda}$, ч. т. д.

Это единственное продолжение $\widetilde{\lambda \times \lambda}$ меры $\lambda \times \lambda$ на σ-алгебру $\Sigma^{(2)}$ мы будем обозначать тем же символом $\lambda \times \lambda$.

---

[1]) Борелевская мера μ называется регулярно пополнимой, если всякое борелевское множество μ_0^*-измеримо, где μ_0 — сужение меры μ на σ-алгебру бэровских множеств, а μ_0^* — внешняя мера, порожденная мерой μ_0. Регулярно пополнимая мера регулярна (Халмош [5; стр. 224—225]). — *Прим. перев.*

Если рассматривается группа R с мерой Хаара λ, то доказанная теорема позволяет закрепить название «мера Хаара на $R \times R$» за однозначно определенной мерой $\lambda \times \lambda$.

Выясним, какую форму принимают результаты § 3 и 4, когда R — бикомпактная абелева группа; этот случай рассматривался в § 1.

8. Теорема. *Если R — бикомпактная абелева группа, то ее группа характеров $\hat{R}$ дискретна.*

Доказательство. Рассмотрим в $\hat{R}$ окрестность нуля $N(0, R, 1) = \{m \in \hat{R} \mid |[x, m] - [x, 0]| < 1,\ x \in R\}$. Если $m \in N(0, R, 1)$ и если x — такой элемент в R, что $[x, m] \neq 1$, то легко видеть, что $\mathrm{Re}\,[nx, m] = \mathrm{Re}\,([x, m]^n) < 0$ для некоторого натурального n. Это показывает, что $N(0, R, 1)$ содержит лишь нуль группы $\hat{R}$; следовательно, группа $\hat{R}$ дискретна, ч. т. д.

В этом случае всякое подмножество группы $\hat{R}$ измеримо относительно меры μ, построенной в лемме 3.6, и его мера, с точностью до постоянного множителя, равна числу его точек, если оно конечно, и ∞ в противном случае. Теорема Планшереля утверждает, что множество всех характеров образует полную ортонормальную систему в $L_2(R)$; это утверждение было также доказано в теореме 1.6. Предоставляем читателю доказать, что если R — бикомпактная абелева группа вещественных чисел, приведенных по модулю 2π, то группа $\hat{R}$ алгебраически и топологически изоморфна аддитивной группе целых чисел и можно писать $[x, m] = e^{imx}$. В этом случае точка p_∞ — это точка $\infty\ (= -\infty)$, бикомпактифицирующая группу целых чисел, и утверждение, что $(\tau f)(p_\infty) = 0$ для всех $f \in L_1(0, 2\pi)$, есть хорошо известная лемма Римана — Лебега. Значение функции τf на характере (целом числе) m равно m-му коэффициенту Фурье функции f, т. е.

$$(\tau f)(m) = c_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-imx} f(x)\, dx,$$

а утверждение об изометрии в теореме Планшереля сводится к классическому равенству Парсеваля

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2\, dx = \sum_{-\infty}^{\infty} |c_m|^2,$$

справедливому при $f \in L_2(0, 2\pi)$. Поскольку группа $\hat{R}$ дискретна и потому не содержит совершенных множеств, теорема 4.21 утверждает, что если f и g принадлежат $L_1(0, 2\pi)$ и если для всех равных нулю коэффициентов Фурье функции g равны нулю и соответствующие коэффициенты функции f, то f содержится в замкнутом линейном пространстве, порожденном сдвигами функции g.

Рассмотрим теперь случай, когда R — дискретная абелева группа. При этом любое подмножество группы R измеримо, и, с точностью до постоянного множителя, мера Хаара любого множества равна числу содержащихся в нем точек, если оно конечно, и равна ∞ в противном случае. Для такой группы операция свертки с функцией $f(0)=1$, $f(x)=0$, $x \neq 0$, является тождественным оператором в пространстве $L_2(R)$, и потому последнее утверждение леммы 3.3 неверно. В этом случае ситуация существенно проще, поскольку нет больше нужды присоединять к алгебре $\mathfrak{A}_0$ единицу, и в качестве алгебры $\mathfrak{A}$ можно взять просто алгебру $\overline{\mathfrak{A}}_0$ вместо $\overline{\mathfrak{A}}_0+\{\alpha I\}$. Поэтому нет необходимости выбрасывать точку p_∞, так что можно считать, что $\mathcal{M}_0$ совпадает с $\mathcal{M}$. Таким образом, мы получили следующий результат, двойственный к теореме 8.

9. Теорема. *Если R — дискретная абелева группа, то ее группа характеров $\hat{R}$ бикомпактна.*

Результаты § 3 и 4 переносятся на случай дискретных групп, причем многие из них, например теорема 3.16, до некоторой степени упрощаются. Особый интерес представляет аддитивная группа целых чисел. Мы предоставляем читателю доказать, что группа характеров этой группы топологически и алгебраически изоморфна аддитивной группе вещественных чисел, приведенных по модулю 2π, или, что то же, мультипликативной группе комплексных чисел, по модулю равных 1. Используя вторую реализацию группы $\hat{R}$, имеем $[n, \lambda]=\lambda^n$, где $n \in R$ (так что n — положительное или отрицательное целое число) и $\lambda \in \hat{R}$. Сформулируем результат, который соответствует теореме 4.24 в случае, когда R — группа целых чисел; этот результат может быть получен подходящей модификацией доказательства теоремы 4.24. Детали мы оставляем читателю.

10. Теорема. *Предположим, что $\varphi=\{\alpha_n\}, -\infty<n<+\infty,$ — ограниченная последовательность комплексных чисел. Пусть f — функция комплексного переменного z, определенная формулой*

$$f(z)=\begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n z^{-n}, & |z|>1, \\ -\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_{-n} z^n, & |z|<1. \end{cases}$$

Комплексное число t с $|t|=1$ тогда и только тогда не принадлежит $\sigma(\varphi)$, когда существует такая аналитическая в окрестности точки t функция g, что в этой окрестности $g(z)=f(z)$ при $|z|\neq 1$.

Используя эту теорему и аналог теоремы 4.22 для группы целых чисел, получаем следующий интересный результат относительно аналитических функций.

11. Теорема. *Пусть функция f определена и аналитична во всех точках комплексной плоскости, за исключением конечного числа точек $\zeta_1, \ldots, \zeta_r$, лежащих на единичной окружности. Предположим, что коэффициенты ряда Тейлора функции f в области $|z|<1$ и коэффициенты ее ряда Лорана в области $|z|>1$ ограничены. Тогда существуют такие комплексные числа c_k, что*

$$f(z)=\sum_{k=1}^{r} c_k (z-\zeta_k)^{-1}.$$

Эта теорема имеет много приложений в теории операторов; некоторые из них приведены в § 5 в качестве упражнений.

Мы уже отмечали, что аддитивная группа целых чисел и мультипликативная группа комплексных чисел, по модулю равных 1 (или, что то же, аддитивная группа вещественных чисел, приведенных по модулю 2π), обладают тем свойством, что каждая из них алгебраичеки и топологически изоморфна группе характеров другой. Это частный случай хорошо известной теоремы двойственности Понтрягина, утверждающей, что если R — локально бикомпактная абелева группа и если $\hat{\hat{R}}$ обозначает группу характеров группы $\hat{R}$, то между R и $\hat{\hat{R}}$ существует естественный алгебраический и топологический изоморфизм. Мы дадим сейчас доказательство этой теоремы, но сначала нам будет удобно доказать предварительную лемму, показывающую, каким образом группа R может быть гомоморфно вложена в $\hat{\hat{R}}$.

12. Лемма. *Отображение $\varkappa$ группы R в группу $\hat{\hat{R}}$, определенное формулой $[m, \varkappa x]=[x, m]$, $m \in \hat{R}$, является непрерывным гомоморфизмом.*

Доказательство. Ясно, что $\varkappa(0)=0$, а так как

$$[m, \varkappa(x_1+x_2)]=[x_1+x_2, m]=[x_1, m][x_2, m]=$$
$$=[m, \varkappa x_1][m, \varkappa x_2]=[m, \varkappa x_1+\varkappa x_2],$$

то отображение $\varkappa$ является гомоморфизмом. По лемме II.1.6 достаточно доказать, что $\varkappa$ непрерывно в точке 0. Рассмотрим окрестность $\hat{N}(0, \hat{K}, \varepsilon)$ точки $0 \in \hat{\hat{R}}$, определенную равенством

$$\hat{N}(0, \hat{K}, \varepsilon) = \{X \in \hat{\hat{R}} \mid |[m, X] - [m, 0]| < \varepsilon, \quad m \in \hat{K}\},$$

где $\hat{K}$ — бикомпактное подмножество в $\hat{R}$ и $\varepsilon > 0$. Пусть U — окрестность точки $0 \in R$, имеющая бикомпактное замыкание; для каждого m_1 из $\hat{K}$ рассмотрим окрестность

$$N\left(m_1, \overline{U}, \frac{\varepsilon}{3}\right) = \left\{m \in \hat{R} \mid |[x, m] - [x, m_1]| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad x \in \overline{U}\right\}.$$

Поскольку $\hat{K}$ бикомпактно, в нем найдется такое конечное множество точек $m_1, \ldots, m_k$, что окрестности $N(m_1, \overline{U}, \varepsilon/3), \ldots$ $\ldots, N(m_k, \overline{U}, \varepsilon/3)$ покрывают $\hat{K}$. Каждый из характеров m_i непрерывен; поэтому можно найти такую окрестность $V \subseteq U$ точки $0 \in R$, что если $x \in V$ и $i = 1, \ldots, k$, то

$$|[x, m_i] - [0, m_i]| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Следовательно, если $x \in V$ и $m \in \hat{K}$, то при подходящем выборе $i\,(1 \leqslant i \leqslant k)$

$$|[m, \varkappa x] - [m, 0]| = |[x, m] - [0, m]| \leqslant$$
$$\leqslant |[x, m] - [x, m_i]| + |[x, m_i] - [0, m_i]| + |[0, m_i] - [0, m]| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Этим доказано, что если $x \in V$, то $\varkappa x \in \hat{N}(0, \hat{K}, \varepsilon)$, так что гомоморфизм $\varkappa$ непрерывен, ч. т. д.

13. Теорема (*Понтрягин*). *Отображение $\varkappa$ является алгебраическим и топологическим изоморфизмом группы R на группу $\hat{\hat{R}}$.*

Доказательство. Покажем сначала, что $\varkappa$ является алгебраическим изоморфизмом. Если $\varkappa x_0 = 0$, то для всех $m \in \hat{R}$ должно быть $[x_0, m] = 1$; таким образом, чтобы показать, что $\varkappa$ — алгебраический изоморфизм, достаточно показать, что для всякого $x_0 \neq 0$ найдется по крайней мере один такой характер $m_0 \in \hat{R}$, что $[x_0, m_0] \neq 1$. Допустим, что для некоторого x_0 это не так, и пусть V — такая окрестность точки $0 \in R$, что ее замыкание бикомпактно и $(x_0 + V) \cap V = \varnothing$. Пусть f — такая непрерывная функция, равная нулю вне $x_0 + V$, что $f(x_0) \neq 0$. Тогда $f \in L_1(R) \cap L_2(R)$, и потому функция τf непрерывна и принадлежит $L_2(\hat{R})$. По предположению, что $[x_0, m]=1$ для всех $m \in \hat{R}$, и по теореме Планшереля имеем

$$\int\limits_{\hat{R}} \overline{[x_0, m]}\, \tau f(m) \overline{\tau f(m)}\, \mu(dm) = \int\limits_{\hat{R}} |\tau f(m)|^2 \mu(dm) \neq 0.$$

С другой стороны, согласно следствию 3.17 и теореме Планшереля,

$$\int\limits_{\hat{R}} \overline{[x_0, m]}\, \tau f(m) \overline{\tau f(m)}\, \mu(dm) = \int\limits_{\hat{R}} \tau f_{x_0}(m) \overline{\tau f(m)}\, \mu(dm) =$$

$$= \int\limits_{R} f(x-x_0) \overline{f(x)}\, dx.$$

Но последний интеграл равен нулю, поскольку $f=0$ вне x_0+V и $(x_0+V) \cap V = \varnothing$. Следовательно, гоморфизм $\varkappa$ взаимно однозначен и потому является алгебраическим изоморфизмом R в $\hat{\hat{R}}$.

Покажем, что множество $\varkappa(R)$ всюду плотно в пространстве $\hat{\hat{R}}$. Если это не так, то, применяя к $\hat{R}$ лемму 4.2, получаем, что существует такая функция $H \in L_1(\hat{R}) \cap L_2(\hat{R})$, что $|H|_2 \neq 0$, а $\hat{\tau} H = 0$ на $\varkappa(R)$. Если $h = \tau^{-1} H$, то $h \in L_2(R)$, и из теоремы 3.16 следует, что $h=0$ почти всюду на R; поэтому $|h|_2=0$, что противоречит теореме Планшереля.

Присоединим к каждому из пространств R, $\hat{\hat{R}}$ по бесконечно удаленной точке и положим $\varkappa(\infty)=\infty$, т. е. рассмотрим $\varkappa$ как отображение пространства $R \cup \{\infty\}$ в пространство $\hat{\hat{R}} \cup \{\infty\}$. Каждое из пространств $R \cup \{\infty\}$, $\hat{\hat{R}} \cup \{\infty\}$ бикомпактно и хаусдорфово, а $\varkappa$ — взаимно однозначное отображение $R \cup \{\infty\}$ на всюду плотное подмножество пространства $\hat{\hat{R}} \cup \{\infty\}$. Если мы сможем показать, что $\varkappa$ непрерывно на $R \cup \{\infty\}$, то его образ в пространстве $\hat{\hat{R}} \cup \{\infty\}$ окажется бикомпактным и потому будет совпадать со всем пространством $\hat{\hat{R}} \cup \{\infty\}$. Тогда из леммы I.5.8 будет следовать, что отображение $\varkappa^{-1}$ непрерывно. В предыдущей лемме было доказано, что $\varkappa$ непрерывно в каждой точке пространства R. Поэтому остается лишь показать, что $\varkappa$ непрерывно в точке ∞.

Пусть $\{x_\alpha\}$ — обобщенная последовательность в R, сходящаяся к точке ∞. По лемме 4.3 для любой окрестности U точки $\infty \in \hat{\hat{R}}$ существует такая функция $F_0 \in L_1(\hat{R})$, что $(\hat{\tau} F_0)(\hat{\hat{x}}) = 1$ при $\hat{\hat{x}} \notin U$. Если мы покажем, что $(\hat{\tau} F_0)(\varkappa x_\alpha) \to 0$, то отсюда будет следовать, что, начиная с некоторого α_0, все точки $\varkappa x_\alpha$ принадлежат U, и тем самым будет доказана непрерывность $\varkappa$ в бесконечности. Таким образом, достаточно доказать, что для каждой функции $F \in L_1(\hat{R})$ мы имеем $\hat{\tau}F(\varkappa x_\alpha) \to 0$, где

$$\hat{\tau}F(\varkappa x_\alpha) = \int\limits_{\hat{R}} [\overline{x_\alpha, m}] F(m) \mu(dm).$$

Для каждого α отображение $F \to \hat{\tau}F(\varkappa x_\alpha)$ является линейным функционалом на $L_1(\hat{R})$ с нормой, не превосходящей 1; поэтому в силу теоремы II.3.6 достаточно показать, что $\hat{\tau}F(\varkappa x_\alpha) \to 0$ для функций F, принадлежащих некоторому всюду плотному в $L_1(\hat{R})$ множеству. Поскольку мера Хаара на R регулярна, множество $\mathscr{K}$ функций из $L_1(R) \cap L_2(R)$, равных нулю вне бикомпактных подмножеств R, всюду плотно в $L_2(R)$. По теореме Планшереля множество $\{\tau f \mid f \in \mathscr{K}\}$ всюду плотно в $L_2(\hat{R})$, и, следовательно, множество $\{\tau f \cdot \tau g \mid f, g \in \mathscr{K}\}$ всюду плотно в $L_1(\hat{R})$. Пусть теперь f, g принадлежат $\mathscr{K}$ и равны 0 вне такого бикомпактного множества C, что $C = -\bar{C}$. Тогда если $F = \tau f \cdot \overline{\tau g}$, то по следствию 3.17 и теореме Планшереля

$$\hat{\tau}F(\varkappa x_\alpha) = \int\limits_{\hat{R}} [\overline{x_\alpha, m}] \tau f(m) \overline{\tau g(m)} \mu(dm) = \int\limits_{R} f(x - x_\alpha) \overline{g(x)}\, dx;$$

но последний интеграл обращается в нуль, если $x_\alpha \notin C + C$. Доказательство закончено.

Эта теорема впервые была доказана (в сепарабельном случае) Понтрягиным и обобщена ван Кампеном [1]. Другие доказательства этой теоремы можно найти у Картана А. и Годмана [1; стр. 95], Люмиса [1; стр. 191], Понтрягина [1; гл. VI], Райкова [1] и А. Вейля [1; § 28].

Как мы видели, результаты § 3 представляют собой обобщение теории рядов Фурье и теории интегралов Фурье. С классическими результатами этих тесно связанных теорий читатель может ознакомиться по книге Зигмунда [1] (ряды Фурье) и Бохнера [6], Титчмарша [3] и Винера [4] (интегралы Фурье). Изложение абстрактной теории дано также в трактатах Люмиса [1] и А. Вейля [1] и в работах Картана А. и Годмана [1], Райкова [1] и Сигала [2]. Имеется также много другого материала, относящегося, например, к положительно определенным функциям, почти периодическим функциям и некоммутативным группам. Значительную помощь читателю может оказать обзорная статья Макки [5] и гл. IX книги Люмиса [1]. В дополнение к указанным выше работам, мы сошлемся еще на следующие: Амброз [1], Берлинг [1, 2], Гельфанд и Райков [1, 2], Годман [2, 3, 4], Крейн [6], Наймарк [13] и Сигал [3, 4][1]).

Тауберовы теоремы и теоремы замкнутости. Основные результаты этого параграфа имеют корни в работах Винера [4, 5], который рассматривал случай вещественной прямой, хотя многие его доказательства справедливы и в более общей ситуации. Распространение на случай локально бикомпактной абелевой группы было получено независимо Сигалом [2] и Годманом [1]. Изложенное в 4.14—4.20 представляет собой незначительное видоизменение метода, примененного Хельсоном [1] для доказательства теоремы 4.20. Доказательства этих результатов для случая вещественной прямой были даны Диткиным [1], Сигалом [2] и Мандельбройтом и Агмоном [1, 2], а для широкого класса групп — Капланским [5]; другое доказательство было предложено Риссом [1]; доказательство, изложенное в тексте, принадлежит Хельсону [1]. То, что для некоторых функций из L_∞ спектральный синтез невозможен, было показано Л. Шварцем [2] для трехмерного евклидова пространства. Маляван [1] показал, что спектральный синтез невозможен для некоторых функций на вещественной оси. По поводу родственных результатов см. Коосис [1], Маляван [2] и Кахан [1]. Поллард [2] показал, что спектральный синтез возможен для всех функций из L_1, удовлетворяющих условию Гёльдера порядка не менее $^1/_2$. Близкие результаты имеются в работах Хельсона и Кахана [1], Кахана [2], Кацнельсона [1]. О спектральном синтезе в топологии более слабой, чем L_1-топология в L_∞, см. Берлинг [3].

В § 4 внимание было направлено на изучение подпространств в $L_1(R)$ (или в $L_\infty(R)$), инвариантных относительно сдвигов функции. В лемме 4.6 было отмечено, что это по существу то же, что изучать идеалы в $L_1(R)$. Аспект, связанный с рассмотрением идеалов, часто оказывается удобным и многообещающим; так поступают, например, Люмис [1], Макки [4], Шилов [4] и Меркил [1]. Мы не останавливались на этих вопросах, поскольку нашли удобным присоединить к алгебре $L_1(R)$ единицу и применить результаты гл. IX, а при таком присоединении изменяется структура идеалов. Однако будет уместно сделать по этому поводу несколько замечаний. В коммутативной алгебре $\mathfrak{B}$ над полем комплексных чисел, не обладающей единицей, особый интерес представляют *регулярные* идеалы, т. е. такие идеалы I, что факторалгебра $\mathfrak{B}/I$ имеет единицу. Ясно, что I является регулярным максимальным идеалом тогда и только тогда, когда факторалгебра $\mathfrak{B}/I$ изоморфна полю комплексных чисел. Оказывается, что регулярные максимальные идеалы алгебры $L_1(R)$ находятся во взаимно однозначном

[1]) См. также книгу Гельфанда, Райкова и Шилова [1*]. — *Прим. перев.*

соответствии с точками пространства $\mathcal{M}_0$, т. е. со всеми максимальными идеалами алгебры, полученной присоединением единицы к $L_1(R)$, за исключением идеала, соответствующего бесконечно удаленной точке пространства $\mathcal{M}$. В алгебре с единицей всякий идеал содержится в некотором максимальном идеале, но если единица отсутствует, то это неверно, и задача состоит в том, чтобы выяснить, при каких условиях замкнутый идеал содержится в регулярном максимальном идеале. Теорема 4.8 решает этот вопрос для алгебры $L_1(R)$.

По аналогии с разложением целого числа на простые множители в алгебре изучают представление идеалов в виде пересечения примарных идеалов. Для наших целей удобно следующее определение примарного идеала: замкнутый идеал называется *примарным*, если он содержится в одном и только в одном регулярном максимальном идеале. Теорему 4.16 можно интерпретировать как утверждение, что всякий примарный идеал в $L_1(R)$ является регулярным максимальным идеалом. Следовательно, в алгебре $L_1(R)$ задача сводится к выяснению того, когда замкнутый идеал является пересечением регулярных максимальных идеалов, его содержащих. Эту задачу иногда называют проблемой спектрального синтеза для идеалов. Хотя пример Л. Шварца, на который мы ссылались выше, показывает, что в $L_1(R)$ это не всегда возможно, но теорема 4.20 дает условно утвердительный результат. Уэрмер [8] дал абстрактное описание класса B-алгебр, для которых каждый примарный идеал является регулярным максимальным идеалом и в которых всякий замкнутый идел является пересечением содержащих его регулярных максимальных идеалов. Л. Шварц [3] и Уитни [1] также привели примеры B-алгебр, в которых каждый замкнутый идеал является пересечением примарных идеалов. В 1938 г. Берлинг [1] ввел некоторые классы подалгебр алгебры $L_1(-\infty, \infty)$, в которых каждый замкнутый идеал содержится в регулярном максимальном идеале. Аналогичные результаты для более общих классов функциональных алгебр были получены Уэрмером [7], который описал в некоторых из этих алгебр примарные идеалы. Другие результаты того же типа получил Берлинг [2, 3].

Теория Фредгольма. Локализация собственных значений. Представленная в § 6 теория операторов Гильберта—Шмидта принадлежит Карлеману [2], Хилле и Тамаркину [1] и Смитису [1]. Хилле и Тамаркин получили, кроме того, ряд теорем относительно асимптотического распределения собственных значений интегрального оператора при различных аналитических условиях, наложенных на его ядро. Они доказали также теорему Лалеско о том, что $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i| < \infty$, если $\{\lambda_i\}$—последовательность собственных значений произведения двух операторов Гильберта — Шмидта. Чан [1, 2] дает родственные результаты, относящиеся к произведению любого конечного числа операторов Гильберта — Шмидта. Никович [1] приводит теоремы для класса интегральных операторов, определенного требованием конечности некоторого интегрального выражения более общего вида, чем требование Гильберта — Шмидта $\int\int |K(x, y)|^2 dx\,dy < \infty$. В упражнениях 25—36 перечислены наиболее известные неравенства для собственных значений конечных матриц. В этой связи можно упомянуть о следующих работах. Фарнель [1] показал, что каждое собственное значение λ матрицы A удовлетворяет неравенству

$$|\lambda|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} |A\delta_i|\,|A^*\delta_i|,$$

где $\delta_1, \ldots, \delta_n$ — ортонормальный базис в n-мерном гильбертовом пространстве. Баранкин [1, 2] показал, что

$$|\lambda|^2 \leqslant \max_k \Big(\sum_{i=1}^{n} |a_{ik}|\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} |a_{ki}|\Big),$$

где a_{ki} — элементы матрицы A, и дал ряд обобщений этого неравенства.

Пространства C_p из § 9 были введены фон Нейманом и Шаттеном [1; III]. Теоремы полноты в § 9 и 10 обобщают ранние работы Карлемана и Келдыша и связаны с теоремами, полученными в работах советских математиков по теории вполне непрерывных операторов; см. Крейн [20, 21], Гохберг и Крейн [1]. Теория, представленная в § 10, тесно связана с теорией, развитой в цитированных выше работах Гохберга и Крейна. В этих работах особое внимание уделяется *диссипативным* операторам, т. е. операторам, мнимая часть которых неотрицательна. Такие операторы являются в некоторых отношениях особенно простыми. В цитированных работах можно найти анализ особых свойств диссипативных операторов, а также библиографию других работ советских математиков по несамосопряженным вполне непрерывным операторам.

Теория субдиагонализации, изложенная в § 10, была весьма интересно развита М. С. Лившицем. Он предложил теорию субдиагонализации для произвольного ограниченного оператора, мнимая часть которого принадлежит классу C_1 операторов, обладающих следом; см. его работу [6], а также обзорную статью Бродского и Лившица [1]. Метод Лившица основан на рассмотрении *характеристической операторной функции* оператора $T = H + iH'$, определяемой равенством $W_\lambda(T;\, F,\, G) = I + 2iF(\lambda I - T)^{-1}G$, где $H' = GF$ — разложение мнимой части H' оператора T в произведение двух операторов Гильберта — Шмидта. Как приложение этой теории, Бродский и Лившиц получили очень интересный результат, состоящий в том, что оператор $f(x) \longrightarrow \int_0^x f(y)\,dy$ в пространстве $L_2[0, 1]$ не имеет инвариантных подпространств, отличных от очевидных инвариантных подпространств $L_2[a, 1]$, $0 < a < 1$. Таким образом, этот оператор является *одноклеточным* в том смысле, что структура (lattice) его инвариантных подпространств линейно упорядочена. По поводу всего сказанного см. цитированные выше работы Лившица и Бродского; в этих статьях приводится также обширная библиография работ по несамосопряженным операторам.

Сингулярные интегралы и неравенства. Общие неравенства § 7 принадлежат Кальдерону и Зигмунду [1, 5]; частный случай $n = 1$ (преобразование Гильберта) — М. Риссу. Кальдерон и Зигмунд [1] показывают, что если функция Ω удовлетворяет соответствующим (довольно слабым) условиям непрерывности, то сингулярный интеграл

$$\varphi(x) = \int_{E^n} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^n} f(y)\,dy$$

(I) существует для почти всех x, если f принадлежит $L_1(E^n)$ или $L_p(E^n)$, $\infty > p > 1$ (ср. упражнение 8.23);

(II) удовлетворяет неравенству $\int_A |\varphi(x)|^{1-\varepsilon}\,dx < \infty$, если $f \in L_1(E^n)$, $\varepsilon > 0$ и A — ограниченное множество;

(III) удовлетворяет неравенству $\int_A |\varphi(x)|\,dx < \infty$, если A ограничено и

$$\int_{E^n} |f(x)|\{1 + \log^+|f(x)|\}\,dx < \infty;$$

(IV) удовлетворяет неравенству $\int_{E^n} |\varphi(x)|\,dx < \infty$, если

$$\int_{E^n} |f(x)|\log^+\{1 + |f(x)| + |x|^n |f(x)|\}\,dx < \infty.$$

В случаях (II) — (IV) сингулярный интеграл $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_{x \geqslant \varepsilon} \frac{\Omega(x)}{|x|^n} f(y-x)\,dx$ сходится в топологии пространств $L_{1-\varepsilon}(A)$, $L_1(A)$ и $L_1(E^n)$

соответственно. Эти результаты позволяют ослабить условие

$$\left\{ \int\limits_S |\Omega(s)|^{1+\varepsilon} \mu(ds) \right\}^{1/(1+\varepsilon)} < \infty$$

теоремы 7.11, заменив его неравенством

$$\int\limits_S |\Omega(s)| \log^+ |\Omega(s)| \mu(ds) < \infty.$$

Кальдерон и Зигмунд дают также приложения своих результатов к некоторым «потенциальным» ядрам, возникающим в теории дифференциальных уравнений с частными производными. Впоследствии их неравенство нашло многочисленные важные приложения в этой теории.

В работе [5] Кальдерон и Зигмунд приводят аналогичные результаты для родственного, но несколько более общего класса интегральных операторов в L_p, $1 < p < \infty$, а в [6] рассматривают теорию алгебр, состоящих из сингулярных операторов свертки, изученных в § 7, в частности максимальные идеалы и вопрос о существовании обратных элементов.

Хорошо известно, что, применяя стандартные неравенства к функциям со значениями в соответствующем банаховом пространстве, часто можно получить полезное расширение области применения этих неравенств. По этой причине заслуживает внимания следующее обстоятельство. Первоначальное доказательство хорошо известного неравенства для преобразования Гильберта, предложенное М. Риссом, использует методы комплексного переменного и потому не может быть распространено на векторнозначные функции; однако доказательство, данное Кальдероном и Зигмундом [1], носит вещественный характер и допускает такое распространение. Мы покажем здесь, как можно систематически использовать этот факт. Мы увидим, что таким образом получаются достаточно общие неравенства типа Кальдерона — Зигмунда — Рисса, так что неравенства Пэли, Литлвуда и Зигмунда можно получить в качестве следствий. Наше изложение следует недавней элегантной работе Хермандера [1], где он приводит также обширную библиографию предшествующих работ.

Одним из наших инструментов будет следующая важная интерполяционная теорема Марцинкевича, обобщенная на векторнозначные функции. Формулировка и доказательство этой теоремы не изменяются при переходе от скалярных функций к векторным.

14. Теорема. *Пусть* (S, Σ, μ) *и* (S_1, Σ_1, μ_1) — *пространства с положительными мерами,* X *и* X_1 — *банаховы пространства,*

и пусть $1 \leqslant p < q < r$, $1 \leqslant p_1 < q_1 < r_1$, *причем* $p \leqslant p_1$, $r \leqslant r_1$, $1/q = \alpha/p + (1-\alpha)/r$ *и* $1/q_1 = \alpha/p_1 + (1-\alpha)/r_1$ *для некоторого* α, $0 < \alpha < 1$. *Пусть* T — *линейное преобразование пространства* L_0 *всех ограниченных измеримых функций, определенных на* S, *равных нулю вне множеств конечной меры и принимающих значения в* X, *в пространство всех измеримых функций на* S_1 *со значениями в* X_1. *Предположим, что существует такая конечная постоянная* K, *что*

$$[\mu_1(\{s_1 \mid |(Tf)(s_1)| > a\})]^{1/p_1} < \frac{K}{a} \left\{ \int_S |f(s)|^p \mu(ds) \right\}^{1/p}, \quad f \in L_0, \ a > 0, \tag{1}$$

а также что

$$[\mu_1(\{s_1 \mid |(Tf)(s_1)| > a\})]^{1/r_1} < \frac{K}{a} \left\{ \int_S |f(s)|^r \mu(ds) \right\}^{1/r}, \quad f \in L_0, \ a > 0. \tag{2}$$

Тогда существует такая конечная постоянная K', *что*

$$\left\{ \int_{S_1} |Tf(s_1)|^{q_1} \mu_1(ds_1) \right\}^{1/q_1} \leqslant K' \left\{ \int_S |f(s)|^q \mu(ds) \right\}^{1/q}. \tag{3}$$

Доказательство. Для каждой измеримой функции g на пространстве с мерой (S, Σ, μ) и каждого $a \geqslant 0$ положим

$$(g)_a = \mu(\{s \mid |g(s)| > a\}). \tag{4}$$

Соответствующим образом зададим величину $(g)_a$ для функции g, определенной на (S_1, Σ_1, μ_1). Если $|g|_t$ — норма функции g в L_t, то, возводя ее в степень t, получаем

$$|g|_t^t = \int |g(s)|^t \mu(ds) = -\int_0^\infty a^t \, d(g)_a = t \int_0^\infty a^{t-1} (g)_a \, da. \tag{5}$$

Для каждой такой функции g положим

$$\begin{aligned} g^{(a)}(s) &= g(s), && \text{если } |g(s)| \leqslant a, \\ g^{(a)}(s) &= a \frac{g(s)}{|g(s)|}, && \text{если } |g(s)| > a, \\ \tilde{g}^{(a)}(s) &= g(s) - g^{(a)}(s). \end{aligned} \tag{6}$$

Тогда ясно, что при $b \geqslant 0$

$$\begin{aligned} (g^{(a)})_b &= (g)_b, && b < a, \\ (g^{(a)})_b &= 0, && b \geqslant a, \\ (\tilde{g}^{(a)})_b &= (g)_{b+a}. \end{aligned} \tag{7}$$

Кроме того, так как $f=f^{(a)}+\tilde{f}^{(a)}$, то $Tf=(Tf^{(a)})+(T\tilde{f}^{(a)})$; следовательно, если $b>0$, то по предположению

(8) $$(Tf)_b\leqslant (Tf^{(a)})_{b/2}+(T\tilde{f}^{(a)})_{b/2}\leqslant K'\,(b^{-r_1}\,|\,f^{(a)}\,|_r^{r_1}+b^{-p_1}\,|\,\tilde{f}^{(a)}\,|_p^{p_1});$$

здесь и далее K' обозначает конечную постоянную, зависящую лишь от p, q, r, p_1, q_1, r_1 и K. Положим теперь $a=a(b)$, где $a(b)$ — некоторая монотонно возрастающая функция, а $b=b(a)$ — обратная к ней функция (точный вид функции $b(a)$ будет указан ниже). Применяя (5), (7) и (8), получаем

(9) $$|\,Tf\,|_{q_1}^{q_1}\leqslant K'\int_0^\infty \{b^{q_1-r_1-1}\,|\,f^{(a(b))}\,|_r^{r_1}+b^{q_1-p_1-1}\,|\,\tilde{f}^{(a(b))}\,|_p^{p_1}\}\,db\leqslant$$
$$\leqslant K'\left\{\int_0^\infty b^{q_1-r_1-1}\left[\int_0^{a(b)}(f)_c c^{r-1}\,dc\right]^{r_1/r}db+\right.$$
$$\left.+\int_0^\infty b^{q_1-p_1-1}\left[\int_0^\infty (f)_{c+a(b)}\,c^{p-1}\,dc\right]^{p_1/p}db\right\}=$$
$$=K'\left\{\int_0^\infty\left[\int_0^{a(b)} b^{(r/r_1)(q_1-r_1-1)}\,(f)_c\,c^{r-1}\,dc\right]^{r_1/r}db+\right.$$
$$\left.+\int_0^\infty\left[\int_{a(b)}^\infty b^{(p/p_1)(q_1-p_1-1)}\,(f)_c\,(c-a(b))^{p-1}\,dc\right]^{p_1/p}db\right\}.$$

Непрерывная форма неравенства Минковского может быть записана в виде

(10) $$\int d\beta\left\{\int \varphi(\alpha,\ \beta)\,d\alpha\right\}^k\leqslant\left[\int\left\{\int|\,\varphi(\alpha,\ \beta)\,|^k\,d\beta\right\}^{1/k}d\alpha\right]^k;$$

это неравенство справедливо при $k\geqslant 1$. Используя его и неравенство (9), получаем

(11) $$|\,Tf\,|_{q_1}^{q_1}\leqslant K'\left\{\left[\int_0^\infty (f)_c\,c^{r-1}\left[\int_{b(c)}^\infty b^{q_1-r_1-1}\,db\right]^{r/r_1}dc\right]^{r_1/r}+\right.$$
$$\left.+\left[\int_0^\infty (f)_c\left[\int_0^{b(c)}(c-a(b))^{(p_1/p)(p-1)}\,b^{q_1-p_1-1}\,db\right]^{p/p_1}dc\right]^{p_1/p}\right\}=$$
$$=K'\left\{\left[\int_0^\infty (f)_c c^{r-1}b(c)^{(q_1-r_1)r/r_1}\,dc\right]^{r_1/r}+\right.$$
$$\left.+\left[\int_0^\infty (f)_c\left[\int_0^c (c-a)^{(p_1/p)(p-1)}b(a)^{q_1-p_1-1}\cdot b'(a)\,da\right]^{p/p_1}dc\right]^{p_1/p}\right\}.$$

Теперь мы полагаем $b(a)=a^{\xi}$, так что (11) сводится к неравенствам

(12)
$$|Tf|_{q_1}^{q_1} \leqslant K' \left\{ \left[\int_0^\infty (f)_c \, c^{r-1+\xi(q_1-r_1)r/r_1} \, dc \right]^{r_1/r} + \right.$$
$$\left. + \left[\int_0^\infty (f)_c \left[\int_0^c (c-a)^{(p_1/p)(p-1)} a^{\xi(q_1-p_1-1)+\xi-1} \, da \right]^{p/p_1} dc \right]^{p_1/p} \right\} \leqslant$$
$$\leqslant K' \left\{ \left[\int_0^\infty (f)_c \, c^{r-1+\xi(q_1-r_1)r/r_1} \, dc \right]^{r_1/r} + \right.$$
$$\left. + \left[\int_0^\infty (f)_c \, c^{p-1+\xi(q_1-p_1)p/p'} \, dc \right]^{p_1/p} \right\}.$$

Из соотношений

(13)
$$\frac{1}{q} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{r}, \qquad \frac{1}{q_1} = \frac{\alpha}{p_1} + \frac{1-\alpha}{r_1}$$

следует, что если мы определим ξ из уравнения

(14)
$$\xi\left(\frac{q_1}{p_1} - 1\right) = \frac{q}{p} - 1,$$

то будут выполняться также равенства

(15)
$$\xi\left(\frac{q_1}{r_1} - 1\right) = \frac{q}{r} - 1$$

и

(16)
$$r + \xi(q_1 - r_1)\frac{r}{r_1} = p + \xi(q_1 - p_1)\frac{p}{p_1} = q.$$

Таким образом, теорема Марцинкевича доказана[1]).

Следует заметить, что если T — ограниченное отображение пространства $L_p(X)$ в $L_{p_1}(X_1)$, то оно удовлетворяет условию (1).

Далее, следуя Хермандеру, выделим некоторый класс ядер, удовлетворяющих условию (1) при $p=1$. Эти ядра описываются в следующей теореме.

15. Теорема. *Пусть X и X_1 — банаховы пространства. Пусть $K(x)$ — функция, определенная на E^n и принимающая значения*

---

[1]) Из неравенства (12) и соотношений (16) и (5) вытекает, что для некоторых положительных постоянных K', γ, δ выполняется неравенство $|Tf|_{q_1}^{q_1} \leqslant K'(|f|_q^{\gamma} + |f|_q^{\delta})$. Так как преобразование T линейно, то отсюда следует, что для некоторой постоянной K' имеет место неравенство $|Tf|_{q_1} \leqslant K'|f|_q$. — *Прим. перев.*

в B-пространстве ограниченных линейных отображений пространства X в X_1. Предположим, что функция $K(x)$ интегрируема по любой ограниченной области. Пусть заданы числа $q \geqslant 1$ и $A > 0$; допустим, что существует такая постоянная $C < \infty$, что для каждого t вида[1] 2^j

(17) $$\left\{ \int_{|x| \geqslant A} |K(t(x-y)) - K(tx)|^q \, dx \right\}^{1/q} \leqslant C t^{-n/q}, \qquad |y| \leqslant \frac{1}{A}.$$

Положим

(18) $$(\mathscr{K} f)(x) = \int_{E^n} K(x-y) f(y)\, dy, \qquad f \in L_0(X).$$

Допустим также, что для некоторых p и r, таких, что $\infty > p \geqslant 1$, $\infty > r \geqslant 1$ и $1/p - 1/r = 1 - 1/q$, выполняется неравенство

(19) $$\left\{ \int_{E^n} |(\mathscr{K} f)(x)|^r \, dx \right\}^{1/r} \leqslant C \left\{ \int_{E^n} |f(x)|^p \, dx \right\}^{1/p}.$$

Тогда для некоторой постоянной C'

(20) $$\mu \{x \in E^n \mid |(\mathscr{K} f)(x)| > a\}^{1/q} \leqslant \frac{C'}{a} \int_{E^n} |f(x)|\, dx, \quad f \in L_0.$$

Доказательство теоремы 15 основано на следующей лемме.

16. Лемма. *Пусть задано число $s > 0$, и пусть u — интегрируемая функция на E^n со значениями в B-пространстве X. Тогда её можно представить в виде*

(21) $$u = v + \sum_{k=1}^{\infty} w_k,$$

где

(22a) $$|v| + \sum_{k=1}^{\infty} |w_k| \leqslant 3|u|,$$

(22b) $$|v(x)| \leqslant 2^n s, \qquad x \in E^n,$$

(22c) *каждая функция w_k равна нулю вне некоторого куба I_k с ребром длины 2^{-n_k}, где n_k — некоторая последовательность*

---

[1]) В этой теореме удобно считать, что $|x|$ — это L_∞-норма вектора $x \in E^n$, т. е. если $x = (x_1, \ldots, x_n)$, то $|x| = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$. Ясно, что выбор той или иной нормы в E^n не меняет существа дела.— *Прим. перев.*

положительных или отрицательных целых чисел, причем кубы I_k *попарно не пересекаются,* $\sum_{k=1}^{\infty} m(I_k) \leqslant s^{-1}|u|$ *и* $\int_{I_k} w_k(x)\,dx = 0$.

Мы пользуемся обозначением $m(e)$ для меры Лебега множества e и обозначением $|u|$ для L_1-нормы интегрируемой функции u. Лемма 16 доказана Хермандером [1] для скалярных функций. Доказательство для векторнозначных функций мало чем отличается; поэтому мы опустим его и перейдем непосредственно к доказательству теоремы 15.

Доказательство теоремы 15. Заметим сначала, что число A можно увеличить, не нарушая ни одного из предположений леммы. Таким образом, можно считать, что A имеет вид $A=2^M$. Допустим, что w — функция с равным нулю интегралом, обращающаяся в нуль вне куба I с центром в начале и ребром длины A^{-1}. Тогда

(23) $$(\mathscr{K}w)(x) = \int_I (K(x-y) - K(x))\, w(y)\,dy,$$

так что, применяя (10) и (17), получаем

(24) $$\left\{ \int_{y \notin A^2 I} |(\mathscr{K}w)(y)|^q\,dy \right\}^{1/q} \leqslant C\,|w|_1,$$

где $|w|_1$ обозначает L_1-норму. Поскольку условие (17) инвариантно относительно сдвигов и деления в отношении $1:2^j$, отсюда следует, что если w' — функция с равным нулю интегралом, обращающаяся в нуль вне куба I' с ребром длины 2^k, то куб I' можно заключить в такой куб I'' с ребром длины 2^{k+2M}, что

(25) $$\left\{ \int_{y \notin I''} |(\mathscr{K}w')(y)|^q\,dy \right\}^{1/q} \leqslant C\,|w'|_1.$$

Пусть функции u, v и w_k — такие же, как в предыдущей лемме, и пусть $w'' = \sum_{k=1}^{\infty} w_k$. Из (25) и (22c) сразу следует, что существует такое множество e, что его мера не превосходит $2^{2nM}s^{-1}|u|_1$ и

(26) $$\left\{ \int_{y \notin e} |(\mathscr{K}w'')(y)|^q\,dy \right\}^{1/q} \leqslant C\,|w''|_1 \leqslant 3C\,|u|_1.$$

Так как $(W)_t \leqslant t^{-q}|W|_q^q$ для любой функции W (см. (4)), то при $t>0$

(27) $$(\mathscr{K}w'')_t \leqslant C'\,(t^{-q}|u|_1^q + s^{-1}|u|_1);$$

здесь и далее C' — любая конечная постоянная, а $|W|_q$ есть L_q-норма функции W. Поскольку $u=v+w''$, имеем

$$(28)\qquad (\mathscr{K}u)_t \leqslant (\mathscr{K}v)_{t/2} + (\mathscr{K}w'')_{t/2}.$$

Так как $|v|_\infty \leqslant C's$ и $|v|_1 \leqslant C'|u|_1$, то из неравенства Гёльдера следует, что $|v|_p \leqslant C's^{1-1/p}|u|_1^{1/p}$ для каждого $p \geqslant 1$. Так как мы предположили, что $|\mathscr{K}f|_r \leqslant C'|f|_p$ для каждой функции f из L_0, то

$$(29)\qquad |\mathscr{K}v|_r \leqslant C's^{1-1/p}|u|_1^{1/p}.$$

Поэтому

$$(30)\qquad (\mathscr{K}v)_t \leqslant C's^{r(1-1/p)}|u|_1^{r/p}t^{-r} = C's^{r/q-1}|u|_1^{r/p}t^{-r}.$$

Таким образом, учитывая (27), (30) и (28), находим, что

$$(31)\qquad (\mathscr{K}u)_t \leqslant C'(t^{-q}|u|_1^q + s^{-1}|u|_1 + s^{r/q-1}|u|_1^{r/p}t^{-r}).$$

Выбирая $s>0$ так, чтобы минимизировать выражение, стоящее в правой части неравенства (31), получаем

$$(32)\qquad (\mathscr{K}u)_t \leqslant C't^{-q}|u|_1^q,$$

и теорема 15 доказана.

17. Следствие. *В предположениях теоремы* 15

$$(33)\qquad |\mathscr{K}f|_{r'} \leqslant C'|f|_{p'}$$

для любых $r > r' \geqslant 1$, $p > p' \geqslant 1$ *при условии, что* $1/p' - 1/r' = 1 - 1/q$.

Доказательство. Это сразу следует из интерполяционной теоремы Марцинкевича и теоремы 15.

18. Следствие. *Если ядро* K *теоремы* 15 *для каждого* t, *равного положительной или отрицательной целой степени числа* 2, *удовлетворяет условиям*

$$(34)\qquad \Big(\int\limits_{|x|\geqslant At}\Big|\frac{\partial}{\partial x_i}K(x)\Big|^q dx\Big)^{1/q} \leqslant Ct^{-1}, \qquad i=1, \ldots, n,$$

то оно обязательно удовлетворяет условию (17).

Доказательство. Неравенство (34) можно записать в виде

$$(35)\qquad \Big\{\int\limits_{|x|\geqslant A}\Big|\frac{\partial}{\partial x_i}K(tx)\Big|^q dx\Big\}^{1/q} \leqslant Ct^{-n/q}.$$

Интегрирование этого неравенства по подходящим образом выбранному пути приводит к неравенству (17).

22 Заказ № 134

19. Следствие. *Пусть ядро K теоремы* 15 *удовлетворяет соотношению*

$$O_1 K(2x) O_2 = 2^{-n/q} K(x), \quad x \in E^n, \tag{36}$$

где O_1 и O_2 — такие операторы в X_1 и X соответственно, что все их целые степени, положительные и отрицательные, ограничены. Тогда неравенство (17) *теоремы* 15 *вытекает из предположения*

$$\int\limits_{2 \geqslant |x| \geqslant 1} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} K(x) \right|^q dx < \infty, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{37}$$

Доказательство. Если $t = 2^j$, где j — положительное или отрицательное целое число, то из (36) и (37) следует, что

$$\begin{aligned} \int\limits_{2t \geqslant |x| \geqslant t} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} K(x) \right|^q dx &\leqslant C \int\limits_{2t \geqslant |x| \geqslant t} t^{-n} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \left[K\left(\frac{x}{t}\right)\right] \right|^q dx = \\ &= C t^{-1} \int\limits_{2t \geqslant |x| \geqslant t} \left| \left[\frac{\partial}{\partial x_i} tK \right] \left(\frac{x}{t}\right) \right|^q t^{-n} dx = \\ &= C t^{-1} \int\limits_{2 \geqslant |x| \geqslant 1} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} K(x) \right|^q dx. \end{aligned} \tag{38}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int\limits_{\infty \geqslant |x| \geqslant 1} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} K(x) \right|^q dx &\leqslant C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \int\limits_{2 \geqslant |x| \geqslant 1} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} K(x) \right|^q dx = \\ &= 2C \int\limits_{2 \geqslant |x| \geqslant 1} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} K(x) \right|^q dx, \end{aligned} \tag{39}$$

откуда легко вытекает справедливость данного следствия.

Если $n = 1$, $q = 1$, то условие (34) сводится к условию $\operatorname*{var}\limits_{|x| \geqslant t} (K(x)) = O(t^{-1})$.

Неравенство Пэли и Литлвуда нетрудно вывести из следствия 19. Но сначала мы докажем следующее обобщение теоремы Кальдерона — Зигмунда на векторнозначные функции.

20. Теорема. *Пусть (S, Σ, μ) — пространство с положительной мерой. Пусть $\Omega(x)$ — комплекснозначное ядро, определенное на E^n, положительно однородное порядка* 0 *и гладкое всюду, кроме точки $x = 0$, и пусть поверхностный интеграл от Ω по единичной сфере равен нулю. Пусть $L_p(L_q)$ обозначает L_p-пространство функций на E^n со значениями в $L_q(S)$. Тогда для любых*

$1 < p < \infty$ и $1 < q < \infty$ операция свертки

$$f(x) \to \mathcal{P} \int \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^n} f(y)\, dy \tag{40}$$

определяет ограниченное преобразование пространства $L_p(L_q)$ в себя.

Доказательство. Рассмотрим сначала частный случай $p=q$. Пространство $L_p(L_p)$ может быть очевидным образом отождествлено с L_p-пространством на произведении $E^n \times S$, и неравенство, которое должно быть доказано, сводится к неравенству

$$\int_S \int_{E^n} \left| \mathcal{P} \int_{E^n} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^n} f(y, s)\, dy \right|^p dx\, ds \leqslant \leqslant C' \int_S \int_{E^n} |f(x, s)|^p\, dx\, ds. \tag{41}$$

Это не что иное, как обычное неравенство Кальдерона — Зигмунда, примененное к функции $g(x) = f(x, s)$ и проинтегрированное по s.

Из справедливости этой теоремы для $p=q$ и из следствий 17 и 19 следует, что данная теорема должна быть справедлива, если $1 < p < q < \infty$. Поэтому ясно, что справедливость нашей теоремы при $1 < q < p < \infty$ вытекает из следующей леммы и из того очевидного факта, что оператор, сопряженный к оператору вида (38), имеет такую же форму.

21. Лемма. *Пусть X — банахово пространство, а X^* — сопряженное к нему пространство. Пусть $1 < p$, $q < \infty$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Пусть (S, Σ, μ) — пространство с положительной мерой. Тогда*[1]

$$\sup_{g \in L_q(X^*),\ |g|_q \leqslant 1} \left| \int g(s) f(s) \mu(ds) \right| = |f|_p, \quad f \in L_p(X). \tag{42}$$

Доказательство. То, что левая часть в (42) не превосходит правой, сразу следует из неравенства Гёльдера, тривиальным образом обобщенного на векторнозначные функции. Обратное неравенство достаточно доказать для всюду плотного подмножества в $L_p(X)$, так что можно, не ограничивая общности, считать, что f — простая функция, т. е. что $f(s) = x_i$ на каждом из непересекающихся множеств e_i, $i = 1, \ldots, n$, и что $f = 0$ вне объединения этих множеств. В X^* существуют такие элементы x_i^*, что $x_i^*(x_i) = |x_i|$ при $i = 1, \ldots, n$ и $|x_i^*| = 1$. Пусть h — скалярная функция на S; положим $g(s) = h(s) x_i^*$ при $s \in e_i$ и $g(s) = 0$, если

[1] Здесь $g(s) f(s)$ при каждом $s \in S$ есть значение функционала $g(s) \in X^*$ в точке $f(s) \in X$, т. е. $g(s) f(s)$ — скалярная функция. — *Прим. перев.*

s не принадлежит ни одному из множеств e_i. Тогда

$$\int g(s) f(s) \mu(ds) = \int h(s) |f(s)| \mu(ds); \tag{43}$$

следовательно, равенство (42) вытекает из хорошо известного аналогичного соотношения для скалярных функций. Этим завершается доказательство леммы 21, а вместе с ней и теоремы 20.

22. Следствие. *Пусть* (S, Σ, μ) — *пространство с положительной мерой, и пусть* $1 < q < \infty$, $1 < p < \infty$. *Пусть* C — *конечная постоянная, и пусть* $f(x, s)$ — *такая измеримая функция, определенная на произведении пространств* $E^1 \times S$, *что*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_S |f(x, s)|^p \mu(ds) \right\}^{q/p} dx \leqslant C. \tag{44}$$

Пусть $\hat{f}(\xi, s)$ — *преобразование Фурье функции* $f(x, s)$ *по переменному* x, *и пусть* $g(x, s)$ — *функция, преобразование Фурье которой определено равенствами* $\hat{g}(\xi, s) = \hat{f}(\xi, s)$ *при* $\xi > 0$; $\hat{g}(\xi, s) = 0$ *при* $\xi < 0$. *Тогда существует такая постоянная* C', *зависящая лишь от* p *и* q, *что*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_S |g(x, s)|^p \mu(ds) \right\}^{q/p} dx \leqslant C'C. \tag{45}$$

Доказательство. Это просто частный случай $X = L_p(S)$, $n = 1$ и $\Omega(x) = \operatorname{sgn} x$ теоремы 20.

Следующее утверждение является обобщением предыдущего.

23. Следствие. *Пусть* (S, Σ, μ) — *пространство с положительной мерой, и пусть* $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$. *Пусть* $T(\xi)$ *для всякого вещественного* ξ *есть ограниченный оператор в пространстве* $L_p(S)$. *Предположим, что операторнозначная функция* $T(\xi)$ *равномерно ограничена и имеет ограниченную вариацию. Пусть* $f(x)$ — *функция вещественного переменного* x *со значениями в пространстве* $L_p(S)$, *и пусть* $\hat{f}(\xi)$ — *ее преобразование Фурье по переменному* x. *Пусть* $\mathscr{K}_1$ — *отображение, определенное формулой*

$$(\widehat{\mathscr{K}_1 f})(\xi) = T(\xi) \hat{f}(\xi). \tag{46}$$

Тогда $\mathscr{K}_1$ — *ограниченное отображение пространства* $L_q(L_p(S))$ *в себя.*

Доказательство. Определим для каждого вещественного ξ_0 отображение $\mathcal{H}_{\xi_0}$ пространства $L_q(L_p(S))$ в себя по формуле

$$(47)\qquad (\widehat{\mathcal{H}_{\xi_0} f})(\xi) = \begin{cases} \hat{f}(\xi), & \text{если } \xi > \xi_0, \\ 0, & \text{если } \xi \leqslant \xi_0. \end{cases}$$

Из следствия 22 вытекает, что существует такая конечная постоянная C', что

$$(48)\qquad |\mathcal{H}_{\xi_0}| \leqslant C'.$$

В левой части стоит, разумеется, норма оператора $\mathcal{H}_{\xi_0}$ как преобразования пространства $L_q(L_p(S))$ в себя.

С другой стороны, из (46) и (47) следует, что

$$(49)\qquad \mathcal{K}_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}_{\xi_0}\, dT(\xi_0) + \mathcal{T}(-\infty),$$

где $\mathcal{T}(-\infty)$ обозначает отображение $f(x) \to T(-\infty) f(x)$. Из (48) и (49) сразу следует справедливость данного предложения.

Если оператор $T(\xi)$ из следствия 23 является оператором умножения, то установленный результат может быть значительно улучшен; при этом получается обобщение теоремы Зигмунда, которая потребуется нам в дальнейшем изложении. Для простоты обозначений ограничимся рассмотрением частного случая, когда S счетно, так что пространство L_p предыдущего следствия сводится к пространству последовательностей l_p.

24. Лемма. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$. *Пусть* $k_n(\xi)$ — *последовательность ограниченных функций. Предположим, что эти функции и их полные вариации равномерно ограничены. Пусть* $\mathcal{K}$ — *преобразование в* $L_q(l_p)$, *переводящее векторную функцию, n-я компонента которой имеет преобразованием Фурье функцию* $f_n(\xi)$, *в векторную функцию, n-я компонента которой имеет преобразованием Фурье функцию* $k_n(\xi) f_n(\xi)$. *Тогда* $\mathcal{K}$ — *ограниченное отображение пространства* $L_q(l_p)$ *в себя.*

Вместо того чтобы дать прямое доказательство леммы 24, рассмотрим ее как предельный случай сформулированной ниже леммы 24′. Вывод леммы 24 из леммы 24′ тривиален, и потому мы его опустим.

24′. Лемма. *Пусть* p, q *и* k_n — *такие же, как в предыдущей лемме; рассмотрим для каждого* N *преобразование* $\mathcal{K}_N$ *в* $L_p(l_q)$, *переводящее вектор, n-я компонента которого имеет преобразованием Фурье функцию* $f_n(\xi)$, *в вектор, n-я компонента которого имеет преобразованием Фурье функцию* $k_n(\xi) f_n(\xi)$, *если*

$n \leqslant N$, и функцию $f_n(\xi)$, если $n > N$. Тогда существует такая не зависящая от N конечная постоянная C', что норма оператора $\mathcal{K}_N$ как преобразования пространства $L_q(l_p)$ в себя не превосходит C'.

Доказательство леммы 24'. Вычитая из каждой функции k_n подходящую постоянную c_n, можно, не ограничивая общности, считать, что $k_n(-\infty)=0$ для каждого n; здесь мы воспользовались равномерной ограниченностью функций k_n и их полных вариаций, позволяющей утверждать, что постоянные c_n ограничены в совокупности. Аналогичным образом, умножая каждую из функций k_n на подходящую положительную постоянную c'_n, можно, не ограничивая общности, считать, что полная вариация каждой из этих функций равна 1; здесь мы также пользуемся равномерной ограниченностью вариаций $\operatorname{var}(k_n)$ для того, чтобы сделать заключение об ограниченности снизу постоянных c'_n.

Пусть $\mathcal{H}(\xi_1, \ldots, \xi_N)$ — оператор в $L_q(l_p)$, переводящий векторную функцию f, n-я компонента которой имеет преобразованием Фурье функцию $f_n(\xi)$, в векторную функцию g, n-я компонента которой имеет преобразованием Фурье функцию $g_n(\xi)$, определенную формулой

$$g_n(\xi)=\begin{cases} f_n(\xi), & n>N, \\ f_n(\xi), & \xi<\xi_r, \quad n\leqslant N \\ 0, & \xi>\xi_r, \quad n\leqslant N. \end{cases} \tag{50}$$

Тогда ясно, что

$$\mathcal{H}(\xi_1, \ldots, \xi_N)=\mathcal{M}(\xi_1, \ldots, \xi_N)\,\mathcal{H}(0, \ldots, 0)\,\mathcal{M}(-\xi_1, \ldots, -\xi_N), \tag{51}$$

где $\mathcal{M}(\xi_1, \ldots, \xi_N)$ — изометрия в $L_q(l_p)$, а именно

$$\mathcal{M}(\xi_1, \ldots, \xi_N):\ \{f_n(x)\} \to \{e^{i\xi_n x} f_n(x)\}; \tag{52}$$

в (52) мы для простоты обозначений считаем, что $\xi_n=0$ при $n>N$. Поэтому из следствия 23 вытекает, что преобразование $\mathcal{H}(\xi_1, \ldots, \xi_N)$ ограничено по норме постоянной C', не зависящей от N и от $\xi_1, \ldots, \xi_N$.

Из формулы (50) и определения преобразования $\mathcal{K}_N$ легко следует, что

$$\mathcal{K}_N=\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}(\xi_1, \ldots, \xi_n)\, dk_1(\xi_1) \ldots dk_n(\xi_n). \tag{53}$$

Поскольку $\operatorname{var}(k_n)=1$, преобразование $\mathcal{K}_N$ ограничено той же постоянной C'. Это доказывает лемму 24', из которой, как было отмечено, сразу следует лемма 24.

Теперь мы можем приступить к доказательству неравенства Пэли и Литлвуда.

25. Теорема. *Пусть* $1<p\leqslant 2$, *и пусть* $f(x)$ — *произвольная функция из* $L_p(-\infty, \infty)$, *а* $f_n(x)$ — *функция, преобразование Фурье которой в области* $2^n<|\xi|<2^{n+1}$ *совпадает с преобразованием Фурье функции* f, *а вне этой области равно нулю. Тогда существуют такие конечные постоянные* C *и* C', *что*

$$C\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty}|f_n(x)|^2\Big)^{p/2}dx\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^p\,dx\leqslant \tag{54}$$

$$\leqslant C'\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty}|f_n(x)|^2\Big)^{p/2}dx.$$

Доказательство. Пусть $\varphi(\xi)$ — четная функция из C^∞, тождественно равная 1 при $1\leqslant|\xi|\leqslant 2$ и тождественно равная 0 при $|\xi|\leqslant 1/2$ или $|\xi|\geqslant 3$, выбранная таким образом, что ее интеграл и несколько первых моментов равны нулю. Пусть $\hat{K}(\xi)$ — вектор, n-я компонента которого равна $\varphi(2^n\xi)$; тогда $\hat{K}$ — векторная функция со значениями в гильбертовом пространстве l_2 двусторонних последовательностей. Пусть

$$K(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\xi x}\hat{K}(\xi)\,d\xi. \tag{55}$$

Так как $U^n\hat{K}(\xi)=\hat{K}(2^{-n}\xi)$, где U — оператор единичного сдвига в l_2, то $K(2^nx)=U^n2^{-n}K(x)$. Если ψ — преобразование Фурье функции φ, то $\psi(x)$ и несколько первых ее производных равны нулю при $x=0$, тогда как $|\psi(x)|=O(|x|^{-N})$ при $|x|\to\infty$ для любого конечного положительного N. Далее, n-я компонента вектора $K(x)$ равна $2^{-n}\psi(2^{-n}x)$; поэтому

$$|K'(x)|^2=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|2^n\psi'(2^nx)|^2. \tag{56}$$

Поскольку

$$|\psi'(x)|\leqslant A\Big(\frac{|x|}{1+|x|^2}\Big)^2,\quad A>0, \tag{57}$$

ряд (56) мажорируется рядом

$$A^2\Big(\sum_{1}^{+\infty}\frac{2^n}{1+2^{2n}|x|^2}+\sum_{-\infty}^{0}2^n\cdot 2^{2n}|x|^2\Big), \tag{58}$$

и потому его сумма ограничена на каждом ограниченном интервале значений x. Определим преобразование $\mathscr{K}$ равенством

$$(\widehat{\mathscr{K}f})(\xi)=\hat{K}(\xi)\hat{f}(\xi) \tag{59}$$

или, что равносильно,

$$(\mathscr{K}f)(x)=\int_{-\infty}^{\infty} K(x-y)f(y)\,dy. \tag{60}$$

Тогда $\mathscr{K}$ переводит скалярные функции в функции со значениями в пространстве l_2. Из теоремы Планшереля следует, что $\mathscr{K}$ является ограниченным отображением пространства L_2 скалярных функций в пространство $L_2(l_2)$ квадратично интегрируемых векторных функций со значениями в l_2. Далее, из следствий 19 и 17 вытекает, что $\mathscr{K}$ является ограниченным отображением пространства скалярных функций L_p в пространство $L_p(l_2)$ векторных функций (при $1<p<2$).

Пусть $\mathscr{M}$ — преобразование в $L_p(l_2)$, переводящее векторную функцию, n-я компонента которой имеет преобразованием Фурье функцию $g_n(\xi)$, в векторную функцию, преобразование Фурье n-й компоненты которой $h_n(\xi)$ определяется формулой

$$h_n(\xi)=\begin{cases} g_n(\xi), & \text{если } 2^n<|\xi|<2^{n+1}, \\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases} \tag{61}$$

Согласно следствию 24, линейное преобразование $\mathscr{M}$ ограничено. С другой стороны, из определения $\hat{K}(\xi)$ и соотношений (59) и (61) следует, что $\mathscr{M}\mathscr{K}$ переводит функцию f в векторную функцию, n-я компонента которой равна функции f_n из (54). Поэтому левое неравенство в (54) доказано.

Правое неравенство доказывается аналогично. Пусть G — функция со значениями в гильбертовом пространстве последовательностей l_2, преобразование Фурье n-й компоненты которой равно $\hat{g}_n(\xi)$. Положим

$$(\mathscr{L}G)(x)=\int_{-\infty}^{\infty} K(x-y)\,G(y)\,dy; \tag{62}$$

это равносильно тому, что

$$\widehat{\mathscr{L}G}(\xi)=\sum_{-\infty}^{\infty}\hat{K}_n(\xi)\,\hat{g}_n(\xi). \tag{63}$$

По теореме Планшереля $\mathscr{L}$ является ограниченным отображением пространства $L_2(l_2)$ в пространство скалярных функций L_2. Таким образом, согласно следствиям 19 и 17, $\mathcal{L}$ является ограниченным отображением пространства $L_p(l_2)$ в L_p. Из (63) и (61) следует, что $\mathcal{L}\mathcal{M}$ переводит функцию G в скалярную функцию f, преобразование Фурье которой удовлетворяет соотношениям

$$(64)\qquad \hat{f}(\xi)=g_n(\xi), \qquad 2^n<|\xi|<2^{n+1}.$$

Отсюда следует справедливость правого неравенства в (54).

26. Следствие. *Теорема 25 остается справедливой во всей области* $1<p<\infty$.

Доказательство. В ходе доказательства теоремы 25 мы видели, что при $1<p\leqslant 2$ отображение $\mathcal{M}\mathcal{K}$, переводящее скалярную функцию с преобразованием Фурье $f(\xi)$ в векторную функцию, n-я компонента которой имеет преобразованием Фурье функцию $f_n(\xi)$, определяемую формулой

$$(65)\qquad f_n(\xi)=\begin{cases} f(\xi), & \text{если } 2^n\leqslant|\xi|<2^{n+1},\\ 0 & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

является ограниченным отображением пространства L_p в $L_p(l_2)$. Сопряженным к этому отображению будет, очевидно, отображение $\mathcal{L}\mathcal{M}$ из теоремы 25, рассматриваемое как отображение пространства $L_q(l_2)$ в L_q, где $1/p+1/q=1$. Поэтому отображение $\mathcal{L}\mathcal{M}$ ограничено и при $2\leqslant q<\infty$. Используя аналогичные «двойственные» соображения, можно показать, что отображение $\mathcal{M}\mathcal{K}$ ограничено в расширенной области, ч. т. д.

27. Следствие. *Теорема 25 остается справедливой во всей области* $1<p<\infty$ *для функций* f *со значениями в произвольном гильбертовом пространстве.*

Доказательство. Заметим, что доказательство теоремы 20 с тривиальными изменениями проходит для функций со значениями в произвольном гильбертовом пространстве (и даже в произвольном L_p-пространстве); в частности, лемма 21 почти без изменений в доказательстве обобщается на любую пару B-пространств X, Y^*, для которых

$$(66)\qquad \sup_{y^*\in Y^*,\ |y^*|=1} |y^*(x)|=|x|; \qquad x\in X;$$

поэтому следствие 22 справедливо для функций $f(x, s)$ со значениями в гильбертовом пространстве, а следствие 23 почти без изменений в доказательстве переносится на пространство функций f со значениями в любом пространстве типа $L_p(\mathfrak{H})$, где $\mathfrak{H}$ — произвольное гильбертово пространство. Далее, можно заметить, что лемма 24 без изменения доказательства обобщается на пространство $L_p(l_q(\mathfrak{H}))$ функций, значения которых принадлежат пространству последовательностей $l_q(\mathfrak{H})$, состоящему из всевозможных последовательностей векторов из $\mathfrak{H}$, для которых сходится ряд из q-х степеней норм. Эти замечания позволяют легко получить обобщение теоремы 25 на функции f со значениями в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Обобщенную теорему 25 можно распространить с области $1 < p \leqslant 2$ на всю область $1 < p < \infty$ при помощи сформулированного выше обобщения леммы 21, ч. т. д.

Теперь мы готовы к доказательству теоремы Марцинкевича и даже некоторого ее обобщения.

28. Теорема. *Пусть* $1 < p < \infty$. *Пусть* $L_p(\mathfrak{H})$ *обозначает* L_p-*пространство функций со значениями в гильбертовом пространстве* $\mathfrak{H}$. *Пусть* $T(\xi)$ *для всякого вещественного* ξ *является ограниченным оператором в* $\mathfrak{H}$; *предположим, что функция* $T(\xi)$ *ограничена и что вариации*

$$\underset{2^n \leqslant \xi \leqslant 2^{n+1}}{\operatorname{var}} (T(\xi)) \tag{67}$$

и

$$\underset{2^n \leqslant -\xi \leqslant 2^{n+1}}{\operatorname{var}} (T(\xi)) \tag{68}$$

ограничены в совокупности, когда n пробегает все положительные и отрицательные целые числа. Пусть функция f принадлежит $L_p(\mathfrak{H})$, и пусть $\hat{f}(\xi)$ — ее преобразование Фурье по переменному x. Пусть отображение $\mathscr{K}_1$ определено формулой

$$(\widehat{\mathscr{K}_1 f})(\xi) = T(\xi)\hat{f}(\xi), \quad f \in L_p(\mathfrak{H}). \tag{69}$$

Тогда $\mathscr{K}_1$ — ограниченное отображение пространства $L_p(\mathfrak{H})$ в себя.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{H}^+$ обозначает гильбертово пространство всех (двусторонних) квадратично суммируемых последовательностей векторов из $\mathfrak{H}$. Пусть $T^+(\xi)$ — отображение, которое переводит вектор $\{x_n\}$ из $\mathfrak{H}^+$ в вектор, n-я компонента которого равна $T(\xi)x_n$, если $2^n \leqslant |\xi| < 2^{n+1}$, и равна 0 в противном случае. Как было отмечено в ходе доказательства следствия 27, следствие 24 обобщается на функции со значениями в пространстве $l_2(\mathfrak{H}) = \mathfrak{H}^+$. Таким образом, мы можем заключить, что отображение $\mathscr{K}_1^+$ в пространстве $L_p(\mathfrak{H}^+)$, определенное формулой

$$(\widehat{\mathscr{K}_1^+ F})(\xi) = T^+(\xi)\hat{F}(\xi), \quad F \in L_p(\mathfrak{H}^+), \tag{70}$$

ограничено. Пусть $\mathscr{A}^+$ и $\mathscr{B}$ — отображения пространства $L_p(\mathfrak{H})$ в $L_p(l_2(\mathfrak{H}))$ и пространства $L_p(l_2(\mathfrak{H}))$ в $L_p(\mathfrak{H})$ соответственно, определенные формулами

$$(71)\qquad (\mathscr{A}^+f)_{(n)}(\xi)=\begin{cases} f_n(\xi), & \text{если } 2^n\leqslant|\xi|<2^{n+1},\\ 0 & \text{в противном случае}\end{cases}$$

и

$$(72)\qquad (\mathscr{B}F)(\xi)=F_n(\xi),\quad 2^n\leqslant|\xi|<2^{n+1}.$$

Тогда по следствию 27 преобразования $\mathscr{A}^+$ и $\mathscr{B}$ ограничены. С другой стороны, из (69), (70), (71) и (72) следует, что $\mathscr{B}\mathscr{K}_1^+A^+=\mathscr{K}_1$. Поэтому преобразование $\mathscr{K}_1$ ограничено, ч. т. д.

29. Следствие. *В теореме* 28 *предположение об ограниченности в совокупности вариаций* (67) *и* (68) *можно заменить условием*

$$(73)\qquad |T'(\xi)|\leqslant\frac{C}{|\xi|}.$$

Это следствие дает обобщение на векторные функции одной полезной теоремы Михлина.

Теорема 25 была доказана в несколько более общей форме Пэли и Литлвудом [1]. Они доказали дискретный аналог теоремы, которую в непрерывном случае можно сформулировать следующим образом.

30. Теорема. *Пусть* $\beta\geqslant\alpha>0$ — *положительные постоянные. Пусть* $\{\lambda_m\}$ — *такая возрастающая последовательность неотрицательных вещественных чисел, что* $\lambda_0=0$ *и*

$$(1+\alpha)\lambda_n\leqslant\lambda_{n+1}\leqslant(1+\beta)\lambda_n.$$

Пусть $\mathscr{B}$ *есть* σ*-алгебра подмножеств вещественной оси, порожденная множествами вида* $[\pm\lambda_m,\ \pm\lambda_n]$. *Для каждой функции* $f\in L_2(-\infty,\ \infty)$, *и каждого* $e\in\mathscr{B}$ *положим* $E(e)f=F^{-1}(\chi_eF(f))$, *где* χ_e — *характеристическая функция множества* e, *а* $F:L_2\to L_2$ — *преобразование Фурье. Тогда если* $1<p<\infty$, *то существует такая постоянная* $K=K(p,\ \alpha,\ \beta)$, *что*

$$|E(e)f|_p\leqslant K(p,\ \alpha,\ \beta)|f|_p,\quad e\in\mathscr{B},\quad f\in L_2\cap L_p.$$

Марцинкевич [1] улучшил этот результат в различных направлениях, прийдя к некоторому обобщенному дискретному аналогу теоремы 30. В непрерывном случае его результат можно сформулировать следующим образом.

31. Теорема. *Пусть* α, β, p *и* $\{\lambda_n\}$ — *такие же, как в предыдущей теореме, и пусть* $M<\infty$. *Пусть* φ — *такая функция, определенная на вещественной оси и непрерывно дифференци-*

руемая при $x \neq \pm\lambda_i$, *что*

$$\text{(I)} \qquad \int\limits_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} |\varphi'(x)|\,dx + \int\limits_{-\lambda_{i+1}}^{-\lambda_i} |\varphi'(x)|\,dx \leqslant M, \quad i \geqslant 0,$$

$$\text{(II)} \qquad |\varphi(x)| \leqslant M, \qquad -\infty < x < \infty.$$

Пусть $H_\varphi f = F^{-1}(\varphi F(f))$ *для* $f \in L_2$. *Тогда существует такая постоянная* $K(M, p, \alpha, \beta)$, *что*

$$|H_\varphi f|_p \leqslant K(M, p, \alpha, \beta)\,|f|_p, \quad f \in L_2 \cap L_p.$$

Марцинкевич приводит также m-мерный вариант своей теоремы. В двумерном случае условия (I) и (II) заменяются условиями

$$\text{(I}'\text{)} \qquad \left\{ \int\limits_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \int\limits_{\lambda_j}^{\lambda_{j+1}} + \int\limits_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \int\limits_{-\lambda_{j+1}}^{-\lambda_j} + \int\limits_{-\lambda_{i+1}}^{-\lambda_i} \int\limits_{\lambda_j}^{\lambda_{j+1}} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{-\lambda_{i+1}}^{-\lambda_i} \int\limits_{-\lambda_{j+1}}^{-\lambda_j} \right\} \left| \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \varphi(x_1, x_2) \right| dx_1 dx_2 \leqslant M, \quad 0 \leqslant i, j;$$

$$\text{(II}'\text{)} \qquad \left\{ \int\limits_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} + \int\limits_{-\lambda_{i+1}}^{-\lambda_i} \right\} \left\{ \left| \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x, \lambda_j) \right| + \left| \frac{\partial}{\partial x} \varphi(\lambda_j, x) \right| + \right.$$

$$\left. + \left| \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x, -\lambda_j) \right| + \left| \frac{\partial}{\partial x} \varphi(-\lambda_j, x) \right| \right\} dx \leqslant M, \quad 0 \leqslant i, j;$$

$$\text{(III}'\text{)} \qquad |\varphi(x_1, x_2)| \leqslant M, \quad -\infty < x_1, x_2 < \infty.$$

Отсюда ясно, как формулируется m-мерный вариант теоремы Марцинкевича, хотя ввиду сложности записи $m+1$ условия, заменяющего в этом случае условия (I′), (II′) и (III′), мы воздерживаемся от приведения его в явном виде.

Из теоремы Марцинкевича легко следует, что если γ вещественно и если $\varphi(t) = |t|^{i\gamma}$ при $t \in E^m$, то существует такая конечная постоянная $K_{p,m}$, зависящая лишь от p и m, что

$$|F^{-1}\varphi F(f)|_p \leqslant K_{p,m} |f|_p, \quad f \in L_2 \cap L_p.$$

Торин [1] при помощи этого факта получил следующее m-мерное обобщение результата, принадлежащего в одномерном случае Харди и Литлвуду [1].

32. Теорема. *Пусть $f \in L_p(E^m)$ и $p < r$. Тогда интеграл*

$$(If)(x) = \int\limits_{E^m} \frac{f(y)}{|x-y|^{m(1-1/p+1/r)}}\, dy$$

существует для почти всех x из E^m и определяет ограниченное отображение пространства $L_p(E^m)$ в пространство $L_r(E^m)$.

Торин доказал эту теорему при помощи соображений выпуклости, аналогичных примененным им для доказательства теоремы Рисса о выпуклости. Таким образом ему удалось упростить (даже в случае $m=1$) первоначальное доказательство Харди и Литлвуда, которое было основано на их методе «перестановки в убывающем порядке». Этот общий метод изложен у Харди, Литлвуда и Пойа [1; гл. 10].

Следует заметить, что ввиду положительности ядра, фигурирующего в предыдущей теореме Харди — Литлвуда — Торина, эта теорема может быть немедленно перенесена на сингулярные интегралы вида

$$\int\limits_{E^m} \frac{K(x, y) f(y)}{|x-y|^{m(1+1/r-1/p)}}\, dy,$$

где K — произвольная измеримая ограниченная функция.

Марцинкевич [1] показывает также, как можно ослабить условие $(1+\alpha)\lambda_n \leqslant \lambda_{n+1} \leqslant (1+\beta)\lambda_n$ в фундаментальной теореме Литлвуда и Пэли.

Хиршман [1] рассматривает ряд интересных неравенств, связанных с неравенством Марцинкевича и с родственными неравенствами Литлвуда — Пэли и Бабенко. В его работе можно ознакомиться с подробным описанием этих неравенств и с библиографией.

Говорят, что функция f, определенная на подмножестве A пространства E^m, удовлетворяет условию Гёльдера с показателем ε и постоянной K, если

$$|f(x)-f(y)| \leqslant K|x-y|^{\varepsilon}, \quad x, y \in A.$$

Множество ограниченных функций, удовлетворяющих такому условию для фиксированного ε и какого-нибудь K, образует B-пространство относительно нормы

$$|f| = \sup_{x, y \in A} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\varepsilon}} + \sup_{x \in A} |f(x)|.$$

Это пространство широко изучалось в связи с теорией сингулярных интегралов. Можно показать, что при соответствующих предположениях сингулярные интегралы типа Гильберта—Кальдерона—Зигмунда переводят функции, удовлетворяющие условию Гёльдера с показателем $0<\varepsilon<1$, в функции того же класса. Можно показать также, что при соответствующих предположениях сингулярные интегралы типа Харди—Литлвуда—Пэли переводят функции, удовлетворяющие условию Гёльдера с некоторым показателем $0<\varepsilon<1$, в функции, удовлетворяющие условию Гёльдера с бо́льшим показателем. Такие теоремы полезны, в частности, в теории дифференциальных уравнений с частными производными. По поводу различных теорем такого типа см. Зигмунд [1], Фридрихс [1] и [11; стр. 101—121, особенно теорема 9.7 на стр. 116], Харди и Литлвуд [1].

Многие из доказанных нами неравенств имеют «дискретные» аналоги в виде неравенств для некоторых сумм, сингулярных интегралов для периодических функций и т. д. Их можно найти в некоторых из цитированных работ. В частности, см. Зигмунд [1, гл. 7 и 9].

ГЛАВА XII

Неограниченные операторы в гильбертовом пространстве

1. Введение

В предыдущей главе мы видели, как можно применить спектральную теорию, развитую в гл. 9 и 10, к различным задачам математического анализа. Однако до сих пор мы еще не применяли эту теорию к важному классу задач, известных как граничные задачи. Это объясняется тем, что операторы, возникающие в граничных задачах, являются дифференциальными и потому они определены не на всем гильбертовом пространстве. В настоящей главе закладываются основы расширения спектральной теории, изложенной в гл. 10, расширения, достаточно общего, чтобы охватить многообразные применения этой теории к самосопряженным граничным задачам. Сами граничные задачи будут рассмотрены в следующих главах, а сейчас будут даны только основы абстрактной техники.

Новые трудности возникают не только потому, что дифференциальные операторы определены не всюду, но и потому, что они не являются непрерывными на своей области определения, т. е. эти операторы неограниченные. Так как многие из понятий, используемых в гл. 10, a priori не имеют смысла для неограниченных операторов, то мы дадим более общие определения. Термин *оператор* будет использоваться для линейного отображения линейных пространств. Символы $\mathfrak{D}(T)$ и $\mathfrak{R}(T)$ используются для обозначения *области определения* и *области значений* оператора T соответственно. Два оператора T и U называются *равными* (обозначается $T=U$) тогда и только тогда, когда $\mathfrak{D}(T)=\mathfrak{D}(U)$ и $Tx=Ux$ для всех x из $\mathfrak{D}(T)$; T называется *расширением* U (обозначается $T\supseteq U$) тогда и только тогда, когда $\mathfrak{D}(T)\supseteq\mathfrak{D}(U)$ и $Tx=Ux$ для всех x из $\mathfrak{D}(U)$. Иногда вместо $T\supseteq U$ используется обозначение $U\subseteq T$. Если не оговорено противное, то будет предполагаться, что область определения и область значений каждого из рассматриваемых операторов — это подмножества некоторого гильбертова пространства, которое будет обозначаться буквой $\mathfrak{H}$. Как обычно, оператор называется *огра-*

ниченным, если верхняя грань $\sup|Tx|$, взятая по всем x из $\mathfrak{D}(T)$ с нормой $|x|=1$, конечна; в противном случае T называется *неограниченным*. Таким образом, оператор неограничен тогда и только тогда, когда он разрывен в одной точке (и, следовательно, в каждой точке) своей области определения. *График* $\Gamma(T)$ оператора T есть подмножество в $\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{H}$, состоящее из всех точек вида $[x, Tx]$, где $x\in\mathfrak{D}(T)$. Оператор T называется *замкнутым*, если его график замкнут в $\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{H}$. Прямая сумма гильбертовых пространств всегда понимается в смысле § IV.4, стр. 278, так что $\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{H}$ есть гильбертово пространство со скалярным произведением

$$([x_1, x_2], [y_1, y_2])=(x_1, y_1)+(x_2, y_2).$$

Это скалярное произведение можно использовать для определения нового скалярного произведения на $\mathfrak{D}(T)$ с помощью формулы

$$(x, y)_1=([x, Tx], [y, Ty])=(x, y)+(Tx, Ty), \quad x, y\in\mathfrak{D}(T).$$

Пространство $\mathfrak{D}(T)$ со скалярным произведением $(x, y)_1$ не обязательно гильбертово, так как оно может оказаться не полным относительно нормы $(x, x)_1^{1/2}$, но если T — замкнутый оператор, то линейное пространство $\mathfrak{D}(T)$ со скалярным произведением $(x, y)_1$ полно и, следовательно, является гильбертовым пространством. Более того, замкнутый оператор T, рассматриваемый как оператор, действующий из гильбертова пространства $\mathfrak{D}(T)$ со скалярным произведением $(x, y)_1$ в пространство $\mathfrak{H}$ со скалярным произведением (x, y), непрерывен.

Используя элементарные алгебраические операции сложения и умножения для операторов, определенных не всюду, нужно быть осторожным; так мы приходим к следующему формальному определению.

1. Определение. Пусть T и U — линейные операторы и α — комплексное число. Тогда операторы $T+U$, TU, αT и T^{-1} определяются следующим образом:

(a) $\mathfrak{D}(T+U)=\mathfrak{D}(T)\cap\mathfrak{D}(U), \quad (T+U)x=Tx+Ux;$

(b) $\mathfrak{D}(TU)=\{x\mid x\in\mathfrak{D}(U),\ Ux\in\mathfrak{D}(T)\}, \quad (TU)x=T(Ux);$

(c) если $\alpha=0$, то $\alpha T\equiv 0$; в противном случае $\mathfrak{D}(\alpha T)=\mathfrak{D}(T)$ и $(\alpha T)x=\alpha(Tx)$;

(d) если оператор T взаимно однозначен, то $\mathfrak{D}(T^{-1})=\mathfrak{R}(T)$ и $T^{-1}y=x$, где $y=Tx$.

Обычные законы ассоциативности $(A+B)+C=A+(B+C)$ и $(AB)C=A(BC)$ выполнены, так что суммы и произведения нескольких операторов могут записываться без использования скобок. Что касается законов дистрибутивности, то один из них имеет обычную форму $(A+B)C=AC+BC$; однако, поскольку может случиться, что вектор $(B+C)x$ принадлежит области определения оператора A, в то время как Bx или Cx ей не принадлежат, во втором случае вместо равенства мы имеем лишь включение $A(B+C)\supseteq AB+AC$.

Точно так же, как в случае ограниченного оператора, *резольвентное множество* $\varrho(T)$ оператора T определяется как множество всех комплексных чисел λ, таких, что $(\lambda I-T)^{-1}$ существует как всюду определенный ограниченный оператор. Если $\lambda\in\varrho(T)$, то символ $R(\lambda;T)$ будет использоваться для обозначения *резольвенты* $(\lambda I-T)^{-1}$. *Спектр* $\sigma(T)$ оператора T — это дополнение резольвентного множества $\varrho(T)$. *Точечный спектр* $\sigma_p(T)$, *непрерывный спектр* $\sigma_c(T)$ *и остаточный спектр* $\sigma_r(T)$ определяются точно так же, как это было сделано в определении X.3.1 для ограниченных операторов. Одно из свойств, которым неограниченные операторы отличаются от ограниченных, состоит в том, что спектром неограниченного оператора может быть вся плоскость.

2. Лемма. *Оператор, обратный к замкнутому, замкнут. Ограниченный оператор замкнут тогда и только тогда, когда замкнута его область определения.*

Доказательство. Если A_1 — изометрический автоморфизм в $\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{H}$, переводящий $[x, y]$ в $[y, x]$, то $\Gamma(T^{-1})=A_1\Gamma(T)$; это показывает, что T замкнут тогда и только тогда, когда замкнут T^{-1}. Если B — ограниченный замкнутый оператор и $\{x_n\}$ — последовательность Коши в $\mathfrak{D}(B)$, то $\{[x_n, Bx_n]\}$ — последовательность Коши в замкнутом множестве $\Gamma(B)$ и, следовательно, она имеет предел $[x, Bx]$ в $\Gamma(B)$. Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ сходится к точке x в $\mathfrak{D}(B)$, что доказывает замкнутость $\mathfrak{D}(B)$. Обратно, если область определения ограниченного оператора B замкнута и если $\{[x_n, Bx_n]\}$ — последовательность Коши в $\Gamma(B)$, то предел $x=\lim x_n$ существует в $\mathfrak{D}(B)$, и, так как B непрерывен, $[x_n, Bx_n]\to[x, Bx]$, что доказывает замкнутость множества $\Gamma(B)$, ч. т. д.

3. Лемма. *Пусть T — замкнутый оператор. Тогда множества $\varrho(T)$, $\sigma_p(T)$, $\sigma_c(T)$ и $\sigma_r(T)$ не пересекаются, и их объединение есть вся плоскость. Резольвентное множество $\varrho(T)$ открыто, а резольвента $R(\lambda;T)$ есть аналитическая функция от λ, удовлетворяющая резольвентному уравнению*

$$R(\lambda;\ T)-R(\mu;\ T)=(\mu-\lambda)R(\lambda;\ T)R(\mu;\ T),\qquad \lambda,\ \mu\in\varrho(T).$$

Доказательство. Из определений ясно, что $\varrho(T)$, $\sigma_p(T)$, $\sigma_c(T)$ и $\sigma_r(T)$ — непересекающиеся множества и что если точка λ

не лежит ни в одном из этих множеств, то обратный $(\lambda I - T)^{-1}$ должен существовать как всюду определенный и неограниченный оператор. Таким образом, для доказательства первого заключения достаточно показать, что если $(\lambda I - T)^{-1}$ существует и имеет областью определения все $\mathfrak{H}$, то λ лежит в $\rho(T)$. Из леммы 2 вытекает, что $(\lambda I - T)^{-1}$ замкнут, но тогда из теоремы о замкнутом графике (II.2.4) следует, что оператор $(\lambda I - T)^{-1}$ ограничен, поскольку он определен всюду. Анализируя доказательство леммы VII.3.2, в которой утверждается, что множество $\rho(T)$ открыто, а функция $R(\lambda; T)$ аналитическая в случае ограниченных операторов, мы замечаем, что те же утверждения верны и для неограниченных операторов. Наконец, резольвентное уравнение получается вычитанием первого из двух следующих уравнений из второго:

$$(\lambda I - T) R(\lambda; T) R(\mu; T) = R(\mu; T),$$
$$(\mu I - T) R(\lambda; T) R(\mu; T) = R(\lambda; T).$$

Сопряженный T^* к ограниченному оператору T в гильбертовом пространстве был определен тождеством $(Tx, y) = (x, T^*y)$. В дальнейшем нам потребуется понятие сопряженного (в смысле гильбертова пространства) к оператору, который не обязательно ограничен; это понятие определяется следующим образом.

4. Определение. Если область определения $\mathfrak{D}(T)$ оператора T плотна в $\mathfrak{H}$, то *область определения* $\mathfrak{D}(T^*)$ состоит из всех векторов $y \in \mathfrak{H}$, для которых (Tx, y) как функция от x непрерывна в $\mathfrak{D}(T)$. Так как $\mathfrak{D}(T)$ плотно в $\mathfrak{H}$, то существует (IV.4.5) однозначно определенная точка y^* в $\mathfrak{H}$, такая, что $(Tx, y) = (x, y^*)$ для всех $x \in \mathfrak{D}(T)$. *Сопряженный в смысле гильбертова пространства* или просто *сопряженный* T^* определяется на $\mathfrak{D}(T^*)$ равенством $T^*y = y^*$. Другими словами,

$$(Tx, y) = (x, T^*y), \quad x \in \mathfrak{D}(T), \quad y \in \mathfrak{D}(T^*).$$

В этом определении требуется, чтобы область определения $\mathfrak{D}(T)$ была плотна в $\mathfrak{H}$, тогда точка y^*, соответствующая точке y из $\mathfrak{D}(T^*)$, будет однозначно определена. Поэтому, *говоря о сопряженном к оператору T, мы всегда предполагаем, что множество $\mathfrak{D}(T)$ всюду плотно*. Точно так же если речь идет об обратном T^{-1}, то молчаливо предполагается, что оператор T взаимно однозначен.

Напомним, что ортогональное дополнение множества $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{H}$ определяется как множество $\{x \mid x \in \mathfrak{H}, (x, \mathfrak{A}) = 0\}$. Это ортогональное дополнение обозначается через $\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{A}$ или через $\mathfrak{A}^{\perp}$. Очевидно, множество $\mathfrak{A}^{\perp}$ является замкнутым линейным многообразием, а если $\mathfrak{A}$ само является замкнутым линейным многообразием, то $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}^{\perp}$ — взаимно дополнительные многообразия, т. е. $\mathfrak{H}=\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{A}^{\perp}$ (IV.4.4).

5. Лемма. *Пусть изометрические автоморфизмы* A_1 *и* A_2 *в* $\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{H}$ *определены равенствами*

$$A_1[x, y]=[y, x], \quad A_2[x, y]=[y, -x].$$

Тогда

$$\Gamma(T^{-1})=A_1\Gamma(T), \quad \Gamma(T^*)=(A_2\Gamma(T))^{\perp},$$
$$A_1A_2=-A_2A_1, \quad A_1^2=I, \quad A_2^2=-I.$$

Доказательство. Заметим, что $[y, y^*]\in\Gamma(T^*)$ тогда и только тогда, когда

$$0=(Tx, y)-(x, y^*)=([Tx, -x], [y, y^*]), \quad x\in\mathfrak{D}(T).$$

Следовательно, $\Gamma(T^*)=(A_2\Gamma(T))^{\perp}$. Доказательство остальных утверждений представляется читателю.

6. Лемма. *Пусть T — оператор в гильбертовом пространстве. Тогда*

(a) *если $\mathfrak{D}(T)$ всюду плотно, то T^* — замкнутый линейный оператор;*

(b) *если существует T^{-1} с всюду плотной областью определения, то существует $(T^*)^{-1}$ и $(T^*)^{-1}=(T^{-1})^*$;*

(c) *если B — всюду определенный ограниченный оператор, то*

$$(T+B)^*=T^*+B^*, \quad (BT)^*=T^*B^*;$$

(d) $$\mathfrak{R}(T)^{\perp}=\{y \mid y\in\mathfrak{D}(T^*), \quad T^*y=0\}.$$

Доказательство. Так как ортогональное дополнение замкнуто, то утверждение (a) вытекает из леммы 5.

Для доказательства (b) заметим сначала, что из $T^*y=0$ вытекает равенство $(Tx, y)=0$ для всех $x\in\mathfrak{D}(T)$. Так как многообразие $\mathfrak{R}(T)=\mathfrak{D}(T^{-1})$ всюду плотно, то это означает, что $y=0$, и, следовательно, оператор $(T^*)^{-1}$ существует. Тогда по лемме 5

$$\Gamma((T^*)^{-1})=A_1\Gamma(T^*)=A_1(A_2\Gamma(T))^{\perp}=$$
$$=(A_1A_2\Gamma(T))^{\perp}=(-A_2A_1\Gamma(T))^{\perp}=$$
$$=(A_2A_1\Gamma(T))^{\perp}=(A_2\Gamma(T^{-1}))^{\perp}=\Gamma((T^{-1})^*),$$

и потому $(T^*)^{-1}=(T^{-1})^*$.

Докажем теперь (c). Так как B всюду определен, мы имеем $\mathfrak{D}(T+B)=\mathfrak{D}(T)$. Поскольку B непрерывен и $((T+B)x, y)=$

$=(Tx, y)+(Bx, y)$, ясно, что $\mathfrak{D}(T^*)=\mathfrak{D}((T+B)^*)$. Таким образом, для $x\in\mathfrak{D}(T)=\mathfrak{D}(T+B)$ и $y\in\mathfrak{D}(T^*)=\mathfrak{D}((T+B)^*)$ мы имеем

$$(x, (T+B)^*y)=((T+B)x, y)=(Tx, y)+(Bx, y)=$$
$$=(x, T^*y)+(x, B^*y)=(x, (T^*+B^*)y);$$

тем самым равенство $(T+B)^*=T^*+B^*$ доказано.

Чтобы доказать соотношение $(BT)^*=T^*B^*$, предположим, что $x\in\mathfrak{D}(T)$ и $y\in\mathfrak{D}((BT)^*)$. Тогда $(x, (BT)^*y)=(BTx, y)=(Tx, B^*y)$; это показывает, что $B^*y\in\mathfrak{D}(T^*)$ и, следовательно, $y\in\mathfrak{D}(T^*B^*)$. Из этого равенства также следует, что для $y\in\mathfrak{D}((BT)^*)$ имеет место равенство $T^*B^*y=(BT)^*y$, откуда $T^*B^*\supseteq(BT)^*$. Аналогично если $x\in\mathfrak{D}(T)$ и $y\in\mathfrak{D}(T^*B^*)$, то $(x, T^*B^*y)=(Tx, B^*y)=$ $=(BTx, y)$; это показывает, что $y\in\mathfrak{D}((BT)^*)$ и $(BT)^*y=T^*B^*y$. Тем самым доказано соотношение $(BT)^*\supseteq T^*B^*$, и доказательство пункта (с) закончено.

Наконец, заметим, что утверждение (d) вытекает непосредственно из тождества

$$(Tx, y)=(x, T^*y), \quad x\in\mathfrak{D}(T), \quad y\in\mathfrak{D}(T^*),$$

и это завершает доказательство леммы.

Большинство рассмотрений этой и следующих глав будет посвящено операторам, которые являются либо симметрическими, либо самосопряженными в соответствии со следующим определением.

7. Определение. Оператор T называется *симметрическим*, если $(Tx, y)=(x, Ty)$ для всех пар x, y точек из $\mathfrak{D}(T)$, и *самосопряженным*, если $T=T^*$.

Оператор T может быть симметрическим, даже если его область определения не является всюду плотной, но если область определения $\mathfrak{D}(T)$ всюду плотна, так что T^* определен, то понятие симметричности эквивалентно включению $T^*\supseteq T$. Конечно, если T — ограниченный всюду определенный оператор, то утверждения $T^*\supseteq T$ и $T^*=T$ эквивалентны. Таким образом, ограниченный оператор симметричен тогда и только тогда, когда он самосопряжен. Если T — всюду определенный симметрический оператор, то $T^*\supseteq T$ и, следовательно, $T^*=T$. По лемме 6(a) T замкнут и по теореме о замкнутом графике (II.2.4) ограничен. Таким образом, *всюду определенный симметрический оператор ограничен и самосопряжен*.

Хотя понятия симметричности и самосопряженности для ограниченных операторов совпадают, неограниченный симметрический оператор не обязан быть самосопряженным. В качестве примера рассмотрим оператор id/dt с областью определения $\mathfrak{D}(id/dt)$ в $L_2(0, 1)$, состоящей из всех функций f, имеющих непрерывную производную, и таких, что $f(0)=f(1)=0$. Так как

$$
\begin{aligned}
(if', g) &= \int_0^1 if'(t)\overline{g(t)}\,dt = \\
&= \int_0^1 f(t)\overline{ig'(t)}\,dt + if(1)\overline{g(1)} - if(0)\overline{g(0)} = \\
&= (f, ig'), \qquad f, g \in \mathfrak{D}\left(i\frac{d}{dt}\right),
\end{aligned}
$$

то ясно, что id/dt на плотной области определения $\mathfrak{D}(id/dt)$ симметричен. Однако этот оператор не является самосопряженным, так как из приведенных выше равенств видно, что любая функция g с непрерывной первой производной обладает тем свойством, что

$$
\left(i\frac{d}{dt}f, g\right) = \left(f, i\frac{d}{dt}g\right), \qquad f \in \mathfrak{D}\left(i\frac{d}{dt}\right),
$$

и тем самым любая такая функция g, даже если она не обращается в нуль в одной из граничных точек отрезка $[0,1]$, лежит в области определения оператора, сопряженного к id/dt.

Задача нахождения самосопряженных расширений данного симметрического оператора, намеченная в предыдущем примере, будет систематически изучена в § 4.

2. Спектральная теорема для неограниченных самосопряженных операторов

В этом параграфе спектральная теория, развитая в § X.2 для ограниченных самосопряженных операторов, будет распространена на случай неограниченных самосопряженных операторов. В частности, будет показано, что каждый самосопряженный оператор имеет единственное самосопряженное регулярное счетно аддитивное разложение единицы, в терминах которого может быть построено операционное исчисление. Для этого мы прежде всего докажем, что резольвента $R(\alpha; T)=(\alpha I - T)^{-1}$ самосопряженного оператора T определена для всех невещественных α и сама является нормальным оператором, к которому может быть применена теория § X.2.

1. Лемма. *Пусть T — симметрический оператор и α — невещественное число. Тогда оператор $(\alpha I - T)^{-1}$ существует и*

$$
|x| \leqslant \frac{|(\alpha I - T)x|}{|\operatorname{Im}\alpha|}, \qquad x \in \mathfrak{D}(T).
$$

Доказательство. Если $\operatorname{Im}\alpha$ и $\operatorname{Re}\alpha$ — мнимая и вещественная части числа α и $x \in \mathfrak{D}(T) = \mathfrak{D}(\alpha I - T)$, то

$$\begin{aligned} |(\alpha I - T)x|^2 &= ((\alpha I - T)x, (\alpha I - T)x) = \\ &= (\operatorname{Im}\alpha \cdot x, \operatorname{Im}\alpha \cdot x) + ((\operatorname{Re}\alpha \cdot I - T)x, (\operatorname{Re}\alpha \cdot I - T)x) \geqslant \\ &\geqslant (\operatorname{Im}\alpha \cdot x, \operatorname{Im}\alpha \cdot x) = |\operatorname{Im}\alpha|^2 |x|^2, \end{aligned}$$

откуда непосредственно вытекает нужное нам заключение.

2. Лемма. *Спектр самосопряженного оператора T вещественен, а его резольвента — нормальный оператор, причем $R(\alpha; T)^* = R(\bar{\alpha}; T)$ и*

$$|R(\alpha; T)| \leqslant |\operatorname{Im}\alpha|^{-1}, \qquad \operatorname{Im}\alpha \neq 0.$$

Доказательство. Пусть α — невещественное число. Предыдущая лемма показывает, что $(\alpha I - T)^{-1}$ существует как ограниченный оператор. Для доказательства того, что α лежит в $\varrho(T)$, достаточно, следовательно, доказать, что его область определения замкнута, а ортогональное к ней дополнение состоит из нуля. Так как $T = T^*$, то из леммы 1.6(a) вытекает, что T замкнут и тем самым оператор $\alpha I - T$ замкнут. Из леммы 1.2 следует, что оператор $(\alpha I - T)^{-1}$ замкнут и, так как он ограничен, его область определения должна быть замкнутой (лемма 1.2). По лемме 1.6(d)

$$(\mathfrak{D}((\alpha I - T)^{-1}))^{\perp} = (\mathfrak{R}(\alpha I - T))^{\perp} = \{y \mid (\alpha I - T)^* y = 0\}.$$

Далее, $(\alpha I - T)^* = \bar{\alpha} I - T$, и так как $\operatorname{Im}\bar{\alpha} \neq 0$, то мы видим (лемма 1), что оператор $\bar{\alpha} I - T$ взаимно однозначен. Таким образом, $\{y \mid (\alpha I - T)^* y = 0\} = \{0\}$. Таким образом, доказано, что $\alpha \in \varrho(T)$, а следовательно, и то, что спектр вещественен. Так как $(\alpha I - T)^* = \bar{\alpha} I - T$, то из леммы 1.6(b) вытекает, что $R(\bar{\alpha}; T) = R(\alpha; T)^*$. Тем самым показано, что оператор $R(\alpha; T)$ нормальный. Заключительное неравенство является следствием предыдущей леммы.

3. Теорема. *Пусть T — самосопряженный оператор. Тогда его спектр вещественен и существует однозначно определенная регулярная счетно аддитивная самосопряженная спектральная мера E, определенная на борелевских множествах плоскости, обращающаяся в нуль на дополнении спектра и связанная с оператором T соотношениями*

(a) $$\mathfrak{D}(T) = \left\{x \,\middle|\, x \in \mathfrak{H}, \int_{\sigma(T)} \lambda^2 (E(d\lambda)x, x) < \infty\right\}$$

и

$$\text{(b)} \qquad Tx = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} \lambda E(d\lambda)\, x, \qquad x \in \mathfrak{D}(T).$$

Доказательство. Вещественность спектра была установлена в лемме 2. Рассмотрим гомеоморфизм $\mu = h(\lambda)$ компактной комплексной сферы, задаваемый уравнением $\mu = (i-\lambda)^{-1}$. Покажем сначала, что h отображает $\sigma(T) \cup \{\infty\}$ на $\sigma(R(i;\ T))$. Пусть $\lambda \neq i$ — точка из $\varrho(T)$ и $A = (i-\lambda)^2 R(\lambda;\ T) + (i-\lambda) I$. Из резольвентного уравнения (лемма 1.3) вытекает, что $(\mu I - R(i;\ T)) A = I$, и, таким образом, μ лежит в $\varrho(R(i;\ T))$. Если $\lambda = i$, то $\mu = \infty$, и, следовательно, в этом случае μ не принадлежит спектру ограниченного оператора $R(i;\ T)$. Обратно, пусть $0 \neq \mu \in \varrho(R(i;\ T))$; положим $A = (\mu I - R(i;\ T))^{-1}$ и $B = \mu R(i;\ T) A$. Тогда B взаимно однозначен, и его область значений есть $\mathfrak{D}(T)$. Поэтому равенства

$$\begin{aligned}(\lambda I - T) B &= [(\lambda - i) I + (iI - T)] B = \\ &= [-R(i;\ T) + \mu I] A = I\end{aligned}$$

показывают, что λ лежит в $\varrho(T)$. С другой стороны, не может быть, чтобы $\mu = 0 \in \varrho(R(i;\ T))$, так как отсюда вытекало бы, что $R(i;\ T)^{-1} = iI - T$ есть ограниченный всюду определенный оператор; этот случай мы из рассмотрения исключаем, так как теорема для ограниченных операторов уже установлена в гл. X. Итак, показано, что гомеоморфизм h отображает $\varrho(T)$ на $\varrho(R(i;\ T)) \cup \{\infty\}$ и тем самым отображает $\sigma(T) \cup \{\infty\}$ на $\sigma(R(i;\ T))$.

Для всякого борелевского множества δ комплексной плоскости положим $E(\delta) = E_1(h(\delta))$, где E_1 — разложение единицы для нормального оператора $R(i;\ T)$. Заметим, что $E_1(\{0\}) = 0$, так как если $0 \neq x = E_1(\{0\}) x$, то $R(i;\ T) x = \int_{\{0\}} \lambda E_1(d\lambda) x = 0$, что противоречит существованию обратного у оператора $R(i;\ T)$. Это показывает, что если δ — конечная комплексная плоскость, то $E(\delta) = I$ и, таким образом, E — спектральная мера. Спектральная мера E самосопряжена, счетно аддитивна и регулярна, так как этими свойствами обладает E_1 (следствие X.2.4). Более того, ясно, что $E(\sigma(T)) = I$ и, таким образом, $E(\delta) = 0$ для $\delta \subseteq \varrho(T)$. Так как спектр T веществен, то интеграл по вещественной оси относительно меры E совпадает с интегралом, взятым по спектру $\sigma(T)$.

Положим теперь

$$\mathfrak{D}_0 = \left\{ x \,\middle|\, \int_{\sigma(T)} \lambda^2 (E(d\lambda)\, x,\ x) < \infty \right\}.$$

Ясно, что $E(\delta)\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{D}_0$ для ограниченных борелевских множеств δ. Для ограниченного множества δ мы имеем также $\left|\int\limits_{\delta} \lambda E(d\lambda)x\right|^2 = \int\limits_{\delta} \lambda^2 (E(d\lambda)x, x)$ и, таким образом,

$$\text{(I)} \qquad \mathfrak{D}_0 = \left\{x \,\middle|\, \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-n}^{n} \lambda E(d\lambda)x \ \text{существует}\right\}.$$

Далее будет показано, что $\mathfrak{D}(T) \subseteq \mathfrak{D}_0$. Если x принадлежит $\mathfrak{D}(T)$, то, так как $\mathfrak{D}(T) = R(i;T)\mathfrak{H}$, x имеет вид $x = R(i;T)y$ и

$$\int\limits_{-n}^{n} \lambda E(d\lambda)x = \int\limits_{-n}^{n} \lambda E(d\lambda) R(i;T)y.$$

Заменяя меру, приходим к соотношению

$$\text{(II)} \qquad R(i;T)y = \int \mu E_1(d\mu)y = \int \frac{E(d\lambda)y}{i-\lambda},$$

где оба интеграла берутся по всей плоскости; тем самым

$$\int\limits_{-n}^{n} \lambda E(d\lambda)x = \int\limits_{-n}^{n} \frac{\lambda}{i-\lambda} E(d\lambda)y \to \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda}{i-\lambda} E(d\lambda)y.$$

Это показывает, что x лежит в $\mathfrak{D}_0$ и, следовательно, $\mathfrak{D}(T) \subseteq \mathfrak{D}_0$

В силу соотношения (II) и теоремы X.1.1 мы имеем

$$R(i;T)\int\limits_{-n}^{n} (i-\lambda)E(d\lambda) = E([-n, n]).$$

Отсюда следует, что $E([-n, n])\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{D}(T)$. Далее,

$$TE([-n, n]) = [iI - (iI - T)]R(i;T)\int\limits_{-n}^{n} (i-\lambda)E(d\lambda) = \int\limits_{-n}^{n} \lambda E(d\lambda),$$

и из (I) вытекает, что для $x \in \mathfrak{D}_0$ последовательность $\{TE([-n, n])x\}$ сходится. Так как T замкнут и $E([-n, n])x \to x$, то x принадлежит $\mathfrak{D}(T)$ и $Tx = \lim_n \int\limits_{-n}^{n} \lambda E(d\lambda)x$. Этим доказано что $\mathfrak{D}_0 \subseteq \mathfrak{D}(T)$ и, таким образом, $\mathfrak{D}_0 = \mathfrak{D}(T)$.

Для проверки единственности меры E предположим, что F — другая спектральная мера с теми же свойствами, что и E. Из (a) вытекает, что $F([-m, m])x$ лежит в $\mathfrak{D}(T)$, и в силу (b)

$$(iI-T)F([-m, m])x = \lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n}(i-\lambda)F(d\lambda)F([-m, m])x =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n}(i-\lambda)F(d\lambda\cap[-m, m])x =$$

$$= \int_{-m}^{m}(i-\lambda)F(d\lambda)x.$$

Так как по теореме X.1.1 мы имеем

$$F([-m, m]) = \left[\int_{-m}^{m}(i-\lambda)F(d\lambda)\right]\left[\int_{-m}^{m}\frac{F(d\lambda)}{i-\lambda}\right],$$

то

$$F([-m, m]) = (iI-T)F([-m, m])\int_{-m}^{m}\frac{F(d\lambda)}{i-\lambda} = (iI-T)\int_{-m}^{m}\frac{F(d\lambda)}{i-\lambda},$$

так что

$$R(i;\, T)F([-m, m]) = \int_{-m}^{m}\frac{F(d\lambda)}{i-\lambda}.$$

Полагая $m\to\infty$, мы видим, что

$$R(i;\, T) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(d\lambda)}{i-\lambda}.$$

Таким образом, заменяя меру, получаем

$$R(i;\, T) = \int\lambda F(h^{-1}(d\lambda)).$$

Следствие X.2.7 показывает, что $F(h^{-1}(\delta)) = E_1(\delta)$ для любого борелевского множества δ. Таким образом, $F(\delta) = E_1(h(\delta)) = E(\delta)$, и мера E единственна, ч. т. д.

4. Определение. Единственная спектральная мера, связанная с самосопряженным оператором T так, как описано в предыдущей теореме, называется *разложением единицы для оператора T.*

Очевидно, что для ограниченных самосопряженных операторов это понятие совпадает с тем, которое было дано в определении X.2.5.

Для всякой ограниченной борелевской функции f, определенной на вещественной оси или на спектре самосопряженного оператора T, мы можем определить ограниченный нормальный оператор $f(T)$ равенством

$$f(T) = \int_{\sigma(T)} f(\lambda) E(d\lambda),$$

где E — разложение единицы для оператора T. По теореме X.1.1 отображение $f \longrightarrow f(T)$ есть *-гомоморфизм алгебры ограниченных борелевских функций в алгебру нормальных операторов в гильбертовом пространстве, и, таким образом, приведенная выше формула определяет операционное исчисление. Теорема 3 наводит на мысль, как это операционное исчисление можно распространить до исчисления неограниченных операторов $f(T)$, соответствующих неограниченным функциям f на $\sigma(T)$. Формальное определение состоит в следующем.

5. Определение. Пусть E — разложение единицы для самосопряженного оператора T, f — комплексная борелевская функция, определенная почти всюду по мере E на вещественной оси. Тогда оператор $f(T)$ определяется соотношениями

$$\mathfrak{D}(f(T)) = \{x \mid \lim_n f_n(T)x \text{ существует}\},$$

где

$$f_n(\lambda) = f(\lambda), \ |f(\lambda)| \leqslant n; \quad f_n(\lambda) = 0, \ |f(\lambda)| > n,$$

и

$$f(T)x = \lim_n f_n(T)x, \qquad x \in \mathfrak{D}(f(T)).$$

В силу теоремы 3 ясно, что если $f(\lambda) \equiv \lambda$, то $f(T) = T$, но совсем не очевидно, что если f — многочлен $\alpha_0 + \alpha_1\lambda + \ldots + \alpha_n\lambda^n$, то $f(T)$ есть многочлен $\alpha_0 I + \alpha_1 T + \ldots + \alpha_n T^n$ в определении 1.1 или в определении VII.9.6. Именно это будет показано ниже в следствии 8, так что смысл символа $f(T)$ для многочлена f определен совершенно однозначно.

6. Теорема. *Пусть E — разложение единицы для самосопряженного оператора T и f — комплексная борелевская функция, определенная почти всюду по мере E на вещественной оси. Тогда $f(T)$ — замкнутый оператор со всюду плотной областью опреде-*

ления. Более того,

(a) $\mathfrak{D}(f(T)) = \left\{x \,\middle|\, \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2 (E(d\lambda)x, x) < \infty\right\}$;

(b) $(f(T)x, y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)(E(d\lambda)x, y), \; x \in \mathfrak{D}(f(T)), \quad y \in \mathfrak{H}$;

(c) $|f(T)x|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2 (E(d\lambda)x, x), \quad x \in \mathfrak{D}(f(T))$;

(d) $f(T)^* = \bar{f}(T)$;

(e) $R(\alpha; T) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{E(d\lambda)}{\alpha - \lambda}, \quad \alpha \in \varrho(T)$.

Доказательство. Удобно воспользоваться обозначением $f_n(T)$, введенным в определении 5, и положить $e_n = \{\lambda \,|\, |f(\lambda)| \leqslant n\}$. Тогда для $x \in \mathfrak{D}(f(T))$ в силу следствия X.2.9 (IV) имеем

$$|f(T)x|^2 = \lim_n |f_n(T)x|^2 = \lim_n \int\limits_{e_n} |f(\lambda)|^2 (E(d\lambda)x, x) = \\ = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2 (E(d\lambda)x, x).$$

Этим доказано (c), а также то, что область определения $\mathfrak{D}(f(T))$ содержится в многообразии $\left\{x \,\middle|\, \int |f(\lambda)|^2 (E(d\lambda)x, x) < \infty\right\}$. С другой стороны, если x лежит в этом многообразии и $m > n$, то

$$|f_m(T)x - f_n(T)x|^2 = \int\limits_{e_m - e_n} |f(\lambda)|^2 (E(d\lambda)x, x) \to 0,$$

и (a) тем самым установлено.

Ясно, что для каждого $n = 1, 2, \ldots$ мы имеем $E(e_n)\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{D}(f(T))$, и так как $E(e_n)x \to x$ для всех x из $\mathfrak{H}$, то область определения $\mathfrak{D}(f(T))$ плотна в $\mathfrak{H}$. Для проверки замкнутости $f(T)$ положим $\{x_n\} \subseteq \mathfrak{D}(f(T))$, $x_n \to x_0$ и $f(T)x_n \to y_0$. Тогда для всякого натурального числа m

$$f_m(T)x_0 = \lim_{n \to \infty} f_m(T)x_n = \lim_{n \to \infty} E(e_m) f(T)x_n = E(e_m)y_0.$$

Таким образом,

$$y_0 = \lim_m E(e_m)\, y_0 = \lim_m f_m(T)\, x_0 = f(T)\, x_0.$$

Отсюда вытекает, что $x_0 \in \mathfrak{D}(f(T))$ и что $f(T)$ замкнут.

Докажем теперь (b). Пусть $x \in \mathfrak{D}(f(T))$, $y \in \mathfrak{H}$, $\mu(e)$ — полная вариация функции множества $(E(\cdot)x, y)$ на множестве e. В силу комплексной формы теоремы Радона — Никодима (III.10.7) существует такая борелевская измеримая функция φ, что $\mu(e) = \int_e \varphi(\lambda)(E(d\lambda)x, y)$ для всех борелевских множеств e. Из теоремы III.2.20 вытекает, что $|\varphi(\lambda)| = 1$ для почти всех по μ-мере λ, и мы, таким образом, можем и будем далее считать, что $|\varphi(\lambda)| = 1$ для всех λ. Положим $f_1(\lambda) = |f(\lambda)|\,\varphi(\lambda)$, так что в силу (a) мы имеем $\mathfrak{D}(f_1(T)) = \mathfrak{D}(f(T))$. Из следствий III.10.6. и III.6.17 вытекает, что для любых $x \in \mathfrak{D}(f_1(T))$ и $y \in \mathfrak{H}$ выполнены соотношения

$$(f_1(T)x, y) = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(\lambda)|\,\varphi(\lambda)(E(d\lambda)x, y) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(\lambda)|\,\mu(d\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|\,\mu(d\lambda).$$

Этим доказано существование интеграла в (b), откуда вытекает, что

$$(f(T)x, y) = \lim_n \int_{-\infty}^{\infty} f_n(\lambda)(E(d\lambda)x, y) =$$
$$= \lim_n \int_{e_n} f(\lambda)(E(d\lambda)x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)(E(d\lambda)x, y),$$

чем завершается доказательство (b).

Для доказательства (d) возьмем векторы $x, y \in \mathfrak{D}(\bar{f}(T)) = \mathfrak{D}(f(T))$. Тогда

$$(\bar{f}(T)x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\lambda)(E(d\lambda)x, y) = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)(E(d\lambda)y, x)} = (x, f(T)y).$$

Таким образом, $\bar{f}(T) \subseteq f(T)^*$, и чтобы доказать (d), достаточно показать, что $\mathfrak{D}(f(T)^*) \subseteq \mathfrak{D}(\bar{f}(T))$. Если $y \in \mathfrak{D}(f(T)^*)$, то для любых $x \in \mathfrak{H}$ и натурального m

$$(x, \bar{f}_m(T)y) = (f_m(T)x, y) = (f(T)E(e_m)x, y) =$$
$$= (x, E(e_m) f(T)^* y),$$

и потому $\overline{f}_m(T)\,y = E(e_m)\,f(T)^*\,y \to f(T)^*\,y$; тем самым установлено соотношение $y \in \mathfrak{D}(\overline{f}(T))$ и доказано (d).

Наконец, для доказательства (e) заметим, что в силу следствия X.2.7 спектральная мера E_n, определенная равенством $E_n(e) = E(e_n e)$, является разложением единицы для сужения оператора T на гильбертово пространство $\mathfrak{H}_n = E(e_n)\,\mathfrak{H}$. Так как $R(\alpha;\ T)(\alpha I - T)\,E(e_n) = E(e_n)$, то также ясно, что сужение резольвенты на $\mathfrak{H}_n$ есть резольвента сужения T на $\mathfrak{H}_n$. Таким образом, в силу следствия X.2.8

$$R(\alpha;\ T)\,x = \lim_m R(\alpha;\ T)\,E(e_m)\,x =$$

$$= \lim_m \int_{e_m} \frac{E(d\lambda)\,x}{\alpha - \lambda} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E(d\lambda)\,x}{\alpha - \lambda}, \qquad \lambda \in \varrho(T),$$

что завершает доказательство теоремы.

7. Следствие. *Пусть T — самосопряженный оператор и f, g — комплексные борелевские функции, определенные почти всюду по мере E на вещественной оси. Тогда для любого числа α и любого борелевского множества e вещественных чисел операторы $f(T)$ и $g(T)$, понимаемые в смысле определення* 5, *обладают следующими свойствами*:

(a) $(\alpha f)(T) = \alpha f(T)$;
(b) $(f+g)(T) \supseteq f(T) + g(T)$;
(c) $\mathfrak{D}(f(T)\,g(T)) = \mathfrak{D}((fg)(T)) \cap \mathfrak{D}(g(T))$, $\quad (fg)(T) \supseteq f(T)\,g(T)$;
(d) $f(T)\,E(e) \supseteq E(e)\,f(T)$.

Доказательство. Утверждения (a) и (b) вытекают непосредственно из определения 5 и теоремы 6(b). Для доказательства (c) положим $x \in \mathfrak{D}(g(T))$ и $g(T)\,x \in \mathfrak{D}(f(T))$. Так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)\,g(\lambda)|^2\,(E(d\lambda)\,x,\ x) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(\lambda)\,g_m(\lambda)|^2\,(E(d\lambda)\,x,\ x) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} |f_n(T)\,g_m(T)\,x|^2 = \lim_{n\to\infty} |f_n(T)\,g(T)\,x|^2 =$$

$$= |f(T)\,g(T)\,x|^2 < \infty,$$

то ясно, что $\mathfrak{D}(f(T)g(T)) \subseteq \mathfrak{D}((fg)(T)) \cap \mathfrak{D}(g(T))$. С другой стороны, если $x \in \mathfrak{D}(g(T))$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)g(\lambda)|^2 (E(d\lambda)x, x) < \infty$, то из приведенных соображений следует, что

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(T)g(T)x|^2 < \infty.$$

По теореме 6(c)

$$|f_n(T)g(T)x|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f_n(\lambda)|^2 (E(d\lambda)g(T)x, g(T)x),$$

так что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2 (E(d\lambda)g(T)x, g(T)x) < \infty$. Из теоремы 6(a) вытекает, что $g(T)x \in \mathfrak{D}(f(T))$. Таким образом,

$$\mathfrak{D}(f(T)g(T)) = \mathfrak{D}((fg)(T)) \cap \mathfrak{D}(g(T)).$$

По теореме 6(b) интеграл

$$((fg)(T)x, y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)g(\lambda)(E(d\lambda)x, y)$$

существует для всех $y \in \mathfrak{H}$. Следовательно, по теореме Лебега (III.6.16)

$$(f(T)g(T)x, y) = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_n(\lambda)g_m(\lambda)(E(d\lambda)x, y) =$$
$$= ((fg)(T)x, y), \quad y \in \mathfrak{H}.$$

Наконец, для доказательства утверждения (d) заметим, что если $x \in \mathfrak{D}(f(T))$, то $E(e)f(T)x = \lim\limits_n E(e)f_n(T)x = \lim\limits_n f_n(T)E(e)x$; это показывает, что $E(e)x \in \mathfrak{D}(f(T))$ и $f(T)E(e)x = E(e)f(T)x$, ч. т. д.

8. Следствие. *Если T — самосопряженный оператор и f — многочлен $f(\lambda) = \alpha_0 + \ldots + \alpha_m\lambda^m$, то оператор $f(T)$ определения* 5 *совпадает с оператором $f(T)$ определения* VII.9.6. *Оператор $f(T)$ совпадает также с оператором $\alpha_0 I + \ldots + \alpha_m T^m$, описанным в определении* 1.1.

Доказательство. Ясно, что сумма $\alpha_0 I + \ldots + \alpha_m T^m$, понимаемая в смысле определения 1.1, есть не что иное, как оператор $f(T)$, описанный в определении VII.9.6. Обозначим через $f_1(T)$ этот оператор, а через $f_2(T)$ — оператор, соответствующий f согласно определению 5. Следствие 7 показывает, что

[*] $$f_2(T) \supseteq f_1(T).$$

Пусть e — ограниченное борелевское множество вещественных чисел, так что по теореме 3 $E(e)\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{D}(T)$ и $TE(e)=\int\limits_e \lambda E(d\lambda)$. Таким образом, $TE(e)\mathfrak{H}\subseteq E(e)\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{D}T$, и потому $E(e)\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{D}(T^2)$. Аналогично можно показать, что $E(e)\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{D}(T^n)$ для всех натуральных n, откуда мы заключаем, что $E(e)\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{D}(f_1(T))$. Таким образом, если $e_n=\{\lambda\,|\,|f(\lambda)|\leqslant n\}$, то из [*] вытекает, что $f_2(T)E(e_n)\supseteq\supseteq f_1(T)E(e_n)$. Но так как $E(e_n)\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{D}(f_1(T))$, то $f_2(T)E(e_n)=$ $=f_1(T)E(e_n)$. Пусть теперь $x\in\mathfrak{D}(f_2(T))$, так что $E(e_n)x\longrightarrow x$ и

$$f_1(T)E(e_n)x=f_2(T)E(e_n)x\longrightarrow f_2(T)x.$$

Но по теореме VII.9.7 оператор $f_1(T)$ замкнут, и потому $x\in\mathfrak{D}(f_1(T))$. Тем самым доказано, что $\mathfrak{D}(f_2(T))\subseteq\mathfrak{D}(f_1(T))$, а в силу [*] — и соотношение $f_1(T)=f_2(T)$, ч. т. д.

9. Теорема. *Пусть E — разложение единицы для самосопряженного оператора T и f — комплексная борелевская функция, определенная почти всюду по мере E на вещественной оси. Тогда*

(a) $|f(T)|=\operatorname{vrai}\limits_E\sup\limits_{\lambda\in\sigma(T)}|f(\lambda)|$;

(b) *спектр $\sigma(f(T))$ есть пересечение множеств вида $\overline{f(\delta)}$, где δ пробегает такие борелевские подмножества спектра $\sigma(T)$, что $E(\delta)=I$;*

(c) *если функция f вещественна, то $f(T)$ — самосопряженный оператор и его разложение единицы задается при помощи разложения единицы для оператора T формулой*

$$E(\delta;\ f(T))=E(f^{-1}(\delta)),$$

где δ — произвольное борелевское множество.

Доказательство. Пусть $e_n=\{\lambda\,|\,|f(\lambda)|\leqslant n\}$, так что

$$\operatorname{vrai}\limits_E\sup\limits_{\lambda\in e_n}|f(\lambda)|\longrightarrow\operatorname{vrai}\limits_E\sup\limits_{\lambda\in\sigma(T)}|f(\lambda)|.$$

Таким образом, в силу следствия X.2.9 ясно, что

$$|f(T)|\geqslant|f(T)E(e_n)|=\operatorname{vrai}\limits_E\sup\limits_{\lambda\in e_n}|f(\lambda)|\longrightarrow\operatorname{vrai}\limits_E\sup\limits_{\lambda\in\sigma(T)}|f(\lambda)|,$$

и, следовательно, $|f(T)|\geqslant\operatorname{vrai}\limits_E\sup\limits_{\lambda\in\sigma(T)}|f(\lambda)|$.

Обратно, для $x\in\mathfrak{D}(f(T))$ мы имеем

$$|f(T)x|=\lim_n|f(T)E(e_n)x|\leqslant$$
$$\leqslant\lim_n(\operatorname{vrai}\limits_E\sup\limits_{\lambda\in e_n}|f(\lambda)|)|x|\leqslant(\operatorname{vrai}\limits_E\sup\limits_{\lambda\in\sigma(T)}|f(\lambda)|)|x|,$$

и потому $|f(T)|\leqslant\operatorname{vrai}\limits_E\sup\limits_{\lambda\in\sigma(T)}|f(\lambda)|$. Этим установлено равенство (a).

Пусть $g(\lambda)=(\alpha-f(\lambda))^{-1}$, где α таково, что множество $f^{-1}(\alpha)=\{\lambda \mid f(\lambda)=\alpha\}$ имеет E-меру нуль. В силу (а)

$$|g(T)|=\underset{E}{\operatorname{vrai}}\sup_{\lambda\in\sigma(T)}|\alpha-f(\lambda)|^{-1},$$

и, таким образом, $g(T)$ ограничен тогда и только тогда, когда функция $(\alpha-f(\lambda))^{-1}$ существенно ограничена по мере E. Поскольку оператор $g(T)$ замкнут и имеет плотную область определения, он ограничен тогда и только тогда, когда определен всюду (лемма 1.2). Таким образом, если g существенно ограничена по мере E, то $\alpha\in\varrho(f(T))$. Обратно, если $\alpha\in\varrho(f(T))$, то

$$(\alpha I-f(T))\,E(f^{-1}(\alpha))=\int\limits_{f^{-1}(\alpha)}(\alpha-f(\lambda))\,E(d\lambda)=0;$$

этим показано, что $E(f^{-1}(\alpha))=0$ и, следовательно, функция g определена почти всюду по мере E. Поскольку α принадлежит $\varrho(f(T))$, то $|g(T)|<\infty$, и из приведенного выше равенства следует, что g существенно ограничена по мере E. Итак, $\alpha\in\varrho(f(T))$ тогда и только тогда, когда g существенно ограничена по мере E. Утверждение (b) может быть теперь доказано точно так же, как был доказан в следствии X.2.9 соответствующий факт для ограниченных операторов.

Для доказательства (с) заметим, что самосопряженность $f(T)$ вытекает из теоремы 6(d). Положим теперь $E_1(\delta)=E(f^{-1}(\delta))$. Заменяя меру интегрирования и используя обозначение f_n определения 5, мы получаем

$$\text{(I)}\qquad \int\limits_{-n}^{n}\mu E_1(d\mu)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mu\chi_{[-n,\,n]}(\mu)\,E_1(d\mu)=$$
$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)\,\chi_{[-n,\,n]}(f(\lambda))\,E(d\lambda)=f_n(T).$$

Аналогично

$$\int\limits_{-n}^{n}\mu^2E_1(d\mu)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)^2\,\chi_{[-n,\,n]}(f(\lambda))\,E(d\lambda),$$

так что для всякого вектора x

$$\text{(II)}\qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty}\mu^2(E_1(d\mu)\,x,\ x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)^2(E(d\lambda)\,x,\ x).$$

Из (II) и теоремы 6(а) вытекает, что

$$\mathfrak{D}(f(T))=\left\{x \,\Big|\, \int\limits_{-\infty}^{\infty}\mu^2(E_1(d\mu)\,x,\ x)<\infty\right\}.$$

В силу (I) и определения 5 для $x \in \mathfrak{D}(f(T))$ мы имеем

$$f(T)\,x = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} \mu E_1(d\mu)\,x.$$

Таким образом, из теоремы 3 видно, что $E_1 = E(\cdot;\ f(T))$, ч. т. д.

Точно так же, как в случае ограниченного самосопряженного оператора, разложение единицы может быть явно вычислено через резольвенту оператора T.

10. Теорема. *Если E — разложение единицы для самосопряженного оператора T и (a, b) — открытый интервал $a < \lambda < b$, то в сильной операторной топологии*

$$E((a,\ b)) = \lim_{\delta\to 0+} \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{2\pi i} \int_{a+\delta}^{b-\delta} [R(\mu - \varepsilon i;\ T) - R(\mu + \varepsilon i;\ T)]\,d\mu.$$

Доказательство очень близко к доказательству соответствующей теоремы (X.6.1) для ограниченных операторов. Вместо следствия X.2.8(III) надо воспользоваться следствием X.2.9(V), а вместо ссылки на IX.3.15 — тем фактом, что $g(T) = R(\alpha;\ T)$, если $g(\lambda) = (\alpha - \lambda)^{-1}$ рассматривается в том же смысле, что и в теореме 6.

11. Теорема. *Если E — разложение единицы для самосопряженного оператора T и F — непрерывная числовая функция, определенная на вещественной прямой, то в сильной операторной топологии*

$$F(T)\,E((a,\ b)) = \lim_{\delta\to 0+} \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{2\pi i} \int_{a+\delta}^{b-\delta} F(\mu)\,[R(\mu-\varepsilon i;\ T) - R(\mu+\varepsilon i;\ T)]\,d\mu$$

для любого конечного открытого интервала $(a,\ b)$.

Доказательство. Метод доказательства, использованный в предыдущей теореме, можно применить и при доказательстве этой теоремы, если показать, что функция

$$G(\delta,\ \varepsilon,\ \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a+\delta}^{b-\delta} F(\mu) \left[\frac{1}{\mu - \varepsilon i - \lambda} - \frac{1}{\mu + \varepsilon i - \lambda}\right] d\mu = \frac{1}{\pi} \int_{a+\delta}^{b-\delta} \frac{F(\mu)\,\varepsilon\,d\mu}{(\mu-\lambda)^2 + \varepsilon^2}$$

равномерно ограничена по λ при малых положительных δ и ε и что

[*] $$\lim_{\delta\to 0+} \lim_{\varepsilon\to 0+} G(\delta,\ \varepsilon,\ \lambda) = F(\lambda)\,\chi_{(a,\ b)}(\lambda), \qquad -\infty < \lambda < \infty,$$

где $\chi_{(a,\,b)}$ — характеристическая функция интервала (a, b). Если M — верхняя грань для $|F(\mu)|$ на интервале $a<\mu<b$, то

$$|G(\delta, \varepsilon, \lambda)| \leqslant M \frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{b-\delta-\lambda}{\varepsilon}-\operatorname{arc\,tg}\frac{a+\delta-\lambda}{\varepsilon}\right] \leqslant M,$$

и потому G равномерно ограничена при малых положительных δ и ε. Пусть $0<\delta<(b-a)/2$. Предположим сначала, что λ не лежит в интервале (a, b). Тогда подинтегральная функция стремится к нулю равномерно, когда $\varepsilon \to 0$, и тем самым соотношение [*] выполнено на дополнении к (a, b). Пусть теперь λ — точка интервала (a, b); выберем δ и ε так, чтобы выполнялось неравенство $a+\delta<\lambda-\sqrt{\varepsilon}<\lambda+\sqrt{\varepsilon}<b-\delta$. Тогда

$$G(\delta, \varepsilon, \lambda)=\frac{1}{\pi}\left[\int_{a+\delta}^{\lambda-\sqrt{\varepsilon}}+\int_{\lambda-\sqrt{\varepsilon}}^{\lambda+\sqrt{\varepsilon}}+\int_{\lambda+\sqrt{\varepsilon}}^{b-\delta}\right]\frac{F(\mu)\,\varepsilon\,d\mu}{(\mu-\lambda)^2+\varepsilon^2}.$$

Элементарные вычисления показывают, что

$$\left|\frac{1}{\pi}\left[\int_{a+\delta}^{\lambda-\sqrt{\varepsilon}}+\int_{\lambda+\sqrt{\varepsilon}}^{b-\delta}\right]\frac{F(\mu)\,\varepsilon\,d\mu}{(\mu-\lambda)^2+\varepsilon^2}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{M}{\pi}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{b-\delta-\lambda}{\varepsilon}-\operatorname{arc\,tg}\frac{a+\delta-\lambda}{\varepsilon}-2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right],$$

и, следовательно, сумма двух этих интегралов стремится к нулю вместе с ε. Пусть теперь $M(\varepsilon)$ есть верхняя грань функции $|F(\mu)-F(\lambda)|$ на интервале $\lambda-\sqrt{\varepsilon}<\mu<\lambda+\sqrt{\varepsilon}$. Так как F непрерывна, то $M(\varepsilon)$ стремится к нулю вместе с ε и мы имеем

$$\frac{1}{\pi}\int_{\lambda-\sqrt{\varepsilon}}^{\lambda+\sqrt{\varepsilon}}\frac{F(\mu)\,\varepsilon\,d\mu}{(\mu-\lambda)^2+\varepsilon^2}=$$
$$=\frac{F(\lambda)}{\pi}\int_{\lambda-\sqrt{\varepsilon}}^{\lambda+\sqrt{\varepsilon}}\frac{\varepsilon\,d\mu}{(\mu-\lambda)^2+\varepsilon^2}+\frac{1}{\pi}\int_{\lambda-\sqrt{\varepsilon}}^{\lambda+\sqrt{\varepsilon}}\frac{(F(\mu)-F(\lambda))\,\varepsilon\,d\mu}{(\mu-\lambda)^2+\varepsilon^2}$$

и

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{\lambda-\sqrt{\varepsilon}}^{\lambda+\sqrt{\varepsilon}}\frac{F(\mu)\,\varepsilon\,d\mu}{(\mu-\lambda)^2+\varepsilon^2}-F(\lambda)\frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right| \leqslant M(\varepsilon)\frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Тем самым показано, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int\limits_{\lambda-\sqrt{\varepsilon}}^{\lambda+\sqrt{\varepsilon}}\frac{F(\mu)\,\varepsilon\,d\mu}{(\mu-\lambda)^2+\varepsilon^2}=F(\lambda).$$

Доказательство соотношения [*] закончено.

В заключение этого параграфа мы приведем одну интересную теорему, которая без труда выводится из результатов § XI.6.

12. Теорема. *Пусть T — неограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Предположим, что его спектр $\sigma(T)$ есть счетное множество точек без предельных точек в конечной плоскости, $\{\lambda_n\}$ — перечисление точек спектра $\sigma(T)$, где каждая точка встречается столько раз, какова размерность пространства $E(T, \lambda_n)\mathfrak{H}$, и пусть выполнено условие*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-2}<\infty .$$

Тогда для любого ограниченного оператора B множество всех векторов x, удовлетворяющих уравнению $(T+B-\mu I)^{\nu}x=0$ при некотором натуральном ν и некотором комплексном числе μ, есть фундаментальное множество в гильбертовом пространстве.

Доказательство. По теореме 6 и следствию 7 в гильбертовом пространстве существует такой ортонормированный базис $\{\varphi_n\}$, что $T\varphi_n=\lambda_n\varphi_n$. (Чтобы получить множество $\{\varphi_n\}$, надо лишь собрать вместе семейство ортонормированных базисов в каждом из отдельных пространств $E(T, \lambda_m)\mathfrak{H}$.) Из определения XI.6.1 вытекает, что $(T-\lambda I)^{-1}$ — оператор класса Гильберта — Шмидта при всех $\lambda\in\varrho(T)$. В силу леммы 2.2 существует такая конечная постоянная K, что $|R(\lambda; T)|<1/2$, $|BR(\lambda; T)|<1/2$ и $|R(\lambda; T)B|<1/2$ для $|\mathrm{Im}\,\lambda|\geqslant K$. Тогда если $|\mathrm{Im}\,\lambda|\geqslant K$, то из леммы VII.6.1 вытекает, что оператор $I-BR(\lambda; T)$ имеет ограниченный всюду определенный обратный $A(\lambda)$, норма которого не больше 2. Мы имеем

$$(\lambda I-T-B)R(\lambda; T)A(\lambda)=I.$$

Таким образом,

$$(\lambda I-T-B)R(\lambda; T)A(\lambda)(\lambda I-T-B)x=(\lambda I-T-B)x$$

для всех $x\in\mathfrak{D}(T)=\mathfrak{D}(T+B)$. Если положить

$$y=R(\lambda; T)A(\lambda)(\lambda I-T-B)x-x,$$

то $(\lambda I-T-B)y=0$, так что, умножая слева на $R(\lambda; T)$, получаем $(I-R(\lambda; T)B)y=0$. Поскольку $|R(\lambda; T)B|<1/2$ при

$|\operatorname{Im}\lambda|\geqslant K$, то $y=0$, если $|\operatorname{Im}\lambda|\geqslant K$. Таким образом, для $|\operatorname{Im}\lambda|\geqslant K$ мы имеем

$$(\lambda I-T-B)R(\lambda;\ T)A(\lambda)x=x, \quad x\in\mathfrak{H},$$
$$R(\lambda;\ T)A(\lambda)(\lambda I-T-B)x=x, \quad x\in\mathfrak{D}(T+B).$$

Отсюда следует, что если $|\operatorname{Im}\lambda|\geqslant K$, то $\lambda\notin\sigma(T+B)$ и $R(\lambda;\ T+B)=$ $=R(\lambda;\ T)A(\lambda)$. Следовательно,

$$|R(\lambda;\ T+B)|\leqslant\frac{1}{2}\cdot 2 \quad \text{при} \quad |\operatorname{Im}\lambda|\geqslant K,$$

и теорема вытекает непосредственно из следствия XI.6.31.

3. Спектральное представление неограниченных самосопряженных преобразований

Цель настоящего параграфа — распространить понятия спектрального представления и упорядоченного представления § X.5 на случай неограниченного самосопряженного оператора. Вполне удовлетворительное расширение теории будет дано ниже, в теореме 5. Затем будет проведено более детальное исследование того важного случая, когда гильбертово пространство $\mathfrak{H}$ имеет вид $L_2(S,\ \Sigma,\ \nu)$, где ν есть σ-конечная положительная мера. Мы покажем, что при некоторых условиях линейная изометрия U, определяющая спектральное представление, может быть задана в простой форме. Более точно, существуют такие измеримые ядра W_a, что в смысле нормы в $L_2(\mu_a)$

$$(Uf)_a(\lambda)=\lim_{n\to\infty}\int_{S_n} f(s)\overline{W_a(s,\ \lambda)}\,\nu(ds), \quad f\in L_2(S,\ \Sigma,\ \nu),$$

где $\{S_n\}$ — возрастающая последовательность множеств конечной ν-меры, покрывающая все S. Эта частная форма теоремы о спектральном представлении будет иметь важные приложения в последующих главах, где мерой ν будет лебеговская мера на открытых подмножествах евклидова пространства, а T будет дифференциальным оператором. В этом последнем случае функции $W_a(\cdot,\ \lambda)$ интерпретируются как собственные функции дифференциального оператора T, и, таким образом, могут быть получены важные теоремы о разложении.

Чтобы коротко и ясно описать представление неограниченного самосопряженного оператора, мы собрали здесь некоторые обозначения и термины, которые будут использоваться в этом параграфе.

Символ E будет обозначать разложение единицы для самосопряженного оператора T в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Для вектора a из $\mathfrak{H}$ *символ* $\mathfrak{H}_a$ *будет использоваться для обозначения* *подпространства в $\mathfrak{H}$, состоящего из всех векторов вида $F(T)a$, где F пробегает все борелевские измеримые функции, для которых $a \in \mathfrak{D}(F(T))$.* Символ μ_a будет обозначать регулярную меру, определенную на семействе $\mathscr{B}$ борелевских множеств плоскости равенством

$$\mu_a(\delta) = (E(\delta)a, a), \qquad \delta \in \mathscr{B}.$$

Обозначение $\sum_a \mathfrak{H}_a$ будет использоваться, как обычно, для прямой суммы гильбертовых пространств $\mathfrak{H}_a$ (ср. с IV.4.18 и IV.4.19).

1. Лемма. *Пространство $\mathfrak{H}_a$ есть гильбертово пространство, эквивалентное при отображении $F(T)a \longleftrightarrow F$ пространству $L_2(\mu_a)$.*

Доказательство. В силу теоремы 2.6 (a),(c) ясно, что

$$\mathfrak{D}(F(T)) = \left\{ a \,\middle|\, \int |F(\lambda)|^2 \mu_a(d\lambda) < \infty \right\}$$

и 159

$$|F(T)a|^2 = \int |F(\lambda)|^2 \mu_a(d\lambda), \qquad a \in \mathfrak{D}(E(T)),$$

после чего лемма становится очевидной.

2. Лемма. *Существует такое множество A в $\mathfrak{H}$, что $\mathfrak{H} = \sum_{a \in A} \mathfrak{H}_a$.*

Доказательство. По лемме Цорна существует максимальное множество A в $\mathfrak{H}$, для которого подпространства $\mathfrak{H}_a$, $a \in A$, взаимно ортогональны. Таким образом, для доказательства леммы достаточно заметить, что не существует вектора $x \neq 0$, ортогонального ко всем пространствам $\mathfrak{H}_a$. Действительно, если $x \neq 0$ ортогонален к пространству $\mathfrak{H}_a$, то для ограниченной борелевской функции F и точки $y \in \mathfrak{H}_a$ в силу теоремы 2.6(d) мы имеем $(F(T)x, y) = (x, \bar{F}(T)y) = 0$, так что $F(T)x$ ортогонален к $\mathfrak{H}_a$. Отсюда вытекает, что если x ортогонален к каждому из пространств $\mathfrak{H}_a$, то и $\mathfrak{H}_x$ ортогонально к каждому из пространств $\mathfrak{H}_a$, а это противоречит максимальности семейства A. Тем самым доказано, что $\mathfrak{H} = \sum \mathfrak{H}_a$.

Если $x \in \mathfrak{H}$, то через x_a обозначается компонента x в подпространстве $\mathfrak{H}_a$. Таким образом, $x = \sum_{a \in A} x_a$.

3. Лемма. *Для всякой борелевской функции F $\mathfrak{D}(F(T)) = \{x \mid x_a \in \mathfrak{D}(F(T)),\ a \in A;\ \sum_a |F(T)x_a|^2 < \infty\}$ и $(F(T)x)_a = F(T)x_a$ для любых $x \in \mathfrak{D}(F(T))$ и $a \in A$.*

Доказательство. Проверим сначала, что

(1) $$(\mathfrak{D}(F(T)))_a = \mathfrak{H}_a \cap \mathfrak{D}(F(T)).$$

Ясно, что $\mathfrak{H}_a \cap \mathfrak{D}(F(T)) \subseteq (\mathfrak{H}(F(T)))_a \subseteq \mathfrak{H}_a$, и потому достаточно показать, что $(\mathfrak{D}(F(T)))_a \subseteq \mathfrak{D}(F(T))$. Заметим, что так как $|E(\delta)x|^2 = \sum_a |E(\delta)x_a|^2$, то $(E(\delta)x_a, x_a) \leqslant (E(\delta)x, x)$ и потому

$$\int |F(\lambda)|^2 (E(d\lambda)x_a, x_a) \leqslant \int |F(\lambda)|^2 (E(d\lambda)x, x).$$

Тогда из теоремы 2.6 (а) вытекает, что $(\mathfrak{D}(F(T)))_a \subseteq \mathfrak{D}(F(T))$, и равенство (1) проверено.

Пусть теперь F_n — срезанная функция определения 2.5, так что оператор $F_n(T)$ ограничен и тем самым

$$|F_n(T)x|^2 = \sum_a |F_n(T)x_a|^2, \quad x \in \mathfrak{H}.$$

Если $x \in \mathfrak{D}(F(T))$, то в силу (1) x_a лежит также в $\mathfrak{D}(F(T))$, и мы имеем

$$\lim_{n\to\infty} F_n(T)x = F(T)x, \quad \lim_{n\to\infty} F_n(T)x_a = F(T)x_a.$$

Таким образом, для любого конечного множества $\pi \subseteq A$ и вектора $x \in \mathfrak{D}(T)$ выполнено неравенство $\sum_{a\in\pi} |F(T)x_a|^2 \leqslant |F(T)x|^2$, откуда следует, что $\sum_a |F(T)x_a|^2 < \infty$. Далее будет показано, что $x \in \mathfrak{D}(F(T))$ при условии, что все $x_a \in \mathfrak{D}(F(T))$ и $\sum_a |F(T)x_a|^2 < \infty$. Пусть $\{a_k\} \subseteq A$ — такое подмножество, что $x_a = 0$ для $a \notin \{a_k\}$ (ср. с IV.4.10). Так как $x_a \in \mathfrak{H}_a$, то существует такая борелевская функция g, что $a \in \mathfrak{D}(g(T))$ и $x_a = g(T)a$. Следовательно, $F(T)x_a = F(T)g(T)a$, и потому $F(T)x_a \in \mathfrak{H}_a$; это означает, что члены последовательности $\{F(T)x_{a_k}\}$ взаимно ортогональны. Так как

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} F(T)x_{a_k}\Big|^2 \leqslant \sum_a |F(T)x_a|^2 < \infty,$$

то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} F(T)x_{a_k}$ сходится. По теореме 2.6 оператор $F(T)$ замкнут, и потому $x \in \mathfrak{D}(F(T))$ и

$$F(T)x = \sum_{k=1}^{\infty} F(T)x_{a_k} = \sum_a F(T)x_a.$$

Так как $F(T)x_a \in \mathfrak{H}_a$, то отсюда следует, что $(F(T)x)_a = F(T)x_a$, ч. т. д.

4. Определение. Пусть T — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ и $\{\mu_\alpha\}$ — семейство конечных положи-

тельных мер, определенных на борелевских множествах плоскости и обращающихся в нуль на дополнении спектра T. Пусть U — изоморфизм пространства $\mathfrak{H}$ на все пространство $\sum_\alpha L_2(\mu_\alpha)$, сохраняющий скалярные произведения, а V — самосопряженный оператор UTU^{-1} в $\sum_\alpha L_2(\mu_\alpha)$. Преобразование U называется *спектральным представлением* $\mathfrak{H}$ *на* $\sum_\alpha L_2(\mu_\alpha)$ *относительно оператора* T, если выполнены следующие условия:

(a) для всякой борелевской функции F, определенной на спектре оператора T,

$$\mathfrak{D}(F(V)) = \left\{\xi \mid \xi \in \sum_\alpha L_2(\mu_a), \quad \sum_\alpha \int_{\sigma(T)} |F(\lambda)\xi_a(\lambda)|^2 \mu_\alpha(d\lambda) < \infty\right\};$$

(b) $(F(V)\xi_\alpha)(\lambda) = F(\lambda)\xi_\alpha(\lambda)$, $\xi \in \mathfrak{D}(f(V))$ для почти всех λ по μ_α-мере.

Замечание. Ясно, что если оператор T самосопряжен, то таким же будет и $V = UTU^{-1}$. Действительно, для $\xi = Ux$, $\eta = Uy$, где $x, y \in \mathfrak{D}(T)$, мы имеем

$$(V\xi, \eta) = (VUx, Uy) = (UTx, Uy) =$$
$$= (Tx, y) = (x, Ty) = (Ux, UTy) = (Ux, VUy) = (\xi, V\eta);$$

тем самым показано, что V — симметрический и что $\mathfrak{D}(V^*) = \mathfrak{D}(V)$.

5. Теорема. *Каждое гильбертово пространство допускает спектральное представление относительно любого определенного на нем самосопряженного оператора.*

Доказательство. Множество A и меры μ_a могут быть определены так же, как в леммах 1 и 2. Отображение U определяется естественным образом, т. е. компонента $(Ux)_a$ вектора Ux есть функция в $L_2(\mu_a)$, соответствующая вектору x_a при изоморфизме U_a леммы 1.

Так как U и U^{-1} имеют ограниченные всюду определенные обратные, то оператор $\lambda I - V = U(\lambda I - T)U^{-1}$ имеет ограниченный всюду определенный обратный тогда и только тогда, когда его имеет оператор $\lambda I - T$, и

$$R(\lambda; V) = UR(\lambda; T)U^{-1}, \quad \lambda \in \varrho(T) = \varrho(V).$$

Если C, E — разложения единицы для V и T соответственно, то из теоремы 2.10 вытекает, что для открытого интервала δ имеет место равенство $C(\delta) = UE(\delta)U^{-1}$. Таким образом, это равенство выполнено для всех борелевских множеств δ, и, следовательно, для любой борелевской функции F и любого вектора

$\xi = Ux$ мы имеем

$$\int |F(\lambda)|^2 (C(d\lambda)\xi, \xi) = \int |F(\lambda)|^2 (E(d\lambda)x, x).$$

Из теоремы 2.6 (а) вытекает, что $\mathfrak{D}(F(V)) = U\mathfrak{D}(F(T))$, и нужная нам форма для $\mathfrak{D}(F(V))$ получается из леммы 3.

Для вектора $\xi = Ux \in \mathfrak{D}(F(V))$ мы имеем

$$(F(V)\xi, \xi) = \int F(\lambda)(C(d\lambda)\xi, \xi) = \int F(\lambda)(E(d\lambda)x, x) = (F(T)x, x),$$

откуда следует, что $F(V) = UF(T)U^{-1}$. Это равенство вместе с соотношениями $Ux_a = (Ux)_a$ и $(F(T)x)_a = F(T)x_a$, доказанными в лемме 3, показывает, что

$$\begin{aligned}(F(V)\xi)_a &= (UF(T)U^{-1}\xi)_a = UF(T)x_a = \\ &= UF(T)\xi_a(T)a = F(\cdot)\xi_a(\cdot).\end{aligned}$$

Следующий результат показывает, что любое спектральное представление пространства $\mathfrak{H}$ может быть реализовано описанным выше способом; при этом используются обозначения μ_a и $\mathfrak{H}_a$, определенные в абзаце, предшествующем лемме 1.

6. Лемма. *Пусть U — спектральное представление пространства $\mathfrak{H}$ на $\sum_\alpha L_2(\nu_\alpha)$ относительно самосопряженного оператора T. Тогда каждому α соответствует некоторый вектор a в $\mathfrak{H}$, такой, что $\nu_\alpha = \mu_a$, $\mathfrak{H}$ есть прямая сумма подпространств $\mathfrak{H}_a$ и U отображает $\mathfrak{H}_a$ на $L_2(\nu_\alpha)$.*

Доказательство. Для каждого α примем за ξ^α элемент из $\sum_\alpha L_2(\nu_\alpha)$, определяемый уравнениями

$$(\xi^\alpha)_\beta(\lambda) = \begin{cases} 0, & \beta \neq \alpha, \\ 1, & \beta = \alpha. \end{cases}$$

Пусть $a = U^{-1}\xi^\alpha$. Для всякого борелевского множества δ мы имеем

$$\nu_\alpha(\delta) = \int_{\sigma(T)} \chi_\delta(\lambda)\nu_\alpha(d\lambda) = (\chi_\delta\xi^\alpha, \xi^\alpha) = (U(E(\delta)a), Ua) = (E(\delta)a, a).$$

Остальные утверждения сразу же вытекают из лемм 1 и 2.

Теперь мы сосредоточим наше внимание на задаче нахождения аналитического представления отображения U. Эта задача будет рассмотрена в предположении, что T — самосопряженный оператор в лебеговом пространстве $L_2(S, \Sigma, \nu)$, подчиненном некоторым условиям; эти условия предполагаются выполненными в оставшейся части этого параграфа и для удобства они формулируются в виде отдельного предположения.

7. Предположение. Пусть T — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $L_2(S, \Sigma, \nu)$, где (S, Σ, ν) — пространство с положительной мерой, а E — разложение единицы для оператора T. Мы предполагаем, что существует возрастающая последовательность $\{S_n\}$ подмножеств, покрывающая все S, каждый элемент которой имеет конечную меру, и что для ограниченных множеств e область значений $E(e)$ состоит только из функций, которые существеннно ограничены по ν-мере на каждом из множеств S_n.

8. Лемма. *Пусть T — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $L_2(S, \Sigma, \nu)$, где (S, Σ, ν) — пространство с положительной мерой. Пусть всякий элемент из $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\mathfrak{D}(T^n)$ ν-существенно ограничен на каждом множестве из возрастающей последовательности множеств конечной меры, покрывающей все S. Тогда предположение 7 выполнено.*

Доказательство. Если e — ограниченное борелевское множество, то из теоремы 2.6(a) вытекает, что

$$E(e)L_2(S, \Sigma, \nu) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{D}(T^n).$$

В следующей главе будет рассмотрен случай, когда T — самосопряженное расширение обыкновенного дифференциального оператора. В этом случае S — область в евклидовом пространстве, а ν — мера Лебега. Мы увидим, что всякая функция из $\mathfrak{D}(T)$ непрерывна и, таким образом, ограничена на всяком компактном подмножестве области S, так что из леммы 8 будет следовать, что предположение 7 выполнено для таких дифференциальных операторов.

9. Лемма. *При выполнении предположения 7 для каждой функции g из $L_2(S, \Sigma, \nu)$ существует функция W, определенная на прямом произведении S и числовой прямой R, измеримая относительно произведения мер ν и $\mu = (E(\cdot)g, g)$, и такая, что для всякого ограниченного борелевского множества e вещественных чисел и любой функции F из $L_2(\mu)$*

$$\text{(I)} \qquad \operatorname*{vrai\,sup}_{\nu\quad s\in S_n} \int_e |W(s, \lambda)|^2 \mu(d\lambda) < \infty,$$

$$\text{(II)} \qquad (E(e)F(T)g)(s) = \int_e W(s, \lambda) F(\lambda) \mu(d\lambda).$$

Доказательство. Если F лежит в $L_2(\mu)$, то по теореме 2.6(a) $g \in \mathfrak{D}(F(T))$. Положим $e_n = [-n, n]$, и пусть F обращается в нуль вне e_n. Тогда сужение $F(T)g = E(e_n)F(T)g$ на S_n лежит в $L_\infty(S_n, \nu)$ по предположению 7. Так как F обращается в нуль вне e_n, то из теоремы 2.6(c) вытекает, что отображение $A_n: F \to F(T)g$ ограничено как отображение $L_2(e_n, \mu)$ в $L_2(S, \Sigma, \nu)$. Таким образом, оно замкнуто как отображение $L_2(e_n, \mu)$ в $L_\infty(S_n, \nu)$. Следовательно, по теореме о замкнутом графике (II.2.4) A_n — непрерывное отображение $L_2(e_n, \mu)$ в $L_\infty(S_n, \nu)$. Сопряженный A_n^* к A_n в банаховом смысле оператор отображает $L_\infty^*(S_n, \nu) = L_1^{**}(S_n, \nu)$ в $L_2(e_n, \mu)$. Так как $L_1(S_n, \nu)$ изометрически вложено в $L_1^{**}(S_n, \nu)$, мы можем рассматривать сужение B_n оператора A_n^* на $L_1(S_n, \nu)$ как линейное непрерывное отображение $L_1(S_n, \nu)$ в $L_2(e_n, \mu)$. Поскольку $L_2(e_n, \mu)$ сепарабельно и рефлексивно, из теоремы VI.8.10 и замечания, непосредственно ей предшествующего, вытекает, что существует ν-существенно единственная ν-измеримая ограниченная функция V_n, определенная на S_n, со значениями в $L_2(e_n, \mu)$, такая, что

$$B_n f = \int_{S_n} f(s) V_n(s) \nu(ds), \quad f \in L_1(S_n, \nu).$$

По теореме III.11.17 отсюда вытекает, что существует $(\nu \times \mu)$-существенно единственная $(\nu \times \mu)$-измеримая комплекснозначная функция W_n, определенная на $S_n \times e_n$, такая, что

$$(B_n f)(\lambda) = \int_{S_n} f(s) W_n(s, \lambda) \nu(ds), \quad f \in L_1(S_n, \nu), \ \lambda \in e_n,$$

и такая, что

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{\nu\ \ s \in S_n} \int_{e_n} |W_n(s, \lambda)|^2 \mu(d\lambda) = \operatorname*{vrai\,sup}_{\nu\ \ s \in S_n} |V_n(s)|^2 < \infty.$$

Предположим теперь, что $f \in L_1(S_{n+1}, \nu)$, $f(s) = 0$ для $s \notin S_n$, а также, что $F \in L_2(e_{n+1}, \mu)$ и $F(\lambda) = 0$ для $\lambda \notin e_n$. Тогда

$$\int_{e_{n+1}} (B_{n+1} f)(\lambda) F(\lambda) \mu(d\lambda) = \int_{S_{n+1}} f(s)(A_{n+1}F)(s) \nu(ds) =$$
$$= \int_{S_n} f(s)(F(T)g)(s) \nu(ds) = \int_{S_n} f(s)(A_n F)(s) \nu(ds) =$$
$$= \int_{e_n} (B_n f)(\lambda) F(\lambda) \mu(d\lambda).$$

Таким образом, $(B_{n+1}f)(\lambda) = (B_n f)(\lambda)$ почти всюду по μ-мере на e_n. Следовательно,

$$(B_n f)(\lambda) = \int_{S_n} f(s) W_{n+1}(s, \lambda) \nu(ds), \quad f \in L_1(S_n, \nu), \ \lambda \in e_n.$$

Этот факт вместе с единственностью ядра W_n показывает, что $W_n(s, \lambda) = W_{n+1}(s, \lambda)$ для $(\nu \times \mu)$-почти всех $[s, \lambda]$ в $S_n \times e_n$. Таким образом, если положить $W(s, \lambda) = W_n(s, \lambda)$ для $[s, \lambda] \in S_n \times e_n$, то мы получим корректно определенное $(\nu \times \mu)$-измеримое ядро, заданное на $S \times R = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \times e_n$, со свойством (I). Если F лежит в $L_2(\mu)$ и $G = F\chi_e$, где χ_e — характеристическая функция борелевского подмножества в e_n, то для всякой функции f из $L_1(S_n, \nu)$ в силу теоремы Фубини и свойства (I) мы имеем

$$\int_{S_n} (E(e)F(T)g)(s) f(s)\,\nu(ds) = \int_{S_n} (G(T)g)(s) f(s)\,\nu(ds) =$$

$$= \int_{S_n} (A_n G)(s) f(s)\,\nu(ds) = \int_{e_n} G(\lambda)(B_n f)(\lambda)\,\mu(d\lambda) =$$

$$= \int_{e_n} G(\lambda) \left\{ \int_{S_n} f(s) W_n(s, \lambda)\,\nu(ds) \right\} \mu(d\lambda) =$$

$$= \int_{S_n} f(s) \left\{ \int_{e} W(s, \lambda) F(\lambda)\,\mu(d\lambda) \right\} \nu(ds).$$

Таким образом, почти всюду по мере ν на S_n

$$(E(e)F(T)g)(s) = \int_{e} W(s, \lambda) F(\lambda)\,\mu(d\lambda),$$

а так как $\bigcup S_n = S$, то это равенство должно выполняться почти всюду по мере ν на S, ч. т. д.

10. Определение. Пусть W — измеримая функция на произведении $S \times \Lambda$ двух пространств (S, Σ, ν) и (Λ, B, μ) с мерами; и h является ν-измеримой функцией на S. Будем говорить, что интеграл $\int_S h(s) W(s, \lambda)\,\nu(ds)$ *существует в* $L_2(\Lambda, B, \mu)$ *в смысле среднего квадратического*, если найдется возрастающая последовательность $\{S_n\}$ множеств конечной ν-меры, покрывающая все S, и такая, что $h(\cdot)W(\cdot, \lambda)$ для каждого n есть ν-измеримая функция на S_n для почти всех по μ-мере λ из Λ, а функции F_n, определяемые равенством

$$F_n(\lambda) = \int_{S_n} h(s) W(s, \lambda)\,\nu(ds),$$

лежат в $L_2(\Lambda, B, \mu)$ и сходятся в $L_2(\Lambda, B, \mu)$ при $n \to \infty$. Если $F_n \to F$ в $L_2(\Lambda, B, \mu)$, то мы пишем

$$F(\lambda) = \int_S h(s) W(s, \lambda)\,\nu(ds).$$

Замечание. В тех приложениях к обыкновенным дифференциальным уравнениям и к уравнениям в частных производных, которые будут рассмотрены в гл. 13 и 14, S будет областью евклидова n-мерного пространства, Σ — полем борелевских подмножеств области S, ν — лебеговой мерой, а W для почти всех λ — функцией с интегрируемым квадратом на любом компактном подмножестве в S. В этом случае предел F предыдущего определения не зависит от последовательности $\{S_n\}$ при условии, что все множества S_n компактны.

11. Теорема. *Пусть (S, Σ, ν) — пространство с положительной мерой и $\{S_n\}$ — возрастающая последовательность множеств конечной меры, покрывающая S. Пусть U — спектральное представление пространства $L_2(S, \Sigma, \nu)$ на $\sum_{a \in A} L_2(\mu_a)$ относительно самосопряженного оператора T в $L_2(S, \Sigma, \nu)$ и E — разложение единицы для оператора T. Предположим, что для всякого ограниченного борелевского множества e вещественной прямой область значений проектора $E(e)$ состоит лишь из функций, которые существенно ограничены по мере ν на каждом из множеств S_n. Тогда для каждого элемента a из A существует функция W_a, определенная на прямом произведении S и вещественной прямой и обладающая следующими свойствами:*

(a) W_a *измерима относительно прямого произведения мер* $\nu \times \mu_a$;

(b) *для всякого ограниченного борелевского множества e на вещественной прямой*

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{\nu}\ \sup_{s \in S_n} \int_e |W_a(s, \lambda)|^2 \mu_a(d\lambda) < \infty, \qquad n \geqslant 1;$$

(c) $$(Uf)_a(\lambda) = \int_S f(s) \overline{W_a(s, \lambda)}\, \nu(ds), \qquad f \in L_2(S, \Sigma, \nu),$$

где интеграл существует в $L_2(\mu_a)$ в смысле среднего квадратического.

Замечание. Приводимое доказательство показывает, что для f из $L_2(S, \Sigma, \nu)$ функция $(Uf)_a$ является пределом в $L_2(\mu_a)$ последовательности $\left\{ \int_{S_n} f(s) \overline{W_a(s, \cdot)}\, \nu(ds) \right\}$, а потому этот предел не зависит от выбора последовательности $\{S_n\}$.

Доказательство. По лемме 6 пространство $\mathfrak{H} = L_2(S, \Sigma, \nu)$ есть прямая сумма $\sum_{a \in A} \mathfrak{H}_a$, где A — подмножество из $\mathfrak{H}$ и

$$U\mathfrak{H}_a = L_2(\mu_a), \quad \mu_a(e) = (E(e)a, a), \quad a \in A,$$

для всякого борелевского множества e вещественных чисел.

За ядра W_a возьмем те функции, которые в лемме 9 связываются с элементами a из A, так что утверждения (a) и (b) выполнены. Из (b) вытекает, что

$$\int_{S_n} \int_{e} |W_a(s, \lambda)|^2 \mu_a(d\lambda) \nu(ds) < \infty, \quad n \geqslant 1,$$

для всякого ограниченного борелевского множества e вещественной прямой. Таким образом, если функция f из $\mathfrak{H}$ обращается в нуль вне S_n, то функция

$$(V_a f)(\lambda) = \int_{S_n} f(s) \overline{W_a(s, \lambda)} \nu(ds)$$

в силу теоремы Фубини и неравенства Шварца удовлетворяет неравенству

$$\int_{e} |(V_a f)(\lambda)|^2 \mu_a(d\lambda) \leqslant |f|^2 \int_{e} \left\{ \int_{S_n} |W_a(s, \lambda)|^2 \nu(ds) \right\} \mu_a(d\lambda) < \infty.$$

Отсюда вытекает, что интеграл, определяющий $V_a f$, существует почти всюду по мере μ_a и $V_a f$ лежит в $L_2(e, \mu_a)$ для всякого ограниченного борелевского множества e вещественной прямой. Пусть теперь U_a — определенный в лемме 1 изоморфизм, отображающий $\mathfrak{H}_a$ на $L_2(\mu_a)$. Таким образом, a-е компоненты f_a и $(Uf)_a$ векторов f и Uf в их разложениях, определяемых прямыми суммами $\sum \mathfrak{H}_a$ и $\sum L_2(\mu_a)$ соответственно, удовлетворяют уравнению $(Uf)_a = U_a f_a$. Далее, если функция F из $L_2(\mu_a)$ обращается в нуль вне ограниченного борелевского множества e, то в силу теоремы Фубини и леммы 9

$$\begin{aligned}(V_a f, F) &= \int_{e} (V_a f)(\lambda) \overline{F(\lambda)} \mu_a(d\lambda) = \\ &= \int_{S_n} f(s) \overline{\left\{ \int_{e} W_a(s, \lambda) F(\lambda) \mu_a(d\lambda) \right\}} \nu(ds) = \\ &= \int_{S_n} f(s) \overline{(E(e) F(T) a)(s)} \nu(ds) = (f, F(T) a) = \\ &= (f, U_a^{-1} F) = (f_a, U_a^{-1} F) = (U_a f_a, F) = ((Uf)_a, F).\end{aligned}$$

Это показывает, что $(V_a f)(\lambda) = (Uf)_a(\lambda)$ для почти всех по μ_a-мере λ в каждом ограниченном борелевском множестве e, так что $(V_a f)(\lambda) = (Uf)_a(\lambda)$ для почти всех по μ_a-мере λ. Если f — произвольная функция из $L_2(S, \Sigma, \nu)$ и $f_n = f\chi_{S_n}$, то $f_n \to f$, и потому в силу непрерывности

$$\int_{S_n} f(s)\overline{W_a(S,\ \cdot)}\,\nu(ds) = (Uf_n)_a \to (Uf)_a.$$

Таким образом, интеграл $\int_S f(s)\overline{W_a(s,\lambda)}\,\nu(ds)$ существует в смысле среднего квадратического и равен $(Uf)_a(\lambda)$; тем самым доказано (c) и завершено доказательство теоремы.

Используя обозначения предыдущего доказательства, положим $F = (Uf)_a$, так что по лемме 9

$$\int_{-n}^{n} (Uf)_a(\lambda)\,W_a(\cdot,\lambda)\,\mu_a(d\lambda) = E([-n,\ n])\,F(T)\,a \to F(T)\,a = U_a^{-1}F = f_a.$$

Таким образом, интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} (Uf)_a(\lambda)\,W_a(s,\lambda)\,\mu_a(d\lambda)$ существует в смысле среднего квадратического и равен $f_a(s)$. Следовательно, разложение $f = \sum_{a\in A} f_a$, определяемое разложением в прямую сумму $\mathfrak{H} = \sum \mathfrak{H}_a$, принимает вид, описанный следствием 12.

12. Следствие. *При предположениях и обозначениях предыдущей теоремы*

$$f(s) = \sum_{a\in A} \int_{-\infty}^{\infty} (Uf)_a(\lambda)\,W_a(s,\lambda)\,\mu_a(d\lambda), \qquad f \in L_2(S,\ \Sigma,\ \nu),$$

причем интегралы существуют в $L_2(S, \Sigma, \nu)$ в смысле среднего квадратического и ряд сходится по норме $L_2(S, \Sigma, \nu)$.

13. Следствие. *Предыдущие теорема и следствие остаются справедливыми, если предположение об области значений $E(e)$ заменить предположением о том, что всякая функция f из $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{D}(T^n)$ существенно ограничена по мере ν на каждом из множеств S_n.*

Доказательство. Это вытекает из леммы 8.

14. Следствие. *Пусть в дополнение к предположениям теоремы* 11 *пространство $L_2(S, \Sigma, \nu)$ сепарабельно и при $n \geqslant 1$ множество*

$\mathfrak{D}^{(n)} = \{f \mid f \in \mathfrak{D}(T),\ f(s) = 0 = (Tf)(s)$ *почти всюду по мере ν на S_n'*$\}$

плотно в $L_2(S_n, \Sigma, \nu)$. *Пусть* $T^{(n)}$ — *сужение оператора* T *на* $\mathfrak{D}^{(n)}$ *и*

$$W_a^{(n)}(s, \lambda) = \begin{cases} W_a(s, \lambda), & s \in S_n, \\ 0, & s \in S_n'. \end{cases}$$

Тогда для почти всех по μ_a-*мере* λ *вектор* $W_a^{(n)}(\cdot, \lambda)$ *лежит в* $\mathfrak{D}((T^{(n)})^*)$ *и*

$$(T^{(n)})^* W_a^{(n)}(\cdot, \lambda) = \bar{\lambda} W_a^{(n)}(\cdot, \lambda).$$

Доказательство. Из леммы 9 (I) и теоремы Фубини вытекает, что для почти всех λ функция $W_a^{(n)}(\cdot, \lambda)$ лежит в $L_2(S, \Sigma, \nu)$ при каждом $n \geqslant 1$. Так как $L_2(S, \Sigma, \nu)$ сепарабельно, то существует счетное множество $\{[f_j, Tf_j]\}$, плотное в графике оператора $T^{(n)}$. Таким образом, по теореме 11

$$\begin{aligned} (Tf_j, W_a^{(n)}(\cdot, \lambda)) &= \int_S (Tf_j)(s) \overline{W_a(s, \lambda)}\, \nu(ds) = \\ &= (U(Tf_j))_a(\lambda) = \lambda (Uf_j)_a(\lambda) = \\ &= \lambda \int_S f_j(s) \overline{W_a(s, \lambda)}\, \nu(ds) = \lambda (f_j, W_a^{(n)}(\cdot, \lambda)) \end{aligned}$$

для всех λ, не принадлежащих некоторому множеству N_j нулевой μ_a-меры. Следовательно, для всех λ, не принадлежащих множеству нулевой μ_a-меры $N = \bigcup_{j=1}^{\infty} N_j$, мы имеем $(Tf_j, W_a^{(n)}(\cdot, \lambda)) = \lambda (f_j, W_a^{(n)}(\cdot, \lambda))$. Так как векторы $[f_j, Tf_j]$ плотны в графике $\Gamma^{(n)}$ оператора $T^{(n)}$, то выполнено соотношение

$$(T^{(n)}f, W_a^{(n)}(\cdot, \lambda)) = \lambda (f, W_a^{(n)}(\cdot, \lambda)), \quad f \in \mathfrak{D}(T^{(n)}), \quad \lambda \notin N.$$

И мы получаем нужный результат, поскольку $\mathfrak{D}(T^{(n)})$ плотно в $L_2(S_n, \Sigma, \nu)$.

Теперь мы опишем теорию спектральных типов для неограниченных самосопряженных операторов. Так же, как в случае ограниченного нормального оператора (см. теорему X.5.10), будет показано, что сепарабельное гильбертово пространство имеет упорядоченное представление относительно заданного в нем неограниченного самосопряженного оператора и что это представление определяется однозначно с точностью до эквивалентности. Так же, как в случае ограниченного нормального оператора (см. теорему X.5.12), упорядоченное представление определяет класс унитарной эквивалентности этого оператора. По существу теория спектральных типов для неограниченных самосопряженных операторов может быть без труда выведена из соответствующей теории для ограниченных операторов.

15. Определение. Пусть μ — положительная мера, определенная на семействе $\mathscr{B}$ борелевских множеств комплексной плоскости, и пусть $\{e_n\}$ — возрастающая последовательность борелевских множеств, первый элемент e_1 которой есть вся плоскость. Положим

$$\mu_n(e) = \mu(e \cap e_n), \quad e \in \mathscr{B}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Спектральное представление гильбертова пространства $\mathfrak{H}$ на $\sum_{n=1}^{\infty} L_2(\mu_n)$ относительно самосопряженного оператора T в $\mathfrak{H}$ называется *упорядоченным представлением* пространства $\mathfrak{H}$ относительно T. Мера μ называется *мерой упорядоченного представления*. Множества e_n будут называться *множествами кратности упорядоченного представления*. Если $\mu(e_k) > 0$ и $\mu(e_{k+1}) = 0$, то говорят, что упорядоченное представление имеет *кратность* k. Если $\mu(e_k) > 0$ для всех k, то говорят, что представление имеет *бесконечную кратность*. Два упорядоченных представления U и $\widetilde{U}$ пространства $\mathfrak{H}$ относительно операторов T и $\widetilde{T}$ соответственно с мерами μ и $\widetilde{\mu}$ и множествами кратности $\{e_n\}$ и $\{\widetilde{e}_n\}$ будем называть *эквивалентными*, если $\mu \simeq \widetilde{\mu}$ и $\mu(e_n \Delta \widetilde{e}_n) = 0 = \widetilde{\mu}(e_n \Delta \widetilde{e}_n)$ для всех $n = 1, 2, \ldots$.

16. Теорема. *Сепарабельное гильбертово пространство $\mathfrak{H}$ обладает упорядоченным представлением U относительно данного самосопряженного оператора T в $\mathfrak{H}$, и всякое упорядоченное представление пространства $\mathfrak{H}$ относительно T эквивалентно U. Более того, два самосопряженных оператора в $\mathfrak{H}$ унитарно эквивалентны тогда и только тогда, когда эквивалентны соответствующие упорядоченные представления пространства $\mathfrak{H}$ относительно этих операторов.*

Доказательство. Пусть E и E_1 — разложения единицы для T и его резольвенты $R(i; T)$ соответственно. Напомним (см. доказательство теоремы 2.3), что

$$E(\delta) = E_1(h(\delta)), \quad \delta \in \mathscr{B},$$

где $\mathscr{B}$ — семейство борелевских множеств плоскости и $h(\lambda) = (i - \lambda)^{-1}$. Отсюда вытекает, что

$$\overline{\text{sp}}\{f(R(i; T))x \mid f \in C(\sigma(R(i; T)))\} = \overline{\text{sp}}\{E_1(\delta)x \mid \delta \in \mathscr{B}\} =$$
$$= \overline{\text{sp}}\{E(\delta)x \mid \delta \in \mathscr{B}\} = \overline{\text{sp}}\{F(T)x \mid F \in L_2((E(\cdot)x, x))\}.$$

Эти равенства показывают, что представление пространства $\mathfrak{H}$ относительно $R(i;\,T)$ индуцирует представление относительно T и обратно. Из леммы 6 следует, что пространство $\mathfrak{H}$ отображается представлениями относительно T и $R(i;\,T)$ на пространства вида $\sum L_2((E(\cdot)\,a_n,\,a_n))$ и $\sum L_2((E_1(\cdot)\,a_n,\,a_n))$ соответственно. Так как тождества

$$(E(e)\,a_n,\,a_n)=(E(e\cap h^{-1}(e_n))\,a_n,\,a_n),\quad e\in\mathscr{B},$$
$$(E_1(e)\,a_n,\,a_n)=(E_1(e\cap e_n)\,a_n,\,a_n),\quad e\in\mathscr{B},$$

эквивалентны, то представление $\mathfrak{H}$ относительно T упорядочено тогда и только тогда, когда упорядочено соответствующее представление относительно $R(i;\,T)$. Кроме того, соответствующие множества кратности суть $h^{-1}(e_n)$ и e_n. Заметим, наконец, что два неограниченных самосопряженных оператора T_1 и T_2 унитарно эквивалентны тогда и только тогда, когда $R(i;\,T_1)$ и $R(i;\,T_2)$ унитарно эквивалентны. Таким образом, настоящая теорема вытекает из теорем X.5.10 и X.5.12.

Этот параграф мы заканчиваем рассмотрением того, как теория спектральных типов неограниченного самосопряженного оператора связана с представлением, данным в теореме 11. Следующая лемма в случае числовых функций совпадает с хорошо известной теоремой Лузина.

17. Лемма. *Пусть μ — конечная положительная регулярная мера на борелевских множествах топологического пространства R. Тогда для всякой μ-измеримой функции f на R со значениями в B-пространстве и для всякого $\varepsilon>0$ существует такое борелевское множество σ в R с мерой $\mu(\sigma)<\varepsilon$, что сужение функции f на дополнение к σ непрерывно.*

Доказательство. Если сужения $f\,|\,\sigma$ и $g\,|\,\delta$ непрерывны, то таким же будет и сужение $(\alpha f+\beta g)\,|\,\sigma\cap\delta$, а потому класс измеримых функций, обладающих нужным нам свойством, есть линейное многообразие. Кроме того, характеристическая функция χ_e борелевского множества e лежит в этом многообразии. Это вытекает из регулярности меры μ; действительно, существуют открытое множество σ, содержащее e, и замкнутое множество δ, содержащееся в e, такие, что $\mu(\sigma-\delta)<\varepsilon$. Ясно, что сужение χ_e на дополнение к $\sigma-\delta$ непрерывно. Таким образом, всякая μ-простая функция обладает желаемым свойством. Так как $\mu(R)<\infty$, то всякая μ-измеримая функция f есть предел по μ-мере последовательности $\{f_n\}$ μ-простых функций. В силу следствия III.6.3 можно предполагать, что последовательность $f_n(\lambda)$ сходится μ-равномерно к $f(\lambda)$. Это означает, что $f_n(\lambda)$ сходится к $f(\lambda)$ равномерно на дополнении множества δ_1 с мерой $\mu(\delta_1)<\varepsilon/2$. Далее, для $n\geqslant 2$

существуют множества δ_n, такие, что $\sum_{n=2}^{\infty} \mu(\delta_n) < \varepsilon/2$, а сужение f_n на δ'_n непрерывно. Таким образом, в силу следствия I.7.7 сужение f на множестве $\delta' = \bigcap_{n=1}^{\infty} \delta'_n$ является непрерывной функцией, а дополнение этого множества $\delta = \bigcup_{n=1}^{\infty} \delta_n$ имеет меру $\mu(\delta) < \varepsilon$, ч. т. д.

18. Лемма. *Пусть $f_1, \ldots, f_m$ — линейно независимые функции, определенные на объединении S возрастающей последовательности $\{S_n\}$ множеств. Тогда для всех достаточно больших n совокупность $f_1 \mid S_n, \ldots, f_m \mid S_n$ сужений этих функций линейно независима.*

Доказательство. Предположим, напротив, что для некоторой последовательности $n_i \to \infty$ существуют такие постоянные $\alpha_{i1}, \ldots$ $\ldots, \alpha_{im}$, что

$$\text{(I)} \qquad \chi_{S_{n_i}}(\alpha_{i1} f_1 + \ldots + \alpha_{im} f_m) = 0, \quad \sum_{j=1}^{m} |\alpha_{ij}| = 1.$$

Выбирая новую подпоследовательность, которую ради простоты мы будем по-прежнему обозначать через n_i, мы можем считать, что существуют пределы

$$\alpha_j = \lim_{i \to \infty} \alpha_{ij}, \qquad 1 \leqslant j \leqslant m.$$

Тогда в силу (I)

$$\alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_m f_m = 0, \quad \sum_{j=1}^{m} |\alpha_j| = 1;$$

мы получили противоречие, и лемма доказана.

19. Теорема. *Пусть в дополнение к предположениям теоремы 11 гильбертово пространство $L_2(S, \Sigma, \nu)$ сепарабельно; U — упорядоченное представление $L_2(S, \Sigma, \nu)$ относительно самосопряженного оператора T, μ — его мера; e_n, $1 \leqslant n \leqslant k$, — его множества кратности, а W_n, $n = 1, 2, \ldots,$ — ядра, описанные в теореме 11. Тогда для всякого натурального n, не превосходящего кратности упорядоченного представления, множество $\{W_1(\cdot, \lambda), \ldots, W_n(\cdot, \lambda)\}$ в пространстве ν-измеримых функций линейно независимо почти всюду по мере μ на e_n.*

Доказательство. Пусть $\mu_n(e) = \mu(e \cap e_n) = (E(e \cap e_n) a_n, a_n)$. Так как W_n измерима относительно произведения мер ν и μ_n, то из леммы 9 (I) и теоремы Фубини вытекает, что для почти всех по μ_n-мере λ функция $W_n(\cdot, \lambda)$ ν-измерима. Таким образом, для почти всех по μ-мере λ из e_n функция $W_n(\cdot, \lambda)$ ν-измерима. Удобно ввести пространство $G(S, \Sigma, \nu)$ всех ν-измеримых функций f на S, интегрируемых с квадратом на каждом из множеств S_n. Множество $G(S, \Sigma, \nu)$ есть линейное метрическое пространство относительно нормы

$$|f| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|(f \mid S_n)|_2}{1 + |(f \mid S_n)|_2},$$

где

$$|(f \mid S_n)|_2 = \left(\int_{S_n} |f(s)|^2 \nu(ds) \right)^{1/2}.$$

Ясно, что $G(S, \Sigma, \nu)$ является линейным многообразием в пространстве $M(S, \Sigma, \nu)$ всех ν-измеримых функций на S и что множество функций из $G(S, \Sigma, \nu)$ линейно независимо в $M(S, \Sigma, \nu)$ тогда и только тогда, когда оно линейно независимо в $G(S, \Sigma, \nu)$.

Линейная независимость функций $W_1(\cdot, \lambda), \ldots, W_n(\cdot, \lambda)$ будет доказана индукцией по n. В случае $n = 1$ это просто означает, что $W_1(\cdot, \lambda) \neq 0$ почти всюду по мере μ. Если это неверно, то существует такое ограниченное борелевское множество e, что $\mu(e) = |E(e) a_1|^2 \neq 0$ и $W_1(\cdot, \lambda) = 0$ для всех λ из e. Тогда по теореме 11(с) $(Uf)_{a_1}(\lambda) = 0$ для всех $\lambda \in e$ и всех $f \in L_2(S, \Sigma, \nu)$. Так как U — спектральное представление относительно оператора T, то из определения 4 вытекает, что $(E(e) f)_{a_1} = 0$ для всех f из $L_2(S, \Sigma, \nu)$. В частности, если положить $f = a_1$, ясно, что $E(e) a_1 = (E(e) a_1)_{a_1} = 0$, а это противоречит тому факту, что $\mu(e) \neq 0$; теорема в случае $n = 1$ доказана.

Предположим теперь, что теорема доказана для $n < p$, где p — натуральное число, не превосходящее кратности упорядоченного представления. По предположению индукции функции $W_1(\cdot, \lambda), \ldots, W_{p-1}(\cdot, \lambda)$ линейно независимы для почти всех по μ-мере λ из e_{p-1} и, следовательно, для почти всех по μ-мере λ из e_p. Для доказательства теоремы нам необходим следующий факт:

(I) подмножество σ_0 в e_p, состоящее из всех $\lambda \in e_p$, для которых функции $W_1(\cdot, \lambda), \ldots, W_p(\cdot, \lambda)$ линейно зависимы, μ-измеримо (см. III.2.10).

Для доказательства утверждения (I) обозначим через σ_m множество всех $\lambda \in e_p$, таких, что сужения $\widetilde{W}_1(\cdot, \lambda), \ldots, \widetilde{W}_p(\cdot, \lambda)$ функций $W_i(\cdot, \lambda)$ на S_m линейно зависимы. Если λ лежит в $e_p - \sigma_0$, то по лемме 18 $\lambda \in e_p - \sigma_m$ при некотором m. С другой стороны, $\sigma_0 \subseteq \sigma_m$ при всех m. Таким образом, $\sigma_0 = \bigcap_{m=1}^{\infty} \sigma_m$, и поэтому достаточно доказать, что каждое из множеств σ_m μ-измеримо.

Обозначим через Z счетное всюду плотное подмножество линейного многообразия в $L_2(S_m, \Sigma, \nu)$, порожденного функциями $\widetilde{W}_1(\cdot, \lambda), \ldots, \widetilde{W}_p(\cdot, \lambda)$, $\lambda \in e_p$. Существует самое большее счетное множество линейно независимых p-наборов $[z_1, \ldots, z_p]$ в Z, и для каждого такого p-набора можно выбрать непрерывные линейные функционалы $y_1^*, \ldots, y_p^*$ на $L_2(S_m, \Sigma, \nu)$ так, чтобы $\det(y_i^* z_j) = 1$. Отсюда вытекает, что существует последовательность $\{x_i^*\}$ непрерывных линейных функционалов на $L_2(S_m, \Sigma, \nu)$, такая, что если $\lambda \in e_p$ и функции $\widetilde{W}_1(\cdot, \lambda), \ldots, \widetilde{W}_p(\cdot, \lambda)$ линейно независимы, то $\det(x_{n_i}^* \widetilde{W}_j(\cdot, \lambda)) \neq 0$ для некоторого p-набора $[x_{n_1}^*, \ldots, x_{n_p}^*] \subseteq \{x_i^*\}$. С другой стороны, если $\lambda \in e_p$ и функции $\widetilde{W}_1(\cdot, \lambda), \ldots, \widetilde{W}_p(\cdot, \lambda)$ линейно зависимы, то существуют такие не равные нулю числа $\beta_i(\lambda)$, что

$$\sum_{i=1}^{p} \beta_i(\lambda) \widetilde{W}_i(\cdot, \lambda) = 0,$$

и поэтому ясно, что каждый определитель $\det(x_{n_i}^* \widetilde{W}_j(\cdot, \lambda))$ должен обратиться в нуль. Другими словами, σ_m есть в точности множество тех $\lambda \in e_p$, для которых $\det(x_{n_i}^* \widetilde{W}_j(\cdot, \lambda)) = 0$ для каждого p-набора $[x_{n_1}^*, \ldots, x_{n_p}^*] \subseteq \{x_i^*\}$. Таким образом, σ_m есть пересечение последовательности измеримых множеств и потому оно μ-измеримо, что завершает доказательство утверждения (I).

Чтобы закончить доказательство теоремы, предположим, что функции $W_1(\cdot, \lambda), \ldots, W_p(\cdot, \lambda)$ не являются линейно независимыми для μ-почти всех λ из e_p. Из утверждения (I) вытекает, что существует такое μ-измеримое подмножество σ_0 в e, что $\mu(\sigma_0) \neq 0$, и для всех $\lambda \in \sigma_0$ множество $\{W_1(\cdot, \lambda), \ldots, W_{p-1}(\cdot, \lambda)\}$ линейно независимо, но множество $\{W_1(\cdot, \lambda), \ldots, W_p(\cdot, \lambda)\}$ линейно зависимо. Пренебрегая множеством меры нуль, мы можем предположить, что σ_0 — борелевское множество. Таким образом, существуют комплекснозначные функции α_i на σ_0, такие, что

$$\text{(II)} \qquad W_p(\cdot, \lambda) = \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i(\lambda) W_i(\cdot, \lambda), \quad \lambda \in \sigma_0,$$

и эти функции единственны. Покажем, что функции-коэффициенты α_i μ-измеримы, и этот факт приведет нас к противоречию.

Пусть $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ — последовательность положительных чисел, такая, что $\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j < \varepsilon$. Используя лемму 17, мы можем для каждого j найти такое борелевское множество $c_j \subseteq \sigma_0$, что $\mu(\sigma_0 - c_j) < \varepsilon_j$ и сужения функций $W_1(\cdot, \lambda), \ldots, W_p(\cdot, \lambda)$ на S_j

непрерывны как функции на c_j со значениями в $L_2(S_j, \Sigma, \nu)$. Положим $c = \prod_{j=1}^{\infty} c_j$. Тогда $\mu(\sigma_0 - c) < \varepsilon$, и из определения нормы в $G(S, \Sigma, \nu)$ ясно, что $W_1(\cdot, \lambda), \ldots, W_p(\cdot, \lambda)$ непрерывны как функции на c со значениями в $G(S, \Sigma, \nu)$. Пусть λ_0 — фиксированная точка из c. Тогда по лемме 18 существует такое натуральное m, что сужения $\widetilde{W}_1(\cdot, \lambda_0), \ldots, \widetilde{W}_{p-1}(\cdot, \lambda_0)$ функций $W_1(\cdot, \lambda_0), \ldots, W_{p-1}(\cdot, \lambda_0)$ на S_m являются линейно независимыми функциями в $L_2(S_m, \Sigma, \nu)$. Так как каждое конечномерное подпространство B-пространства в силу следствия IV.3.2 замкнуто, то из следствия I.3.13 теоремы Хана — Банаха вытекает существование таких непрерывных линейных функционалов $y_1^*, \ldots, y_{p-1}^*$ в $L_2(S_m, \Sigma, \nu)$, что $y_i^*(W_j(\cdot, \lambda_0)) = \delta_{ij}$, $i = 1, \ldots, p-1$. Определим непрерывный линейный функционал F_j на $G(S, \Sigma, \nu)$, полагая $F_i(f) = y_i^*(f \mid S_m)$ для $f \in G(S, \Sigma, \nu)$, $i = 1, \ldots, p-1$. Тогда $F_i(W_j(\cdot, \lambda_0)) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, p-1$. В силу непрерывности F_i существует такая окрестность $N(\lambda_0)$ точки λ_0, что определитель $\det F_i(W_j(\cdot, \lambda))$ не обращается в нуль в точках $\lambda \in N(\lambda_0) \cap c$. Таким образом, функции α_j как решения уравнений

$$\sum_{j=1}^{p-1} \alpha_j(\lambda) F_i(W_j(\cdot, \lambda)) = F_i(W_p(\cdot, \lambda))$$

непрерывны по λ при $\lambda \in N(\lambda_0) \cap c$. Так как $\bigcap_{\lambda_0 \in c} N(\lambda_0) \supseteq c$, то функции α_j непрерывны на c. Поскольку $\mu(\sigma_0 - c) < \varepsilon$ и ε произвольно мало, функции α_j μ-измеримы на σ_0.

Теперь нетрудно прийти к противоречию. Пусть σ_1 — ограниченное борелевское подмножество в σ_0, такое, что $\mu(\sigma_1) \neq 0$ и функции α_i ограничены на σ_1. Так как $\sigma_1 \subseteq e_p$, то из уравнений (II), формулы (II) леммы 9 и того факта, что $\mu_i(e) = \mu_p(e)$ для $e \subseteq e_p$ и $i = 1, \ldots, p$, вытекает, что

$$\begin{aligned} E(\sigma_1) a_p &= \int_{\sigma_1} W_p(\cdot, \lambda) \mu_p(d\lambda) = \\ &= \int_{\sigma_1} \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i(\lambda) W_i(\cdot, \lambda) \mu_p(d\lambda) = \\ &= \sum_{i=1}^{p-1} \int_{\sigma_1} \alpha_i(\lambda) W_i(\cdot, \lambda) \mu_i(d\lambda) = \\ &= \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i(T) E(\sigma_1) a_i. \end{aligned}$$

Так как многообразия $\mathfrak{H}_{a_i}$ ортогональны, $E(\sigma_1)a_p=0$. Однако $\sigma_1\subseteq e_p$, и мы приходим к противоречию:

$$0=(E(\sigma_1)a_p, a_p)=(E(\sigma_1)a_1, a_1)=\mu(\sigma_1)\neq 0.$$

Теорема доказана.

4. Расширения симметрических преобразований[1])

Чтобы применять спектральную теорему, мы должны во многих случаях найти сначала какое-либо самосопряженное расширение данного симметрического оператора. Задача нахождения такого расширения является не тривиальной и даже не всегда разрешимой. В теории *ограниченных* операторов мы должны лишь проверить симметричность ($T^*\supseteq T$), так как если оператор всюду определен и симметричен, то $T^*=T$. Но если T неограничен, то картина совершенно иная. Рассмотрим, например, оператор, который будет подробно изучен в следующей главе: дифференциальный оператор $iD=i\,(d/dt)$ в пространстве $L_2(0, 1)$. Как мы должны выбрать его область определения? Первое естественное предположение — выбрать за область определения семейство $\mathfrak{D}_1$ всех функций с непрерывной первой производной. Если f и g — две любые такие функции, то

$$\begin{aligned}(iDf, g)&=\int_0^1 if'(t)\overline{g(t)}\,dt=\\&=\int_0^1 f(t)\overline{ig'(t)}\,dt+i\,(f(1)\overline{g(1)}-f(0)\overline{g(0)})=\\&=(f, iDg)+i\,(f(1)\overline{g(1)}-f(0)\overline{g(0)}).\end{aligned}$$

Два дополнительных «граничных» члена справа нарушают симметричность. Чтобы устранить их, естественно выбрать теперь в качестве области определения оператора iD семейство $\mathfrak{D}_2$ всех функций f с непрерывной первой производной и таких, что $f(0)=f(1)=0$. Этот выбор области определения делает оператор iD симметрическим, но все же не делает его самосопряженным. Легко, например, видеть, что множество $\mathfrak{D}_1$ будет содержаться в области определения сопряженного $(iD)^*$ и в том случае, если принять $\mathfrak{D}_2$ за область определения оператора iD. Все эти трудности обнаруживаются, даже если сбросить со счета все широкое многообразие возможных «локальных патологий» (недифференцируемость и т. д.) функций из L_2.

---

[1]) См. также прекрасное изложение теории расширений в гл. IV книги М. А. Наймарка [5]. — *Прим. ред.*

Столкнувшись с такими трудностями, разумно привлечь на помощь абстрактную теорию, которая может дать какой-то единый подход в тех конкретных случаях, которые нам предстоит рассмотреть. Наша общая абстрактная задача — найти все симметрические и, таким образом, все самосопряженные расширения данного симметрического оператора. В этом параграфе мы рассмотрим эту задачу, используя метод Калкина, приспособленный к нашим будущим приложениям к дифференциальным уравнениям.

Основная идея теории состоит в том, чтобы, отправляясь от симметрического оператора T, найти самосопряженный оператор расширением области определения. Поле наших исследований сужается благодаря следующей лемме.

1. Лемма. *Пусть T_1 — оператор с плотной областью определения.*

(a) *Если оператор T_2 является расширением оператора T_1, то T_1^* — расширение оператора T_2^*.*

(b) *Если оператор T_1 симметричен, то всякое его симметрическое расширение T_2, в частности всякое его самосопряженное расширение, удовлетворяет соотношениям $T_1 \subseteq T_2 \subseteq T_2^* \subseteq T_1^*$.*

Доказательство. Если $T_1 \subseteq T_2$ и $y \in \mathfrak{D}(T_2^*)$, то $(x, T_2^*y) = (T_2x, y) = (T_1x, y)$ для любого $x \in \mathfrak{D}(T_1)$. Следовательно, $y \in \mathfrak{D}(T_1^*)$ и $(x, T_2^*y) = (x, T_1^*y)$. Отсюда вытекает, что $T_1^* \supseteq T_2^*$. Этим доказано (a), а (b) есть его непосредственное следствие.

Из леммы 1(b) следует, что для получения наиболее общего симметрического расширения симметрического оператора T с плотной областью определения мы должны лишь сузить оператор T^* на некоторую надлежащим образом выбранную подобласть $\mathfrak{D}(T^*)$. Помня, что следует придерживаться этого основного принципа, мы переходим к систематическому изучению линейных подпространств пространства $\mathfrak{D}(T^*)$.

На протяжении всего этого параграфа под T понимается неограниченный симметрический оператор с плотной областью определения. На линейном пространстве $\mathfrak{D}(T^*)$ введем две вспомогательные билинейные формы.

2. Определение. Если $x, y \in \mathfrak{D}(T^*)$, то положим

(a) $$(x, y)^* = (x, y) + (T^*x, T^*y),$$

(b) $$\{x, y\} = -i\,\{(T^*x, y) - (x, T^*y)\}.$$

Форма $(x, y)^*$ — это просто то скалярное произведение, которое переносится на $\mathfrak{D}(T^*)$ из $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$, если отождествить при помощи отображения $x \longleftrightarrow [x, T^*x]$ область $\mathfrak{D}(T^*)$ с графиком $\Gamma(T^*)$. Значение формы $\{x, y\}$ выявляется следующей леммой и с наибольшей ясностью раскроется в следующей главе.

3. Лемма. *Подпространство* $\mathfrak{D}$ *в* $\mathfrak{D}(T^*)$, *содержащее* $\mathfrak{D}(T)$, *есть область определения симметрического расширения* T_1 *оператора* T *тогда и только тогда, когда* $\{x, y\}=0$ *для всех* $x, y \in \mathfrak{D}$. *В этом случае* T_1 *однозначно определяется по формуле* $T_1x = T^*x$, $x \in \mathfrak{D}$.

Доказательство. Если T_1 — симметрическое расширение оператора T с областью определения $\mathfrak{D}$, то по лемме 1 $T_1 \subseteq T^*$, и, следовательно, $\{x, y\} = -i\{(T^*x, y) - (x, T^*y)\} = -i\{(T_1x, y) - (x, T_1y)\} = 0$ для $x, y \in \mathfrak{D} = \mathfrak{D}(T_1)$. Очевидно, $T_1x = T^*x$ для $x \in \mathfrak{D}$. Обратно, если $\{x, y\} = 0$ для $x \in \mathfrak{D}$ и T_1 определен равенством $T_1x = T^*x$ для $x \in \mathfrak{D}$, то $(T_1x, y) - (x, T_1y) = i\{x, y\} = 0$, так что оператор T_1 симметричен, ч. т. д.

4. Определение. Подпространство $\mathfrak{D}$ в $\mathfrak{D}(T^*)$ называется *симметрическим*, если $\{x, y\} = 0$ для всех $x, y \in \mathfrak{D}$.

А теперь лемму 3 можно переформулировать следующим образом.

3′. Лемма. *Общий вид симметрического расширения* T_1 *оператора* T — *это сужение оператора* T^* *на симметрическое подпространство* $\mathfrak{D}$ *в* $\mathfrak{D}(T^*)$, *содержащее* $\mathfrak{D}(T)$.

Для более глубокого понимания нашей задачи мы должны рассмотреть топологию, определяемую на $\mathfrak{D}(T^*)$ билинейной формой $(x, y)^*$.

5. Лемма. (a) *С формой* $(x, y)^*$ *в качестве скалярного произведения* $\mathfrak{D}(T^*)$ *становится полным гильбертовым пространством.*

(b) *Билинейная форма* $\{x, y\}$ *непрерывна в топологии пространства* $\mathfrak{D}(T^*)$, *порожденной скалярным произведением* $(x, y)^*$.

(c) *Сужение* T_1 *оператора* T^* *замкнуто тогда и только тогда, когда его область определения* $\mathfrak{D}(T_1)$ *есть замкнутое подпространство пространства* $\mathfrak{D}(T^*)$ *в топологии, порожденной скалярным произведением* $(x, y)^*$.

Доказательство. Мы уже отмечали, что $(x, y)^*$ есть то скалярное произведение, которое переносится на $\mathfrak{D}(T^*)$ из $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$, если отождествить $\mathfrak{D}(T^*)$ при помощи отображения $x \longleftrightarrow [x, T^*x]$ с графиком $\Gamma(T^*)$. Так как $\Gamma(T^*)$ замкнут в $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$, то (a) вытекает из леммы 1.6; точно так же получается утверждение (c).

Для доказательства (b) мы должны лишь заметить, что

$$
\begin{aligned}
|\{x, y\}| &\leqslant |(T^*x, y)| + |(x, T^*y)| \leqslant |T^*x|\cdot|y| + |x|\cdot|T^*y| = \\
&= \sqrt{(T^*x, T^*x)}\,|y| + |x|\sqrt{(T^*y, T^*y)} \leqslant \\
&\leqslant |y|\sqrt{(x, x) + (T^*x, T^*x)} + |x|\sqrt{(y, y) + (T^*y, T^*y)} \leqslant \\
&\leqslant 2\{(y, y)^*(x, x)^*\}^{1/2}.
\end{aligned}
$$

В оставшейся части этого параграфа будет предполагаться, что пространство $\mathfrak{D}(T^*)$ наделено топологией, порожденной нормой $|x|^* = \{(x, x)^*\}^{1/2}$, если только явно не оговорено противное. Если же мы хотим подчеркнуть это обстоятельство, то будем употреблять выражения типа «гильбертово пространство $\mathfrak{D}(T^*)$».

6. Лемма. (a) *Замыкание симметрического подпространства гильбертова пространства $\mathfrak{D}(T^*)$ есть симметрическое подпространство.*

(b) *Всякое симметрическое расширение T_1 оператора T имеет единственное минимальное замкнутое расширение, область определения которого есть просто замыкание пространства $\mathfrak{D}(T_1)$ в гильбертовом пространстве $\mathfrak{D}(T^*)$.*

Доказательство. Часть (a) вытекает непосредственно из леммы 5(b), а утверждение (b) — из (a) и леммы 5(c).

Из леммы 6(b) вытекает, что всякий симметрический оператор с плотной областью определения имеет единственное минимальное замкнутое симметрическое расширение. Этот факт приводит нас к следующему определению.

7. Определение. Минимальное замкнутое симметрическое расширение симметрического оператора T с плотной областью определения называется его *замыканием* и обозначается через $\overline{T}$.

8. Лемма. (a) *Замыкание $\overline{T}$ оператора T есть сужение оператора T^* на замыкание $\mathfrak{D}(T)$ в гильбертовом пространстве $\mathfrak{D}(T^*)$.*

(b) *Оператор T и его замыкание имеют одни и те же замкнутые расширения.*

(c) *Оператор T и его замыкание имеют один и тот же сопряженный.*

(d) *Оператор замкнут тогда и только тогда, когда $T = \overline{T}$.*

(e) *Самосопряженный оператор замкнут.*

Доказательство. Часть (d) очевидна ввиду определения 7. Часть (e) вытекает непосредственно из леммы 1.6.

Для доказательства утверждения (c) заметим, что так как $\overline{T} \supseteq T$, то $\overline{T}^* \subseteq T^*$ по лемме 1. С другой стороны, если $x \in \mathfrak{D}(T^*)$, то $(T^*x, y) = (x, Ty)$ для всех $[y, Ty] \in \Gamma(T)$ и, следовательно, для всех $[y, Ty] \in \overline{\Gamma(T)}$. Так как $\Gamma(\overline{T}) = \overline{\Gamma(T)}$, то по лемме 6(b) и в силу замечания, следующего за определением 2(b), $x \in \mathfrak{D}(\overline{T}^*)$.

Часть (a) вытекает непосредственно из леммы 6(b) и леммы 3. Из этого же и леммы 5(c) вытекает (b).

Значение леммы 8 объясняется следующим: так как мы ищем самосопряженные расширения оператора $\overline{T}$, то достаточно в силу 8(е) искать их среди замкнутых симметрических расширений оператора T. По лемме 8(b) их нужно искать среди замкнутых симметрических расширений оператора $\overline{T}$. Таким образом, используя лемму 8 для замены любого незамкнутого оператора T_1 его замыканием $\overline{T}_1$, мы можем, не теряя в общности, ограничиться рассмотрением замкнутых операторов.

А теперь мы перейдем к дальнейшему анализу пространства $\mathfrak{D}(T^*)$.

9. Определение. Положим

$$\mathfrak{D}_+ = \{x \in \mathfrak{D}(T^*) \mid T^*x = ix\}; \qquad \mathfrak{D}_- = \{x \in \mathfrak{D}(T^*) \mid T^*x = -ix\}.$$

Пространства $\mathfrak{D}_+$ и $\mathfrak{D}_-$ называются пространствами *положительного* и *отрицательного дефекта оператора* T соответственно. Их размерности (конечные или бесконечные порядковые числа), обозначаемые через n_+ и n_-, называются соответственно *положительным* и *отрицательным индексами дефекта оператора* T.

10. Лемма. (a) *$\mathfrak{D}(\overline{T})$, $\mathfrak{D}_+$ и $\mathfrak{D}_-$ — замкнутые взаимно ортогональные подпространства гильбертова пространства $\mathfrak{D}(T^*)$.*

(b)
$$\mathfrak{D}(T^*) = \mathfrak{D}(\overline{T}) \oplus \mathfrak{D}_+ \oplus \mathfrak{D}_-.$$

Доказательство. По лемме 8(a) $\mathfrak{D}(\overline{T})$ замкнуто. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность элементов из $\mathfrak{D}_+$, сходящаяся к $x \in \mathfrak{D}(T^*)$; тогда $\{[x_n, T^*x_n]\} = \{[x_n, ix_n]\} \subset \Gamma(T^*)$ сходится к $[x, ix] = [x, T^*x]$, так как T^* замкнут. Следовательно, $T^*x = ix$, т. е. $x \in \mathfrak{D}_+$, тем самым $\mathfrak{D}_+$ замкнуто. Аналогично проверяется замкнутость $\mathfrak{D}_-$. Так как $\mathfrak{D}_+$ и $\mathfrak{D}_-$ являются, очевидно, линейными подпространствами в $\mathfrak{D}(T^*)$, то остается показать, что пространства $\mathfrak{D}(\overline{T})$, $\mathfrak{D}_+$ и $\mathfrak{D}_-$ взаимно ортогональны и что их сумма есть $\mathfrak{D}(T^*)$.

Пусть $d \in \mathfrak{D}(\overline{T})$, $d_+ \in \mathfrak{D}_+$ и $d_- \in \mathfrak{D}_-$. Покажем, что $(d, d_+)^* = (d, d_-)^* = (d_-, d_+)^* = 0$. Прежде всего заметим, что так как $T^* \supseteq \overline{T}$, то

$$\begin{aligned}(d, d_+)^* &= (d, d_+) + (T^*d, T^*d_+) = (d, d_+) + (\overline{T}d, T^*d_+) = \\ &= (d, d_+) + (\overline{T}d, id_+) = (d, d_+) + (d, i\overline{T}^*d_+) = \\ &= (d, d_+) + (d, iT^*d_+) = (d, d_+) + (d, i^2d_+) = 0.\end{aligned}$$

Аналогично устанавливается, что $(d, d_-)^* = 0$. Далее,

$$(d_-, d_+)^* = (d_-, d_+) + (T^*d_-, T^*d_+) = (d_-, d_+) + (-id_-, id_+) = 0.$$

Следовательно, пространства $\mathfrak{D}(\overline{T})$, $\mathfrak{D}_+$ и $\mathfrak{D}_-$ взаимно ортогональны и их прямая сумма $\mathfrak{D}(\overline{T}) \oplus \mathfrak{D}_+ \oplus \mathfrak{D}_-$ содержится в $\mathfrak{D}(T^*)$.

Для проверки соотношения $\mathfrak{D}(T^*) = \mathfrak{D}(\overline{T}) \oplus \mathfrak{D}_+ \oplus \mathfrak{D}_-$ мы покажем, что нуль является единственным вектором, ортогональным ко всем этим трем пространствам. Допустим, что вектор v ортогонален к $\mathfrak{D}(\overline{T})$, $\mathfrak{D}_+$ и $\mathfrak{D}_-$. Тогда $0 = (d, v)^* = (d, v) + (T^*d, T^*v)$ для всех $d \in \mathfrak{D}(\overline{T})$. Следовательно, $(d, v) = -(T^*d, T^*v)$. Так как $(\cdot, v)$ — непрерывный линейный функционал на плотном в $\mathfrak{H}$ подмножестве $\mathfrak{D}(\overline{T})$, то ясно, что T^*v лежит в $\mathfrak{D}(T^*)$ и $T^*(T^*v) = -v$. Следовательно, $(I + T^*T^*)v = (I + iT^*)(I - iT^*)v = 0$. Поэтому $T^*[(I - iT^*)v] = i(I - iT^*)v$, т. е. $(I - iT^*)v \in \mathfrak{D}_+$. Точно так же, если $d_+ \in \mathfrak{D}_+$, то

$$0 = (v, d_+)^* = (v, d_+) + (T^*v, T^*d_+) = (v, d_+) + (T^*v, id_+) =$$
$$= (v, d_+) - i(T^*v, d_+) = ((I - iT^*)v, d_+).$$

Так как $(I - iT^*)v \in \mathfrak{D}_+$, то мы получаем $(I - iT^*)v = 0$. Следовательно, $T^*v = -iv$, т. е. $v \in \mathfrak{D}_-$. Но $(\mathfrak{D}_-, v)^* = 0$, поэтому $v = 0$. Итак, $\mathfrak{D}(T^*) = \mathfrak{D}(\overline{T}) \oplus \mathfrak{D}_+ \oplus \mathfrak{D}_-$, ч. т. д.

11. Лемма. *Между замкнутыми симметрическими подпространствами $\mathfrak{S}$ гильбертова пространства $\mathfrak{D}(T^*)$, содержащими $\mathfrak{D}(\overline{T})$, и замкнутыми симметрическими подпространствами $\mathfrak{S}^1$ в $\mathfrak{D}_+ \oplus \mathfrak{D}_-$ существует взаимно однозначное соответствие, задаваемое формулой $\mathfrak{S} = \mathfrak{D}(\overline{T}) \oplus \mathfrak{S}^1$.*

Доказательство. Если $x \in \mathfrak{D}(T)$ и $y \in \mathfrak{D}(T^*)$, то $\{x, y\} = -i\{(Tx, y) - (x, T^*y)\} = 0$; следовательно, если $x \in \mathfrak{D}(\overline{T}) = \overline{\mathfrak{D}(T)}$ и $y \in \mathfrak{D}(T)^*$, то $\{x, y\} = 0$. Таким образом, если $\mathfrak{S}^1$ симметрично, то таким же будет и $\mathfrak{S} = \mathfrak{D}(\overline{T}) \oplus \mathfrak{S}^1$. Для проверки замкнутости $\mathfrak{S}$ в случае замкнутости $\mathfrak{S}^1$ положим $x_n = d_n + s_n \in \mathfrak{S}$, $d_n \in \mathfrak{D}(\overline{T})$ и $s_n \in \mathfrak{S}^1$. Если $x_n \to x$ то, так как $\mathfrak{D}_+ \oplus \mathfrak{D}_-$ ортогонально к $\mathfrak{D}(\overline{T})$, мы имеем $(|x_n - x_m|^*)^2 = (|d_n - d_m|^*)^2 + (|s_n - s_m|^*)^2 \to 0$, так что обе последовательности $\{d_n\}$ и $\{s_n\}$ являются сходящимися. Если $d_n \to d$ и $s_n \to s$, то по лемме 8 (а) $d \in \mathfrak{D}(\overline{T})$, а так как $\mathfrak{S}^1$ замкнуто, то $s \in \mathfrak{S}^1$. Таким образом, $x \in \mathfrak{D}(\overline{T}) \oplus \mathfrak{S}^1 = \mathfrak{S}$, и $\mathfrak{S}$ замкнуто.

Обратно, если $\mathfrak{S}$ — замкнутое симметрическое подпространство в $\mathfrak{D}(T^*)$, содержащее $\mathfrak{D}(\overline{T})$, то положим $\mathfrak{S}^1 = \mathfrak{S} \cap (\mathfrak{D}_+ + \mathfrak{D}_-)$. Ясно, что $\mathfrak{S}^1$ замкнуто и симметрично, и $\mathfrak{S} \supseteq \mathfrak{D}(\overline{T}) \oplus \mathfrak{S}^1$. Если $x \in \mathfrak{S}$, то по лемме 10 x можно единственным способом представить в виде $x=d+y$, где $d\in\mathfrak{D}(\bar{T})$ и $y\in\mathfrak{D}_+\oplus\mathfrak{D}_-$. Так как $\mathfrak{D}(\bar{T})\subseteq\mathfrak{S}$, то $d\in\mathfrak{S}$; следовательно, $y\in\mathfrak{S}$, откуда вытекает, что $y\in\mathfrak{S}\cap(\mathfrak{D}_+\oplus\mathfrak{D}_-)=\mathfrak{S}^1$, и потому $\mathfrak{S}\subseteq\mathfrak{D}(\bar{T})\oplus\mathfrak{S}^1$, ч. т. д.

Лемма 11 показывает, что $\mathfrak{D}(T)$ играет нейтральную роль при нахождении самосопряженных расширений оператора T и что нужно рассматривать лишь пространство $\mathfrak{D}_+\oplus\mathfrak{D}_-$. В следующей теореме делается решающий шаг в этом направлении. Стоит отметить, что для элементов d_+, $e_+\in\mathfrak{D}_+$ имеет место равенство $(d_+, e_+)^*=2(d_+, e_+)$, и потому $|d_+|^*=\sqrt{2}\,|d_+|$. Точно так же $|d_-|^*=\sqrt{2}\,|d_-|$ для $d_-\in\mathfrak{D}_-$. Эти замечания показывают, что преобразование утверждения (a) следующей теоремы изометрично в каждой из норм.

12. Теорема. *Пусть $\mathfrak{S}^1$ — замкнутое подпространство в $\mathfrak{D}_+\oplus\mathfrak{D}_-$ и $\mathfrak{S}=\mathfrak{D}(\bar{T})\oplus\mathfrak{S}^1$.*

(a) *Пространство $\mathfrak{S}$ симметрично тогда и только тогда, когда $\mathfrak{S}^1$ является графиком изометрического преобразования, отображающего подпространство из $\mathfrak{D}_+$ на подпространство из $\mathfrak{D}_-$.*

(b) *Сужение T^* на $\mathfrak{S}$ есть самосопряженный оператор тогда и только тогда, когда $\mathfrak{S}^1$ — график изометрического преобразования, отображающего $\mathfrak{D}_+$ на все $\mathfrak{D}_-$.*

Доказательство. По лемме 11 $\mathfrak{S}$ симметрично тогда и только тогда, когда симметрично $\mathfrak{S}^1$. Пусть два произвольных элемента s, t из $\mathfrak{S}^1$ представлены в виде $s=d_++d_-$, $t=e_++e_-$, где $e_+,d_+\in\mathfrak{D}_+$, а e_-, $d_-\in\mathfrak{D}_-$. При этом $\mathfrak{S}^1$ симметрично тогда и только тогда, когда

$$
\begin{aligned}
\{s, t\} &= -i\,\{(T^*(d_++d_-),\ (e_++e_-))-((d_++d_-),\ T^*(e_++e_-))\} = \\
&= -i\,\{((id_+-id_-),\ (e_++e_-))-((d_++d_-),\ (ie_+-ie_-))\} = \\
&= -i\,\{2i\,(d_+,\ e_+)-2i\,(d_-,\ e_-)\}=2\,\{(d_+,\ e_+)-(d_-,\ e_-)\}=0,
\end{aligned}
$$

т. е. тогда и только тогда, когда $(d_+, e_+)=(d_-, e_-)$. Отсюда, очевидно, вытекает, что $|d_+|^2=|d_-|^2$ для всех $s=d_++d_-\in\mathfrak{S}^1$, т. е. $\mathfrak{S}^1$ — график изометрического отображения подпространства из $\mathfrak{D}_+$ на подпространство из $\mathfrak{D}_-$.

С другой стороны, если $|d_+|^2=|d_-|^2$ для $s=d_++d_-\in\mathfrak{S}^1$, то мы имеем $|d_++e_+|^2=|d_-+e_-|^2$ и $|d_+-e_+|^2=|d_--e_-|^2$, так что

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Re}(d_+,\ e_+) &= \frac{|d_++e_+|^2-|d_+-e_+|^2}{4} = \\
&= \frac{|d_-+e_-|^2-|d_--e_-|^2}{4}=\operatorname{Re}(d_-,\ e_-).
\end{aligned}
$$

Применяя те же рассуждения к вектору $it = ie_+ + ie_-$, мы получаем $\mathrm{Im}(d_+, e_+) = \mathrm{Im}(d_-, e_-)$, так что $(d_+, e_+) = (d_-, e_-)$. Из предыдущего абзаца вытекает, что $\mathfrak{S}^1$ симметрично. Тем самым утверждение (a) доказано.

Чтобы доказать (b), предположим сначала, что $\mathfrak{S}^1$ — график изометрического преобразования A подпространства из $\mathfrak{D}_+$ на подпространство в $\mathfrak{D}_-$, и обозначим через T_1 сужение T^* на $\mathfrak{S}$. Если область определения $\mathfrak{D}(A)$ есть собственное подмножество в $\mathfrak{D}_+$, то существует такой ненулевой вектор $y \in \mathfrak{D}_+$, что $(\mathfrak{D}(A), y)^* = 0$. Если $x \in \mathfrak{D}(T_1)$, то $x = x_1 + d_+ + d_-$, где $x_1 \in \mathfrak{D}(\bar{T})$, $d_+ \in \mathfrak{D}_+$ и $d_- \in \mathfrak{D}_-$. Следовательно, $(x, y)^* = 0$, т. е.

$$0 = (x, y) + (T^*x, T^*y) = (x, y) - i(T_1x, y), \quad x \in \mathfrak{D}(T_1).$$

Этим доказано, что $(T_1x, y) = -i(x, y)$ для всех $x \in \mathfrak{D}(T_1)$, и тем самым $y \in \mathfrak{D}(T_1^*)$. Так как $y \notin (T_1)$, ясно, что если $\mathfrak{D}(A) \subset \mathfrak{D}_+$, то T_1 не является самосопряженным. Аналогично если область значений $\mathfrak{R}(A) \subset \mathfrak{D}_-$, то существует такой ненулевой вектор z в $\mathfrak{D}_-$, что $(\mathfrak{R}(A), z)^* = 0$; как и раньше, отсюда следует, что $(x, z)^* = 0$ для всех $x \in \mathfrak{D}(T_1)$, а потому $z \in \mathfrak{D}(T_1^*)$, и оператор T_1 не является самосопряженным.

Для завершения доказательства утверждения (b) предположим, что A — изометрическое преобразование $\mathfrak{D}_+$ на все $\mathfrak{D}_-$, а T_1 — сужение оператора T^* на подпространство $\mathfrak{S} = \mathfrak{D}(\bar{T}) \oplus \Gamma(A)$. В силу (a) $\mathfrak{S}$ симметрично, и, следовательно, $T_1 \subseteq T_1^*$. Остается показать, что $\mathfrak{D}(T_1^*) \subseteq \mathfrak{D}(T_1)$. Предполагая, что это не так и применяя лемму 10(b) к замкнутому симметрическому оператору T_1, мы видим, что существует такой ненулевой вектор $z \in \mathfrak{D}(T_1^*)$, что либо $T_1^*z = iz$, либо $T_1^*z = -iz$. По лемме 10(a) $(\mathfrak{D}(T_1), z)^* = 0$. Так как $T_1^* \subseteq T^*$, то отсюда вытекает, что или $z \in \mathfrak{D}_+$, или $z \in \mathfrak{D}_-$. Если $z \in \mathfrak{D}_+$, то $z + Az \in \mathfrak{D}(T_1)$ и

$$0 = (z + Az, z)^* = (z, z)^* + (Az, z)^*.$$

Так как $Az \in \mathfrak{D}_-$, то это показывает, что $0 = (z, z)^* = 2(z, z)$, откуда $z = 0$. Аналогично если $z \in \mathfrak{D}_-$, то $A^{-1}(z) + z \in \mathfrak{D}(T_1)$, и, следовательно, $0 = (A^{-1}(z) + z, z) = (A^{-1}(z), z)^* + (z, z)^*$. Поскольку $A^{-1}(z) \in \mathfrak{D}_+$, мы снова приходим к выводу, что $z = 0$. Таким образом, оба случая приводят нас к противоречию.

13. Следствие. (a) *Симметрический оператор T имеет самосопряженные расширения тогда и только тогда, когда его индексы дефекта n_+ и n_- равны.*

(b) *Если $n_+ = n_- = 0$, то единственным самосопряженным расширением оператора T является его замыкание $\bar{T} = T^*$.*

Доказательство. Эти предложения вытекают из теоремы IV.4.16 и лемм 8 и 10.

Доказав теорему 12 и следствие 13, мы достигли нашей основной цели, и оставшаяся часть этого параграфа посвящена переформулировкам и дальнейшим расширениям полученных до сих пор результатов.

14. Определение. *Сопряженным подпространством* $\mathfrak{S}^*$ к подпространству $\mathfrak{S}$ гильбертова пространства $\mathfrak{D}(T^*)$ называется множество всех таких $x \in \mathfrak{D}(T^*)$, что $\{x, \mathfrak{S}\} = 0$. Подпространство $\mathfrak{S}$ в $\mathfrak{D}(T^*)$ называется *самосопряженным*, если $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}^*$.

15. Лемма. *Если $T \subseteq T_1 \subseteq T^*$, то T_1^* есть сужение T^* на пространство $\mathfrak{D}(T_1)^*$, т. е. $\mathfrak{D}(T_1^*) = \mathfrak{D}(T_1)^*$.*

Доказательство. Предположим, что $y \in \mathfrak{D}(T_1)^*$, тогда $\{x, y\} = 0$ для всех $x \in \mathfrak{D}(T_1)$, т. е. $-i\{(T^*x, y) - (x, T^*y)\} = 0$. Так как $\mathfrak{D}(T_1)$ плотно в $\mathfrak{H}$ и $T^*x = T_1x$, то $y \in \mathfrak{D}(T_1^*)$. С другой стороны, если $y \in \mathfrak{D}(T_1^*)$, то $(T_1x, y) = (x, T_1^*y)$ для всех $x \in \mathfrak{D}(T_1)$. По лемме 1 (a) $T_1^* \subseteq T^*$. Следовательно, $(T^*x, y) = (x, T^*y)$, так что $\{x, y\} = 0$. Таким образом, $y \in \mathfrak{D}(T_1)^*$, ч. т. д.

16. Лемма. (a) *Подпространство $\mathfrak{S}$ в $\mathfrak{D}(T^*)$ симметрично тогда и только тогда, когда $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{S}^*$.*

(b) *Сужение оператора T^* на подпространство $\mathfrak{S} \supseteq \mathfrak{D}(T)$ в $\mathfrak{D}(T^*)$ есть самосопряженное расширение оператора T тогда и только тогда, когда самосопряжено $\mathfrak{S}$.*

(c) *Если $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{D}(T^*)$ имеет вид $\mathfrak{S} = \mathfrak{D}(\overline{T}) \oplus \mathfrak{S}^1$, где $\mathfrak{S}^1 \subseteq \mathfrak{D}_+ \oplus \mathfrak{D}_-$, то $\mathfrak{S}^* = (\mathfrak{S}^1)^*$.*

Доказательство. Утверждение (a) вытекает непосредственно из определений 14 и 4. Утверждение (b) вытекает из определения 14 и леммы 15. По лемме 8 (c) $\{x, y\} = 0$ для $x \in \mathfrak{D}(T^*)$ и $y \in \mathfrak{D}(\overline{T})$. Поэтому $\{x, \mathfrak{D}(\overline{T}) \oplus \mathfrak{S}^1\} = 0$ тогда и только тогда, когда $\{x, \mathfrak{S}^1\} = 0$, чем доказано (c).

В следующей теореме описан довольно часто встречающийся случай, когда симметрический оператор T имеет равные индексы дефекта и тем самым допускает самосопряженные расширения.

17. Определение. Отображение U гильбертова пространства $\mathfrak{H}$ в себя, удовлетворяющее соотношениям $U(x+y) = Ux + Uy$, $U(\alpha x) = \overline{\alpha} Ux$, $(Ux, Uy) = (y, x)$, $x, y \in \mathfrak{H}$ и $U^2 = I$, называется *инволюцией*.

18. Теорема. *Пусть T — симметрический оператор с плотной областью определения, коммутирующий с инволюцией U, тогда T имеет равные индексы дефекта.*

Доказательство. Так как $UT = TU$, то $U\mathfrak{D}(T) \subseteq \mathfrak{D}(T)$. Поскольку $U^2 = I$, имеем $\mathfrak{D}(T) \subseteq U\mathfrak{D}(T)$ и тем самым $\mathfrak{D}(T) = U\mathfrak{D}(T)$. По лемме 1.6(d) $\mathfrak{D}_+ = \{(T+iI)\mathfrak{D}(T)\}^\perp$ и $\mathfrak{D}_- = \{(T-iI)\mathfrak{D}(T)\}^\perp$. Если $x \in \mathfrak{D}_+$, то

$$0 = ((T+iI)\mathfrak{D}(T),\ x) = (Ux,\ U(T+iI)\mathfrak{D}(T)) =$$
$$= (Ux,\ (T-iI)U\mathfrak{D}(T)) = (Ux,\ (T-iI)\mathfrak{D}(T)).$$

Таким образом, $Ux \in \mathfrak{D}_-$ и $U\mathfrak{D}_+ \subseteq \mathfrak{D}_-$. Аналогично $U\mathfrak{D}_- \subseteq \mathfrak{D}_+$. Используя соотношение $U^2 = I$, получаем, что $\mathfrak{D}_+ \subseteq U\mathfrak{D}_-$ и $\mathfrak{D}_- \subseteq \subseteq U\mathfrak{D}_+$. Таким образом, $U\mathfrak{D}_- = \mathfrak{D}_+$, $U\mathfrak{D}_+ = \mathfrak{D}_-$. Из свойств инволюции U вытекает, что U отображает всякий ортонормированный базис в $\mathfrak{D}_+$ на ортонормированный базис в $\mathfrak{D}_-$. Следовательно, $\mathfrak{D}_+$ и $\mathfrak{D}_-$ имеют одну и ту же размерность, ч. т. д.

В качестве примера применения теоремы 18 рассмотрим гильбертово пространство $L_2(0, \infty)$ и оператор T в нем, задаваемый следующим образом:

(a) область определения $\mathfrak{D}(T)$ есть множество всех функций, имеющих по крайней мере две непрерывные производные и обращающихся в нуль вне компактного подинтервала в $(0, \infty)$;

(b) для $f \in \mathfrak{D}(T)$ полагаем $Tf = f'' + qf$, где q — фиксированная вещественная непрерывная функция, определенная на $(0, \infty)$.

Ясно, что T — неограниченный симметрический линейный оператор в $L_2(0, \infty)$. Если для всех $f \in L_2(0, \infty)$ мы положим $(Uf)(t) = \overline{f(t)}$, где $\overline{f(t)}$ — комплексно сопряженная функция, то получим, что U — инволюция и $UT = TU$. Таким образом, T имеет равные индексы дефекта и, следовательно, обладает самосопряженными расширениями.

Следующий результат показывает, что число

$$n_+ = \dim\{x \mid T^*x = ix\}$$

на самом деле связано не с комплексным числом i, а с верхней полуплоскостью, и в то же время приводит нас к утверждению, которое будет существенно использоваться в теории дифференциальных уравнений, развиваемой в следующей главе.

19. Теорема. *Пусть T — симметрический оператор; определим для каждого комплексного числа λ подпространство $\mathfrak{M}_\lambda = \{x \mid T^*x = \lambda x\}$. Если $\operatorname{Im}(\lambda) > 0$, то размерность $\mathfrak{M}_\lambda$ равна положительному индексу дефекта n_+ оператора T. Более того, если n_+ конечно, то существует семейство $\{\varphi_i(\lambda)\}$, $i = 1, \ldots, n_+$, векторнозначных функций, определенных и аналитических при $\operatorname{Im}\lambda > 0$, таких, что для каждого λ векторы $\varphi_i(\lambda)$, $i = 1, \ldots, n_+$,*

образуют базис в $\mathfrak{M}_\lambda$. *Точно такие же результаты имеют место и для* λ *в нижней полуплоскости.*

Доказательство. Пусть T_1 — сужение оператора T^* на многообразие $\mathfrak{D}(T_1)=\mathfrak{D}_-\oplus\mathfrak{D}(\overline{T})$. Если $\lambda=\mu+i\nu$, где $\nu>0$, и $x\in\mathfrak{D}(T_1)$, то

$$
\begin{aligned}
|(T_1-\lambda I)x|^2 &= |(T_1-\mu I)x|^2+\nu^2|x|^2- \\
&\quad -((T_1-\mu I)x,\ i\nu x)-(i\nu x,\ (T_1-\mu I)x)\geqslant \\
&\quad \geqslant \nu^2|x|^2+i\nu[(T_1x,\ x)-(x,\ T_1x)]=\nu^2|x|^2-\nu\{x,\ x\}.
\end{aligned}
$$

Записав x в виде $x=d+d_-$, где $d\in\mathfrak{D}(\overline{T})$, $d_-\in\mathfrak{D}_-$, непосредственными вычислениями приходим к соотношениям $\{x,\ x\}=\{d_-,\ d_-\}=-2|d_-|^2$. Таким образом, $|(T_1-\lambda I)x|^2\geqslant\nu^2|x|^2$, и потому оператор $(T_1-\lambda I)^{-1}$ ограничен и его норма не превосходит $\nu^{-1}=|\operatorname{Im}\lambda|^{-1}$. По лемме 5 (c) T_1 замкнут. Если $x_n\to x$ и $(T_1-\lambda I)x_n\to y$, то $T_1x_n\to y+\lambda x$, так что $x\in\mathfrak{D}(T_1)$ и $T_1x=y+\lambda x$, $(T_1-\lambda I)x=y$. Тем самым оператор $(T_1-\lambda I)$ замкнут, и, следовательно, по лемме 1.2 замкнут и $(T_1-\lambda I)^{-1}$. Из ограниченности $(T_1-\lambda I)^{-1}$ и леммы 1.2 вытекает замкнутость области определения $\mathfrak{D}((T_1-\lambda I)^{-1})$.

Мы хотим показать, что $\mathfrak{D}((T_1-\lambda I)^{-1})$ есть все гильбертово пространство. Предположим, что это верно для некоторого λ_0. Тогда $(T_1-\lambda_0 I)^{-1}=R(\lambda_0)$ — всюду определенный ограниченный оператор с нормой, не превосходящей $|\operatorname{Im}\lambda_0|^{-1}$. Следовательно, ряд

$$[*]\qquad \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^n R(\lambda_0)^{n+1}$$

сходится, если $|\lambda-\lambda_0|<|\operatorname{Im}\lambda_0|$. Так как T_1 замкнут, то для всех y мы имеем

$$
\begin{aligned}
(T_1-\lambda I)\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^n R(\lambda_0)^{n+1}y &= \\
=\{T_1-\lambda_0 I-(\lambda-\lambda_0)I\}\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^n R(\lambda_0)^{n+1}y &= y.
\end{aligned}
$$

Таким образом, $(T_1-\lambda I)\mathfrak{D}(T_1)=\mathfrak{H}$ для $|\lambda-\lambda_0|<|\operatorname{Im}\lambda_0|$. Очевидно, отсюда следует, что если $\mathfrak{D}((T_1-\lambda I)^{-1})=\mathfrak{H}$ для одного значения λ_0, то это верно и для всех λ в верхней полуплоскости. Мы покажем, что $\mathfrak{D}((T_1-iI)^{-1})=\mathfrak{H}$, доказав тем самым, что $\mathfrak{D}((T_1-\lambda I)^{-1})=\mathfrak{H}$ для всех λ в верхней полуплоскости.

Так как пространство $\mathfrak{D}((T_1-iI)^{-1})$ замкнуто, то достаточно проверить, что его ортогональное дополнение состоит лишь из нулевого вектора, или в силу леммы 1.6 (d) проверить, что из соотношения $(T_1^*+iI)x=0$ вытекает $x=0$. Но $T_1 \supseteq T$, так что по лемме 1(а) $T_1^* \subseteq T^*$. Таким образом, если $T_1^*x=-ix$, то $x \in \mathfrak{D}_- \subseteq \mathfrak{D}(T_1)$. Следовательно,

$$0=(x, (T_1^*+iI)x)=((T_1-iI)x, x)=((T^*-iI)x, x)=-2i|x|^2;$$

этим показано, что $x=0$.

Для удобства обозначим через $A(\lambda)$ всюду определенный ограниченный оператор $(T_1-\lambda I)^{-1}$, $\mathrm{Im}>0$. Тогда $(T_1-\lambda I)A(\lambda)= =(T^*-\lambda I)A(\lambda)=I$. Полагая $K(\alpha, \beta)=(T_1-\alpha I)A(\beta)$, $\mathrm{Im}\,\alpha, \mathrm{Im}\,\beta>0$, имеем $K(\alpha, \alpha)=I$ и $K(\alpha, \beta)K(\beta, \gamma)=K(\alpha, \gamma)$. Таким образом, $K(\alpha, \beta)$ — всюду определенный ограниченный оператор в $\mathfrak{H}$ с ограниченным обратным. Кроме того, $K(\alpha, \beta)=(T_1-\beta I)A(\beta)+ +(\beta-\alpha)A(\beta)=I+(\beta+\alpha)A(\beta)$. Отсюда вытекает, что

$$(T^*-\lambda I)K(i, \lambda)u=(T^*-\lambda I)u+(\lambda-i)(T^*-\lambda I)A(\lambda)u=(T^*-iI)u$$

для всех $u \in \mathfrak{D}(T^*)$, и, таким образом, из соотношения $(T^*-iI)u=0$ вытекает, что $(T^*-\lambda I)K(i, \lambda)u=0$. Следовательно, $K(i; \lambda)$ определяет взаимно однозначное отображение $\mathfrak{M}_i$ в $\mathfrak{M}_\lambda$. По аналогичным соображениям обратный $K(\lambda, i)$ к $K(i, \lambda)$ определяет взаимно однозначное отображение $\mathfrak{M}_\lambda$ в $\mathfrak{M}_i$. Таким образом, $K(i, \lambda)$ определяет непрерывное взаимно однозначное отображение $\mathfrak{M}_i$ на $\mathfrak{M}_\lambda$ с ограниченным обратным, и потому ясно, что $\mathfrak{M}_i$ и $\mathfrak{M}_\lambda$ имеют одну и ту же размерность.

Из [*] видно, что $K(i, \lambda)=I+(\lambda-i)A(\lambda)$ — аналитическая функция по λ. Если $\mathfrak{M}_i$ конечномерно и $\{\varphi_j\}$, $j=1, \ldots, n_+$, — какой-либо базис в $\mathfrak{M}_i$, то $\varphi_j(\lambda)=K(i, \lambda)\varphi_j$, $j=1, \ldots, n_+$, определяют базис в $\mathfrak{M}_\lambda$, ч. т. д.

Обратимся, наконец, к подробному анализу наиболее часто встречающегося случая, когда оба индекса дефекта n_+ и n_- оператора T конечны.

Мы придадим нашим рассуждениям вид, удобный для приложений к теории дифференциальных операторов. Так будут введены абстрактные понятия граничных значений, граничных условий и т. д. В следующей главе, когда мы перейдем к изучению дифференциальных операторов, эти абстрактные понятия получат конкретную реализацию.

20. Определение. *Граничное значение* для оператора T есть непрерывный линейный функционал на гильбертовом пространстве $\mathfrak{D}(T^*)$, обращающийся в нуль на $\mathfrak{D}(T)$.

21. Лемма. *Пусть T — симметрический оператор с конечными индексами дефекта n_+ и n_-. Пространство граничных значений для T есть гильбертово пространство размерности $p=n_++n_-$. Множество $A_1, \ldots, A_k$ граничных значений линейно независимо*

тогда и только тогда, когда в $\mathfrak{D}(T^*)$ *существуют элементы* $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$, *такие, что* $\det(A_i(\varphi_j)) \neq 0$, *или тогда и только тогда, когда для любого множества комплексных чисел* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ *в* $\mathfrak{D}_+ \oplus \mathfrak{D}_-$ *существует такой вектор* x, *что* $A_i(x) = \alpha_i$, $i = 1, \ldots, k$, *или тогда и только тогда, когда матрица* $(A_i(\psi_j))$ *имеет ранг* k, *где* $\psi_1, \ldots, \psi_p$ — *любой базис в* $\mathfrak{D}_+ \oplus \mathfrak{D}_-$.

Доказательство. Все эти утверждения вытекают из леммы 10, леммы 8(a) и элементарных фактов о конечномерных векторных пространствах.

22. Определение. Пусть T — симметрический оператор с конечными индексами дефекта n_+ и n_-. Множество $n_+ + n_-$ линейно независимых граничных значений для T называется *полным множеством граничных значений оператора* T.

23. Лемма. *Пусть* T — *симметрический оператор с конечными индексами дефекта* n_+ *и* n_- *и* $A_1, \ldots, A_p$ — *любое полное множество граничных значений для* T. *Тогда билинейная форма* $\{x, y\}$ *может быть единственным образом представлена в виде*

$$[*] \qquad \{x, y\} = \sum_{i, j=1}^{p} \alpha_{ij} A_i(x) \overline{A_j(y)}, \quad x, y \in \mathfrak{D}(T^*),$$

причем коэффициенты α_{ij} *удовлетворяют соотношениям* $\bar{\alpha}_{ji} = \alpha_{ij}$.

Доказательство. Используя лемму 21, выберем в $\mathfrak{D}_+ \oplus \mathfrak{D}_-$ элементы $\psi_1, \ldots, \psi_p$ так, что $A_i(\psi_j) = \delta_{ij}$, где $\delta_{ij} = 1$, если $i = j$, и $\delta_{ij} = 0$, если $i \neq j$. Отсюда вытекает, что ψ_i линейно независимы и, следовательно, образуют базис в $\mathfrak{D}_+ \oplus \mathfrak{D}_-$. Положим $\alpha_{ij} = \{\psi_i, \psi_j\}$; так как $\{x, y\} = \overline{\{y, x\}}$, то $\alpha_{ij} = \overline{\alpha_{ji}}$. Ясно, что равенство [*] выполнено, если за x и y взять какие-то из элементов $\psi_1, \ldots, \psi_p$. Таким образом, [*] выполнено для всех x и y из $\mathfrak{D}_+ \oplus \mathfrak{D}_-$ в силу билинейности обеих сторон равенства [*]. Но по определению 20 и по определению 2(b) обе стороны этого равенства обращаются в нуль, если или x или y лежит в $\mathfrak{D}(T)$. Нужное представление вытекает теперь из лемм 10 и 8(a), а его единственность очевидна.

24. Следствие. *Если* $A_1, \ldots, A_p$ — *полное множество граничных значений для* T *и* $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ — *множество элементов из* $\mathfrak{D}(T^*)$, *такое, что* $\det(A_i(\varphi_j)) \neq 0$, *то коэффициенты* α_{ij} *предыдущей леммы однозначно определяются системой уравнений*

$$\{\varphi_k, \varphi_l\} = \sum_{i, j=1}^{p} \alpha_{ij} A_i(\varphi_k) \overline{A_j(\varphi_l)}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant l \leqslant p.$$

Доказательство. Пусть (b_{ij}) — матрица, обратная к $(A_i(\varphi_j))$. Тогда элементарные вычисления, использующие формулу [*] и определение обратной матрицы, показывают, что

$$[**] \qquad a_{ij}=\sum_{k,\,l=1}^{p}\{\varphi_k,\ \varphi_l\}\,b_{ki}\bar{b}_{lj}.$$

25. Определение. Если B — граничное значение оператора T, то уравнение $B(x)=0$ называется *граничным условием*. Множество граничных условий $B_i(x)=0$, $i=1, \ldots, k$, называется *линейно независимым*, если граничные значения $B_1, \ldots, B_k$ линейно независимы. Говорят, что множество граничных условий $C_j(x)=0$, $j=1, \ldots, m$, *сильнее, чем* множество $B_i(x)=0$, $i=1, \ldots, k$, если все граничные значения B_i являются линейными комбинациями значений C_j. Если каждое из двух множеств граничных условий сильнее, чем другое, то говорят, что эти множества *эквивалентны*. Множество граничных условий $B_i(x)=0$, $i=1, \ldots, k$, называется *симметричным*, если из соотношений $B_i(x)=B_i(y)=0$, $i=1, \ldots, k$, вытекает равенство $\{x, y\}=0$.

26. Лемма. *Пусть T — оператор с конечными индексами дефекта. Всякое замкнутое симметрическое расширение оператора T есть сужение оператора T^* на подпространство в $\mathfrak{D}(T^*)$, определяемое симметрическим семейством граничных условий $B_i(x)=0$, $i=1, \ldots, k$. Обратно, каждое такое сужение T_1 оператора T^* есть замкнутое симметрическое расширение оператора T.*

Доказательство. Сначала докажем второе утверждение. Так как B_i — непрерывный линейный функционал на $\mathfrak{D}(T^*)$, обращающийся в нуль на $\mathfrak{D}(T)$, то в силу леммы 5(c) ясно, что T_1 — замкнутое расширение оператора T. Так как множество граничных условий симметрично, то из определения 2(b) вытекает, что $(T_1x, y)=(x, T_1y)$ для всех x и y из $\mathfrak{D}(T_1)$, и, следовательно, T_1 симметрично.

Для проверки первого утверждения предположим, что T_1 — замкнутое симметрическое расширение оператора T и $\mathfrak{B}$ — ортогональное дополнение $\mathfrak{D}(T_1)$ в гильбертовом пространстве $\mathfrak{D}(T^*)$. Тогда $\mathfrak{D}(T_1)$ — замкнутое подпространство в $\mathfrak{D}(T^*)$ и $\mathfrak{B}$ конечномерно (ср. леммы 5(c) и 10). Если $v_1, \ldots, v_k$ — базис в $\mathfrak{B}$, то для $x\in\mathfrak{D}(T^*)$ определим функции $B_i(x)=(x, v_i)^*$. Так как $B_i(x)=0$ для x из $\mathfrak{D}(T_1)\supseteq\mathfrak{D}(T)$, то ясно, что условие $B_i(x)=0$ является граничным. Более того, так как $\mathfrak{D}(T_1)$ — ортогональное дополнение своего ортогонального дополнения, то семейство $B_i(x)=0$, $i=1, \ldots, k$, граничных условий определяет подпространство $\mathfrak{D}(T_1)$ в $\mathfrak{D}(T^*)$. Из леммы 3′ вытекает, что $\mathfrak{D}(T_1)$ — симметрическое подпространство в $\mathfrak{D}(T^*)$, и, следовательно, множество граничных условий $B_i(x)=0$ симметрично, ч. т. д.

27. Определение. Пусть T — симметрический оператор с конечными индексами дефекта, $A_1, \ldots, A_p$ — полное множество граничных значений для T и $\{x, y\} = \sum_{i, j=1}^{p} \alpha_{ij} A_i(x) \overline{A_j(y)}$, как в лемме 23. Пусть

$$[*] \qquad B_j = \sum_{i=1}^{p} \beta_{ij} A_i, \qquad j = 1, \ldots, s,$$

— произвольное множество граничных значений для T и $\xi_i^{(m)}$, $m = 1, \ldots, t$, — базис множества решений линейной системы $\sum_{i=1}^{p} \beta_{ij} \xi_i = 0$, $j = 1, \ldots, s$. Тогда множество граничных условий

$$\sum_{i, j=1}^{p} \alpha_{ij} \overline{\xi_j^{(m)}} A_i(y) = 0, \qquad m = 1, \ldots, t,$$

называется *сопряженным множеством граничных условий* к условиям [*].

Замечание. Следует отметить, что сопряженных множеств граничных условий существует так же много, как и базисов решений уравнений $\sum_{i=1}^{p} \beta_{ij} \xi_i = 0$, $j = 1, \ldots, s$. Однако любая пара таких различных сопряженных множеств граничных условий, очевидно, эквивалентна.

28. Теорема. *Пусть T — симметрический оператор с конечными индексами дефекта и T_1 — сужение оператора T^* на подпространство в $\mathfrak{D}(T^*)$, определяемое конечным множеством граничных условий $B_j(x) = 0$, $j = 1, \ldots, s$. Тогда T_1^* есть сужение оператора T^* на подпространство в $\mathfrak{D}(T^*)$, определяемое сопряженным множеством граничных условий.*

Доказательство. Пусть $B_j = \sum_{i=1}^{p} \beta_{ij} A_i$, $j = 1, \ldots, s$, и T_2 — сужение оператора T^* на подпространство в $\mathfrak{D}(T^*)$, определяемое сопряженным множеством граничных условий $B_j(x) = 0$, $j = 1, \ldots, s$. Если $x \in \mathfrak{D}(T_1)$, то x удовлетворяет уравнениям $B_j(x) = \sum_{i=1}^{p} \beta_{ij} A_i(x) = 0$, $j = 1, \ldots, s$, и, таким образом, $A_i(x)$ является линейной комбинацией элементов $\xi_i^{(1)}, \ldots, \xi_i^{(t)}$, $i = 1, \ldots, p$. Следовательно, если $x \in \mathfrak{D}(T_1)$ и $y \in \mathfrak{D}(T_2)$, то из леммы 23 мы заключаем, что $\{y, x\} = \sum_{i, j=1}^{p} \alpha_{ij} A_i(y) \overline{A_j(x)} = 0$. Поэтому

$$(T_2 y, x) - (y, T_1 x) = i\{y, x\} = 0,$$

так что $(T_1x, y) = (x, T_2y)$ для всех $x \in \mathfrak{D}(T_1)$ и $y \in \mathfrak{D}(T_2)$; тем самым показано, что $T_2 \subseteq T_1^*$.

Предположим, что существует элемент $y \in \mathfrak{D}(T^*) \subseteq \mathfrak{D}(T_1^*)$, но $y \notin \mathfrak{D}(T_2)$. Тогда по определению 27 существует такое решение $[\xi_1, \ldots, \xi_p]$ системы уравнений $\sum_{i=1}^{p} \beta_{ij}\xi_i = 0$, $j = 1, \ldots, s$, что $\sum_{i, j=1}^{p} \alpha_{ij}\bar{\xi}_j A_i(y) \neq 0$. По лемме 21 существуют в $\mathfrak{D}(T^*)$ такие элементы y_j, что $A_i(y_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, p$. Полагая $x_0 = \sum_{k=1}^{p} \xi_k y_k$, мы имеем $x_0 \in \mathfrak{D}(T^*)$ и $A_i(x_0) = \xi_i$, $i = 1, \ldots, p$. Следовательно, $B_j(x_0) = 0$, $j = 1, \ldots, s$, и тем самым $x_0 \in \mathfrak{D}(T_1)$. Однако

$$-i[(T^*y, x_0) - (y, T_1x_0)] = \{y, x_0\} = \sum_{i, j=1}^{p} \alpha_{ij} A_i(y)\bar{\xi}_j \neq 0,$$

что невозможно.

29. Лемма. *Пусть T — симметрический оператор с конечными индексами дефекта, сумма которых равна p, $A_1, \ldots, A_p$ — полное множество граничных значений для T, а $\sum_{i, j=1}^{p} \alpha_{ij}A_i\bar{A}_j$ — билинейная форма леммы 23. Множество граничных условий $\sum_{i=1}^{p} \beta_{ij}A_i(x) = 0$, $j = 1, \ldots, s$, симметрично тогда и только тогда, когда из соотношений $\sum_{i=1}^{p} \beta_{ij}\xi_i = 0$ и $\sum_{i=1}^{p} \beta_{ij}\eta_i = 0$, $j = 1, \ldots, s$, вытекает, что $\sum_{i, j=1}^{p} \alpha_{ij}\xi_i\bar{\eta}_j = 0$.*

Доказательство. При сделанных предположениях ясно, что если для векторов x и y справедливы уравнения $\sum_{i=1}^{p} \beta_{ij}A_i(x) = 0$ и $\sum_{i=1}^{p} \beta_{ij}A_i(y) = 0$, $j = 1, \ldots, s$, и из них следует соотношение $\{x, y\} = 0$, то множество граничных условий симметрично. Обратно, предположим, что существует пара векторов $[\xi_1, \ldots, \xi_p]$ и $[\eta_1, \ldots, \eta_p]$, такая, что $\sum_{i=1}^{p} \beta_{ij}\xi_i = \sum_{i=1}^{p} \beta_{ij}\eta_i = 0$, $j = 1, \ldots, s$, в то время как $\sum_{i, j=1}^{p} \beta_{ij}\xi_i\bar{\eta}_j \neq 0$. По лемме 21 в $\mathfrak{D}(T^*)$ существуют такие элементы u и v, что $A_i(u) = \xi_i$, $A_i(v) = \eta_i$, $i = 1, \ldots, p$. Таким образом, оба вектора u и v удовлетворяют граничным условиям $\sum_{i=1}^{p} \beta_{ij} A_j(x) = 0$, $j = 1, \ldots, s$, в то время как $\{u, v\} \neq 0$. Следовательно, множество граничных условий не симметрично.

30. Теорема. *Пусть T — симметрический оператор с равными конечными индексами дефекта $n = n_+ = n_-$. Тогда сужение T^* на подпространство в $\mathfrak{D}(T^*)$, определяемое любым симметрическим семейством n линейно независимых граничных условий, является самосопряженным расширением оператора T. Более того, всякое самосопряженное расширение оператора T имеет такой вид.*

Доказательство. Пусть $B_i(x) = 0$, $i = 1, \ldots, n$, — симметрическое семейство линейно независимых граничных условий и T_1 — сужение оператора T^* на подпространство в $\mathfrak{D}(T^*)$, ими определяемое. Тогда по лемме 10 $\mathfrak{D}(T_1) = \mathfrak{D}(\overline{T}) \oplus \mathfrak{B}$, где $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{D}_+ \oplus \mathfrak{D}_-$. Так как граничные значения B_i обращаются в нуль на $\mathfrak{D}(\overline{T})$, то $\mathfrak{B}$ n-мерно. По лемме 26 оператор T_1 симметричен, и потому по лемме 3′ пространство $\mathfrak{D}(T_1)$ симметрично. Следовательно, в силу теоремы 12 (a) $\mathfrak{B}$ есть график изометрического отображения U подпространства $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{D}_+$ на подпространство $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{D}_-$. Так как $n = \dim(\mathfrak{B}) \leqslant \dim(\mathfrak{M}) \leqslant n$, то $\mathfrak{M}$ n-мерно и, следовательно, $\mathfrak{M} = \mathfrak{D}_+$. Так как U взаимно однозначно, то $\mathfrak{N}$ также n-мерно и, следовательно, $\mathfrak{N} = \mathfrak{D}_-$. Таким образом, по теореме 12 (b) оператор T_1 самосопряжен.

Обратно, пусть T_1 — самосопряженное расширение оператора T. Тогда по лемме 26 T_1 есть сужение оператора T^* на подпространство $\mathfrak{W}$ в $\mathfrak{D}(T^*)$, определяемое симметрическим семейством линейно независимых граничных условий $B_i(x) = 0$, $i = 1, \ldots, k$, и мы должны лишь показать, что $k = n$. По лемме 11 $\mathfrak{W} = \mathfrak{D}(\overline{T}) \oplus \mathfrak{B}$, так что по теореме 12 (b) пространство $\mathfrak{B}$ n-мерно. Так как $\mathfrak{D}_+ \oplus \mathfrak{D}_-$ $2n$-мерно и $\mathfrak{B}$ есть множество элементов из $\mathfrak{D}_+ \oplus \mathfrak{D}_-$, удовлетворяющих k линейно независимым условиям, то $\mathfrak{B}$ является $(2n - k)$-мерным. Таким образом, $2n - k = n$ и $k = n$, ч. т. д.

Наконец, мы даем явное описание общих самосопряженных расширений оператора T.

31. Теорема. *Пусть T — симметрический оператор с равными конечными индексами дефекта $n_- = n_+ = n$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — ортонормированный базис в $\mathfrak{D}_+$ и $\psi_1, \ldots, \psi_n$ — ортонормированный базис в $\mathfrak{D}_-$. Пусть $B_i(x) = (x, \varphi_i)^*$ и $C_i(x) = (x, \psi_i)^*$ для $x \in \mathfrak{D}(T^*)$ и $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда всякое самосопряженное расширение T есть*

сужение T^* на подпространство $\mathfrak{D}(T^*)$, определяемое граничными условиями

$$B_i(x) - \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij} C_j(x) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

где (θ_{ij}) — произвольная матрица, удовлетворяющая равенствам $\sum_{j=1}^{n} \theta_{ij}\overline{\theta}_{kj} = \delta_{ik}$. Более того, всякое такое сужение оператора T^* есть самосопряженное расширение T.

Доказательство. Ясно, что B_i и C_i — граничные значения. Заметим теперь, что теорема может быть эквивалентно сформулирована следующим образом. Оператор является самосопряженным расширением T тогда и только тогда, когда он является сужением T^* на подпространство $\mathfrak{W}$, состоящее из всех таких $x \in \mathfrak{D}(T^*)$, что $(x, z)^* = (x, Uz)^*$, $z \in \mathfrak{D}_+$, где U — изометрическое отображение $\mathfrak{D}_+$ на $\mathfrak{D}_-$. Для доказательства рассмотрим сужение T^* на такое подпространство $\mathfrak{W}$. Записав x в виде $x = d + d_+ + d_-$, $d \in \mathfrak{D}(\overline{T})$, $d_+ \in \mathfrak{D}_+$, $d_- \in \mathfrak{D}_-$, видим, что $x \in \mathfrak{W}$ тогда и только тогда, когда $(d_+, z)^* = (d_-, Uz)^*$ для всех $z \in \mathfrak{D}_+$, т. е. тогда и только тогда, когда $d_- = Ud_+$. Таким образом, $\mathfrak{W}$ есть прямая сумма $\mathfrak{D}(\overline{T})$ и графика изометрического отображения $\mathfrak{D}_+$ на $\mathfrak{D}_-$, и, следовательно, сужение оператора T^* на $\mathfrak{W}$ есть самосопряженное расширение оператора T. Обратно, если $\mathfrak{W}$ — область определения самосопряженного расширения T, то по теореме 12 (b) $\mathfrak{W} = \mathfrak{D}(\overline{T}) \oplus \oplus \Gamma(U)$, где U — изометрическое отображение $\mathfrak{D}_+$ на $\mathfrak{D}_-$. Элементарные вычисления показывают, что $\mathfrak{W}$ состоит из множества тех $x \in \mathfrak{D}(T^*)$, для которых $(x, z)^* = (x, Uz)^*$ при всех $z \in \mathfrak{D}_+$, ч. т. д.

5. Полуограниченные симметрические операторы

В этом параграфе мы изучаем самосопряженные расширения тех операторов в классе симметрических операторов, которые часто встречаются в граничных задачах математической физики.

1. Определение. Симметрический оператор T называется *ограниченным сверху* (*ограниченным снизу*), если существует такое вещественное число c, что $(Tx, x) \leqslant c(x, x)$ $((Tx, x) \geqslant c(x, x))$ для всех $x \in \mathfrak{D}(T)$. Если T ограничен сверху или снизу, то говорят, что T *полуограничен*. Число c называется *гранью* для T, а наименьшее (наибольшее) из таких c называется *верхней* (*нижней*) *гранью* оператора T. Если $(Tx, x) \geqslant 0$ для всех $x \in \mathfrak{D}(T)$, то T называется *неотрицательным*.

Этот параграф посвящен доказательству следующей теоремы фон Неймана и Фридрихса.

2. Теорема. *Всякий полуограниченный симметрический оператор с плотной областью определения имеет полуограниченное самосопряженное расширение с той же гранью.*

Доказательство. Если T полуограничен, то для некоторой постоянной α или $T+\alpha I$ или $-T+\alpha I$ ограничен снизу единицей. В силу леммы 1.6 ясно, что без ограничения общности можно считать выполненным $(Tx, x) \geqslant (x, x)$ для всех $x \in \mathfrak{D}(T)$.

Для $x, y \in \mathfrak{D}(T)$ положим $(x, y)^+ = (Tx, y)$. Тогда $(x, x)^+ \geqslant \geqslant (x, x) \geqslant 0$, и $\mathfrak{D}(T)$ — линейное пространство с эрмитовым билинейным скалярным произведением $(x, y)^+$, удовлетворяющим условиям (I) — (V) определения IV.2.26 скалярного произведения в абстрактном гильбертовом пространстве. Так как доказательство неравенства Шварца (теорема IV.4.1) не требует аксиомы полноты IV.2.26 (VI), то ясно, что $|(x, y)^+| \leqslant |x|^+ |y|^+$ для $x, y \in \mathfrak{D}(T)$. Таким образом, $\mathfrak{D}(T)$ с нормой $|x|^+ = ((x, x)^+)^{1/2}$ становится нормированным линейным пространством, вообще говоря, не полным.

Определим теперь $\mathfrak{D}_0$ как подпространство элементов x в $\mathfrak{H}$, обладающих следующим свойством: существует последовательность $\{x_n\} \subseteq \mathfrak{D}(T)$, такая, что $x_n \to x$ в $\mathfrak{H}$ и $\lim\limits_{m, n \to \infty} |x_m - x_n|^+ = 0$. Мы покажем, что эрмитова билинейная форма $(x, y)^+$ может быть распространена с $\mathfrak{D}(T)$ на $\mathfrak{D}_0$, при этом $\mathfrak{D}_0$ станет гильбертовым пространством (т. е. полным) со скалярным произведением $(x, y)^+$. Затем будет показано, что сужение T_1 оператора T^* на $\mathfrak{D}_0 \cap \mathfrak{D}(T^*)$ есть самосопряженное расширение T с той же гранью. Если $\lim\limits_{m, n \to \infty} |x_m - x_n|^+ = 0$ и $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, то существует $\lim\limits_{m \to \infty} |x_m|^+$, так как $||x_m|^+ - |x_n|^+| \leqslant |x_m - x_n|^+$. Если $\{y_m\} \subseteq \mathfrak{D}(T)$, $\lim\limits_{m \to \infty} y_m = x_0$ и $\lim\limits_{m, n \to \infty} |y_m - y_n|^+ = 0$, то, полагая $z_n = x_n - y_n$, мы имеем $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = 0$ и $\lim\limits_{m, n \to \infty} |z_m - z_n|^+ = 0$. Следовательно, существует такое число M, что $|z_m|^+ \leqslant M$, $m = 1, 2, \ldots$. Более того, для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что $|z_m - z_n|^+ < \varepsilon$ для $m, n > N$. Таким образом,

$$(|z_n|^+)^2 \leqslant |(z_n, z_m)^+| + |(z_n, z_n - z_m)^+| \leqslant |(z_n, z_m)^+| + M\varepsilon.$$

Так как $|(z_n, z_m)^+| = |(z_n, Tz_m)| \leqslant |z_n| |Tz_m|$, то $\lim\limits_{n \to \infty} (z_n, z_m)^+ = 0$, $m = 1, 2, \ldots$. Следовательно, $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} (|z_n|^+)^2 \leqslant M\varepsilon$ и $\lim\limits_{n \to \infty} |z_n|^+ = 0$. Так как $||x_n|^+ - |y_n|^+| \leqslant |x_n - y_n|^+ = |z_n|^+$, то ясно, что $\lim |y_n|^+ = = \lim |x_n|^+$. Отсюда вытекает, что существует корректно определенное распространение нормы $|y|^+$ с $\mathfrak{D}(T)$ на $\mathfrak{D}_0$, получаемое из соотношения $|x|^+ = \lim_{n\to\infty} |x_n|^+$ для любой последовательности $\{x_n\}$, если $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ и $\lim_{m,\, n\to\infty} |x_m - x_n|^+ = 0$.

Далее будет показано, что из условий $x_n \to x$, $x_n \in \mathfrak{D}(T)$ и $\lim_{m,\, n} |x_n - x_m|^+ = 0$ вытекает $\lim_{n\to\infty} |x_n - x|^+ = 0$. Заметим сначала, что из предыдущего абзаца следует, что $\lim_{m\to\infty} |x_m - x_n|^+ = |x - x_n|^+$ и $\lim_{m\to\infty} |x_m + x_n|^+ = |x + x_n|^+$ для всех n. Вместе с тем тождество

$$(|x_m - x_n|^+)^2 + (|x_m + x_n|^+)^2 = 2\,[(|x_m|^+)^2 + (|x_n|^+)^2]$$

показывает, что $\lim_{m,\, n\to\infty} |x_m + x_n|^+ = 2\,|x|^+$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} |x + x_n|^+ = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} |x_m + x_n|^+ = 2\,|x|^+.$$

Однако, полагая в предыдущем тождестве $m \to \infty$, мы видим, что

$$(|x - x_n|^+)^2 + (|x + x_n|^+)^2 = 2\,[(|x|^+)^2 + (|x_n|^+)^2].$$

Отсюда следует, что $\lim_{n\to\infty} |x - x_n|^+ = 0$. Из этого факта обычными рассуждениями, использующими предельный переход, получаются соотношения $|x| \leqslant |x|^+$, $|x + y|^+ \leqslant |x|^+ + |y|^+$ и $|\alpha x|^+ = |\alpha|\,|x|^+$ для всех x, $y \in \mathfrak{D}_0$ и любого числа α. Таким образом, $\mathfrak{D}_0$ — нормированное линейное пространство с нормой $|x|^+$, и $\mathfrak{D}(T)$ плотно в $\mathfrak{D}_0$.

Более того, так как $|(x, y)^+| \leqslant |x|^+ |y|^+$ на плотном подмножестве $\mathfrak{D}(T) \times \mathfrak{D}(T)$ в $\mathfrak{D}_0 \times \mathfrak{D}_0$, то форма $(x, y)^+$ может быть продолжена по непрерывности (ср. I.6.17) до билинейной эрмитовой формы, определенной на $\mathfrak{D}_0$.

Можно показать, что $\mathfrak{D}_0$ полно, т. е. $\mathfrak{D}_0$ — гильбертово пространство со скалярным произведением $(x, y)^+$. Действительно, если $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность в $\mathfrak{D}_0$, то можно найти последовательность $\{y_n\}$ в плотном подмножестве $\mathfrak{D}(T) \subseteq \mathfrak{D}_0$, такую, что $|x_n - y_n|^+ \leqslant 1/n$. Тогда $\lim_{m,\, n\to\infty} |y_m - y_n|^+ = 0$ и, следовательно, $\lim_{m,\, n\to\infty} |y_m - y_n| = 0$. Если x — такой элемент в $\mathfrak{H}$, что $|y_n - x| \to 0$, то по определению x есть элемент из $\mathfrak{D}_0$. Однако было показано, что при этих условиях $\lim_{n\to\infty} |y_n - x|^+ = 0$. Следовательно, $\lim_{n\to\infty} |x_n - x|^+ = 0$ и $\mathfrak{D}_0$ полно.

Определим теперь расширение T_1 оператора T, полагая $\mathfrak{D}(T_1) = \mathfrak{D}_0 \cap \mathfrak{D}(T^*)$, $T_1 x = T^* x$ для $x \in \mathfrak{D}(T_1)$. Ясно, что $T \subseteq T_1 \subseteq T^*$ и T_1 — линейный оператор с плотной областью определения. Так как

$$(x, y)^+ = (x, Ty), \qquad x, y \in \mathfrak{D}(T),$$

то из непрерывности вытекает, что такое же равенство выполнено для $x \in \mathfrak{D}(T_1)$ и $y \in \mathfrak{D}(T)$. Однако, так как $(x, y)^+ = (T^*x, y)$ для $x \in \mathfrak{D}(T_1)$ и $y \in \mathfrak{D}(T)$, то из непрерывности следует, что

$$(x, y)^+ = (T^*x, y) = (T_1x, y), \qquad x, y \in \mathfrak{D}(T_1).$$

Из равенства $(x, y)^+ = \overline{(y, x)^+}$, $x, y \in \mathfrak{D}_0$, видно, что T_1 — симметрический оператор. Соотношение $(T_1x, x) = (x, x)^+ \geqslant (x, x)$ показывает, что T_1 имеет ту же нижнюю грань, что и T. Для проверки самосопряженности T_1 необходимо убедиться в том, что $T_1\mathfrak{D}(T_1)$ есть все гильбертово пространство $\mathfrak{H}$. Если x — произвольный элемент из $\mathfrak{H}$, то функция $(\cdot, x)$ непрерывна на гильбертовом пространстве $\mathfrak{D}_0$; действительно, если $|y_n|^+ \to 0$, то $|y_n| \to 0$ и, таким образом, $\lim\limits_n (y_n, x) = 0$. Из теоремы IV.4.5 вытекает существование такого вектора $z \in \mathfrak{D}_0$, что $(y, x) = (y, z)^+$ для $y \in \mathfrak{D}_0$. Так как $(y, z)^+ = (Ty, z)$ для $y \in \mathfrak{D}(T)$, то $z \in \mathfrak{D}(T^*)$ и $T^*z = x$. Следовательно, $z \in \mathfrak{D}_0 \cap \mathfrak{D}(T^*) = \mathfrak{D}(T_1)$ и $T_1z = x$. Таким образом, $T_1\mathfrak{D}(T_1) = \mathfrak{H}$. Из леммы 1.6(d) следует, что T_1^* взаимно однозначен. С другой стороны, так как T_1 симметричен, то $T_1 \subseteq T_1^*$. Таким образом, и T_1 и T_1^* имеют областью значений $\mathfrak{H}$, а так как T_1^* взаимно однозначен, то $\mathfrak{D}(T_1) = \mathfrak{D}(T_1^*)$. Этим показано, что $T_1 = T_1^*$, т. е. T_1 — самосопряженное расширение T, ч. т. д.

3. Следствие. *Пусть T — полуограниченный симметрический оператор и $\mathfrak{D}_0$ — множество векторов $x \in \mathfrak{H}$, для которых существует такая последовательность $\{x_n\} \subseteq \mathfrak{D}(T)$, что $x_n \to x$ и $(T(x_m - x_n), (x_m - x_n)) \to 0$. Тогда сужение T^* на $\mathfrak{D}_0 \cap \mathfrak{D}(T^*)$ есть самосопряженное расширение оператора T с той же гранью.*

6. Унитарные полугруппы

В первом параграфе гл. VIII была построена теория сильно непрерывных полугрупп ограниченных операторов (см. определение VIII.1.1). Цель настоящего параграфа — найти вид инфинитезимального оператора (определение VIII.1.6) в том случае, когда элементами полугруппы являются унитарные операторы в гильбертовом пространстве.

1. Теорема (*Стоун*). *Если $\{U(t), t \geqslant 0\}$ — сильно непрерывная полугруппа унитарных операторов в гильбертовом пространстве, то существует единственный (быть может неограниченный) самосопряженный оператор B, такой, что*

$$U(t) = e^{itB}, \qquad t \geqslant 0.$$

Доказательство. Пусть A — инфинитезимальный оператор полугруппы $\{U(t)\}$. В силу VIII.1.8 и VIII.1.11 A — замкнутый оператор с плотной областью определения, причем его резольвентное множество содержит всю правую полуплоскость $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Более того, мы имеем

$$[*] \qquad R(\lambda; A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} U(t)x\,dt, \qquad \operatorname{Re}\lambda > 0.$$

Положим $S(t) = U(t)^* = \{U(t)\}^{-1}$ для $t \geqslant 0$. Ясно, что $S(t_1)S(t_2) = S(t_1+t_2)$. Для $t_1 \geqslant t_2$ получаем $|S(t_1)x - S(t_2)x| = |x - U(t_1)S(t_2)x| = |x - U(t_1-t_2)x|$, и, следовательно, $|S(t_1)x - S(t_2)x| = |x - U(|t_1-t_2|)x|$ для всех $t_1, t_2 \geqslant 0$. Таким образом, $\{S(t)\}$ является также сильно непрерывной полугруппой. Ясно, что $S(t)^* = \{S(t)\}^{-1} = U(t)$ для $t \geqslant 0$. Если $x \in \mathfrak{D}(A)$, то

$$\lim_{t\to 0} \frac{S(t)x - x}{t} = \lim_{t\to 0} S(t)\left(\frac{x - U(t)x}{t}\right) = -Ax.$$

Таким образом, если A_1 — инфинитезимальный оператор полугруппы $\{S(t)\}$, то $A_1 \supseteq -A$. Точно так же получаем, что $-A \subseteq A_1$. Следовательно, $A_1 = -A$, и

$$[**] \qquad R(\lambda; -A)x - \int_0^\infty e^{-\lambda t} U(t)^* x\,dt, \qquad \operatorname{Re}\lambda > 0.$$

Положим теперь $B = -iA$. Используя равенства $R(\lambda; \alpha B) = (\lambda I - \alpha B)^{-1} = \alpha^{-1} R(\lambda\alpha^{-1}; B)$ и формулу [*], мы видим, что

$$R(-i\lambda; B)x = i\int_0^\infty e^{-\lambda t} U(t)x\,dt, \qquad \operatorname{Re}\lambda > 0,$$

и если $-i\lambda = \mu$, то

$$R(\mu; B)x = i\int_0^\infty e^{-i\mu t} U(t)x\,dt, \qquad \operatorname{Im}\mu < 0.$$

Точно так же из [**] получаем

$$R(\mu; B)x = -i\int_0^\infty e^{i\mu t} U(t)^* x\,dt, \qquad \operatorname{Im}\mu > 0.$$

Таким образом, если $\operatorname{Im}\mu > 0$, то

$$(R(\mu; B)x, y) = -i\int_0^\infty e^{i\mu t}(U(t)^* x, y)\,dt =$$

$$= -i\int_0^\infty e^{i\mu t}(x, U(t)y)\,dt = -i\int_0^\infty (x, e^{-i\bar{\mu} t} U(t)y)\,dt =$$

$$= \left(x, i\int_0^\infty e^{-i\bar{\mu} t} U(t)y\,dt\right) = (x, R(\bar{\mu}; B)y).$$

Следовательно, $R(\mu; B)^* = R(\bar{\mu}; B)$. Используя лемму 1.6(b) и 1.6(c), находим $\bar{\mu}I - B^* = \bar{\mu}I - B$, и тем самым $B^* = B$, т. е. B самосопряжен.

Если E — разложение единицы для оператора B и $V(t) = e^{itB}$, то по теореме 2.6

$$(V(t)x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda} (E(d\lambda)x, y).$$

Следовательно, для $\operatorname{Re}\mu > 0$ в силу теоремы Фубини и теоремы 2.6 (e) мы имеем

$$\int_0^\infty e^{-\mu t} (V(t)x, y)\,dt = \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\mu - i\lambda)t} (E(d\lambda)x, y)\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\mu - i\lambda} (E(d\lambda)x, y) = (R(\mu; iB)x, y).$$

Так как $R(\mu; iB) = R(\mu; A)$, то из [*] вытекает, что

$$\int_0^\infty e^{-\mu t} (V(t)x, y)\,dt = \int_0^\infty e^{-\mu t} (U(t)x, y)\,dt, \qquad \operatorname{Re}\mu > 0.$$

По лемме VIII.1.15 $e^{-\varepsilon t}(V(t)x, y) = e^{-\varepsilon t}(U(t)x, y)$ для $t \geqslant 0$ и произвольного $\varepsilon > 0$. Следовательно, $U(t) = V(t)$ для $t \geqslant 0$, и теорема доказана.

7. Каноническая факторизация

В этом параграфе будет доказано, что всякий замкнутый оператор T с плотной областью определения в гильбертовом пространстве имеет единственное разложение $T = PA$, где A — положительное (т. е. $(Ax, x) \geqslant 0$, $x \in \mathfrak{D}(A)$) самосопряженное преобразование, а P — частичная изометрия (см. определение 4 ниже). Этот результат можно рассматривать как обобщение того факта, что всякое комплексное число α имеет единственное представление $\alpha = re^{i\theta}$, где $r \geqslant 0$, а $|e^{i\theta}| = 1$. По аналогии с тем фактом, что $r = (\bar{\alpha}\alpha)^{1/2}$, мы прежде всего попытаемся получить самосопряженный оператор A из оператора T^*T.

1. Лемма. *Пусть T — замкнутый линейный оператор с плотной областью определения. Тогда*

(a) *$\mathfrak{D}(T^*)$ плотно и $T^{**} = T$;*

(b) *$(I + T^*T)^{-1}$ существует и является ограниченным самосопряженным преобразованием;*

(c) *T^*T самосопряжен и положителен;*

(d) *если T' — сужение оператора T на $\mathfrak{D}(T^*T)$, то $\overline{\Gamma(T')} = \Gamma(T)$.*

Доказательство. По лемме 1.5 $\Gamma(T^*) = [A_2\Gamma(T)]^\perp$, где A_2 — изометрический изоморфизм $[x, y] \to [y, -x]$ пространства $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$ на себя. Таким образом, если $x \in [\mathfrak{D}(T^*)]^\perp$, то

$$[x, 0] \in [\Gamma(T^*)]^\perp = [A_2\Gamma(T)]^{\perp\perp} = \overline{A_2\Gamma(T)} = A_2\Gamma(T).$$

Здесь мы воспользовались тем фактом, что T замкнут. Следовательно, $[0, -x] \in \Gamma(T)$, и, таким образом, $x = 0$. Этим показано, что $\mathfrak{D}(T^*)$ плотно в $\mathfrak{H}$. Для доказательства равенства $T^{**} = T$ покажем, что $\Gamma(T^{**}) = \Gamma(T)$. По лемме 1.5

$$\Gamma(T^{**}) = [A_2\Gamma(T^*)]^\perp = [A_2[A_2\Gamma(T)]^\perp]^\perp =$$
$$= [A_2^2\Gamma(T)]^{\perp\perp} = [-\Gamma(T)]^{\perp\perp} = \Gamma(T).$$

Этим закончено доказательство утверждения (a).

Так как T замкнут, то многообразие $\mathfrak{D}(T)$ со скалярным произведением $(x, y)_1 = (x, y) + (Tx, Ty)$ есть гильбертово пространство, которое мы будем обозначать через $\mathfrak{H}_1$. Кроме того, в $\mathfrak{H}_1$ функция (x, y) является эрмитовой билинейной формой. Неравенства $|(x, y)| \leqslant |x|\,|y| \leqslant |x|_1\,|y|_1$ показывают, что она непрерывна. Из леммы X.2.2 вытекает существование такого ограниченного самосопряженного оператора A в $\mathfrak{H}_1$, что $(x, y) = (Ax, y)_1$, $x, y \in \mathfrak{D}(T)$.

Мы можем также рассматривать A как отображение из всюду плотного подпространства $\mathfrak{D}(T)$ в $\mathfrak{H}$ в пространство $\mathfrak{H}_1$. В этом случае A все еще остается непрерывным, так как

$$|Ax|_1^2 = (Ax, Ax)_1 = (A^2x, x)_1 = (Ax, x), \quad x \in \mathfrak{D}(T),$$

и в силу приведенных выше неравенств

$$(Ax, x) \leqslant |Ax|\,|x| \leqslant |Ax|_1\,|x|,$$

и тем самым $|Ax|_1 \leqslant |x|$. По теореме I.6.17 A может быть единственным образом продолжен до непрерывного отображения B из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}_1$. Из соображений непрерывности следует, что $(Bx, y)_1 = (x, y)$ для $x \in \mathfrak{H}$, $y \in \mathfrak{D}(T)$ и что $|Bx| \leqslant |Bx|_1 \leqslant |x|$ для $x \in \mathfrak{H}$. Таким образом, рассматривая B как отображение из $\mathfrak{H}$ в плотное его подмножество, мы видим, что B является оператором в $\mathfrak{H}$ с нормой, не превосходящей единицы. Так как для x, y, принадлежащих плотному множеству $\mathfrak{D}(T)$, мы имеем

$$(Bx, y) = (Ax, y) = (A^2x, y)_1 = (Ax, Ay)_1 = (x, Ay) = (x, By),$$

то оператор B самосопряженный. Далее, для $x \in \mathfrak{H}$, $y \in \mathfrak{D}(T)$

$$(x, y) = (Bx, y)_1 = (Bx, y) + (TBx, Ty) =$$
$$= (Bx, y) + (T^*TBx, y) = ((I + T^*T)Bx, y).$$

Так как $\mathfrak{D}(T)$ всюду плотно, то $(I + T^*T)Bx = x$ для $x \in \mathfrak{H}$.

С другой стороны, если $x \in \mathfrak{D}(T^*T)$ и $y \in \mathfrak{H}$, то $By \in \mathfrak{D}(T)$ и

$$(B(I+T^*T)x, y) = ((I+T^*T)x, By) = \\ = (x, By) + (Tx, TBy) = (x, By)_1 = (Bx, y)_1 = (x, y).$$

Таким образом, $B(I+T^*T)x = x$ для $x \in \mathfrak{D}(T^*T) = \mathfrak{D}(I+T^*T)$. Этим закончено доказательство утверждения (b).

По лемме 1.6 $(I+T^*T)^* = (B^{-1})^* = (B^*)^{-1} = B^{-1} = I+T^*T$, так что оператор $I+T^*T$ самосопряженный. Но так как $(T^*T)^* = (I+T^*T)^* - I = T^*T$, то и T^*T самосопряжен. Соотношение

$$(T^*Tx, x) = (Tx, Tx) \geqslant 0, \qquad x \in \mathfrak{D}(T^*T),$$

показывает, что T^*T положителен, и тем самым (c) доказано.

Пусть теперь T' — сужение оператора T на $\mathfrak{D}(T^*T)$ и $\mathfrak{K}$ — ортогональное дополнение к $\Gamma(T')$ в замкнутом многообразии $\Gamma(T)$ в $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$. При этом $[x, Tx] \in \mathfrak{K}$ тогда и только тогда, когда $(x, y)_1 = ([x, Tx], [y, Ty]) = 0$ для всех $y \in \mathfrak{D}(T') = \mathfrak{D}(T^*T)$. Для проверки утверждения (d) докажем, что если $[x, Tx] \in \mathfrak{K}$, то $x = 0$. Так как $B\mathfrak{H} = \mathfrak{D}(I+T^*T) = \mathfrak{D}(T^*T)$, то из соотношения $(x, y)_1 = 0$, $y \in \mathfrak{D}(T^*T)$, вытекает, что $(x, Bz)_1 = (Bx, z)_1 = 0$ для всех $z \in \mathfrak{H}$. Так как $(Bx, z)_1 = (x, z)$, то $x = 0$, ч. т. д.

Далее нам потребуются некоторые сведения о положительных самосопряженных преобразованиях и квадратных корнях из них.

2. Лемма. *Самосопряженное преобразование T положительно тогда и только тогда, когда его спектр $\sigma(T)$ является подмножеством интервала* $[0, \infty)$.

Доказательство. Пусть E — разложение единицы для T, так что по теореме 2.3 мы имеем

$$T_n = TE([-n, n]) = \int_{-n}^{n} \lambda E(d\lambda) = E([-n, n])\, TE([-n, n]).$$

Тогда, также по теореме 2.3, $T_n x \to x$ для всех $x \in \mathfrak{D}(T)$. По теореме 2.9(b)

$$[*] \qquad \sigma(T) \cup \{0\} \supseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(T_n) \supseteq \sigma(T).$$

Таким образом, если $\sigma(T) \subseteq [0, \infty)$, то из теоремы X.4.2 вытекает, что $T_n \geqslant 0$. Следовательно, $(Tx, x) = \lim_n (T_n x, x) \geqslant 0$, и преобразование T положительно. Обратно, если $T \geqslant 0$, то $(T_n x, x) = (TE([-n, n])x, E([-n, n])x) \geqslant 0$, т. е. $T_n \geqslant 0$. Таким образом, по теореме X.4.2 $\sigma(T_n) \subseteq [0, \infty)$. Следовательно, [*] показывает, что $\sigma(T) \subseteq [0, \infty)$, ч. т. д.

В следующей лемме утверждается, что положительное самосопряженное преобразование имеет единственный положительный «квадратный корень».

3. Лемма. *Если T — положительное самосопряженное преобразование, то существует единственное самосопряженное преобразование A, такое, что $A^2 = T$.*

Доказательство. По лемме 2 $\sigma(T) \subseteq [0, \infty)$, и по теореме 2.6 (d) положительная функция $f(\lambda) = \lambda^{1/2}$ на $\sigma(T)$ определяет самосопряженный оператор $A = f(T)$. В силу следствия 2.7 (c) $A^2 \subseteq T$ и $\mathfrak{D}(A^2) = \mathfrak{D}(T) \cap \mathfrak{D}(A)$. Но из теоремы 2.6 (a) вытекает, что $\mathfrak{D}(T) \subseteq \mathfrak{D}(A)$, и потому $\mathfrak{D}(A^2) = \mathfrak{D}(T)$. Таким образом, $A^2 = T$. Положительность A следует из теоремы 2.9 (b) и леммы 2. Для проверки единственности A предположим, что $B^2 = T$, где B также самосопряжен и положителен. Пусть δ — борелевское множество в $[0, \infty)$, $\delta_1 = \{\lambda \mid \lambda \in [0, \infty), \lambda^{1/2} \in \delta\}$, и пусть $E(\cdot; A)$, $E(\cdot; B)$ и $E(\cdot; T)$ — разложения единицы для операторов A, B и T соответственно. Тогда по теореме 2.9 (c) $E(\delta; A) = E(\delta_1; T) = E(\delta_1; B^2) = E(\delta; B)$. Таким образом, $E(\cdot; A) = E(\cdot; B)$ и потому по теореме 2.3 $A = B$, ч. т. д.

Теперь мы введем в рассмотрение класс операторов, которые в нашем анализе будут соответствовать множителям $e^{i\theta}$ в числовом случае. На первый взгляд может показаться, что подходящим для этого классом являются унитарные операторы. Однако простой пример показывает, что такое предложение не является приемлемым. Рассмотрим, например, двумерное гильбертово пространство и оператор, матрицей которого служит

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что соответствующее разложение должно иметь вид

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\alpha = re^{i\theta}$ — разложение числа α. Однако первая матрица в правой части есть не изометрия, а лишь частичная изометрия; точный смысл этого понятия объясняется в следующем определении.

4. Определение. Ограниченный линейный оператор P в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ называется *частичной изометрией*, если существует такое замкнутое подпространство $\mathfrak{M}$, что $|Px| = |x|$ для $x \in \mathfrak{M}$ и $P(\mathfrak{M}^{\perp}) = \{0\}$. Подпространство $\mathfrak{M}$ называется *начальной областью* оператора P, а $P\mathfrak{M}$ $(= P\mathfrak{H})$ — его *конечной областью*.

5. Лемма. *Ограниченный линейный оператор P в гильбертовом пространстве является частичной изометрией тогда и только тогда, когда P^*P — проектор. В этом случае PP^* также является проектором, и области значений операторов P^*P и PP^* служат соответственно начальной и конечной областями оператора P.*

Доказательство. Если P^*P — проектор, положим $\mathfrak{M} = P^*P\mathfrak{H}$. Тогда для $x \in \mathfrak{M}$ и $y \in \mathfrak{M}^\perp$ мы имеем

$$|x|^2 = (x, x) = (P^*Px, x) = (Px, Px) = |Px|^2,$$
$$0 = (P^*Py, y) = (Py, Py) = |Py|^2,$$

и, таким образом, P — частичная изометрия с начальной областью $\mathfrak{M}$. Для проверки того, что PP^* — проектор, областью значений которого служит конечная область $\mathfrak{N} = P\mathfrak{M}$, примем за Q оператор, который равен P^{-1} на $\mathfrak{N}$ и нулю на $\mathfrak{N}^\perp$. Если $x \in \mathfrak{N}$, то $Qx \in \mathfrak{M}$ и, таким образом, $Qx = P^*PQx = P^*x$ и $x = PP^*x$. Вместе с тем если $y \perp \mathfrak{N} = P\mathfrak{M} = P\mathfrak{H}$, то $P^*y = 0$ и $PP^*y = 0$. Таким образом, PP^* — проектор, областью значений которого является $\mathfrak{N} = P\mathfrak{M}$, конечная область оператора P.

Чтобы завершить доказательство, достаточно проверить, что P^*P является проектором, если P — частичная изометрия. Пусть $x, v \in \mathfrak{M}$ — начальной области оператора P. Тогда тождество $|x+v|^2 = |Px+Pv|^2$ показывает, что $(x, v) + (v, x) = (Px, Pv) + (Pv, Px)$. Следовательно, $\operatorname{Re}(x, v) = \operatorname{Re}(Px, Pv)$. Так как $\operatorname{Im}(x, v) = \operatorname{Re}(x, iv)$, то $(x, v) = (Px, Pv)$, если $x, v \in \mathfrak{M}$. Если $x \in \mathfrak{M}$ и $w \in \mathfrak{M}^\perp$, то $Pw = 0$, и тем самым $0 = (x, w) = (Px, Pw)$. Таким образом, для любого вектора y в гильбертовом пространстве мы имеем $(x, y) = (Px, Py)$, если $x \in \mathfrak{M}$. Это означает, что $(x, y) = (P^*Px, y)$ для всех y и, следовательно, $P^*Px = x$ для $x \in \mathfrak{M}$. Так как P обращается в нуль на $\mathfrak{M}^\perp$, то таким же будет и P^*P. Тем самым P^*P — ортогональный проектор на $\mathfrak{M}$, ч. т. д.

6. Следствие. *P является частичной изометрией тогда и только тогда, когда P^* — частичная изометрия.*

7. Теорема. *Если T — замкнутое преобразование с плотной областью определения, то оно может быть представлено и притом единственным способом в виде произведения $T = PA$, где P — частичная изометрия с начальной областью $\overline{\mathfrak{R}(T^*)}$, а A — такое самосопряженное преобразование, что $\overline{\mathfrak{R}(A)} = \overline{\mathfrak{R}(T^*)}$.*

Доказательство. Пусть A — положительный квадратный корень оператора T^*T; его существование вытекает из леммы 3 и леммы 1 (c). Тогда $(Ax, Ax) = (A^2x, x) = (T^*Tx, x) = (Tx, Tx)$ для $x \in \mathfrak{D}(T^*T)$. Если положить $P_0Ax = Tx$ для $x \in \mathfrak{D}(T^*T)$, то P_0 — корректно определенная изометрия с областью определения $\mathfrak{R}(A')$, где A' — сужение оператора A на $\mathfrak{D}(T^*T)$.

Так как $T^*T = A^*A$, то лемма 1 (d) показывает, что $\Gamma(A')$ плотно в $\Gamma(A)$. Таким образом, если $[x, y] \in \Gamma(A)$, то существует последовательность $\{[x_n, y_n]\} \subset \Gamma(A')$, такая, что $[x_n, y_n] \to [x, y]$. Следовательно, $y_n \to y$ и $\mathfrak{R}(A')$ плотно в $\mathfrak{R}(A)$. Пусть P_1 — изометрическое расширение оператора P_0 на $\overline{\mathfrak{R}(A)}$ и E — перпендикулярная проекция $\mathfrak{H}$ на $\overline{\mathfrak{R}(A)}$. Если положить $P = P_1E$, то P — частичная изометрия с начальной областью $\overline{\mathfrak{R}(A)}$. Более того, $PAx = Tx$ для $x \in \mathfrak{D}(T^*T)$.

Пусть $\{y_n\}$ — последовательность элементов из $\mathfrak{D}(A)$, такая, что $y_n \to y$ и $PAy_n \to z$. Так как P — изометрическое отображение $\overline{\mathfrak{R}(A)}$, то Ay_n сходится к некоторому элементу u. Поскольку A замкнут, $y \in \mathfrak{D}(A)$ и $Ay = u$. Таким образом, $y \in \mathfrak{D}(PA)$ и $PAy = z$. Следовательно, PA замкнут.

Проверим теперь формулу $T = PA$. Пусть T' — сужение T на $\mathfrak{D}(T^*T)$. Тогда по лемме 1 (d) $\Gamma(T')$ плотно в $\Gamma(T)$. Если $x \in \mathfrak{D}(T)$, то существует последовательность $\{[x_n, Tx_n]\} \subset \Gamma(T')$, сходящаяся к $[x, Tx]$. Так как $PAx_n = Tx_n$ и PA замкнут, то $PAx = \lim PAx_n = \lim Tx_n = Tx$. Таким образом, $T \subseteq PA$. С другой стороны, $\Gamma(A')$ плотно в $\Gamma(A)$. Таким образом, если $x \in \mathfrak{D}(A)$, то существует последовательность $\{[x_n, Ax_n]\}$ элементов из $\Gamma(A')$, сходящаяся к $[x, Ax]$. Так как $PAx_n = Tx_n$ и T замкнут, то $PAx = \lim PAx_n = \lim Tx_n = Tx$. Таким образом, $PA \subseteq T$ и, следовательно, $PA = T$.

Соотношение $\overline{\mathfrak{R}(A)} = \overline{\mathfrak{R}(T^*)}$ является следствием лемм 1.6 (d) и 1(a), ибо $A^*x = Ax = 0$ тогда и только тогда, когда $T^{**}x = Tx = PAx = 0$.

Покажем, наконец, что разложение $T = PA$ единственно. По лемме 1.6 (c) $AP^* = T^*$. Следовательно, $T^*T = AP^*PA$. Так как по лемме 5 P^*P есть проектор на $\overline{\mathfrak{R}(A)}$, то $T^*T = A^2$. Единственность A вытекает теперь из леммы 3. Так как преобразование A единственно, то P однозначно определяется на $\mathfrak{R}(A)$ уравнением $P(Ax) = Tx$. Кроме того, продолжение P по непрерывности с $\mathfrak{R}(A)$ на $\overline{\mathfrak{R}(A)}$ единственно. Так как P равен нулю на $\overline{\mathfrak{R}(A)}^{\perp}$, то отсюда вытекает, что P однозначно определяется по оператору T, ч. т. д.

8. Теоремы о моментах

Термин *момент*, использованный в заголовке этого параграфа, был введен в математическую терминологию Стильтьесом, который в знаменитом мемуаре [1], 1894 г., сформулировал и решил то, что он назвал *проблемой моментов*. Терминология, заимствованная из теоретической механики, связана со следующей ситуацией: если $\mu(\delta)$ — масса, распределенная на множестве δ прямой, то интегралы $\int t\mu(dt)$, $\int t^2\mu(dt)$ дают статический момент и момент инерции относительно начала отсчета. Вообще интеграл $\int t^n\mu(dt)$ называется n-м моментом относительно начала отсчета на прямой, и задача, поставленная и решенная Стильтьесом, состоит в нахождении распределения массы μ на полупрямой $[0, \infty)$ по предписанным ее моментам. Проблема моментов Гамбургера похожа на задачу Стильтьеса, но отличается от нее использованием всей вещественной оси $(-\infty, \infty)$ вместо полупрямой $[0, \infty)$. Проблема моментов Хаусдорфа также похожа на задачу Стильтьеса, но связана с конечным интервалом вещественной оси.

В этом параграфе мы покажем, как применить спектральную теорему для самосопряженных операторов при доказательстве многих результатов теории моментов. Мы начнем с решения проблемы моментов Гамбургера.

1. Теорема. *Пусть m_n, $n = 0, 1, 2, \ldots,$ — последовательность вещественных чисел. Для существования неотрицательной меры μ, определенной на борелевских множествах вещественной прямой, такой, что* $\int_{-\infty}^{\infty} |t|^n \mu(dt) < \infty$ *и*

$$m_n = \int_{-\infty}^{\infty} t^n\mu(dt), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{i, j=0}^{n} m_{i+j}\alpha_i\bar{\alpha}_j \geqslant 0$$

для любого конечного множества $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ комплексных чисел.

Доказательство. Заметим сначала, что это условие необходимо. Действительно, если $\{m_n\}$ имеет такое представление и $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ — любое конечное множество комплексных чисел, то

$$\sum_{i, j=0}^{n} m_{i+j}\alpha_i\bar{\alpha}_j = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{i, j=0}^{n} t^{i+j} \alpha_i\bar{\alpha}_j \right) \mu(dt) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} t^i\alpha_i \right) \overline{\left(\sum_{j=0}^{n} t^j\alpha_j \right)} \mu(dt) = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{j=0}^{n} t^j\alpha_j \right|^2 \mu(dt) \geqslant 0.$$

Для доказательства достаточности обозначим через $\mathfrak{A}$ линейное пространство всех последовательностей α_n, $n=0, 1, 2, \ldots$, комплексных чисел, все элементы которых при достаточно больших n являются нулями. Если $\xi=[\alpha_n]$ и $\eta=[\beta_n]$ лежат в $\mathfrak{A}$, то определим

$$(\xi, \eta)=\sum_{i, j=0}^{n} m_{i+j}\alpha_i\bar{\beta}_j.$$

Тогда (ξ, η) — эрмитова билинейная форма на $\mathfrak{A}$, и по предположению $(\xi, \xi)\geqslant 0$, $\xi\in\mathfrak{A}$. Если положить $|\xi|=\sqrt{(\xi, \xi)}$, то отсюда вытекает (см. доказательство теоремы IV.4.1), что выполнено неравенство Шварца $|(\xi, \eta)|\leqslant|\xi||\eta|$ и $|\xi+\eta|\leqslant|\xi|+|\eta|$ для всех $\xi, \eta\in\mathfrak{A}$.

Пусть теперь $\mathfrak{A}_0$ — подпространство в $\mathfrak{A}$, состоящее из всех таких последовательностей ξ, что $|\xi|=0$. Если $\eta=\xi+\xi_0$, где $\xi\in\mathfrak{A}$, $\xi_0\in\mathfrak{A}_0$, то по неравенству Шварца $(\xi, \mathfrak{A}_0)=0$ и, таким образом, $|\eta|=|\xi|$. Поэтому если через $\mathfrak{B}$ обозначено факторпространство $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}_0$ элементов $x=\xi+\mathfrak{A}_0$, $\xi\in\mathfrak{A}$, то мы можем положить $|x|=|\xi|$. Ясно, что при этом $\mathfrak{B}$ становится нормированным пространством. Пусть $\mathfrak{H}$ — замыкание в $\mathfrak{B}^{**}$ подпространства $\varkappa(\mathfrak{B})$, где $\varkappa$ — естественное изометрическое вложение $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{B}^{**}$ (см. II.3.19). Ввиду леммы I.6.7 ясно, что $\mathfrak{H}$ полно. Покажем, что $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство. Так как $(\xi, \mathfrak{A}_0)=0$, $\xi\in\mathfrak{A}$, то $(\xi, \eta)=(\xi_1, \eta_1)$, если $\xi-\xi_1$ и $\eta-\eta_1$ лежат в $\mathfrak{A}_0$. Таким образом, мы можем определить на $\mathfrak{B}$ билинейную форму, полагая $(x, y)=(\xi, \eta)$, если $x=\xi+\mathfrak{A}_0$, $y=\eta+\mathfrak{A}_0$. Если (x, y) продолжить по непрерывности с $\mathfrak{B}\times\mathfrak{B}$ на $\mathfrak{H}\times\mathfrak{H}$ (см. I.6.17), то ясно, что $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство.

Далее, для $\xi=[\alpha_i]\in\mathfrak{A}$ положим $T\xi=[\beta_i]$, где $\beta_0=0$, $\beta_{i+1}=\alpha_i$, $i\geqslant 1$. Если $\eta=[\gamma_i]\in\mathfrak{A}$, то

$$(T\xi, \eta)=\sum_{i, j=0}^{\infty} m_{i+j}\beta_i\bar{\gamma}_j=\sum_{i=1, j=0}^{\infty} m_{i+j}\alpha_{i-1}\bar{\gamma}_j=$$

$$=\sum_{i, j=0}^{\infty} m_{i+j+1}\alpha_i\bar{\gamma}_j=(\xi, T\eta).$$

Таким образом, $|T\xi|^2=(T^2\xi, \xi)=0$, если $\xi\in\mathfrak{A}_0$, т. е. $T\mathfrak{A}_0\subseteq\mathfrak{A}_0$. Полагая $Sx=T\xi$, если $x=\xi+\mathfrak{A}_0$, мы получаем линейное отображение $\mathfrak{B}$ в себя, удовлетворяющее соотношению $(Sx, y)=(x, Sy)$, $x, y\in\mathfrak{B}$. Так как $\mathfrak{B}$ плотно в $\mathfrak{H}$, то S — симметрический оператор в $\mathfrak{H}$.

Если V — отображение $\mathfrak{A}$ в себя, определяемое равенствами $V[\alpha_i]=[\bar{\alpha}_i]$, то, очевидно, $V(\xi+\eta)=V\xi+V\eta$, $V(\alpha\xi)=\bar{\alpha}V\xi$, $(V\xi, V\eta)=\overline{(\xi, \eta)}$ и $V^2=I$. Следовательно, $V\mathfrak{A}_0\subseteq\mathfrak{A}_0$ и отображение $U:\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}$, определяемое формулой $Ux=V\xi$, если $x=\xi+\mathfrak{A}_0$, можно продолжить по непрерывности до отображения (которое мы также будем обозначать через U) всего пространства $\mathfrak{H}$ в себя; это отображение является инволюцией (см. определение 4.17). Так как $SUx = USx$ для $x \in \mathfrak{B}$, то из теоремы 4.18 вытекает, что S имеет равные индексы дефекта. Таким образом, в силу следствия 4.13 S имеет самосопряженное расширение S_1.

Пусть ν — последовательность $[1, 0, 0, \ldots]$ из $\mathfrak{A}$ и $u = \nu + \mathfrak{A}_0 \in \mathfrak{B}$. Так как $\mathfrak{B} = \mathfrak{D}(S)$ и $S\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B}$, то $u \in \mathfrak{D}(S^n)$ для всех n. Следовательно, по теореме 2.6

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^{2n} (E(dt)u, u) < \infty, \qquad n \geqslant 0,$$

где $E(\cdot)$ обозначает разложение единицы для S_1. Более того,

$$(S^n u, u) = \int_{-\infty}^{\infty} t^n (E(dt)u, u), \qquad n \geqslant 0.$$

Но $(S^n u, u) = (T^n \nu, \nu) = m_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Таким образом,

$$m_n = \int_{-\infty}^{\infty} t^n \mu(dt),$$

где $\mu(e) = (E(e)u, u)$, ч. т. д.

Несложные рассуждения позволяют применить метод предыдущего доказательства к решению проблемы моментов Стильтьеса.

2. Теорема. *Пусть m_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, — последовательность вещественных чисел. Для существования неотрицательной меры μ, определенной на борелевских множествах полупрямой $[0, \infty)$, такой, что*

$$m_n = \int_0^{\infty} t^n \mu(dt), \qquad n = 0, 1, 2 \ldots,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$[*] \qquad \sum_{i,\, j=0}^{n} m_{i+j} \alpha_i \bar{\alpha}_j \geqslant 0$$

и

$$[**] \qquad \sum_{i,\, j=0}^{n} m_{i+j+1} \alpha_i \bar{\alpha}_j \geqslant 0$$

для любого конечного множества $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ комплексных чисел.

Доказательство. Из теоремы 1 вытекает, что условие [*] необходимо. Для доказательства необходимости условия [**] заметим, что если $m_n = \int\limits_0^\infty t^n \mu(dt)$, то

$$\sum_{i,\,j=0}^{n} m_{i+j+1}\alpha_i\bar{\alpha}_j = \int\limits_0^\infty \Big(\sum_{i,\,j=0}^{n} t^{i+j+1}\alpha_i\bar{\alpha}_j\Big)\mu(dt) =$$
$$= \int\limits_0^\infty t\left|\sum_{i=0}^{n} t^i\alpha_i\right|^2 \mu(dt) \geqslant 0.$$

Для доказательства достаточности отметим, что в предположении [**] оператор T из доказательства теоремы 1 удовлетворяет неравенству

$$(T\xi,\ \xi) = \sum_{i,\,j=0}^{\infty} m_{i+j+1}\alpha_i\bar{\alpha}_j \geqslant 0$$

для всех $\xi = [\alpha_i] \in \mathfrak{A}$. Таким образом, $(Sx,\ x) \geqslant 0$ для $x \in \mathfrak{B}$ и S — неотрицательный симметрический оператор в $\mathfrak{H}$. По теореме 5.2 он имеет неотрицательное самосопряженное расширение S_1. Если $E(\cdot)$ — разложение единицы для S_1, то из доказательства теоремы 1 вытекает, что

$$m_n = \int\limits_{-\infty}^{\infty} t^n\mu(dt), \qquad n \geqslant 0,$$

где $\mu(e) = (E(e)u,\ u)$. Но по теореме 2.9 и лемме 7.2 $E((-\infty,\ 0)) = 0$. Таким образом, $\mu((-\infty,\ 0)) = 0$ и

$$m_n = \int\limits_0^\infty t^n\mu(dt), \qquad n \geqslant 0,$$

ч. т. д.

Несколько изменяя тот же метод, можно доказать следующую теорему Бохнера о моментах.

3. Теорема. *Пусть m — комплекснозначная функция вещественной переменной t. Для существования конечной неотрицательной меры μ, определенной на борелевских множествах вещественной прямой, такой, что*

$$m(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{its}\mu(ds),$$

необходимо и достаточно, чтобы

(a) *m была непрерывна;*

(b) *для всякого множества* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *комплексных чисел и всякого множества* $t_1, \ldots, t_n$ *вещественных чисел*

$$\sum_{i,\, j=1}^{n} m(t_i - t_j)\, \alpha_i \overline{\alpha}_j \geqslant 0.$$

Доказательство. Если m допускает представление $m(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{its} \mu(ds)$, то непрерывность функции m вытекает из теоремы Лебега (III.6.16). Более того,

$$\sum_{j,\, k=1}^{n} \alpha_j \overline{\alpha}_k \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i(t_j - t_k)s} \mu(ds) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e^{it_j s} \right) \left(\sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha}_k e^{-it_k s} \right) \mu(ds) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e^{it_j s} \right|^2 \mu(ds) \geqslant 0.$$

Таким образом, необходимость условий (a) и (b) установлена.

Для доказательства достаточности примем за $\mathfrak{A}$ множество всех комплекснозначных функций f вещественного переменного t, для которых $f(t) = 0$ всюду, кроме конечного числа значений t. Если $f, g \in \mathfrak{A}$, положим $(f, g) = \sum\limits_{s,\, t} m(t-s) f(t) \overline{g(s)}$; эта сумма определена, так как она имеет лишь конечное число отличных от нуля слагаемых. Тогда (f, g) — эрмитова билинейная форма на $\mathfrak{A}$ и по предположению $(f, f) \geqslant 0$. Пусть $|f| = (f, f)^{1/2}$ для $f \in \mathfrak{A}$ и

$$\mathfrak{A}_0 = \{f \mid f \in \mathfrak{A}, \quad |f| = 0\}.$$

Отсюда вытекает, так же как и при доказательстве теоремы 1, что $\mathfrak{A}_0$ — линейное подпространство в $\mathfrak{A}$ и $(\mathfrak{A}_0, f) = (f, \mathfrak{A}_0) = 0$ для $f \in \mathfrak{A}$. Полагая $(x, y) = (f, g)$ для элементов $x = f + \mathfrak{A}_0$ и $y = g + \mathfrak{A}_0$ из $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}/\mathfrak{A}_0$, мы получаем эрмитову билинейную форму на $\mathfrak{B}$. Как и в случае теоремы 1, $\mathfrak{B}$ — плотное подпространство гильбертова пространства $\mathfrak{H}$ и скалярное произведение в $\mathfrak{H}$ есть непрерывное продолжение функции (x, y) в $\mathfrak{B}$.

Для каждого t примем за $V(t)$ отображение $\mathfrak{A}$ в себя, определяемое по формуле $(V(t)f)(s) = f(s-t)$. Тогда $V(s)V(t) = V(s+t)$ для всех s и t, и

$$(V(t)f,\ V(t)g) = \sum_{s_1,\, s_2} m(s_1 - s_2) f(s_1 - t) \overline{g(s_2 - t)} =$$

$$= \sum_{s_1,\, s_2} m(s_1 + t - s_2 - t) f(s_1) \overline{g(s_2)} = (f, g);$$

отсюда в силу неравенства Шварца вытекает, что $V(t)\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}_0$. Следовательно, мы можем определить отображение $U(t): \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$, полагая $U(t)x = V(t)f + \mathfrak{A}_0$, если $x = f + \mathfrak{A}_0 \in \mathfrak{B}$. Тогда ясно, что

$$[*] \qquad U(s+t) = U(s)U(t), \qquad (U(t)x,\ U(t)y) = (x,\ y)$$

для $-\infty < t < \infty$, $x, y \in \mathfrak{B}$. Так как, в частности, $|U(t)x| = |x|$, то отображение $U(t)$ можно продолжить по непрерывности с $\mathfrak{B}$ на пространство $\mathfrak{H}$, и тогда равенство [*] выполняется для всех t и $x, y \in \mathfrak{H}$. (Это продолжение мы также обозначаем символом $U(t)$.) Таким образом, семейство $\{U(t)\}$, $-\infty < t < \infty$, представляет собой группу унитарных операторов на $\mathfrak{H}$.

Далее мы покажем, что группа $\{U(\cdot)\}$ сильно непрерывна. Пусть $x = f + \mathfrak{A}_0 \in \mathfrak{B}$, где $f \in \mathfrak{A}$. Тогда

$$\begin{aligned}
&|U(t_1)x - U(t_2)x|^2 = |U(|t_1 - t_2|)x - x|^2 = \\
&= |U(|t_1 - t_2|)x|^2 + |x|^2 - 2\mathrm{Re}\,(U(|t_1 - t_2|)x,\ x) = \\
&= 2\mathrm{Re}\,\{|x|^2 - (U(|t_1 - t_2|)x,\ x)\} = \\
&= 2\mathrm{Re}\,\Big\{\sum_{s_1, s_2} m(s_1 - s_2) f(s_1)\overline{f(s_2)} - \sum_{s_1, s_2} m(s_1 - s_2) f(s_1 - |t_1 - t_2|)\overline{f(s_2)}\Big\} = \\
&= 2\mathrm{Re}\,\Big\{\sum_{s_1, s_2} [m(s_1 - s_2) - m(s_1 - s_2 + |t_1 - t_2|)] f(s_1)\overline{f(s_2)}\Big\}.
\end{aligned}$$

Так как по предположению функция $m(t)$ непрерывна, то

$$|U(t_1)x - U(t_2)x| \to 0$$

при $|t_1 - t_2| \to 0$ для всех $x \in \mathfrak{B}$. По теореме II.1.18 это выполнено не только для $x \in \mathfrak{B}$, но и для $x \in \overline{\mathfrak{H}}$. Таким образом, $U(t)$ — сильно непрерывная группа унитарных операторов.

Из теоремы 6.1 теперь вытекает существование неограниченного (быть может, ограниченного) самосопряженного оператора T, такого, что $U(t) = e^{itT}$. Пусть E — спектральное разложение оператора T и v — функция, определяемая соотношениями $v(t) = 0$ для $t \neq 0$, $v(0) = 1$. Если u — элемент $v + \mathfrak{A}_0 \in \mathfrak{B}$, то по теореме 2.3

$$m(t) = (V(t)v,\ v) = (U(t)u,\ u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}(E(d\lambda)u,\ u).$$

Таким образом, полагая $\mu(e) = (E(e)u,\ u)$, мы имеем $m(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\mu(d\lambda)$, и достаточность условий (a) и (b) установлена.

Читателю теперь будет нетрудно применить метод предыдущей теоремы для доказательства следующего результата того же типа для полуинтервала $[0, 2\pi)$.

4. Теорема. *Пусть* m_n, $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, — *последовательность комплексных чисел. Для существования конечной неотрицательной меры, определенной на борелевских множествах* $[0, 2\pi)$, *такой, что*

$$m_n = \int\limits_0^{2\pi} e^{ins}\mu(ds), \qquad n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{i,\, j=-n}^{n} m_{i-j}\alpha_i\bar{\alpha}_j \geqslant 0$$

для всех конечных последовательностей α_i, $-n \leqslant i \leqslant n$, *комплексных чисел.*

9. Упражнения

1. Симметрическое преобразование, область значений которого — все гильбертово пространство, является самосопряженным.

2. Если операторы T и T^* всюду определены, то T ограничен.

3. Пусть оператор T самосопряжен, а B ограничен. При этом $BT \subseteq TB$ тогда и только тогда, когда B коммутирует с разложением единицы для T. Если $BT \subseteq TB$, то для всякой борелевской измеримой функции f оператор $Bf(T)$ имеет замыкание и $\overline{Bf(T)} = f(T)B$.

4. Точечный спектр симметрического оператора в сепарабельном пространстве является счетным подмножеством вещественной оси.

5. Если T — симметрическое преобразование, определенное на всюду плотном множестве, то

$$[\,'\,] \qquad V=(T-iI)(T+iI)^{-1}$$

— изометрическое преобразование, не обязательно всюду определенное. Показать, что оператор T замкнут тогда и только тогда, когда замкнут V. Оператор $I-V$ взаимно однозначен, имеет плотную область значений и

$$[\,''\,] \qquad T=i(I+V)(I-V)^{-1}.$$

Обратно, если V — изометрический оператор, имеющий плотную область значений, и такой, что $I-V$ взаимно однозначен, то уравнение [″] определяет симметрический оператор T, для которого выполнено соотношение [′]. Всякое изометрическое расширение V_1 оператора V обладает тем свойством, что $I-V_1$ взаимно однозначно; T максимально среди симметрических преобразований тогда и только тогда, когда V максимально среди изометрических преобразований.

Оператор T является самосопряженным тогда и только тогда, когда V унитарен. Показать, наконец, как эта конструкция, принадлежащая фон Нейману, может быть использована для доказательства следствия 4.13.

6. Пусть дан максимальный симметрический оператор T в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Показать, что $\mathfrak{H}$ может быть разложено в прямую сумму

$$\mathfrak{H}=\mathfrak{H}_0\oplus\sum_{\alpha}\mathfrak{H}_\alpha$$

ортогональных подпространств, инвариантных относительно T и T^*, со следующими свойствами.

(a) Сужение T_0 оператора T на $\mathfrak{H}_0$, определяемое уравнениями $\mathfrak{D}(T_0)=\mathfrak{D}(T)\cap\mathfrak{H}_0$, $T_0x=Tx$, $x\in\mathfrak{D}(T_0)$, самосопряжено.

(b) Для каждого α существует изометрия U_α пространства $\mathfrak{H}_\alpha$ на $L_2(0, \infty)$, такая, что если T_α — сужение оператора T на $\mathfrak{H}_\alpha$ (т. е. $\mathfrak{D}(T_\alpha)=\mathfrak{D}(T)\cap\mathfrak{H}_\alpha$, $T_\alpha x=Tx$ для $x\in\mathfrak{D}(T_\alpha)$), то $U_\alpha T_\alpha U_\alpha^{-1}$ совпадает с оператором $\pm i\Delta$, где Δ определяется соотношениями

$$\mathfrak{D}(\Delta)=$$
$$=\{f\in L_2(0, \infty)\mid f \text{ абсолютно непрерывна}, f'\in L_2(0, \infty), f(0)=0\},$$
$$\Delta f=f', \qquad f\in\mathfrak{D}(\Delta).$$

При этом мы имеем $+i\Delta$ для всех α, если положительный индекс дефекта оператора T равен нулю, и $-i\Delta$ для всех α, если отрицательный индекс дефекта T равен нулю. (Указание: см. теорему XIII.2.10 и следствие XIII.2.12; использовать конструкцию упражнения 5 и разложить максимальный изометрический оператор V.)

7. Если $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ — сильно непрерывная полугруппа операторов в гильбертовом пространстве с инфинитезимальным оператором A, то $\{T^*(t)\}_{t\geqslant 0}$ — сильно непрерывная полугруппа с инфинитезимальным оператором A^*.

8. (Купер.) Инфинитезимальный оператор сильно непрерывной полугруппы $\{V(t)\}$ частично изометрических операторов с начальной областью $\mathfrak{H}$ имеет вид iT, где T — максимальный симметрический оператор с положительным индексом дефекта нуль. Обратно, всякий такой максимальный симметрический оператор является инфинитезимальным оператором сильно непрерывной полугруппы частично изометрических операторов с начальной областью $\mathfrak{H}$.

Гильбертово пространство $\mathfrak{H}$ может быть разложено в ортогональную прямую сумму $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}_0\oplus\sum\mathfrak{H}_\alpha$ так, что

a) сужение оператора $V(t)$ на $\mathfrak{H}_0$ унитарно, $t \geqslant 0$;

b) для каждого α существует изометрия U_α пространства $\mathfrak{H}_\alpha$ на $L_2(0, \infty)$, такая, что

$$(U_\alpha (V(t) \mid \mathfrak{H}_\alpha) U_\alpha^{-1}) f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < t, \\ f(x-t), & x \geqslant t. \end{cases}$$

Установить соответствующий результат для сильно непрерывной полугруппы частично изометрических операторов с конечной областью $\mathfrak{H}$.

9. Неограниченное преобразование T в $\mathfrak{H}$ называется *нормальным*, если T замкнуто, всюду определено и $TT^* = T^*T$. Показать, что

a) если T нормально, то нормально и T^*;

b) преобразование T нормально тогда и только тогда, когда $\mathfrak{D}(T) = \mathfrak{D}(T^*)$ и $|Tx| = |T^*x|$ для всех $x \in \mathfrak{D}(T)$;

c) нормальное преобразование не имеет собственных нормальных расширений (см. Секефальви-Надь [3; стр. 33, 34]).

10. Если $T = UH \subseteq HU$, где H — самосопряженное, а U — унитарное преобразования, то T нормально и $UH = HU$. Обратно, если T нормально, то $T = UH = HU$, где U унитарно, а H — самосопряжено и положительно.

11. Замкнутый, определенный на плотном множестве оператор T нормален тогда и только тогда, когда $\mathfrak{D}(T) = \mathfrak{D}(T^*)$, а операторы $\overline{T + T^*}$ и $i\,\overline{(T - T^*)}$ являются самосопряженными и имеют коммутирующие разложения единицы. Оператор T нормален тогда и только тогда, когда $T = A + iB$, где A и B — самосопряженные операторы, имеющие коммутирующие разложения единицы.

12. T нормален тогда и только тогда, когда существует разложение единицы E в комплексной плоскости P, такое, что

$$\mathfrak{D}(T) = \left\{ x \mid \lim_{n \to \infty} \int\limits_{|\lambda| \leqslant n} \lambda E(d\lambda)\, x \quad \text{существует} \right\}$$

и

$$Tx = \lim_{n \to \infty} \int\limits_{|\lambda| \leqslant n} \lambda E(d\lambda)\, x, \qquad x \in \mathfrak{D}(T).$$

13. Нормальное преобразование не имеет остаточного спектра.

14. Сильно непрерывная полугруппа $\{N_t\}$ ограниченных нормальных операторов может быть представлена в виде

$$[*] \qquad N_t = \int\limits_P e^{zt} E(dz),$$

где $E(\cdot)$ — спектральная мера, определенная на борелевских множествах комплексной плоскости P. Если $\{N_t\}$ состоит из самосопряженных операторов, то $E(\cdot)$ можно выбрать так, чтобы интеграл в [*] нужно было брать лишь по вещественной оси, и тогда полугруппа $\{N_t\}$ непрерывна в равномерной топологии при $t>0$.

15. Пусть оператор T замкнут. Операторы T^*T и TT^* унитарно эквивалентны тогда и только тогда, когда

$$\dim\{x \mid Tx=0\} = \dim\{x \mid T^*x=0\}.$$

Более общо, пусть

$$\mathfrak{H}_1 = \{x \mid Tx=0\}^{\perp}, \qquad \mathfrak{H}_2 = \{x \mid T^*x=0\}.$$

Тогда существует изометрическое отображение U подпространства $\mathfrak{H}_1$ на $\mathfrak{H}_2$, такое, что $UT^*TU^{-1}x = TT^*x$, $x \in \mathfrak{H}_2$.

16. Показать, что равенство упражнения 15

$$\dim\{x \mid Tx=0\} = \dim\{x \mid T^*x=0\}$$

выполнено не всегда.

17. (Шмидт.) Оператор T^*T имеет те же ненулевые собственные значения, что и оператор TT^*, даже с учетом кратностей (положительные квадратные корни этих собственных значений иногда называются *характеристическими числами* оператора T).

18. Пусть T — ограниченный оператор; T вполне непрерывен тогда и только тогда, когда этим свойством обладает T^*T, а это имеет место тогда и только тогда, когда вполне непрерывен TT^*. Если оператор T вполне непрерывен и $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$ — последовательность ненулевых характеристических чисел оператора T, расположенных в убывающем порядке, причем каждое из них повторяется столько раз, какова кратность его квадрата как собственного числа оператора TT^*, то

$$\lambda_n = \min_{\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}} \max_{\substack{(\psi, \varphi_i)=0, \\ i=1, \ldots, n-1}} \frac{|T\psi|}{|\psi|}.$$

19. Положительное вещественное число λ является характеристическим числом оператора T тогда и только тогда, когда существуют такие ненулевые векторы φ и ψ, что

$$T\varphi = \lambda\psi, \qquad T^*\psi = \lambda\varphi.$$

20. Пусть оператор T вполне непрерывен и $\{\lambda_i\}$ — последовательность ненулевых характеристических чисел оператора T, расположенных в убывающем порядке, причем каждое из них повторяется

столько раз, какова кратность его квадрата как собственного числа оператора TT^*. Пусть $\{\varphi_i\}$ — соответствующая последовательность ортонормированных собственных векторов оператора TT^*. Тогда существует соответствующая последовательность $\{\psi_i\}$ ортонормированных собственных векторов оператора T^*T, такая, что для всякого f ряды

$$T^*f = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (f, \varphi_i) \psi_i,$$

$$Tf = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (f, \psi_i) \varphi_i$$

сходятся в сильной топологии.

21. (Наймарк.) Существует замкнутый определенный на плотном множестве симметрический оператор T, такой, что $\mathfrak{D}(T^2) = 0$.

22. Пусть $T = PA$ — каноническое разложение оператора T. Оператор T взаимно однозначен тогда и только тогда, когда A положительно определен; в этом случае P — изометрия. Оператор T^* взаимно однозначен тогда и только тогда, когда P унитарен.

23. Если оператор T имеет какое-либо замкнутое линейное расширение, то существует единственное замкнутое линейное расширение $\overline{T}$, такое, что для любого другого замкнутого линейного расширения T_1 оператора T выполняется соотношение $\overline{T} \subseteq T_1$; $\overline{T}$ называется *замыканием* T.

(a) Существует определенный на плотном множестве оператор без замкнутого линейного расширения.

(b) Оператор T с плотной областью определения имеет замкнутое линейное расширение тогда и только тогда, когда его сопряженный определен на плотном множестве; в этом случае $(\overline{T})^* = T^*$.

24. Дать примеры замкнутых симметрических операторов, имеющих заданную пару (m, n) порядковых чисел в качестве индексов дефекта.

25. (Наймарк.) Пусть T — замкнутый симметрический оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Существуют такие гильбертово пространство $\mathfrak{H}_1 \supseteq \mathfrak{H}$ и самосопряженный оператор T_1 в $\mathfrak{H}$, что

$$\mathfrak{D}(T) = \mathfrak{D}(T_1) \cap \mathfrak{H}, \quad T_1 x = Tx, \quad x \in \mathfrak{D}(T).$$

(Указание: принять за $\mathfrak{H}_1$ прямую сумму $\mathfrak{H}$ и его «комплексно сопряженного»!)

26. (Наймарк.) Пусть оператор T такой же, как в упражнении 25. Тогда существует функция множества $F(\cdot)$, определенная на борелевских подмножествах вещественной оси и имеющая

своими значениями положительные ограниченные эрмитовы операторы, такая, что

(a) $F(\cdot)x$ счетно аддитивна при каждом $x \in \mathfrak{H}$;

$$\text{(b)}\quad \mathfrak{D}(T) = \left\{x \mid \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda^2| (F(d\lambda)\, x,\, x) < \infty\right\};$$

$$\text{(c)}\quad Tx = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda F(d\lambda)\, x, \qquad x \in \mathfrak{D}(T),$$

причем интеграл по бесконечному интервалу сходится в сильной топологии в смысле главного значения.

27. (Наймарк.) Пусть $F(\cdot)$ — функция множества, определенная на σ-поле Σ подмножеств множества S, значениями которой являются положительные ограниченные эрмитовы операторы с нормой, не превосходящей единицы, в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, причем $F(\cdot)x$ счетно аддитивна при всяком $x \in \mathfrak{H}$. Показать, что существует гильбертово пространство $\mathfrak{H}_1$, содержащее $\mathfrak{H}$, и счетно аддитивная функция множества $E(\cdot)$, определенная на Σ, значениями которой являются ортогональные проекции в $\mathfrak{H}_1$, такая, что

$$F(e)\,x = PE(e)\,x, \quad e \in \Sigma, \quad x \in \mathfrak{H},$$

где через P обозначен ортогональный проектор $\mathfrak{H}_1$ на $\mathfrak{H}$. (Указание: рассмотреть сначала случай, когда $\mathfrak{H}$ одномерно, а затем обобщить найденное в этом случае решение.)

28. Пусть в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ задан самосопряженный оператор A, причем $0 \leqslant A \leqslant I$. Тогда существуют гильбертово пространство $\mathfrak{H}_1 \supseteq \mathfrak{H}$ и ортогональный проектор Q в $\mathfrak{H}_1$, такой, что

$$Ax = PQx, \qquad x \in \mathfrak{H},$$

где P — ортогональный проектор $\mathfrak{H}_1$ на $\mathfrak{H}$.

29. Пусть $\{T_n\}$ — последовательность ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Существуют гильбертово пространство $\mathfrak{H}_1 \supseteq \mathfrak{H}$ и последовательность $\{N_n\}$ коммутирующих нормальных операторов в $\mathfrak{H}_1$, такая, что

$$T_n x = PN_n x, \qquad x \in \mathfrak{H},$$

где P — ортогональный проектор $\mathfrak{H}_1$ на $\mathfrak{H}$. (Указание: рассмотреть отдельно вещественные и мнимые части и использовать упражнение 27.)

30. Пусть $\{A_n\}$ — последовательность ограниченных самосопряженных преобразований в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Предположим, что для некоторой постоянной M, $0 < M < \infty$,

$$a_0 I + a_1 A_1 + \ldots + a_n A_n \geqslant 0$$

для любого вещественного многочлена

$$a_0 + a_1 \lambda + \ldots + a_n \lambda^n,$$

неотрицательного на отрезке $[-M, M]$. Тогда существуют такие гильбертово пространство $\mathfrak{H}_1 \supseteq \mathfrak{H}$ и эрмитов оператор B в $\mathfrak{H}_1$, что

$$A_n x = P B^n x, \qquad x \in \mathfrak{H},$$

где P — ортогональный проектор $\mathfrak{H}_1$ на $\mathfrak{H}$. (Указание: представить A_n в виде $\int\limits_{-M}^{M} \lambda^n F(d\lambda)$ и воспользоваться упражнением 27.)

31. (Секефальви-Надь.) Пусть $\{A_n\}$, $-\infty < n < +\infty$, — равномерно ограниченная последовательность операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, такая, что

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} e^{in\theta} A_n \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant r < 1.$$

Тогда существуют гильбертово пространство $\mathfrak{H}_1 \supseteq \mathfrak{H}$ и унитарный оператор U в $\mathfrak{H}_1$, такие, что

$$A_n x = c P U^n x, \quad x \in \mathfrak{H}, \quad -\infty < n < +\infty,$$

где P — ортогональный проектор $\mathfrak{H}_1$ на $\mathfrak{H}$, а c — положительная постоянная.

32. (Секефальви-Надь.) Пусть T — оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ и $|T| \leqslant 1$. Тогда существуют гильбертово пространство $\mathfrak{H}_1 \supseteq \mathfrak{H}$ и унитарный оператор U в $\mathfrak{H}_1$, такие, что

$$T^n x = P U^n x, \quad x \in \mathfrak{H}, \quad 0 \leqslant n < \infty,$$

где P — ортогональный проектор $\mathfrak{H}_1$ на $\mathfrak{H}$.

33. (фон Нейман.) Пусть $u(z)$ — аналитическая функция, определенная в круге $|z| < r$, $r > 1$, и такая, что $|u(z)| \leqslant 1$ при $|z| \leqslant 1$. Пусть T — оператор в гильбертовом пространстве и $|T| \leqslant 1$. Тогда $|u(T)| \leqslant 1$. Точно так же, если $\operatorname{Re} u(z) \geqslant 0$ при $|z| \leqslant 1$, то $u(T) + (u(T))^* \geqslant 0$. (Указание: воспользоваться упражнением 32.)

34. Существуют такие самосопряженные операторы A и B, что $\mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{D}(B) = \{0\}$. Таким образом, для самосопряженных

операторов A и B ни $A+B$, ни $AB+BA$ не обязаны быть самосопряженными. Может даже случиться так, что AB определен только для $\{0\}$.

35. Множество $\{(Tx, x) \mid |x|=1, x \in \mathfrak{D}(T)\}$ выпукло.

36. (Секефальви-Надь.) Пусть Γ — график замкнутого оператора T, а E_Γ — ортогональный проектор $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$ на Γ. Тогда

$$E_\Gamma [x, 0] = [(I+T^*T)^{-1} x, \ T(I+T^*T)^{-1} x].$$

37. (Секефальви-Надь.) Если операторы A_n самосопряжены для всех $n \geqslant 1$, $A_n x \to A_\infty x$ для всех $x \in \mathfrak{D}(A_\infty)$ и замыкание A оператора A_∞ самосопряжено, то

$$(I+A_n^2)^{-1} \to (I+A^2)^{-1} \quad \text{сильно,}$$

$$A_n (I+A_n^2)^{-1} \to A(I+A^2)^{-1} \quad \text{сильно.}$$

Если же

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathfrak{D}(A_\infty)} \frac{|A_n x - A_\infty x|^2}{|x|^2+|A_\infty x|^2} = 0,$$

то

$$(I+A_n^2)^{-1} \to (I+A^2)^{-1} \quad \text{равномерно,}$$

$$A_n (I+A_n^2)^{-1} \to A(I+A^2)^{-1} \quad \text{равномерно.}$$

38. (Реллих.) Пусть операторы A_n самосопряжены при всех $n \geqslant 1$ и $A_n x \to A_\infty x$ для всех $x \in \mathfrak{D}(A_\infty)$. Предположим, что замыкание A оператора A_∞ самосопряжено и имеет разложение единицы $E(\cdot)$. Тогда $f(A_n) \to f(A)$ сильно для всякой ограниченной функции f вещественной переменной, которая непрерывна всюду, кроме, быть может, замкнутого множества C, такого, что $E(C)=0$. Если

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathfrak{D}(A_\infty)} \frac{|A_n x - A_\infty x|^2}{|x|^2+|A_\infty x|^2} = 0,$$

то $g(A_n) \to g(A)$ равномерно для всякой ограниченной непрерывной функции g вещественной переменной.

39. Не существует двух ограниченных эрмитовых операторов A и B, таких, что $AB-BA=iI$. Но существуют неограниченные эрмитовы операторы, такие, что $ABx-BAx=ix$ для всех x из некоторого всюду плотного подмножества гильбертова пространства.

40. (Принцип неопределенности, Гейзенберг.) Пусть A и B — самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве, такие, что $\mathfrak{D}_0 = \mathfrak{D}(AB) \cap \mathfrak{D}(BA)$ всюду плотно. Пусть $x \in \mathfrak{D}_0$; положим

$$E(C) = (Cx, x), \qquad \sigma^2(C) = |(C-E(C)I)x|^2$$

для всякого оператора C, для которого определено Cx. Тогда

$$\sigma^2(A)\,\sigma^2(B) \geqslant \frac{1}{4}\,|\,(E(AB-BA))\,|^2.$$

41. (Бодью.) В предположениях и обозначениях предыдущего упражнения

$$\sigma^2(A)\,\sigma^2(B) \geqslant \frac{1}{4}\,|\,(E(AB-BA))\,|^2+\frac{1}{4}\,|\,E(D)\,|^2,$$

где

$$D=(A-E(A)\,I)(B-E(B)\,I)+(B-E(B)\,I)(A-E(A)\,I).$$

Обобщения теоремы Пэли — Винера

42. Пусть $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ — последовательности элементов B-пространства. Если для некоторого θ, $0<\theta<1$, для всех конечных числовых последовательностей $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ выполнено неравенство

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x_i-y_i)\Big| \leqslant \theta\,\Big|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\Big|$$

и $\{x_i\}$ фундаментальна, то и $\{y_i\}$ фундаментальна. Если $\{x_i\}$ — базис, то и $\{y_i\}$ — базис.

43. Пусть $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ — последовательности элементов B-пространства. Если для некоторой постоянной θ, $0 \leqslant \theta < 1/3$, для всех конечных числовых последовательностей $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ выполнено неравенство

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x_i-y_i)\Big| \leqslant \theta\,\Big\{\Big|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\Big| + \Big|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i\Big|\Big\},$$

то $\{x_i\}$ фундаментальна тогда и только тогда, когда фундаментальна $\{y_i\}$, и $\{x_i\}$ является базисом тогда и только тогда, когда $\{y_i\}$ — базис.

44. (Поллард — Секефальви-Надь.) Пусть $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ — последовательности элементов в гильбертовом пространстве. Если существуют такие постоянные θ_1, θ_2, θ_3, что $0 \leqslant \theta_1 < 1$, $0 \leqslant \theta_3 < 1$, $0 \leqslant \theta_2^2 < (1-\theta_1)(1-\theta_3)$, и для всех конечных числовых последовательностей $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ выполнены соотношения

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x_i-y_i)\Big|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \theta_1\Big|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\Big|^2 + 2\theta_2\Big|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\Big|\,\Big|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i\Big| + \theta_3\Big|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i\Big|^2,$$

то $\{x_i\}$ фундаментальна тогда и только тогда, когда фундаментальна $\{y_i\}$, и $\{x_i\}$ является базисом тогда и только тогда, когда $\{y_i\}$ — базис.

45. (Поллард.) Пусть $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ — ортонормированные последовательности элементов гильбертова пространства. Предположим, что при некотором $\mu > 0$ для всех конечных числовых последовательностей $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ выполнено неравенство

$$\sum_{i \neq j = 1}^{n} \alpha_i \bar{\alpha}_j (x_i, y_j) \geqslant \mu \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2.$$

Последовательность $\{x_i\}$ фундаментальна тогда и только тогда, когда фундаментальна $\{y_i\}$. (Указание: воспользоваться упражнением 44.)

46. (Даффин — Ичес.) Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — последовательности элементов гильбертова пространства и $\{x_n\}$ полна и ортонормирована. Предположим, что для всех числовых последовательностей $\{\alpha_n\}$, таких, что $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty$, выполнено соотношение

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (x_n - y_n) \right|^2 < \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2;$$

тогда $\{y_n\}$ фундаментальна.

47. (Даффин — Ичес.) Пусть $\{x_n\}$ — полное ортонормированное множество в гильбертовом пространстве, $\{T_n\}$ — последовательность ограниченных операторов, а α_{nk} — двойная числовая последовательность, такая, что $|\alpha_{nk}| \leqslant c_k$, $n, k \geqslant 1$. Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} c_k |T_k| < 1$. Тогда соотношения

$$y_n = x_n + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk} T_k x_n$$

определяют фундаментальную последовательность $\{y_n\}$.

48. Пусть $\{y_i\}$ — последовательность элементов гильбертова пространства и $0 \leqslant \theta < 1$. Предположим, что для любой конечной числовой последовательности $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ выполнены неравенства

$$(1-\theta)^2 \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 \leqslant \left| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \right|^2 \leqslant (1+\theta)^2 \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2.$$

Тогда существует ортонормированное множество $\{x_i\}$ векторов, такое, что

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (y_i - x_i) \right| \leqslant \theta \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 \right)^{1/2}$$

для любой конечной числовой последовательности $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. (Указание: для соответствующего отображения воспользоваться теоремой о каноническом разложении.)

49. Пусть $\{\lambda_n\}$ — последовательность комплексных чисел, такая, что $|\lambda_n - n| \leqslant \pi^{-1} \log 2$, $-\infty < n < +\infty$. Тогда $\{e^{i\lambda_n x}\}$ фундаментальна в $L_2(0, 2\pi)$. (Указание: записать $e^{i\lambda_n x}$ в виде $e^{inx}(e^{i(\lambda_n - n)x})$ и разложить второй множитель в ряд Тейлора.) (Авторам не известно, является ли $\pi^{-1} \log 2$ наилучшей возможной постоянной. Левинсон [1; стр. 48, теорема 29] показал, что постоянная не может быть больше или равняться 1/4.) [1]

50. (Уолш — Боас.) Пусть $g_n(z)$ аналитичны в круге $|z| < 1$ и

$$\sum_{n=0}^{\infty} |g_n(z) - z^n|^2 \leqslant \theta < 1$$

для всех z, $|z| < 1$. Тогда всякая функция f, аналитическая при $|z| < 1$ и непрерывная при $|z| \leqslant 1$, имеет единственное разложение

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n g_n(z),$$

причем ряд сходится равномерно в каждом внутреннем круге.

51. Пусть (S, Σ, μ) — пространство с мерой и T — самосопряженный оператор в $L_2(S, \Sigma, \mu)$. Пусть $e \in \Sigma$ — множество конечной меры, такое, что всякая функция f из области значений оператора T существенно ограничена на e. Показать, что для каждого борелевского подмножества σ вещественной оси, находящегося на положительном расстоянии от точки $\lambda = 0$, существует $(\mu \times \mu)$-измеримая функция $E(\sigma; s, t)$ переменной $[s, t]$, определенная на $e \times S$, удовлетворяющая следующему условию:

$$\int |E(\sigma; s, t)|^2 \mu(dt) < \infty, \qquad s \in e,$$

и такая, что для почти всех $s \in e$

$$\int E(\sigma; s, t) f(t) \mu(dt) = (E(\sigma; T) f)(s).$$

(Указание: воспользоваться методами теоремы XII.3.11.)

Отображение $f \to f(T)$, где f — аналитическая функция на спектре оператора T, в некоторых случаях может быть продолжено так, что $f(T)$ будет определено для вещественной гармонической функции. Такое продолжение было осуществлено

[1]) Кадец [1*] показал, что константа 1/4 является точной. — *Прим. ред.*

Фойашем [1]. В двух следующих упражнениях рассматривается частный случай продолжения Фойаша.

52. (Фойаш.) Пусть T — оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, $|T| \leqslant 1$, $\mathscr{H}_0$ — вещественная алгебра вещественных функций u, определенных и гармонических в области $D(u)$, содержащей замкнутый единичный круг $\{\lambda \mid |\lambda| \leqslant 1\}$, и $\mathscr{H}$ — вещественная алгебра всех вещественных функций, непрерывных в этом круге и гармонических внутри него. Пусть обе алгебры $\mathscr{H}_0$ и $\mathscr{H}$ упорядочены: $u \geqslant v$ означает, что $u(\lambda) \geqslant v(\lambda)$ для $|\lambda| \leqslant 1$. Пусть $\mathscr{A}(\mathfrak{H})$ — вещественная упорядоченная алгебра всех ограниченных самосопряженных операторов в $\mathfrak{H}$. Для оператора S в $\mathfrak{H}$ положим $\mathscr{R}(S) = (S+S^*)/2$. Показать, что для функции f, аналитической в области, содержащей единичный круг, оператор $\mathscr{R}(f(T))$ зависит только от функции $\mathscr{R}f(\lambda)$. Таким образом, для $u \in \mathscr{H}_0$ мы можем определить $u(T) = \mathscr{R}(f(T))$.

(a) Показать, что отображение $u \to u(T)$ является сохраняющим порядок линейным отображением вещественной алгебры $\mathscr{H}_0$ в $\mathscr{A}(\mathfrak{H})$, причем

$$|u(T)| \leqslant \max_{|\lambda| \leqslant 1} |u(\lambda)|.$$

(Указание: воспользоваться упражнением 32.)

(b) Распространить гомоморфизм части (a) до сохраняющего порядок линейного отображения вещественной алгебры $\mathscr{H}$ в $\mathscr{A}(\mathfrak{H})$, обладающего свойством

$$|u(T)| \leqslant \max_{|\lambda| \leqslant 1} |u(\lambda)|, \qquad u \in \mathscr{H}.$$

(Указание: воспользоваться тем фактом, что всякая функция $u \in \mathscr{H}$ является равномерным пределом последовательности из $\mathscr{H}_0$ в единичном круге. См. Брело [1].)

53. (Фойаш.) Показать для гомоморфизма $\mathscr{H} \to \mathscr{A}(\mathfrak{H})$ упражнения 52, что

$$\text{(a)} \quad \inf_{|\lambda| \leqslant 1} u(\lambda) \leqslant \inf_{|x| \leqslant 1} (u(T)x, x) \leqslant \sup_{|x|=1} (u(T)x, x) \leqslant \sup_{|\lambda| \leqslant 1} u(\lambda).$$

(b) Пусть λ — комплексное число и $\{x_n\}$ — последовательность в $\mathfrak{H}$, такая, что $|x_n| = 1$ и $(\lambda I - T)x_n \to 0$. Тогда

$$(u(T)x_n, x_n) \to u(\lambda).$$

(c) Если $\lambda \in \sigma_p(T)$, x_λ — вектор с нормой $|x_\lambda| = 1$ и $Tx_\lambda = \lambda x_\lambda$, то

$$(u(T)x_\lambda, x_\lambda) = u(\lambda).$$

10. Примечания и дополнения

Спектральная теорема. Спектральная теория ограниченных самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве была по существу создана Гильбертом [1; IV], хотя, как мы уже отмечали в § X.9, он излагал свои результаты в терминах квадратичных форм. По духу и терминологии к нашему изложению немного ближе книга Ф. Рисса [6]. Первый значительный шаг в анализе неограниченных симметрических операторов был сделан в 1923 г. Карлеманом в его исследованиях по сингулярным интегральным уравнениям. Однако лишь несколькими годами позже, в 1927 г., очевидно под влиянием развития квантовой механики, фон Нейман [8] обратил внимание на разложение неограниченных самосопряженных операторов. В своей поистине классической работе [7] фон Нейман систематически и полно развивает теорию неограниченных операторов. Вскоре к этой работе присоединился Стоун [3,10]. В 1930 г. Ф. Рисс [14] дал изящное элементарное доказательство спектральной теоремы для неограниченных самосопряженных операторов. В то же время было дано много различных доказательств спектральной теоремы. Соответствующие ссылки читатель найдет в § X.9.

Работа Карлемана показала, что одна симметричность не является достаточным условием для получения обобщения спектральной теоремы для неограниченных операторов.. По фон Нейману [7; стр. 72], понятие неограниченного самосопряженного оператора принадлежит Эрхарду Шмидту, заметившему (фон Нейман [7; стр. 62]), что для получения спектрального разложения необходимо сосредоточить внимание на таких операторах. Следует иметь в виду, что вместо терминов «симметрический» и «самосопряженный» фон Нейман и некоторые другие авторы используют термины «эрмитов» и «гипермаксимальный эрмитов».

График оператора впервые рассмотрел фон Нейман [16], хотя еще до этого он получил результаты, изложенные в § 1. Понятие графика оператора из одного гильбертова пространства в другое систематически использовалось Мерреем [4]. Тот результат, что всюду определенный симметрический оператор ограничен и самосопряжен, по существу принадлежит Хеллингеру и Тёплицу [1]; см. также Стоун [3; стр. 59], Стоун и Тамаркин [1] и фон Нейман [7; стр. 107].

Леммы 2.1 и 2.2 в явной форме были даны Стоуном [3; стр. 142, 145—146]. Относительно теоремы 2.3 см. фон Нейман [7; стр. 92], Ф. Рисс [14; стр. 51] и Стоун [3; стр. 180] и ссылки, приведенные ранее. Операционное исчисление, описанное в теоремах 2.6 и 2.7, принадлежит Стоуну [3; гл. VI, § 2] и фон Нейману [16]. Теорема 2.10 восходит к работе Стильтьеса и была получена для ограниченных операторов Хеллингером [1] и для неограниченных — Стоуном [3; стр. 163, 183].

Спектральное представление. Задача установления унитарной эквивалентности двух самосопряженных операторов тесно связана с теориями спектрального представления и спектральных типов. Первая часть § 3 тесно связана с результатами Стоуна [3; гл. VII], распространившего на неограниченные операторы теорию Хеллингера [1] и Хана [5] об ограниченных формах. См. также Ахиезер и Глазман [1; § 69—73], Халмош [6], Накано [10, 11], Плеснер и Рохлин [1][1]), Сигал [5] и Веккен [2].

Аналитическое представление, описанное в § 3, получено Бейдом и Шварцем [1]. Они несколько улучшили результат Маутнера [1] о разложениях по абстрактным собственным функциям.

Результат Маутнера был также уточнен и использован Гордингом [1] и Ф. Браудером [1][2]). Эти теории рассматриваются в следующих главах о дифференциальных уравнениях.

Расширение симметрических операторов. Задача о том, имеет ли данный симметрический оператор самосопряженное расширение, имеет первостепенное значение при решении вопроса о возможности применения спектральной теоремы. Если решение задачи положительно, то важно знать, какой вид имеют самосопряженные расширения и как они связаны с исходным оператором. Все эти сложные задачи рассмотрены в § 4. Основные теоремы первой половины этого параграфа принадлежат фон Нейману [7] и были также исследованы Стоуном [3; гл. IX]. Метод, использованный нами, однако, ближе к методу Калкина [1]. Он имеет то преимущество, что дает абстрактный подход к выбору самосопряженных расширений путем наложения соответствующих ограничений («граничных условий») на область определения самосопряженного оператора. Читатель увидит, однако, что развитие этого подхода, данное нами, в деталях существенно отличается от метода Калкина [1].

В § 4 мы рассмотрели симметрический оператор T с плотной областью определения в $\mathfrak{H}$ и нашли расширения T, являющиеся самосопряженными операторами в $\mathfrak{H}$. Существует по крайней мере два пути обобщения этой задачи. Первый из них — отказаться от требования плотности области определения T и предполагать, что оператор T симметричен в том смысле, что $(Tx, y) = (x, Ty)$ для всех $x, y \in \mathfrak{D}(T)$. Эта задача была рассмот-

[1]) См. также Плеснер [3*].— *Прим. ред.*

[2]) Точнее, Гордингом и Браудером было показано, что условиям Маутнера удовлетворяют эллиптические операторы. — *Прим. ред.*

рена для ограниченных операторов М. Крейном [9] и для неограниченных — Красносельским [1, 2, 4]. Другой возможный путь обобщения — искать самосопряженные расширения, но разрешить расширенному оператору действовать в гильбертовом пространстве, содержащем исходное. В § X.9 мы обсуждали некоторые связанные с этим задачи, рассмотренные Наймарком [3], Секефальви-Надем [11] и другими авторами. Можно показать, что любой симметрический оператор с произвольными индексами дефекта имеет самосопряженное расширение в некотором большем гильбертовом пространстве (см. Наймарк [7, 8] или Секефальви-Надь [11; § 2])[1]. Отсюда вытекает, что симметрический оператор может быть представлен в виде, напоминающем спектральную теорему, но полной аналогии здесь, конечно, нет. За более подробным обсуждением этих вопросов читатель может обратиться к статьям, указанным в приложении I книги Ахиезера и Глазмана [1].

Расширение с помощью преобразования Кэли. Ввиду важности и частой применимости этого способа дадим краткую схему того, как можно использовать преобразование Кэли для установления существования самосопряженного расширения симметрического оператора. Пусть T — симметрический оператор с областью определения $\mathfrak{D}(T)$, плотной в $\mathfrak{H}$. Если $x \in \mathfrak{D}(T)$, то мы имеем

$$\begin{aligned} |(T \pm iI)x|^2 &= (Tx, Tx) \mp i(x, Tx) \pm i(Tx, x) + (x, x) = \\ &= |Tx|^2 + |x|^2 \geqslant |x|^2. \end{aligned}$$

Поэтому если $(T \pm iI)x = 0$, то $x = 0$, и, таким образом, операторы $T \pm iI$ имеют обратные. Пусть V — оператор с областью определения $\mathfrak{D}(V) = (T + iI)\mathfrak{D}(T)$ и

$$Vy = (T - iI)(T + iI)^{-1}y, \qquad y \in \mathfrak{D}(V).$$

Оператор V называется *преобразованием Кэли* оператора T. Если $y \in \mathfrak{D}(V)$, то пусть x — такой элемент в $\mathfrak{D}(T)$, что $y = (T + iI)x$; следовательно, $x = (T + iI)^{-1}y$. Так как $|(T + iI)x|^2 = |(T - iI)x|^2$ для всех $x \in \mathfrak{D}(T)$, то

$$|y|^2 = |(T + iI)x|^2 = |(T - iI)x|^2 = |Vy|^2$$

для всех $y \in \mathfrak{D}(V)$. Тем самым показано, что преобразование Кэли симметрического оператора *изометрично*, но, вообще говоря, не является всюду определенным или обратимым. Обратно, если W — любой изометрический оператор, для которого $(I - W)\mathfrak{D}(W)$ всюду плотно, и если S определен по формуле

$$Sx = i(I + W)(I - W)^{-1}x, \qquad x \in (I - W)\mathfrak{D}(W),$$

[1]) Этот результат полностью принадлежит М. А. Наймарку [7, 8]. — *Прим. ред.*

то S — симметрический оператор с областью определения $(I-W)\mathfrak{D}(W)$. Более того, если эту операцию применить к преобразованию Кэли V оператора T, то $S=T$. Следовательно, существует взаимно однозначное соответствие между симметрическими операторами T с плотной областью определения и изометрическими операторами V, для которых $(I-V)\mathfrak{D}(V)$ плотно в $\mathfrak{H}$. Оператор T замкнут тогда и только тогда, когда замкнут V; аналогично если $T_1 \subseteq T_2$, то их преобразования Кэли связаны соотношением $V_1 \subseteq V_2$, и обратно. Наконец, T самосопряжен тогда и только тогда, когда V унитарен.

Поэтому ясно, что задачу нахождения самосопряженных расширений симметрического оператора T можно рассматривать как задачу нахождения унитарных расширений преобразования Кэли для T. Предположим для простоты, что T замкнут, тогда $\mathfrak{D}(V)$ и $\mathfrak{R}(V)$ — замкнутые подпространства. Положим $\mathfrak{D}_+ = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{D}(V)$ и $\mathfrak{D}_- = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{R}(V)$ и обозначим размерности этих подпространств через d_+ и d_- соответственно. Можно доказать, что $\mathfrak{D}_+$ и $\mathfrak{D}_-$ совпадают с многообразиями, введенными в определении 4.9, и что изометрический оператор V унитарен тогда и только тогда, когда $\mathfrak{D}(V) = \mathfrak{H} = \mathfrak{R}(V)$, т. е. если $d_+ = 0 = d_-$. Ясно также, что замкнутый изометрический оператор имеет унитарное расширение тогда и только тогда, когда существует изометрическое отображение $\mathfrak{D}_+$ на $\mathfrak{D}_-$, а это может быть тогда и только тогда, когда $d_+ = d_-$.

Этот изящный процесс расширения оператора был предложен фон Нейманом [7] и использовался также Стоуном [3; гл. IX], Риссом и Секефальви-Надем [1; § 123] и Ахиезером и Глазманом [1; § 78—80].

Максимальные симметрические операторы. Если T — симметрический оператор с плотной областью определения, то он имеет собственные симметрические расширения лишь при условии, что оба его индекса дефекта отличны от нуля. *Максимальным симметрическим оператором* называется оператор, не имеющий собственных симметрических расширений; следовательно, замкнутый симметрический оператор максимален, если по крайней мере один из его индексов дефекта равен нулю. Если оба индекса равны нулю, то оператор самосопряжен. Если же $d_+ \neq 0$, $d_- = 0$ или $d_+ = 0$, $d_- \neq 0$, то оператор не самосопряжен и не имеет самосопряженных расширений (в том же гильбертовом пространстве). Следует отметить один интересный принадлежащий фон Нейману результат о приведении симметрических операторов к стандартному виду [7; стр. 98] (см. также Стоун [3; стр. 351] и Ахиезер и Глазман [1; § 82]).

Пусть $\mathfrak{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство, $\{x_1, x_2, \ldots\}$ — полная ортонормированная система в $\mathfrak{H}$, а V_1 — оператор сдвига, определяемый в $\mathfrak{H}$ по формуле $V_1\left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_{k+1}$. Нетрудно видеть, что V_1 изометричен, а $\mathfrak{D}(I-V_1)$ плотно в $\mathfrak{H}$, так что V_1 является преобразованием Кэли некоторого симметрического оператора T_1 с индексами дефекта $d_+=0$ и $d_-=1$. Оператор T_1 называется *элементарным симметрическим оператором*. Можно доказать, что если T — максимальный симметрический оператор с индексами $d_+=0$, $d_-=n$ (где n — любое порядковое число), то $\mathfrak{H}$ можно разложить в прямую сумму попарно ортогональных подпространств $\mathfrak{H}_0, \mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_n$, таких, что оператор T самосопряжен в $\mathfrak{H}_0$ и является элементарным симметрическим оператором в пространствах $\mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_n$. Случай $d_+=n$, $d_-=0$ можно исследовать, рассмотрев оператор $-T$ с индексами 0, n или оператор сдвига в противоположном направлении.

Индексы дефекта. Из теоремы 4.19 следует, что понятие индексов дефекта не зависит от чисел $\pm i$, используемых в их определении. Г. Вейль [5] показал это в случае дифференциальных операторов. Если T — линейный оператор с плотной областью определения, то через $\gamma(T)$ обозначим множество всех комплексных чисел λ, таких, что обратный оператор $(T-\lambda I)^{-1}$ существует и ограничен на своей области определения. Множество $\gamma(T)$ называется *областью регулярности* оператора (или множеством *точек регулярного типа*) и содержит резольвентное множество $\varrho(T)$ и, быть может, часть остаточного спектра. Можно показать, что это — открытое множество; рассуждения, опирающиеся на идею непрерывного продолжения, приводят к выводу (см. Ахиезер и Глазман [1; § 78]), что размерность дефектных пространств $\mathfrak{H} \ominus (T-\lambda I)\mathfrak{D}$ постоянна в каждой связной компоненте $\gamma(T)$. (Этот результат принадлежит Крейну и Красносельскому [2]. Он показывает, что если T — симметрический оператор и по крайней мере одно вещественное число лежит в $\gamma(T)$, то индексы дефекта равны. Последний результат был установлен Калкиным [3].)

Полуограниченные операторы. Фон Нейман [7; стр. 103] доказал, что полуограниченный симметрический оператор может быть расширен до самосопряженного оператора со сколь угодно малым изменением границы. Он высказал предположение, что на самом деле нет необходимости в увеличении границы, и это предположение было доказано Стоуном [3; стр. 388] и Фридрихсом [3; I]. Упрощение доказательства Фридрихса, данное Фрейденталем [3], приведено в тексте. Другие доказательства теоремы см. Калкин [3] и Эберлейн [2; стр. 699], а приложения к уравнениям в частных производных см. Фридрихс [3].

Расширение Фридрихса определяет специальное расширение симметрического полуограниченного оператора. Крейн [9] провел систематическое изучение всех расширений полуограниченного оператора, а также рассмотрел приложения к дифференциальным уравнениям. Подход Крейна близок к методу расширения с помощью преобразования Кэли и кратко рассмотрен Риссом и Секефальви-Надем [1; § 125].

Унитарные полугруппы (см. также замечания в § VIII. 10). Теорема 6.1 была сформулирована в 1930 г. Стоуном [10; III] для случая группы унитарных операторов. Были даны многочисленные доказательства этой знаменитой и важной теоремы; см., например, Стоун [16], фон Нейман [10], Бохнер [7], Ф. Рисс [22], Секефальви-Надь [14], Накано [17] и Купер [3]. См. также Рисс и Секефальви-Надь [1; § 137—140], где дано два доказательства, в том числе доказательство Бохнера (основанное на его хорошо известной теореме о моментах), и Ахиезер и Глазман [1; § 62]. Дополнительные ссылки см. у Хилле [1; гл. IX]. Применения теоремы Стоуна к эргодической теории и квантовой механике см. фон Нейман [20] и Маеда [1]. Плеснер [1] получил аналог теоремы Стоуна для полугруппы операторов, удовлетворяющих условию $U^*U=I$, но необязательно удовлетворяющих равенству $UU^*=I$.

Теоремы, дающие представление групп и полугрупп самосопряженных, нормальных и изометрических операторов, можно найти у Хилле [1; гл. XIX], Рисса и Секефальви-Надя [1; § 141] и Секефальви-Надя [3; стр. 73—76], [14].

Теорема Стоуна была распространена на унитарные представления локально компактных абелевых групп Наймарком [1], Амброзом [4], Годманом [5], Арну [1] и Филлипсом [5]. (См. также Люмис [1; стр. 147].)

Каноническое разложение. Результаты и методы § 7 принадлежат фон Нейману [16]. Читатель может также обратиться к работам Рисса и Секефальви-Надя [1; § 110] по поводу ограниченных операторов и Стоуна [3; стр. 329—333] и Секефальви-Надя [3; стр. 52—53] по поводу неограниченных операторов. Отметим, что лемма 7.1 показывает, что если T — замкнутый оператор с плотной областью определения, то T^*T имеет плотную область определения. Это утверждение контрастирует с примером Наймарка [6] замкнутого симметрического оператора T с плотной областью определения, но такого, что областью определения T^2 является лишь $\{0\}$.

Теоремы о моментах. Детальное изучение различных теорем о моментах, исторические замечания и многочисленные ссылки читатель может найти в превосходной книге Шохата и Тамаркина [1]. Более сжатое изложение дано Уиддером [1; гл. III]. О связях между теоремой Рисса о представлении функционалов в C [0, 1] и теоремой о моментах см. Гильдебрандт [8] и Гильдебранд и Шёнберг [1].

Теорема 8.3 принадлежит Бохнеру [6; § 20] и играет важную роль в гармоническом анализе. Она также доказана у Э. Хопфа [1; § 4] и Ахиезера и Глазмана [1; § 60]. Накано [18] доказал этот результат, используя теорему Стоуна. Тесно связанная с ним теорема 8.4 принадлежит Герглотцу [1]; Рисс и Секефальви-Надь [1; § 53] дали изящное доказательство этого результата, используя лемму Фейера и Ф. Рисса. Обобщения теоремы Бохнера на локально компактные группы были даны А. Вейлем [1; § 30], Райковым [3], Картаном и Годманом [1, 2] и Люмисом [1; стр. 142][1]).

Матрицы Якоби и проблема моментов. Исследование проблемы моментов, проведенное в § 8, может быть значительно углублено путем применения теории неограниченных симметрических операторов в гильбертовом пространстве к *матрицам Якоби*. Бесконечная матрица $\{a_{jk}\}$, $j, k \geqslant 0$, называется *матрицей Якоби*, если

(I) $$\overline{a}_{pq} = a_{qp} \quad \text{для всех } p, q;$$

(II) $$a_{pq} = 0\,, \qquad |p-q| > 1.$$

Всякая такая матрица определяет неограниченный оператор A в гильбертовом пространстве последовательностей l_2, если положить

(a) $$\mathfrak{D}(A) = \{x = [x_i] \in l_2 \mid \sum_{p=1}^{\infty} |a_{p,p-1}x_{p-1} + a_{p,p}x_p + a_{p,p+1}x_{p+1}|^2 < \infty\},$$

(b) $$Ax = [a_{p,p-1}x_{p-1} + a_{p,p}x_p + a_{p,p+1}x_{p+1}].$$

В (a) и (b) мы принимаем $a_{0,-1} = 0$. При этом можно показать, что оператор A замкнут, его сопряженный A^* симметричен, индексы дефекта A^* равны (1, 1) или (0, 0). Последовательность многочленов P_n, определяемая по формулам

$$P_{-1}(t) = 0, \qquad P_0(t) = 1,$$
$$a_{k,\,k+1}P_{k+1}(t) = -a_{k,\,k-1}P_{k-1}(t) + (t - a_{k,\,k})\,P_k(t),$$

---

1) Существенные обобщения проблемы моментов принадлежат М. С. Лившицу [6*], М. Г. Крейну [7, 11]; см. также работы Ю. М. Березанского [4*, 5*], А. Г. Костюченко и Б. С. Митягина [1*, 2*], Р. С. Исмагилова [1*], Г. И. Эскина [1*].— *Прим. ред.*

называется последовательностью многочленов, ассоциированной с матрицей $\{a_{jk}\}$. Можно показать, что индексы дефекта A^* равны (1, 1) тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=0}^{\infty} |P_n(z)|^2 < \infty$$

при всяком невещественном z, и равны (0, 0) тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=0}^{\infty} |P_n(z)|^2 = \infty$$

при всяком невещественном z.

Предположим теперь, что дана последовательность постоянных c_j, $j \geqslant 0$, и что эта последовательность может быть представлена в виде

$$[*] \qquad c_j = \int_{-\infty}^{\infty} t^j \mu(dt), \qquad j \geqslant 0,$$

где μ — положительная борелевская мера на вещественной оси, такая, что все интегралы

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t|^{2j} \mu(dt), \qquad j \geqslant 0,$$

сходятся. Единственна ли мера μ? Дать решение этой фундаментальной задачи теории моментов можно следующим образом. Пусть $\{P_n(t)\}$ — последовательность многочленов, определяемых ортогонализацией последовательности элементарных многочленов $1, t, t^2, \ldots$ относительно меры μ. То есть, пусть P_n — последовательность многочленов, определяемая условиями

(I) P_n — многочлен порядка n с положительным старшим коэффициентом;

$$\text{(II)} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} P_n(t)\overline{P_m(t)}\,\mu(dt) = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

При этом ясно, что матрица $\{a_{jk}\}$, определяемая по формуле

$$a_{jk} = \int_{-\infty}^{\infty} tP_j(t)\,\overline{P_k(t)}\,\mu(dt), \qquad j, k \geqslant 0,$$

является матрицей Якоби, и легко видеть, что $\{P_j\}$ — последовательность многочленов, ассоциированная с этой матрицей Якоби.

Можно показать, что уравнения [*] определяют положительную меру μ однозначно тогда и только тогда, когда оператор A^* имеет индексы (0, 0). Если A^* имеет индексы (1, 1), то семейство всех положительных мер μ, удовлетворяющих [*], может быть построено при помощи множества всех самосопряженных расширений A^*.

Очень сжатое и ясное изложение набросанной здесь теории см. в работе Ахиезера [1]. Более подробное и полное изложение можно найти у Стоуна [3; стр. 530—614]. Дополнительные результаты, обобщения, связи с теорией непрерывных дробей и т. п. можно найти в монографии Шохата и Тамаркина [1] [1]).

Разные замечания. Можно получить несколько специальных результатов для эрмитовых операторов, определяемых ядром $K(x, y)$, удовлетворяющим неравенству

$$\int_S |K(x, y)|^2 \mu(dy) < \infty$$

для почти всех по μ-мере x. Изложение этой теории, принадлежащей Карлеману, см. в работах Карлемана [1], Стоуна [3; стр. 397—424]; см. также упражнение 9.51.

Оператор K в гильбертовом пространстве называется *симметризуемым* относительно эрмитова оператора H, если оператор HK является самосопряженным. Некоторые свойства симметрических преобразований можно распространить на симметризуемые преобразования. См., в частности, Заанен [5; особенно стр. 370—391].

[1]) Много результатов по проблеме моментов, в том числе и многомерной, содержится в книге Ю. М. Березанского [4*].— *Прим. ред.*

ГЛАВА XIII

Обыкновенные дифференциальные операторы

1. Введение. Элементарные свойства формальных дифференциальных операторов

Дифференциальные операторы образуют наиболее важный для приложений класс операторов. Исследование этих операторов затрудняется тем обстоятельством, что они всегда неограничены. Поэтому задача выбора области определения для дифференциальных операторов далеко не тривиальна; исследование симметрических неограниченных операторов в § XII.4 показывает, что выбор области определения для неограниченных операторов может быть решающим моментом в этой теории. Точнее, дело обстоит так: пусть нам задан «формальный дифференциальный оператор», т. е. выражение вида

$$\tau = a_n(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^n + a_{n-1}(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^{n-1} + \ldots + a_0(t).$$

Понятно, в каком смысле можно «применять» это выражение к f, если f, скажем, принадлежит C^n; этим мы определим оператор с областью определения C^n (с областью значений, принадлежащей C); «применив» этот формальный дифференциальный оператор к более широким или более узким классам функций, мы можем получить операторы с более широкой или более узкой областью определения. Теперь нужно выбрать из этих определений самое выгодное.

При этом можно руководствоваться несколькими принципами. Прежде всего, для того чтобы применить абстрактную теорию гильбертова пространства из гл. XII, необходимо отнести все операторы к гильбертову пространству функций, интегрируемых в квадрате. И тогда, как следует из гл. XII, вопросом первостепенной важности будет вопрос о сопряженном операторе.

Это значит, что, выбрав предварительно некую область функций, к которым можно применить формальный дифференциальный оператор τ, мы должны попытаться найти оператор, сопряженный полученному нами неограниченному оператору в гильбертовом пространстве. Далее показано, что все эти задачи допускают удовлетворительное решение.

Еще несколько слов об особенностях изложения в этой главе. В некоторых случаях основные трудности доказательства связаны с формальной стороной дела. Поэтому иногда мы будем давать лишь формальные детали доказательства, предоставляя читателю проведение подробного анализа.

Везде в этой главе буква I будет обозначать интервал действительной оси. Интервал I может быть открытым, полуоткрытым или замкнутым. Интервал $[a, \infty)$ считается полуоткрытым; интервал $(-\infty, \infty)$ — открытым. Таким образом, замкнутый интервал является компактным множеством. Конец t интервала I, не принадлежащий I, называется *свободным концом* интервала I. В этом определении мы допускаем, что t может равняться $\pm\infty$. Значит, действительная ось имеет два свободных конца, интервал $[0, 1)$ — один свободный конец. Концевая точка интервала I, которая принадлежит I, называется *фиксированным концом.*

Пространства $C^n(J)$, где J — компактный интервал, были определены в гл. IV. Если $f \in C^n(J)$, то мы условимся писать норму функции f в виде $|f|^{(n)}$, всякий раз когда желательно выделить число n. Пространство

$$C^\infty(J) = \bigcap_{n=0}^{\infty} C^n(J)$$

всех бесконечно дифференцируемых функций будет играть большую роль в дальнейших рассуждениях. Если положить

$$|f|^{(\infty)} = \sum_{n=0}^{(\infty)} 2^{-n} \frac{|f|^{(n)}}{1+|f|^{(n)}},$$

то $C^\infty(J)$ становится F-пространством. Если I является некомпактным интервалом, то мы определим пространство $C^n(I)$, где n может быть равно ∞, как набор всех функций f, определенных на I, для которых сужение $f|J$ на любой компактный подинтервал J из I принадлежит $C^n(J)$. Если $\{J_k\}$ — неубывающая последовательность компактных подинтервалов из I, объединение которых совпадает с I, то мы положим

$$|f|^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \frac{|(f|J_k)|^{(n)}}{1+|(f|J_k)|^{(n)}}.$$

По этому определению $C^n(I)$ становится F-пространством вообще и B-пространством в случае, когда $n < \infty$ и I — компакт.

Введенная так норма определяет топологию в $C^n(I)$; в дальнейшем, говоря о топологии в $C^n(I)$, мы будем иметь в виду именно ее. Почти очевидно, что топология для $C^n(I)$ не зависит от выбора последовательности $\{J_k\}$ компактных подинтервалов из I, примененных в определении топологии.

1. Определение. Выражение

$$\tau = a_n(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^n + a_{n-1}(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^{n-1} + \ldots + a_0(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^i$$

называется *формальным дифференциальным оператором порядка* n [1]) на интервале I, если комплекснозначные функции a_i принадлежат $C^\infty(I)$ и функция a_n отлична от нуля в любой точке из I. Функции a_i называются *коэффициентами* τ, а функция a_n — *старшим коэффициентом*.

Если коэффициенты оператора τ принадлежат $C^\infty(I)$, но старший коэффициент обращается в нуль в некоторой точке из I, то τ называется *иррегулярным формальным дифференциальным оператором*. Чтобы подчеркнуть различие между случаем, когда коэффициенту a_n разрешается обратиться в нуль, и противоположным случаем, иногда формальный дифференциальный оператор называется *регулярным формальным дифференциальным оператором*.

Почему в определении регулярного дифференциального оператора требуется, чтобы $a_n(t) \neq 0$, станет понятным дальше, при доказательстве теоремы 3.

2. Определение. Через $A^n(I)$ обозначим пространство всех функций f, которые имеют $(n-1)$ непрерывных производных в I и для которых $f^{(n-1)}$ абсолютно непрерывна в любом компактном подинтервале из I. Таким образом, $f^{(n)}$ существует почти всюду и интегрируема на каждом компактном подинтервале из I. Если c — фиксированная концевая точка интервала I, то утверждение, что f имеет непрерывную производную в I или (в случае когда I — компакт) принадлежит $C^1(I)$, означает, что f' непрерывна слева (справа) в точке c.

Следует отметить, что если τ — формальный дифференциальный оператор порядка n на интервале I и $f \in A^n(I)$, то выражение τf определяется совершенно естественно: мы полагаем

$$(\tau f)(t) = a_n(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^n f(t) + \ldots + a_0(t) f(t).$$

Функция τf определена почти всюду и интегрируема на каждом замкнутом подинтервале из I.

[1]) Часто называют формальный дифференциальный оператор дифференциальным выражением.— *Прим. ред.*

Когда оператор τ записан в классических обозначениях, таких, как d^n/dt^n, мы, следуя традиции, пишем $(d^n/dt^n)f(t)$ или $(d/dt)^n f(t)$ вместо $(d^n f/dt^n)(t)$. Часто вместо выражения $(d^n/dt^n)f(t)$ употребляется $f^{(n)}(t)$.

Следующая теорема дает основную информацию о существовании и единственности решений дифференциальных уравнений.

3. Теорема. *Пусть τ — формальный дифференциальный оператор порядка n на интервале I. Предположим, что g — измеримая комплекснозначная функция, интегрируемая на каждом компактном подинтервале из I. Пусть $t_0 \in I$, а $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ — произвольная система n комплексных чисел. Тогда существует единственная функция $f \in A^n(I)$, такая, что*

$$\text{(a)} \qquad \tau f = g,$$

$$\text{(b)} \qquad \left(\frac{d}{dt}\right)^i f(t_0) = c_i, \qquad i = 0, \ldots, n-1.$$

Доказательство. Мы дадим формальную часть доказательства, оставляя различные аналитические пробелы, которые должны быть заполнены читателем. Прежде всего рассмотрим случай, когда I замкнут. Введем пространство функций $F(t) = [f_0(t), f_1(t), \ldots$ $\ldots, f_{n-1}(t)]$ со значениями в n-мерном комплексном евклидовом пространстве E^n. Затем уравнение (a) заменим системой уравнений

$$\text{(a}'\text{)} \qquad \begin{aligned} &\frac{d}{dt} f_0(t) - f_1(t) = 0, \\ &\frac{d}{dt} f_1(t) - f_2(t) = 0, \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\frac{d}{dt} f_{n-1}(t) + \frac{1}{a_n(t)} \{a_{n-1}(t) f_{n-1}(t) + \ldots + a_0(t) f_0(t)\} = \frac{1}{a_n(t)} \cdot g(t). \end{aligned}$$

Простое исследование показывает, что существует взаимно однозначное соответствие между решениями уравнения (a) n-го порядка и решениями системы уравнений (a′). Система (a′) может быть записана в более компактной форме так:

$$\frac{d}{dt} F(t) + A(t) F(t) = G(t),$$

где $F(t) = [f_0(t), \ldots, f_{n-1}(t)]$, $\quad G(t) = \left[0, \ldots, 0, \frac{1}{a_n(t)} g(t)\right]$

и $A(t)$ — линейное преобразование в E^n, определенное матрицей $A_{ij}(t)$,

$$A_{ij}(t)=\delta_{i+1,\,j}, \qquad 0\leqslant i<n-1, \qquad 0\leqslant j\leqslant n-1,$$
$$A_{n-1,\,j}(t)=[a_n(t)]^{-1}a_j(t), \qquad 0\leqslant j\leqslant n-1.$$

Аналогично граничное условие (b) эквивалентно условию

(b′) $$F(t_0)=C,$$

где C есть вектор $C=[c_0,\ c_1,\ \ldots,\ c_{n-1}]$. Далее, (a′) и (b′) вместе эквивалентны интегральному соотношению

(e) $$F(t)+\int_{t_0}^{t}A(s)F(s)\,ds=C+\int_{t_0}^{t}G(s)\,ds.$$

Если мы положим $C+\int_{t_0}^{t}G(s)\,ds=H(t)$ и введем оператор Φ в пространстве $\{L_1(I)\}^n$ всех вектор-функций $Y(t)=[y_0(t),\ \ldots$ $\ldots,\ y_{n-1}(t)]$ с компонентами $y_i(t)$, интегрируемыми на I, полагая $(\Phi Y)(t)=\int_{t_0}^{t}A(s)Y(s)\,ds$, то (e) может быть записано в виде

(e′) $$(I+\Phi)F=H.$$

По индукции имеем

$$|(\Phi^kY)(t)|=\left|\int_{t_0}^{t}A(s)(\Phi^{k-1}Y)(s)\,ds\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{K^{k-1}|Y|}{(k-1)!}\int_{t_0}^{t}|A(s)|\cdot|s-t_0|^{k-1}\,ds\leqslant\frac{K^k|Y|}{k!}|t-t_0|^k,$$

где через $|v|$ обозначена норма вектора v, а через $|A|$ — норма оператора A в n-мерном евклидовом пространстве и где $K=$ $=\max\limits_{t\in I}|A(t)|$. Таким образом, если мы введем норму

$$|Y|=\int_I|Y(t)|\,dt$$

в B-пространстве $\{L_1(I)\}^n$, то получим $|\Phi^k|\leqslant K_1^k/k!$, где $K_1=$ $=K\max\limits_{t\in I}|t-t_0|$, так что уравнение (e′) имеет единственное решение (см. лемму VII.3.4)

$$F=(I+\Phi)^{-1}H=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\Phi^jH.$$

Так как все члены в уравнении (e), кроме первого, являются абсолютно непрерывными, то отсюда следует, что F — абсолютно непрерывная функция. Таким образом, в частном случае, когда I — замкнутый интервал, теорема 1 доказана.

Теперь предположим, что неизвестно, замкнут ли I. Тем не менее из данного выше доказательства следует, что если J — любой замкнутый подинтервал интервала I, содержащий точку t_0, то существует единственная функция $f_J \in A^n(J)$, такая, что

(a) $\qquad \tau f_J(t) = g(t) \qquad$ почти всюду в J,

(b) $\qquad \left(\frac{d}{dt}\right)^i f_J(t_0) = c_i, \qquad i = 0, \ldots, n-1.$

Из единственности f_J следует, что $f_{J_1}(t) = f_{J_2}(t)$ для $t \in J_1 \cap J_2$, так что, полагая

$$f(t) = f_J(t), \qquad t \in J,$$

для произвольного замкнутого подинтервала J из I, мы определяем единственным образом функцию $f \in A^n(I)$, удовлетворяющую (a) и (b). Единственность f следует непосредственно из соответствующего результата для замкнутых подинтервалов J интервала I.

4. Следствие. *Если g имеет k непрерывных производных в I, то f имеет $n+k$ непрерывных производных в I.*

Доказательство. Очевидно, не уменьшая общности, мы можем предполагать, что I — ограниченный и замкнутый интервал. Тогда

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^n f(t) = [a_n(t)]^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) \left(\frac{d}{dt}\right)^i f(t) + g(t).$$

Поскольку $f \in A^n(I)$, все члены в правой части принадлежат $C(I)$ и, следовательно, $f \in C^n(I)$. Поэтому все члены в правой части принадлежат $C^1(I)$, так что $f \in C^{n+1}(I)$. Очевидно, что мы можем продолжить это рассуждение по индукции и получить окончательный вывод: $f \in C^{n+k}(I)$, ч. т. д.

5. Следствие. *Пусть функции a_i (коэффициенты формального дифференциального оператора τ), функция g и начальные величины c_i все непрерывно (или аналитически) зависят от одного дополнительного параметра:*

$$a_i = a_i(t, \lambda), \qquad g = g(t, \lambda), \qquad c_i = c_i(\lambda).$$

Тогда решение $f = f(t, \lambda)$ уравнения $\tau f = g$ и его первые $n-1$ производных непрерывно (или аналитически) зависят от параметра λ равномерно по t в каждом компактном подинтервале интервала I.

Доказательство. Мы рассмотрим только случай, когда I — замкнутый интервал. Доказательство остальных случаев предоставляется читателю.

Применим обозначения теоремы 3. Из наших предположений легко следует, что элемент $H = H(\lambda)$ пространства $\{L_1(I)\}^n$ и оператор $\Phi = \Phi(\lambda)$ непрерывно (аналитически) зависят от параметра λ. Поэтому вектор $F(\lambda) \in \{L_1(I)\}^n$, который определяется уравнением

$$F(\lambda) = (I + \Phi(\lambda))^{-1} H(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j (\Phi(\lambda))^j H(\lambda),$$

также непрерывно (аналитически) зависит от λ. Так как

$$F(t, \lambda) = -\int_{t_0}^{t} A(s, \lambda) F(s, \lambda)\, ds + H(t, \lambda),$$

то $F(t, \lambda)$ непрерывно (аналитически) зависит от λ равномерно по $t \in I$. Пусть $F(t, \lambda) = [f_0(t, \lambda), \ldots, f_{n-1}(t, \lambda)]$. Так как $f_i(t, \lambda) = (d^i/dt^i) f(t, \lambda)$, $i = 0, \ldots, n-1$, то $f(t, \lambda)$ и ее первые $n-1$ производных являются непрерывными (аналитическими) функциями λ равномерно по $t \in I$, ч. т. д.

Если мы исследуем *однородное* уравнение $\tau f = 0$, то ясно, что существует линейное взаимно однозначное соответствие между наборами n комплексных чисел $[c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}]$ и решениями уравнения $\tau f = 0$, для которых $f^{(i)}(t_0) = c_i$, $i = 0, \ldots, n-1$. Таким образом, мы получаем: *множество решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка образует n-мерное линейное векторное пространство.*

2. Сопряженные операторы и граничные значения дифференциальных операторов

Везде в этом разделе τ будет формальным дифференциальным оператором порядка n на интервале I. Если специально не оговорено противное, то в дальнейшем мы предполагаем, что τ является регулярным. Наша цель будет состоять в том, чтобы определить линейные операторы в пространстве $L_2(I)$, которые соответствуют τ, и изучить их сопряженные и расширения. Однако, прежде чем это сделать, необходимо определить понятие сопряженного оператора τ^* для формального дифференциального оператора τ, регулярного или иррегулярного, и доказать фундаментальную формулу, известную под названием формулы Грина, которая связывает τ и τ^*.

Для простоты сначала предположим, что I — конечный замкнутый интервал $[a, b]$. Пусть f и g — функции из $C^n(I)$. Рассмотрим интеграл

$$\int_a^b (\tau f)(t)\overline{g(t)}\,dt = \sum_{k=0}^{n} \int_a^b a_k(t)\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^k f(t)\right]\overline{g(t)}\,dt.$$

Интегрируя k-й член в правой части k раз по частям, мы получаем, что

$$\int_a^b \left[\left(\frac{d}{dt}\right)^k f(t)\right] a_k(t)\overline{g(t)}\,dt =$$

$$= -\int_a^b \left[\left(\frac{d}{dt}\right)^{k-1} f(t)\right]\left[\left(\frac{d}{dt}\right)\{a_k(t)\overline{g(t)}\}\right]dt + $$

$$+ a_k(t)\overline{g(t)}\left(\frac{d}{dt}\right)^{k-1} f(t)\Big|_a^b = \dots$$

$$\dots = (-1)^k \int_a^b f(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^k \{a_k(t)\overline{g(t)}\}\,dt +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1}\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^{i-1}\{a_k(t)\overline{g(t)}\}\right]\left(\frac{d}{dt}\right)^{k-i} f(t)\Big|_a^b .$$

Таким образом,

$$[*] \qquad \int_a^b (\tau f)(t)\overline{g(t)}\,dt = \int_a^b f(t)\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(\frac{d}{dt}\right)^k\{a_k(t)\overline{g(t)}\}\,dt +$$
$$+ F_b(f, g) - F_a(f, g),$$

где

$$F_t(f, g) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^{i-1}\{a_k(t)\overline{g(t)}\}\left(\frac{d}{dt}\right)^{k-i} f(t)\right].$$

Применяя правило Лейбница

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^j\{a_k(t)\overline{g(t)}\} = \sum_{l=0}^{j}\binom{j}{l}\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^{j-l} a_k(t)\right]\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^l \overline{g(t)}\right],$$

мы видим, что интеграл в правой части [*] может быть записан в виде $\int_a^b f(t)\,\overline{\tau^* g(t)}\,dt$, где τ^* — оператор вида

$$\tau^* = \sum_{j=0}^{n} b_j(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^j$$

и

$$b_j(t)=\sum_{k=j}^{n}(-1)^k\binom{k}{j}\left(\frac{d}{dt}\right)^{k-j}\overline{a_k(t)}.$$

Заметим, что если τ — регулярный формальный дифференциальный оператор, то $b_n(t)=(-1)^n\overline{a_n(t)}\neq 0$, поэтому τ^* — также (регулярный) формальный дифференциальный оператор.

Применяя теперь правило Лейбница к граничному члену, мы получаем формулу

$$\begin{aligned}F_t(f, g)=\sum_{0\leqslant j<i\leqslant k\leqslant n}(-1)^{i-1}\binom{i-1}{j}\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^{k-i}f(t)\right]\times\\ \times\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^{j}\overline{g(t)}\right]\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^{i-j-1}a_k(t)\right]=\\ =\sum_{\substack{0\leqslant j\leqslant i\leqslant n\\ 0\leqslant l\leqslant n-i}}(-1)^{i-1}\binom{i-1}{j}\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^{i-j-1}a_{l+i}(t)\right]f^{(l)}(t)\overline{g^{(j)}(t)}=\\ =\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-j-1}\sum_{i=j}^{n-l-1}(-1)^{i}\binom{i}{j}\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^{i-j}a_{l+i+1}(t)\right]f^{(l)}(t)\overline{g^{(j)}(t)}.\end{aligned}$$

Если $\{F_t^{lj}(\tau)\}$ — квадратная матрица порядка n $(0\leqslant l,\ j\leqslant n-1)$, элементы которой определяются уравнениями

$$F_t^{lj}(\tau)=\sum_{i=j}^{n-l-1}(-1)^i\binom{i}{j}\left(\frac{d}{dt}\right)^{i-j}a_{l+i+1}(t),\quad j+l\leqslant n-1,$$

$$F_t^{lj}(\tau)=0,\qquad j+l>n-1,$$

то граничный член записывается в виде

$$F_t(f, g)=\sum_{j,\, l=0}^{n-1}F_t^{lj}(\tau)f^{(l)}(t)\overline{g^{(j)}(t)}.$$

После этих предварительных замечаний мы можем дать некоторые основные определения.

1. Определение. Пусть τ — (регулярный или иррегулярный) формальный дифференциальный оператор на интервале I (не обязательно замкнутом). Матрица $\{F_t^{lj}(\tau)\}$ называется *граничной матрицей* для τ в точке $t\in I$. Билинейное выражение

$$F_t(f, g)=\sum_{j,\, l=0}^{n-1}F_t^{lj}(\tau)f^{(l)}(t)\overline{g^{(j)}(t)}$$

называется *граничной формой* для τ в точке t. Формальный дифференциальный оператор (регулярный или иррегулярный)

$$\tau^* = \sum_{j=0}^{n} b_j(t) \left(\frac{d}{dt}\right)^j,$$

где

$$b_j(t) = \sum_{k=j}^{n} (-1)^k \binom{k}{j} \left(\frac{d}{dt}\right)^{k-j} \overline{a_k(t)},$$

называется *формально сопряженным* оператором для τ. Если $\tau = \tau^*$, то говорят, что τ *формально самосопряжен* или *формально симметричен*. Если все *коэффициенты* a_j оператора τ действительны, то говорят, что τ *действительный*.

2. Лемма. *Если τ — (регулярный) формальный дифференциальный оператор, то граничная матрица для τ неособенная.*

Доказательство. Лемма следует из того, что

$$F_t^{lj}(\tau) = 0, \qquad j + l > n - 1,$$
$$F_t^{lj}(\tau) = (-1)^j a_n(t), \quad j + l = n - 1,$$

а, значит, определитель матрицы $\{F_t^{lj}(\tau)\}$ равен $(\pm 1)\{a_n(t)\}^n$ и, следовательно, нигде в нуль не обращается.

3. Определение. Пусть τ — регулярный или иррегулярный формальный дифференциальный оператор порядка n на интервале I; $H_\tau^n(I)$ обозначает множество всех функций f из $A^n(I)$, таких, что f и τf принадлежат $L_2(I)$, и пусть $H^n(I)$ обозначает множество всех функций f из $A^n(I)$, таких, что f и $f^{(n)}$ принадлежат $L_2(I)$.

Если I — замкнутый интервал и $a \in C^\infty(I)$, $f \in L_2(I)$, то $af \in L_2$. Следовательно, если $f \in H^n(I)$, то $\tau f = \sum_{i=0}^{n} a_i f^{(i)} \in L_2$, т. е. $H^n(I) \subseteq H_\tau^n(I)$. Если τ регулярный и $f \in H_\tau^n(I)$, то $f^{(n)} = a_n^{-1}\left(\tau f - \sum_{i=0}^{n-1} a_i f^{(i)}\right) \in L_2$, и поэтому $H_\tau^n(I)$ и $H^n(I)$ совпадают.

4. Теорема (*формула Грина*). *Пусть τ — регулярный или иррегулярный формальный дифференциальный оператор порядка n на конечном замкнутом интервале $I = [a, b]$. Если $f, g \in H_\tau^n(I)$, то*

$$\int_a^b (\tau f)(t)\overline{g(t)}\,dt = \int_a^b f(t)\overline{(\tau^* g)(t)}\,dt + F_b(f, g) - F_a(f, g).$$

Доказательство. Из приведенных выше рассуждений следует, что эта формула справедлива в случае, когда $f,\ g \in C^n(I)$. Однако эти рассуждения верны, если $f,\ g \in H^n_\tau(I)$.

Для дальнейшего удобно перечислить другие случаи, в которых формула Грина справедлива без предположения замкнутости I.

5. Следствие. *Если I — произвольный интервал, то формула Грина справедлива для любой пары функций $f,\ g \in H^n_\tau(I)$ (или даже $f \in H^n(I)$, $g \in A^n(I)$) при условии, что либо f, либо g обращается в нуль вне компактного подинтервала из I.*

Доказательство. Как и теорема 4, следствие 5 доказывается методом интегрирования по частям.

Дальше мы отмечаем одно важное свойство оператора τ^*, формально сопряженного дифференциальному оператору τ, регулярному или иррегулярному.

6. Лемма. *Пусть τ — (регулярный или иррегулярный) формальный дифференциальный оператор на интервале I. Тогда $\tau = (\tau^*)^*$.*

Доказательство. Если τ — оператор порядка n, то коэффициент $(d/dt)^i$ в $(\tau^*)^*$ равен

$$c_i(t) = \sum_{k=i}^{n} (-1)^k \binom{k}{i} \left(\frac{d}{dt}\right)^{k-i} \left(\sum_{j=k}^{n} (-1)^j \binom{j}{k} \left(\frac{d}{dt}\right)^{j-k} a_j(t)\right) =$$

$$= \sum_{\substack{j,\,k \\ i \leqslant k \leqslant j \leqslant n}} (-1)^j (-1)^k \binom{k}{i} \binom{j}{k} \left(\frac{d}{dt}\right)^{j-i} a_j(t) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left\{\sum_{k=i}^{j} (-1)^k \binom{j}{k} \binom{k}{i}\right\} (-1)^j \left(\frac{d}{dt}\right)^{j-i} a_j(t).$$

Полагая $x^j = \{1 - (1 - x)\}^j$ и применяя два раза формулу бинома, мы видим, что

$$\sum_{k=i}^{j} (-1)^k \binom{j}{k} \binom{k}{i} = \begin{cases} 0, & j \neq i, \\ (-1)^i, & j = i. \end{cases}$$

Таким образом, $c_i(t) = a_i(t)$, откуда $(\tau^*)^* = \tau$, ч. т. д.

Стоит упомянуть о других утверждениях алгебры формальных дифференциальных операторов, хотя в дальнейшем мы ими пользоваться не будем, и поэтому они не будут выделены в виде теорем и лемм. Эти факты справедливы как для регулярных, так и для иррегулярных операторов.

Если $\tau_1=\sum_{i=0}^{n} a_i(t)(d/dt)^i$ и $\tau_2=\sum_{i=0}^{n} b_i(t)(d/dt)^i$ — два формальных дифференциальных оператора, то мы можем определить их сумму как формальный дифференциальный оператор $\tau_1+\tau_2=$ $=\sum_{i=0}^{n}(a_i(t)+b_i(t))(d/dt)^i$. Определим произведение операторов τ_1 и τ_2 так: $\tau_1(\tau_2 f)=(\tau_1\tau_2)f$. Теперь, применяя правило Лейбница, имеем

$$\tau_1\tau_2=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}a_i(t)\,b_j^{(i-k)}(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^{j+k}.$$

Нетрудно проверить, что это умножение ассоциативно и дистрибутивно, но не коммутативно. Имеются еще два правила, которые нетрудно проверить:

$$(\tau_1+\tau_2)^*=\tau_1^*+\tau_2^*; \qquad (\tau_1\tau_2)^*=\tau_2^*\tau_1^*.$$

Таким образом, поскольку $(d/dt)^*=-(d/dt)$, мы имеем $((d/dt)^i)^*=(-1)^i(d/dt)^i$. Так как сопряженный оператор формального дифференциального оператора $\tau_0=a_0(t)$ нулевого порядка является оператором $\tau_0^*=\overline{a(t)}$ нулевого порядка, то получаем следующее:

$$\tau_1^*=\left(\sum_{i=0}^{n}a_i(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^i\right)^*=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\left(\frac{d}{dt}\right)^i\overline{a_i(t)}.$$

Формула для τ_1^*, данная в определении 1, очевидно, является разложением формы в правой части этого уравнения по правилу Лейбница.

Используя понятия произведения и суммы формальных дифференциальных операторов, мы можем записывать эти операторы различными способами: $(d/dt)\,p(t)(d/dt)+q(t)$, $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i(d/dt)^i\,p_i(t)\,(d/dt)^i$ и т. д. Заметим, что, поскольку $\tau_1^*\tau_2^*=(\tau_2\tau_1)^*$, оператор

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\left(\frac{d}{dt}\right)^i p_i(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^i$$

формально самосопряжен, если только коэффициенты p_i действительны. Также и формальный дифференциальный оператор

$$(i/2)(d/dt)^n\{p(t)(d/dt)+(d/dt)p(t)\}(d/dt)^n$$

самосопряжен, если только $p(t)$ — вещественная функция. Действуя далее по индукции, мы можем указать вид наиболее общего формально симметрического дифференциального оператора порядка n. Действительно, пусть τ является таким оператором, и пусть его старший коэффициент равен a_n. Тогда старший коэффициент для τ^* есть $(-1)^n\overline{a_n(t)}$, так что, если n — четное число, то a_n — действительная функция, а если n — нечетное число, то a_n — чисто мнимая функция. Если n — четное число, то $\tau_1 = (d/dt)^{n/2}\, a_n(t)\, (d/dt)^{n/2}$ — формально самосопряженный дифференциальный оператор с таким же старшим коэффициентом, как у τ. Если n — нечетное число, то $\tau_2 = (i/2)\,(d/dt)^{(n-1)/2}\,((d/dt)\,a_n(t) + a_n(t)\,(d/dt))\,(d/dt)^{(n-1)/2}$ — формально самосопряженный дифференциальный оператор с таким же старшим коэффициентом, как у τ. Таким образом, или $\tau - \tau_1$, или $\tau - \tau_2$ — формально самосопряженный дифференциальный оператор порядка $n-1$. Продолжая по индукции этот процесс уменьшения порядка, мы приходим к следующему результату:

любой формально самосопряженный оператор τ порядка n может быть представлен в виде

$$\tau = \sum_{j=0}^{[n/2]} (-1)^j \left(\frac{d}{dt}\right)^j a_j(t) \left(\frac{d}{dt}\right)^j + i \sum_{j=0}^{[(n-1)/2]} \left(\frac{d}{dt}\right)^j \left[\left(\frac{d}{dt}\right) b_j(t) + b_j(t) \left(\frac{d}{dt}\right)\right] \left(\frac{d}{dt}\right)^j,$$

где коэффициенты a_j и b_j действительны.

Можно показать, что это представление единственно. Обратно, любой такой формальный оператор формально самосопряжен.

Нетрудно показать, что если формальный дифференциальный оператор τ действителен, то второй комплексный член в предыдущем выражении исчезает, так что действительный самосопряженный формальный дифференциальный оператор имеет четный порядок $n = 2m$ и следующий общий вид

$$\tau = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \left(\frac{d}{dt}\right)^j a_j(t) \left(\frac{d}{dt}\right)^j,$$

где коэффициенты a_j действительны. Если $n = 2$, то мы получаем так называемый оператор Штурма — Лиувилля

$$\tau = -\left(\frac{d}{dt}\right) p(t) \left(\frac{d}{dt}\right) + q(t),$$

где коэффициенты p и q действительны.

Наша ближайшая цель — определить линейные операторы в $L_2(I)$, соответствующие формальному дифференциальному оператору τ, и исследовать их расширения и сопряженные операторы. Последующие разделы посвящены спектральным свойствам этих операторов.

7. Определение. Пусть $H_0^n(I)$ обозначает множество всех функций из $H^n(I)$, которые обращаются в нуль вне некоторого внутреннего компактного подмножества интервала I. (Компактное подмножество может зависеть от функции.)

8. Определение. Если τ — (регулярный или иррегулярный) дифференциальный оператор порядка n, то мы определим операторы $T_0(\tau)$ и $T_1(\tau)$ в $L_2(I)$ формулами

(a) $\mathfrak{D}(T_0(\tau)) = H_0^n(I), \quad T_0(\tau) f = \tau f, \quad f \in \mathfrak{D}(T_0(\tau)),$

(b) $\mathfrak{D}(T_1(\tau)) = H_\tau^n(I), \quad T_1(\tau) f = \tau f, \quad f \in \mathfrak{D}(T_1(\tau)).$

Заметим, что оба оператора $T_0(\tau)$ и $T_1(\tau)$ являются неограниченными с областями определения, плотными в $L_2(I)$, и $T_0(\tau) \subseteq T_1(\tau)$. Наша ближайшая задача — доказать, что если τ регулярный, то $T_1(\tau) = T_0(\tau^*)^*$. В случае когда τ — формально самосопряженный оператор, отсюда следует, что $T_0(\tau) \subseteq T_1(\tau) = T_0(\tau)^*$. Это показывает, что $T_0(\tau)$ — симметрический оператор (см. лемму XII.4.3′) и любое самосопряженное расширение оператора $T_0(\tau)$ есть сужение оператора $T_1(\tau)$.

9. Лемма. *Пусть квадрат функции f интегрируем на любом компактном подинтервале из I. Предположим, что*

$$\int_I f(t)\, \overline{\tau^* g(t)}\, dt = 0$$

для всех g из $H_0^n(I)$. Тогда (после изменения на множестве меры нуль) $f \in C^\infty(I)$ и $\tau f = 0$.

Доказательство. В терминах операторов T_0 и T_1, определенных в предыдущем пункте, в этой лемме устанавливается, что любая функция, которая ортогональна области значений оператора $T_0(\tau^*)$, лежит в C^∞ и принадлежит нуль-пространству оператора $T_1(\tau)$.

Доказательство делится на следующие пять шагов:

(A) Лемму достаточно доказать при предположении, что I — замкнутый интервал.

В самом деле, если сужение функции f на любой компактный подинтервал интервала I есть решение уравнения $\tau\sigma = 0$, принадлежащее C^∞, то f — такое же решение в полном интервале I.

Впредь мы будем считать, что I — компактный интервал $[a, b]$, а функция f ортогональна области значений оператора $T_0(\tau^*)$.

(B) Пусть Σ обозначает n-мерное пространство решений уравнения $\tau\sigma=0$. Согласно следствию 1.4, $\Sigma \subseteq C^\infty$. Следовательно, достаточно доказать, что $f \in \Sigma$. Заметим, что по IV.3.2 конечномерное пространство Σ есть замкнутое подпространство пространства $L_2(I)$; этот факт будет использован ниже, в (E). Для того чтобы доказать, что $f \in \Sigma$, достаточно доказать, что любой функционал, обращающийся в нуль на $\Sigma \subseteq L_2(I)$, обязательно обращается в нуль на f. Для этой цели нам нужны дополнительные сведения, содержащиеся в пунктах (C) и (D).

(C) Пусть функция w из $H_0^n(I)$ ортогональна Σ, рассматриваемому как подпространство пространства $L_2(I)$, т. е.

[*] $$\int_I \sigma(t)\overline{w(t)}\,dt=0, \qquad \sigma \in \Sigma.$$

Тогда существует функция g в $H_0^n(I)$, такая, что $\tau^* g = w$.

Действительно, по следствию 1.3 существует единственная функция g в $C^n(I)$, удовлетворяющая уравнению $\tau^* g = w$ и граничным условиям

[**] $$g(a)=g'(a)=\ldots=g^{(n-1)}(a)=0.$$

Из формулы Грина и из [*] мы имеем

$$0=\int_a^b g(t)\overline{(\tau\sigma)(t)}\,dt=$$

$$=\int_a^b (\tau^* g)(t)\overline{\sigma(t)}\,dt+\overline{F_b(g, \sigma)}-\overline{F_a(g, \sigma)}=\overline{F_b(g, \sigma)}$$

для всех $\sigma \in \Sigma$. Так как решения существуют для любых наперед заданных $\sigma(b), \sigma'(b), \ldots, \sigma^{(n-1)}(b)$, то из невырожденности формы $F_t(g, \sigma)$ (см. лемму 2) следует, что

[***] $$g(b)=g'(b)=\ldots=g^{(n-1)}(b)=0.$$

Таким образом, g обращается в нуль в обеих концевых точках интервала I, тогда как w обращается в нуль на интервалах $[a, a+\varepsilon]$ и $[b-\varepsilon, b]$. Тогда на каждом из этих двух интервалов g — единственное решение уравнения $\tau^* f = w = 0$ с граничными условиями [**] и [***] соответственно. Следовательно, функция g обязана равняться нулю на интервалах $[a, a+\varepsilon]$ и $[b-\varepsilon, b]$, т. е. (определение 8) $g \in H_0^n(I)$.

(D) Отсюда следует, что любая функция w из $H_0^n(I)$, которая ортогональна Σ, также ортогональна f, т. е.

$$\int_I f(t)\overline{w(t)}\,dt = 0.$$

Так как по (С) существует функция g из $H_0^n(I)$, такая, что $\tau^* g = w$, то это утверждение сводится к соотношению

$$\int_a^b f(t)\overline{\tau^* g(t)}\,dt = 0,$$

которое входит в условия леммы.

(E) Теперь предположим, что некоторый линейный функционал φ на $L_2(I)$ порождается функцией $\overline{h(\cdot)}$ из $L_2(I)$ (см. теорему IV.8.1) и обращается в нуль на Σ, т. е.

$$\int_I \sigma(t)\overline{h(t)}\,dt = 0, \qquad \sigma \in \Sigma.$$

Мы покажем, что φ обращается в нуль также на f. Этим завершится доказательство леммы, потому что если f не принадлежит Σ, то по теореме Хана — Банаха мы можем найти линейный функционал φ на $L_2(I)$, обращающийся в нуль на Σ, но не равный нулю на f.

Итак, нужно показать, что $\int_I f(t)\overline{h(t)}\,dt = 0$. Пусть $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ образуют ортонормальный базис в Σ и каждая функция σ_i приближена в топологии $L_2(I)$ функцией $\varphi_i \in H_0^n(I)$ так хорошо, что матрица $\{a_{ij}\} = \left\{\int_I \varphi_i(t)\overline{\sigma_j(t)}\,dt\right\}$ (которая аппроксимирует $\{\delta_{ij}\}$) обратима. Пусть $\{h_m\}$ — последовательность равномерно ограниченных в $L_2(I)$ функций из $H_0^n(I)$, которая сходится почти всюду к h. Если $\{b_{ij}\}$ есть матрица, обратная $\{a_{ij}\}$, то последовательность

$$[*] \qquad g_m = h_m - \sum_{i,\,j=1}^{n} b_{ij}\varphi_j \int_I h_m(t)\overline{\sigma_i(t)}\,dt$$

удовлетворяет соотношениям

$$\int_I g_m(t)\overline{\sigma_k(t)}\,dt = \int_I h_m(t)\overline{\sigma_k(t)}\,dt - \sum_{i,\,j=1}^{n} b_{ij}a_{jk}\int_I h_m(t)\overline{\sigma_i(t)}\,dt =$$

$$= \int_I h_m(t)\overline{\sigma_k(t)}\,dt - \int_I h_m(t)\overline{\sigma_k(t)}\,dt = 0, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Таким образом, $\int_I g_m(t)\overline{\sigma(t)}\,dt = 0$ для $\sigma \in \Sigma$. Поскольку $g_m \in H_0^n(I)$, из (D) следует, что $\int_I g_m(t)\overline{f(t)}\,dt = 0$. Когда $m \to \infty$, интеграл $\int_I h_m(t)\overline{\sigma_k(t)}\,dt \to \int_I h(t)\overline{\sigma_k(t)}\,dt = 0$. Таким образом, из [*] следует, что $\{g_m\}$ — равномерно ограниченная последовательность функций, сходящаяся почти всюду к h при $m \to \infty$. Поэтому

$$\int_I h(t)\overline{f(t)}\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_I g_n(t)\overline{f(t)}\,dt = 0.$$

10. Теорема. *Пусть τ — формальный дифференциальный оператор порядка n, определенный на интервале I. Тогда $T_1(\tau) = T_0(\tau^*)^*$.*

Замечание. Из теоремы XII.1.5 непосредственно следует, что $T_1(\tau)$ — замкнутый оператор. Поэтому $T_0(\tau) \subseteq T_1(\tau)$ имеет по крайней мере одно замкнутое расширение и, следовательно, минимальное замкнутое расширение $\overline{T_0(\tau)}$.

Доказательство теоремы. Если $f \in H_\tau^n$ и $g \in H_0^n$, то по формуле Грина (следствие 5)

$$\int_I f(t)\overline{(\tau^* g)(t)}\,dt = \int_I \tau f(t)\overline{g(t)}\,dt.$$

Это равенство показывает, что $f \in \mathfrak{D}(T_0(\tau^*)^*)$ и $T_1(\tau) f = T_0(\tau^*)^* f$, т. е.

$$T_1(\tau) \subseteq T_0(\tau^*)^*.$$

Для завершения доказательства теоремы достаточно доказать, что

$$\mathfrak{D}(T_0(\tau^*)^*) \subseteq \mathfrak{D}(T_1(\tau)).$$

Предположим, что f принадлежит $\mathfrak{D}(T_0(\tau^*)^*)$. Это означает, что существует функция g в $L_2(I)$, такая, что для каждой функции h из $H_0^n(I)$

$$\int_I f(t)\overline{(\tau^* h)(t)}\,dt = \int_I g(t)\overline{h(t)}\,dt.$$

Нам нужно доказать, что f принадлежит множеству $T_1(\tau)$. По теореме 1.3 существует функция $f_0 \in A^n(I)$, такая, что $\tau f_0 = g$.

Из формулы Грина (см. следствие 5) видно, что

$$\int_I f_0(t)\,\overline{(\tau^* h)(t)}\,dt = \int_I g(t)\,\overline{h(t)}\,dt, \quad h \in H_0^n(I),$$

и, следовательно,

$$\int_I (f(t) - f_0(t))\,\overline{(\tau^* h(t))}\,dt = 0.$$

Из леммы 9 следует, что $f - f_0 \in C^\infty(I)$, и поэтому $f = (f - f_0) + f_0$ принадлежит A^n, так что τf определена почти всюду. По лемме 9 $\tau(f - f_0) = 0$, откуда $\tau f = \tau f_0 \in L_2(I)$, и тем самым доказано, что f принадлежит $H_\tau^n(I) = \mathfrak{D}(T_1(\tau))$.

11. Лемма. *Если (регулярный или иррегулярный) формальный дифференциальный оператор τ формально самосопряжен, то оператор $T_0(\tau)$ симметрический.*

Доказательство. Очевидно, $T_0(\tau) \subseteq T_1(\tau)$. Следствие 5 показывает, что $T_1(\tau) \subseteq T_0(\tau)^*$, ч. т. д.

Напомним (см. определение XII.4.9), что если τ формально самосопряжен, то положительным и отрицательным дефектными пространствами оператора $T_0(\tau)$ являются множества

$$\mathfrak{D}_+ = \{f \in \mathfrak{D}(T_1(\tau)) \mid (T_1(\tau) - iI) f = 0\}$$

и

$$\mathfrak{D}_- = \{f \in \mathfrak{D}(T_1(\tau)) \mid (T_1(\tau) + iI) f = 0\},$$

соответственно.

12. Следствие. *Если τ формально самосопряжен, то положительное и отрицательное дефектные подпространства $\mathfrak{D}_+$ и $\mathfrak{D}_-$ оператора $T_0(\tau)$ состоят из тех и только тех решений дифференциальных уравнений $(\tau - i) f = 0$, $(\tau + i) f = 0$ соответственно, которые принадлежат $L_2(I)$.*

13. Следствие. *Если τ — формально самосопряженный дифференциальный оператор порядка n, то оба индекса дефекта оператора $T_0(\tau)$ меньше или равны n.*

В следствии XII.4.13 мы видели, что $T_0(\tau)$ имеет самосопряженное расширение тогда и только тогда, когда $\mathfrak{D}_+$ и $\mathfrak{D}_-$ имеют одинаковую размерность. Числа $n_+ = \dim \mathfrak{D}_+$ и $n_- = \dim \mathfrak{D}_-$ называются положительным и отрицательным индексами дефекта оператора $T_0(\tau)$. Информация о n_+ и n_- зависит в общем от того, будет ли интервал I замкнутым, полуоткрытым или открытым. Однако одно важное заключение можно сделать независимо от природы интервала.

14. Следствие. *Если в формально самосопряженном дифференциальном операторе*

$$\tau=\sum_{j=0}^{n} a_j(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^j$$

коэффициенты a_j действительны, то соответствующий оператору τ симметрический оператор $T_0(\tau)$ в $L_2(I)$ имеет равные индексы дефекта, а любое максимальное симметрическое расширение оператора $T_0(\tau)$ самосопряжено.

Доказательство. При этих предположениях решения уравнения $(\tau-i)\sigma=0$ будут комплексно сопряженными к решениям уравнения $(\tau+i)\sigma=0$, ч. т. д.

Если I — конечный замкнутый интервал, то любое решение уравнения $(\tau\pm i)\sigma=0$ будет лежать в $C^\infty(I)$ и потому в $L_2(I)$. Поэтому из следствия 12 мы имеем

15. Следствие. *Если I — конечный замкнутый интервал, а τ — формально самосопряженный дифференциальный оператор порядка n, то $n_+=n_-=n$.*

16. Лемма. *Пусть τ — формальный дифференциальный оператор порядка n, определенный на интервале I, и пусть J — компактный подинтервал интервала I.*

(a) *Пространство $H^n(J)$ полно по норме*

$$|f|=\sum_{i=0}^{n-1}\max_{t\in J}|f^{(i)}(t)|+\left\{\int_J|f^{(n)}(t)|^2\,dt\right\}^{1/2}.$$

(b) *Если $\{f_n\}$ — последовательность в $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$, такая, что $\{f_n\}$ и $\{\tau f_n\}$ сходятся (слабо сходятся) в $L_2(I)$, то последовательность $\{f_n\}$ сходится (слабо сходится) в топологии $H^n(J)$, определенной с помощью указанной выше нормы.*

Доказательство. (a) Если $\{f_m\}$ — фундаментальная последовательность в $H^n(J)$, то существуют функции f_0 и g_0, такие, что равномерно на J

$$\lim f_m^{(i)}(t)=f_0^{(i)}(t),\qquad i=0,\ \ldots,\ n-1,$$

и $f_m^{(n)} \to g_0$ в $L_2(J)$. Таким образом, для $c \in J$

$$f_0^{(n-1)}(t) - f_0^{(n-1)}(c) = \lim_{m\to\infty} \int_c^t f_m^{(n)}(s)\,ds = \int_c^t g_0(s)\,ds.$$

Это показывает, что $f_0^{(n)} = g_0$ и f_0 принадлежит $H^n(J)$. Следовательно, $H^n(J)$ полно.

(b) Рассмотрим две нормы

$$|f|_1 = \Big[\int_I |f(t)|^2\,dt\Big]^{1/2} + \Big[\int_I |\tau f(t)|^2\,dt\Big]^{1/2} = |f| + |T_1(\tau) f|$$

и

$$|f|_2 = |f_1| + \sum_{i=0}^{n-1} \max_{t\in J} |f^{(i)}(t)| + \Big(\int_J |f^{(n)}(t)|^2\,dt\Big)^{1/2},$$

заданные на $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$. Из определения 8(b) вытекает, что обе нормы определены и конечны на $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$. Первая норма есть норма для пары $[f, T_1 f]$ как элемента графика оператора $T_1(\tau)$. Теперь $T_1(\tau)$ — сопряженный оператор (теорема 10). Поэтому (см. XII.1.6) $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$ полно по норме $|f|_1$. Так как два дополнительных члена в $|f|_2$ определяют норму для f как элемента $H^n(J)$, то очевидно, что $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$ полно также по норме $|f|_2$. Так как $|f|_1 \leqslant |f|_2$, то из теоремы II.2.5 следует, что эти две нормы эквивалентны. Лемма следует непосредственно из этих рассуждений.

Теперь обратимся к исследованию особой формы, которую принимает в данном случае абстрактное «граничное значение», введенное в предыдущей главе. Мы увидим, что это исследование приводит к целому ряду результатов об индексах дефекта. В данном случае обсуждение будет более широким, чем в разделе XII.4, поскольку можно в основном иметь дело с дифференциальными операторами, не являющимися формально самосопряженными. Можно также сосредоточивать граничные значения в одной или в другой концевых точках интервала и представлять граничные значения в конкретной аналитической форме. Основные определения следующие.

17. Определение. Пусть τ — формальный дифференциальный оператор на интервале I с концевыми точками a, b. Так как T_1 замкнут, то $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$ становится гильбертовым пространством, если следующим образом вводится скалярное произведение:

$$(f, g)^* = (f, g) + (T_1(\tau) f, T_1(\tau) g).$$

Граничное значение для τ есть непрерывный линейный функционал A на $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$, который обращается в нуль на $\mathfrak{D}(T_0(\tau))$. Если $A(f)=0$ для каждой функции из области определения $T_1(\tau)$, которая обращается в нуль в окрестности точки a, то A называется *граничным значением в точке* a; также определяется и *граничное значение в точке* b. По аналогии с определением XII.4.25 уравнение $B(f)=0$, где B — граничное значение для τ, называется *граничным условием для* τ. Говорят, что множество граничных условий $B_i(f)=0$, $i=1, \ldots, k$, *сильнее*, чем множество $C_j(f)=0$, $j=1, \ldots, m$, если каждое C_j есть линейная комбинация B_i. Два множества граничных условий называются *эквивалентными*, если каждое из них сильнее, чем другое. *Полное множество граничных значений* есть максимальное линейно независимое множество граничных значений. *Полное множество граничных значений в точке* a есть максимальное линейно независимое множество граничных значений в a.

18. Лемма. *Если τ формально самосопряжен, то определение* 17 *граничного значения для τ совпадает с определением* XII.4.20 *граничного значения для* $T_0(\tau)$.

Доказательство. Из теоремы 10 вытекает, что $T_1(\tau)$ сопряжен к $T_0(\tau)$, ч. т. д.

Следующая теорема описывает основное свойство граничных значений дифференциальных операторов. Ради простоты иногда вместо $T_1(\tau)$ и $T_0(\tau)$ мы будем писать T_1 и T_0 соответственно.

19. Теорема. *Пространство граничных значений для τ совпадает с прямой суммой пространств граничных значений в точках a и b для* τ.

Доказательство. Прежде всего из предыдущего определения очевидно, что множество $\mathfrak{M}_a$ (множество $\mathfrak{M}_b$) граничных значений в точке a (в точке b) есть подпространство пространства $\mathfrak{M}$ всех граничных значений. Пусть f_1 и f_2 — две функции из $C^\infty(I)$, такие, что $f_1(t)+f_2(t)=1$ при $t \in I$, и такие, что f_1 обращается в нуль в окрестности точки b, а f_2 — в окрестности точки a. Ясно, что если g принадлежит $\mathfrak{D}(T_1)$, то $f_1 g$ и $f_2 g$ также принадлежат $\mathfrak{D}(T_1)$. Поэтому отображение $g \to f_1 g$ пространства $\mathfrak{D}(T_1)$ в себя, очевидно, замкнуто и, по теореме о замкнутом графике (II.2.4), непрерывно. Пусть B — граничное значение для τ и

$$B_1(g)=B(f_1 g), \qquad B_2(g)=B(f_2 g), \qquad g \in \mathfrak{D}(T_1).$$

Если g принадлежит $\mathfrak{D}(T_0)$, то $f_1 g$ и $f_2 g$ принадлежат $\mathfrak{D}(T_0)$, так что $B_1(g)=B_2(g)=0$. Более того, в силу непрерывности отображения $g \to f_1 g$, B_1 — непрерывный линейный функционал на $\mathfrak{D}(T_1)$. Подобное рассуждение имеет силу и для B_2. Таким образом, B_1 и B_2 будут граничными значениями для τ. Если $g(t)=0$ в окрестности точки a, то, по определению 8, $f_1g \in \mathfrak{D}(T_0)$, и поэтому $B(f_1g)=B_1(g)=0$, откуда ясно, что B_1 — граничное значение в точке a и что $B=B_1+B_2$. Таким образом, $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_a+\mathfrak{M}_b$, и для доказательства теоремы достаточно показать, что $\mathfrak{M}_a \cap \mathfrak{M}_b = \{0\}$. Если B — граничное значение в обеих точках a и b и если g принадлежит $\mathfrak{D}(T_1)$, то f_1g обращается в нуль в окрестности точки b, поэтому $B(f_1g)=0$, и аналогично $B(f_2g)=0$. Таким образом, $B(g)=B(f_1g)+B(f_2g)=0$ для каждой функции $g \in \mathfrak{D}(T_1)$, ч. т. д.

Если $\tau = \sum_{i=0}^{n} a_i(t)(d/dt)^i$ — формальный дифференциальный оператор порядка n, определенный на интервале I, а J — подинтервал из I, то мы можем рассматривать сужение τ' оператора τ на J. Это просто формальный дифференциальный оператор $\sum_{i=0}^{n} b_i(t)(d/dt)^i$, где b_i — сужение функции a_i из I на J.

С этим понятием связаны несколько следующих результатов.

20. Теорема. *Пусть τ — формальный дифференциальный оператор на интервале I с концевыми точками a, b. Пусть $a<c<b$, а τ' — сужение оператора τ на $I'=I \cap [a, c]$. Тогда существует взаимно однозначное линейное отображение пространства граничных значений для τ' в точке a на пространство граничных значений для τ в точке a.*

Доказательство. Выберем функцию h из $C^\infty(I)$, которая тождественно равна единице в окрестности точки a и обращается в нуль в окрестности отрезка $[c, b]$. Пусть S_1 — линейный оператор, определенный равенством

$$(S_1f)(t)=h(t)f(t).$$

В формуле

$$(\tau(hf))(t)=\sum_{i=0}^{n}\left[\sum_{k=i}^{n}\binom{k}{i}a_k(t)h^{(k-i)}(t)\right]f^{(i)}(t)$$

член $a_n(t)h(t)f^{(n)}(t)$ принадлежит $L_2(I')$, а остальные члены непрерывны, так что S_1 отображает $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$ в $\mathfrak{D}(T_1(\tau'))$. Поэтому очевидно, что S_1 — замкнутый оператор, определенный на всем гильбертовом пространстве $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$ (см. определение 17), и, следовательно (см. II.2.4), S_1 непрерывен. Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$ обозначают пространства граничных значений в точке a соответственно для τ и τ' и $\Phi_1(A')=A'S_1$ для A' из $\mathfrak{M}'$. Тогда Φ_1 — линейное отображение из $\mathfrak{M}'$ в $\mathfrak{M}$. Покажем, что Φ_1 взаимно однозначно и что $\Phi_1(\mathfrak{M}') = \mathfrak{M}$.

Пусть S_2 — отображение

$$(S_2 g)(t) = h(t) g(t),$$

определенное на $\mathfrak{D}(T_1(\tau'))$ и, следовательно, принимающее значения из $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$. Рассуждением, подобным примененному выше, можно показать, что S_2 — линейный ограниченный оператор. Пусть $\Phi_2(A) = AS_2$ для A из $\mathfrak{M}$, так что Φ_2 — линейное отображение пространства $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{M}'$.

Если f принадлежит $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$, то f и $(S_2S_1)f$ совпадают в окрестности точки a. Следовательно, для любого A из $\mathfrak{M}$ и любой f из $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$

$$(\Phi_1\Phi_2 A) f = A((S_2S_1) f) = Af.$$

Поэтому $\Phi_1\Phi_2$ — тождественное отображение, откуда следует, что $\Phi_1(\mathfrak{M}') = \mathfrak{M}$. Этим же способом можно показать, что $\Phi_2\Phi_1$ тождественно отображает $\mathfrak{M}'$ в себя. Это показывает, что Φ_1 — взаимно однозначное отображение, ч. т. д.

21. Следствие. *При условиях предыдущей теоремы τ и τ' имеют одинаковое число линейно независимых граничных условий в точке a.*

22. Следствие. *Пусть τ — формальный дифференциальный оператор порядка n, определенный на интервале I с концами a, b. Тогда τ имеет не больше n линейно независимых граничных значений в точке a.*

Доказательство. Пусть это утверждение неверно. Тогда, применяя обозначения и результаты предыдущей теоремы и следствия, можно получить, что τ' имеет самое меньшее $n+1$ линейно независимых граничных значений в точке a. Таким образом, не уменьшая общности, мы можем предполагать, что b — фиксированная концевая точка для I.

Пусть $\mathfrak{D}(T_2)$ — множество всех f из $\mathfrak{D}(T_1)$, которые обращаются в нуль в окрестности точки a, и пусть T_2 — сужение оператора T_1 на $\mathfrak{D}(T_2)$. По предположению существует самое меньшее $n+1$ линейно независимых непрерывных линейных функционалов на $\mathfrak{D}(T_1)$, которые обращаются в нуль на $\mathfrak{D}(T_2)$, т. е. ортогональное дополнение $\mathfrak{B}$ к $\mathfrak{D}(T_2)$ в $\mathfrak{D}(T_1)$ имеет размерность не меньше $n+1$. Если $v \in \mathfrak{B}$ и $w \in \mathfrak{D}(T_2)$, то

[*] $$0 = (v, w)^* = (v, w) + (T_1 v, T_2 w).$$

Следовательно, $(T_2 w, T_1 v) = (w, -v)$. Это означает, что $T_1 v$ принадлежит области определения оператора T_2^*. Из $T_0 \subseteq T_2$ следует, что $T_2^* \subseteq T_0^* = T_1(\tau^*)$ (см. теорему 10). Следовательно, [*] эквивалентно уравнению

$$\tau^*\tau v + v = 0.$$

Таким образом, v — решение дифференциального уравнения порядка $2n$, и по следствию 1.4 $v \in C^\infty(I)$.

Из [*] мы имеем $(w, T_2^* T_1 v) = -(w, v)$, и по формуле Грина

$$F_b(w, \tau v) - F_a(w, \tau v) = \int_a^b (\tau w)(t)\overline{\tau v(t)}\,dt -$$

$$- \int_a^b w(t)\overline{\tau^*(\tau v)(t)}\,(dt) = (T_2 w, T_1 v) + (w, v) = 0.$$

Так как w обращается в нуль в окрестности точки a, то $F_a(w, \tau v) = 0$. Таким образом, $F_b(w, \tau v) = 0$. Так как $\mathfrak{D}(T_2)$ содержит каждую функцию из $C^\infty(I)$, обращающуюся в нуль в окрестности точки a, то из обратимости матрицы $\{F_b^{jk}\}$ (см. лемму 2) следует, что τv и ее первые $n-1$ производных обращаются в нуль в точке b. Так как пространство $\mathfrak{B}$ имеет размерность не меньше $n+1$, то существует ненулевая функция $v_0 \in \mathfrak{B}$, которая удовлетворяет n линейным уравнениям $v_0(b) = v_0'(b) = \ldots$ $\ldots = v_0^{(n-1)}(b) = 0$. Так как, более того, $(\tau v_0)(b) = 0$, то $(\tau v_0)(b) =$ $= \sum_{k=0}^{n} a_k(b) v_0^{(k)}(b) = 0$, $a_n(b) \neq 0$ и, следовательно, $v_0^{(n)}(b) = 0$. Поскольку $(\tau v_0)'(b) = 0$, аналогично доказывается, что $v_0^{(n+1)}(b) = 0$. Продолжая по индукции, мы видим, что $v_0^{(k)}(b) = 0$, $0 \leqslant k \leqslant 2n-1$. Так как v_0 удовлетворяет уравнению порядка $2n$, то функция v_0 должна быть тождественным нулем. Это противоречие завершает доказательство.

23. Следствие. *Пусть τ — формальный дифференциальный оператор порядка n на интервале I с концевыми точками a, b; предположим, что концевая точка a фиксирована. Тогда функционалы $A_i(f) = f^{(i)}(a)$, $i = 0, \ldots, n-1$, образуют полную систему граничных значений для τ в точке a.*

Доказательство. Из леммы 16 следует, что эти функционалы являются граничными значениями для τ в точке a. Очевидно, они линейно независимы. Если бы утверждение следствия было неверным, то τ имел бы граничное значение в точке a, линейно независимое от системы $A_0, \ldots, A_{n-1}$. Тогда оператор τ имел бы не меньше $n+1$ независимых граничных значений в точке a. Но по следствию 22 это невозможно.

24. Следствие (*Вейль — Кодаира*). *Пусть τ — формально самосопряженный дифференциальный оператор порядка n, определенный на интервале I. Предположим, что по крайней мере один конец этого интервала фиксирован. Тогда сумма положительного и отрицательного индексов дефекта оператора τ не меньше чем n.*

Доказательство. По лемме XII.4.21 эта сумма равна числу линейно независимых граничных условий, и потому этот результат вытекает непосредственно из предыдущего следствия.

25. Следствие. *Пусть τ — формально самосопряженный формальный дифференциальный оператор порядка n, определенный на интервале I с концевыми точками a и b. Пусть $a<c<b$, а τ' и τ'' являются сужениями оператора τ на интервалы $I'=I\cap[a, c]$ и $I''=I\cap[c, b]$ соответственно. Если d, d' и d'' являются суммами положительных и отрицательных индексов дефекта операторов τ, τ' и τ'' соответственно, то $d=d'+d''-2n$.*

Доказательство. По теореме 19 число d равняется сумме числа независимых граничных значений в точке a и числа независимых граничных значений в точке b. Так как c — фиксированная концевая точка, то из следствия 23 и из теорем 19 и 20 следует, что d' и d'' больше на n, чем число независимых граничных значений в точках a и b соответственно. Утверждение данного следствия очевидно.

26. Следствие (*Кодаира*). *Пусть при предположениях предыдущего следствия d_+, d'_+ и d''_+ являются положительными, а d_-, d'_- и d''_- — отрицательными индексами дефекта операторов τ, τ' и τ'' соответственно. Тогда*

$$d_+=d'_++d''_+-n; \qquad d_-=d'_-+d''_--n.$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{D}_+$ — пространство решений уравнения $\tau f=if$, которые принадлежат $L_2(I)$, а $\mathfrak{D}'_+$ и $\mathfrak{D}''_+$ — пространства решений уравнений $\tau' f=if$ и $\tau'' f=if$, которые принадлежат $L_2(I')$ и $L_2(I'')$ соответственно. Таким образом,

$$d_+=\dim\mathfrak{D}_+, \quad d'_+=\dim\mathfrak{D}'_+, \quad d''_+=\dim\mathfrak{D}''_+ \text{ и } \mathfrak{D}_+=\mathfrak{D}'_+\cap\mathfrak{D}''_+.$$

Если C — произвольное конечномерное пространство, а A и B являются подпространствами пространства C и $A+B=C$, то известно и легко доказать, что

$$\dim C+\dim(A\cap B)=\dim A+\dim B.$$

В данном случае, применяя это правило, мы находим, что

$$d_++\dim(\mathfrak{D}'_++\mathfrak{D}''_+)=d'_++d''_+.$$

Таким образом, $d_+ + n \geqslant d'_+ + d''_+$. Точно так же $d_- + n \geqslant d'_- + d''_-$. Так как по следствию 25

$$d_+ + d_- + 2n = d'_+ + d'_- + d''_+ + d''_-,$$

то мы должны иметь равенство в обоих неравенствах выше, ч. т. д.

Теперь мы приведем один результат, который описывает конкретную форму абстрактного граничного значения для наиболее общего формального дифференциального оператора.

27. Теорема. *Пусть τ — формальный дифференциальный оператор, определенный на интервале I с концевыми точками a и b. Пусть w_i, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, — система функций, такая, что предел*

$$B(f) = \lim_{t \to a} \sum_{i=0}^{n-1} w_i(t) f^{(i)}(t)$$

существует для всех функций f из $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$. Тогда B — граничное значение для τ в точке a. Обратно, каждое граничное значение для τ в точке a имеет такой вид.

Доказательство. Из леммы 16 очевидно, что для любой точки t внутри I $B_t(f) = \sum_{i=0}^{n-1} w_i(t) f^{(i)}(t)$ — непрерывный линейный функционал на гильбертовом пространстве $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$. Если $\lim_{t \to a} B_t(f) = B(f)$ существует для каждой функции f из $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$, то по теореме II.1.17 B — непрерывный линейный функционал на $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$. Ясно, что $B(f) = 0$ для тех f, которые обращаются в нуль в окрестности точки a. Поэтому B — граничное значение для τ в точке a.

Чтобы доказать обратное утверждение, допустим, что B — граничное значение в точке a. Выберем функцию h из $C^\infty(I)$, которая тождественно равна единице в окрестности точки a и нулю в окрестности точки b. Очевидно, что fh лежит в $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$ для каждой f из $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$. Кроме того, значения fh и f совпадают в окрестности точки a и, следовательно, $B(fh) = B(f)$ для любой функции f из $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$. Поэтому B — линейный функционал в гильбертовом пространстве $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$ (см. определение 17). Следовательно (см. теорему IV.4.5), существует элемент g в ортогональном дополнении пространства $\mathfrak{D}(T_0(\tau))$, такой, что для всех f из $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$

$$B(f) = (f, g)^*.$$

В частности, для f из $\mathfrak{D}(T_0(\tau))$ мы имеем

$$[*] \qquad 0 = (f, g)^* = (f, g) + (T_0(\tau) f, T_1(\tau) g).$$

Отсюда, как в следствии 22, вытекает, что g — решение уравнения $\tau^*\tau g + g = 0$ и поэтому g — бесконечно дифференцируемая функция. Пусть $v = -\tau g$. Тогда

$$B(f) = (f, \tau^* v) - (\tau f, v) = (fh, \tau^* v) - (\tau(fh), v) = B(fh).$$

Применяя формулу Грина и используя обращение функции h в нуль в окрестности точки b, получаем, что

$$B(f) = \lim_{\substack{t\to a\\ s\to b}} \left\{ -\int_t^s \{[\tau(fh)](t)\overline{v(t)} - (fh)(t)\overline{(\tau^* v)(t)}\}\,dt \right\} =$$

$$= \lim_{t\to a} F_t(fh, v) = \lim_{t\to a} F_t(f, v).$$

28. Следствие. *Если B — граничное значение для τ в точке a, то существует бесконечное число раз дифференцируемая функция g в ортогональном дополнении пространства $\mathfrak{D}(T_0(\tau))$ в гильбертовом пространстве $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$, такая, что $v = -\tau g$ принадлежит ортогональному дополнению пространства $\mathfrak{D}(T_0(\tau^*))$ в гильбертовом пространстве $\mathfrak{D}(T_1(\tau^*))$ и*

$$B(f) = \lim_{t\to a} F_t(f, v), \qquad f \in \mathfrak{D}(T_1(\tau)).$$

Доказательство. Все, о чем говорится в этом следствии, было доказано по ходу доказательства теоремы 27, за исключением утверждения, что

$$[\,'\,] \qquad (\tau g, f) + (T_1(\tau^*)\tau g, T_1(\tau^*) f) = 0$$

для всех f из $\mathfrak{D}(T_0(\tau^*))$. Так как g принадлежит $C^\infty(I)$, то из формулы Грина следует, что [′] эквивалентно уравнению

$$(\tau g + \tau\tau^*\tau g, f) = 0,$$

и поскольку $\tau^*\tau g + g = 0$, то [′] очевидно.

Теоремой 27 заканчивается наше исследование граничных значений дифференциальных операторов. В теореме 19 мы показали, что каждое граничное значение есть сумма граничного значения в точке a и граничного значения в точке b. Мы также дали конкретное представление для граничных значений и получили основные сведения об индексах дефекта. Особый интерес представляет случай, когда τ формально самосопряжен и, следовательно, оператор $T_0(\tau) = T_0(\tau^*)$ симметричен. Тогда лемма XII.4.26 и теоремы XII.4.28, 30 и 31 предыдущей главы дают в явном виде все симметрические расширения оператора $T_0(\tau)$, сопряженные им операторы и все самосопряженные расширения оператора $T_0(\tau)$.

Замечание. Для дальнейшего удобно расширить область определения граничного значения A на более широкий класс функций, чем $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$. Из теоремы 27 видно, что если A — граничное значение в точке a, то число $A(g)$ однозначно определяется значением g в произвольно малой окрестности точки a. Таким образом, если f принадлежит $L_2(I)$ и существует функция g в $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$, такая, что $f(t)=g(t)$ в окрестности точки a, то мы можем положить $A(f)=A(g)$. Ясно, что это определение корректно. Когда A — граничное значение в точке b, можно сделать аналогичное замечание. Если A — смешанное граничное значение, f принадлежит $L_2(I)$ и существует функция g из $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$, которая совпадает с f в окрестностях точек a и b, мы положим также $A(f)=A(g)$.

Сужением оператора $T_1(\tau)$ на область, определенную системой граничных условий, где τ — произвольный формальный дифференциальный оператор, будет называться оператор, *полученный из оператора τ наложением данной системы граничных условий.*

29. Определение. *Граничное условие вида $B(f)=0$ для τ называется граничным условием в точке a (в точке b)*, если B — граничное значение в точке a (в точке b) для τ. Если $B(f)=0$ не есть граничное условие в одной из двух точек a или b (так что по теореме 19 уравнение $B(f)=0$ представимо в виде $B_1(f)=B_2(f)$, где B_1 и B_2 — ненулевые граничные значения в точках a и b соответственно), то $B(f)=0$ называется *смешанным граничным условием*. Система граничных условий называется *распадающейся*, если она (или в общем виде системы, эквивалентные ей) содержит только несмешанные граничные условия. В любом другом случае система называется *смешанной системой граничных условий*. Если τ — действительный формальный дифференциальный оператор, то множество $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$ замкнуто по комплексному сопряжению. Граничное значение A для действительного оператора τ называется *действительным*, если $A(\bar{f})=\overline{A(f)}$ для каждой функции f из $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$.

Мы заканчиваем раздел несколькими простыми примерами дифференциальных операторов. Простейший пример формально самосопряженного дифференциального оператора — оператор $\tau=i(d/dt)$. Мы рассмотрим этот оператор в трех интервалах I.

Случай I: $I=[0, 1]$. Здесь, очевидно, $d_+=d_-=1$, и полная система граничных значений состоит из $f(0)$ и $f(1)$, а наиболее общая полная симметрическая система граничных условий (состоящая в этом случае из единственного условия) имеет вид $f(0)=e^{i\theta}f(1)$, где $0<\theta\leqslant 2\pi$.

Случай II: $I=[0, \infty)$. Тогда решение уравнения $\tau f=if$ (уравнения $\tau f=-if$) есть $e^t(e^{-t})$. Так как квадрат e^t не интегрируем в $[0, \infty)$, то $d_- = 1$, и из τ могут быть получены только несамосопряженные операторы.

Случай III: $I = (-\infty, \infty)$. Тогда из следствия 27, сравнивая со случаем II, получаем, что τ не имеет граничных значений в точке $+\infty$. Таким образом, без наложения граничных условий τ дает единственный самосопряженный оператор $T_1(\tau)$.

Теперь пусть нам задан формально самосопряженный оператор τ вида $(d/dt)[p(t)(d/dt)] + q(t)$ на интервале I с концевыми точками a, b, где функции p и q действительны. Пусть $a < c < b$. Тогда по следствию 14 положительный и отрицательный индексы дефекта d'_+ и d'_- сужения τ' оператора τ на $I \cap [c, b]$ равны и по следствию 24 их сумма не меньше чем 2, так что $d'_+ = d'_- \geqslant 1$. Мы знаем (см. лемму XII.4.21), что $d'_+ + d'_-$ совпадает с числом линейно независимых граничных значений для τ'. Так как $d'_+ + d'_- \leqslant 4$, то или $d'_+ = 1$, или $d'_+ = 2$. Если $d'_+ = 1$, то τ', и поэтому τ не имеет граничных значений в точке b, поскольку τ' имеет два граничных значения в точке c. Если $d'_+ = 2$, то τ', и поэтому τ имеет два граничных значения в точке b. Концевая точка a может быть исследована аналогично. Следующая таблица дает число линейно независимых решений уравнения $(\tau - \lambda)\sigma = 0$, которые имеют интегрируемые квадраты в окрестностях точек a или b при $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$. Как показывает проведенное выше исследование, возможны четыре случая.

Число линейно независимых решений, интегрируемых в квадрате:

	В точке a	*В точке b*
(I)	2	2
(II)	1	2
(III)	2	1
(IV)	1	1

Следующая таблица дает число граничных значений для τ в любом из указанных выше случаев (I)—(IV).

Число линейно независимых граничных значений для τ:

	В точке a	*В точке b*
(I)	2	2
(II)	0	2
(III)	2	0
(IV)	0	0

Следуя терминологии Г. Вейля, мы говорим, что конец a — точка типа *предельной точки* относительно действительного оператора τ второго порядка, если τ не имеет граничных значений в точке a, и точка типа *предельного круга*, если τ имеет два граничных значения в точке a.

В следующей теореме устанавливается важная нормальная форма граничных значений действительного формального самосопряженного дифференциального оператора второго порядка.

30. Теорема. *Пусть формальный дифференциальный оператор τ второго порядка определен на интервале I с концевыми точками a, b и имеет вид $\tau f=(pf')'+qf$, где p и q — действительные функции. Тогда в указанном выше случае* (IV) *мы имеем* $(\tau f, g)=(f, \tau g)$ *для* $f, g\in\mathfrak{D}(T_1(\tau))$. *В случаях* (III) *и* (II) *существует полная система граничных значений для τ, содержащая два линейно независимых действительных граничных значения A_1 и A_2, таких, что*

$$(\tau f, g)-(f, \tau g)=A_1(f)\overline{A_2(g)}-A_2(f)\overline{A_1(g)},\quad f, g\in\mathfrak{D}(T_1(\tau)).$$

В случае (I) *существует полная линейно независимая система граничных значений для τ, содержащая четыре линейно независимых действительных граничных значения C_1, C_2, D_1, D_2, где C_1, C_2 — граничные значения в точке a, а D_1, D_2 — граничные значения в точке b, такие, что*

$$(\tau f, g)-(f, \tau g)=C_1(f)\overline{C_2(g)}-C_2(f)\overline{C_1(g)}+$$
$$+D_1(f)\overline{D_2(g)}-D_2(f)\overline{D_1(g)},\quad f, g\in\mathfrak{D}(T_1(\tau)).$$

Доказательство. Пусть A — любое граничное значение для τ. Так как τ действительный, то множество $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$ замкнуто относительно операции комплексного сопряжения, поэтому функционал $\overline{A}$, определенный формулой $\overline{A}(f)=\overline{A(\bar f)}$, есть также граничное значение для τ. Конечно, мы можем считать его *комплексным сопряженным граничному значению* A. Теперь граничное значение A может быть представлено в виде линейной комбинации действительных граничных значений следующим образом:

$$A=\left(\frac{A+\overline{A}}{2}\right)+i\left(\frac{A-\overline{A}}{2i}\right).$$

Таким образом, τ имеет полную систему $A_1, \ldots, A_p$ независимых действительных граничных значений. По лемме XII.4.23 билинейная форма $(\tau f, g)-(f, \tau g)$ однозначно представима в виде

$$[*]\qquad (\tau f, g)-(f, \tau g)=\sum_{i, j=1}^{p} c_{ij}A_i(f)\overline{A_j(g)},\quad f, g\in\mathfrak{D}(T_1(\tau)),$$

где $c_{ij} = -\bar{c}_{ji}$. Поскольку граничные значения A_i действительны и постоянные c_{ij} единственны, отсюда следует, что c_{ij} действительны. Таким образом, $c_{ij} = -c_{ji}$, так что $c_{ii} = 0$.

В случае (IV), рассмотренном ранее, граничные значения для τ отсутствуют. Поэтому из [*] очевидно, что $(\tau f, g) = (f, \tau g)$ при $f, g \in \mathfrak{D}(T_1(\tau))$.

В случае (II) имеются два граничных значения в точке b, и, следовательно (после соответствующего преобразования и нормирования действительных граничных значений A_1, A_2), мы можем написать

$$(\tau f, g) - (f, \tau g) = A_1(f)\overline{A_2(g)} - A_2(f)\overline{A_1(g)}.$$

Аналогично в случае (I) можно выбрать полную систему $\{A_1, A_2, A_3, A_4\} = \{C_1, C_2, D_1, D_2\}$ действительных независимых граничных значений, где C_1 и C_2 — граничные значения в точке a, а D_1 и D_2 — граничные значения в точке b. Если мы перепишем формулу [*] в терминах C_i и D_i, то в правой части будут члены вида $d_{ij}\{C_i(f)\overline{D_j(g)} - C_i(g)\overline{D_j(f)}\}$. Покажем, что коэффициенты d_{ij} таких членов обязательно равны нулю. Например, пусть $d_{11} \neq 0$. Мы можем найти функцию $f \in \mathfrak{D}(T_1(\tau))$, такую, что $C_1(f) = 1$, $C_2(f) = 0$ и f обращается в нуль в окрестности точки b. Аналогично этому существует функция g в $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$, такая, что $D_1(g) = 1$, $D_2(g) = 0$ и g обращается в нуль в окрестности точки a. Тогда по формуле Грина мы имеем $(\tau f, g) - (f, \tau g) = 0$. С другой стороны, по формуле [*] $(\tau f, g) - (f, \tau g) = d_{11} \neq 0$. Это противоречие доказывает наше утверждение. Очевидно, что подобные рассуждения проходят для любых значений индексов i, j $(1 \leqslant i, j \leqslant 2)$.

Отсюда следует, что (после подходящих преобразований C_1, C_2, D_1 и D_2) имеет место равенство

$$(\tau f, g) - (f, \tau g) = C_1(f)\,C_2(\bar{g}) - C_2(f)\,C_1(\bar{g}) + D_1(f)\,D_2(\bar{g}) - D_2(f)\,D_1(\bar{g}).$$

31. Следствие. *Пусть выполняются условия предыдущей теоремы, а T является самосопряженным расширением оператора $T_0(\tau)$.*

В случаях (II) *и* (III) *система граничных условий, которые налагаются на τ для получения T, может быть записана в виде*

$$\alpha A_1(f) + \beta A_2(f) = 0, \qquad \alpha^2 + \beta^2 \neq 0,$$

где A_1 и A_2 — действительные граничные значения в точке b в случае (II) *и в точке a в случае* (III).

В случае (I) *если система граничных условий распадающаяся, то она может быть записана в виде*

$$\alpha_1 C_1(f) + \alpha_2 C_2(f) = 0, \qquad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0,$$
$$\beta_1 D_1(f) + \beta_2 D_2(f) = 0, \qquad \beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0,$$

где C_i *и* D_i, $i = 1, 2,$ — *действительные граничные значения в точках* a *и* b *соответственно.*

Доказательство. В случаях (II) и (III) из теоремы XII.4.30 следует, что оператор T определяется одним граничным условием, и из теоремы 30 и определения XII.4.25 очевидно, что это условие имеет вид

$$\alpha A_1(f) + \beta A_2(f) = 0, \qquad \alpha, \ \beta \text{ действительные}, \ \alpha^2 + \beta^2 \neq 0.$$

В случае (II) A_1 и A_2 — граничные значения в точке b, тогда как в случае (III) это граничные значения в точке a. В том и в другом случае очевидно, что единственное граничное условие, определяющее T, действительное.

Точно так же в случае (I) оператор T, если он определяется распадающейся системой граничных условий, задается двумя граничными условиями, из которых одно для точки b, а другое для точки a. Применяя предыдущую теорему и определение XII.4.25, нетрудно показать, что эти граничные условия должны иметь вид

$$\alpha_1 C_1(f) + \alpha_2 C_2(f) = 0,$$
$$\beta_1 D_1(f) + \beta_2 D_2(f) = 0$$

с действительными α_i и β_i, причем $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$, $\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$. Эти формулы показывают, что в случае (I) симметрическая распадающаяся система граничных условий также обязательно является действительной.

Если a — фиксированная концевая точка интервала I и τ не имеет граничных значений в точке b, то полная система граничных значений для τ совпадает с $B_1(f) = f(a)$, $B_2(f) = f'(a)$. Тогда для $f, g \in \mathfrak{D}(T_1(\tau))$ мы имеем (см. определение XII.4.2 и формулу Грина)

$$\{f, g\} = -i \int_a^b [(pf')'(t)\overline{g(t)} - f(t)\overline{(pg')'(t)}]\, dt =$$
$$= i\,(F_a(f, g) - \lim_{s \to b} F_s(f, g)).$$

Так как τ не имеет граничных значений в точке b, то из теоремы 27 следует, что $\lim_{s\to b} F_s(f, g) = 0$. Таким образом,

$$\{f, g\} = -ip(a)\,[f'(a)\overline{g(a)} - f(a)\overline{g'(a)}].$$

По теореме XII.4.30 наиболее общее самосопряженное расширение оператора $T_0(\tau)$ есть сужение оператора $T_1(\tau)$ на подмножество области $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$, определенное одним симметрическим граничным условием, которое обязательно является граничным условием в точке a. Из предыдущего уравнения и определения XII.4.25 очевидно, что наиболее общее симметрическое граничное условие есть $\alpha f'(a)+\beta f(a)=0$ с действительными α и β. Таким образом, в случае одной свободной концевой точки и отсутствия граничных значений в другой концевой точке мы получаем простой явный вид для наиболее общего самосопряженного расширения оператора $T_0(\tau)$.

Следующая теорема определяет важное свойство оператора второго порядка, которое будет применяться в § 3.

32. Теорема. *Пусть* τ *имеет вид* $\tau f=(pf')'+qf$, *где* p *и* q — *действительные функции, а* T — *самосопряженный оператор, полученный из* τ *наложением распадающейся симметрической системы граничных условий. Пусть* $\operatorname{Im}\lambda\neq 0$. *Тогда эти граничные условия действительны и существует одно и только одно решение* $\varphi(t, \lambda)$ *уравнения* $(\tau-\lambda)\varphi=0$, *интегрируемое в квадрате в точке* a *и удовлетворяющее граничным условиям в точке* a, *а также существует одно и только одно решение* $\psi(t, \lambda)$ *уравнения* $(\tau-\lambda)\psi=0$, *интегрируемое в квадрате в точке* b *и удовлетворяющее граничным условиям в точке* b.

Доказательство. Мы покажем, что теорема верна в каждом из четырех рассмотренных выше случаев. Так как в случае (IV) нет граничных значений, то обязательно нет и граничных условий. Поэтому в этом случае теорема верна. В случае (III) обязательно есть одно граничное условие, поскольку по теореме XII.4.30 и лемме XII.4.21 число граничных условий в симметрической системе, которая определяет наш самосопряженный оператор T, равно половине числа всех граничных значений. Так как нет граничных значений в точке b, то это условие задается в точке a. Поэтому из вышеприведенной таблицы видно, что существует точно одно решение ψ уравнения $(\tau-\lambda)\psi=0$, которое имеет интегрируемый квадрат в окрестности b и удовлетворяет всем граничным условиям в точке b, и существует по крайней мере одно решение φ уравнения $(\tau-\lambda)\varphi=0$, интегрируемое в квадрате в окрестности a и удовлетворяющее всем граничным условиям в точке a. Если бы существовало второе решение, линейно независимое с функцией φ, имеющее интегрируемый квадрат в окрестности a и удовлетворяющее всем граничным условиям в точке a, то, так как пространство всех решений уравнения $(\tau-\lambda)\varphi=0$ двумерно, все решения этого уравнения были бы интегрируемы в квадрате в окрестности a и удовлетворяли бы всем граничным условиям в точке a. Значит, ψ было бы интегрируемо в квадрате на всем интервале I и удовлетворяло бы всем граничным условиям, определяющим T. Тогда λ было бы собственным числом оператора T. Однако, поскольку T — самосопряженный оператор, а $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$, это невозможно. Из симметрии очевидно, что случай (II) эквивалентен случаю (III).

Теорема XII.4.30 показывает, что в случае (I) симметрическая распадающаяся система граничных условий, определяющая оператор T, содержит два элемента. Очевидно, что доказательство, данное для случая (III), проходит также в случае (I). Нужно только заметить, что оба условия нашей системы граничных условий не могут быть условиями в одной и той же концевой точке. Это, очевидно, вытекает из следствия 31.

3. Резольвенты дифференциальных операторов

В этом разделе символ τ будет обозначать формальный дифференциальный оператор порядка n, который определен на интервале I с концевыми точками a, b. Оператор $T = T(\tau)$ будет оператором, полученным из τ наложением системы (которая может быть пустой) k линейно независимых граничных условий $B_i(f) = 0$, $i = 1, \ldots, k$, т. е. T — сужение оператора $T_1(\tau)$ (см. определение 2.8) на подмногообразие многообразия $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$, определенное условиями $B_i(f) = 0$, $i = 1, \ldots, k$. В этом разделе наша главная цель — получить конкретное представление резольвенты $R(\lambda; T)$ для λ из $\varrho(T)$ в виде интегрального оператора

$$R(\lambda; T) f(t) = \int_I K(t, s; \lambda) f(s)\, ds.$$

Нам нужны не только сведения теоретического характера, но и алгебраические алгоритмы для применения в некоторых частных случаях.

Для дальнейшего удобно предполагать, что число $\lambda = 0$ принадлежит $\varrho(T)$, т. е. что T имеет ограниченный везде определенный обратный оператор. Это допущение эквивалентно тому, что оператор τ заменяется на $\tau - \lambda$.

Наш первый результат относится к числу k линейно независимых граничных условий, которые определяют T. Заметим, что k может быть, вообще говоря, нулем.

1. Лемма. *Пусть T имеет ограниченный обратный. Тогда число линейно независимых граничных условий, определяющих T, равно числу линейно независимых решений уравнения $\tau f = 0$, которые принадлежат $L_2(I)$.*

Доказательство. Пусть ν — число линейно независимых решений уравнения $\tau f=0$, принадлежащих $L_2(I)$. Если $\nu>k\geqslant 0$, то $Tf=0$ для некоторой ненулевой функции f, и поэтому T не имеет обратного. Таким образом, $k\geqslant\nu$. Пусть $k>\nu$. Тогда существуют по крайней мере $\nu+1$ линейно независимых линейных функционалов на $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$, которые обращаются в нуль на $\mathfrak{D}(T)$, и существуют по крайней мере $\nu+1$ линейно независимых линейных функционалов на факторпространстве $\mathfrak{D}(T_1(\tau))/\mathfrak{D}(T)$. Следовательно, это факторпространство по крайней мере $(\nu+1)$-мерное. Таким образом, имеется не меньше $\nu+1$ линейно независимых функционалов $f_0, f_1, \ldots, f_\nu$ в $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$, никакая ненулевая линейная комбинация которых не лежит в $\mathfrak{D}(T)$. Поскольку T имеет ограниченный всюду определенный обратный, T отображает $\mathfrak{D}(T)$ на $L_2(I)$. Следовательно, существуют функции $g_0, g_1, \ldots, g_\nu$ в $\mathfrak{D}(T)$, такие, что

$$Tg_i=T_1(\tau)f_i, \qquad i=0, 1, \ldots, \nu.$$

Тогда $\tau(g_i-f_i)=Tg_i-T_1(\tau)f_i=0$, и функции g_i-f_i, $i=0, 1, \ldots, \nu$, являются $\nu+1$ линейно независимыми решениями уравнения $\tau\sigma=0$. Это противоречие заканчивает доказательство.

Следующий результат обобщает следствие 2.26.

2. Лемма. *Пусть T имеет ограниченный обратный, и пусть τ' и τ'' — сужения оператора τ на интервалы $I'=I\cap[a, c]$ и $I''=I\cap[c, b]$, где $a<c<b$. Если ν (ν', ν'') обозначает число линейно независимых решений уравнения $\tau f=0$, которые принадлежат $L_2(I)$ ($L_2(I')$, $L_2(I'')$), то $\nu'+\nu''=\nu+n$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{B}$ ($\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{B}''$) — линейное пространство всех решений уравнения $\tau f=0$, которые принадлежат $L_2(I)$ ($L_2(I')$, $L_2(I'')$). Так как $\mathfrak{B}=\mathfrak{B}'\cap\mathfrak{B}''$, то в силу элементарных свойств конечномерных пространств

$$\dim\mathfrak{B}+\dim(\mathfrak{B}'+\mathfrak{B}'')=\dim\mathfrak{B}'+\dim\mathfrak{B}''.$$

По теореме 1.3 $\dim(\mathfrak{B}'+\mathfrak{B}'')\leqslant n$, откуда следует, что $\nu+n\geqslant\nu'+\nu''$.

Пусть $\mathfrak{W}$ — подпространство пространства $L_2(I)$, образованное всеми функциями, сужения которых на интервалы I' и I'' принадлежат $\mathfrak{B}'$ и $\mathfrak{B}''$ соответственно. Очевидно, что $\dim\mathfrak{W}=\nu'+\nu''$. Мы докажем, что $\nu'+\nu''\geqslant\nu+n$, показав, что $\dim\mathfrak{W}\geqslant\nu+n$. Так как $\mathfrak{B}$ — подпространство пространства $\mathfrak{W}$, то это можно сделать, построив в $\mathfrak{W}$ n линейно независимых функций, никакие линейные комбинации которых не лежат в $\mathfrak{B}$. По теореме 2.10 и лемме 2.6 T^* — сужение оператора $T_1(\tau^*)$ (см. определение 2.8). Поэтому линейные функционалы

[*] $$A_i(f)=f^{(i)}(c), \qquad i=0, 1, \ldots, n-1,$$

непрерывны на $\mathfrak{D}(T^*)$. Так как существуют функции f в $\mathfrak{D}(T_0(\tau^*))$, для которых величины $f^{(i)}(c)$ определяются произвольно, то функционалы в [*] линейно независимы на $\mathfrak{D}(T_0(\tau^*))$. По теореме 2.10 $T^* \supseteq T_1(\tau)^* = T_0(\tau^*)^{**} \supseteq T_0(\tau^*)$, и поэтому $\mathfrak{D}(T_0(\tau^*))$ — подпространство пространства $\mathfrak{D}(T^*)$. Таким образом, функционалы A_i линейно независимы на $\mathfrak{D}(T^*)$.

В $\mathfrak{D}(T^*)$ мы введем скалярное произведение

$$(f, g)^+ = (f, g) + (T^*f, T^*g).$$

По теореме XII.1.6 (a) T^* замкнут, и по теореме XII.1.6 (b) он имеет ограниченный всюду определенный обратный $(T^*)^{-1}$.

Очевидно, что $(T^*)^{-1}$ — ограниченный линейный оператор из $L_2(I)$ в $\mathfrak{D}(T^*)$. Поэтому функционалы $A_i((T^*)^{-1}f)$ непрерывны на $L_2(I)$, и по теореме о представлении элемента пространства, сопряженного гильбертову пространству (см. теорему IV.4.5), существует n функций $h_0, \ldots, h_{n-1}$ в $L_2(I)$, таких, что

$$A_i((T^*)^{-1}g) = (g, h_i), \qquad 0 \leqslant i \leqslant n-1, \quad g \in L_2(I).$$

Линейная независимость функционалов $A_0, \ldots, A_{n-1}$ означает, что функции $h_0, \ldots, h_{n-1}$ линейно независимы. Для всех f из $\mathfrak{D}(T_0(\tau'))$ или из $\mathfrak{D}(T_0(\tau''))$ мы имеем

$$0 = A_i f = (T^*f, h_i) = \int\limits_{I' \text{ или } I''} \tau^* f(t) \overline{h_i(t)}\, dt.$$

По лемме 2.9 мы заключаем, что h_i лежит в $C^\infty(I')$ или в $C^\infty(I'')$ и что $(\tau h_i)(t) = 0$, $t \neq c$. Таким образом, n линейно независимых функций $h_0, \ldots, h_{n-1}$ принадлежат $\mathfrak{W}$. Для завершения доказательства достаточно проверить, что никакая ненулевая линейная комбинация $h = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j h_j$ функций h_i не принадлежит $\mathfrak{W}$. Пусть h принадлежит $\mathfrak{W}$. Тогда по формуле Грина мы имеем

$$0 = (f, \tau h) = (T^*f, h) = \sum_{j=0}^{n-1} \overline{\alpha}_j A_j(f) = \sum_{j=0}^{n-1} \overline{\alpha}_j f^{(j)}(c)$$

для каждой f из $\mathfrak{D}(T_0(\tau^*))$. Тогда, очевидно, $\alpha_j = 0$ при $j = 0, \ldots, n-1$, так что $h = 0$. Это противоречие завершает доказательство настоящей леммы.

3. Лемма. *Сопряженный оператор T^* оператора T есть сужение оператора $T_1(\tau^*)$, определенного системой граничных условий $B_i^*(f) = 0$, $i = 1, \ldots, k^*$, наложенных на τ^*.*

Доказательство. Из доказательства предыдущей леммы видно, что $T_0(\tau^*) \subseteq T^* \subseteq T_1(\tau^*)$. Тогда $\mathfrak{D}(T_1(\tau^*))$ — гильбертово пространство со скалярным произведением $(f, g)^* = (f, g) + (\tau^* f, \tau^* g)$, и элементарные вычисления показывают, что ортогональное дополнение $\mathfrak{B}$ пространства $\mathfrak{D}(T_0(\tau^*))$ в $\mathfrak{D}(T_1(\tau^*))$ есть множество функций f, удовлетворяющих уравнению $f + T_0(\tau^*)^* T_1(\tau^*) f = f + T_1(\tau) T_1(\tau^*) f = 0$ (см. теорему 2.10). Таким образом, каждая f из $\mathfrak{B}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $f + \tau\tau^* f = 0$. Это показывает, что размерность пространства $\mathfrak{B}$ не больше чем $2n$. Так как $\mathfrak{D}(T^*)$ — замкнутое подпространство пространства $\mathfrak{D}(T_1(\tau^*))$, содержащее $\mathfrak{D}(T_0(\tau^*))$, ортогональное дополнение пространства $\mathfrak{D}(T^*)$ в $\mathfrak{D}(T_1(\tau^*))$ имеет конечный базис $h_1, \ldots, h_p$. Положим $B_i^*(f) = (f, h_i)^*$. Очевидно, что B_i^* — граничное значение для τ^*, и, следовательно, уравнения $B_i^*(f) = 0$, $i = 1, \ldots, p$, определяют подпространство $\mathfrak{D}(T^*)$ пространства $\mathfrak{D}(T_1(\tau^*))$, ч. т. д.

Замечание. Если T — самосопряженный оператор, определенный формально симметрическим оператором, или, в более общем виде, оператор вида $T_1 - \lambda I$, где T_1 — самосопряженный оператор, описанный выше, то граничные условия $B_i^*(f) = 0$, $i = 1, \ldots, k^*$, эквивалентны граничным условиям $B_j(f) = 0$, $j = 1, \ldots, k$.

4. Лемма. *Если R обозначает ограниченный обратный оператора T, то существует функция K, определенная на $I \times I$ и такая, что $K(t, \cdot)$ принадлежит $L_2(I)$ для каждого $t \in I$, причем*

$$(Rf)(t) = \int_I K(t, s) f(s)\, ds, \qquad f \in L_2(I).$$

Более того,

(a) *Для каждой точки c в I функция $K(c, \cdot)$ принадлежит $C^\infty(I \cap [a, c])$ и $C^\infty(I \cap [c, b])$, и $\tau^*(\overline{K(c, s)}) = 0$ для $s \neq c$.*

(b) *Если положить $K_+(c, s) = K(c, s)$ для $s > c$ и $K_-(c, s) = K(c, s)$ для $s < c$, то*

$$\lim_{s \to c+0} K_+^{(i)}(c, s) = \lim_{s \to c-0} K_-^{(i)}(c, s), \qquad i = 0, \ldots, n-2,$$
$$\lim_{s \to c+0} K_+^{(n-1)}(c, s) - \lim_{s \to c-0} K_-^{(n-1)}(c, s) = (-1)^n \overline{[a_n(c)]}^{-1}.$$

(c) *Равенства* (b) *эквивалентны соотношению*

$$f(c) = F_c(f, \overline{K_-}) - F_c(f, \overline{K_+}), \qquad c \in I, \qquad f \in \mathfrak{D}(T_1(\tau)).$$

Доказательство. Очевидно, что R — непрерывное взаимно однозначное отображение пространства $L_2(I)$ на гильбертово пространство $\mathfrak{D}(T)$, у которого скалярное произведение совпадает с $(f, g)^* = (f, g) + (Tf, Tg)$. Так как T — сужение оператора $T_1(\tau)$, то из леммы 2.16 следует, что функционал $(Rf)(t)$ непрерывен на $L_2(I)$ для каждой точки t из I. Поэтому теорема IV.4.5 показывает, что для каждой t из I существует функция $K(t, \cdot)$ в $L_2(I)$, такая, что

$$(Rf)(t)=\int_I K(t, s) f(s)\, ds, \quad f \in L_2(I).$$

Пусть $a<c<b$. Предположим, что g лежит в $\mathfrak{D}(T_0(\tau_c'))$, где τ_c' — сужение оператора τ на $I \cap [a, c]$. Тогда

$$0=g(c)=\int_I K(c, s)(\tau g)(s)\, ds.$$

Из лемм 2.6 и 2.9 следует, что $K(c, \cdot)$ принадлежит $C^\infty(I \cap [a, c])$ и $\tau^* \overline{K(c, s)}=0$, $a<s<c$. Подобными рассуждениями мы находим, что $K(c, \cdot)$ принадлежит $C^\infty(I \cap [c, b])$ и что $\tau^* \overline{K(c, s)}=0$, $c<s<b$.

Теперь пусть $K(t, s)=K_-(t, s)$ для $s<t$ и $K(t, s)=K_+(t, s)$ для $s>t$. Если $a<c<b$, то по формуле Грина (2.4) мы имеем

$$\begin{aligned} f(c) &= \int_I K(c, s)(\tau f)(s)\, ds= \\ &= \int_a^c K_-(c, s)(\tau f)(s)\, ds+\int_c^b K_+(c, s)(\tau f)(s)\, ds= \\ &= F_c(f, \overline{K_-})-F_c(f, \overline{K_+})=F_c(f, \overline{K_-}-\overline{K_+}) \end{aligned}$$

для каждой функции f из $\mathfrak{D}(T_0(\tau))$. Здесь производные в точке c от функций $\overline{K_+}$ и $\overline{K_-}$, входящие в $F_c(f, \overline{K_+})$ и $F_c(f, \overline{K_-})$, берутся слева и справа соответственно.

Так как по лемме 2.2 $F_c(f, g)$ есть невырожденная форма на векторах $[f(c), \ldots, f^{(n-1)}(c)]$ и $[g(c), \ldots, g^{(n-1)}(c)]$, уравнение

$$f(c)=F_c(f, \eta),$$

если предполагать его справедливость для всех f из $\mathfrak{D}(T_0(\tau))$, однозначно определяет функцию η и ее первые $n-1$ производных. Это уравнение эквивалентно системе уравнений

$$[**] \qquad \sum_{j=0}^{n-1} F_c^{ij}(\tau)\, \overline{\eta^{(j)}(c)}=\delta_0^i, \quad i=0, \ldots, n-1,$$

где $\delta_j^i=1$, если $i=j$, и $\delta_j^i=0$, если $i \neq j$. Из формы, данной для матрицы F_c^{ij}, во второй формуле, предшествовавшей определению 2.1, мы видим, что

$$\begin{aligned} F_c^{0(n-1)}(\tau) &= (-1)^{n-1} a_n(c), \\ F_c^{i(n-1)}(\tau) &= 0, \quad \text{если } i \neq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, система [**] имеет решение

$$\eta(c)=\ldots=\eta^{(n-2)}(c)=0,\quad \eta^{(n-1)}(c)=(-1)^{n-1}[a_n(c)]^{-1}.$$

Поэтому скачок функции $K(c, s)$ в точке $s=c$ описывается n уравнениями

$$K_-^{(i)}(c, c-)-K_+^{(i)}(c, c+)=0,\qquad i=0, \ldots, n-2,$$

$$K_+^{(n-1)}(c, c+)-K_-^{(n-1)}(c, c-)=(-1)^n\overline{[a_n(c)]^{-1}}.$$

Дальнейшие сведения о ядре K даются в следующей лемме.

5. Лемма. *Функция $\overline{K(c, \cdot)}$, полученная из ядра, определенного в предыдущей лемме при фиксированном c из I, удовлетворяет граничным условиям $B_i^*(f)=0$, $i=1, \ldots, k^*$, определяющим T^*.*

Доказательство. Здесь будет применяться система обозначений из доказательства предыдущей леммы. Пусть $a<c<b$, а g — функция из $C^\infty(I)$, которая совпадает с $K(c, \cdot)$ в окрестностях точек a и b и такая, что $\bar{g}$ принадлежит $\mathfrak{D}(T_1(\tau^*))$ (мы напоминаем, что по лемме 4 $K(c, s)$ — бесконечное число раз дифференцируемая функция, за исключением точки $s=c$). Применение формулы Грина дает

$$\int_I (\tau f)(s)(g(s)-K(c, s))\,ds=\int_a^c (\tau f)(s)(g(s)-K_-(c, s))\,ds+$$
$$+\int_c^b (\tau f)(s)(g(s)-K_+(c, s))\,ds=$$
$$=\int_I f(s)\overline{(\tau^*\bar{g})}(s)\,ds-F_c(f, \overline{K_-})+F_c(f, \overline{K_+}),\qquad f\in\mathfrak{D}(T_1(\tau)).$$

Вспоминая, что для f из $\mathfrak{D}(T)$

$$f(c)=F_c(f, \overline{K_-})-F_c(f, \overline{K_+})=\int_I (\tau f)(s)K(c, s)\,ds,$$

мы получаем уравнение

$$\int_I (\tau f)(s)g(s)\,ds=\int_I f(s)\overline{(\tau^*\bar{g})}(s)\,ds,\qquad f\in\mathfrak{D}(T).$$

Таким образом, g лежит в $\mathfrak{D}(T^*)$, так что $\bar{g}$ удовлетворяет граничным условиям $B_i^*(f)=0$, $i=1, \ldots, k^*$, из леммы 3. Теперь g совпадает с $K(c, \cdot)$ в окрестностях точек a и b, и, рассмотрев замечание к следствию 2.28, мы видим, что $\overline{K(c, \cdot)}$ удовлетворяет этим же граничным условиям, ч. т. д.

6. Лемма. (a) *Если $s \neq t$, то ядро $K(s, t)$ — бесконечно дифференцируемая функция по обеим переменным.*

(b) *Функции $K_+(\cdot, \cdot)$ и $K_-(\cdot, \cdot)$, встречавшиеся в формулировке леммы 4, непрерывны на своих областях определения.*

Доказательство. (a) Пусть $\varphi_1^*, \ldots, \varphi_{p^*}^*$ и $\psi_1^*, \ldots, \psi_{q^*}^*$ интегрируемы в квадрате в окрестностях a и b соответственно и образуют базис для решений уравнения $\tau^*\sigma = 0$. Из леммы 4 следует, что для c из I ядро K может быть представлено в виде

$$[']\qquad K(c, s) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{p^*} \alpha_i(c)\overline{\varphi_i^*(s)}, & s < c, \\ \sum_{i=1}^{q^*} \beta_i(c)\overline{\psi_i^*(s)}, & s > c. \end{cases}$$

Теперь вычислим $p^* + q^*$ постоянных величин $\alpha_i(c)$ и $\beta_i(c)$. Рассмотрим n линейных уравнений

$$(1)\qquad \begin{gathered} K^{(i)}(c, c+0) - K^{(i)}(c, c-0) = 0, \quad 0 \leqslant i \leqslant n-2, \\ K^{(n-1)}(c, c+0) - K^{(n-1)}(c, c-0) = (-1)^n \overline{[a_n(c)]}^{-1}. \end{gathered}$$

Формула ['] показывает, что уравнения (1) могут быть переписаны в виде

$$(1')\qquad \begin{gathered} \sum_{j=1}^{p^*} \alpha_j(c)\overline{\varphi_j^{*(i)}(c)} - \sum_{l=1}^{q^*} \beta_l(c)\overline{\psi_l^{*(i)}(c)} = 0, \quad i = 0, \ldots, n-2, \\ \sum_{j=1}^{p^*} \alpha_j(c)\overline{\varphi_j^{*(n-1)}(c)} - \sum_{l=1}^{q^*} \beta_l(c)\overline{\psi_l^{*(n-1)}(c)} = (-1)^n \overline{[a_n(c)]}^{-1}. \end{gathered}$$

По лемме 5 функция $\overline{K(c, \cdot)}$ удовлетворяет уравнениям

$$(2)\qquad B_i^*(\overline{K}) = 0, \quad i = 1, \ldots, k^*.$$

По теореме 2.19 мы можем написать $B_i^* = C_i^* + D_i^*$, где C_i^* и D_i^* являются граничными значениями в точках a и b соответственно, и с применением ['] уравнения (2) могут быть переписаны в виде

$$(2')\qquad \sum_{j=1}^{p^*} \overline{\alpha_j(c)}\, C_i^*(\varphi_j^*) + \sum_{l=1}^{q^*} \overline{\beta_l(c)}\, D_i^*(\psi_l^*) = 0, \quad i = 1, \ldots, k^*.$$

По леммам 1 и 2, $p^* + q^* = k^* + n$. Поэтому система, составленная из уравнений (1′) и (2′), имеет единственное решение $\alpha_i(c)$, $\beta_i(c)$, если соответствующая однородная система уравнений имеет только нулевое решение.

Пусть однородная система, полученная из уравнений (1′) и (2′), имеет ненулевое решение $\alpha_i^0(c)$, $\beta_i^0(c)$, и пусть $K_0(\cdot)$ — функция (переменной s), полученная из ['] заменой α_i и β_i на α_i^0 и β_i^0. Функция K_0 n раз дифференцируема для $s \neq c$. Уравнения (1') удовлетворяются функциями α_i^0 и β_i^0. Это означает, что K_0 является функцией, $n-1$ раз дифференцируемой в точке c. Таким образом, $\overline{K}_0 \in \mathfrak{D}(T_1(\tau))$. Тогда уравнения (2') показывают, что $\overline{K}_0$ лежит в области определения оператора T^*, а уравнения ['] показывают, что $T^*\overline{K}_0 = 0$. Так как T имеет ограниченный обратный, то T^* также имеет ограниченный обратный. Следовательно, K_0 обязательно тождественно равняется нулю. Поэтому уравнения (1') и (2') имеют единственные решения $\alpha_i(c)$ и $\beta_i(c)$ соответственно.

Заметим, что все коэффициенты в (1') и (2') — бесконечно дифференцируемые функции от c. Однородная система p^*+q^* уравнений для p^*+q^* неизвестных, полученная из (1') и (2'), не имеет ненулевых решений. Следовательно, определитель системы (1') — — (2') отличен от нуля, и решения этой системы можно выразить (по правилу Крамера) через некоторые определители из ее коэффициентов. Следовательно, α_i и β_i — бесконечное число раз дифференцируемые функции c. Теперь остальные утверждения леммы, очевидно, следуют из формулы ['].

Замечание. Уравнения (1') часто будут упоминаться как «уравнения скачков».

Чтобы получить более точную формулу для K, мы изучим далее вид оператора, сопряженного к R.

7. Лемма. *Пусть K — ядро, связанное с R, как в лемме 4. Тогда*

(a) *для фиксированной точки c из I функция $K(\cdot, c)$ лежит в $L_2(I)$. Сопряженный к R оператор R^* может быть представлен в виде*

$$(R^*g)(s) = \int_I \overline{K(t, s)}\, g(t)\, dt;$$

(b) *для фиксированной точки c из I и для $t \neq c$ имеет место равенство $\tau K(t, c) = 0$;*

(c) *$K(\cdot, c)$ удовлетворяет граничным условиям, определяющим T.*

Доказательство. Пусть J — компактный подинтервал из I. Пусть K_1 — ядро, связанное с R^*, как в лемме 4. По лемме 6 ядра K и K_1 ограничены на J. Если f, $g \in \mathfrak{D}(T_0(\tau)) = \mathfrak{D}(T_0(\tau^*))$ и если f и g обращаются в нуль вне J, то из теоремы Фубини следует, что

$$\int_I \int_I K(s, t) f(t) \overline{g(s)}\, dt\, ds = (Rf, g) =$$

$$= \overline{(R^*g, f)} = \int_I \int_I \overline{K_1(t, s) g(s)}\, f(t)\, ds\, dt.$$

Система функций вида $f(t)g(s)$, где f, g — функции из $\mathfrak{D}(T_0(\tau))$, обращающиеся в нуль вне J, фундаментальна в $L_2(J\times J)$. Поэтому $K(s, t)=\overline{K_1(t, s)}$ для почти всех $(s, t)\in J\times J$. Так как по лемме 6 оба эти ядра непрерывны для $t\neq s$, то $K(s, t)=\overline{K_1(t, s)}$ для всех точек (s, t) из $J\times J$, если только $s\neq t$. Теперь из этого факта и из лемм 4 и 5 следует наша лемма.

8. Теорема. *Пусть τ — формальный дифференциальный оператор на интервале I, а T — оператор, полученный из τ наложением k линейно независимых граничных условий $B_i(f)=0$, $i=1, \ldots, k$.*

Пусть $\{\varphi_i\}$, $i=1, \ldots, p$ ($\{\varphi_i^*\}$, $i=1, \ldots, p^*$), является базисом для тех решений уравнения $\tau\sigma=0$ ($\tau^*\sigma=0$), которые интегрируемы в квадрате в окрестности точки a, и пусть $\{\psi_i\}$, $i=1, \ldots, q$ ($\{\psi_i^*\}$, $i=1, \ldots, q^*$), является базисом для решений уравнения $\tau\sigma=0$ ($\tau^*\sigma=0$), имеющих интегрируемые квадраты в окрестности точки b. Тогда существуют единственные скалярные матрицы $\Gamma=(\gamma_{ij})$, $i=1, \ldots, q$, $j=1, \ldots, p^*$, и $\Gamma'=(\gamma'_{ij})$, $i=1, \ldots, p$, $j=1, \ldots, q^*$, такие, что функция Грина K, определенная в лемме 4, представляется в виде

$$K(t, s)=\begin{cases}\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{p^*}\gamma_{ij}\psi_i(t)\overline{\varphi_j^*(s)}, & s<t,\\ \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q^*}\gamma'_{ij}\varphi_i(t)\overline{\psi_j^*(s)}, & s>t.\end{cases} \qquad [*]$$

Доказательство. В доказательстве леммы 6 ядро K было представлено в виде

$$K(t, s)=\begin{cases}\sum_{j=1}^{p^*}\alpha_j(t)\overline{\varphi_j^*(s)}, & s<t,\\ \sum_{j=1}^{q^*}\beta_j(t)\overline{\psi_j^*(s)}, & s>t,\end{cases} \qquad [']$$

где функции $\alpha_j(t)$, $\beta_j(t)$ бесконечно дифференцируемы. Используя лемму 7 и применяя τ к обеим частям этих равенств, мы получаем

$$\sum_{j=1}^{p^*}(\tau\alpha_j)(t)\overline{\varphi_j^*(s)}=0, \quad s<t,$$
$$\sum_{j=1}^{q^*}(\tau\beta_j)(t)\overline{\psi_j^*(s)}=0, \quad s>t.$$

Из линейной независимости функций φ_j^* и ψ_j^* следует, что $\tau\alpha_j=\tau\beta_j=0$.

Остается доказать, что функции α_j и β_j интегрируемы в квадрате в окрестностях точек b и a соответственно. Если Φ_j^* — любой другой базис для множества решений уравнения $\tau^*\sigma=0$, интегрируемых в квадрате в окрестности точки a, то коэффициенты $\hat{\alpha}_j$ определенные соотношением

$$K(t, s)=\sum_{j=1}^{q^*} \hat{\alpha}_j(t)\overline{\Phi_j^*(s)}=\sum_{j=1}^{q^*} \alpha_j(t)\overline{\varphi_j^*(s)}, \quad s<t,$$

будут связаны с коэффициентами α_i невырожденным линейным преобразованием, так что каждая функция α_i будет линейной комбинацией функций $\hat{\alpha}_i$ с постоянными коэффициентами, и обратно. Таким образом, α_i будут интегрируемы в квадрате в окрестности точки b тогда и только тогда, когда это верно для $\hat{\alpha}_i$. Итак, если $J=[c, d]$ — компактный интервал внутри I, то мы можем предполагать, не уменьшая общности, что φ_i^* ортонормальны на J. Тогда из [′] следует, что

$$\alpha_i(t)=\int_c^d K(t, s)\varphi_i^*(s)\,ds, \quad t>s.$$

Теперь для каждой точки s из I линейный функционал $(R^*f)(s)$ непрерывен на L_2, и для каждой f функция $(R^*f)(s)$ непрерывна по s. Поэтому $\sup\limits_{s\in J}|(R^*f)(s)|<\infty$ для каждой функции $f\in L_2(I)$, и из теоремы о равномерной ограниченности следует, что для $s\in J$ функционалы $f\to(R^*f)(s)$ равномерно ограничены по норме. Так как

$$(R^*f)(s)=\int_I \overline{K(t, s)}f(t)\,dt, \qquad f\in L_2(I),$$

то из теоремы IV.8.1 следует, что $\sup\limits_{s\in J}\int_I |K(t, s)|^2\,dt<\infty$. Поэтому

$$\int_J\int_I |K(t, s)|^2\,dt\,ds<\infty,$$

и по неравенству Шварца и теореме Фубини

$$\int_a^b |\alpha_i(t)|^2\,dt\leqslant\int_I\left|\int_J K(t, s)\varphi_i^*(s)\,ds\right|^2 dt\leqslant$$

$$\leqslant\int_I\int_J |K(t, s)|^2\,ds\,dt=$$

$$=\int_J\int_I |K(t, s)|^2\,dt\,ds<\infty.$$

Таким образом, функции α_i интегрируемы в квадрате в окрестности точки b. Так же можно показать, что функции β_j интегрируемы в квадрате в окрестности точки a, ч. т. д.

Следующее утверждение дает нам возможность использовать теорему 8 как вычислительный алгоритм при рассмотрении частных примеров.

9. Следствие. *Матрицы $\Gamma=(\gamma_{ij})$ и $\Gamma'=(\gamma'_{ij})$ в предыдущей теореме однозначно определяются уравнениями скачков и граничными условиями, определяющими T.*

Доказательство. При выводе теоремы 8 мы видели, что функции $\alpha_i(t)$ и $\beta_i(t)$ однозначно определяются уравнениями скачков и граничными условиями $B_i^*(\overline{K})=0$, $i=1, \ldots, k^*$, которым удовлетворяет $\overline{K(c, \cdot)}$. Далее, в лемме 7 показано, что $\overline{K(s, t)}$ — ядро для R^*. По симметрии K также однозначно определяется уравнениями скачков и граничными условиями, определяющими T. Поэтому, поскольку функции ψ_i образуют линейно независимую систему и такими же являются функции φ_i, ψ_i^*, φ_i^*, матрицы Γ и Γ' однозначно определяются уравнениями скачков и граничными условиями, определяющими T, ч. т. д.

Вычисление K при помощи следствия 9 может быть упрощено, если система граничных условий для T или T^* распадается или содержит определенное число граничных условий в точке a или b. При описании этого упрощения стоит сделать некоторые замечания, которые будут использованы в следующих нескольких теоремах. Как и выше, пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ — базис пространства $\mathfrak{B}_a$ тех решений уравнения $\tau\sigma=0$, которые имеют интегрируемые квадраты в окрестности точки a; аналогично пусть $\psi_1, \ldots, \psi_q$ — базис пространства $\mathfrak{B}_b$ решений, интегрируемых в квадрате в окрестности точки b. Пусть система граничных условий для T (или некоторая эквивалентная система) записана в виде $[B_1, \ldots, B_k]=$ $=[C_1, \ldots, C_\mu]\cup[D_1, \ldots, D_\nu]\cup[E_1, \ldots, E_\omega]$, где C_i, D_i и E_i — граничные условия в точках a, b и смешанные граничные условия соответственно. Пусть φ_i и ψ_i выбраны так, что система $\varphi_1, \ldots, \varphi_u$, $u\leqslant p$, образует базис подпространства $\mathfrak{W}_a\subseteq\mathfrak{B}_a$, содержащего те элементы пространства $\mathfrak{B}_a$, которые удовлетворяют условиям $C_i(f)=0$, $i=1, \ldots, \mu$, а $\psi_1, \ldots, \psi_v$, $v\leqslant q$, есть базис подпространства $\mathfrak{W}_b\subseteq\mathfrak{B}_b$, содержащего те элементы пространства $\mathfrak{B}_b$, которые удовлетворяют условиям $D_i(f)=0$, $i=1, \ldots, \nu$. Символы C_i^*, $\mathfrak{B}_b^*$, φ_i^*, μ^*, u^* и т. д. будут обозначать соответственно целые числа, пространства решений и т. д., связанные с уравнением $\tau^*\sigma=0$ и с граничными значениями $B_1^*, \ldots, B_{k^*}^*$ для T^*.

10. Теорема. *Пусть T имеет ограниченный обратный R. Тогда в обозначениях предыдущего абзаца*

$$u = p - \mu, \quad v = q - \nu, \quad u^* = p^* - \mu^*, \quad v^* = q^* - \nu^*.$$

Более того, ядро K для R имеет представление

$$K(t, s) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{v} \sum_{j=1}^{u^*} \gamma_{ij} \psi_i(t) \overline{\varphi_j^*(s)}, & s < t, \\ \sum_{i=1}^{u} \sum_{j=1}^{v^*} \gamma'_{ij} \varphi_i(t) \overline{\psi_j^*(s)}, & t < s, \end{cases}$$

где постоянные γ_{ij} и γ'_{ij} однозначно определяются уравнениями скачков и оставшейся системой смешанных граничных уравнений

$$E_i(K) = 0, \quad i = 1, \ldots, \omega, \quad \omega = k - (\mu + \nu).$$

Доказательство. Так как $\mathfrak{W}_a$ — подпространство p-мерного линейного многообразия $\mathfrak{V}_a$, определенное μ линейными условиями, то очевидно, что $u = \dim \mathfrak{W}_a \geqslant p - \mu$. Аналогично $v = \dim \mathfrak{W}_b \geqslant q - \nu$. С другой стороны, если $\dim \mathfrak{W}_a + \dim \mathfrak{W}_b > p + q - (\mu + \nu) = n + k - (\mu + \nu)$ (см. результат применения леммы 2 к оператору τ^*), то поскольку $\dim(\mathfrak{W}_a + \mathfrak{W}_b) \leqslant n$, равенство

$$\dim(\mathfrak{W}_a + \mathfrak{W}_b) + \dim(\mathfrak{W}_a \cap \mathfrak{W}_b) = \dim \mathfrak{W}_a + \dim \mathfrak{W}_b$$

показывает, что $\dim(\mathfrak{W}_a \cap \mathfrak{W}_b) > k - (\mu + \nu) = \omega$. Следовательно, $\mathfrak{W}_a \cap \mathfrak{W}_b$ содержит ненулевой вектор f, удовлетворяющий оставшимся смешанным граничным условиям $E_i(f) = 0$, $i = 1, \ldots, \omega$. Поэтому $f \in \mathfrak{D}(T)$ и $Tf = 0$ вопреки тому факту, что T имеет обратный. Поэтому $u = p - \mu$ и $v = q - \nu$. Соотношения $u^* = p^* - \mu^*$ и $v^* = q^* - \nu^*$ доказываются аналогично.

Так как ядро $\overline{K(t, \cdot)}$ удовлетворяет граничным условиям $C_i^*(f) = 0$ и $D_i^*(f) = 0$, то оно имеет представление

$$K(t, s) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{u^*} \alpha_i(t) \overline{\varphi_i^*(s)}, & s < t, \\ \sum_{i=1}^{v^*} \beta_i(t) \overline{\psi_i^*(s)}, & s > t. \end{cases}$$

подобное представлению [′], данному при доказательстве леммы 6. Чтобы определить $u^* + v^* = (p^* + q^*) - (\mu^* + \nu^*) = (n + k^*) - (\mu^* + \nu^*)$ неизвестных функций $\alpha_i(t)$ и $\beta_i(t)$, мы имеем n уравнений скачков и оставшиеся граничные условия

$$E_i^*(\overline{K}) = 0, \quad i = 1, \ldots, \omega^*, \quad \omega^* = k^* - (\mu^* + \nu^*).$$

Путем рассуждений, аналогичных примененным при доказательстве леммы 6, устанавливается, что эти две системы условий определяют функции $\alpha_i(t)$ и $\beta_i(t)$ однозначно; тогда, как при доказательстве леммы 7, мы видим, что $\alpha_i \in \mathfrak{W}_b$, $\beta_i \in \mathfrak{W}_a$. Таким образом, (γ_{ij}) и (γ'_{ij}) однозначно определяются условиями скачков и граничными условиями $E_i^*(\overline{K})=0$, $i=1, \ldots, \omega^*$. По симметрии (γ_{ij}) и (γ'_{ij}) также однозначно определяются условиями скачков и граничными условиями $E_i(K)=0$, $i=1, \ldots, \omega$ (см. следствие 9), ч. т. д.

Особенно важен случай, когда и T, и T^* определяются распадающимися системами граничных условий. Тогда $\mu+\nu=k$, $\mu^*+\nu^*=k^*$ и коэффициенты γ_{ij} и γ'_{ij} однозначно определяются уравнениями скачков. По леммам 1 и 2 $p^*+q^*=n+k^*$. Поэтому $u^*+v^*=p^*+q^*-(\mu^*+\nu^*)=n$. Аналогично $u+v=n$. Если функция σ является одновременно линейной комбинацией $\varphi_1, \ldots, \varphi_u$ и $\psi_1, \ldots, \psi_v$, то σ лежит в $L_2(I)$, и мы имеем $\tau\sigma=0$ и $B_i(\sigma)=0$, $i=1, \ldots, k$. Таким образом, σ будет лежать в области определения оператора T и $T\sigma=0$. Отсюда следует, что $\sigma=0$. Поэтому системы $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_u\}$ и $\{\psi_1, \ldots, \psi_v\}$ должны быть линейно независимыми. Так как $u+v=n$, то они образуют базис для всех решений уравнения $\tau\sigma=0$ на I. Аналогично $\{\varphi_1^*, \ldots, \varphi_{u^*}^*\} \cup \cup \{\psi_1^*, \ldots, \psi_{v^*}^*\}$ — базис для всех решений уравнения $\tau^*\sigma=0$. Если

$$K(t, s)=\begin{cases} \sum_{i=1}^{u^*} \alpha_i(t)\overline{\varphi_i^*(s)}, & s<t, \\ \sum_{i=1}^{v^*} \beta_i(t)\overline{\psi_i^*(s)}, & s>t, \end{cases}$$

то из леммы 4(с) видно, что уравнения скачков эквивалентны соотношению

$$f(t)=\sum_{i=1}^{u^*} \alpha_i(t) F_t(f, \varphi_i^*)-\sum_{j=1}^{v^*} \beta_j(t) F_t(f, \psi_j^*), \quad f \in C^{n-1}(I).$$

Положим $a_i=\alpha_i$, $i=1, \ldots, u^*$; $a_i=\beta_{i-u^*}$, $i=u^*+1, \ldots, n$; $\eta_i^*=\varphi_i^*$, $i=1, \ldots, u^*$; $\eta_i^*=-\psi_{i-u^*}^*$, $i=u^*+1, \ldots, n$. Тогда это соотношение принимает более простой вид

$$f(t)=\sum_{i=1}^{n} a_i(t) F_t(f, \eta_i^*), \quad f \in C^{n-1}(I). \tag{3}$$

Поскольку F_t — форма, содержащая только функцию f и ее первые $n-1$ производных, уравнение (3) выполняется для всех f из $C^{n-1}(I)$, если оно выполняется для функций любого подпространства, содержащего функцию с любыми заданными значениями первых $n-1$ производных в любой точке, в частности для подпространства решений уравнения $\tau\sigma=0$. Мы видели (см. теорему 10), что $\tau a_i=0$, $i=1, \ldots, n$. Таким образом, выбирая базис $\{\xi_i\}$, $i=1, \ldots, n$, для решений уравнения $\tau\sigma=0$ и определяя матрицу $\{\Gamma_{ij}\}$ уравнениями

$$a_i=\sum_{j=1}^{n}\Gamma_{ij}\xi_j, \qquad i=1, \ldots, n,$$

мы видим, что уравнения скачков эквивалентны следующей системе уравнений:

$$\sum_{i,\,j=1}^{n}\Gamma_{ij}F_t(\xi_l, \eta_i^*)\,\xi_j(t)=\xi_l(t), \qquad l=1, \ldots, n. \tag{4}$$

Теперь по формуле Грина

$$F_{t_1}(\xi_l, \eta_i^*)-F_{t_2}(\xi_l, \eta_i^*)=\int_{t_1}^{t_2}\{(\tau\xi_l)(t)\,\overline{\eta_i^*(t)}-\xi_l(t)\,\overline{(\tau^*\eta_i^*)(t)}\}\,dt=0.$$

Поэтому $F_t(\xi_l, \eta_i^*)$ не зависит от t и система (4) эквивалентна системе уравнений

$$\sum_{i=1}^{n}\Gamma_{ij}F_t(\xi_l, \eta_i^*)=\delta_{jl}, \qquad 1\leqslant j,\ l\leqslant n.$$

Другими словами, матрица $\{\Gamma_{ij}\}$ является обратной для матрицы $\{F_t(\xi_l, \eta_i^*)\}$. В терминах матрицы $\{\Gamma_{ij}\}$ мы имеем

$$K(t, s)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=1}^{u^*}\sum_{j=1}^{n}\Gamma_{ij}\xi_j(t)\,\overline{\varphi_i^*(s)}, & s<t,\\ \displaystyle\sum_{i=u^*+1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Gamma_{ij}\xi_j(t)\,\overline{\psi_{i-u^*}^*(s)}, & s>t.\end{cases}$$

Кроме того, если мы возьмем $\xi_j=\varphi_j$, $j=1, \ldots, u$, и $\xi_j=\psi_{j-u}$, $j=u+1, \ldots, n$, то, поскольку постоянные Γ_{ij} в выражении ядра K определены однозначно, из представления для K, данного в теореме 10, следует, что $\Gamma_{ij}=0$, если одновременно $i\leqslant u^*$ и $j\leqslant u$ или $i>u^*$ и $j>u$.

Далее все эти замечания формулируются в виде теоремы, в которой применяются введенные выше обозначения.

11. Теорема. *Предположим, что T и T^* определяются системами распадающихся граничных условий. Пусть $\xi_i=\varphi_i$, $i=1, \ldots, u$; $\xi_i=\psi_{i-u}$, $i=u+1, \ldots, n$; $\eta_i^*=\varphi_i^*$, $i=1, \ldots, u^*$; $\eta_i^*=-\psi_{i-u^*}^*$, $i=u^*+1, \ldots, n$. Тогда*

(a) *системы $\{\xi_i\}$ и $\{\eta_i^*\}$ образуют базис для пространств решений уравнений $\tau\sigma=0$ и $\tau^*\sigma=0$ соответственно;*

(b) *матрица $\{F_t(\xi_i, \eta_j^*)\}$ не зависит от t и невырожденна;*

(c) *если* $\{\Gamma_{ij}\}$ *обозначает обратную матрицы* $\{F_t(\xi_i, \eta_j^*)\}$, *то* $\Gamma_{ij}=0$, *когда одновременно* $i\leqslant u^*$ *и* $j\leqslant u$ *или* $i>u^*$ *и* $j>u$;

(d) *ядро* K *обратного оператора* R *к оператору* T *определяется формулой*

$$K(t, s)=\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{u^*}\sum\limits_{j=u+1}^{n} \Gamma_{ij}\overline{\varphi_i^*(s)}\,\psi_{j-u}(t), & s<t, \\ \sum\limits_{i=u^*+1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{u} \Gamma_{ij}\overline{\psi_{i-u^*}^*(s)}\,\varphi_j(t), & s>t. \end{cases}$$

Когда теоремы 10 и 11 формулируются для резольвенты дифференциальных операторов, они принимают несколько другой вид. Для дальнейших ссылок мы выпишем соответствующие формулировки.

12. Следствие. *Пусть* τ — *формальный дифференциальный оператор, а* T — *оператор с плотной областью определения, полученный из* τ *наложением системы* $\{B_i\}$ *граничных условий. Пусть системы граничных условий, определяющие* T *и* T^*, *делятся на три подсистемы, как это описано в пункте, предшествовавшем теореме* 10. *Пусть для каждого числа* $\lambda\in\varrho(T)$ *системы* $\varphi_i(\cdot, \lambda)$, $1\leqslant i\leqslant u$ $(\varphi_i^*(\cdot, \bar\lambda)$, $1\leqslant i\leqslant u^*)$, *и* $\psi_i(\cdot, \lambda)$, $1\leqslant i\leqslant v$ $(\psi_i^*(\cdot, \bar\lambda)$, $1\leqslant i\leqslant v^*)$, *образуют базис для всех решений уравнения* $(\tau-\lambda)\sigma=0$ $((\tau^*-\bar\lambda)\sigma=0)$, *интегрируемых в квадрате в окрестностях точек* a *и* b *и удовлетворяющих граничным условиям в точках* a *и* b *соответственно. Тогда резольвента* $R(\lambda; T)=(\lambda I-T)^{-1}$ *определяется выражением*

$$(R(\lambda; T)f)(t)=\int_I f(s)K(t, s; \lambda)\,ds, \quad f\in L_2(I),$$

где ядро K *имеет представление*

$$K(t, s; \lambda)=\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{v}\sum\limits_{j=1}^{u^*} \gamma_{ij}(\lambda)\,\psi_i(t; \lambda)\,\overline{\varphi_j^*(s; \bar\lambda)}, & s<t, \\ \sum\limits_{i=1}^{u}\sum\limits_{j=1}^{v^*} \gamma'_{ij}(\lambda)\,\varphi_i(t; \lambda)\,\overline{\psi_j^*(s; \bar\lambda)}, & s>t. \end{cases}$$

Функции $\gamma_{ij}(\cdot)$ *и* $\gamma'_{ij}(\cdot)$ *однозначно определяются смешанными граничными условиями, определяющими* T, *и следующей системой уравнений скачков*:

$$K^{(i)}(c, c+0)-K^{(i)}(c, c-0)=0, \qquad 0\leqslant i\leqslant n-2,$$
$$K^{(n-1)}(c, c+0)-K^{(n-1)}(c, c-0)=(-1)^n\,[\overline{a_n(c)}]^{-1}.$$

13. Следствие. *Пусть* τ — *формальный дифференциальный оператор, а* T — *оператор в гильбертовом пространстве, получен-*

ный из τ наложением распадающейся системы граничных условий. Пусть T^* также определяется распадающейся системой граничных условий. В обозначениях предыдущего следствия пусть $\xi_i=\varphi_i$, $1\leqslant i\leqslant u$; $\xi_i=\psi_{i-u}$, $u+1\leqslant i\leqslant n$; $\eta_i^*=\varphi_i^*$, $1\leqslant i\leqslant u^*$; и $\eta_i^*=-\psi_{i-u^*}^*$, $u^*+1\leqslant i\leqslant n$, для $\lambda\in\varrho(T)$. Тогда при условиях предыдущего следствия мы имеем

(a) *для каждого λ из $\varrho(T)$ системы $\{\xi_i\}$ и $\{\eta_i^*\}$ образуют базис для пространств решений уравнений $\tau\sigma=\lambda\sigma$ и $\tau^*\sigma=\bar{\lambda}\sigma$ соответственно*;

(b) *матрица $\{F_t(\xi_i, \eta_j^*)\}$ не зависит от t и невырожденна для каждого λ из $\varrho(T)$*;

(c) *если $\{\Gamma_{ij}(\lambda)\}$ — матрица, обратная для $\{F_t(\xi_i, \eta_j^*)\}$, то $\Gamma_{ij}=0$, когда одновременно $i\leqslant u^*$ и $j\leqslant u$ или $i>u^*$ и $j>u$*;

(d) *ядро K резольвенты $R(\lambda; T)$ определяется формулой*

$$K(t, s; \lambda)=\begin{cases} -\sum\limits_{i=1}^{u^*}\sum\limits_{j=u+1}^{n}\Gamma_{ij}(\lambda)\,\xi_j(t, \lambda)\,\overline{\varphi_i^*(s; \bar{\lambda})}, & s<t,\\ -\sum\limits_{i=u^*+1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{u}\Gamma_{ij}(\lambda)\,\xi_j(t, \lambda)\,\overline{\psi_{i-u^*}^*(s; \bar{\lambda})}, & s>t.\end{cases}$$

Пусть τ — действительный формально симметрический дифференциальный оператор. Граничное значение A для τ называется *действительным*, если $A(\bar{f})=\overline{A(f)}$ для каждой функции f из $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$. Граничное условие $A(f)=0$ называется действительным, если граничное значение A действительное; система граничных условий называется действительной, если каждый ее элемент действительный. Если T — самосопряженный оператор, полученный из τ наложением действительной симметрической системы граничных условий, то нетрудно показать, что решения уравнения $(\tau^*-\bar{\lambda})\sigma=0$ являются комплексно сопряженными к решениям уравнения $(\tau-\lambda)\sigma=0$. Поэтому для каждого λ из $\varrho(T)$ мы можем брать $\varphi_i(\cdot, \lambda)=\overline{\varphi_i^*(\cdot, \bar{\lambda})}$ и $\psi_i(\cdot, \lambda)=\overline{\psi_i^*(\cdot, \bar{\lambda})}$. Тогда, поскольку T самосопряжен (XII.2.2), для каждого λ, не являющегося действительным, оператор $T-\lambda I$ имеет ограниченный обратный.

14. Следствие. *В обозначениях следствия 12 предположим, что τ — действительный формально самосопряженный дифференциальный оператор, а T — самосопряженный оператор, полученный из τ наложением действительной симметрической системы граничных условий. Тогда резольвента $R(\lambda; T)$ оператора T определяется формулой*

$$(R(\lambda; T)f)(t)=\int_I f(s)\,K(t, s; \lambda)\,ds, \qquad f\in L_2(I),$$

где ядро K имеет представление

$$K(t, s; \lambda) = \begin{cases} -\sum_{i=1}^{v} \sum_{j=1}^{u} \gamma_{ij}(\lambda) \psi_i(t; \lambda) \varphi_j(s; \lambda), & s < t, \\ -\sum_{i=1}^{u} \sum_{j=1}^{v} \gamma'_{ij}(\lambda) \varphi_i(t; \lambda) \psi_j(s; \lambda), & s > t. \end{cases}$$

Здесь функции γ_{ij} и γ'_{ij} однозначно определяются смешанными граничными условиями для T и следующей системой уравнений скачков:

$$K^{(i)}(c, c+0) - K^{(i)}(c, c-0) = 0, \qquad 0 \leqslant i \leqslant n-2,$$
$$K^{(n-1)}(c, c+0) - K^{(n-1)}(c, c-0) = (-1)^n [\overline{a_n(c)}]^{-1} = [a_n(c)]^{-1}.$$

15. Следствие. *В предположениях и обозначениях следствия* 14 *и при дополнительном требовании, что граничные условия, наложенные на τ, распадающиеся, ядро K имеет вид*

$$K(t, s; \lambda) = \begin{cases} -\sum_{i=1}^{u} \sum_{j=u+1}^{n} \Gamma_{ij}(\lambda) \psi_i(t; \lambda) \varphi_j(s; \lambda), & s < t, \\ -\sum_{i=u+1}^{n} \sum_{j=1}^{u} \Gamma_{ij}(\lambda) \varphi_i(t; \lambda) \psi_j(s; \lambda), & s > t. \end{cases}$$

Здесь матрица $\{\Gamma_{ij}(\lambda)\}$ — обратная к матрице $\{F_{ij}\}$, а $F_{ij} = F_t(\xi_i, \overline{\xi}_j)$ для $i \leqslant u$, $F_{ij} = -F_t(\xi_i, \overline{\xi}_j)$ для $i > u$ и $\xi_i = \varphi_i$, $i = 1, \ldots, u$; $\xi_i = \psi_{i-u}$, $i = u+1, \ldots, n$.

Интересный и важный частный случай следствия 13 получается, когда $n=2$, T и T^* определяются распадающимися граничными условиями, а оператор τ имеет вид $\tau f = (pf')' + qf$. Далее, пусть существует только одно решение φ (φ^*) уравнения $\tau\sigma = 0$ ($\tau^*\sigma = 0$), которое интегрируемо в квадрате в окрестности a и удовлетворяет граничным условиям в точке a для T (T^*), а также существуют единственные решения ψ и ψ^*, соответствующие концу b. Для оператора τ

$$F_t(f, g) = p(t)[f'(t)\overline{g(t)} - f(t)\overline{g'(t)}] = p(t) W_t(f, \overline{g}),$$

где $W_t(f, g) = f'(t) g(t) - f(t) g'(t)$ — вронскиан функций f и g. В этом случае $\{\Gamma_{ij}\}$ — матрица второго порядка с нулевыми диагональными элементами, и поэтому очевидно, что ее обратная $\{F_t(\xi_i, \eta_j^*)\}$ ($\xi_1 = \varphi$, $\xi_2 = \psi$, $\eta_1^* = \varphi^*$, $\eta_2^* = -\psi^*$) тоже имеет нулевые диагональные элементы. Элементарные вычисления показывают, что

$$\Gamma_{12} = \frac{1}{p(t) W_t(\psi, \overline{\varphi^*})}, \quad \Gamma_{21} = \frac{1}{p(t) W_t(\varphi, -\overline{\psi^*})}.$$

Таким образом,

$$K(t, s; \lambda)=\begin{cases} \dfrac{\psi(t, \lambda)\overline{\varphi^*(s, \bar{\lambda})}}{p(t)\,W_t\,(\overline{\varphi^*(\bar{\lambda})}, \psi(\lambda))}, & s<t, \\ \dfrac{\varphi(t, \lambda)\overline{\psi^*(s, \bar{\lambda})}}{p(t)\,W_t\,(\varphi(\lambda), \overline{\psi^*(\bar{\lambda})})}, & s>t. \end{cases}$$

Если мы дополнительно предположим, что τ — формально симметрический (и поэтому действительный) и что система граничных условий является симметрической и действительной, то эти формулы переходят, как в следствии 15, в формулы

[*] $$K(t, s; \lambda)=\begin{cases} \dfrac{\psi(t, \lambda)\,\varphi(s, \lambda)}{p(t)\,W_t\,(\varphi(\lambda), \psi(\lambda))}, & s<t, \\ \dfrac{\varphi(t, \lambda)\,\psi(s, \lambda)}{p(t)\,W_t\,(\varphi(\lambda), \psi(\lambda))}, & s>t. \end{cases}$$

Следующая теорема показывает, что по формуле [*] резольвента определяется для большого и важного класса дифференциальных операторов второго порядка.

16. Теорема. *Пусть T — самосопряженный оператор, полученный из действительного формального дифференциального оператора $\tau=(d/dt)\,[p(t)\,(d/dt)]+q(t)$ наложением распадающейся симметрической системы граничных условий. Пусть $\operatorname{Im}\lambda\neq 0$. Тогда граничные условия действительны, и существует в точности одно решение $\varphi(t, \lambda)$ уравнения $(\tau-\lambda)\,\sigma=0$, интегрируемое в квадрате в окрестности a и удовлетворяющее граничным условиям в точке a, и в точности одно решение $\psi(t, \lambda)$ уравнения $(\tau-\lambda)\,\sigma=0$, интегрируемое в квадрате в окрестности b и удовлетворяющее граничным условиям в точке b. Резольвента $R(\lambda; T)$ — интегральный оператор с ядром $K(t, s; \lambda)$, заданным формулой* [*].

Доказательство. Этот результат непосредственно следует из теоремы 2.32 и предыдущих рассуждений.

В заключение необходимо заметить, что следствие 14 не охватывает всех самосопряженных случаев. Например, если в формально симметрическом τ встречаются комплексные коэффициенты, что возможно, то при вычислении резольвенты мы должны обратиться к следствию 12 или 13. Рассмотрим, например, формальный оператор $\tau=i\,(d/dt)$ в интервале $(-\infty, \infty)$, введенный в § 2. Здесь, как показано в § 2, не существует граничных значений. Поэтому для вычисления оператора, обратного к $\lambda I-T$, может быть применено следствие 12. Если $\operatorname{Im}\lambda>0$, то $\tau\sigma=\lambda\sigma$ имеет единственное решение $ce^{-i\lambda t}$, интегрируемое в квадрате в окрестности точки $-\infty$, и не имеет решений, интегрируемых в квадрате в окрестности точки $+\infty$. Уравнение $(\tau^* - \bar{\lambda})\sigma = 0$ имеет решение $c'e^{-i\bar{\lambda}t}$, интегрируемое в квадрате в окрестности точки $+\infty$, и не имеет решений, интегрируемых в квадрате в окрестности точки $-\infty$. Поэтому искомое ядро будет иметь вид

$$K(t, s; \lambda) = \begin{cases} c\varphi(t)\overline{\psi^*(s)} = ce^{-i\lambda(t-s)}, & s > t, \\ 0, & s < t, \end{cases}$$

где c определяется при помощи условий скачка из следствия 12, т. е. $c = -i$, а значит, для $\operatorname{Im}\lambda > 0$ мы имеем формулу

$$((\lambda I - T)^{-1}f)(t) = -i \int_t^\infty e^{-i\lambda(t-s)}f(s)\,ds.$$

Нетрудно показать, что для $\operatorname{Im}\lambda < 0$ эта формула должна быть заменена формулой

$$((\lambda I - T)^{-1}f)(t) = i \int_{-\infty}^t e^{-i\lambda(t-s)}f(s)\,ds.$$

4. Спектральная теория: вполне непрерывные резольвенты

В § 2 мы видели, что с каждым формально самосопряженным дифференциальным оператором τ может быть связан симметрический оператор $T_0(\tau)$ в гильбертовом пространстве $L_2(I)$, и показали, как получить самосопряженные расширения T оператора $T_0(\tau)$ наложением граничных условий на $\mathfrak{D}(T_0^*)$. Настоящий раздел будет посвящен спектральной теории таких расширений в одном важном случае, в котором резольвента $R(\lambda; T)$ является вполне непрерывным оператором для невещественных λ. Мы проведем детальное исследование специальной аналитической формы, которую принимает спектральная теорема в случае такого самосопряженного расширения T.

Сначала мы установим, что в двух важных случаях резольвента оператора T — вполне непрерывный оператор, а затем получим аналоги результатов предыдущего параграфа.

1. Теорема. *Пусть τ — формально симметрический дифференциальный оператор, определенный на интервале I. Пусть T — самосопряженное расширение симметрического оператора $T_0(\tau)$. Резольвента $R(\lambda; T)$ является вполне непрерывным оператором для любого невещественного λ, если*

(1) *интервал I является компактным*

или

(2) *индексы дефекта оператора $T_0(\tau)$ равны порядку дифференциального оператора τ.*

Доказательство. Так как в случае (1) любое решение уравнения $\tau\sigma=\lambda\sigma$ принадлежит $C(I)$ и так как в этом случае $C(I)\subseteq L_2(I)$, то случай (1) содержится в случае (2).

Из следствия 3.12 вытекает, что для $\operatorname{Im}\lambda\neq 0$ резольвента $R(\lambda;\ T)$ может быть выражена в виде

$$(R(\lambda;\ T)f)(t)=\int_I f(s)K(t,\ s;\ \lambda)\,ds.$$

Так как в случае (2) мы предполагаем, что для $\operatorname{Im}\lambda\neq 0$ любое решение уравнения $\tau\sigma=\lambda\sigma$ принадлежит $L_2(I)$, то из выражения для ядра $K(t,\ s;\ \lambda)$, определенного в следствии 3.12, видно, что

$$\int_I\int_I |K(t,\ s;\ \lambda)|^2\,ds\,dt<\infty.$$

Чтобы завершить доказательство, достаточно показать, что каждый интегральный оператор в $L_2(I)$, определенный ядром K, для которого

$$\|K\|^2=\int_I\int_I |K(t,\ s)|^2\,ds\,dt<\infty,$$

является вполне непрерывным. Хотя это утверждение — частный случай упражнения VI.9.52, мы дадим здесь его доказательство.

Сначала заметим, что по неравенству Шварца

$$\int_I\left|\int_I K(t,\ s)f(s)\,ds\right|^2 dt\leqslant\left\{\int_I\int_I |K(t,\ s)|^2\,ds\,dt\right\}\left\{\int_I |f(s)|^2\,ds\right\}$$

Следовательно, норма оператора в $L_2(I)$, определенного ядром K, меньше или равна $\|K\|$. Так как множество вполне непрерывных операторов замкнуто (см. VI.5.3), то для доказательства утверждения, что $R(\lambda;\ T)$ — вполне непрерывный оператор, достаточно отметить, что простые интегрируемые функции в $L_2(I\times I)$ определяют вполне непрерывные операторы (поскольку такие операторы имеют конечномерные области значений) и что такие функции плотны в $L_2(I\times I)$.

Следующая теорема описывает спектральные свойства неограниченного самосопряженного оператора с вполне непрерывной резольвентой.

2. Теорема (*спектральная теорема*). *Пусть τ — формально симметрический дифференциальный оператор порядка n и T — самосопряженное расширение оператора $T_0(\tau)$, такое, что резольвента $R(\lambda;\ T)$ вполне непрерывна для невещественных λ. Тогда*

(a) *спектр оператора T представляет собой последовательность точек действительной оси с единственной предельной точкой в бесконечности;*

(b) *каждая точка* λ *спектра оператора* T *принадлежит точечному спектру* T. *Более того*, $\dim E(\{\lambda\}) L_2(I) \leqslant n$;

(c) *существует полная ортонормальная система* $\{\varphi_m\}$, $m = 0, 1, \ldots$, *собственных функций оператора* T. *Если* φ — *собственная функция, соответствующая собственному числу* λ, *то* $\varphi \in C^\infty(I)$ *и* φ — *решение уравнения* $\tau\varphi - \lambda\varphi = 0$.

Доказательство. Если резольвента $R(\lambda; T)$ вполне непрерывна, то (см. VII.4.5) ее спектр состоит из последовательности точек, сходящейся к нулю. По теореме о спектральном отображении (XII.2.9.(b)) $\sigma(T) \subseteq f(\sigma(R(\lambda; T)))$, где $f(\mu) = \lambda - \mu^{-1}$ для $\mu \neq 0$. Так как оператор T самосопряжен, то множество $\sigma(T)$ состоит из действительных чисел. Из этих замечаний следует утверждение (a).

Если λ принадлежит $\sigma(T)$, то, поскольку λ — изолированная точка множества $\sigma(T)$, из XII.2.9(b) и X.3.3(I) следует, что $E(\lambda) \neq 0$.

Если $\lambda \in \sigma(T)$, то $(T - \lambda I) E(\lambda) f = 0$; поэтому спектр оператора T точечный. Поскольку по теореме 2.10 $T = T^* \subseteq T_0(\tau)^* = T_1(\tau)$, из теоремы 1.3 следует, что каждая функция из област значений оператора $E(\lambda)$ является C^∞-решением уравнения $\tau\sigma = \lambda\sigma$. Поэтому, согласно замечанию после следствия 1.5, область значений оператора $E(\lambda)$ имеет размерность не больше n. Этим доказано (b).

Чтобы доказать (c), нам нужно только показать, что система собственных функций оператора T полна. Это следует из того, что для каждого элемента f нашего гильбертова пространства

$$f = \sum_{\lambda \in \sigma(T)} E(\lambda) f,$$

и из того, что $E(\lambda) f$ является собственной функцией оператора T, как было замечено выше.

Прежде чем перейти к следующему параграфу, в котором рассматривается теория спектрального представления оператора T в тех случаях, когда T не имеет вполне непрерывной резольвенты, стоит привести элементарный, но полезный результат о поточечной сходимости разложений по собственным функциям.

3. Теорема. *Пусть* τ — *формально симметрический дифференциальный оператор, определенный на интервале* I. *Пусть* T — *самосопряженное расширение оператора* $T_0(\tau)$. *Предположим, что* T *имеет полную ортонормальную систему собственных функций* $\{\varphi_n\}$. *Тогда для* f *из* $\mathfrak{D}(T)$ *разложение по собственным функциям*

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} (f, \varphi_n) \varphi_n$$

сходится равномерно и абсолютно на каждом конечном замкнутом подинтервале интервала I. Этот ряд может быть продифференцирован почленно $n-1$ раз, причем после каждого дифференцирования ряд сходится абсолютно и равномерно.

Доказательство. Пусть $f \in \mathfrak{D}(T)$ и $\lambda \in \varrho(T)$. Тогда

$$f-\sum_{i=0}^{n}(f, \varphi_i)\varphi_i = R(\lambda;\ T)g_n,$$

где $g_n=(\lambda I-I)f-\sum\limits_{i=0}^{n}((\lambda I-I)f, \varphi_i)\varphi_i$. Так как $g_n \to 0$ и $TR(\lambda;\ T)$ — ограниченный оператор, то $R(\lambda;\ T)g_n$ и $TR(\lambda;\ T)g_n$ стремятся к нулю в $L_2(I)$. Поэтому по лемме 2.16 ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty}(f, \varphi_i)\varphi_i$ сходится к f в топологии пространства $C^{n-1}(J)$ на каждом компактном интервале J из I. Так как этот ряд безусловно сходится в $L_2(I)$, то он сходится безусловно также в $C^{n-1}(J)$. Следовательно, каждый продифференцированный ряд абсолютно сходится, ч. т. д.

5. Спектральная теория: общий случай

В предыдущем параграфе обсуждалась спектральная теория самосопряженных операторов T, полученных из формальных дифференциальных операторов, в случае, когда резольвента оператора T вполне непрерывна. В этом параграфе мы обратимся к изучению общего случая, когда оператор T может иметь непрерывный спектр. В основном здесь будут использованы развитые в § XII.3 методы теории спектрального представления и спектральных типов. Большая часть фактов, необходимых для доказательства основной теоремы разложения по собственным функциям, сформулированной ниже в качестве теоремы 1, уже установлена в теоремах XII.3.11 и XII.3.19.

1. Теорема. *Пусть τ — формально самосопряженный дифференциальный оператор на интервале I, а T — самосопряженное расширение оператора $T_0(\tau)$. Пусть U — упорядоченное представление пространства $L_2(I)$ относительно T с мерой μ, множествами кратности e_i и кратностью m. Тогда m не превосходит порядка n оператора τ. Существуют ядра $W_i(t, \lambda)$, $i=1, \ldots, m$, измеримые относительно произведения лебеговых мер ν и μ, которые обращаются в нуль при λ, лежащих в дополнении к e_i, принадлежат $C^{\infty}(I)$ при каждом фиксированном значении λ и удовлетворяют дифференциальному уравнению $(\tau-\lambda)W_i(\cdot, \lambda)=0$ при каждом фиксированном значении λ. Более того, ядра W_i обла-*

дают следующими свойствами:

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{\nu\quad t\in J} \int_e |W_i(t,\lambda)|^2 \mu(d\lambda) < \infty$$

для каждого компактного подинтервала J интервала I и ограниченного борелевского множества e;

(I) $(Uf)_i(\lambda) = \int_I f(t)\,\overline{W_i(t,\lambda)}\,dt, \quad f\in L_2(I),$

где интеграл существует в смысле среднего квадратического в $L_2(\mu, e_i)$;

(II) *для каждой борелевской функции F*

$$U\mathfrak{D}(F(T)) = \left\{[f_i] \,\middle|\, \sum_{i=1}^{m} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda)|^2 |f_i(\lambda)|^2 \mu(d\lambda) < \infty\right\}$$

и

$$(UF(T)g)_i(\lambda) = F(\lambda)(Ug)_i(\lambda), \quad g\in\mathfrak{D}(F(T)), \quad -\infty<\lambda<\infty.$$

Доказательство. Из следствий XII.3.13 и XII.3.14 получаем, что существуют нулевое по мере μ множество N и ядра W_i, $i=1, \ldots, m$, удовлетворяющие формулам (I) и (II) и такие, что $(T_0(\tau)-\lambda)^* W_i(\cdot,\lambda)=0$ для $\lambda\in e_i - N$. Таким образом, по теореме 2.10, если мы положим $W_i(\cdot,\lambda)=0$ для $\lambda\notin N$ и изменим $W_i(t,\lambda)$ на подходящем нулевом по мере Лебега множестве $M(\lambda)$ для каждого $\lambda\in N$, то получим функцию $\widetilde{W}_i$, такую, что

$$\tau\widetilde{W}_i(t,\lambda) = \lambda\widetilde{W}_i(t,\lambda), \qquad t\in I,$$

для всех λ. Если функция $\widetilde{W}_i$ измерима относительно произведения меры μ и меры Лебега, то из теоремы Фубини следует, что мы можем брать $W_i=\widetilde{W}_i$. Чтобы показать, что функция $\widetilde{W}_i$ измерима, заметим, что по фундаментальной теореме интегрального исчисления

$$\widetilde{W}_i(t,\lambda) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\int_{[t-1/n,\, t+1/n]} \widetilde{W}_i(s,\lambda)\,ds = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\int_{[t-1/n,\, t+1/n]} W_i(s,\lambda)\,ds$$

для каждого t внутри интервала I и $\lambda\notin N$. Это доказывает всю теорему, за исключением утверждения, что $m\leqslant n$. Однако так как по XII.3.19 функции $W_1(\cdot,\lambda), \ldots, W_m(\cdot,\lambda)$ линейно независимы для почти всех $\lambda\in e_m$ в смысле меры μ и уравнение $\tau\sigma=\lambda\sigma$ имеет не больше n линейно независимых решений для любого λ, то это утверждение также очевидно.

2. Следствие (*формула обращения*). *Пусть I, W_i и т. д. определены так же, как в предыдущей теореме. Тогда для каждой функции $f \in L_2(I)$ мы имеем*

$$f(t) = \lim_{A \to \infty} \int_{-A}^{+A} \sum_{i=1}^{m} (Uf)_i(\lambda) W_i(t, \lambda) \mu(d\lambda),$$

причем предел существует в смысле среднего квадратического в $L_2(I)$.

Доказательство. Следствие вытекает из предыдущей теоремы и из следствия XII.3.12.

3. Следствие. *Пусть оператор T и ядра $W_1, \ldots, W_m$ определены так же, как в теореме 1, и пусть F — ограниченная борелевская измеримая функция, обращающаяся в нуль вне ограниченного борелевского множества e на действительной оси. Тогда ограниченный оператор $F(T)$ можно представить в виде*

$$(F(T)f)(t) = \int_I f(s) K(F; t, s)\, ds, \qquad f \in L_2(I),$$

где

$$K(F; t, s) = \sum_{i=1}^{m} \int_e F(\lambda) W_i(t, \lambda) \overline{W_i(s, \lambda)} \mu(d\lambda),$$

и

$$\sup_{t \in J} \int_I |K(F; t, s)|^2 ds < \infty,$$

где J — любой компактный подинтервал интервала I.

Доказательство. Из ограниченности оператора $F(T)$ и леммы 2.16 следует, что отображение $f \to F(T)$ — непрерывное отображение пространства $L_2(I)$ в $C(J)$. Таким образом, существует постоянное число $M(J)$, такое, что

$$\sup_{t \in J} |(F(T)f)(t)| \leqslant M(J)|f|, \qquad f \in L_2(I).$$

Из теоремы 1(II) и следствия 2 вытекает, что

$$(F(T)f)(t) = \int_e \sum_{i=1}^{m} F(\lambda) W_i(t, \lambda) \int_I f(s) \overline{W_i(s, \lambda)}\, ds\, \mu(d\lambda),$$

где интеграл $\int_e f(s) \overline{W_i(s, \lambda)}\, ds$ существует в смысле среднего квадратического в $L_2(\mu)$. Пусть $\mathfrak{H}_0$ обозначает плотное множество функций f в $L_2(I)$, обращающихся в нуль вне компактного подинтервала интервала I. Если $f \in \mathfrak{H}_0$, то мы можем переставить порядок интегрирования в предыдущей формуле и получить уравнение

[*] $$(F(T)f)(t) = \int_I f(s) K(F; t, s)\, ds, \qquad f \in \mathfrak{H}_0,$$

и неравенство

$$\sup_{t \in J} \left| \int_I f(s) K(F; t, s)\, ds \right| \leqslant M(J)\, |f|, \qquad f \in \mathfrak{H}_0,$$

где

$$K(F; t, s) = \sum_{i=1}^{m} \int_e F(\lambda) W_i(t, \lambda) \overline{W_i(s, \lambda)}\, \mu(d\lambda).$$

Из теоремы IV.8.1 следует, что

$$\left[\int_I |K(F; t, s)|^2 ds \right]^{1/2} \leqslant M(J), \qquad t \in J,$$

и равенство [*] имеет место для всех f из $L_2(I)$, ч. т. д.

В теореме 1, как и в определении XII.3.15, целое число m называется спектральной кратностью оператора T. В некоторых случаях следующая теорема помогает найти спектральную кратность.

4. Теорема. *Пусть оператор T, ядра $W_1, \ldots, W_m$ и мера μ определены так же, как в теореме* 1. *Пусть a — фиксированный конец интервала I, а $B(f) = 0$ — граничное условие в точке a, которому удовлетворяют все функции f из $\mathfrak{D}(T)$. Тогда $B(W_i(\cdot, \lambda)) = 0$ почти всюду в смысле меры μ для каждого ядра W_i.*

Доказательство. Как доказано в следствии 2.28, существует функция f в $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$, такая, что $B(g) = \lim_{t \to a} F_t(g, f) = F_a(g, f)$ для всех $g \in \mathfrak{D}(T_1(\tau))$. Очевидно, мы можем предполагать, не уменьшая этим общности, что f обращается в нуль в окрестности точки b. По формуле Грина (следствие 2.5) мы имеем

[*] $$B(\bar{g}) = (\tau f, g) - (f, \tau g)$$

для $g \in \mathfrak{D}(T_1(\tau))$. Поэтому $(\tau f, g) = (f, Tg)$ для всех g из $\mathfrak{D}(T)$. Так как T — самосопряженный оператор, то отсюда следует, что $f \in \mathfrak{D}(T)$. По теореме 1

$$\int_a^b \{(\tau f)(t) - \lambda f(t)\} \overline{W_i(t, \lambda)}\, dt = 0$$

для почти всех по μ-мере λ, причем этот интеграл существует в смысле среднего квадратического в $L_2(\mu, e_i)$. Более того, поскольку f обращается в нуль в точке b и $W_i(t, \lambda)$ интегрируемы в квадрате в точке a, этот интеграл существует в обычном смысле. Следовательно, поскольку $(\tau-\lambda) W_i(\cdot, \lambda)=0$, из формулы [*] получаем

$$B(W_i(\cdot, \lambda)) = \int_a^b \{(\tau f)(t) - \lambda f(t)\} \overline{W_i(t, \lambda)}\, dt = 0$$

для почти всех по μ-мере λ, ч. т. д.

5. Следствие. *Пусть τ — действительный оператор второго порядка, определенный на интервале I, и пусть a — фиксированный конец интервала I. Если T — самосопряженный оператор, полученный при наложении на τ системы граничных условий, включающей хотя бы одно граничное условие в точке a, то спектральная кратность оператора T равна единице.*

Доказательство. Очевидно, что спектральная кратность m не меньше единицы. С другой стороны, если $B(f)=0$ есть любое ненулевое граничное условие в точке a, то очевидно, что множество общих решений уравнений $(\tau-\lambda)\sigma=0$ и $B(\sigma)=0$ одномерно. Так как на основании предыдущей теоремы функции W_i из теоремы 1 удовлетворяют этим двум уравнениям, то из их линейной независимости (см. теорему XII.3.19) следует, что $m \leqslant 1$, ч. т. д.

Доказывая теорему 1 и следствие 2, мы видели, что произвольный вектор f в $L_2(I)$ имеет разложение типа «интеграла Фурье» по собственным функциям $W_i(t, \lambda)$ дифференциального оператора τ. К сожалению, теорема 1 имеет скорее теоретическое значение, чем практическое, поскольку построить функции $W_i(t, \lambda)$ в явном виде трудно. На практике удобнее выбрать некоторый подходящий базис $\sigma_i(t, \lambda)$, $i=1, \ldots, n$, для множества решений уравнения $(\tau-\lambda)\sigma=0$ и разлагать f по $\sigma_i(t, \lambda)$. В то время как поведение W_i в зависимости от λ может быть довольно сложным, новый базис может быть выбран так, чтобы функции $\sigma_i(t, \lambda)$ были непрерывными по совокупности (t, λ) и даже аналитическими по λ (см. следствие 1.5). Однако, когда теорема о разложении формулируется в терминах произвольного базиса $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ для системы решений уравнения $(\tau-\lambda)\sigma=0$, детальное исследование сходимости полученных рядов или интегральных разложений становится более сложным; при этом гильбертово пространство $\sum L_2(\mu_i)$ заменяется подходящим пространством L_2, соответствующим положительно полуопределенной матрице функций множества. Перейдем теперь к изучению этих вопросов теории меры.

6. Определение. Пусть $\{\mu_{ij}\}$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, — семейство комплекснозначных функций множества, определенных на ограниченных

борелевских подмножествах действительной оси. Семейство $\{\mu_{ij}\}$ называется *положительной* $(n \times n)$*-матричной мерой*, если

(I) матрица $\{\mu_{ij}(e)\}$ эрмитова и положительно полуопределена для каждого ограниченного борелевского множества e;

(II) для каждой последовательности непересекающихся борелевских множеств с ограниченным объединением

$$\mu_{ij}\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} e_m\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu_{ij}(e_m).$$

7. Лемма. *Пусть $\{\mu_{ij}\}$ — положительная матричная мера, элементы μ_{ij} которой непрерывны относительно положительной σ-конечной меры μ. Если матрица плотностей $\{m_{ij}\}$ определяется уравнениями*

$$\mu_{ij}(e) = \int_e m_{ij}(\lambda)\,\mu(d\lambda),$$

где e — любое ограниченное борелевское множество, то матрица $\{m_{ij}(\lambda)\}$ положительно полуопределена для почти всех по μ-мере λ.

Доказательство. Сначала заметим, что множество e_0 всех λ, для которых матрица $\{m_{ij}(\lambda)\}$ положительно полуопределена, измеримо, потому что оно является множеством тех λ, для которых

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} m_{ij}(\lambda)\,\xi_i\bar{\xi}_j \geqslant 0$$

для каждого вектора $[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ из E^n, элементы которого рациональны. Если лемма неверна, то легко доказать, что существуют вектор $[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ с рациональными элементами и множество $e \subseteq e_0'$ положительной меры μ, такие, что

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} m_{ij}(\lambda)\,\xi_i\bar{\xi}_j < 0$$

для λ из e. Однако тогда выполняется неравенство

$$0 \leqslant \sum_{i,\,j=1}^{n} \mu(e)\,\xi_i\bar{\xi}_j = \int_e \left\{\sum_{i,\,j=1}^{n} m_{ij}(\lambda)\,\xi_i\bar{\xi}_j\right\} \mu(d\lambda) < 0,$$

вопреки предположению, что матрица $\{\mu_{ij}(e)\}$ положительно полуопределена.

8. Определение. Пусть $\{\mu_{ij}\}$ — положительная $(n \times n)$-матричная мера на действительной оси, и пусть μ есть σ-конечная положительная регулярная мера, относительно которой все функции множества μ_{ij} абсолютно непрерывны. Если $\{m_{ij}\}$ обозначает матрицу плотностей для $\{\mu_{ij}\}$ относительно μ, то семейство наборов из n

измеримых по Борелю функций $F=[f_1, \ldots, f_n]$, определенных на действительной оси, для которых

$$|F|^2=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{i,j=1}^{n} m_{ij}(\lambda) f_i(\lambda)\overline{f_j(\lambda)}\right\}\mu(d\lambda)<\infty,$$

будет обозначаться через $L_2^0(\{\mu_{ij}\})$.

Элемент $F\in L_2^0(\{\mu_{ij}\})$ будет называться *$\{\mu_{ij}\}$-нулевой функцией*, если $|F|=0$. Множество всех классов эквивалентности элементов пространства $L_2^0(\{\mu_{ij}\})$ по модулю $\{\mu_{ij}\}$-нулевых функций будет обозначаться через $L_2(\{\mu_{ij}\})$.

Заметим, что по лемме 7 подинтегральное выражение в предыдущем интеграле неотрицательно для почти всех в смысле μ-меры λ. Далее, если F, G принадлежат $L_2^0(\{\mu_{ij}\})$, то мы можем рассматривать их значения $[f_1(\lambda), \ldots, f_n(\lambda)]$ и $[g_1(\lambda), \ldots, g_n(\lambda)]$ для каждого фиксированного λ как элементы n-мерного унитарного пространства E^n. Применяя неравенство Шварца для положительно полуопределенного скалярного произведения $\sum_{i,j=1}^{n} m_{ij}(\lambda)\xi_i\bar{\xi}_j$ в E^n (см. замечание после теоремы IV.4.1), получаем неравенство

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n} m_{ij}(\lambda) f_i(\lambda)\overline{g_j(\lambda)}\right|\leqslant$$
$$\leqslant\left\{\sum_{i,j=1}^{n} m_{ij}(\lambda) f_i(\lambda)\overline{f_j(\lambda)}\right\}^{1/2}\left\{\sum_{i,j=1}^{n} m_{ij}(\lambda) g_i(\lambda)\overline{g_j(\lambda)}\right\}^{1/2}$$

для почти всех в смысле μ-меры λ. Из всего сказанного следует существование интеграла

$$[*]\qquad (F, G)=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{i,j=1}^{n} m_{ij}(\lambda) f_i(\lambda)\overline{g_j(\lambda)}\right\}\mu(d\lambda)$$

и неравенство

$$|(F, G)|\leqslant|F||G|.$$

Так как $|F+G|^2=|F|^2+2(G, F)+|G|^2$, то из этого неравенства следует, что сумма двух $\{\mu_{ij}\}$-нулевых элементов есть $\{\mu_{ij}\}$-нулевой элемент. Поскольку произведение скаляра на $\{\mu_{ij}\}$-нулевой элемент, очевидно, также есть $\{\mu_{ij}\}$-нулевой элемент, то $N(\{\mu_{ij}\})$ — семейство $\{\mu_{ij}\}$-нулевых элементов — образует линейное подпространство пространства $L_2^0(\{\mu_{ij}\})$. В дальнейшем мы будем, как это делается обычно, применять один и тот же символ $[f_1, \ldots, f_n]$ для обозначения элементов пространств $L_2^0(\{\mu_{ij}\})$ и $L_2(\{\mu_{ij}\})$.

Если $F=[f_1, \ldots, f_n]$ и $G=[g_1, \ldots, g_n]$ принадлежат $L_2(\{\mu_{ij}\})$ и e — ограниченное борелевское множество, то мы часто будем писать

$$\int_e \left\{ \sum_{i, j=1}^{n} f_i(\lambda) \overline{g_j(\lambda)} \right\} \mu_{ij}(d\lambda)$$

вместо

$$\int_e \left\{ \sum_{i, j=1}^{n} m_{ij}(\lambda) f_i(\lambda) \overline{g_j(\lambda)} \right\} \mu(d\lambda).$$

Мы можем доказать, что интеграл [*] не зависит от меры μ, следующим образом. Пусть $\tilde{\mu}$ — другая σ-конечная положительная регулярная мера, относительно которой функции μ_{ij} непрерывны. Пусть $\{\tilde{m}_{ij}\}$ — соответствующая матрица плотностей, и пусть $\{n_{ij}\}$ — матрица плотностей матрицы $\{\mu_{ij}\}$ относительно $(\mu + \tilde{\mu})$. Если m — плотность μ относительно $\mu + \tilde{\mu}$, то

$$\mu_{ij}(e) = \int_e m_{ij}(\lambda) \mu(d\lambda) = \int_e m_{ij}(\lambda) m(\lambda) (\mu + \tilde{\mu})(d\lambda)$$

для любого ограниченного борелевского множества e. Поэтому $m_{ij} m = n_{ij}$ для почти всех по $(\mu + \tilde{\mu})$-мере λ. Пусть даны измеримые функции f_i и g_i, $i = 1, \ldots, n$. Тогда из следствия III.10.6 вытекает, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{i, j=1}^{n} m_{ij}(\lambda) f_i(\lambda) \overline{g_j(\lambda)} \right\} \mu(d\lambda) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{i, j=1}^{n} n_{ij}(\lambda) f_i(\lambda) \overline{g_j(\lambda)} \right\} (\mu + \tilde{\mu})(d\lambda).$$

Рассуждая точно так же, мы получаем аналогичную формулу, в которой в левой части μ и m_{ij} заменены на $\tilde{\mu}$ и $\tilde{m}_{ij}$. Таким образом,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{i, j=1}^{n} m_{ij}(\lambda) f_i(\lambda) \overline{g_j(\lambda)} \right\} \mu(d\lambda) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{i, j=1}^{n} \tilde{m}_{ij}(\lambda) f_i(\lambda) \overline{g_j(\lambda)} \right\} \tilde{\mu}(d\lambda).$$

9. Лемма. *Пространство $L_2(\{\mu_{ij}\})$ — нормированное линейное пространство с положительно определенным эрмитовым скаляр-*

ным произведением, заданным формулой

$$(F, G) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{i, j=1}^{n} m_{ij}(\lambda) f_i(\lambda) \overline{g_j(\lambda)} \right\} \mu(d\lambda)$$

для каждой пары $F = [f_1, \ldots, f_n]$ *и* $G = [g_1, \ldots, g_n]$ *из* $L_2(\{\mu_{ij}\})$.

Доказательство. Выше было показано, что $L_2(\{\mu_{ij}\})$ — линейное пространство и

$$|(F, G)| \leqslant |F|\,|G|, \qquad F, G \in L_2(\{\mu_{ij}\}).$$

Отсюда $|F+G| \leqslant |F| + |G|$ (см. замечание после теоремы IV.4.1). Для того чтобы показать, что $L_2(\{\mu_{ij}\})$ — гильбертово пространство, остается доказать, что оно полно.

10. Теорема. *Если* $\{\mu_{ij}\}$ — *положительная* $(n \times n)$*-матричная мера, определенная на действительной оси, то* $L_2(\{\mu_{ij}\})$ — *гильбертово пространство.*

Доказательство этой теоремы будет основано на следующей лемме.

11. Лемма. *Пусть* $\{\mu_{ij}\}$ — *положительная матричная мера, элементы которой непрерывны относительно положительной* σ*-конечной меры* μ. *Если* $\{m_{ij}\}$ — *матрица плотностей* $\{\mu_{ij}\}$ *относительно* μ, *то существуют неотрицательные измеримые по мере* μ *функции* φ_i, $i = 1, \ldots, n$, *интегрируемые по мере* μ *на каждом ограниченном интервале, и измеримые по мере* μ *функции* a_{ij}, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, *такие, что для почти всех в смысле* μ*-меры* λ

(a) $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\lambda) \overline{a_{jl}(\lambda)} = \delta_{il}$$

и

(b) $$\sum_{j=1}^{n} \varphi_j(\lambda) a_{ji}(\lambda) \overline{a_{jl}(\lambda)} = m_{il}(\lambda).$$

Прежде чем дать доказательство леммы 11, докажем с ее помощью теорему 10.

Доказательство теоремы 10. Пусть функции φ_i и a_{ij} обладают свойствами, указанными в лемме 11, и пусть ν_i для каждого i — положительная мера, определенная формулой

$$\nu_i(e) = \int_e \varphi_i(\lambda) \mu(d\lambda).$$

Если $\mathfrak{H}$ — прямая сумма гильбертовых пространств $L_2(\nu_i)$, $i = 1, \ldots, n$, то $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство всех наборов

$F=[f_1, \ldots, f_n]$ μ-измеримых функций, для которых

$$|F|=\sum_{i=1}^{n}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|f_i(\lambda)|^2\varphi_i(\lambda)\mu(d\lambda)\right\}^{1/2}<\infty.$$

Пусть теперь A — отображение, которое каждому вектору $G=[g_1, \ldots, g_n]$ из $L_2(\{\mu_{ij}\})$ ставит в соответствие набор функций

$$f_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}g_j, \qquad i=1, \ldots, n.$$

Так как

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{i,j=1}^{n}m_{ij}(\lambda)g_i(\lambda)\overline{g_j(\lambda)}\right\}\mu(d\lambda)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{i,j,k=1}^{n}[a_{ki}(\lambda)g_i(\lambda)][\overline{a_{kj}(\lambda)g_j(\lambda)}]\varphi_k(\lambda)\right\}\mu(d\lambda)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}|f_k(\lambda)|^2\varphi_k(\lambda)\mu(d\lambda),$$

то очевидно, что A определяет изометрический изоморфизм $L_2(\{\mu_{ij}\})$ в $\mathfrak{H}$. С другой стороны, пусть B — отображение, которое ставит в соответствие каждому вектору $[f_1, \ldots, f_n]$ из $\mathfrak{H}$ элемент $[g_1, \ldots, g_n]$, определенный формулой

$$g_i(\lambda)=\sum_{j=1}^{n}\overline{a_{ij}(\lambda)}f_j.$$

Так как по лемме 11(a) матрица $\{\overline{a_{ij}(\lambda)}\}$ — обратная к матрице $\{a_{ij}(\lambda)\}$ для почти всех в смысле μ-меры λ, то $B=A^{-1}$. Следовательно, A — изометрическое отображение пространства $L_2(\{\mu_{ij}\})$ на все $\mathfrak{H}$, что и доказывает полноту $L_2(\{\mu_{ij}\})$.

Остается доказать лемму 11.

Доказательство леммы 11. Сделаем сначала одно замечание, которое будет неоднократно применяться в доказательстве. Предположим, что для каждого множества e_n мы можем найти измеримую по μ-мере матрицу $\{a_{ij}^{(n)}\}$ и функции $\{\varphi_i^{(n)}\}$, такие, что

$$\sum_{j=1}^{k}a_{ij}^{(n)}(\lambda)\overline{a_{jl}^{(n)}(\lambda)}=\delta_{il}$$

и

$$\sum_{j=1}^{k}\varphi_j^{(n)}(\lambda)a_{ji}^{(n)}(\lambda)\overline{a_{jl}^{(n)}(\lambda)}=m_{il}(\lambda)$$

для почти всех в смысле μ-меры λ. Тогда если мы положим

$$a_{ij}(\lambda) = a_{ij}^{(n)}(\lambda)$$

и

$$\varphi_i(\lambda) = \varphi_i^{(n)}(\lambda)$$

для $\lambda \in e_n - \bigcup_{p=1}^{n-1} e_p$, то очевидно, что функции a_{ij} и φ_i удовлетворяют требованиям (a) и (b) леммы 11 для всех λ из множества $\bigcup_{n=1}^{\infty} e_n$.

Так как мера μ является σ-конечной, то действительная ось является объединением последовательности множеств с конечной мерой μ. По лемме Лузина (XII.3.17) каждое множество конечной меры отличается от объединения последовательности измеримых множеств, на каждом из которых функции m_{ij} непрерывны, множеством меры нуль. Таким образом, достаточно доказать, что можно построить функции a_{ij} и φ_i на каждом измеримом множестве σ_0 конечной меры, на котором функции m_{ij} непрерывны.

Мы можем еще более упростить задачу следующим образом. Пусть функции m_{ij} непрерывны на σ_0, $\mu(\sigma_0) < \infty$, пусть $M(\lambda)$ для $\lambda \in \sigma_0$ — эрмитов оператор в n-мерном унитарном пространстве с матрицей $\{m_{ij}(\lambda)\}$ и λ_0 — точка из σ_0, ζ_0 — собственное значение матрицы $M(\lambda_0)$, а U — окрестность точки ζ_0, замыкание которой не содержит других собственных значений матрицы $M(\lambda_0)$. По следствию X.7.3

$$\lim_{\substack{\lambda \to \lambda_0 \\ \lambda \in \sigma_0}} E(M(\lambda); U) = E(M(\lambda_0); \zeta_0),$$

где $E(M(\lambda); \cdot)$ — спектральное разложение матрицы $M(\lambda)$. Так как $E(M(\lambda); U)$ не обращается в нуль для λ, близких к λ_0, то $\lambda \in \sigma_0$, и, следовательно, для λ, достаточно близких к λ_0, множество $\sigma(M(\lambda)) \cap U$ не пусто. Таким образом, если $n(\lambda)$ обозначает число различных точек спектра матрицы $M(\lambda)$, то множество $\{\lambda \in \sigma_0 \mid n(\lambda) \geqslant s\}$ относительно открыто в σ_0, и поэтому множества $b_s = \{\lambda \in \sigma_0 \mid n(\lambda) = s\}$ борелевские. Поэтому, чтобы доказать лемму, достаточно показать, что мы можем построить функции a_{ij} и φ_i на каждом множестве b_s. С другой стороны, в силу регулярности меры μ такое множество отличается от объединения последовательности компактных множеств множеством меры нуль. Таким образом, достаточно показать, что если e_0 — любое компактное подмножество множества b_s и λ_0 — любая точка из e_0, то точка λ_0 имеет в e_0 окрестность, в которой существуют функции a_{ij} и φ_i, обладающие свойствами, указанными в лемме.

Пусть число ε так мало, что разность любых двух различных собственных значений матрицы $M(\lambda_0)$ по модулю больше ε. Выше мы заметили, что для $\lambda \in e_0$, достаточно близких к λ_0, $(\varepsilon/2)$-окрестность каждой точки из $\sigma(M(\lambda_0))$ содержит по крайней мере одну точку из $\sigma(M(\lambda))$. Так как $\sigma(M(\lambda_0))$ и $\sigma(M(\lambda))$ имеют одинаковое число точек (поскольку $\lambda, \lambda_0 \in e_0$), то отсюда следует, что если $\hat{\varphi}_i(\lambda_0), \ldots$ $\ldots, \hat{\varphi}_k(\lambda_0)$ — различные собственные значения матрицы $M(\lambda_0)$, то для каждой точки $\lambda \in e_0$, достаточно близкой к λ_0, существует единственная точка $\hat{\varphi}_i(\lambda) \in \sigma(M(\lambda))$, такая, что

$$|\hat{\varphi}_i(\lambda) - \hat{\varphi}_i(\lambda_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad i = 1, \ldots, k.$$

Более того, $\{\hat{\varphi}_i(\lambda), \ldots, \hat{\varphi}_k(\lambda)\} = \sigma(M(\lambda))$. Таким образом, функции $\varphi_i(\lambda) = \hat{\varphi}_i(\lambda)$ определены в окрестности N_1 точки λ_0 в e_0. Нетрудно доказать, рассуждая подобным образом, что $\varphi_i(\lambda)$ непрерывно зависит от λ. Тогда, используя следствие X.7.3, легко показать, что $E_i(\lambda) = E(M(\lambda);\ \varphi_i(\lambda))$ непрерывно зависит от λ, $i = 1, \ldots, k$. Пусть $v_1, \ldots, v_n$ образуют ортонормальный базис для E^n и $E_i(\lambda_0) v_j = v_j$, $n_{i-1} < j \leqslant n_i$, $0 = n_0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_k = n$. Положим $\hat{v}_j(\lambda) = E_i(\lambda) v_j$, $n_{i-1} < j \leqslant n_i$. Тогда $\hat{v}_j(\lambda)$ непрерывно зависит от λ при $\lambda \in N_1$ и $M(\lambda)\hat{v}_j(\lambda) = \varphi_i(\lambda)\hat{v}_j(\lambda)$ для $n_{i-1} < j \leqslant n_i$. Используя то, что определитель $\det(\hat{v}_i(\lambda), v_j)$ не обращается в нуль для λ, близких к λ_0, легко показать, что $\hat{v}_j(\lambda)$ образуют базис для E^n при каждом λ в окрестности $N_2 \subseteq N_1$ точки λ_0 в e_0. Так как $E_i(\lambda)\hat{v}_j(\lambda) = \hat{v}_j(\lambda)$ для $n_{i-1} < j \leqslant n_i$, то $\hat{v}_j(\lambda)$ и $\hat{v}_j'(\lambda)$ ортогональны, если существует $i \leqslant k$, такое, что $j \leqslant n_i < j'$. Пусть $v_1(\lambda), \ldots$ $\ldots, v_n(\lambda)$ — ортонормальный базис в E^n, полученный применением метода Грама — Шмидта к $\hat{v}_1(\lambda), \ldots, \hat{v}_n(\lambda)$, т. е. v_i определяются по индукции формулами

$$v_1(\lambda) = \frac{\hat{v}_1(\lambda)}{|\hat{v}_1(\lambda)|},$$

$$v_{i+1}(\lambda) = \frac{\hat{v}_{i+1}(\lambda) - \sum_{j=1}^{i} (\hat{v}_{i+1}(\lambda), v_j(\lambda))\, v_j(\lambda)}{\left|\hat{v}_{i+1}(\lambda) - \sum_{j=1}^{i} (\hat{v}_{i+1}(\lambda), v_j(\lambda))\, v_j(\lambda)\right|}.$$

Отсюда по индукции просто показать, что $E_i(\lambda) v_j(\lambda) = v_j(\lambda)$ для $n_{i-1} < j \leqslant n_i$, так что $M(\lambda) v_j(\lambda) = \varphi_i(\lambda) v_j(\lambda)$ для $n_{i-1} < j \leqslant n_i$. Таким образом, мы построили непрерывно изменяющийся ортонормальный базис для E^n, определенный для $\lambda \in N_2$, и систему $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ непрерывных функций, определенных для $\lambda \in N_2$, таких, что

$$M(\lambda) v_i(\lambda) = \varphi_i(\lambda) v_i(\lambda), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Если $\{u_i\}$ — базис в E^n, у которого элемент u_i совпадает с набором $[\delta_{ij}]$, $j=1, \ldots, n$, то функции a_{ij} определяются по формулам

$$u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(\lambda)\, v_i(\lambda).$$

Эти функции, очевидно, непрерывны на $N(\lambda_0)$. Так как $(v_i(\lambda), v_j(\lambda)) = \delta_{ij}$, то мы имеем

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(\lambda)\overline{a_{ik}(\lambda)} = (u_j, u_k) = \delta_{jk}, \qquad \lambda \in N(\lambda_0).$$

Аналогично

$$\begin{aligned} m_{jk}(\lambda) &= (M(\lambda)\, u_j, u_k) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(\lambda)\overline{a_{ik}(\lambda)}\,(M(\lambda)\, v_i(\lambda), v_i(\lambda)) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(\lambda)\, a_{ij}(\lambda)\overline{a_{ik}(\lambda)}, \qquad \lambda \in N(\lambda_0), \end{aligned}$$

ч. т. д.

Теорема 10 устанавливает эквивалентность теории пространств $L_2(\{\mu_{ij}\})$ и теории гильбертовых пространств вида $L_2(\mu)$. В дальнейшем мы будем часто пользоваться свойствами $L_2(\{\mu_{ij}\})$ как гильбертова пространства, указанными в лемме 9 и теореме 10, а также рядом других свойств элементарной теории меры, общих для этих пространств и $L_2(\mu)$. Однако здесь необходимо быть осторожными. Так, если $[f_1, \ldots, f_n]$ принадлежит $L_2(\{\mu_{ij}\})$, то отсюда еще не следует, что какой-нибудь из наборов $[f_1, 0, \ldots, 0], \ldots$ $\ldots, [0, \ldots, 0, f_n]$ принадлежит $L_2(\{\mu_{ij}\})$. Например, пусть μ — конечная положительная регулярная мера, $n=2$ и $\{\mu_{ij}(e)\}$ — матрица

$$\begin{Bmatrix} \mu(e) & -\mu(e) \\ -\mu(e) & \mu(e) \end{Bmatrix}.$$

Тогда плотность матрицы $\{\mu_{ij}\}$ относительно μ равна

$$\begin{Bmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{Bmatrix},$$

так что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{i, j=1}^{2} f_i(\lambda)\overline{f_j(\lambda)}\, m_{ij}(\lambda) \right\} \mu(d\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} |f_1(\lambda) - f_2(\lambda)|^2\, \mu(d\lambda).$$

Таким образом, если $[f_1, f_2]$ — любая пара функций, разность которых принадлежит $L_2(\mu)$, то $[f_1, f_2] \in L_2(\{\mu_{ij}\})$, даже несмотря на то, что $[f_1, 0]$ и $[0, f_2]$ могут не принадлежать $L_2(\{\mu_{ij}\})$. Это рассуждение ясно показывает, что если функции f неограничены, то из существования символического интеграла

$$\int_e \left\{ \sum_{i,j=1}^{k} f_i(\lambda)\overline{f_j(\lambda)}\,\mu_{ij}(d\lambda)\right\}$$

еще не следует существование интеграла от каждого слагаемого. Поэтому этот интеграл не может быть, вообще говоря, представлен в виде суммы простых интегралов. Конечно, если каждый член $\int_e f_i(\lambda)\overline{f_j(\lambda)}\,\mu_{ij}(d\lambda)$ существует, то

$$\int_e \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} f_i(\lambda)\overline{f_j(\lambda)}\,\mu_{ij}(d\lambda)\right\} = \sum_{i,j=1}^{n} \int_e f_i(\lambda)\overline{f_j(\lambda)}\,\mu_{ij}(d\lambda).$$

Построив необходимые нам основы теории положительных матричных мер, мы вернемся к теории разложения дифференциальных операторов по собственным функциям.

Мы хотим теперь найти более удобный для вычислений вид формулы разложения, выведенной в теореме 1. При этом неизбежно возникает ряд технических трудностей. Чтобы разобраться в природе этих трудностей, мы предварительно сделаем эвристический обзор основных сведений, содержащихся в остальной части настоящего параграфа.

Ядра $W_i(t, \lambda)$ из теоремы 1 являются решениями уравнения $(\tau-\lambda)W_i(\cdot, \lambda)=0$, принадлежащими C^∞ для каждого фиксированного λ, но как функции от λ они являются только измеримыми, так что они могут быть очень «плохими». Мы можем избавиться от некоторых из их «недостатков» следующим образом. Вместо того чтобы рассматривать вектор-функции $W_i(\cdot, \lambda)$ от λ, возьмем базис $\sigma_1(\cdot, \lambda), \ldots, \sigma_n(\cdot, \lambda)$ для пространства решений уравнения $\tau\sigma=\lambda\sigma$, выбрав этот базис непрерывным по $t\times\lambda$ или даже, может быть, из класса C^∞ по t и аналитическим по λ. Например, такой базис может быть определен специальными начальными условиями, такими, как $\sigma_{i+1}^{(j)}(c, \lambda)=\delta_i^j$, $0\leqslant i, j\leqslant n-1$ (см. следствие 1.5). Тогда $W_i(\cdot, \lambda)$ могут быть однозначно представлены в виде

$$W_i(\cdot, \lambda)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\lambda)\,\sigma_j(\cdot, \lambda).$$

Здесь зависимость функции W_i от λ проще, чем раньше, поскольку теперь она выражается в терминах изменения конечной системы коэффициентов a_{ij}, зависящих от λ.

Однако это упрощение приводит к новым трудностям. Например, формула из следствия 3, записанная в терминах функций $\sigma_i(\cdot, \lambda)$, имеет вид

$$K(F; t, s) = \sum_{i=1}^{m} \int_{e} \sum_{j, k=1}^{n} F(\lambda) a_{ij}(\lambda) \overline{a_{ik}(\lambda)} \sigma_j(t, \lambda) \overline{\sigma_k(s, \lambda)} \mu(d\lambda);$$

иначе ее можно записать в виде

$$K(F; t, s) = \int_{e} \left\{ \sum_{j, k=1}^{n} F(\lambda) \sigma_j(t, \lambda) \overline{\sigma_k(s, \lambda)} \varrho_{jk}(d\lambda) \right\},$$

где матричная мера ϱ_{jk} определена формулой

$$\varrho_{jk}(e) = \sum_{i=1}^{m} \int_{e} a_{ij}(\lambda) \overline{a_{ik}(\lambda)} \mu(d\lambda).$$

Таким образом, в нашу теорию разложения неизбежно вводятся матричные меры.

Трудности появляются уже в самом процессе выбора базиса $\sigma_1(\cdot, \lambda), \ldots, \sigma_n(\cdot, \lambda)$ для пространства решений уравнения $\tau\sigma = \lambda\sigma$, хотя, конечно, мы можем всегда следовать указанному выше методу, т. е. выбрать точку c в интервале I, на котором определен оператор τ, и определить базис $\sigma_1(\cdot, \lambda), \ldots, \sigma_n(\cdot, \lambda)$ требованием, чтобы $\sigma_{i+1}^{(j)}(c, \lambda) = \delta_i^j$, $0 \leqslant i, j \leqslant n-1$.

Этот метод имеет то очевидное преимущество, что получающиеся $\sigma_i(\cdot, \lambda)$ — целые аналитические функции комплексного переменного λ; но он имеет и недостатки, не столь очевидные, но имеющие решающее значение. Например, предположим, что мы изучаем самосопряженный оператор T, полученный из формального дифференциального оператора $-(d/dt)^2$ на интервале $[0, \infty)$ наложением граничного условия $f(0) + f'(0) = 0$. Спрашивается, как лучше всего выбрать точку c из $[0, \infty)$? Здесь $c = 0$, так как любой другой выбор точки c будет вводить излишнюю асимметрию во всех вычислениях. В этом случае элементарные вычисления показывают, что $\cos \lambda^{1/2} t$ и $\lambda^{-1/2} \sin \lambda^{1/2} t$ есть решения σ_1 и σ_2 уравнения $\tau\sigma = \lambda\sigma$, определенные граничными условиями $\sigma_{i+1}^{(j)}(0) = \delta_i^j$, $i, j = 0, 1$, соответственно. Эти функции являются целыми функциями λ. В области $\lambda > 0$ они образуют вполне подходящий базис для решений уравнения $\tau\sigma = \lambda\sigma$. Однако в области $\lambda < 0$ с аналитическими выражениями типа $\cos \lambda^{1/2} t$ трудно работать из-за двусмысленности в определении $\lambda^{1/2}$. Анализ спектра оператора T показывает, что $\lambda = -1$ является единственным собственным значением оператора T и что функция φ (выраженная через функции σ_1 и σ_2)

$$\varphi(t)=\sqrt{2}\,(i\sin it+\cos it)$$

является соответствующей ортонормированной собственной функцией оператора T. Так как

$$\sin t=\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i},\qquad \cos t=\frac{e^{it}+e^{-it}}{2},$$

то функция $\varphi(t)$ просто равна $\sqrt{2}\,e^{-t}$. Это делает очевидным то, о чем можно было догадываться и раньше: на отрицательной части действительной оси лучше в качестве базиса для решений уравнения $\tau\sigma=\lambda\sigma$ выбрать функции

$$\hat{\sigma}_1(t,\lambda)=e^{-t\sqrt{-\lambda}},\qquad \hat{\sigma}_2(t,\lambda)=e^{t\sqrt{-\lambda}}.$$

Конечно, поскольку мы имеем дело с формальным оператором $\tau_0=-(d/dt)^2$, где решениями уравнения $\tau_0\sigma=\lambda\sigma$ являются известные тригонометрические (или показательные) функции, трудности, возникающие от того, каким образом выбран базис, являются не очень значительными. Но если, например, рассматривается формальный дифференциальный оператор $\tau_1=-(d/dx)^2+(\alpha/x^2)$ на интервале $(0,\infty)$, так что решениями уравнения $\tau_1\sigma=\lambda\sigma$ будут функции Бесселя (Ганкеля, Неймана, цилиндрические), то эти трудности могут стать значительными. Прежде всего, если мы намерены следовать указанному выше методу выбора базиса σ_1, σ_2 для решений уравнения $\tau\sigma=\lambda\sigma$, то мы должны сначала выбрать некоторую произвольную точку c в $(0,\infty)$ и тем самым ввести ненужную асимметрию во все последующие вычисления. То, что наш выбор точки c приводит именно к этому результату, можно заключить из того, что соответствующий выбор для формального дифференциального оператора $\tau_0=-(d/dx)^2$ дал бы базис

$$\hat{\sigma}_1(t)=\lambda^{-1/2}\{\sin\lambda^{1/2}t\cos\lambda^{1/2}c-\cos\lambda^{1/2}t\sin\lambda^{1/2}c\},$$

$$\hat{\sigma}_2(t)=\cos\lambda^{1/2}t\cos\lambda^{1/2}c+\sin\lambda^{1/2}t\sin\lambda^{1/2}c.$$

Кроме того, аналогом соотношения

$$\cos it+i\sin it=e^{-t}$$

для функций Бесселя является соотношение, которое выражает функцию Ганкеля через функции Бесселя и Неймана. Эти замечания иллюстрируют следующие принципы.

(a) Для того чтобы избежать несущественных и запутывающих трудностей в вычислениях резольвент, спектральных разложений и т. д. дифференциальных операторов, нужно подходить осторожно к выбору подходящего базиса для решений уравнения $\tau\sigma = \lambda\sigma$.

(b) Аналитическое продолжение базиса, удобного для изучения в некоторой области изменения параметра λ, не обязательно является удобным для изучения базисом в другой области изменения λ.

В силу вышесказанного мы оставляем за собой право исследовать отдельно различные области изменения λ. Ниже даются определения, результаты и т. д., к которым нас приводит такое исследование. Заметим только, что необходимо сделать несколько незначительных обобщений теории положительных матричных мер, данной выше. Так, определение 6 должно быть обобщено следующим образом.

12. Определение. Пусть Λ — открытый интервал действительной оси, и пусть $\{\mu_{ij}\}$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, является семейством комплекснозначных функций множества, определенных на семействе борелевских подмножеств из Λ, замыкания которых компактны и содержатся в Λ. Семейство $\{\mu_{ij}\}$ будет называться *положительной $(n \times n)$-матричной мерой на* Λ, если

(I) матрица $\{\mu_{ij}(e)\}$ является эрмитовой и положительно полуопределенной для каждого борелевского подмножества e множества Λ, замыкание которого компактно и содержится в Λ;

(II) для каждой последовательности непересекающихся борелевских подмножеств из Λ, объединение которых имеет компактное замыкание в Λ,

$$\mu_{ij}\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} e_m\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu_{ij}(e_m).$$

Лемма 7, определение 8, лемма 9, теорема 10, лемма 11 также имеют соответствующие обобщения. Например, определение 8 нужно обобщить следующим образом: пусть Λ — подинтервал действительной оси, пусть $\{\mu_{ij}\}$ — положительная $(n \times n)$-матричная мера на Λ, а μ — положительная σ-конечная регулярная борелевская мера на Λ, по которой все функции $\{\mu_{ij}\}$ непрерывны; пусть $\{m_{ij}\}$ — матрица плотностей матрицы $\{\mu_{ij}\}$ относительно μ. Семейство наборов $F = [f_1, \ldots, f_n]$ измеримых по Борелю функций, определенных на Λ, для которых

$$|F|^2 = \int_{\Lambda} \left\{ \sum_{i, j=1}^{n} m_{ij}(\lambda) f_i(\lambda) \overline{f_j(\lambda)} \right\} \mu(d\lambda) < \infty,$$

будет обозначаться через $L_2^0(\Lambda, \{\mu_{ij}\})$. Элемент F из $L_2^0(\Lambda, \{\mu_{ij}\})$ будет называться *$\{\mu_{ij}\}$-нулевой функцией*, если $|F| = 0$. Множество всех классов эквивалентности элементов пространства $L_2^0(\Lambda, \{\mu_{ij}\})$ по модулю $\{\mu_{ij}\}$-нулевых функций будет обозначаться через $L_2(\Lambda, \{\mu_{ij}\})$.

Рассуждая так же, как в лемме 9 и теореме 10, можно доказать, что $L_2(\Lambda, \{\mu_{ij}\})$ — полное гильбертово пространство.

Следует отметить, что если $\{\varrho_{ij}\}$ является положительной $(n\times n)$-матричной мерой на действительной оси и $\{\mu_{ij}\}$ является положительной $(n\times n)$-матричной мерой на Λ, определенной соотношением $\mu_{ij}(e)=\varrho_{ij}(e)$ для $e\subseteq\Lambda$, то $L_2(\Lambda, \{\mu_{ij}\})$ можно рассматривать как изометрически вложенное в $L_2(\{\varrho_{ij}\})$, т. е. как множество наборов $[f_1(\cdot), \ldots, f_n(\cdot)]$ пространства $L_2(\{\varrho_{ij}\})$, элементы которых обращаются в нуль вне Λ. (Ср. с § III.8, в частности с пунктами, расположенными между леммами III.8.2 и III.8.3.) В дальнейшем подобные простые соображения из теории меры будут часто применяться, иногда неявным образом. В частности, последовательность элементов из $L_2(\Lambda, \{\mu_{ij}\})$, сходящаяся в метрике пространства $L_2(\Lambda, \{\mu_{ij}\})$, будет иногда называться *сходящейся в смысле среднего квадратического в* $L_2(\Lambda, \{\mu_{ij}\})$. Пусть I — интервал действительной оси, ν — борелевская мера на I, $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ — система измеримых по Борелю функций, определенных на $I\times\Lambda$, а h — измеримая по мере ν функция, определенная на I. Предположим, что для каждого компактного подинтервала J интервала I интегралы

$$H_i^J(\lambda)=\int\limits_J \sigma_i(t, \lambda)\, h(t)\, \nu(dt), \quad i=1, \ldots, n,$$

существуют для всех $\lambda\in\Lambda$ и определяют элемент H^J из $L_2(\Lambda, \{\mu_{ij}\})$ и что если J_p — любая неубывающая последовательность компактных подинтервалов интервала I, объединение которых есть I, то $\lim\limits_{p\to\infty} H^{J_p}$ существует в топологии пространства $L_2(\Lambda, \{\mu_{ij}\})$. Тогда мы иногда будем говорить, что *семейство интегралов*

$$\int\limits_I \sigma_i(t, \lambda)\, h(t)\, \nu(dt)$$

существует в смысле среднего квадратического в $L_2(\Lambda, \{\mu_{ij}\})$.

13. Теорема (*Вейль — Кодаира*). *Пусть τ — формально самосопряженный дифференциальный оператор порядка n, определенный на интервале I с концами a, b. Пусть T — самосопряженное расширение оператора $T_0(\tau)$. Пусть Λ — открытый интервал действительной оси, и предположим, что задана такая система функций $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, определенных и непрерывных на $I\times\Lambda$, что для каждой фиксированной точки λ из Λ система $\sigma_1(\cdot, \lambda), \ldots$ $\ldots, \sigma_n(\cdot, \lambda)$ образует базис для пространства решений уравнения $\tau\sigma=\lambda\sigma$. Тогда существует такая положительная $(n\times n)$-матричная мера $\{\varrho_{ij}\}$, определенная на Λ, что*

(I) *предел*

$$[(Vf)_i(\lambda)] = \lim_{\substack{c\to a\\ d\to b}} \left[\int_c^d f(t)\,\overline{\sigma_i(t,\ \lambda)}\,dt \right]$$

существует в топологии пространства $L_2(\Lambda,\ \{\varrho_{ij}\})$ *для каждой функции* $f \in L_2(I)$ *и определяет изометрический изоморфизм* V *пространства* $E(\Lambda)L_2(I)$ *на* $L_2(\Lambda,\ \{\varrho_{ij}\})$;

(II) *для каждой борелевской функции* G, *определенной на действительной оси и обращающейся в нуль вне* Λ,

$$V\mathfrak{D}(G(T)) = \{[f_i] \in L_2(\Lambda,\ \{\varrho_{ij}\}) \mid [Gf_i] \in L_2(\Lambda, \{\varrho_{ij}\})\}$$

и

$$(VG(T)f)_i(\lambda) = G(\lambda)(Vf)_i(\lambda), \quad i = 1, \ldots, n, \quad \lambda \in \Lambda, \quad f \in \mathfrak{D}(G(T)).$$

Доказательство. Пусть $W_1, \ldots, W_m$, μ и e_i, $i = 1, \ldots, m$, определены, как в теореме 1. Тогда мы можем найти функции a_{ij}, такие, что

$$[*] \qquad W_i(t,\ \lambda) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\lambda)\,\sigma_j(t,\ \lambda), \quad t \in I, \quad \lambda \in \Lambda, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Сначала покажем, что функции a_{ij} являются измеримыми по мере μ. Пусть J — ограниченный замкнутый подинтервал интервала I. Если бы сужения функций $\sigma_1(\cdot,\ \lambda), \ldots, \sigma_n(\cdot,\ \lambda)$ на J были линейно зависимыми при любом λ, т. е. существовала бы ненулевая система постоянных $c_1, \ldots, c_p$, таких, что $\sum_{i=1}^{p} c_i\sigma_i(t,\ \lambda) = 0$ для $t \in J$, то из утверждения теоремы 1.3 о единственности следовало бы, что $\sum_{i=1}^{p} c_i\sigma_i(t,\ \lambda) = 0$ для всех $t \in I$. Поэтому система $\sigma_1(\cdot,\ \lambda), \ldots$ $\ldots, \sigma_p(\cdot,\ \lambda)$ была бы линейно зависима, что противоречит условиям. Это противоречие показывает, что сужения $\sigma_i(\lambda)$ функций $\sigma_i(\cdot,\ \lambda)$ на интервал J линейно независимы, и поэтому уравнение [*] определяет коэффициенты $a_{ij}(\lambda)$ однозначно, даже если мы требуем только, чтобы [*] имело силу для всех t из J. Так как функции $a_{ij}(\lambda)$ непрерывны и поэтому ограничены, то сужения $W_i(\lambda)$ и $\sigma_i(\lambda)$ функций $W_i(\cdot,\ \lambda)$ и $\sigma_i(\cdot,\ \lambda)$ на интервал J принадлежат $L_2(J)$. Полагая, что λ_0 — фиксированная точка в Λ, и применяя теорему Хана — Банаха (II.3.13), отбираем векторы $h_j \in L_2(J)$, такие, что

$$(\sigma_i(\lambda_0),\ h_j) = \delta_{ij}, \qquad i,\ j = 1, \ldots, n.$$

Тогда для любого фиксированного целого k, $1 \leqslant k \leqslant m$, мы имеем

$$(W_k(\lambda),\ h_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}(\lambda)\,(\sigma_i(\lambda),\ h_j), \quad j = 1, \ldots, n.$$

При $\lambda=\lambda_0$ матрица $\{b_{ij}(\lambda)\}=\{(\sigma_i(\lambda),\ h_j)\}$ единичная. Очевидно, что матрица $\{b_{ij}(\lambda)\}$ непрерывна по λ. Поэтому существует окрестность N точки λ_0, такая, что определитель $\det\{b_{ij}(\lambda)\}$ отличен от нуля в $\Lambda\cap N$. Следовательно, для $\lambda\in\Lambda\cap N$ матрица $\{b_{ij}(\lambda)\}$ имеет обратную $\{c_{ij}(\lambda)\}$, непрерывную по λ при $\lambda\in N$. Таким образом,

[′] $$a_{ki}(\lambda)=\sum_{j=1}^{n}(W_k(\lambda),\ h_j)\,c_{ji}(\lambda),$$
$$k=1,\ \ldots,\ m;\quad i=1,\ \ldots,\ n;\quad \lambda\in\Lambda\cap N.$$

Это равенство показывает, что сужение функции a_{kj} на $\Lambda\cap N$ измеримо по мере μ. По теореме 1 $(h_j, W_k(\lambda))=(Uh_j)_k(\lambda)$ принадлежит $L_2(\mu)$ при $k=1,\ \ldots,\ m$, $j=1,\ldots,\ n$; вместе с равенством [′] это доказывает, что

$$\int_{\Lambda\cap M\cap N}|a_{ki}(\lambda)|^2\mu(d\lambda)<\infty,\quad i=1,\ \ldots,\ n,\quad k=1,\ \ldots,\ m,$$

при условии, что M — компактное подмножество множества Λ. Так как Λ может быть покрыто последовательностью множеств вида $\Lambda\cap N$, то a_{ki} — измеримые по мере μ функции на Λ, а так как каждое борелевское множество e, замыкание которого компактно и содержится в Λ, может быть покрыто конечной последовательностью множеств вида $\Lambda\cap N$, то

$$\int_e|a_{ki}(\lambda)|^2\mu(d\lambda)<\infty,\quad k=1,\ \ldots,\ m,\qquad i=1,\ \ldots,\ n,$$

для каждого борелевского множества e с компактным замыканием, содержащимся в Λ.

Пусть ϱ_{jk} — комплекснозначные функции множества, заданные на каждом борелевском множестве e, замыкание которого замкнуто и содержится в Λ, формулами

$$\varrho_{jk}(e)=\sum_{i=1}^{m}\int_e a_{ik}(\lambda)\,\overline{a_{ij}(\lambda)}\,\mu(d\lambda),\qquad j,k=1,\ \ldots,\ n.$$

Пусть $[\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n]$ — набор комплексных чисел. Тогда

$$\sum_{j,\,k=1}^{n}\varrho_{jk}(e)\,\xi_j\bar{\xi}_k=\sum_{i=1}^{m}\int_e\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(\lambda)\bar{\xi}_j\right|^2\mu(d\lambda)\geqslant 0.$$

Таким образом, $\{\varrho_{jk}(\cdot)\}$ удовлетворяет условию (I) определения 12. Ясно также, что $\{\varrho_{jk}(\cdot)\}$ удовлетворяет и условию (II) определения 12, если только замыкание объединения $\bigcup_{i=1}^{\infty}e_i$ компактно и содержится в Λ. Таким образом, $\{\varrho_{ij}\}$ есть положительная

$(n \times n)$-матричная мера, определенная на интервале Λ. Очевидно, что все функции множества ϱ_{jk} непрерывны по мере μ, и плотностью ϱ_{jk} относительно μ является функция

$$m_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{kj}\bar{a}_{ki}.$$

Пусть для каждого набора $F = [f_1, \ldots, f_n]$ измеримых по Борелю функций, заданных на Λ, AF есть набор $[g_1, \ldots, g_m]$ функций, определенных равенствами

$$g_i(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} \overline{a_{ik}(\lambda)}\, f_k(\lambda), \qquad i = 1, \ldots, m, \qquad \lambda \in \Lambda.$$

Тогда, поскольку $a_{ik}(\lambda)$ равно нулю при $\lambda \notin e_i$ и

$$\int_{\Lambda} \left\{ \sum_{i,\, j=1}^{n} m_{ij}(\lambda) f_i(\lambda) \overline{f_j(\lambda)} \right\} \mu(d\lambda) = \int_{\Lambda} \left\{ \sum_{k=1}^{m} |g_k(\lambda)|^2 \right\} \mu(d\lambda),$$

отображение A — изометрический изоморфизм $L_2(\Lambda, \{\varrho_{ij}\})$ в подпространство $\sum_{i=1}^{m} L_2(\mu, \Lambda e_i)$ пространства $\sum_{i=1}^{m} L_2(\mu, e_i)$. Отсюда же вытекает и следующее замечание.

[″] *Если F является набором n измеримых по Борелю функций, то $AF \in \sum_{i=1}^{m} L_2(\Lambda e_i, \mu)$ тогда и только тогда, когда $F \in L_2(\Lambda, \{\varrho_{ij}\})$.*

Пусть U — изометрический изоморфизм пространства $L_2(I)$ на $\sum_{i=1}^{m} L_2(\mu_i)$, полученный в теореме 1, и пусть $\{J_q\}$ — возрастающая последовательность компактных интервалов, объединение которых равно I. Из теоремы 1 следует, что для каждого целого q и каждой функции f из $L_2(I)$ функции $\int_{J_q} f(t)\overline{W_k(t, \cdot)}\,dt$ принадлежат $L_2(\mu, e_k)$, $k = 1, \ldots, m$, и предел

$$(Uf)_k(\lambda) = \lim_{q \to \infty} \int_{J_q} f(t) \overline{W_k(t, \lambda)}\, dt, \qquad k = 1, \ldots, m,$$

существует в топологии пространства $L_2(\mu, e_k)$. Более того, отображение

$$f \to \left[\chi_\Lambda(\cdot) \int_I f(t) W_i(t, \cdot)\, dt \right], \qquad f \in E(\Lambda) L_2(I),$$

является изометрическим изоморфизмом пространства $E(\Lambda) L_2(I)$ на все $\sum_{i=1}^{m} L_2(\mu, \Lambda e_i)$.

Для каждой функции f из $L_2(I)$ определим

$$(V_q f)_i(\lambda) = \int_{J_q} f(t)\,\overline{\sigma_i(t, \lambda)}\,dt, \qquad \lambda \in \Lambda, \qquad q \geqslant 1, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Равенства

$$\int_\Lambda \left\{ \sum_{i, j=1}^{n} m_{ij}(\lambda)(V_q f)_i(\lambda)\overline{(V_q f)_j(\lambda)} \right\} \mu(d\lambda) =$$

$$= \int_\Lambda \left\{ \sum_{i, j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_{kj}(\lambda)\overline{a_{ki}(\lambda)}(V_q f)_i(\lambda)\overline{(V_q f)_j(\lambda)} \right\} \mu(d\lambda) =$$

$$= \int_\Lambda \sum_{k=1}^{m} \left| \sum_{i=1}^{n} \overline{a_{ki}(\lambda)}(V_q f)_i(\lambda) \right|^2 \mu(d\lambda) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \int_\Lambda |(AV_q f)_k(\lambda)|^2 \mu(d\lambda);$$

$$(AV_q f)_k(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \overline{a_{ki}(\lambda)} \int_{J_q} \overline{\sigma_i(t, \lambda)} f(t)\,dt =$$

$$= \int_{J_q} \overline{W_k(t, \lambda)} f(t)\,dt, \qquad \lambda \in \Lambda;$$

$$(AV_q f)_k(\lambda) = 0, \qquad \lambda \notin \Lambda,$$

$$(AV_q f)_k(\lambda) = \chi_\Lambda(\lambda) \int_{J_q} \overline{W_k(t, \lambda)} f(t)\,dt$$

показывают, что набор $[(V_q f)_i]$ принадлежит $L_2(\Lambda, \{\varrho_{ij}\})$, что набор интегралов

$$[(Vf)_i] = \left[\int_I f(t)\,\sigma_i(t, \cdot)\,dt \right], \qquad i = 1, \ldots, n,$$

существует в смысле среднего квадратического в гильбертовом пространстве $L_2(\Lambda, \{\varrho_{ij}\})$ и (после применения теоремы 1(II)) что

$$UE(\Lambda)f = AVf, \qquad f \in L_2(I).$$

Из этого уравнения (поскольку $UE(\Lambda) = AV$ — отображение пространства $E(\Lambda)L_2(I)$ на все подпространство $\sum_{i=1}^{m} L_2(\mu, \Lambda e_i)$ из $\sum_{i=1}^{m} L_2(\mu, e_i)$) непосредственно следует, что V — изометрический изоморфизм пространства $E(\Lambda)L_2(I)$ на $L_2(\Lambda, \{\varrho_{ij}\})$ и что A — изометрический изоморфизм пространства $L_2(\Lambda, \{\varrho_{ij}\})$ на подпространство $\sum_{i=1}^{m} L_2(\mu, \Lambda e_i)$ из $\sum_{i=1}^{m} L_2(\mu, e_i)$.

Для доказательства утверждения (II) заметим, что поскольку G обращается в нуль вне Λ, из XII.2.6(a) следует, что $f \in \mathfrak{D}(G(T))$ тогда и только тогда, когда $E(\Lambda)f \in \mathfrak{D}(G(T))$. Это в свою очередь по теореме 1(II) имеет место тогда и только тогда, когда $[G(\cdot)(UE(\Lambda)f)_i(\cdot)]$ принадлежит $\sum_{i=1}^{m} L_2(e_i, \mu)$. Из самого определения A следует, что $[G(\cdot)(AF)_i(\cdot)] = [(A\widetilde{F})_i(\cdot)]$ для каждого набора $F = [f_1(\cdot), \ldots, f_n(\cdot)]$ измеримых по Борелю функций, определенных на Λ, где $\widetilde{F} = [G(\cdot)f_1(\cdot), \ldots, G(\cdot)f_n(\cdot)]$. Так как $UE(\Lambda)f = AVf$, то $[G(\cdot)(UE(\Lambda)f)_i(\cdot)] = [(AH)_i(\cdot)]$, где H есть n-набор $[G(\cdot)(Vf)_j(\cdot)]$. Таким образом, по замечанию [″], $f \in \mathfrak{D}(G(T))$ тогда и только тогда, когда $[G(\cdot)(Vf)_j(\cdot)]$ принадлежит $L_2(\Lambda, \{\varrho_{ij}\})$. Тем самым первая часть пункта (II) доказана.

Если $f \in \mathfrak{D}(G(T))$, то по XII.2.7(d) $E(\Lambda)G(T)f = G(T)f = G(T)E(\Lambda)f$. Так как $AV = UE(\Lambda)$ и по теореме 1 (II) $UG(T)f = [G(\cdot)(UE(\Lambda)f)_i(\cdot)]$, то из предыдущих замечаний следует, что $UG(T)f$ является набором AH, где H есть n-набор $[G(\cdot)(Vf)_j(\cdot)]$. Так как $UG(T)f = UE(\Lambda)G(T)f = AVG(T)f$, то $AVG(T)f = AH$. Поскольку A — изометрическое отображение пространства $L_2(\Lambda, \{\varrho_{ij}\})$, имеем $VG(T)f = H$, ч.т.д.

14. Теорема (*Вейль — Кодаира*). *Пусть* T, Λ, $\{\varrho_{ij}\}$ *и т. д. определены, как в теореме* 13. *Пусть* λ_0 *и* λ_1 — *концы интервала* Λ. *Тогда*

(I) *отображение, обратное к изометрическому изоморфизму* V *пространства* $E(\Lambda)L_2(I)$ *на* $L_2(\Lambda, \{\varrho_{ij}\})$, *задается формулой*

$$(V^{-1}F)(t) = \lim_{\substack{\mu_0 \to \lambda_0 \\ \mu_1 \to \lambda_1}} \int_{\mu_0}^{\mu_1} \left\{ \sum_{i,\, j=1}^{n} F_i(\lambda)\,\sigma_j(t, \lambda)\,\varrho_{ij}(d\lambda) \right\},$$

где $F = [F_1, \ldots, F_n] \in L_2(\Lambda, \{\varrho_{ij}\})$, *причем предел существует в топологии пространства* $L_2(I)$;

(II) *если* G — *ограниченная борелевская функция, обращающаяся в нуль вне борелевского множества* e, *замыкание которого компактно и содержится в* Λ, *то* $G(T)$ *имеет представление*

$$(G(T)f)(t) = \int_I f(s)\,K(G;\, t,\, s)\,ds,$$

где

$$K(G;\ t,\ s)=\sum_{i,\ j=1}^{n}\int_{e} G(\lambda)\overline{\sigma_i(s,\ \lambda)}\,\sigma_j(t,\ \lambda)\,\varrho_{ij}(d\lambda).$$

Более того, на любом компактном интервале $J\subseteq I$

$$\sup_{t\in J}\int_{I}|K(G;\ t,\ s)|^2\,ds<\infty.$$

Доказательство. Пусть f — функция из $L_2(I)$, такая, что $(Uf)_i(\cdot)$ ограничены для $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, и пусть g из $L_2(I)$ обращается в нуль вне компактного подинтервала J интервала I. Пусть $\Lambda_0=(\mu_0,\ \mu_1)$ — открытый подинтервал интервала Λ с компактным замыканием. Тогда по теореме 13 (I) и (II)

$$(E(\Lambda_0)f,\ g)=(E(\Lambda_0)f,\ E(\Lambda_0)g)=(VE(\Lambda_0)f,\ VE(\Lambda_0)g)=$$
$$=\int_{\Lambda_0}\left\{\sum_{i,\ j=1}^{n}(Vf)_i(\lambda)\,\overline{(Vg)_j(\lambda)}\,\varrho_{ij}\,d\lambda\right\}=$$
$$=\int_{\Lambda_0}\left\{\sum_{i,\ j=1}^{n}(Vf)_i(\lambda)\left\{\int_{J}\sigma_j(t,\ \lambda)\,\overline{g(t)}\,dt\right\}\varrho_{ij}(d\lambda)\right\}.$$

Так как все меры ϱ_{ij}, $i,\ j=1,\ \ldots,\ n$, имеют конечные сужения на Λ_0, функции σ_j непрерывны и потому ограничены на компактном множестве $\overline{\Lambda}_0\times J$, то мы можем изменить порядок интегрирования и суммирования в последней формуле и найти

$$[*]\qquad (E(\Lambda_0)f,\ g)=\int_{J}\left\{\int_{\Lambda_0}\sum_{i,\ j=1}^{n}\{(Vf)_i(\lambda)\,\sigma_j(t,\ \lambda)\,\varrho_{ij}(d\lambda)\}\,\overline{g(t)}\right\}dt.$$

Пусть $\hat{f}\in L_2(I)$. Используя то, что семейство ограниченных n-наборов плотно в $L_2(\Lambda,\ \{\varrho_{ij}\})$, предположим, что f_k — последовательность функций из $L_2(I)$, такая, что $f_k\to\hat{f}$ в топологии пространства $L_2(I)$, и Vf_k — ограниченный n-набор для $k\geqslant 1$. Тогда из ограниченности $\sigma_j(t,\ \lambda)$ в $J\times\Lambda_0$ следует, что

$$\int_{\Lambda_0}\left\{\sum_{i,\ j=1}^{n}(Vf_k)_i(\lambda)\,\sigma_j(t,\ \lambda)\,\varrho_{ij}(d\lambda)\right\}\to$$
$$\to\int_{\Lambda_0}\left\{\sum_{i,\ j=1}^{n}(V\hat{f})_i(\lambda)\,\sigma_j(t,\ \lambda)\,\varrho_{ij}(d\lambda)\right\}$$

при $k\to\infty$, причем предельное соотношение справедливо для каждого t из J и предел ограничен для $t\in J$. Применяя [*] к каждой функции f_k и полагая $k \to \infty$, получаем

[**] $$(E(\Lambda_0)\hat{f}, g) = \int_I (S_{\Lambda_0}Vf)(t)\overline{g(t)}\,dt.$$

Здесь для каждого набора $F = [F_1(\cdot), \ldots, F_n(\cdot)]$ из $L_2(\Lambda, \{\varrho_{ij}\})$ мы полагаем

$$(S_{\Lambda_0}F)(t) = \int_{\Lambda_0} \left\{ \sum_{i, j=1}^{n} F_i(\lambda)\,\sigma_j(t, \lambda)\,\varrho_{ij}(d\lambda) \right\}, \qquad t \in I.$$

Из теоремы IV.8.1 следует, что $\int_I |(S_{\Lambda_0}Vf)(t)|^2\,dt < \infty$ и [**] справедливо для всех g из $L_2(I)$. Таким образом,

$$(E(\Lambda_0)f)(t) = (S_{\Lambda_0}Vf)(t).$$

Теперь, если мы устремим концы μ_0 и μ_1 интервала Λ_0 к концам λ_0 и λ_1 интервала Λ, то получим

$$(E(\Lambda)f)(t) = \lim_{\substack{\mu_0 \to \lambda_0 \\ \mu_1 \to \lambda_1}} \int_{\mu_0}^{\mu_1} \left\{ \sum_{i, j=1}^{n} (V_i f)(\lambda)\,\sigma_j(t, \lambda)\,\varrho_{ij}(d\lambda) \right\},$$

что и доказывает утверждение (I) нашей теоремы.

Чтобы доказать (II), мы рассуждаем следующим образом (ср. с доказательством следствия 3). Из ограниченности $G(T)$ и леммы 2.16 следует, что $f \to G(T)f$ — непрерывное отображение $L_2(I)$ в $C(J)$. Таким образом, существует постоянное число $M(J)$, такое, что

$$|(G(T)f)(t)| \leqslant M(J)\,|f|, \qquad f \in L_2(I).$$

Из теоремы 13(II) и части (I) настоящей теоремы следует, что

$$(G(T)f)(t) = \int_e \sum_{i, j=1}^{n} G(\lambda) \left\{ \int_I f(s)\,\overline{\sigma_i(s, \lambda)}\,ds \right\} \sigma_j(t, \lambda)\,\varrho_{ij}(d\lambda),$$

где интегралы $\int_I f(s)\,\overline{\sigma_i(s, \lambda)}\,ds$ существуют в смысле среднего квадратического в $L_2(\Lambda, \{\varrho_{ij}\})$. Пусть $\mathfrak{H}_0$ обозначает плотное множество функций $f \in L_2(I)$, каждая из которых обращается в нуль вне компактного подинтервала интервала I. Если $f \in \mathfrak{H}_0$, то все интегралы в приведенной выше формуле существуют, и мы можем изменить в ней порядок интегрирования и суммирования, чтобы получить равенство

[′] $$(G(T)f)(t) = \int_I f(s)\,K(G; t, s)\,ds, \qquad f \in \mathfrak{H}_0,$$

и неравенство

$$\left| \int_I f(s) K(G; t, s)\, ds \right| \leqslant M(J) |f|, \quad f \in \mathfrak{H}_0,$$

где

$$K(G; t, s) = \sum_{i, j=1}^{n} \int_e G(\lambda) \overline{\sigma_i(s, \lambda)} \sigma_j(t, \lambda) \varrho_{ij}(d\lambda).$$

Из теоремы IV.8.1 следует, что

$$\left[\int_I |K(G; t, s)|^2 ds \right]^{1/2} \leqslant M(J), \qquad t \in J,$$

и что уравнение [′] справедливо при всех f из $L_2(I)$.

15. Следствие. *Пусть T, Λ и $\{\varrho_{ij}\}$ определены, как в теореме 14. Тогда дополнение множества $\sigma(T)$ в Λ есть наибольшее открытое подмножество e_0 множества Λ, такое, что $\{\varrho_{ij}(e)\} = 0$ для каждого открытого подмножества множества e_0, у которого замыкание компактно и содержится в Λ.*

Доказательство. Сначала заметим, что если e — борелевское множество, замыкание которого компактно и содержится в Λ, и $\{\varrho_{ij}(e)\} = 0$, то $\{\varrho_{ij}(e_1)\} = 0$ для каждого борелевского подмножества $e_1 \subseteq e$. Чтобы доказать это, допустим, что $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — любой набор из n комплексных чисел и $F = [f_1, \ldots, f_n]$, где $f_i = \xi_i \chi_e$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда $VE(e_1) V^{-1} F = [\chi_{e_1} f_1, \ldots, \chi_{e_1} f_n]$. Так как $\{\varrho_{ij}(e)\} = 0$, то

$$0 = \sum_{i, j=1}^{n} \varrho_{ij}(e) \xi_i \bar{\xi}_j = |F|^2 \geqslant |VE(e_1) V^{-1} F|^2 =$$

$$= \sum_{i, j=1}^{n} \varrho_{ij}(e_1) \xi_i \bar{\xi}_j \geqslant 0.$$

Следовательно, $\sum_{i, j=1}^{n} \varrho_{ij}(e_1) \xi_i \bar{\xi}_j = 0$ для каждого вектора $[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ из E^n. Если $[\zeta_1, \ldots, \zeta_n] \in E^n$, то неравенство Шварца для скалярного произведения $\sum_{i, j=1}^{n} \varrho_{ij}(e_1) \xi_i \bar{\zeta}_j$ в E^n показывает, что

$$\left| \sum_{i, j=1}^{n} \varrho_{ij}(e_1) \xi_i \bar{\zeta}_j \right|^2 \leqslant \left\{ \sum_{i, j=1}^{n} \varrho_{ij}(e_1) \xi_i \bar{\xi}_j \right\} \left\{ \sum_{i, j=1}^{n} \varrho_{ij}(e_1) \zeta_i \bar{\zeta}_j \right\}$$

для произвольных векторов $[\xi_i]$, $[\zeta_i]$ из E^n (см. замечание после теоремы IV.4.1). Отсюда следует, что $\sum_{i=1}^{n} \varrho_{ij}(e_1) \xi_i = 0$, $j = 1, \ldots, n$, $[\xi_i] \in E^n$. Поэтому $\varrho_{ij}(e_1) = 0$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

Теперь пусть e_0 — объединение всех открытых подмножеств e, замыкание которых компактно и содержится в Λ и для которых $\{\varrho_{ij}(e)\}=0$. Так как e_0 — объединение последовательности таких множеств, то из теоремы 14(II) и предыдущего абзаца следует, что $E(e)=0$, $e\subseteq e_0$. Таким образом, $E(e_0)=0$. Поэтому по теореме XII.2.9(b) $\sigma(T)\cap e_0=\varnothing$. С другой стороны, если $e_0\cap\sigma(T)=\varnothing$, так что по теореме XII.2.9(b) $E(e_0)=0$, то по теореме 13(I) и (II)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{i,\,j=1}^{n} f_i(\lambda)\,g_j(\lambda)\,\varrho_{ij}(d\lambda)\right\}=0,\qquad [f_i],\ [g_i]\in L_2(\Lambda,\ \{\varrho_{ij}\}),$$

если только f_i и g_j обращаются в нуль вне e_0. Если e — борелевское множество, замыкание которого компактно и содержится в e_0, то, полагая $F=[\xi_1\chi_e,\ \ldots,\ \xi_n\chi_e]$ и $G=[\zeta_1\chi_e,\ \ldots,\ \zeta_n\chi_e]$, мы видим, что $\{\varrho_{ij}(e)\}=0$, и поэтому $\{\varrho_{ij}(e_0)\}=0$, ч. т. д.

Следующая теорема дает полезную информацию о сходимости интегралов обращения, полученных в теореме 14. Это аналог теоремы 4.3 для случая непрерывного спектра.

16. Теорема. *Пусть оператор T, изоморфизм V и матричная мера $\{\varrho_{ij}\}$ определены, как в теоремах* 13 *и* 14. *Пусть μ — положительная σ-конечная мера, относительно которой все функции ϱ_{ij} непрерывны, и пусть m_{ij} — производная функции ϱ_{ij} в смысле Радона — Никодима относительно μ. Если f принадлежит $\mathfrak{D}(T)\subseteq L_2(I)$, то интеграл*

$$\int_{\Lambda}\left\{\sum_{i,\,j=1}^{n} m_{ij}(\lambda)\,\sigma_i(t,\ \lambda)\,(Vf)_j(\lambda)\right\}\mu(d\lambda)$$

сходится абсолютно и равномерно на каждом конечном замкнутом подинтервале из I и может быть продифференцирован под знаком интеграла $(n-1)$ раз, причем каждый продифференцированный интеграл обладает свойством абсолютной и равномерной сходимости.

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству теоремы 4.3. Если $\{\Lambda_k\}$ — возрастающая последовательность компактных подинтервалов множества Λ, объединение которых равно Λ, и λ_0 принадлежит $\varrho(T)$, то

$$\int_{\Lambda-\Lambda_k}\left\{\sum_{i,\,j=1}^{n} m_{ij}(\lambda)\,\sigma_i(t,\ \lambda)\,(Vf)_j(\lambda)\right\}\mu(d\lambda)=R(\lambda_0;\ T)\,g_k,$$

где

$$g_k=E(\Lambda-\Lambda_k)\,(\lambda_0 I-T)\,f.$$

Так как g_k стремятся к нулю и $TR(\lambda_0; T)$ — ограниченный оператор, то очевидно, что $R(\lambda_0; T)g_k$ и $TR(\lambda_0; T)g_k$ стремятся к нулю в $L_2(I)$. Таким образом, по лемме 2.16 интегралы

$$[*] \qquad \int_{\Lambda_k} \left\{ \sum_{i,\, j=1}^{n} m_{ij}(\lambda)\,\sigma_i(t, \lambda)\,(Vf)_j(\lambda) \right\} \mu(d\lambda)$$

сходятся к $E(\Lambda)g$ в топологии пространства $C^{n-1}(J)$ на каждом компактном интервале $J \subset I$. Так как эти интегралы сходятся безусловно в $L_2(I)$, то они сходятся безусловно и в $C^{n-1}(J)$. Функции σ_i непрерывны на $I \times \Lambda$ и принадлежат $C^\infty(I)$ при любом λ из Λ. Легко видеть, что при любом $k \geqslant 0$ предел

$$\lim_{\Delta t \to 0+} \frac{\sigma^{(k)}(t+\Delta t, \lambda) - \sigma^{(k)}(t, \lambda)}{\Delta t} = \sigma^{(k+1)}(t, \lambda)$$

существует равномерно по t в любом компактном подинтервале из I и по λ в любом компактном подинтервале из Λ. Таких образом, если

$$\eta_k(t, \lambda, \Delta t) = \frac{\sigma^{(k)}(t+\Delta t, \lambda) - \sigma^{(k)}(t, \lambda)}{t} - \sigma^{(k+1)}(t, \lambda),$$

то очевидно, что

$$\lim_{\Delta t \to 0} \int_{\Lambda_k} \left\{ \sum_{i,\, j=1}^{n} \eta_i(t, \lambda, \Delta t)\,\eta_j(t, \lambda, \Delta t)\,\varrho_{ij}(d\lambda) \right\} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i,\, j=1}^{n} \int_{\Lambda_k} \eta_i(t, \lambda, \Delta t)\,\eta_j(t, \lambda, \Delta t)\,\varrho_{ij}(d\lambda) = 0, \qquad k \geqslant 1.$$

Поэтому в силу неравенства Шварца

$$\lim_{\Delta t \to 0} \int_{\Lambda_k} \left\{ \sum_{i,\, j=1}^{n} m_{ij}(\lambda)\,\eta_i(t, \lambda, \Delta t)\,(Vf)(\lambda) \right\} \mu(d\lambda) = 0, \qquad k \geqslant 1,$$

т. е. для всех $k \geqslant 1$ интеграл в [*] можно дифференцировать сколько угодно раз под знаком интеграла. Следовательно, каждый продифференцированный интеграл сходится абсолютно, ч. т. д.

Заметим, что точка λ_0 из Λ является собственным числом оператора T тогда и только тогда, когда матрица $\{\varrho_{ij}(\{\lambda_0\})\}$ отлична от нуля. По теореме 14(II) $E(\{\lambda_0\})$ — интегральный оператор, у которого ядро равно

$$E(\{\lambda_0\}, t, s) = \sum_{i, j=1}^{n} \sigma_i(t, \lambda_0)\overline{\sigma_j(s, \lambda_0)}\,\varrho_{ji}(\{\lambda_0\}).$$

Так как функции $\sigma_1(\cdot, \lambda_0), \ldots, \sigma_n(\cdot, \lambda_0)$ линейно независимы, то $E(\{\lambda_0\}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\{\varrho_{ij}(\{\lambda_0\})\} = 0$. Однако, как и в доказательстве леммы X.3.3(II), очевидно, что $E(\{\lambda_0\}) \neq 0$ тогда и только тогда, когда λ_0 является собственным значением оператора T.

Теперь мы покажем, что когда матрица $S(\lambda_0) = \{\varrho_{ij}(\{\lambda_0\})\}$ не равна нулю, можно построить методом диагонализации этой положительно полуопределенной эрмитовой матрицы полную систему ортогональных собственных функций, соответствующих λ_0. Это замечание пригодится в дальнейшем. Из спектральной теоремы следует, что существуют матрицы U и A, такие, что $S(\lambda_0) = UAU^{-1}$, где $U = \{u_{ij}\}$ — унитарная матрица и A — матрица $\{a_{ij}\} = \{\lambda_i\delta_{ij}\}$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — собственные числа матрицы $S(\lambda_0)$, взятые столько раз, какова их кратность. Таким образом, существуют величины u_{ij}, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, такие, что

$$\sum_{k=1}^{n} u_{ik}\bar{u}_{jk} = \delta_{ij}, \qquad \varrho_{ij}(\{\lambda_0\}) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_{ik}\bar{u}_{jk}.$$

Поскольку собственные числа матрицы $S(\lambda_0)$ неотрицательны, можно считать, что $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n \geqslant 0$. Предположим, что $\lambda_p > 0$, а $\lambda_{p+1} = 0$. Определим

$$\psi_k(t) = \sqrt{\lambda_k}\sum_{i=1}^{n} u_{ik}\sigma_i(t, \lambda_0), \qquad k = 1, \ldots, p.$$

Тогда функции ψ_k являются линейно независимыми решениями уравнения $(\tau - \lambda_0)\sigma = 0$ и

[*] $$E(\{\lambda_0\}, t, s) = \sum_{k=1}^{p} \psi_k(t)\overline{\psi_k(s)}.$$

Если J — любой компактный подинтервал интервала I, то $\psi_1, \ldots, \psi_p$ линейно независимы в $L_2(J)$. Таким образом, мы можем найти функции $g_1, \ldots, g_p$ из $L_2(I)$, обращающиеся в нуль вне J и такие, что

$$\int_I g_i(s)\overline{\psi_j(s)}\,ds = \int_J g_i(s)\overline{\psi_j(s)}\,ds = \delta_{ij}, \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant p.$$

По теореме 14(II) и формуле [*]

$$(E(\{\lambda_0\})g_i)(t) = \int_I g_i(s)E(\{\lambda_0\}, t, s)\,ds = \psi_i(t), \qquad t \in I,$$

Это показывает, что ψ_i принадлежат $L_2(I)$ и, поскольку $E(\{\lambda_0\})g_i=\psi_i$, они принадлежат $\mathfrak{D}(T)$. Следовательно, $T\psi_i=\lambda_0\psi_i$, $i=1, \ldots, p$, и поэтому $E(\{\lambda_0\})\psi_i=\psi_i$, $i=1, \ldots, p$. Итак, формула [*] показывает, что

$$\psi_i(t)=\sum_{j=1}^{p}\psi_j(t)\int_I \psi_i(s)\overline{\psi_j(s)}\,ds.$$

Отсюда, учитывая линейную независимость $\{\psi_i\}$, получаем, что $(\psi_i, \psi_j)=\delta_{ij}$, $1\leqslant i, j\leqslant p$. Поэтому векторы $\psi_1, \ldots, \psi_p$ образуют ортонормированную систему собственных векторов оператора T, соответствующую собственному значению λ_0. Если ψ — любой другой такой собственный вектор, то мы имеем $E(\{\lambda_0\})\psi=\psi$, так что в силу равенства [*]

$$\psi=\sum_{j=1}^{p}(\psi, \psi_j)\psi_j.$$

Таким образом, ψ линейно зависит от векторов ψ_j. Тем самым доказано, что $\{\psi_1, \ldots, \psi_p\}$ — полная ортонормальная система собственных функций оператора T, соответствующая собственному значению λ_0.

В теореме 13 мы доказали существование положительной матричной меры $\{\varrho_{ij}\}$, связанной с любым самосопряженным расширением оператора $T_0(\tau)$ и базисом $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ решений уравнения $(\tau-\lambda)\sigma=0$, непрерывных на $I\times\Lambda$. Теперь мы рассмотрим задачу вычисления этой матрицы в явном виде при условии, что функции $\sigma_i(\cdot, \lambda)$ образуют базис, зависящий аналитически от λ для всех λ в окрестности U комплексной плоскости, содержащей Λ. В § 3 было показано, что резольвента $R(\lambda; T)$ оператора T является интегральным оператором, ядро которого $K(t, s; \lambda)$ выражается в терминах произведения решений уравнений $(\tau-\lambda)\sigma=0$ и $(\tau-\bar{\lambda})\sigma=0$. Поэтому в силу следствия 3.12 существуют функции $\theta_{ij}^{\pm}$, такие, что для λ из $U\cap\varrho(T)$

$$K(t, s; \lambda)=\begin{cases}\sum\limits_{i, j=1}^{n}\theta_{ij}^{-}(\lambda)\sigma_i(t, \lambda)\overline{\sigma_j(s, \bar{\lambda})}, & t<s,\\ \sum\limits_{i, j=1}^{n}\theta_{ij}^{+}(\lambda)\sigma_i(t, \lambda)\overline{\sigma_j(s, \bar{\lambda})}, & t>s.\end{cases}$$

Мы покажем, что функции $\theta_{ij}^{\pm}$ аналитические, и докажем, что

$$[**]\quad \varrho_{ij}((\lambda_1, \lambda_2))=\lim_{\delta\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda_1+\delta}^{\lambda_2-\delta}[\theta_{ij}^{\pm}(\lambda-i\varepsilon)-\theta_{ij}^{\pm}(\lambda+i\varepsilon)]\,d\lambda,$$

где (λ_1, λ_2) — любой ограниченный интервал, содержащийся в Λ. В теореме XII.2.10 заложена основа этой формулы. Теорема утверждает, что оператор проектирования в разложении единицы для T, соответствующий интервалу (λ_1, λ_2), может быть найден по резольвенте с помощью формулы

$$E((\lambda_1, \lambda_2)) f = \lim_{\delta \to 0} \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda_1+\delta}^{\lambda_2-\delta} [R(\lambda - i\varepsilon; T) - R(\lambda + i\varepsilon; T)] f \, d\lambda.$$

Задача, которая стоит перед нами, заключается в том, чтобы перейти от последней формулы, включающей резольвенту, к другой формуле, включающей функции $\theta_{ij}^{+}(\lambda)$ и $\theta_{ij}^{-}(\lambda)$, как в формуле [**]. Многие технические трудности в следующем доказательстве вызваны тем, что функции $\sigma_i(\cdot, \lambda)$ не обязательно интегрируемы в квадрате на I. Следующая лемма будет очень важным средством для доказательства формулы [**].

17. Лемма. *Пусть $\mathfrak{X}$ — комплексное B-пространство и G — открытое множество в комплексной плоскости. Пусть V и $Q_1, \ldots, Q_N$ — аналитические функции, определенные в G, принимающие значения в $B(\mathfrak{X})$, а $g_1, \ldots, g_N$ — скалярные функции, определенные в G, такие, что $V(\lambda) = \sum_{i=1}^{N} g_i(\lambda) Q_i(\lambda)$ для λ из G. Предположим, что $Q_1(\lambda), \ldots, Q_N(\lambda)$ линейно независимы для каждого λ из G. Если $\mathfrak{K}$ обозначает линейное пространство непрерывных линейных функционалов φ на $B(\mathfrak{X})$ вида $\varphi(T) = \sum_{i=1}^{k} x_i^* T x_i$, $x_i^* \in \mathfrak{X}^*$, $x_i \in \mathfrak{X}$, то для любой данной точки λ_0 в G существуют линейно независимые функционалы φ_i в $\mathfrak{K}$, окрестность $G(\lambda_0) \subseteq G$ точки λ_0 и аналитические функции P_{ij}, определенные в $G(\lambda_0)$, такие, что*

$$\sum_{j=1}^{N} P_{kj}(\lambda) \varphi_j Q_i(\lambda) = \delta_{ki}, \qquad \lambda \in G(\lambda_0),$$

и

$$g_k(\lambda) = \sum_{j=1}^{N} P_{k_j}(\lambda) \varphi_j V(\lambda), \qquad \lambda \in G(\lambda_0).$$

Функции g_i являются аналитическими по $\lambda \in G$.

Доказательство. Сначала заметим, что если $A \in B(\mathfrak{X})$ и $\varphi(A) = 0$ для всех φ из $\mathfrak{K}$, то очевидно, что $A = 0$. Теперь будет доказано, что существует система $\varphi_1, \ldots, \varphi_N \in \mathfrak{K}$, такая, что $\varphi_i Q_j(\lambda_0) = \delta_{ij}$. Конечно, существует элемент φ_1, такой, что $\varphi_1 Q_1(\lambda_0) = 1$. Теперь предположим, что $1 < p < N$ и построены функционалы $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$, такие, что $\varphi_i Q_j(\lambda_0) = \delta_{ij}$, $1 \leqslant i, j \leqslant p$. Тогда обязательно существует элемент $\psi \in \mathfrak{K}$, такой, что $\psi(Q_{p+1}(\lambda_0)) - \sum_{i=1}^{p} \psi(Q_i(\lambda_0)\varphi_i(Q_p(\lambda_0))) \neq 0$; в противном случае из предыдущего замечания следовало бы, что $Q_{p+1}(\lambda_0) = \sum_{i=1}^{p} Q_i(\lambda_0)\varphi_i(Q_p(\lambda_0))$, вопреки линейной независимости операторов $Q_1(\lambda_0), \ldots, Q_{p+1}(\lambda_0)$. Выбрав такую функцию ψ, определим $\psi_1 = \psi - \sum_{i=1}^{p} \psi(Q_i(\lambda_0))\varphi_i$ и $\hat{\varphi}_{p+1} = \psi_1/\psi_1(Q_{p+1}(\lambda_0))$. Затем положим

$$\hat{\varphi}_j = \varphi_j - \varphi_j(Q_{p+1}(\lambda_0))\,\hat{\varphi}_{p+1}, \qquad 1 \leqslant j \leqslant p.$$

Очевидно, что система $\hat{\varphi}_1, \ldots, \hat{\varphi}_{p+1}$ удовлетворяет условию $\varphi_i Q_j(\lambda_0) = \delta_{ij}$, $1 \leqslant i, j \leqslant p+1$. Далее по индукции мы можем построить требуемые функционалы $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$ в $\mathfrak{K}$.

Теперь мы выбираем такую окрестность $G(\lambda_0)$ точки λ_0, что аналитическая матрица $\{\varphi_i Q_j(\lambda)\}$ имеет ненулевой определитель для $\lambda \in G(\lambda_0)$. Можно легко доказать, что $\{\varphi_i Q_j(\lambda)\}$ имеет обратную матрицу $\{P_{ij}(\lambda)\}$, аналитическую при $\lambda \in G(\lambda_0)$. Таким образом,

$$\sum_{j=1}^{N} P_{ij}(\lambda)\,\varphi_j Q_k(\lambda) = \delta_{ik}, \qquad \lambda \in G(\lambda_0),$$

и

$$\sum_{j=1}^{N} P_{ij}(\lambda)\,\varphi_j V(\lambda) = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} P_{ij}(\lambda)\,g_k(\lambda)\,\varphi_j Q_k(\lambda_0) =$$
$$= \sum_{k=1}^{N} g_k(\lambda)\,\delta_{ik} = g_i(\lambda), \qquad \lambda \in G(\lambda_0).$$

Из последней формулы очевидно, что g_i — аналитическая функция в G.

18. Теорема (*Титчмарш — Кодаира*). *Пусть Λ — открытый интервал действительной оси и U — открытое множество в комплексной плоскости, содержащее Λ. Пусть $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ — система функций, которые образуют базис для решений уравнения $(\tau - \lambda)\sigma = 0$ для $\lambda \in U$, непрерывны на $I \times U$ и аналитически зависят от λ при λ, лежащих в U. Предположим, что ядро $K(t, s; \lambda)$ резольвенты $R(\lambda; T)$ имеет представление*

$$K(t, s; \lambda) = \begin{cases} \sum_{i, j=1}^{n} \theta_{ij}^{-}(\lambda)\,\sigma_i(t, \lambda)\,\overline{\sigma_j(s, \bar{\lambda})}, & t < s, \\ \sum_{i, j=1}^{n} \theta_{ij}^{+}(\lambda)\,\sigma_i(t, \lambda)\,\overline{\sigma_j(s, \bar{\lambda})}, & t > s, \end{cases}$$

для всех λ *из* $\varrho(T)\cap U$ *и что* $\{\varrho_{ij}\}$ — *положительная матричная мера на* Λ, *связанная с* T *так же, как в теореме* 13. *Тогда функции* $\theta_{ij}^{\pm}(\lambda)$ *аналитичны в* $U\cap\varrho(T)$ *и для любого заданного ограниченного открытого интервала* $(\lambda_1, \lambda_2)\subseteq\Lambda$ *при* $1\leqslant i,\ j\leqslant n$ *мы имеем*

$$\varrho_{ij}((\lambda_1, \lambda_2)) = \lim_{\delta\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda_1+\delta}^{\lambda_2-\delta}[\theta_{ij}^{-}(\lambda-i\varepsilon)-\theta_{ij}^{-}(\lambda+i\varepsilon)]\,d\lambda =$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda_1+\delta}^{\lambda_2-\delta}[\theta_{ij}^{+}(\lambda-i\varepsilon)-\theta_{ij}^{+}(\lambda+i\varepsilon)]\,d\lambda.$$

Доказательство. Для λ из U определим

$$\psi_{ij}^{-}(t,\ s;\ \lambda) = \begin{cases} \sigma_j(t,\ \lambda)\overline{\sigma_i(s,\ \overline{\lambda})}, & t<s, \\ 0, & t>s; \end{cases}$$

$$\psi_{ij}^{+}(t,\ s;\ \lambda) = \begin{cases} 0, & t<s, \\ \sigma_j(t,\ \lambda)\overline{\sigma_i(s,\ \overline{\lambda})}, & t>s. \end{cases}$$

Пусть J — любой фиксированный компактный подинтервал из I. Так как сужения $\{\sigma_i(\cdot,\ \lambda)\,|\,J\}$ линейно независимы в $L_2(J)$ для каждого $\lambda\in U$, то очевидно, что сужения $\{\psi_{ij}^{\pm}(\cdot,\ \cdot,\ \lambda)\,|\,J\times J\}$, $1\leqslant i,j\leqslant n$, образуют линейно независимое семейство функций в $L_2(J\times J)$. Следовательно, непрерывные операторы $Q_{ij}^{+}(\lambda)$ и $Q_{ij}^{-}(\lambda)$ на $L_2(J)$, заданные уравнениями

$$(Q_{ij}^{\pm}(\lambda)f)(t) = \int_J \psi_{ij}^{\pm}(t,\ s;\ \lambda)f(s)\,ds,$$

$$f\in L_2(J), \qquad t\in J, \qquad \lambda\in U,$$

линейно независимы для каждой точки λ из U. Так как функции $\{\sigma_i(\cdot,\ \lambda)\,|\,J\}$ аналитичны в $L_2(J)$ для $\lambda\in U$, то очевидно, что операторы $Q_{ij}^{\pm}$ — аналитические функции от λ, $\lambda\in U$.

Предположим для удобства, что A_J — отображение пространства $L_2(I)$ в $L_2(J)$, которое ставит в соответствие каждой функции f из $L_2(I)$ ее сужение $f\,|\,J$, и пусть B_J обозначает отображение пространства $L_2(J)$ в $L_2(I)$, которое ставит в соответствие каждой g из $L_2(J)$ функцию $g\psi_J$ в $L_2(I)$. Тогда из представления ядра резольвенты мы получим формулу

$$A_J R(\lambda;\ T)B_J f = \sum_{i,\ j=1}^{n}\theta_{ij}^{-}(\lambda)Q_{ij}^{-}(\lambda)f + \sum_{i,\ j=1}^{n}\theta_{ij}^{+}(\lambda)Q_{ij}^{+}(\lambda)f,$$

$$f\in L_2(J), \qquad \lambda\in\varrho(T)\cap U.$$

Пусть в лемме 17 $G=\varrho(T)\cap U$, $V(\lambda)=A_J R(\lambda;\ T)B_J$. Кроме того, пусть $Q_1, \ldots, Q_N$ — обозначения функций $Q_{ij}^{\pm}$, $1\leqslant i, j\leqslant n$, и $g_1, \ldots, g_N$ — соответствующие обозначения функций $\theta_{ij}^{\pm}$. В таком случае очевидно, что $\theta_{ij}^{\pm}$ — аналитические функции в $U\cap\varrho(T)$.

Далее мы установим некоторые свойства оператора $A_J R(\lambda;\ T)B_J$. Сначала заметим, что

(a) $$|(\operatorname{Im}\lambda)A_J R(\lambda;\ T)B_J|\leqslant 1, \qquad \lambda\in\varrho(T).$$

Это следует из неравенства $|R(\lambda;\ T)|\leqslant 1/|\operatorname{Im}\lambda|$ (см. лемму XII.2.1) и из того, что $|A_J|=|B_J|=1$.

Далее, мы имеем

(b) $$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon A_J R(\lambda\pm i\varepsilon;\ T)B_J f=0, \qquad f\in L_2(U),$$

для почти всех λ из $[\lambda_1, \lambda_2]$.

Чтобы доказать (b), заметим, что по теореме XII.2.9(V)

$$\varepsilon R(\lambda\pm i\varepsilon;\ T)f=\int_{\sigma(T)}\frac{\varepsilon}{(\lambda-\mu)\pm i\varepsilon}E(d\mu)f\longrightarrow\mp iE(\{\lambda\})f$$

для каждой f из $L_2(I)$. Так как $\sum|E(\{\lambda\})f|^2\leqslant|f|^2$, где суммирование ведется по всем λ, для которых $E(\{\lambda\})f\neq 0$, то отсюда следует, что $\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon R(\lambda\pm i\varepsilon;\ T)f=0$, за исключением, возможно, счетного множества значений λ. Утверждение (b) следует непосредственно из этого замечания.

(c) Если F — любая непрерывная функция на $[\lambda_1, \lambda_2]$, то

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda_1+\delta}^{\lambda_2-\delta}F(\lambda)A_J\{R(\lambda-i\varepsilon;\ T)-R(\lambda+i\varepsilon;\ T)\}B_J f\,d\lambda=$$
$$=\sum_{i,j=1}^{n}\int_{(\lambda_1,\lambda_2)}F(\lambda)[Q_{ij}^{-}(\lambda)+Q_{ij}^{+}(\lambda)]f\varrho_{ij}(d\lambda), \qquad f\in L_2(J).$$

По теореме XII.2.11 мы имеем

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda_1+\delta}^{\lambda_2-\delta}F(\lambda)\{R(\lambda-i\varepsilon;\ T)-R(\lambda+i\varepsilon;\ T)\}f\,d\lambda=$$
$$=\int_{(\lambda_1,\lambda_2)}F(\lambda)E(d\lambda)f, \qquad f\in L_2(I).$$

По теореме 14(II)

$$\int_{(\lambda_1,\lambda_2)}F(\lambda)E(d\lambda)f(t)=\int_I K(F;\ t,\ s)f(s)\,ds,$$

где

$$K(F;\ t,\ s)=\sum_{i,\ j=1}^{n}\ \int\limits_{(\lambda_1,\ \lambda_2)} F(\lambda)\,\sigma_j(t,\ \lambda)\,\overline{\sigma_i(s,\ \lambda)}\,\varrho_{ij}(d\lambda).$$

Вспоминая определение $Q_{ij}^{\pm}$, мы видим, что для f из $L_2(J)$

$$A_J \int\limits_{(\lambda_1,\ \lambda_2)} F(\lambda)\,E(d\lambda)\,B_J f=\sum_{i,\ j=1}^{n}\ \int\limits_{(\lambda_1,\ \lambda_2)} F(\lambda)\,[Q_{ij}^{-}(\lambda)+Q_{ij}^{+}(\lambda)]\,f\varrho_{ij}(d\lambda).$$

Этим утверждение (с) установлено.

Доказав (а), (b) и (с), мы должны доказать еще лемму 19. Чтобы применить эту лемму к нашему случаю, нужно считать, что $\mathfrak{X}=L_2(J)$, $W=U$, $V(\lambda)=A_J R(\lambda;\ T)\,B_J$, $\varrho_{ij}^{+}=\varrho_{ij}^{-}=\varrho_{ij}$ и что $Q_1,\ \ldots,\ Q_N$, $g_1,\ \ldots,\ g_N$ и $\mu_1,\ \ldots,\ \mu_N$ — соответствующие обозначения матриц $\{Q_{ij}^{\pm}\}$, $\{\theta_{ij}^{\pm}\}$ и $\{\varrho_{ij}^{\pm}\}$ из доказательства теоремы 18.

19. Лемма. *Пусть $\mathfrak{X}$ — комплексное B-пространство и W — окрестность ограниченного интервала $[\lambda_1,\ \lambda_2]$ действительной оси в комплексной плоскости. Пусть $g_1,\ \ldots,\ g_N$ и $Q_1,\ \ldots,\ Q_N$ — аналитические функции, определенные на W, причем g_i — скалярная величина, а Q_i принимают значения из $B(\mathfrak{X})$. Пусть V — операторнозначная функция, определенная формулой*

$$V(\lambda)=\sum_{i=1}^{N} g_i(\lambda)\,Q_i(\lambda),\qquad \lambda\in W.$$

Предположим, что

(a) *существует постоянное число M, такое, что*

$$|\operatorname{Im}\zeta\cdot V(\zeta)|\leqslant M,\qquad \zeta\in W;$$

(b) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon V(\lambda\pm i\varepsilon)\,x=0,\qquad x\in\mathfrak{X},$

для почти всех λ из $[\lambda_1,\ \lambda_2]$ и

(c) *для каждого $i=1,\ 2,\ \ldots,\ N$ существует ограниченная борелевская мера μ_i, такая, что*

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\lambda_1+\delta}^{\lambda_2-\delta}\{V(\lambda-i\varepsilon)\,x-V(\lambda+i\varepsilon)\,x\}\,F(\lambda)\,d\lambda=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\ \int\limits_{(\lambda_1,\ \lambda_2)} F(\lambda)\,Q_i(\lambda)\,x\mu_i(d\lambda),\qquad x\in\mathfrak{X},$$

для каждой непрерывной функции F, определенной на $[\lambda_1, \lambda_2]$. Тогда

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda_1+\delta}^{\lambda_2-\delta}[g_i(\lambda-i\varepsilon)-g_i(\lambda+i\varepsilon)]\,d\lambda=\mu_i((\lambda_1, \lambda_2)),$$
$$i=1, \ldots, N.$$

Доказательство. Пусть λ_0 — точка открытого интервала (λ_1, λ_2) и $\mathfrak{R}$ обозначает линейное пространство всех функционалов на $B(\mathfrak{X})$ вида

$$\varphi(T)=\sum_{j=1}^{k}x_j^*Tx_j,$$

где $x_j^*\in\mathfrak{X}^*$, $x_j\in\mathfrak{X}$. Пусть с помощью леммы 17 функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$ выбраны из $\mathfrak{R}$ таким образом, что существует окрестность $U(\lambda_0)$ точки λ_0, на которой скалярная матрица $\{\varphi_i Q_j(\lambda)\}$ имеет аналитическую обратную матрицу $\{P_{ij}(\lambda)\}$. Тогда из предположения (с) следует, что

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda_1+\delta}^{\lambda_2-\delta}\varphi_j(V(\lambda-i\varepsilon)-V(\lambda+i\varepsilon))F(\lambda)\,d\lambda=$$
$$=\sum_{i=1}^{N}\int_{(\lambda_1, \lambda_2)}F(\lambda)\varphi_jQ_i(\lambda)\mu_i(d\lambda)$$

для каждого $j=1, \ldots, N$ и всех непрерывных функций F, определенных на $[\lambda_1, \lambda_2]$. Если в этой формуле мы заменим функцию $F(\lambda)$ на $F(\lambda)P_{kj}(\lambda)$ и просуммируем по всем j, то получим формулу

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0+}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda_1+\delta}^{\lambda_2-\delta}F(\lambda)\varphi_j(V(\lambda-i\varepsilon)-V(\lambda+i\varepsilon))P_{kj}(\lambda)\,d\lambda=$$
$$=\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\int_{(\lambda_1, \lambda_2)}P_{kj}(\lambda)\varphi_jQ_i(\lambda)F(\lambda)\mu_i(d\lambda)=$$
$$=\sum_{i=1}^{N}\int_{(\lambda_1, \lambda_2)}\sum_{j=1}^{N}P_{kj}(\lambda)\varphi_jQ_i(\lambda)F(\lambda)\mu_i(d\lambda)=\int_{(\lambda_1, \lambda_2)}F(\lambda)\mu_k(d\lambda)$$

при условии, что F обращается в нуль вне $U(\lambda_0)$, поскольку $\sum_{j=1}^{N}P_{kj}(\lambda)\varphi_jQ_i(\lambda)=\delta_{ki}$ только для $\lambda\in U(\lambda_0)$. Тем не менее мы можем написать

$$\sum_{j=1}^{N}\int_{\lambda_1+\delta}^{\lambda_2-\delta} F(\lambda)\,\varphi_j\,(V(\lambda-i\varepsilon)-V(\lambda+i\varepsilon))\,P_{kj}(\lambda)\,d\lambda=$$

$$=\sum_{j=1}^{N}\int_{\lambda_1+\delta}^{\lambda_2-\delta} F(\lambda)\,[P_{kj}(\lambda-i\varepsilon)\,\varphi_jV(\lambda-i\varepsilon)-P_{kj}(\lambda+i\varepsilon)\,\varphi_jV(\lambda+i\varepsilon)]\,d\lambda-$$

$$-\sum_{j=1}^{N}\int_{\lambda_1+\delta}^{\lambda_2-\delta} F(\lambda)\,[P_{kj}(\lambda-i\varepsilon)-P_{kj}(\lambda)]\,\varphi_jV(\lambda-i\varepsilon)\,d\lambda+$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\int_{\lambda_1+\delta}^{\lambda_2-\delta} F(\lambda)\,[P_{kj}(\lambda+i\varepsilon)-P_{kj}(\lambda)]\,\varphi_jV(\lambda+i\varepsilon)\,d\lambda.$$

Из аналитичности функции P_{kj} следует, что функция $\varepsilon^{-1}[P_{kj}(\lambda\pm i\varepsilon)-P_{kj}(\lambda)]$ остается ограниченной, когда ε стремится к нулю. По утверждению (b) $\varepsilon\varphi_jV(\lambda\pm i\varepsilon)\to 0$ для почти всех λ. Таким образом, по утверждению (a) и по теореме Лебега о мажорированной сходимости последние два члена в правой части предыдущей формулы стремятся к нулю, когда $\varepsilon\to 0$. Следовательно,

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\sum_{j=1}^{N}\int_{\lambda_1+\delta}^{\lambda_2-\delta} F(\lambda)\,\varphi_j\,(V(\lambda-i\varepsilon)-V(\lambda+i\varepsilon))\,P_{kj}(\lambda)d\lambda=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0+}\sum_{j=1}^{N}\int_{\lambda_1+\delta}^{\lambda_2-\delta} F(\lambda)\,[P_{kj}(\lambda-i\varepsilon)\,\varphi_jV(\lambda-i\varepsilon)-$$

$$-P_{kj}(\lambda+i\varepsilon)\,\varphi_jV(\lambda+i\varepsilon)]\,d\lambda=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\lambda_1+\delta}^{\lambda_2-\delta} F(\lambda)\,[g_k(\lambda-i\varepsilon)-g_k(\lambda+i\varepsilon)]\,d\lambda,$$

так как $g_k(\lambda)=\sum_{j=1}^{N}P_{kj}(\lambda)\,\varphi_jV(\lambda)$ для λ из $U(\lambda_0)$. Поэтому

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda_1+\delta}^{\lambda_2-\delta} F(\lambda)\,[g_k(\lambda-i\varepsilon)-g_k(\lambda+i\varepsilon)]\,d\lambda=$$

$$=\int_{\lambda_1,\,\lambda_2)} F(\lambda)\,\mu_k(d\lambda).$$

Теперь, используя компактность $[\lambda_1, \lambda_2]$, мы можем найти конечное число непрерывных функций $F_1, \ldots, F_r$ действительного переменного λ, каждая из которых равна нулю вне компактного множества внутри W, таких, что $\sum_{i=1}^{r} F_i(\lambda)=1$ для $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ и

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda_1+\delta}^{\lambda_2-\delta} F_i(\lambda)\left[g_k(\lambda-i\varepsilon)-g_k(\lambda+i\varepsilon)\right]d\lambda = \\ = \int_{(\lambda_1,\lambda_2)} F_i(\lambda)\,\mu_k(d\lambda), \qquad i=1, \ldots, r.$$

Тогда

$$\mu_k((\lambda_1, \lambda_2)) = \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{r}\int_{\lambda_1+\delta}^{\lambda_2-\delta} F_i(\lambda)\,\mu_k(d\lambda) = \\ = \lim_{\delta\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0+}\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda_1+\delta}^{\lambda_2-\delta} F_i(\lambda)\left[g_k(\lambda-i\varepsilon)-g_k(\lambda+i\varepsilon)\right]d\lambda = \\ = \lim_{\delta\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda_1+\delta}^{\lambda_2-\delta}\left[g_k(\lambda-i\varepsilon)-g_k(\lambda+i\varepsilon)\right]d\lambda.$$

В случае когда T — действительный оператор, теорема 18 может быть сформулирована до некоторой степени более удобным способом.

20. Следствие. *В дополнение к предположениям теоремы* 18 *допустим, что* τ — *формальный оператор с действительными коэффициентами, все функции* σ_j *действительны для действительных* t *и* λ *и, наконец, оператор* T *определен системой действительных граничных условий. Тогда мы можем написать*

$$\varrho_{ij}((\lambda_1, \lambda_2)) = \lim_{\delta\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0+}\pi^{-1}\int_{\lambda_1+\delta}^{\lambda_2-\delta}\operatorname{Im}\theta_{ij}^{-}(\lambda-i\varepsilon)\,d\lambda = \\ = \lim_{\delta\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0+}\pi^{-1}\int_{\lambda_1+\delta}^{\lambda_2-\delta}\operatorname{Im}\theta_{ij}^{+}(\lambda-i\varepsilon)\,d\lambda.$$

Доказательство. Утверждение следует из теоремы 18, если только мы установим, что

$$[*] \qquad \theta_{ij}^{-}(\bar\lambda) = \overline{\theta_{ij}^{-}(\lambda)} \quad \text{и} \quad \theta_{ij}^{+}(\bar\lambda) = \overline{\theta_{ij}^{+}(\lambda)}.$$

Так как $\sigma_i(t, \lambda)$ действительны для действительных λ и аналитически зависят от λ, то мы имеем $\overline{\sigma_i(t, \lambda)} = \sigma_i(t, \bar\lambda)$. Поэтому [*] будет иметь место, если только доказано, что $\overline{K(t, s; \lambda)} = K(t, s; \bar\lambda)$. Пусть Γ — отображение пространства $L_2(I)$ в себя, переводящее каждую функцию в комплексно сопряженную с ней функцию. Тогда Γ аддитивно и изометрично, а $\Gamma(\alpha x) = \bar\alpha\Gamma(x)$. Так как T определяется действительным формальным оператором τ и системой действительных граничных условий, то мы имеем $\Gamma T = T\Gamma$. Поэтому $\Gamma R(\lambda; T)\Gamma^{-1} = R(\bar\lambda; T)$ для каждой точки λ в резольвентном множестве оператора T. Следовательно, если ядро $K(t, s; \lambda)$ такое, что

$$\int_I K(t, s; \lambda) f(s)\, ds = (R(\lambda; T) f)(t),$$

то

$$\int_I \overline{K(t, s; \lambda)} f(s)\, ds = (\Gamma R(\lambda; T)\Gamma^{-1} f)(t) = (R(\bar\lambda; T)) f(t).$$

Так как ядро для $R(\bar\lambda; T)$ единственно, то это равенство показывает, что $\overline{K(t, s; \lambda)} = K(t, s; \bar\lambda)$, и наше следствие доказано.

21. Следствие. *Пусть T, Λ, σ_i и т. д. определены, как в теореме* 13. *Тогда положительная матричная мера $\{\varrho_{ij}\}$ на Λ единственна.*

Доказательство. Если бы функции $\sigma_1(\cdot, \lambda), \ldots, \sigma_n(\cdot, \lambda)$ были аналитическими по λ в окрестности U интервала Λ в комплексной плоскости, то этот результат, очевидно, следовал бы из теоремы 18. Однако, поскольку это не предполагается, мы вынуждены выбрать более окольный путь.

Пусть c — любая произвольно выбранная точка из I, и пусть для каждого комплексного λ функции $\hat\sigma_1(\cdot, \lambda), \ldots, \hat\sigma_n(\cdot, \lambda)$ образуют базис в пространстве решений уравнения $\tau\sigma = \lambda\sigma$, причем

$$\hat\sigma_{i+1}^{(k)}(c, \lambda) = \delta_{ik}, \qquad i, k = 0, \ldots, n-1.$$

Тогда по следствию 1.5 $\hat\sigma_i(t, \lambda)$ аналитически зависит от λ равномерно по t на любом компактном подинтервале J интервала I. Пусть для $\lambda \in \Lambda$ коэффициенты a_{ij} и b_{ij} определяются уравнениями

$$\hat\sigma_i(\cdot, \lambda) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\lambda)\sigma_j(\cdot, \lambda),$$

$$\sigma_i(\cdot, \lambda) = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(\lambda)\hat\sigma_j(\cdot, \lambda).$$

Тогда очевидно, что

$$\sum_{p=1}^{n} a_{ip}(\lambda)\, b_{pj}(\lambda) = \sum_{p=1}^{n} b_{ip}(\lambda)\, a_{pj}(\lambda) = \delta_{ij}.$$

Кроме того, дифференцированием второго из написанных выше уравнений получаем, что $b_{ij}(\lambda) = \sigma_i^{(j-1)}(c, \lambda)$, $i, j = 1, \ldots, n$. Таким образом, по лемме 2.16 b_{ij} непрерывно зависит от λ для $\lambda \in \Lambda$. Так как $\{a_{ij}(\lambda)\}$ имеет обратную матрицу $\{b_{ij}(\lambda)\}$, то отсюда следует (см. VII.6.1), что a_{ij} также непрерывно зависит от λ для $\lambda \in \Lambda$.

Предположим, что настоящая теорема не верна. Тогда существуют две различные положительные матричные меры $\{\varrho_{ij}\}$ и $\{\mu_{ij}\}$, определенные на Λ и обладающие свойствами, установленными в теореме 13. Для каждого борелевского множества e с компактным замыканием из Λ_0 положим

$$\hat{\varrho}_{ij}(e) = \sum_{k, l=1}^{n} \int_e b_{ki}(\lambda)\, \overline{b_{lj}(\lambda)}\, \varrho_{kl}(d\lambda),$$

$$\hat{\mu}_{ij}(e) = \sum_{k, l=1}^{n} \int_e b_{ki}(\lambda)\, \overline{b_{lj}(\lambda)}\, \mu_{kl}(d\lambda).$$

Если $[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ — набор из n комплексных чисел, то имеем

$$\sum_{i, j=1}^{n} \hat{\varrho}_{ij}(e)\, \xi_i \bar{\xi}_j = \int_e \left\{ \sum_{k, l=1}^{n} f_k(\lambda)\, \overline{f_l(\lambda)}\, \varrho_{kl}(d\lambda) \right\} \geqslant 0,$$

где $f_k(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i b_{ki}(\lambda)$. Таким образом, $\{\hat{\varrho}_{ij}\}$ — положительная матричная мера, определенная на Λ. Так же мы можем показать, что $\{\hat{\mu}_{ij}\}$ — положительная матричная мера, определенная на Λ. По следствию III.10.6

$$\sum_{i, j=1}^{n} \int_e a_{ik}(\lambda)\, \overline{a_{jl}(\lambda)}\, \hat{\varrho}_{ij}(d\lambda) =$$

$$= \sum_{i, j, p, q=1}^{n} \int_e a_{ik}(\lambda)\, b_{pi}(\lambda)\, \overline{a_{jl}(\lambda)\, b_{qj}(\lambda)}\, \varrho_{pq}(d\lambda) =$$

$$= \int_e \varrho_{kl}(d\lambda) = \varrho_{kl}(e).$$

Аналогично можно показать, что

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} \int_{e} a_{ik}(\lambda)\overline{a_{jl}(\lambda)}\,\hat{\mu}_{ij}(d\lambda) = \mu_{kl}(e).$$

Таким образом, из различия матриц $\{\varrho_{ij}\}$ и $\{\mu_{ij}\}$ следует различие матриц $\{\hat{\varrho}_{ij}\}$ и $\{\hat{\mu}_{ij}\}$.

Пусть ϱ — положительная σ-конечная борелевская мера на Λ, относительно которой все меры ϱ_{kl} непрерывны, а $\{\nu_{kl}\}$ — соответствующая матрица плотностей. Тогда очевидно, что все меры $\hat{\varrho}_{ij}$ будут ϱ-непрерывны, и соответствующая матрица плотностей равна

$$\{\hat{\gamma}_{ij}(\lambda)\} = \left\{ \sum_{k,\,l=1}^{n} b_{ki}(\lambda)\overline{b_{lj}(\lambda)}\,\nu_{kl}(\lambda) \right\}.$$

Следовательно, если мы положим $(Bf)_i(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}(\lambda) f_k(\lambda)$ для каждого набора $F = [f_1, \ldots, f_n]$ борелевских функций, то B будет изометрическим изоморфизмом пространства $L_2(\Lambda, \{\hat{\varrho}_{ij}\})$ в $L_2(\Lambda, \{\varrho_{ij}\})$. Так же устанавливается, что B — изометрический изоморфизм пространства $L_2(\Lambda, \{\hat{\mu}_{ij}\})$ в $L_2(\Lambda, \{\mu_{ij}\})$.

Точно так же, если мы положим $[AF]_i(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(\lambda) f_k(\lambda)$ для каждого набора $F = [f_1, \ldots, f_n]$ борелевских функций, то A будет изометрическим изоморфизмом пространства $L_2(\Lambda, \{\varrho_{ij}\})$ в $L_2(\Lambda, \{\hat{\varrho}_{ij}\})$ и пространства $L_2(\Lambda, \{\mu_{ij}\})$ в $L_2(\Lambda, \{\hat{\mu}_{ij}\})$. Так как $\{a_{ij}(\lambda)\}$ и $\{b_{ij}(\lambda)\}$ — обратные друг другу матрицы, то очевидно, что $AB = BA = I$. Таким образом, A и B являются изометрическими изоморфизмами *на* пространства $L_2(\Lambda, \{\hat{\varrho}_{ij}\})$ и $L_2(\Lambda, \{\mu_{ij}\})$ соответственно. Так как

$$A\left[\int_{c}^{d} f(t)\overline{\sigma_i(t, \lambda)}\,dt\right] = \left[\int_{c}^{d} f(t)\overline{\hat{\sigma}_j(t, \lambda)}\,dt\right].$$

то из теоремы 13 (I) следует, что предел

$$[(\hat{V}f)_i(\lambda)] = \lim_{\substack{c\to a\\ d\to b}} \left[\int_{c}^{d} f(t)\overline{\hat{\sigma}_i(t, \lambda)}\,dt\right]$$

существует в топологии пространства $L_2(\Lambda, \{\hat{\varrho}_{ij}\})$ для каждой f из $L_2(I)$ и определяет изометрический изоморфизм $\hat{V}$ пространства $E(\Lambda) L_2(I)$ на $L_2(\Lambda, \{\hat{\varrho}_{ij}\})$. Аналогично доказывается, что этот же предел существует в топологии пространства $L_2(\Lambda, \{\hat{\mu}_{ij}\})$ для каждой $f \in L_2(I)$ и определяет изометрический изоморфизм $\hat{V}$ пространства $E(\Lambda) L_2(I)$ на $L_2(\Lambda, \{\hat{\mu}_{ij}\})$. Очевидно, что если V такое же, как в теореме 13 (I), то $\hat{V} = AV$.

Из самого определения A вытекает, что для каждого набора $F = [f_1, \ldots, f_n]$ борелевских функций, определенных на Λ, $AF \in L_2(\Lambda, \{\hat{\varrho}_{ij}\})$ тогда и только тогда, когда $F \in L_2(\Lambda, \{\varrho_{ij}\})$. Более того, если G — борелевская функция из торемы 13 (II) и H является набором $[G(\cdot) f_i(\cdot)]$, то из определения A понятно, что $[G(\cdot)(AF)_i(\cdot)] = AH$. Таким образом, из теоремы 13 (II) следует, что для каждой борелевской функции G, определенной на действительной оси и равной нулю вне Λ,

$$\hat{V}\mathfrak{D}(G(T)) = \{[f_i] \in L_2(\Lambda, \{\hat{\varrho}_{ij}\}) \mid [G(\cdot) f_i(\cdot)] \in L_2(\Lambda, \{\varrho_{ij}\})\}$$

и

$$(\hat{V}G(T) f)_i(\lambda) = G(\lambda)(Vf)_i(\lambda), \quad i = 1, \ldots, n, \ \lambda \in \Lambda, \ f \in \mathfrak{D}(G(T)).$$

Таким же способом устанавливается, что все эти утверждения справедливы, если $L_2(\Lambda, \{\hat{\varrho}_{ij}\})$ заменить на $L_2(\Lambda, \{\hat{\mu}_{ij}\})$.

Так как базис $\hat{\sigma}_1(\cdot, \lambda), \ldots, \hat{\sigma}_n(\cdot, \lambda)$ *удовлетворяет условиям теоремы* 15, то, следовательно, $\{\hat{\varrho}_{ij}\} = \{\hat{\mu}_{ij}\}$, что противоречит первоначальному утверждению.

На основании этого следствия мы можем сделать несколько важных упрощений в теоремах 13 и 14.

Сложность вычислений с положительной $(n \times n)$-матричной мерой быстро растет с ростом n. По этой причине мы всегда стремимся сделать n как можно меньше. В доказательстве теоремы 13, т. е. в установлении теоремы 1 в терминах системы $\sigma_1(\cdot, \lambda), \ldots, \sigma_k(\cdot, \lambda)$ линейно независимых решений уравнения $\tau\sigma = \lambda\sigma$, не обязательно, чтобы число k равнялось порядку n оператора τ, т. е. чтобы система $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ была полным базисом для множества всех решений уравнения $\tau\sigma = \lambda\sigma$. Просмотрев доказательство теоремы 13, читатель без труда увидит, что при этом необходимо только, чтобы каждая из функций $W_1(\cdot, \lambda), \ldots, W_m(\cdot, \lambda)$ из теоремы 1 входила в линейную оболочку функций $\sigma_1(\cdot, \lambda), \ldots, \sigma_k(\cdot, \lambda)$. Поэтому в некоторых случаях (см. теорему 4, следствие 5) k может быть значительно меньше, чем n.

По этой причине мы введем следующее определение.

22. Определение. Пусть τ — формально самосопряженный дифференциальный оператор, определенный на интервале I, а T — самосопряженное расширение оператора $T_0(\tau)$. Пусть Λ — открытый подинтервал действительной оси, и для каждого λ из Λ пусть $\sigma_1(\cdot, \lambda), \ldots, \sigma_k(\cdot, \lambda)$ — линейно независимая система решений

уравнения $\tau\sigma=\lambda\sigma$. Предположим, что σ_i непрерывны на $I\times\Lambda$ для $i=1, \ldots, k$. При этом μ — мера и $W_1, \ldots, W_m$ — ядра из теоремы 1. Если для почти всех по μ-мере λ из Λ функции $W_1(\cdot, \lambda), \ldots, W_m(\cdot, \lambda)$ принадлежат линейной оболочке функций $\sigma_1(\cdot, \lambda), \ldots, \sigma_k(\cdot, \lambda)$, то система $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ будет называться *определяющей системой для T на интервале Λ*.

По поводу этого определения стоит сделать несколько замечаний. Заметим, что на бесконечном интервале $(-\infty, +\infty)$ определяющая система для T всегда существует. Например, если n — порядок оператора τ, то мы можем выбрать c в I и потребовать, чтобы $\sigma_{i+1}^{(j)}(c, \lambda)=\delta_i^j$, $i=0, \ldots, n-1$. Заметим также, что теорема 4 описывает один важный случай, когда определяющая система для T может состоять меньше чем из n функций. Конечно, теорема 4 не является последним достижением в этом направлении.

Наконец, мы утверждаем, что понятие определяющей системы зависит только от оператора T и не зависит от способа выбора меры μ и ядер W_i из теоремы 1.

Для доказательства допустим, что $\hat{\mu}$ и $\hat{W}_i$, $i=1, \ldots, m$, являются второй мерой и второй системой ядер, обладающих свойствами, описанными в теореме 1. Предположим, что $\sigma_1, \ldots$ $\ldots, \sigma_k$ — такие же, как в определении 22, и функции $W_i(\cdot, \lambda)$ лежат в линейной оболочке функций $\sigma_1(\cdot, \lambda), \ldots, \sigma_k(\cdot, \lambda)$ для почти всех по μ-мере λ. Мы покажем, что каждая точка λ_0 из Λ имеет окрестность N, такую, что функции $\hat{W}_i(\cdot, \lambda)$ лежат в линейной оболочке функций $\sigma_1(\cdot, \lambda), \ldots, \sigma_k(\cdot, \lambda)$ для почти всех по $\hat{\mu}$-мере $\lambda\in N$. Так как Λ может быть покрыто счетным семейством таких окрестностей N, то мы придем к требуемому заключению.

Пусть $\lambda_0\in\Lambda$ и выбрана некоторая точка c из I. Положим

$$v_i(\lambda)=[\sigma_i(c, \lambda), \sigma_i^{(1)}(c, \lambda), \ldots, \sigma_i^{(n-1)}(c, \lambda)], \quad i=1, \ldots, k,$$

и найдем векторы $v_i=[v_i^{(0)}, \ldots, v_i^{(n-1)}]$, $i=k+1, \ldots, n$, в n-мерном евклидовом пространстве, линейно независимые от векторов $v_i(\lambda_0)$, $i=1, \ldots, k$. Пусть $\sigma_{k+1}(\cdot, \lambda), \ldots, \sigma_n(\cdot, \lambda)$ — единственное решение уравнения $\tau\sigma=\lambda\sigma$, определенное начальными условиями $\sigma_i^{(j)}(c, \lambda)=v_i^{(j)}$, $j=0, \ldots, n-1$, $i=k+1, \ldots, n$. В силу следствия 15 функции $v_i(\lambda)$ непрерывно зависят от λ, $i=1, \ldots, n$. Так как векторы $v_1(\lambda), \ldots, v_k(\lambda), v_{k+1}, \ldots, v_n$ линейно независимы при $\lambda=\lambda_0$ (так что $(n\times n)$-определитель, составленный из их компонент, не обращается в нуль), то существует достаточно малый подинтервал N из Λ, содержащий λ_0, такой, что $v_1(\lambda), \ldots, v_k(\lambda)$, $v_{k+1}, \ldots, v_n$ линейно независимы для $\lambda\in N$. Следовательно, $\sigma_1(\cdot, \lambda), \ldots, \sigma_n(\cdot, \lambda)$ линейно независимы при λ из N, и поэтому для

$\lambda \in N$ они образуют базис пространства всех решений уравнения $\tau\sigma = \lambda\sigma$. Следовательно, мы можем написать

$$W_i(\cdot, \lambda) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\lambda)\,\sigma_j(\cdot, \lambda), \qquad i = 1, \ldots, m,$$

$$\hat{W}_i(\cdot, \lambda) = \sum_{j=1}^{n} \hat{a}_{ij}(\lambda)\,\sigma_j(\cdot, \lambda), \qquad i = 1, \ldots, m$$

По предположению, если $j > k$, то $a_{ij}(\lambda) = 0$ для почти всех по μ-мере $\lambda \in N$. Мы хотим доказать, что $\hat{W}_i(\cdot, \lambda)$ лежат в линейной оболочке функций $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ для почти всех по $\hat{\mu}$-мере λ из N, т. е. мы хотим доказать, что $\hat{a}_{ij}(\lambda) = 0$ для почти всех по $\hat{\mu}$-мере λ из N, если $j > k$. Если это не верно, то существуют i_0 и $j_0 > k$, такие, что $\hat{a}_{i_0 j_0}(\lambda)$ не удовлетворяет требуемому условию. При доказательстве теоремы 13 было показано, что матричная мера $\{\varrho_{ij}\}$ из теоремы 13 (которая единственна согласно следствию 20) задается формулой

$$\varrho_{ij}(e) = \sum_{p=1}^{m} \int_e a_{pj}(\lambda)\,\overline{a_{pi}(\lambda)}\,\mu(d\lambda)$$

для каждого борелевского множества e с компактным замыканием, содержащимся в N. Из тех же соображений

$$\varrho_{ij}(e) = \sum_{p=1}^{m} \int_e \hat{a}_{pj}(\lambda)\,\overline{\hat{a}_{pi}(\lambda)}\,\hat{\mu}(d\lambda).$$

Первое из этих равенств показывает, что

$$\varrho_{j_0 j_0}(e) = \int_e \sum_{p=1}^{m} |a_{pj_0}(\lambda)|^2\,\mu(d\lambda) = 0$$

для любого борелевского множества e с компактным замыканием, содержащимся в N. С другой стороны, так как $\sum_{p=1}^{m} |\hat{a}_{pj_0}(\lambda)|^2$ обращается в нуль не для почти всех по $\hat{\mu}$-мере $\lambda \in N$, то существует борелевское множество e с компактным замыканием, содержащимся в N, такое, что

$$\varrho_{j_0 j_0}(e) = \int_e \sum_{p=1}^{m} |\hat{a}_{pj_0}(\lambda)|^2\,\hat{\mu}(d\lambda) \neq 0.$$

Это противоречие доказывает наше утверждение.

Используя понятие определяющей системы для T, теоремы 13 и 14 можно сформулировать следующим образом.

23. Теорема. *Пусть τ — формально самосопряженный дифференциальный оператор порядка n, определенный на интервале I с концами a, b. Пусть T — самосопряженное расширение оператора $T_0(\tau)$, а Λ — открытый интервал действительной оси. Предположим, что $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ — определяющая система для T на Λ. Тогда существует положительная $(k \times k)$-матричная мера $\{\hat{\varrho}_{ij}\}$, определенная на Λ, такая, что*

(I) *предел*

$$[(Vf)_i(\lambda)] = \lim_{\substack{c \to a \\ d \to b}} \left[\int_c^d f(t) \overline{\sigma_i(t, \lambda)}\, dt \right]$$

существует в топологии пространства $L_2(\Lambda, \{\hat{\varrho}_{ij}\})$ для каждой $f \in L_2(I)$ и определяет изометрический изоморфизм V пространства $E(\Lambda) L_2(I)$ на все $L_2(\Lambda, \{\hat{\varrho}_{ij}\})$;

(II) *для каждой борелевской функции G, определенной на действительной оси и обращающейся в нуль вне Λ,*

$$V\mathfrak{D}(G(T)) = \{[f_i] \in L_2(\Lambda, \{\hat{\varrho}_{ij}\}) \mid [Gf_i] \in L_2(\Lambda, \{\hat{\varrho}_{ij}\})\}$$

и

$$(VG(T)f)_i(\lambda) = G(\lambda)(Vf)_i(\lambda), \qquad i = 1, \ldots, k, \quad \lambda \in \Lambda, \quad f \in \mathfrak{D}(G(T)).$$

Доказательство почти совпадает с доказательством теоремы 13, и если читатель просмотрит доказательство теоремы 13, то он без труда сможет произвести несколько нужных изменений. Таким же образом, делая некоторые очевидные изменения в доказательстве теоремы 14, мы получаем следующий результат.

24. Теорема. *Пусть T, Λ, $\{\hat{\varrho}_{ij}\}$ и т. д. определены, как в теореме 23. Пусть λ_1 и λ_0 — концы интервала Λ. Тогда*

(I) *оператор, обратный изометрическому изоморфизму V пространства $E(\Lambda) L_2(I)$ на $L_2(\Lambda, \{\hat{\varrho}_{ij}\})$, задается формулой*

$$(V^{-1}F)(t) = \lim_{\substack{\mu_0 \to \lambda_0 \\ \mu_1 \to \lambda_1}} \int_{\mu_0}^{\mu_1} \left\{ \sum_{i, j=1}^{k} F_i(\lambda) \sigma_j(t, \lambda) \hat{\varrho}_{ij}(d\lambda) \right\},$$

где $F = [F_1, \ldots, F_k] \in L_2(\Lambda, \{\hat{\varrho}_{ij}\})$, причем предел существует в топологии пространства $L_2(I)$;

(II) *если ограниченная борелевская функция G обращается в нуль вне борелевского множества e, замыкание которого компактно и содержится в Λ, то $G(T)$ имеет представление*

$$(G(T)f)(t) = \int_I f(s) K(G; t, s)\, ds,$$

где

$$K(G;\,t,\,s)=\sum_{i,\,j=1}^{k}\int_{e}G(\lambda)\,\sigma_j(t,\,\lambda)\,\overline{\sigma_i(s,\,\lambda)}\,\hat{\varrho}_{ij}(d\lambda).$$

Более того, для любого компактного интервала $J\subseteq I$

$$\sup_{t\in J}\int_{I}|K(G;\,t,\,s)|^2\,ds<\infty.$$

Остальную часть настоящего параграфа мы посвящаем формулировке и доказательству ряда положений, которые облегчают применение основных результатов, доказанных до сих пор.

25. Теорема. *Пусть* τ, T, $\sigma_1,\,\ldots,\,\sigma_n$ *определены, как в теореме* 13. *Подсистема* $\sigma_1,\,\ldots,\,\sigma_k$ *системы* $\sigma_1,\,\ldots,\,\sigma_n$ *является определяющей системой для* T *тогда и только тогда, когда* $\varrho_{jj}(e)=0$ *при* $j>k$ *для каждого борелевского множества* e *с компактным замыканием из* Λ. *Если подсистема* $\sigma_1,\,\ldots,\,\sigma_k$ — *определяющая система для* T *и* $\{\varrho_{ij}\}$, $i,\,j=1,\,\ldots,\,n$, — *матричная мера, из теоремы* 13, *то матричная мера* $\{\hat{\varrho}_{ij}\}$, $i,\,j=1,\,\ldots,\,k$, *из теоремы* 23 *определяется однозначно и* $\hat{\varrho}_{ij}=\varrho_{ij}$, $i,\,j=1,\,\ldots,\,k$; $\varrho_{ij}=0$, *если* $i>k$ *или* $j>k$.

Доказательство. Предположим, что $\sigma_1,\,\ldots,\,\sigma_k$ — определяющая система для T. Тогда из теоремы 23 очевидно, что если мы определим $\{\varrho_{ij}\}$, $i,\,j=1,\,\ldots,\,n$, формулами

$$[*]\qquad \begin{aligned}&\varrho_{ij}(e)=\hat{\varrho}_{ij}(e), && i,\,j=1,\,\ldots,\,k,\\ &\varrho_{ij}(e)=0, && \text{для } i>k \text{ или } j>k,\end{aligned}$$

то получим матричную меру $\{\varrho_{ij}\}$, которая по следствию 21 обязана быть такой же, как матричная мера из теоремы 13. В частности, значение $\hat{\varrho}_{ij}$ единственно. Таким образом, нам остается доказать, что если $\varrho_{jj}(e)=0$ для $j>k$, то $\sigma_1,\,\ldots,\,\sigma_k$ является определяющей системой для T. Предположим, что это не так, и пусть μ и W_i, $i=1,\,\ldots,\,m$, определены, как в теореме 1. Тогда

$$W_i(\cdot,\,\lambda)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(\lambda)\,\sigma_j(\cdot,\,\lambda),\quad \lambda\in\Lambda,\quad i=1,\,\ldots,\,m,$$

где a_{ij} — некоторые коэффициенты. Так как мы предположили, что система $\sigma_1,\,\ldots,\,\sigma_k$ не является определяющей, то какой-то коэффициент $a_{i_0j_0}$ для $j_0>k$ не будет обращаться в нуль почти всюду по мере μ. Так как из доказательства теоремы 13 (и из единственности матрицы $\{\varrho_{ij}\}$) следует, что

$$\varrho_{j_0j_0}(e)=\int_{e}\left\{\sum_{i=1}^{m}|a_{ij_0}(\lambda)|^2\right\}\mu(d\lambda),$$

то $\varrho_{j_0 j_0}$ отлично от нуля на каждом борелевском множестве с компактным замыканием из Λ, что противоречит предположению.

26. Следствие. *Пусть τ, T и т. д. такие же, как в определении* 22. *Тогда матричная мера $\{\hat{\varrho}_{ij}\}$ из теоремы* 23 *единственна.*

Доказательство. Если бы определяющая система $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ из теоремы 23 была частью базиса $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ со свойствами из теоремы 13, то единственность матрицы $\{\hat{\varrho}_{ij}\}$ следовала бы из предыдущей теоремы. Кроме того, в рассуждениях, предшествовавших формулировке теоремы 23, было доказано, что если λ_0 — любая точка из Λ, то существует малый открытый подинтервал $N \subset \Lambda$, содержащий λ_0 и такой, что система сужений $\hat{\sigma}_1, \ldots, \hat{\sigma}_k$ системы $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ на $I \times N$ является подсистемой как раз такого базиса. Таким образом, из предыдущей теоремы следует, что если $\{\hat{\varrho}_{ij}\}$ — матричная мера из теоремы 23, то величины $\hat{\varrho}_{ij}(e)$ однозначно определяются для каждого $e \subseteq N$. Так как Λ — объединение последовательности окрестностей такого же типа, как N, то отсюда непосредственно следует единственность матрицы $\{\hat{\varrho}_{ij}\}$.

27. Теорема. *Пусть τ, T, Λ, $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ определены так же, как в теореме* 18. *Тогда если для $j > k$ функции $\theta_{jj}^{+}(\lambda)$ (или функции $\theta_{jj}^{-}(\lambda)$) из теоремы* 18 *могут быть продолжены аналитически на всю окрестность U интервала Λ, то $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ является определяющей системой для T.*

Доказательство. Если $\theta_{jj}^{+}(\cdot)$ являются аналитическими для $j > k$, то из теоремы 18 следует, что $\varrho_{jj}(e) = 0$ для $j > k$ и для каждого борелевского множества e с компактным замыканием из Λ. Таким образом, по теореме 25 $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ является определяющей системой для T.

28. Следствие. *Пусть T, Λ, σ_i и т. д. определены так же, как в теореме* 18. *Предположим, что в окрестности интервала Λ для каждого λ, для которого $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$, линейная оболочка $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ содержит пространство всех решений уравнения $\tau\sigma = \lambda\sigma$, интегрируемых в квадрате вблизи конца a интервала I и удовлетворяющих всем граничным условиям в точке a из семейства граничных условий, определяющих T. Тогда $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ — определяющая система для T.*

Доказательство. Для определенности предположим, что a — левый конец интервала I. По следствию 3.12 ядро $K(t, s; \lambda)$ резольвенты из теоремы 18 имеет вид

$$K(t, s; \lambda) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}(\lambda)\, \sigma_i(t, \lambda)\, \overline{\sigma_j(s, \bar{\lambda})}, \quad s < t,$$

где δ_{ij}—некоторые коэффициенты. Но это значит, что для $j > k$ все коэффициенты θ_{jj}^{+} из теоремы 18 обращаются в нуль. Теперь наше утверждение непосредственно следует из предыдущей теоремы.

29. Следствие. *Пусть* τ, T, Λ, $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ *определены, как в теореме* 18. *Точка* λ *из* Λ *принадлежит резольвентному множеству оператора* T *тогда и только тогда, когда функции* θ_{jj}^{+} *(или функции* θ_{jj}^{-}*) из теоремы* 18 *могут быть аналитически продолжены в окрестность этой точки.*

Доказательство. Из теоремы 18 очевидно, что если θ_{jj}^{+} могут быть продолжены аналитически в окрестность N точки λ, то $\varrho_{jj}(e)$ обращается в нуль для каждого $j = 1, \ldots, n$ и каждого борелевского подмножества $e \subset N$. Тогда из теоремы 25 следует, что $\varrho_{ij}(e) = 0$ для всех $i, j = 1, \ldots, n$, и по следствию 15 λ принадлежит резольвентному множеству оператора T.

Обратно, пусть λ принадлежит резольвентному множеству оператора T. Тогда по теореме 18 θ_{ij}^{+}—аналитическая функция в окрестности точки λ.

Доказательство для θ_{ij}^{-} проводится совершенно аналогично.

30. Следствие. *Пусть* τ, T, Λ, σ_i, θ_{ij}^{+} *и т. д. определены, как в теореме* 18. *Тогда изолированная точка* $\lambda_0 \in \Lambda\sigma(T)$ *является изолированной особой точкой функции* θ_{ij}^{+} *(или функции* θ_{ij}^{-}*). Более того,* $\varrho_{ij}(\{\lambda_0\})$ *равна вычету функции* θ_{ij}^{+} *(или* θ_{ij}^{-}*) в точке* λ_0.

Доказательство. Первое утверждение получается непосредственно из предыдущего следствия. Из следствия 15 и теоремы 18 вытекает, что если a и b—две точки, такие, что $(a, b) \cap \sigma(T) = \{\lambda_0\}$, то

$$[*] \qquad \varrho_{ij}(\{\lambda_0\}) = \lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{\delta\to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} (\theta_{ij}^{+}(\lambda - i\delta) - \theta_{ij}^{+}(\lambda + i\delta))\, d\lambda.$$

Если $C_{\delta,\varepsilon}$ обозначает прямоугольник с вершинами $a+\varepsilon+i\delta$, $a+\varepsilon-i\delta$, $b-\varepsilon-i\delta$, $b-\varepsilon+i\delta$, то, поскольку θ_{ij}^{+} непрерывна в окрестности точек $b-\varepsilon$ и $a+\varepsilon$, очевидно, что

$$\lim_{\delta\to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} (\theta_{ij}^{+}(\lambda - i\delta) - \theta_{ij}^{+}(\lambda + i\delta))\, d\lambda = \lim_{\delta\to 0} \int_{C_{\delta,\varepsilon}} \theta_{ij}^{+}(\zeta)\, d\zeta.$$

С другой стороны, если C обозначает любую достаточно малую окружность вокруг λ_0, то из теоремы Коши очевидно, что

$$\int_C \theta_{ij}^+(\zeta)\,d\zeta = \int_{C_{\delta,\,\varepsilon}} \theta_{ij}^+(\zeta)\,d\zeta.$$

Таким образом, из [*] сразу получается, что

$$\varrho_{ij}(\{\lambda_0\}) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \theta_{ij}^+(\zeta)\,d\zeta.$$

Совершенно аналогично доказывается, что

$$\varrho_{ij}(\{\lambda_0\}) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \theta_{ij}^-(\zeta)\,d\zeta.$$

Спектральная теория, развитая в первых четырех и в настоящем параграфе, дает нам возможность устанавливать конкретный вид спектрального разложения большого числа дифференциальных операторов. Прежде всего рассмотрим самый простой случай — оператор первого порядка $\tau_1 = (1/i)(d/dt)$ на интервале $[0, 1]$. В силу замечаний к определению 2.29 два линейных функционала $f \to f(0)$ и $f \to f(1)$ образуют полную систему граничных значений оператора τ_1, и самое общее самосопряженное расширение T_θ оператора $T_0(\tau)$ определяется граничным условием $f(0) = e^{i\theta}f(1)$. Так как $[0, 1]$ замкнут, то из теорем 4.1 и 4.2 следует, что спектр оператора T_θ состоит исключительно из изолированных точек, каждая такая точка является собственным значением оператора T_θ и он имеет полную систему ортонормальных собственных функций. Очевидно, что уравнение $\tau_1\sigma = \lambda\sigma$ имеет единственное решение $e^{i\lambda t}$, удовлетворяющее граничному условию $f(0) = e^{i\theta}f(1)$ тогда и только тогда, когда λ сравнимо с $-\theta$ по модулю 2π. Таким образом, собственные значения оператора T_θ совпадают с числами $2\pi n - \theta$, где n — произвольное положительное или отрицательное целое число. Функции $e^{(2\pi i n - i\theta)t}$ являются соответствующими собственными функциями и к тому же нормированными. Из теоремы 4.2(c) известно, что эта система функций *полна*.

По замечаниям к определению 2.29 формальный дифференциальный оператор $(1/i)(d/dt)$, если он рассматривается на интервале $[0, \infty)$, не может приводить к самосопряженному оператору в гильбертовом пространстве. Поэтому следующий пример, к которому мы обратимся, — это формальный дифференциальный оператор $\tau_2 = (1/i)\,(d/dt)$, определенный на интервале $(-\infty, +\infty)$. В силу случая III после определения 2.29 τ_2 не имеет граничных значений, так что $T_0(\tau_2)$ имеет единственное самосопряженное расширение $T_1(\tau_2)$. Базисом пространства решений уравнения $\tau_2\sigma=\lambda\sigma$ является единственная функция $e^{i\lambda t}$. В замечаниях после 3.16 мы выразили разложение резольвенты оператора $T_1(\tau)$ в терминах этого «базиса» и нашли, что постоянные θ_{ij}^{+} из теоремы Титчмарша—Кодаиры (18) равны

$$\theta^{+}(\lambda)=\theta_{11}^{+}(\lambda)=-i, \qquad \operatorname{Im}\lambda<0,$$

$$\theta^{+}(\lambda)=\theta_{11}^{+}(\lambda)=0, \qquad \operatorname{Im}\lambda>0.$$

Таким образом, по теореме Титчмарша—Кодаиры

$$\varrho(\lambda_1,\lambda_2)=\varrho_{11}(\lambda_1,\lambda_2)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}d\lambda=\frac{1}{2\pi}(\lambda_2-\lambda_1),$$

так что ϱ есть умноженная на $1/2\pi$ лебегова мера на λ-оси. Следовательно, непосредственно из теорем 13 и 14 мы можем получить следующую теорему.

31. Теорема. *Для каждой функции f из $L_2(-\infty,+\infty)$ предел*

$$(Ff)(\lambda)=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A}f(t)\,e^{-it\lambda}\,dt$$

существует в топологии пространства $L_2(-\infty,+\infty)$ и определяет изометрический изоморфизм пространства $L_2(-\infty,+\infty)$ на себя, обращение которого дается формулой

$$(F^{-1}f)(t)=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A}f(\lambda)\,e^{it\lambda}\,d\lambda,$$

где предел существует в топологии пространства $(L_2-\infty,\infty)$. Более того,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\lambda|^2\,|(Ff)(\lambda)|^2\,d\lambda<\infty$$

тогда и только тогда, когда f абсолютно непрерывна и f' принадлежит $L_2(-\infty,+\infty)$, и в этом случае

$$(Ff')(\lambda)=i\lambda(Ff)(\lambda), \qquad -\infty<\lambda<+\infty.$$

Первая часть этой теоремы совпадает с теоремой Планшереля (XI.3.21); вторая часть дает полезную связь между преобразованием Фурье и дифференциальным оператором. Конечно, формулировка второй части предыдущей теоремы отнюдь не исчерпывает содержания теоремы 13 (II), в которой указана связь между интегралом Фурье и более высокими производными.

После формальных дифференциальных операторов первого порядка мы будем рассматривать формальные дифференциальные операторы второго порядка. Начнем наше знакомство с этим важным классом операторов изучением формального дифференциального оператора $\tau_3 = -(d/dt)^2$, определенного на отрезке $[0, 1]$. Существует много разнообразных возможных систем самосопряженных граничных условий, которые могут быть наложены на τ_3, но мы обратим наше внимание на четыре системы:

система A: $f(0)=0, \quad f(1)=0,$
система B: $f'(0)=0, \quad f'(1)=0,$
система C: $f(0)=0, \quad f'(1)=0,$
система D: $f(0)=f(1), \quad f'(0)=f'(1).$

Все они, за исключением D, — распадающиеся системы. (Здесь сто́ит мимоходом заметить, что наиболее общая самосопряженная система распадающихся граничных условий для τ_3 охарактеризована следствием 2.31.) Ситуация снова такая же, как в § 4: интервал конечный, спектр дискретный и система собственных функций полна. При граничных условиях A и C единственное решение уравнения $\tau_3\sigma = \lambda\sigma$, удовлетворяющее граничному условию $\sigma(0)=0$, равно $\sin\sqrt{\lambda}t$. Следовательно, при граничных условиях A собственные значения определяются из уравнения $\sin\sqrt{\lambda}=0$. Поэтому в случае A собственные значения λ — числа вида $(n\pi)^2$, $n \geqslant 1$, а в случае C — числа вида $\{(n+1/2)\pi\}^2$, $n \geqslant 0$. В случае A нормированные собственные функции равны $\{2^{-1/2}\sin n\pi t\}$, а в случае C равны $\{2^{-1/2}\sin(n+1/2)\pi t\}$. Таким образом, применяя теорему 4.2 (c), мы в состоянии установить полноту различных наборов синус-функций.

В случае B единственное решение уравнения $\tau_3\sigma=\lambda\sigma$, удовлетворяющее условию $\sigma'(0)=0$, равно $\cos\sqrt{\lambda}x$. Следовательно, собственные значения определяются из уравнения $(\cos\sqrt{\lambda}x)'|_{x=1}=0$, т. е. из уравнения $\sin\sqrt{\lambda}=0$. Поэтому в случае B собственные значения — числа вида $(n\pi)^2$, а нормированные собственные функции равны

$$1, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\pi x, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2\pi x, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 3\pi x, \quad \ldots .$$

Наконец, обратимся к случаю D. Функции $\sin\sqrt{\lambda}x$ и $\cos\sqrt{\lambda}x$ вместе образуют базис системы решений уравнения $\tau_3\sigma=\lambda\sigma$. Для того чтобы существовала ненулевая линейная комбинация $f(x)=a\sin\sqrt{\lambda}x+b\cos\sqrt{\lambda}x$ этих функций, удовлетворяющая условиям $f(0)=f(1)$, $f'(0)=f'(1)$, т. е. для того чтобы существовали два неравных нулю числа a, b, таких, что

$$b-a\sin\sqrt{\lambda}-b\cos\sqrt{\lambda}=0,$$
$$a-a\cos\sqrt{\lambda}+b\sin\sqrt{\lambda}=0,$$

необходимо и достаточно, чтобы определитель

$$\begin{vmatrix} -\sin\sqrt{\lambda} & 1-\cos\sqrt{\lambda} \\ 1-\cos\sqrt{\lambda} & \sin\sqrt{\lambda} \end{vmatrix} = 2\cos\sqrt{\lambda}-2$$

обращался в нуль. Следовательно, собственными значениями в случае D являются числа вида $(2\pi n)^2$, $n\geqslant 0$. С нулевым собственным значением связана единственная нормированная собственная функция $\varphi_0(t)=1$. Когда $\lambda=(2\pi n)^2$, $n\geqslant 1$, оба решения $\cos 2\pi nt$ и $\sin 2\pi nt$ уравнения $\tau_3\sigma=\lambda\sigma$ удовлетворяют условиям $f(0)=f(1)$, $f'(0)=f'(1)$. Таким образом, в случае D с каждым собственным значением $\lambda=(2\pi n)^2$, $n\geqslant 1$, связано двумерное пространство собственных функций. Ортонормированный базис для этих пространств образуют функции

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2\pi nx, \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2\pi nx.$$

Таким образом, в случае D мы приходим к разложениям по полной ортонормальной системе функций Фурье

$$1,\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2\pi x,\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2\pi x,\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 4\pi x,\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 4\pi x,\ \ldots .$$

Теперь рассмотрим несколько отдельных примеров. Предположим, что мы изучаем формальный дифференциальный оператор $\tau_4=-(d/dt)^2$ на интервале $[0, \infty)$. Базис для пространства решений уравнения $\tau_4\sigma=\lambda\sigma$ образуют функции $e^{i\sqrt{\lambda}t}$ и $e^{-i\sqrt{\lambda}t}$. Если $\lambda=-1$, то первое из этих решений интегрируемо в квадрате, а второе нет. Следовательно (поскольку оператор τ_4 действительный, его индексы дефекта совпадают), индексы дефекта оператора τ_4 равны $(1, 1)$. Согласно замечаниям к определению 2.21, τ_4 не имеет граничных значений в бесконечности. Более того, самое общее самосопряженное расширение T_k оператора $T_0(\tau_4)$ определяется единственным граничным условием

$$f(0)+kf'(0)=0, \qquad -\infty<k\leqslant\infty.$$

Разделим дальнейшее изучение на четыре случая:

случай (I): $k=0$, граничное условие $f(0)=0$,

случай (II): $k=\infty$, граничное условие $f'(0)=0$,

случай (III): $-\infty<k<0$,

случай (IV): $0<k<\infty$.

Сначала найдем точечный спектр оператора T_k. Так как при $\lambda > 0$ никакая линейная комбинация решений $e^{i\sqrt{\lambda}x}$ и $e^{-i\sqrt{\lambda}x}$ не интегрируема в квадрате, то точки положительной части действительной оси не могут принадлежать точечному спектру оператора T_k. Так как базис для пространства решений уравнения $\tau_4\sigma = 0$ задается функциями 1 и x, то $\lambda = 0$ также не может принадлежать точечному спектру оператора T_k. Если λ отрицательно, то мы можем написать два решения $e^{i\sqrt{\lambda}x}$ и $e^{-i\sqrt{\lambda}x}$ в виде $e^{\sqrt{-\lambda}x}$ и $e^{-\sqrt{-\lambda}x}$. Первое из них не принадлежит $L_2(0, \infty)$, а второе принадлежит. Функция $e^{-\sqrt{-\lambda}x}$ удовлетворяет граничному условию $f(0)+kf'(0)=0$ тогда и только тогда, когда $1-k\sqrt{-\lambda}=0$, т. е. тогда и только тогда, когда k положительно и $\lambda = -(1/k^2)$. Таким образом, только в случае (IV) оператор T_k имеет непустой точечный спектр, который состоит из одной точки $\lambda = -(1/k^2)$ с соответствующей нормированной собственной функцией $2^{1/2}k^{-1/2}e^{-x/k}$.

Далее перейдем к анализу непрерывного спектра. Сначала рассмотрим интервал $-\infty < \lambda < 0$. Для λ из левой полуплоскости удобно использовать базис $e^{\sqrt{-\lambda}t}$, $e^{-\sqrt{-\lambda}t}$ для множества решений уравнения $\tau_4\sigma = \lambda\sigma$.

В случае (I) функция $e^{\sqrt{-\lambda}t} - e^{-\sqrt{-\lambda}t}$ удовлетворяет граничному условию $f(0) = 0$. Функция $e^{-\sqrt{-\lambda}t}$ интегрируема в квадрате в окрестности точки $t = \infty$. Следовательно, по теореме 3.16, если $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$, то резольвента $R(\lambda; T_0)$ — интегральный оператор с ядром

$$-\frac{(e^{\sqrt{-\lambda}s} - e^{-\sqrt{-\lambda}s})\, e^{-\sqrt{-\lambda}t}}{2\sqrt{-\lambda}}, \quad s < t,$$

$$-\frac{(e^{\sqrt{-\lambda}t} - e^{-\sqrt{-\lambda}t})\, e^{-\sqrt{-\lambda}s}}{2\sqrt{-\lambda}}, \quad t < s.$$

Поэтому матрица $\theta_{ij}^{-}(\lambda)$ из теоремы 18 равна

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2\sqrt{-\lambda}} & -\dfrac{1}{2\sqrt{-\lambda}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как все ее элементы аналитичны при $-\infty < \lambda < 0$, то из следствия 29 вытекает, что весь интервал $-\infty < \lambda < 0$ принадлежит резольвентному множеству оператора T_0.

Читатель без труда может провести совершенно аналогичные вычисления и получить совершенно аналогичный результат в случае (II). В случаях (III) и (IV) функция

$$(k\sqrt{-\lambda} - 1)\, e^{\sqrt{-\lambda}t} + (k\sqrt{-\lambda} + 1)\, e^{-\sqrt{-\lambda}t}$$

удовлетворяет условию $f(0)+kf'(0)=0$. Следовательно, по теореме 3.16 резольвента $R(\lambda;\ T_0)$ — интегральный оператор с ядром

$$\frac{\{(k\sqrt{-\lambda}-1)\,e^{\sqrt{-\lambda}s}+(k\sqrt{-\lambda}+1)\,e^{-\sqrt{-\lambda}s}\}\,e^{-\sqrt{-\lambda}t}}{2k\lambda+2\sqrt{-\lambda}},\qquad s<t,$$

$$\frac{\{k(\sqrt{-\lambda}-1)\,e^{\sqrt{-\lambda}t}+k(\sqrt{-\lambda}+1)\,e^{-\sqrt{-\lambda}t}\}\,e^{-\sqrt{-\lambda}s}}{2k\lambda+2\sqrt{-\lambda}},\qquad t<s.$$

Поэтому матрица $\theta_{ij}^{-}(\lambda)$ равна

$$\begin{pmatrix} \dfrac{k\sqrt{-\lambda}+1}{2(k\lambda+\sqrt{-\lambda})} & \dfrac{k\sqrt{-\lambda}-1}{2(k\lambda+\sqrt{-\lambda})} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В случае (III) k отрицательно, поэтому все элементы этой матрицы являются аналитическими функциями для отрицательных λ. Таким образом, в случае (III) вся отрицательная часть действительной оси принадлежит резольвентному множеству оператора T_k. В случае (IV) первый элемент предыдущей матрицы имеет полюс в точке $\lambda=-1/k^2$. (Заметим, что функция $[k\sqrt{-\lambda}-1]/[2(k\lambda+\sqrt{-\lambda})]$ является аналитической также и в этой точке.) Вычет функции $[k\sqrt{-\lambda}+1]/[2(k\lambda+\sqrt{-\lambda})]$ в этой точке равен $2k^{-1}$. Таким образом, согласно следствию 30 и замечаниям к теореме 16, ортонормальная собственная функция, соответствующая собственному значению $\lambda=-1/k^2$, есть $2^{1/2}k^{-1/2}e^{-kx}$. Этот факт уже был отмечен, однако приведенный здесь вывод особенно интересен, так как он показывает, что нормирующие множители для ортогональных собственных функций дифференциального оператора могут быть получены прямо из теоремы Титчмарша — Кодаиры. В рассмотренном случае функцию e^{-kx} нетрудно нормировать непосредственно, но в тех случаях, которые изучаются дальше, когда собственными функциями являются, например, полиномы Лагерра, мы увидим, какую существенную пользу дает общий метод нормирования, основанный на теореме Титчмарша — Кодаиры.

Так как мы видели, что $\lambda=0$ не принадлежит точечному спектру нашего оператора, то нам остается только исследовать ту часть спектра, которая лежит в области $0<\lambda<\infty$.

Сначала рассмотрим случай (I). Если λ принадлежит правой полуплоскости, то удобный базис для множества решений уравнения $\tau\sigma=\lambda\sigma$ дается парой функций $\sin\sqrt{\lambda}\,t$ и $\cos\sqrt{\lambda}\,t$. Первая функция удовлетворяет граничному условию $f(0)=0$. Если $\operatorname{Im}\lambda>0$, то линейная комбинация

$$e^{i\sqrt{\lambda}t}=\cos\sqrt{\lambda}\,t+i\sin\sqrt{\lambda}\,t$$

принадлежит $L_2(0, \infty)$; если $\operatorname{Im}\lambda < 0$, то линейная комбинация

$$e^{-i\sqrt{\lambda}t} = \cos\sqrt{\lambda}\,t - i\sin\sqrt{\lambda}\,t$$

принадлежит $L_2(0, \infty)$. Следовательно, согласно теореме 3.16, резольвента $R(\lambda;\ T)$ — интегральный оператор с ядром

$$\frac{\sin\sqrt{\lambda}\,s\,(\cos\sqrt{\lambda}\,t + i\sin\sqrt{\lambda}\,t)}{\sqrt{\lambda}}, \qquad s<t,\ \operatorname{Im}\lambda>0,$$

$$\frac{\sin\sqrt{\lambda}\,t\,(\cos\sqrt{\lambda}\,s + i\sin\sqrt{\lambda}\,s)}{\sqrt{\lambda}}, \qquad t<s,\ \operatorname{Im}\lambda>0,$$

$$\frac{\sin\sqrt{\lambda}\,s\,(\cos\sqrt{\lambda}\,t - i\sin\sqrt{\lambda}\,t)}{\sqrt{\lambda}}, \qquad s<t,\ \operatorname{Im}\lambda<0,$$

$$\frac{\sin\sqrt{\lambda}\,t\,(\cos\sqrt{\lambda}\,s - i\sin\sqrt{\lambda}\,s)}{\sqrt{\lambda}}, \qquad t<s,\ \operatorname{Im}\lambda<0.$$

Поэтому матрица $\theta_{ij}^{+}(\lambda)$ из теоремы 18 равна

$$\begin{pmatrix} +\dfrac{i}{\sqrt{\lambda}} & -\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{Im}\lambda>0,$$

и

$$\begin{pmatrix} -\dfrac{i}{\sqrt{\lambda}} & -\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{Im}\lambda<0.$$

Таким образом, только мера ϱ_{11} из теоремы 18 отлична от нуля, и, применяя теорему 18, мы видим, что эта мера определяется формулой

$$\varrho_{11} = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}}\,.$$

Следовательно, из теорем 13 и 14 мы получаем, что оператор

$$\lim_{A\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^A \left(\sin\sqrt{\lambda}\,t\right) f(\lambda)\,dt$$

определяет изометрический изоморфизм пространства $L_2(0, \infty)$ на пространство всех функций g, таких, что

$$\int_0^\infty |g(\lambda)|^2\,\frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}} < \infty,$$

и обратный к нему оператор определяется формулой

$$\lim_{A\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^A (\sin \sqrt{\lambda}\, t)\, g(\lambda) \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}}.$$

Если мы сделаем замену переменной $\sqrt{\lambda} = \mu$, то этот результат примет следующую более симметричную форму.

32. Теорема (*синус-теорема Фурье*). *Пусть* $f \in L_2(0, \infty)$. *Тогда предел*

$$(\mathcal{S}f)(\mu) = \lim_{A\to\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^A (\sin \mu t) f(t)\, dt$$

существует в смысле нормы пространства $L_2(0, \infty)$ *и определяет изометрический изоморфизм* $L_2(0, \infty)$ *на себя, причем*

$$\mathcal{S}^2 = I, \qquad \mathcal{S} = \mathcal{S}^{-1}.$$

Далее,

$$\int_0^\infty \mu^4 |(\mathcal{S}f)(\mu)|^2 d\mu < \infty$$

тогда и только тогда, когда f *имеет абсолютно непрерывную первую производную,*

$$\int_0^\infty |f''(t)|^2 dt < \infty$$

и $f(0) = 0$; *в этом случае*

$$\mu^2 (\mathcal{S}f)(\mu) = -(\mathcal{S}f'')(\mu).$$

Читатель без труда может проверить, что соответствующие вычисления в случае (II) приводят к следующему результату.

33. Теорема (*косинус-теорема Фурье*). *Пусть* $f \in L_2(0, \infty)$. *Тогда предел*

$$(\mathcal{C}f)(\mu) = \lim_{A\to\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^A (\cos \mu t) f(t)\, dt$$

существует в смысле нормы пространства $L_2(0, \infty)$ *и определяет изометрический изоморфизм пространства* $L_2(0, \infty)$ *на себя, причем*

$$\mathcal{C}^2 = I, \qquad \mathcal{C} = \mathcal{C}^{-1}.$$

Далее,

$$\int_0^\infty \mu^4 |(\mathscr{C}f)(\mu)|^2 d\mu < \infty$$

тогда и только тогда, когда f имеет абсолютно непрерывную первую производную,

$$\int_0^\infty |f''(t)|^2 dt < \infty$$

и $f'(0)=0$; *в этом случае*

$$\mu^2 (\mathscr{C}f)(\mu) = -(\mathscr{C}f'')(\mu).$$

Теперь рассмотрим случаи (III) и (IV). Функция $\sin\sqrt{\lambda}\,t - k\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\,t$ удовлетворяет граничному условию $f(0)+kf'(0)=0$. Эта функция и функция $\cos\sqrt{\lambda}\,t$ вместе образуют базис для множества решений уравнения $\tau\sigma=\lambda\sigma$. Если $\operatorname{Im}\lambda>0$, то функция

$$e^{i\sqrt{\lambda}t} = \cos\sqrt{\lambda}\,t + i\sin\sqrt{\lambda}\,t = \\ = i\left(\sin\sqrt{\lambda}\,t - k\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\,t\right) + \left(1+ik\sqrt{\lambda}\right)\cos\sqrt{\lambda}\,t$$

принадлежит $L_2(0, \infty)$; если $\operatorname{Im}\lambda<0$, то функция

$$e^{-i\sqrt{\lambda}t} = \cos\sqrt{\lambda}\,t - i\sin\sqrt{\lambda}\,t = \\ = -i\left(\sin\sqrt{\lambda}\,t - k\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\,t\right) + \left(1-ik\sqrt{\lambda}\right)\cos\sqrt{\lambda}\,t$$

принадлежит $L_2(0, \infty)$. Следовательно, по теореме 3.16 резольвента $R(\lambda; T_k)$ — интегральный оператор с ядром

$$K(\lambda; s, t) = \\ = \begin{cases} \dfrac{(\sin\sqrt{\lambda}\,s - k\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\,s)\{i(\sin\sqrt{\lambda}\,t - k\cos\sqrt{\lambda}\,t) + (1+ik\sqrt{\lambda})\cos\sqrt{\lambda}\,t\}}{\sqrt{\lambda}\,(1+ik\sqrt{\lambda})}, \\ \qquad\qquad s<t,\ \operatorname{Im}\lambda>0, \\ \dfrac{(\sin\sqrt{\lambda}\,s - k\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\,s)\{-i(\sin\sqrt{\lambda}\,t - k\cos\sqrt{\lambda}\,t) + (1-ik\sqrt{\lambda})\cos\sqrt{\lambda}\,t\}}{\sqrt{\lambda}\,(1-ik\sqrt{\lambda})}, \\ \qquad\qquad s<t,\ \operatorname{Im}\lambda<0. \end{cases}$$

Поэтому матрица $\theta_{ij}^{+}(\lambda)$ из теоремы 18 равна

$$\begin{pmatrix} \dfrac{i}{\sqrt{\lambda}\,(1+ik\sqrt{\lambda})} & \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{Im}\lambda>0,$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{-i}{\sqrt{\lambda}\,(1-ik\sqrt{\lambda})} & \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{Im}\lambda<0.$$

Отсюда следует, что только мера ϱ_{11} из мер ϱ_{ij} теоремы 18 отлична от нуля; она определяется формулой

$$\varrho_{11}(a, b) = \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}(1+k^2\lambda)}, \quad b > a > 0.$$

Таким образом, полагая $\mu^2 = \lambda$, получаем следующие две теоремы, которые соответствуют случаям (III) и (IV).

34. Теорема. *Пусть* $0 < k < \infty$ *и*

$$\varphi(t, \mu) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(1 + k^2\mu^2)^{-1/2}(\sin \mu t + k\mu \cos \mu t).$$

Тогда если $f \in L_2(0, \infty)$, *то предел*

$$(U_k f)(\mu) = \lim_{A\to\infty} \int_0^A f(t)\varphi(t, \mu)\,dt$$

существует в топологии пространства $L_2(0, \infty)$ *и определяет изометрический изоморфизм пространства* $L_2(0, \infty)$ *на себя; его обратный дается формулой*

$$(U_k^{-1}g)(t) = \lim_{A\to\infty} \int_0^A g(\mu)\varphi(t, \mu)\,d\mu.$$

Далее,

$$\int_0^\infty \mu^4 |(U_k f)(\mu)|^2\,d\mu < \infty$$

тогда и только тогда, когда f *имеет абсолютно непрерывную первую производную,*

$$\int_0^\infty |f''(t)|^2\,dt < \infty$$

и $f(0) = kf'(0)$; *в этом случае*

$$\mu^2(U_k f)(\mu) = -(U_k f'')(\mu).$$

35. Теорема. *Пусть* $0 < k < \infty$ *и*

$$\psi(t, \mu) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(1 + k^2\mu^2)^{-1/2}(\sin \mu t - k\mu \cos \mu t).$$

Пусть E^1 *обозначает одномерное унитарное пространство. Если* $f \in L_2(0, \infty)$, *то предел*

$$(V_k^{(0)} f)(\mu) = \lim_{A\to\infty} \int_0^A f(t)\psi(t, \mu)\,dt$$

существует в топологии пространства $L_2(0, \infty)$. *Если мы положим*

$$V_k^{(1)} f = \sqrt{\frac{2}{k}} \int_0^\infty f(t)\, e^{-t/k}\, dt,$$

то формула

$$V_k f = [V_k^{(0)} f,\ V_k^{(1)} f]$$

определяет изометрический изоморфизм пространства $L_2(0, \infty)$ *на прямую сумму* $L_2(0, \infty) \oplus E^1$. *Оператор, обратный этому изометрическому изоморфизму, задается формулой*

$$(V_k^{-1}[g,\ \alpha])(t) = \alpha \sqrt{\frac{2}{k}}\, e^{-t/k} + \lim_{A \to \infty} \int_0^A g(\mu)\, \psi(t,\ \mu)\, d\mu,$$

причем предел в правой части существует в топологии пространства $L_2(0, \infty)$. *Далее,*

$$\int_0^\infty \mu^4 \,|(V_k^{(0)} f)(\mu)|^2\, d\mu < \infty$$

тогда и только тогда, когда f *имеет абсолютно непрерывную первую производную,*

$$\int_0^\infty |f''(t)|^2\, dt < \infty$$

и $f(0) + kf'(0) = 0$; *в этом случае*

$$(V_k^{(0)} f'')(\mu) = -\mu^2 (V_k^{(0)} f)(\mu),$$
$$(V_k^{(1)} f'') = \frac{1}{k^2} (V_k^{(1)} f).$$

Очевидно, что, рассматривая другие формальные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, можно построить другие разложения в ряд и интегральные разложения, использующие тригонометрические и показательные функции. Однако более интересно изучить разложения по собственным функциям, получающимся, если исходить из формальных дифференциальных операторов с переменными коэффициентами. В этом случае задача выбора базиса для решений уравнения $\tau\sigma = \lambda\sigma$ далеко не тривиальна. Если, например, мы возьмем оператор $\tau = -(d/dt)^2 + t^2$, то решениями уравнения $\tau\sigma = \lambda\sigma$ будут некоторые вырожденные гипергеометрические функции. Из-за трудности обращения с различными функциями, которые могут возникать при решении уравнения $\tau\sigma = \lambda\sigma$, мы отложим дальнейшие исследования разложений по специальным собственным функциям до § 8. В § 8 мы сначала изложим необходимые сведения о некоторых специальных функциях, а затем на основе этих сведений исследуем несколько известных полных ортонормальных систем, унитарных интегральных преобразований и т. д.

6. Качественная теория индекса дефекта

Методы, разработанные в § 5, особенно теорема 5.18 Титчмарша — Кодаиры, дают возможность вычислять спектральное разложение самосопряженного оператора T, который порождается формальным дифференциальным оператором τ при наложении определенной системы граничных условий. Из спектрального разложения оператора T можно непосредственно определить его спектр $\sigma(T)$. Тем не менее иногда не очень легко выполнить вычисления, предусматриваемые методами § 5. Например, для оператора $\tau_1 = -(d/dt)^2 + t^2$ решения уравнения $(\tau_1 - \lambda)\sigma = 0$ выражаются в терминах вырожденных гипергеометрических функций, поэтому спектральный анализ оператора τ_1 предполагает знание свойств вырожденных гипергеометрических функций. Если бы мы попытались изучить оператор $\tau_2 = -(d/dt)^2 + x^6$, для которого решения уравнения $(\tau^2 - \lambda)\sigma = 0$ выражаются в терминах еще менее привычных трансцендентных функций, то вычисления с помощью теоремы 5.18 стали бы довольно сложными. Тем не менее из изложенного в данном и следующем параграфах будет видно, что в этих и в некоторых других случаях существенные сведения относительно спектра $\sigma(T)$, индексов дефекта оператора T и т. д. могут быть получены при непосредственном рассмотрении коэффициентов этого оператора. Например, мы выведем результаты, которые позволят установить, что ни один самосопряженный оператор, полученный из τ_1 или τ_2, не имеет непрерывного спектра и что на самом деле спектр каждого такого оператора состоит из бесконечной последовательности точек, стремящейся к $+\infty$.

Сначала мы определим еще один вид «спектра» для формального дифференциального оператора τ.

1. Определение. Пусть T — замкнутый оператор в гильбертовом пространстве. Тогда множество комплексных чисел λ, таких, что область значений оператора $\lambda I - T$ не замкнута, называется *существенным спектром* оператора T и обозначается через $\sigma_e(T)$.

Ясно, что $\sigma_e(T) \subseteq \sigma(T)$. Если τ — формальный дифференциальный оператор, определенный на интервале I, то существенный спектр замкнутого оператора $T_1(\tau)$ в $L_2(I)$ называется *существенным спектром* $\sigma_e(\tau)$ оператора τ.

2. Лемма. *Пусть $\mathfrak{X}$ — банахово пространство; предположим, что $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y} + \mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ — конечномерное пространство, а $\mathfrak{Y}$ — замкнутое подпространство. Пусть T — ограниченный линейный оператор из $\mathfrak{X}$ во второе банахово пространство $\mathfrak{X}_1$. Множество $T\mathfrak{Y}$ замкнуто в $\mathfrak{X}_1$ тогда и только тогда, когда множество $T\mathfrak{X}$ замкнуто.*

Доказательство. Для того чтобы доказать, что $T\mathfrak{X}$ замкнуто, если замкнуто $T\mathfrak{Y}$, мы докажем более общее утверждение, что сумма замкнутого подпространства $\mathfrak{Z}$ некоторого B-пространства и конечномерного пространства $\hat{\mathfrak{N}}$ замкнута. Ясно, что, рассуждая по индукции, мы без ограничения общности можем предполагать, что пространство $\hat{\mathfrak{N}}$ одномерное. Таким образом, $\hat{\mathfrak{N}}$ совпадает с множеством $\{\alpha x\}$ всех комплексных кратных некоторого ненулевого вектора x. Если $x \in \mathfrak{Z}$, то нам нечего доказывать, поэтому предположим, что $x \notin \mathfrak{Z}$. Тогда каждый вектор $y \in \mathfrak{Z} + \hat{\mathfrak{N}}$ может быть единственным образом представлен в виде $y = z + \alpha x$, где $z \in \mathfrak{Z}$. Пусть $y_n \in \mathfrak{Z} + \hat{\mathfrak{N}}$ и $y_n \to y_\infty$. Тогда $y_n = z_n + \alpha_n x$. Если последовательность $\{\alpha_n\}$ ограничена, то мы можем предположить, перейдя к подпоследовательности, что $\alpha_n \to \alpha$. В этом случае $z_n \to y_\infty - \alpha x$, так что $y_\infty - \alpha x \in \mathfrak{Z}$ и, таким образом, $y_\infty \in \mathfrak{Z} + \hat{\mathfrak{N}}$. С другой стороны, последовательность $\{\alpha_n\}$ обязательно ограничена. В самом деле, если бы она была неограниченной, мы могли бы допустить, перейдя к подпоследовательности, что $|\alpha_n| \to \infty$. Тогда, положив $\hat{z}_n = \alpha_n^{-1} z_n$, мы получили бы $\hat{z}_n \to -x$, откуда $x \in \mathfrak{Z}$, что противоречит предположению. Отсюда следует, что сумма $\mathfrak{Z} + \hat{\mathfrak{N}}$ замкнута, и тем самым первая часть леммы доказана.

Для того чтобы доказать вторую часть, предположим, что множество $T(\mathfrak{Y} + \mathfrak{N})$ замкнуто. Пусть n — размерность пространства $\mathfrak{N}$, а $\mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_n = \mathfrak{N}$ — такая возрастающая последовательность подпространств из $\mathfrak{N}$, что $\dim \mathfrak{N}_i = i$. При помощи индукции по m докажем, что множество $T(\mathfrak{Y} + \mathfrak{N}_{n-m})$ замкнуто. Поскольку, как показано выше, сумма $\mathfrak{Y} + \mathfrak{N}_{n-m}$ замкнута, для этой цели достаточно установить утверждение леммы при дополнительном предположении, что пространство $\mathfrak{N}$ одномерно, т. е. $\mathfrak{N} = \{\alpha x\}$. Если $Tx \in T\mathfrak{Y}$, то $T(\mathfrak{Y} + \mathfrak{N}) = T(\mathfrak{Y})$, поэтому множество $T\mathfrak{Y}$ замкнуто. Следовательно, мы можем предположить, что $Tx \notin T\mathfrak{Y}$. Пусть множество $T\mathfrak{Y}$ не замкнуто, и пусть $z \notin T\mathfrak{Y}$, $z \in \overline{T\mathfrak{Y}}$, т. е. существует последовательность элементов $y_n \in \mathfrak{Y}$, таких, что $Ty_n \to z$. Поскольку множество $T(\mathfrak{Y} + \mathfrak{N})$ замкнуто, существует элемент $y + \alpha x$, $y \in \mathfrak{Y}$, такой, что $z = T(y + \alpha x)$. При этом $\alpha \neq 0$, так как $z \notin T\mathfrak{Y}$. Далее, $T((y - y_n) + \alpha x) \to 0$. Множество $T(\mathfrak{Y} + \mathfrak{N})$ замкнуто, поэтому из леммы VI.6.1 следует, что существует последовательность $\{\hat{y}_n+\alpha_n x\}$, такая, что $(\hat{y}_n+\alpha_n x)\to 0$, в то время как

$$T((y-y_n)+\alpha x)=T(\hat{y}_n+\alpha_n x),$$

т. е.

$$(\alpha-\alpha_n)Tx=T(y_n+y_n-y).$$

Так как Tx не принадлежит $T\mathfrak{Y}$, то $\alpha=\alpha_n$, поэтому $y_n\to-\alpha x$, а это противоречит предположению, что $\mathfrak{Y}$ замкнуто.

3. Следствие. *Пусть τ — формально симметрический дифференциальный оператор, а T — любое замкнутое симметрическое расширение оператора $T_0(\tau)$. Тогда существенный спектр оператора τ совпадает с существенным спектром оператора T.*

Доказательство. Согласно XII.4.8(c) и 2.10, $T_0^*\supseteq T\supseteq\overline{T}_0$. Определим в множестве $\mathfrak{D}(T_1(\tau))=\mathfrak{D}(T_0(\tau)^*)$ скалярное произведение $(f, g)^*=(f, g)+(T_1f, T_1g)$. Тогда, согласно XII.4.10, гильбертово пространство $\mathfrak{D}(T_1)=\mathfrak{D}(T_0^*)$ является прямой суммой вида $\mathfrak{D}(\overline{T}_0)\oplus\mathfrak{D}_+\oplus\mathfrak{D}_-$, где $\mathfrak{D}_+$ и $\mathfrak{D}_-$ конечномерны (см. 1.3). Таким образом, поскольку $\mathfrak{D}(T_0^*)\supseteq\mathfrak{D}(T)\supseteq\mathfrak{D}(\overline{T}_0)$, отсюда следует, что $\mathfrak{D}(T_1)=\mathfrak{D}(T)+\mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ — подпространство пространства $\mathfrak{D}_+\oplus\mathfrak{D}_-$ и, следовательно, конечномерно. Так как оператор T замкнут, то $\mathfrak{D}(T)$ — замкнутое подпространство из $\mathfrak{D}(T_1)$ (см. XII.4.5). Если рассматривать T_1 как оператор, отображающий гильбертово пространство $\mathfrak{D}(T_1)$ в $\mathfrak{H}$, то он, очевидно, ограничен. Поэтому наш результат следует непосредственно из предыдущей леммы и из определения существенного спектра.

4. Следствие. *Пусть T — самосопряженное расширение оператора $T_0(\tau)$. Тогда $\sigma_e(T)=\sigma_e(\tau)$.*

Доказательство. Это вытекает непосредственно из леммы XII.4.8(e) и предыдущего следствия.

5. Теорема. *Существенный спектр самосопряженного оператора T есть множество неизолированных точек множества $\sigma(T)$*

Доказательство. Предположим, что λ — изолированная точка в спектре оператора T. Для простоты мы обозначим замкнутый оператор $\lambda I-T$ через U. Заметим, что $\mathfrak{D}(U)=\mathfrak{D}(T)$. Пусть E — разложение единицы для T (см. XII.2). Тогда, согласно XII.2.7(c), мы имеем

$$E(\{\lambda\})Ux=0, \qquad x\in\mathfrak{D}(T).$$

Пусть $\sigma_1=\sigma(T)-\{\lambda\}$. Тогда

$$(E(\sigma_1)U)x=(I-E(\{\lambda\})(\lambda I-T))x=(\lambda I-T)x.$$

Это показывает, что область значений оператора проектирования $E(\sigma_1)$ содержит область значений оператора T.

Выберем окрестность V точки λ, которая не пересекается с σ_1, и положим $f(\mu)=(\lambda-\mu)^{-1}$, если $\mu \notin V$, и $f(\mu)=0$, если $\mu \in V$. Предположим, что y принадлежит области значений оператора $E(\sigma_1)$. Тогда по теореме XII.2.6 $f(T)y$ принадлежит $\mathfrak{D}(T)$ и $[Uf(T)]y=E(\sigma_1)y=y$. Из этого замечания и предыдущего абзаца следует, что область значений оператора $E(\sigma_1)$ (которая, очевидно, замкнута) совпадает с областью значений оператора U. Таким образом, λ не принадлежит существенному спектру оператора T.

Чтобы закончить доказательство, достаточно показать, что любая точка λ из спектра оператора T, для которой область значений оператора $\lambda I - T$ замкнута, является изолированной точкой этого спектра.

Пусть λ — такая точка, а $\mathfrak{N}$ — нуль-пространство оператора U, т. е. множество всех $x \in \mathfrak{D}(U)$, таких, что $Ux=0$. Тогда сужение U_1 оператора U на $\mathfrak{D}(U) \cap \mathfrak{N}^{\perp}$ имеет ту же область значений, что и U. Более того, график оператора U_1 является, очевидно, ортогональным дополнением мн жества $\{[x, 0], x \in \mathfrak{N}\}$ в графике оператора U, и поэтому замкнут. Таким образом, U_1 — замкнутое взаимно однозначное отображение с замкнутой областью значений. По теореме о замкнутом графике и по теореме II.2.2 U_1 имеет ограниченный обратный оператор, т. е. существует постоянное число k, такое, что если $|U_1 x| \leqslant 1$, то $|x| \leqslant k/2$. Далее, согласно XII.2.6(c), $\mathfrak{N}$ — область значений оператора проектирования $E(\{\lambda\})$. Поэтому $\mathfrak{N}^{\perp}$ — область значений оператора $E(\sigma_1)$. Следовательно, если x принадлежит $\mathfrak{D}(T)=\mathfrak{D}(U)$, $E(\sigma_1)x=x$ и $|(\lambda I - T)x| \leqslant 1$, то $|x| \leqslant k/2$.

Пусть $A=\{\mu \mid \mu \neq \lambda, |\mu-\lambda| < 1/k\}$. Достаточно доказать, что $E(A)=0$, ибо, согласно XII.2.9, это означает, что множество A не пересекается с $\sigma(T)$, т. е. λ — изолированная точка. Предположим, что существует вектор x в $\mathfrak{H}$, такой, что $E(A)x=x$. Мы можем предполагать, что $|x|=k$. Тогда, поскольку $A \subseteq \sigma_1$, мы имеем $E(\sigma_1)x=E(\sigma_1)E(A)x=E(A)x=x$. По теореме XII.2.6(c)

$$|(\lambda I - T)x|^2 = \int_A |\mu-\lambda|^2 (E(d\mu)x, x) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{k^2} \int_A (E(d\mu)x, x) = \frac{1}{k^2}|x|^2 = 1,$$

т. е. $|(\lambda I - T)x| \leqslant 1$, тогда как $|x|=k$. Полученное противоречие завершает доказательство.

36 Заказ № 134

6. Теорема. *Пусть τ — формально самосопряженный дифференциальный оператор, определенный на интервале I. Пусть существует точка λ на действительной оси, не принадлежащая существенному спектру оператора τ. Тогда два индекса дефекта оператора τ совпадают. Более того, все самосопряженные расширения оператора $T_0(\tau)$ имеют одно и то же множество неизолированных точек, и это множество совпадает с $\sigma_e(\tau)$.*

Доказательство. Второе утверждение следует непосредственно из теоремы 5 и следствия 4. При доказательстве первого утверждения мы можем, не ограничивая общности (см. XII.2.2 и XII.4.19), допустить, что $\lambda=0$. Пусть $\mathfrak{N}=\{f \mid T_1(\tau)f=0\}$. Построим самосопряженное расширение T замыкания $\overline{T}_0$ оператора $T_0(\tau)$. Согласно следствию XII.4.13 и лемме XII.4.8 (b), отсюда будет вытекать, что индексы дефекта оператора τ равны. Очевидно (поскольку в силу леммы XII.4.6 оператор $\overline{T}_0$ симметрический), что сужение T_2 оператора $T_1(\tau)$ на $\mathfrak{D}(\overline{T}_0)+\mathfrak{N}$ является симметрическим. Действительно, если $x_i \in \mathfrak{D}(\overline{T}_0)+\mathfrak{N}$, $i=1, 2$, то мы можем написать $x_i=y_i+z_i$, $i=1, 2$, где $y_i \in \mathfrak{D}(\overline{T}_0)$, $z_i \in \mathfrak{N}$, $i=1, 2$. Тогда по теореме 2.10

$$(T_1(\tau)x_1, x_2)=(\overline{T}_0 y_1, x_2)=(y_1, T_1(\tau)x_2)=(y_1, \overline{T}_0 y_2).$$

По симметрии $(T_1(\tau)x_2, x_1)=(y_2, \overline{T}_0 y_1)$. Таким образом, поскольку оператор $\overline{T}_0$ симметрический, отсюда следует, что $(T_1(\tau)x_1, x_2)=$ $=(x_1, T_1(\tau)x_2)$. Более того, мы утверждаем, что T_2 — самосопряженный оператор. Действительно, предположение, что $\lambda \notin \sigma_e(\overline{T}_0)$ $(=\sigma_e(\tau)$ согласно следствию 3), означает, что область значений $\mathfrak{R}(\overline{T}_0)$ оператора $\overline{T}_0$ замкнута. Так как по теореме 2.10 и XII.1.6 (d) $\mathfrak{N}=[\mathfrak{R}(\overline{T}_0)]^{\perp}$, то мы имеем $L_2(I)=\mathfrak{R}(\overline{T}_0)\oplus\mathfrak{N}$. Пусть x принадлежит $\mathfrak{D}(T_2^*)$. Тогда для всех $y \in \mathfrak{N}$

$$(T_2^* x, y)=(x, T_2 y)=0.$$

Это показывает, что $T_2^* x \in \mathfrak{R}(\overline{T}_0)$. Поэтому в $\mathfrak{D}(T_2)$ существует элемент x_1, такой, что $\overline{T}_0 x_1=T_2^* x_1=T_2^* x$. Следовательно, $x-x_1 \in \mathfrak{N}$ и $x=(x-x_1)+x_1$ принадлежит $\mathfrak{D}(T_2)$. Таким образом, оператор T_2 самосопряжен, ч. т. д.

Из теоремы 5 и следствия 4 вытекает, что множество неизолированных точек спектра самосопряженного расширения T оператора $T_0(\tau)$ не зависит от частного выбора расширения, т. е. не зависит от частной системы граничных условий, определяющих это расширение. Теперь мы покажем, что изолированные точки множества $\sigma(T)$ очень сильно зависят от системы granичных условий, определяющих T, по крайней мере в том случае, когда оператор τ определен на интервале, хотя бы один конец которого фиксирован.

7. Лемма. *Пусть T — симметрический оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, причем наименьший из его индексов дефекта равен k. Если λ не принадлежит существенному спектру оператора T, то уравнение $T^*x = \lambda x$ имеет по крайней мере k линейно независимых решений.*

Доказательство. В случае $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ это утверждение доказано в теореме XII.4.19. Если λ вещественное, то мы можем заменить T оператором $T - \lambda I$, который все еще симметричен и имеет те же индексы дефекта, что и T (см. XII.4.19). Следовательно, мы можем допустить, что $\lambda = 0$. Тогда утверждение состоит в том, что нуль-пространство $\mathfrak{N}$ оператора T^* имеет размерность не меньше k.

Метод доказательства следующий: будет показано, что если теорема неверна, то можно построить собственное симметрическое расширение T_2 оператора T, область определения которого строго содержит $\mathfrak{D}(T)$ и нуль-пространство оператора T^*. Это сразу приводит к противоречию следующим образом: предположение $0 \notin \sigma_e(T)$ означает, что область значений $\mathfrak{R}(T)$ оператора T замкнута. Пусть T_1 — расширение, полученное сужением T^* на $\mathfrak{D}(T) + \mathfrak{N}$ (легко видеть, что T_1 — симметрическое расширение). Тогда область значений $\mathfrak{R}(T_1)$ оператора T_1 совпадает с областью значений оператора T и, следовательно, замкнута. Более того, ортогональным дополнением пространства $\mathfrak{R}(T)$ является $\mathfrak{N}$. Поэтому (см. XII.1.6)

$$[*] \qquad \mathfrak{H} = \mathfrak{R}(T) \oplus \mathfrak{N} = \mathfrak{R}(T_1) \oplus \mathfrak{N}.$$

Теперь предположим, что T_2 — собственное симметрическое расширение оператора T_1. Согласно XII.4.1, $T_2 \subseteq T^*$. Если область значений оператора T_2 строго содержит область значений T_1, то, поскольку $\mathfrak{R}(T_2)$ — линейное пространство, $\mathfrak{R}(T_2)$ содержит элемент, ортогональный к $\mathfrak{R}(T_1)$. Таким образом, $\mathfrak{D}(T_2)$ содержит элемент y, такой, что $0 \neq T_2 y \in \mathfrak{N}$. Но это невозможно, ибо если $T_2 y \in \mathfrak{N}$, то из $T_2 \supseteq T_1$ и $T_1 \mathfrak{N} = 0$ вытекает, что $(T_2 y, T_2 y) = (T_2 T_2 y, y) = 0$ и, следовательно, $T_2 y = 0$. Тогда $\mathfrak{R}(T_2) = \mathfrak{R}(T_1)$; но это снова невозможно, так как отсюда следовало бы существование элемента y из $\mathfrak{D}(T_2)$, не принадлежащего $\mathfrak{D}(T_1)$, и элемента x из $\mathfrak{D}(T_1)$, таких, что $T_2 y = T_1 x = T_2 x$. Тогда разность $y - x$ принадлежала бы $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{D}(T_1)$, т. е. элемент y входил бы в $\mathfrak{D}(T_1)$, и мы получили противоречие.

Остается доказать, что если заключение настоящей леммы неверно, то оператор T_1 имеет собственное симметрическое расширение. По лемме XII.4.11 и теореме XII.4.12 достаточно проверить, что ни одно из дефектных пространств $\mathfrak{D}_+^{(1)}$ и $\mathfrak{D}_-^{(1)}$ оператора T_1 не пусто. Пусть $\mathfrak{D}_+ = \{(T+iI)\mathfrak{D}(T)\}^\perp$ — положительное дефектное пространство оператора T. Тогда (см. XII.1.6(d))

$$\mathfrak{D}_+^{(1)} = \{(T_1+iI)\mathfrak{D}(T_1)\}^\perp = \{(T_1+iI)\mathfrak{D}(T)+\mathfrak{N}\}^\perp \supseteq$$
$$\supseteq \mathfrak{D}_+ \cap \{(T^*+iI)\mathfrak{N}\} = \mathfrak{D}_+ \cap \mathfrak{N}^\perp.$$

Так как мы предполагаем, что $\dim \mathfrak{N} < k$ и $\dim \mathfrak{D}_+ \geqslant k$, то отсюда следует, что $\dim \mathfrak{D}_+^{(1)} \geqslant 1$. Аналогично $\dim \mathfrak{D}_-^{(1)} > 1$. Поэтому T_1 имеет собственное симметрическое расширение T_2, и доказательство полностью завершено.

8. Следствие. *Пусть τ — формально самосопряженный дифференциальный оператор, определенный на некотором интервале I. Если минимум индексов дефекта оператора $T_0(\tau)$ равен k, то для $\lambda \notin \sigma_e(\tau)$ уравнение $\tau\sigma = \lambda\sigma$ имеет по крайней мере k линейно независимых решений из $L_2(I)$.*

Доказательство. Согласно теореме 2.10 и XII.4.7(c), сопряженным к $\overline{T_0(\tau)}$ является оператор $T_1(\tau)$. Поэтому требуемый результат непосредственно следует из предыдущей леммы, теоремы 5 и следствия 4.

Замечание. В следствии 8 предположение, что λ не принадлежит существенному спектру оператора τ, необходимо. Например, если $\tau = -(d/dt)^2$ на интервале $[0, \infty)$, то, очевидно, оба индекса дефекта оператора τ равны 1. С другой стороны, если $\lambda > 0$, то наиболее общее решение уравнения $\tau\sigma = \lambda\sigma$, очевидно, имеет вид $a \cos t\sqrt{\lambda} + b \sin t\sqrt{\lambda}$, и эта функция принадлежит $L_2(0, \infty)$ только в том случае, когда $a = b = 0$.

9. Лемма. *Пусть τ — формально симметрический дифференциальный оператор на интервале I, причем I имеет по крайней мере один фиксированный конец. Пусть минимум индексов дефекта оператора $T_0(\tau)$ равен ν. Тогда для каждого действительного λ уравнение $\tau\sigma = \lambda\sigma$ имеет не более ν линейно независимых решений из $L_2(I)$.*

Доказательство. Так как по теореме XII.4.19 τ и $\tau - \lambda$ имеют одинаковые индексы дефекта, мы можем положить $\lambda = 0$. Теперь мы хотим показать, что уравнение $\tau\sigma = 0$ имеет не более ν линейно независимых решений из $L_2(I)$. Пусть $\overline{T}_0$ — замыкание оператора $T_0(\tau)$. Тогда по лемме XII.4.7(c) и теореме 2.10 $T_1(\tau) = (\overline{T}_0)^*$. Из § XII.4 мы знаем, что линейное пространство $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$ станет гильбертовым пространством, если ввести скалярное произведение

$(x, y)^*$ в соответствии с определением XII.4.2(a). В дальнейшем, если явно не оговорено противное, мы везде будем иметь дело с этим скалярным произведением. По лемме XII.4.10 $\mathfrak{D}(T_1(\tau)) = \mathfrak{D}(\overline{T}_0) \oplus \mathfrak{D}_+ \oplus \mathfrak{D}_-$, причем все пространства в правой части замкнуты. Предположим, что заключение настоящей леммы неверно. Тогда размерность пространства $\mathfrak{N} = \{x \mid T_1(\tau)x = 0\}$ больше, чем ν. Для определенности предположим, что $\dim \mathfrak{D}_+ \leqslant \dim \mathfrak{D}_-$, так что $\dim \mathfrak{D}_+ = \nu$. Тогда проектирование $y \to y_+$ пространства $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$ на $\mathfrak{D}_+$ не может отображать $\mathfrak{N}$ взаимно однозначно. Поэтому в $\mathfrak{N}$ существует элемент y, такой, что $y_+ = 0$, т. е. $y = y_0 + y_-$, где $y_0 \in \mathfrak{D}(\overline{T}_0)$, $y_- \in \mathfrak{D}_-$. Отсюда сразу видно, что сужение T_2 оператора $T_1(\tau) = T_0(\tau)^*$ на $\mathfrak{D}(\overline{T}_0) + \mathfrak{N}$ симметрично. Более того, $y_- \in \mathfrak{D}(T_2)$. Однако это означает, что

$$\begin{aligned} i(y_-, y_-) &= (T_1 y_-, y_-) = (T_2 y_-, y_-) = \\ &= (y_-, T_2 y_-) = (y_-, T_1 y_-) = \\ &= (y_-, iy_-) = -i(y_-, y_-). \end{aligned}$$

Таким образом, $y_- = 0$, и поэтому $y \in \mathfrak{D}(\overline{T}_0)$. Так как каждое граничное значение для τ обращается в нуль на $\mathfrak{D}(\overline{T_0(\tau)})$, то из следствия 2.23 мы заключаем, что первые $n-1$ производных функции y обращаются в нуль в фиксированной концевой точке интервала I. Тогда, поскольку $T_1(\tau)y = 0$, из теоремы 1.3 следует, что y тождественно обращается в нуль. Полученное противоречие завершает доказательство.

Замечание. В лемме 9 условие, что интервал I имеет фиксированную концевую точку, необходимо. Рассмотрим, например, формальный дифференциальный оператор $\tau = -(d/dt)^2 + t^2$ на интервале $(-\infty, +\infty)$. Если $f_1(t) = e^{t^2/2}$, $f_2(t) = e^{-t^2/2}$, то мы имеем $\tau f_1 = -f_1$, $\tau f_2 = f_2$. Согласно следствию 2.14, индексы дефекта оператора τ равны. Они не могут равняться $(2, 2)$, поскольку, согласно теореме 4.1, теореме 5 и следствию 4, это означало бы, что существенный спектр оператора τ пуст и в силу следствия 8 все решения уравнения $\tau\sigma + \sigma = 0$ лежат в $L_2(-\infty, +\infty)$, но это не так. Отсюда по теореме 2.19 видно, что τ не имеет граничных значений либо в ∞, либо в $-\infty$. Так как замена переменной $t \to -t$ переводит τ в себя, то, если выполняется одна из этих возможностей, выполняется и другая. Таким образом, τ не имеет граничных значений, и по лемме XII.4.21 индексы дефекта оператора τ равны $(0, 0)$. Тем не менее уравнение $\tau\sigma = \sigma$ имеет ненулевое решение f_2, интегрируемое в квадрате.

Объединяя леммы 7, 9 и следствие 8, мы получаем следующую теорему, которая показывает, в какой степени стектр самосопряженного оператора, порожденного формальным дифференциальным оператором, зависит от соответствующих граничных условий.

10. Теорема. *Пусть τ — формально самосопряженный дифференциальный оператор, определенный на интервале I по крайней мере с одним фиксированным концом. Пусть λ — произвольная точка вещественной оси, не принадлежащая существенному спектру оператора τ. Тогда оба индекса дефекта оператора τ равны некоторому целому k и*

(a) *для каждого самосопряженного расширения T оператора $T_0(\tau)$ размерность нуль-пространства $\{f \mid Tf=\lambda f\}$ не превосходит k;*

(b) *существуют самосопряженные расширения T оператора $T_0(\tau)$, такие, что $\lambda \notin \sigma(T)$;*

(c) *существуют самосопряженные расширения T оператора $T_0(\tau)$, такие, что пространство $\{f \mid Tf=\lambda f\}$ имеет любую заданную размерность между 1 и k.*

Доказательство. Равенство индексов дефекта получается из теоремы 6. Согласно следствию 8 и лемме 9, уравнение $T_1(\tau)f=\lambda f$ имеет точно k линейно независимых решений для каждого $\lambda \notin \sigma_e(\tau)$. Если T — самосопряженное расширение оператора $T_0(\tau)$, то по теореме 2.10 $T=T^* \subseteq T_0(\tau)^*=T_1(\tau)$, откуда следует (a).

Для того чтобы доказать (b) и (c), мы можем, не уменьшая общности (см. XII.1.6(c) и XII.4.19), предполагать, что $\lambda=0$. Пусть $\mathfrak{N}=\{f \mid T_1(\tau)f=0\}$. Пусть $\overline{T}_0$ — замыкание оператора $T_0(\tau)$. В ходе доказательства теоремы 6 было доказано, что сужение T_2 оператора $T_1(\tau)$ на $\mathfrak{D}(\overline{T}_0)+\mathfrak{N}$ является самосопряженным. Таким образом, по теореме XII.4.12(b) пространство $\mathfrak{D}(\overline{T}_0)+\mathfrak{N}$ может быть представлено в виде $\mathfrak{D}(\overline{T}_0)\oplus\Gamma$, где Γ — график изометрического отображения U положительного дефектного пространства $\mathfrak{D}_+$ в отрицательное дефектное пространство $\mathfrak{D}_-$ оператора $\overline{T}_0$, и поэтому размерность Γ равна k.

Если T — самосопряженное расширение оператора $T_0(\tau)$, то по условию 0 не принадлежит существенному спектру оператора τ, поэтому в силу следствия 4 и теоремы 5 число 0 либо не принадлежит спектру оператора T, либо является изолированной точкой множества $\sigma(T)$. В этом последнем случае из теоремы XII.2.9(b) следует, что пространство $\mathfrak{N}(T)=\{x \mid Tx=0\}$ не пусто.

Мы завершим доказательство теоремы построением самосопряженных расширений T оператора $T_0(\tau)$, таких, для которых размерность j пространства $\mathfrak{N}(T)$ принимает любое значение между нулем и k. Для j между нулем и k выберем j-мерное подпространство $\mathfrak{S}_j$ из $\mathfrak{D}_+$; пусть $\mathfrak{O}_j$ — его ортогональное дополнение в $\mathfrak{D}_+$. Определим изометрическое отображение U_j пространства

$\mathfrak{D}_+$ на $\mathfrak{D}_-$ следующим образом:

$$U_j x = Ux, \qquad x \in \mathfrak{S}_j,$$
$$U_j x = -Ux, \qquad x \in \mathfrak{Q}_j.$$

Пусть Γ_j — график отображения U_j. Тогда по теореме XII.4.12(b) $\mathfrak{D}(\overline{T}_0) \oplus \Gamma_j$ есть область определения самосопряженного расширения T_j оператора $T_0(\tau)$. Докажем, что размерность пространства

$$\mathfrak{N}(T_j) = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{D}(T_j)$$

равна точно j.

Так как $\mathfrak{D}(\overline{T}_0) + \mathfrak{N} = \mathfrak{D}(\overline{T}_0) \oplus \Gamma \subseteq \mathfrak{D}(\overline{T}_0) \oplus \mathfrak{D}_+ \oplus \mathfrak{D}_-$, то каждый элемент x из $\mathfrak{D}(T_2)$ может быть единственным образом представлен либо в виде $x_0 + x_1$, либо в виде $x_0 + x_+ + x_-$, где $x_0 \in \mathfrak{D}(\overline{T}_0)$, $x_1 \in \Gamma$, $x_+ \in \mathfrak{D}_+$, $x_- \in \mathfrak{D}_-$. Если $x \in \overline{\mathfrak{D}}(T_0)$, то $x_1 = 0$; следовательно, отображение $x \longrightarrow x_1$ пространства $\mathfrak{N}$ в Γ отображает $\mathfrak{N}$ на все Γ. По предыдущим двум леммам $\mathfrak{N}$ является точно k-мерным; так как пространство Γ также k-мерно, то отображение $x \longrightarrow x_1$ взаимно однозначно. Кроме того, Γ—график изометрии между $\mathfrak{D}_+$ и $\mathfrak{D}_-$. Следовательно, для x из $\mathfrak{N}$ отображение $x \longrightarrow x_+$ является взаимно однозначным отображением на все $\mathfrak{D}_+$.

Мы имеем $x \in \mathfrak{D}(T_j)$ тогда и только тогда, когда $x = x_0 + x_+ + x_-$, где $x_- = U_j x_+$, и $x \in \mathfrak{N}$, только если $x \in \mathfrak{D}(T_2)$, т. е. если $x_- = Ux_+$. Следовательно, $x \in \mathfrak{D}(T_j) \cap \mathfrak{N}$ тогда и только тогда, когда $x \in \mathfrak{N}$ и $U_j x_+ = Ux_+$, т. е. тогда и только тогда, когда $x \in \mathfrak{N}$ и $x_+ \in \mathfrak{S}_j$. Так как отображение $x \longrightarrow x_+$ взаимно однозначно, то множество всех $x \in \mathfrak{N}$, таких, что $x \in \mathfrak{S}_j$, является точно j-мерным пространством. Другими словами, $\mathfrak{D}(T_j) \cap \mathfrak{N}$ является точно j-мерным пространством, ч. т. д.

11. Теорема. *Пусть τ — формально самосопряженный дифференциальный оператор порядка n, определенный на интервале I. Тогда следующие три условия эквивалентны:*

(a) *для некоторого действительного λ_0 все решения уравнения $\tau\sigma = \lambda_0\sigma$ лежат в $L_2(I)$;*

(b) *индексы дефекта оператора τ равны (n, n);*

(c) *для каждого действительного λ все решения уравнения $\tau\sigma = \lambda\sigma$ лежат в $L_2(I)$.*

Доказательство. Пусть a и b — концы интервала I. Выберем c внутри I и положим $I' = (a, c] \cap I$ и $I'' = [c, b) \cap I$. Все решения уравнения $\tau\sigma = \lambda\sigma$ лежат в $L_2(I)$ тогда и только тогда, когда все решения уравнения $\tau'\sigma = \lambda\sigma$ лежат в $L_2(I')$ и все решения уравнения $\tau''\sigma = \lambda\sigma$ лежат в $L_2(I'')$. Так как, согласно следствию 2.26, индексы дефекта оператора τ равны (n, n) тогда и только тогда, когда индексы дефекта обоих операторов τ' и τ''

равны (n, n), то, не уменьшая общности, мы можем ограничиться случаем, когда I имеет фиксированный конец. В этом случае по лемме 9 из (a) следует (b); если справедливо (b), то по теореме 4.1 резольвента $R(\lambda; T)$ каждого самосопряженного расширения оператора $T_0(\tau)$ вполне непрерывна. Тогда по теореме 4.2 спектр оператора T состоит из последовательности изолированных точек на действительной оси, т. е. существенный спектр оператора T, а поэтому (см. следствие 4 и теорему 5) и оператора τ, пуст. Тогда из леммы 7 следует, что (b) влечет за собой (c). Очевидно, что из (c) следует (a). Таким образом, доказательство закончено.

Следующее утверждение содержится в предыдущем доказательстве.

12. Следствие. *Если индексы дефекта оператора τ равны (n, n), то существенный спектр оператора τ пуст.*

Следующая теорема дает полезное расширение теоремы 5.4.

13. Теорема. *Пусть τ — формально самосопряженный дифференциальный оператор на интервале I с концами a, b; T — самосопряженное расширение оператора $T_0(\tau)$. Пусть U — упорядоченное представление пространства $L_2(I)$ относительно T, а μ_i, e_i, m, W_i и т. д. определены так же, как в теореме 5.1. Пусть $a<c<b$, а τ_1 и τ_2 — сужения оператора τ соответственно на $I \cap [a, c]$ и $I \cap [c, b]$. Предположим, что Λ — интервал действительной оси, такой, что $\Lambda\sigma_e(\tau_1)=\varnothing$. Тогда для почти всех по μ_i-мере λ из Λ*

$$W_i(\cdot, \lambda) \in L_2[a, c], \qquad i=1, \ldots, m.$$

Более того, если $B(f)=0$ — граничное условие в точке a, которому удовлетворяют все функции f из $\mathfrak{D}(T)$, то для почти всех по μ_i-мере λ из Λ имеем $B(W_i(\cdot, \lambda))=0$, $i=1, \ldots, m$. Если $\Lambda\sigma_e(\tau_2)=\varnothing$, то подобные замечания могут быть сделаны о поведении ядер W_i в окрестности точки b.

Замечание. Если оба множества $\Lambda\sigma_e(\tau_1)$ и $\Lambda\sigma_e(\tau_2)$ пусты, то $\Lambda\sigma_e(\tau)$ пусто, и из теоремы 6.13 следует, что $W_i(\cdot, \lambda) \in L_2(a, b)$ почти всюду по μ_i-мере в Λ. Тогда очевидные небольшие изменения в доказательстве теоремы 5.4 позволят доказать, что если $B(f)=0$ — граничное условие, которому удовлетворяют все функции $f \in \mathfrak{D}(T)$, то $B(W_i(\cdot, \lambda))=0$ почти всюду по μ_i-мере в Λ. Следовательно, в этом случае мы имеем $W_i(\cdot, \lambda) \in \mathfrak{D}(T)$ для почти всех по μ_i-мере λ. Конечно, в случае когда множество $\Lambda\sigma_e(\tau)$ пусто, из теоремы 5 и следствия 4 вытекает, что $\Lambda\sigma(T)$ — множество изолированных точек, так что мы имеем дело с изолированным подмножеством точечного спектра оператора T.

Доказательство. Если уже установлено, что $W_i(\cdot, \lambda) \in L_2(a, c)$ для почти всех по μ_i-мере $\lambda \in \Lambda$, то можно дословно повторить доказательство теоремы 5.4 и доказать тем самым второе утверждение нашей теоремы. Так как, согласно теореме 5 и следствию 4, множество $\sigma_e(\tau_1)$ замкнуто, мы можем без ограничения общности считать Λ открытым множеством. Тогда достаточно показать, что каждая точка $\lambda \in \Lambda$ имеет окрестность Λ_0, такую, что $W_i(\cdot, \lambda) \in L_2(a, c)$ для почти всех по μ_i-мере $\lambda \in \Lambda_0$, ибо в этом случае Λ можно представить в виде объединения счетного числа таких окрестностей. Далее мы покажем, что для каждой точки $\lambda \in \Lambda$ существуют ее окрестность Λ_0, целое число k и базис $\sigma_1(\tau, \lambda), \ldots, \sigma_n(\tau, \lambda)$ множества решений уравнения $\tau\sigma = \lambda\sigma$, для которых

(a) в комплексной λ-плоскости существует окрестность U множества Λ_0, такая, что функции $\sigma_1(\cdot, \lambda), \ldots, \sigma_n(\cdot, \lambda)$ являются аналитическими для $\lambda \in U$;

(b) для каждого $\lambda \in U$ все $\sigma_1(\cdot, \lambda), \ldots, \sigma_k(\cdot, \lambda)$ лежат в $L_2(a, c)$;

(c) для $\lambda \in U$ никакая нетривиальная линейная комбинация функций $\sigma_{k+1}(\cdot, \lambda), \ldots, \sigma_n(\cdot, \lambda)$ не принадлежит $L_2(a, c)$.

Используя эти сведения, нашу теорему можно вывести из следствия 5.28. Поэтому достаточно проверить существование базиса $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, удовлетворяющего условиям (a), (b) и (c). Это можно сделать следующим образом. По теореме 9 индексы дефекта оператора τ_1 равны целому k, и для всех $\lambda_0 \in \Lambda$ уравнение $\tau_1\sigma = \lambda_0\sigma$ имеет в точности k линейно независимых решений с интегрируемым квадратом. Для каждого $\lambda_0 \in \Lambda$ теорема 10 гарантирует существование самосопряженного расширения $\hat{T}$ оператора $T_0(\tau)$, такого, что $\lambda_0 \notin \sigma(\hat{T})$. Тогда, поскольку резольвентное множество $\varrho(\hat{T})$ открыто, некоторая окрестность U_1 точки λ_0 содержится в $\varrho(\hat{T})$. Предположим, кроме того, что пересечение множества U_1 с действительной осью содержится в Λ. Для $\mu \in U_1$ пусть $A(\mu)$ обозначает всюду определенный ограниченный оператор $(\hat{T} - \mu I)^{-1}$. Полагая $K(\alpha, \beta) = (\hat{T} - \alpha I) A(\beta)$, мы имеем $K(\alpha, \alpha) = I$ и $K(\alpha, \beta) K(\beta, \gamma) = K(\alpha, \gamma)$. Более того, $K(\alpha, \beta) = (\hat{T} - \beta I)\ A(\beta) + (\beta - \alpha)\ A(\beta) = I + (\beta - \alpha)\ A(\beta)$. Таким образом, функция $K(\alpha, \beta)$ ограничена и аналитически зависит от α и β для $\alpha, \beta \in U_1$. Пусть $\mathfrak{N}_\alpha = \{f \mid T_0(\tau_1)^* f = \alpha f\}$ для $\alpha \in U_1$. Тогда если $f \in \mathfrak{N}_\alpha$, то мы имеем

$$(T_1(\tau_1) - \beta I) K(\alpha, \beta) f = (T_1(\tau_1) - \beta I) f + (\beta - \alpha)(T_1(\tau_1) - \beta I) A(\beta) f =$$
$$= (T_1(\tau_1) - \beta I) f + (\beta - \alpha) f = (T_1(\tau_1) - \alpha I) f = 0.$$

Таким образом, $K(\alpha, \beta)$ определяет взаимно однозначное отображение множества $\mathfrak{N}_\alpha$ в $\mathfrak{N}_\beta$. Аналогично обратное к $K(\alpha, \beta)$ отображение $K(\beta, \alpha)$ взаимно однозначно отображает множество $\mathfrak{N}_\beta$ на $\mathfrak{N}_\alpha$. Таким образом, $K(\alpha, \beta)$ определяет взаимно однозначное отображение множества $\mathfrak{N}_\beta$ на $\mathfrak{N}_\alpha$. Пусть $\hat{\sigma}_1(\cdot, \lambda_0), \ldots, \hat{\sigma}_n(\cdot, \lambda_0)$ — базис пространства Σ решений уравнения $\tau\sigma = \lambda_0\sigma$ и этот базис выбран так, что $\hat{\sigma}_1, \ldots, \hat{\sigma}_k$ — базис k-мерного подпространства $\mathfrak{N}_{\lambda_0} = L_2(a, c) \cap \Sigma$ пространства Σ. Положим

$$\sigma_i(\cdot, \lambda) = K(\lambda, \lambda_0)\hat{\sigma}_i(\cdot, \lambda_0), \quad \lambda \in U_1, \quad i \leqslant k,$$

и для $\lambda \in U_1$ и $i > k$ определим $\sigma_i(\cdot, \lambda)$ уравнениями

$$\tau_1\sigma_i = \lambda\sigma_i, \quad \sigma_i^{(j)}(c, \lambda) = \hat{\sigma}_i^{(j)}(c, \lambda_0), \quad i > k, \quad \lambda \in U_1, \quad j = 0, \ldots, n.$$

Тогда, согласно следствию 1.5, функция $\sigma_i(t, \lambda)$ и ее первые $n-1$ производных непрерывно зависят от t и аналитически от λ для $t \in (a, c]$ и $\lambda \in U_1$. При $i \leqslant k$ о функциях $\sigma_i(\cdot, \lambda)$ нам только известно, что $\tau_1\sigma_i(\cdot, \lambda) = \lambda\sigma_i(\cdot, \lambda)$ и $\sigma_i(\cdot, \lambda)$ являются аналитическими вектор-функциями от λ со значениями в $L_2(a, c)$. Однако по лемме 2.16 отсюда немедленно следует, что функции $\sigma_i(\cdot, \lambda)$, $i \leqslant k$, и их первые $n-1$ производных непрерывно зависят от t и аналитически от λ для $\lambda \in U_1$. Следовательно, определитель Вронского

$$W(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \sigma_1(c, \lambda) & \sigma_1'(c, \lambda) & \ldots & \sigma_1^{(n-1)}(c, \lambda) \\ \sigma_2(c, \lambda) & \sigma_2'(c, \lambda) & \ldots & \sigma_2^{(n-1)}(c, \lambda) \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \sigma_n(c, \lambda) & \sigma_n'(c, \lambda) & \ldots & \sigma_n^{(n-1)}(c, \lambda) \end{pmatrix}$$

есть аналитическая функция для $\lambda \in U_1$. Так как по теореме 1.3 n векторов $[\sigma_i(c, \lambda), \ldots, \sigma_i^{(n-1)}(c, \lambda)]$, $i = 1, \ldots, n$, линейно независимы для $\lambda = \lambda_0$, то $W(\lambda_0) \neq 0$, и поэтому существует окрестность $U \subseteq U_1$ точки λ_0, такая, что $W(\lambda) \neq 0$ для $\lambda \in U$. Но тогда n векторов $[\sigma_i(c, \lambda), \ldots, \sigma_i^{(n-1)}(c, \lambda)]$, $i = 1, \ldots, n$, линейно независимы для $\lambda \in U$ и, следовательно, $\sigma_1(\cdot, \lambda), \ldots, \sigma_n(\cdot, \lambda)$ линейно независимы для $\lambda \in U$. Так как для каждого $\lambda \in U$ функции $\sigma_1(\cdot, \lambda), \ldots, \sigma_k(\cdot, \lambda)$ образуют базис множества решений уравнения $\tau\sigma = \lambda\sigma$, лежащих в $L_2(a, c)$, то отсюда следует, что если положить $\Lambda_0 = \Lambda \cap U$, то тем самым будет построен базис $\sigma_1(\cdot, \lambda), \ldots, \sigma_n(\cdot, \lambda)$, удовлетворяющий условиям (a), (b) и (c), ч. т. д.

Из теорем, приведенных выше, следуют некоторые интересные результаты об индексах дефекта действительных операторов второго порядка.

14. Теорема (*Г. Вейль*). *Пусть* $\tau = -(d/dt)\,p(t)\,(d/dt) + q(t)$ — *действительный формально самосопряженный дифференциальный оператор второго порядка, определенный на интервале* $I = [a, \infty)$. *Пусть* $p(t) > 0$ *для* $t \in I$, *а функция* $q(t)$ *ограничена снизу. Тогда* τ *не имеет граничных значений в бесконечности, т. е. индексы дефекта оператора* τ *равны* $(1, 1)$.

Доказательство. Эквивалентность двух формулировок, данных для этой теоремы, следует из изложенного в § 2; в частности, из следствий 2.14 и 2.23 вытекает, что индексы дефекта оператора τ равны или $(1, 1)$, или $(2, 2)$; мы хотим исключить последний случай. Пусть действительное число λ выбрано настолько большим, что $q(t) + \lambda \geqslant 1$. По теореме 11 мы должны только показать, что не все решения уравнения $(\tau + \lambda)\,\sigma = 0$ интегрируемы в квадрате. Пусть f — нетривиальное решение этого уравнения, такое, что $f(a) = 0$. Интегрируя по частям, находим

$$\int_a^s \left[f(t) \frac{d}{dt}(p(t) f'(t)) \right] dt = [f(t)\,p(t)\,f'(t)]_a^s - \int_a^s p(t)\,[f'(t)]^2\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\,p(s)\,\frac{d}{ds}\,[f(s)]^2 - \int_a^s p(t)\,[f'(t)]^2\,dt,$$

и поэтому

$$0 = \int_a^s ((\tau + \lambda) f)(t)\,f(t)\,dt =$$

$$= \int_a^s \{p(t)\,[f'(t)]^2 + (q(t) + \lambda)\,[f(t)]^2\}\,dt - \frac{1}{2}\,p(s)\,\frac{d}{ds}\,[f(s)]^2.$$

Если f интегрируема в квадрате, то f^2 не может монотонно возрастать, поэтому производная функции $(f(s))^2$ обязательно принимает неположительные значения для больших s, т. е. существует последовательность $s_n \to \infty$, для которой

$$0 \geqslant \frac{1}{2}\,p(s_n)\,[f^2(s_n)]' = \int_a^{s_n} \{p(t)\,(f'(t))^2 + (q(t) + \lambda)\,f^2(t)\}\,dt.$$

Таким образом,

$$\int_a^\infty \{p(t)\,[f'(t)]^2 + (q(t) + \lambda)\,f^2(t)\}\,dt \leqslant 0.$$

Но оба слагаемых под интегралом неотрицательны, поэтому

$$\int_0^\infty f^2(t)\,dt \leqslant \int_0^\infty (q(t) + \lambda)\,f^2(t)\,dt \leqslant 0,$$

и, следовательно, f тождественно обращается в нуль. Полученное противоречие завершает доказательство.

15. Следствие. *Пусть* $\tau = -(d/dt)\,p(t)\,(d/dt) + q(t)$ — *произвольный действительный формально самосопряженный дифференциальный оператор второго порядка, определенный на интервале* $(-\infty, +\infty)$. *Пусть* $p(t) > 0$ *для* $t \in I$, *а функция* $q(t)$ *ограничена снизу. Тогда* τ *не имеет граничных значений ни в* $+\infty$, *ни в* $-\infty$, *т. е. индексы дефекта оператора* τ *равны* $(0, 0)$.

Доказательство. Это следует из теоремы 14 и следствия 2.21.

Некоторое усовершенствование рассуждений, использованных в доказательстве теоремы 14, приводит к расширению этого результата.

16. Теорема. *Пусть* $\tau = -(d/dt)\,p(t)\,(d/dt) + q(t)$ — *действительный формально самосопряженный дифференциальный оператор, определенный на интервале* $I = [a, \infty)$. *Пусть* $p(t) > 0$ *для* $t \in I$. *Предположим, что существует положительная непрерывно дифференцируемая функция* M, *определенная на* I, *такая, что*

(a) *функция* $(p(t))^{1/2} M'(t)\,(M(t))^{-3/2}$ *ограничена сверху*;

(b) $\int\limits_a^\infty (p(t)\,M(t))^{-1/2}\,dt = \infty$;

(c) *функция* $q(t)\,[M(t)]^{-1}$ *ограничена снизу*.

Тогда τ *не имеет граничных значений в бесконечности, т. е. индексы дефекта оператора* τ *равны* $(1, 1)$.

Доказательство. Как и в теореме 14, достаточно показать, что не всякое действительное решение уравнения $\tau\sigma = 0$ принадлежит $L_2(I)$. Мы будем вести рассуждения от противного.

Пусть f_1 — действительное решение уравнения $\tau\sigma = 0$, удовлетворяющее граничному условию $f_1(a) = 0$, $f_1'(a) = 1$, а f_2 — действительное решение уравнения $\tau\sigma = 0$, удовлетворяющее граничному условию $f_2(a) = 1/p(a)$, $f_2'(a) = 0$.

Тогда, интегрируя по частям, мы получаем

$$0 = \int\limits_a^s \tau f_1(t)\,\frac{f_1(t)}{M(t)}\,dt = -\frac{1}{2}\,p(s)\,(M(s))^{-1}\,(f_1^2(s))' +$$

$$+ \int\limits_a^s p(t)\,(f_1'(t))^2\,(M(t))^{-1}\,dt + \int\limits_a^s q(t)\,(M(t))^{-1}\,(f_1(t))^2\,dt -$$

$$- \int\limits_a^s p(t)\,f_1'(t)\,f_1(t)\,M'(t)\,(M(t))^{-2}\,dt.$$

Пусть $-k_1$ $(k_1 > 0)$ есть нижняя граница для $q(t)(M(t))^{-1}$, а $k_2 > 0$ — верхняя граница для $(p(t))^{1/2} M'(t)(M(t))^{-3/2}$. Тогда мы имеем

$$0 \geqslant -\frac{1}{2} p(s)(M(s))^{-1}(f_1^2(s))' - k_1 \int_a^s (f_1(t))^2\, dt -$$

$$- k_2 \int_a^s (p(t))^{1/2}(M(t))^{-1/2} |f_1'(t) f_1(t)|\, dt + \int_a^s p(t)(M(t))^{-1}(f_1'(t))^2\, dt.$$

Далее, так как f_1 принадлежит $L_2(I)$, производная $(f_1^2(s))'$ не может быть положительной для всех достаточно больших s, поэтому существует последовательность $\{s_n\}$, стремящаяся к ∞, такая, что $(f_1^2(s_n))' \leqslant 0$ для всех n. Таким образом, применяя неравенство Шварца к третьему члену предыдущей формулы, мы находим, что

$$k_1 \int_a^\infty (f_1(t))^2\, dt + k_2 \left\{ \int_a^{s_n} p(t)(M(t))^{-1}(f_1'(t))^2\, dt \right\}^{1/2} \left\{ \int_a^\infty (f_1(t))^2\, dt \right\}^{1/2} \geqslant$$

$$\geqslant \int_a^{s_n} p(t)(M(t))^{-1}(f_1'(t))^2\, dt.$$

Отсюда при $n \to \infty$ получаем

$$\int_a^\infty p(t)(M(t))^{-1}(f_1'(t))^2\, dt < \infty.$$

Таким же способом можно показать, что

$$\int_a^\infty p(t)(M(t))^{-1}(f_2'(t))^2\, dt < \infty.$$

Мы имеем

$$p(t)(f_1'(t) f_2(t) - f_1(t) f_2'(t)) = 1,$$

поскольку это очевидно для $t = a$, и ясно, что производная левой части этого равенства равна нулю. Таким образом,

$$\{(p(t))^{1/2}(M(t))^{-1/2} f_1'(t)\} f_2(t) - \{(p(t))^{1/2}(M(t))^{-1/2} f_2'(t)\} f_1(t) =$$
$$= \{p(t) M(t)\}^{-1/2}.$$

Поскольку в левой части выражения в фигурных скобках, а также функции f_1, f_2 принадлежат $L_2(I)$, отсюда следует, что $(p(t) M(t))^{-1/2} \in L_1(I)$. Но это противоречит предположению (b).

17. Следствие. *Пусть* $\tau = -(d/dt)^2 + q(t)$ — *действительный формально самосопряженный дифференциальный оператор, определенный на интервале* $I = [a, \infty)$. *Пусть функция* $t^{-2}q(t)$ *ограничена снизу в окрестности точки* ∞. *Тогда* τ *не имеет граничных значений в бесконечности.*

Доказательство. Чтобы доказать следствие, достаточно в теореме 16 положить $M(t) = t^2$.

Замечание. Множитель t^{-2} в предыдущей теореме можно заменить множителем $(t \log t)^{-2}$ или $(t \log t \log\log t)^{-2}$ и т. д. Теорема 16 и следствие 17 имеют «двусторонние» следствия, аналогичные следствию 15; мы оставляем формулировку этих следствий читателю.

Теоремы, доказанные выше, охватывают случаи, когда $q(t)$ ограничена снизу в бесконечности, а также некоторые случаи, когда $q(t)$ стремится к $-\infty$ при $t \to \infty$, но не «слишком быстро». Теперь мы приведем теорему, которая показывает, что происходит, когда $q(t)$ стремится к $-\infty$ быстро.

18. Лемма. *Пусть* q — *интегрируемая функция в интервале вида* (a, b) $(-\infty < b \leqslant \infty)$. *Тогда уравнение*

$$f''(t) + f(t) + q(t) f(t) = 0$$

имеет два решения, которые в окрестности точки b *представляются в виде*

$$e^{it} + o(1) \quad \text{и} \quad e^{-it} + o(1).$$

Доказательство. Пусть число x выбрано таким большим, что

$$\int_x^b |q(t)|\, dt < 1.$$

Рассмотрим B-пространство $CB[x, b)$ всех ограниченных непрерывных функций, определенных на $[x, b)$, с нормой $|f| = \sup_{x \leqslant t < b} |f(t)|$. В этом пространстве рассмотрим следующее линейное преобразование:

$$(Mf)(t) = \int_t^b \sin(s - t)\, q(s) f(s)\, ds.$$

Так как $|(Mf)(t)| \leqslant |f| \int_t^b |q(s)|\, ds$, то мы имеем $|M| < 1$. Более того, $(Mf)(t) = o(1)$ при $t \to b$ для каждой функции $f \in CB(x, b)$. По лемме VII.3.4 отображение $I + M$ имеет обратное, так что, в частности, уравнение

$$e^{\pm it} = f(t) + (Mf)(t) = f(t) + \int_t^b \sin(s-t)\, q(s) f(s)\, ds$$

имеет единственное решение f из $CB[x, b)$. Так как $(Mf)(t) = o(1)$, то очевидно, что $f(t) = e^{it} + o(1)$ при $t \to \infty$. Дифференцируя предыдущее уравнение, мы находим, что

$$\pm ie^{\pm it} = f'(t) - \int_t^b \cos(s-t)\, q(s) f(s)\, ds,$$

$$-e^{\pm it} = f''(t) + q(t) f(t) - \int_t^b \sin(s-t)\, q(s) f(s)\, ds,$$

откуда

$$f''(t) + q(t) f(t) + f(t) = 0,$$

ч. т. д.

19. Следствие. *Предположим, что функция $b(\cdot)$ такова, что*

$$\int_a^b |2b'(t) + (b(t))^2|\, dt < \infty \qquad (-\infty < a < b \leqslant \infty).$$

Тогда уравнение

$$f''(t) + b(t) f'(t) + f(t) = 0$$

имеет в окрестности точки b два решения соответственно вида

$$f(t) = e^{it} \left[\exp\left(-\frac{1}{2}\int_a^t b(s)\, ds\right)\right](1 + o(1)),$$

$$f(t) = e^{-it} \left[\exp\left(-\frac{1}{2}\int_a^t b(s)\, ds\right)\right](1 + o(1)).$$

Доказательство. Пусть f — решение данного уравнения. Напишем f в виде

$$f(t) = g(t) \exp\left(-\frac{1}{2}\int_a^t b(s)\, ds\right).$$

Тогда

$$f'(t) = \left[\exp\left(-\frac{1}{2}\int_a^t b(s)\,ds\right)\right]\left(g'(t) - \frac{1}{2}b(t)g(t)\right),$$

$$f''(t) = \left[\exp\left(-\frac{1}{2}\int_a^t b(s)\,ds\right)\right]\left(g''(t) - b(t)g'(t) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}b'(t)g(t) + \frac{1}{4}b^2(t)g(t)\right).$$

Таким образом, g удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$g''(t) - \left(\frac{1}{2}b'(t) + \frac{1}{4}b^2(t)\right)g(t) + g(t) = 0,$$

и наше заключение непосредственно следует из предыдущей леммы.

20. Теорема. *Пусть* $\tau = -(d/dt)p(t)(d/dt) - q(t)$ — *формальный дифференциальный оператор второго порядка, определенный на интервале* $[a,b)$ $(a < b \leqslant \infty)$. *Допустим, что*

(a) $p(t) > 0$ *и* $q(t) > 0$ *для* t, *достаточно близких к* b;

(b) $$\int_a^b \left|\left[\frac{[q(t)p(t)]'}{(q(t))^{3/2}(p(t))^{1/2}}\right]' + \frac{1}{4}\frac{\{[q(t)p(t)]'\}^2}{(p(t))^{3/2}(q(t))^{5/2}}\right| dt < \infty.$$

Тогда

(a) *если* $\int_x^b |p(t)q(t)|^{-1/2}\,dt = \infty$ *для всех* x, *то* τ *не имеет граничных значений в точке* b;

(b) *если для достаточно больших* x

$$\int_x^b |p(t)q(t)|^{-1/2}\,dt < \infty,$$

то τ *имеет два граничных значения в точке* b.

Доказательство. Применяя следствие 2.21, мы можем перейти без существенных изменений от интервала $[a, b)$ к любому интервалу $[x, b)$, где $x > a$. Таким образом, мы можем допустить, не уменьшая общности, что $p(t) > 0$ и $q(t) > 0$ для $t \in [a, \infty)$. В этом случае положим

$$s(t) = \int_a^t (q(t))^{1/2}(p(t))^{-1/2}\,dt,$$

так что $s'(t) = (q(t))^{1/2}(p(t))^{-1/2}$. Напишем решение f уравнения $\tau f = 0$ в виде $f(t) = g(s(t))$. Тогда

$$f'(t) = g'(s(t))(q(t))^{1/2}(p(t))^{-1/2},$$

$$p(t) f'(t) = g'(s(t))(q(t)p(t))^{1/2},$$

$$(p(t)f'(t))' = g''(s(t))q(t) + ((q(t)p(t))^{1/2})' g'(s(t)).$$

Таким образом, g удовлетворяет уравнению

[*] $$g''(s) + B(s)g'(s) + g(s) = 0,$$

где

$$B(s(t)) = b(t) = (q(t))^{-1}[(p(t)q(t))^{1/2}]' =$$
$$= \frac{1}{2}(p(t))^{-1/2}(q(t))^{-3/2}(p(t)q(t))'.$$

Отображение $t \to s(t)$ переводит интервал $[a, b)$ в интервал $[0, c)$, где

$$c = \int_a^b (q(t))^{1/2}(p(t))^{-1/2} dt.$$

В силу равенства

$$B'(s) = (s'(t))^{-1}b'(t) = \frac{1}{2}[(q(t))^{-1/2}(p(t))^{1/2}]\left[\frac{(p(t)q(t))'}{(p(t))^{1/2}(q(t))^{3/2}}\right]'$$

отсюда следует, что

$$\int_0^c |2B'(s) + (B(s))^2|\, ds =$$

$$\int_a^b |2(s'(t))^{-1}b'(t) + = \frac{1}{4}(p(t))^{-1}(q(t))^{-3}\{(p(t)q(t))'\}^2|\, s'(t)\, dt =$$

$$= \int_a^b |2b'(t) + \frac{1}{4}[(q(t))^{1/2}(p(t))^{-1/2}][(p(t))^{-1}(q(t))^{-3}]\{(p(t)q(t))'\}^2|\, dt =$$

$$= \int_a^b \left|2b'(t) + \frac{1}{4}[(p(t))^{-3/2}(q(t))^{-5/2}]\{(p(t)q(t))'\}^2\right| dt < \infty.$$

Таким образом, по предположению уравнение [*] удовлетворяет условиям предыдущего следствия. Отсюда следует, что уравнение $\tau\sigma = 0$ имеет два решения вида

$$f_1(t) = (p(a)\, q(a))^{-1/4} e^{is(t)} \exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^{s(t)} B(s)\, ds\right)(1+o(1)) =$$

$$= (p(a)\, q(a))^{-\frac{1}{4}} e^{is(t)} \exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_a^t b(t)\,(q(t))^{\frac{1}{2}}\,(p(t))^{-\frac{1}{2}} dt\right)(1+o(1)) =$$

$$= (p(a)\, q(a))^{-1/4}\, e^{is(t)} \exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_a^t (p(t)\, q(t))^{-1/2} \times\right.$$

$$\left.\times\, ((p(t)\, q(t))^{1/2})' dt\right)(1+o(1)) =$$

$$= (p(a)\, q(a))^{-1/4} e^{is(t)} \exp\left(-\frac{1}{2}\log (p(x)\; q(x))^{1/2}\Big|_{x=a}^{x=t}\right)(1+o(1)) =$$

$$= e^{is(t)}\,(p(t)\, q(t))^{-1/4}\,(1+o(1))$$

и

$$f_2(t) = e^{-is(t)}\,(p(t)\, q(t))^{-1/4}\,(1+o(1))$$

в окрестности точки $t = b$. Если

$$\int\limits_a^b (p(t)\, q(t))^{-1/2}\, dt = \infty,$$

то ни одно из этих решений не принадлежит $L_2[a, b)$. Тогда, согласно следствию 2.14, индексы дефекта оператора τ равны между собой, а в силу следствия 2.23 и теоремы 11 они не могут равняться (0, 0) или (2, 2). Поэтому они равны (1, 1). Так как имеются два граничных значения в точке a, то, как показывает лемма XII.4.21, в точке b граничных значений нет.

Если $\int\limits_a^b (p(t)\, q(t))^{-1/2} < \infty$, то оба решения f_1 и f_2 принадлежат $L_2[a, b)$. Кроме того, они линейно независимы. В самом деле, если $f_1 = cf_2$, то функция $e^{2is(\cdot)}$, а поэтому и $s(\cdot)$, постоянна в окрестности точки b и, следовательно,

$$s'(t) = (q(t))^{1/2}\,(p(t))^{-1/2} = 0,$$

что противоречит предположению. Согласно теоремам 11 и 2.19 и лемме XII.4.22, отсюда следует, что рассматриваемый оператор имеет два граничных значения в точке b, ч. т. д.

21. Следствие. *В предположениях доказанной теоремы имеем:*

(a) *если* $\int\limits_x^b \{p(t)\, q(t)\}^{-1/2}\, dt < \infty$ *для некоторого достаточно* *большого значения x, то спектр каждого самосопряженного расширения T оператора τ состоит исключительно из изолированных точек;*

(b) *если* $\int_x^b \{p(t)\,q(t)\}^{-1/2}\,dt = \infty$ *для каждого значения* $x > a$ *и q монотонно возрастает, то спектр каждого самосопряженного расширения T оператора $T_0(\tau)$ всюду непрерывен и заполняет всю действительную ось.*

Доказательство. (a) Мы будем использовать обозначения предыдущей теоремы и ее доказательства. Снова, не уменьшая общности, мы можем допустить, что p и q положительны; в случае (a) по теореме 11 индексы дефекта равны (2, 2). Поэтому утверждение вытекает из следствия 12.

(b) В ходе доказательства предыдущей теоремы было показано, что в некоторой окрестности точки b уравнение $\tau f = 0$ имеет решения вида

$$f_1(t) = e^{is(t)}\,\{p(t)\,q(t)\}^{-1/4}\,(1 + o(1))$$

и

$$f_2(t) = e^{-is(t)}\,\{p(t)\,q(t)\}^{-1/4}\,(1 + o(1)),$$

где

$$s(t) = \int_a^t (q(t))^{1/2}\,(p(t))^{-1/2}\,dt.$$

Таким образом, уравнение $\tau f = 0$ имеет решения вида

$$\frac{1}{2i}\,(f_1(t) - f_2(t)) = \{\sin s(t)\}\,\{p(t)\,q(t)\}^{-1/4}\,(1 + o(1))$$

и

$$\{\cos s(t)\}\,\{p(t)\,q(t)\}^{-1/4}\,(1 + o(1)).$$

Следовательно, любое ненулевое действительное решение уравнения $\tau f = 0$ имеет вид

[*] $$k_1 \sin(s(t) + k)\,\{p(t)\,q(t)\}^{-1/4}\,(1 + o(1)), \qquad k_1 \neq 0.$$

Теперь предположим, что

$$\int_a^b (p(t)\,q(t))^{-1/2}\,dt = \infty.$$

Мы докажем, что ни одна функция вида [*] не может принадлежать $L_2[a, b)$. Пусть это не так. Тогда для некоторого постоянного k

$$\int_a^b \sin^2(s(t)+k)\,(p(t)\,q(t))^{-1/2}\,dt < \infty.$$

Выполняя ту же замену переменных, что и в доказательстве предыдущей теоремы, мы получаем

$$\int_0^c \sin^2(s(t)+k)\,[p(t(s))\,q(t(s))]^{-1/2}\,[q(t(s))]^{-1/2}\,[p(t(s))]^{1/2}\,ds =$$

$$= \int_0^c \sin^2(s+k)\,(q(s))^{-1}\,ds < \infty,$$

где функция $t(s)$ определяется соотношением $t(s(t)) = t$. Поскольку $t(\cdot)$ и $q(\cdot)$ монотонно возрастают, мы имеем

$$\int_{\pi/2}^c \cos^2(s+k)\,[q(t(s))]^{-1}\,ds = \int_{\pi/2}^c \sin^2\left(s+k-\frac{\pi}{2}\right)[q(t(s))]^{-1}\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\pi/2}^c \sin^2\left(s+k-\frac{\pi}{2}\right)\left[q\left(t\left(s-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right]^{-1} ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^c \sin^2(s+k)\,[q(t(s))]^{-1}\,ds < \infty.$$

Поэтому

$$\int_a^b [p(t)\,q(t)]^{-1/2}\,dt = \int_0^c [q(t(s))]^{-1}\,ds =$$

$$= \int_0^{\pi/2} [q(t(s))]^{-1}\,ds + \int_{\pi/2}^c [\sin^2(s+k)+\cos^2(s+k)]\,[q(t(s))]^{-1}\,ds < \infty,$$

что противоречит предположению.

Отсюда следует, что уравнение $\tau f = 0$ не имеет *ни одного* решения из $L_2[a, b)$. Таким образом, 0 не принадлежит точечному спектру симметрического расширения T оператора $T_0(\tau)$. Далее, согласно следствию 8, $0 \in \sigma_e(\tau)$. Поэтому в силу следствия 3 и теоремы 5 $0 \in \sigma(T)$. Из теоремы XII.2.6 и следствия XII.2.7 легко получаем, что $E(\{0\}; T) = 0$, и поэтому множество $T\mathfrak{D}(T)$ всюду плотно. Таким образом, λ принадлежит непрерывному спектру оператора T. Так как для каждого действительного λ функция $q(t)+\lambda$ удовлетворяет тем же условиям, что и $q(t)$, то каждое действительное число λ принадлежит непрерывному спектру оператора T, ч. т. д.

Частный случай $p=1$ теоремы 20 приводит к следующему утверждению.

22. Следствие. *Пусть дифференциальный оператор второго порядка*

$$\tau = -\left(\frac{d}{dt}\right)^2 - q(t)$$

задан на интервале вида $[a, b)$, *где* $a < b \leqslant \infty$. *Допустим, что*

(a) *функция* $q(t)$ *положительна для* t, *достаточно близких к* b;

(b) *для* x, *достаточно близких к* b,

$$\int_x^b \left| \left[\frac{(q(t))'}{(q(t))^{3/2}} \right]' + \frac{1}{4} \frac{[(q(t))']^2}{(q(t))^{5/2}} \right| dt < \infty.$$

Тогда

(a) *если для всех* x

$$\int_x^b |q(t)|^{-1/2}\, dt = \infty,$$

то τ *не имеет граничных значений в точке* b;

(b) *если для* x, *достаточно длизких к* b,

$$\int_x^b |q(t)|^{-1/2}\, dt < \infty,$$

то τ *имеет два граничных значения в точке* b.

В доказанных до сих пор теоремах рассматривался вопрос о существовании граничных значений дифференциального оператора τ в интервале вида $[a, b)$, где b конечно или бесконечно. В следующей системе теорем рассматриваются случаи, когда интервал имеет вид $(a, b]$, где a конечно. Не уменьшая общности, можно предполагать, что $a=0$.

23. Теорема. *Пусть*

$$\tau = -\left(\frac{d^2}{dt^2}\right) + q(t)$$

— действительный самосопряженный формальный дифференциальный оператор второго порядка, определенный на интервале $I=(0, b]$. *Тогда*

(a) *если* $\varliminf_{t\to 0} t^2 q(t) \geqslant 3/4$, *то* τ *не имеет граничных значений* *в нуле*;

(b) *если* $\overline{\lim\limits_{t\to 0}}\ |t^2 q(t)| < 3/4$, *то* τ *имеет два граничных значения в нуле.*

Доказательство. (a) Применяя следствие 2.21, мы можем без каких-либо существенных изменений перейти к рассмотрению любого интервала $(0, b_1]$, $0 < b_1 < b$. Поэтому мы можем, не уменьшая общности, предполагать, что $q(t) \geqslant (3/4)\, t^{-2}$ для $t \in I$. Пусть f — единственное решение уравнения $\tau\sigma = 0$, удовлетворяющее граничным условиям $f(b) = 0$, $f'(b) = -2$, а f_1 — единственное решение уравнения

$$[*] \qquad \sigma'' - (3/4)\, t^{-2}\sigma = 0,$$

удовлетворяющее граничным условиям $f_1(b) = 0$, $f_1'(b) = -1$. Общее решение уравнения [*] имеет вид

$$\sigma(t) = at^{-1/2} + bt^{3/2}.$$

Поэтому

$$f_1(t) = \frac{1}{2}\left(b^{3/2}t^{-1/2} - b^{-1/2}t^{3/2}\right)$$

и, следовательно, f_1 не интегрируема в квадрате в $(0, b]$. Далее мы докажем, что функция f_1 положительна и $f(t) > f_1(t)$ для всех t из интервала $(0, b)$, так что f не интегрируема в квадрате в $(0, b)$. Тогда утверждение (a) будет следовать из теоремы 11 и того факта, что, поскольку, согласно следствию 2.14, индексы дефекта оператора τ равны между собой, то в силу леммы XII.4.21 в нуле имеется четное число граничных значений. Функция f_1 положительна в интервале $(0, b)$. В самом деле, допустим, что она имеет второй нуль в точке c. Тогда, интегрируя по частям, мы находим, что

$$0 = \int_c^b \left[-f_1''(t) + \frac{3}{4} t^{-2} f_1(t) \right] f_1(t)\, dt =$$

$$= -[f_1'(t) f_1(t)]_c^b + \int_c^b \left\{ [f_1'(t)]^2 + \frac{3}{4} t^{-2} [f_1(t)]^2 \right\} dt > 0,$$

и тем самым приходим к противоречию.

Граничные условия, наложенные на f и f_1, показывают, что

$$['] \qquad f_1'(t) > f'(t), \qquad f(t) > f_1(t),$$

в интервале вида (c_0, b), где $0 \leqslant c_0 < b$. Доказательство будет завершено, если мы покажем, что $c_0 = 0$. Пусть c_0 — наибольшее число, для которого неравенства ['] неверны в интервале $[c_0, b)$.

Если $c_0 \neq 0$, то либо $f_1(c_0) = f(c_0)$, либо $f_1'(c_0) = f'(c_0)$. Далее

$$f_1'(c_0) = -1 - \int_{c_0}^{b} f_1''(s)\,ds = -1 - \int_{c_0}^{b} \frac{3}{4} s^{-2} f_1(s)\,ds >$$

$$> -1 - \int_{c_0}^{b} \frac{3}{4} s^{-2} f(s)\,ds \geqslant -1 - \int_{c_0}^{b} q(s) f(s)\,ds =$$

$$= -1 - \int_{c_0}^{b} f''(s)\,ds = 1 + f'(c_0) > f'(c_0),$$

т. е. $f_1'(c_0) > f'(c_0)$. Поэтому обязательно $f(c_0) = f_1(c_0)$. Но это невозможно, потому что

$$f(c_0) = -\int_{c_0}^{b} f'(t)\,dt > -\int_{c_0}^{b} f_1'(t)\,dt = f_1(c_0).$$

Отсюда мы заключаем, что $c_0 = 0$ и $f(t) > f_1(t)$ на всем интервале $(0, b)$. Так как f_1 положительна и не интегрируема в квадрате, то и f не может быть квадратично интегрируемой.

(b) В силу теоремы 11 достаточно показать, что каждое решение уравнения $\tau\sigma = 0$ интегрируемо в квадрате. Пусть f — действительное решение этого уравнения. Пусть f_2 — решение уравнения

[**] $$\sigma'' - kt^{-2}\sigma = 0 \qquad \left(0 < k < \frac{3}{4}\right).$$

Пусть f_2 подчиняется граничным условиям

$$f_2(b) = |f(b)| + 1; \qquad f_2'(b) = -|f'(b)| - 1.$$

Каждое решение уравнения [**] имеет вид $at^{e_1} + bt^{e_2}$, где

$$e_1 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{4} + k\right)^{1/2} > -\frac{1}{2}$$

и

$$e_2 = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + k\right)^{1/2} > 0.$$

Поэтому f_2 интегрируема в квадрате. Очевидно, что f_2 — положительная выпуклая вверх функция.

Снова, не уменьшая общности, мы можем предполагать, что для некоторого постоянного числа k, $0 < k < 3/4$,

$$0 \leqslant |q(t)| < kt^{-2}, \qquad 0 < t \leqslant b.$$

Из граничных условий следует, что $f_2(t) > |f(t)|$ и $f_2'(t) < -|f'(t)|$ для t в окрестности точки b. Пусть c — наименьшее действительное число из интервала $(0, b)$, такое, что эти два неравенства справедливы на всем интервале $(c, b]$. Тогда

$$f_2'(c) = -|f'(b)| - 1 - \int_c^b f_2''(t)\,dt = -|f'(b)| - 1 - \int_c^b kt^{-2} f_2(t)\,dt <$$

$$< -|f'(b)| - 1 - \int_c^b |q(t) f(t)|\,dt =$$

$$= -|f'(b)| - 1 - \int_c^b f''(t)\,dt = -|f'(b)| - 1 - |f'(b) - f'(c)| <$$

$$< -|f'(c)|.$$

Поэтому $f_2(c) = |f(c)|$. Но это невозможно, потому что

$$f_2(c) = |f(b)| + 1 - \int_c^b f_2'(t)\,dt > |f(b)| + 1 + \int_c^b |f'(t)|\,dt \geqslant$$

$$\geqslant |f(b)| + 1 + \left|\int_c^b f'(t)\,dt\right| =$$

$$= |f(b)| + 1 + |f(b) - f(c)| > |f(c)|.$$

Предыдущая теорема охватывает большинство случаев, когда функция q положительна, а также некоторые случаи, когда $q(t) \to -\infty$ при $t \to 0$, но не «слишком быстро». Следующий результат охватывает большинство случаев, когда $q(t) \to -\infty$ довольно быстро.

24. Теорема. *Пусть* $-(d/dt)^2 + q(t)$ — *действительный самосопряженный формальный дифференциальный оператор второго порядка, определенный на интервале* $I = (0, b]$. *Тогда, если* $q(t)$ *монотонно возрастает, то* τ *имеет два граничных значения в нуле.*

Доказательству предшествуют три леммы.

25. Лемма. *Пусть в замкнутом интервале* $[a, b]$ *функции* f_1 *и* f_2 *удовлетворяют уравнениям* $f_1'' = -q_1 f_1$ *и* $f_2'' = -q_2 f_2$. *Допустим, что*

(a) $f_1(t) \geqslant 0$ *для* $a \leqslant t \leqslant b$,

(b) $q_1(t) \geqslant q_2(t) \geqslant 0$ *для* $a \leqslant t \leqslant b$,

(c) $f_1(a) = f_2(a)$,

(d) $f_1'(a) = f_2'(a)$.

Тогда $f_1(t) \leqslant f_2(t)$ *для* $a \leqslant t \leqslant b$.

Доказательство. Сначала предположим, что $q_1(t) > q_2(t) \geqslant 0$ для $a \leqslant t \leqslant b$.

(a) Мы имеем $f_1(t) \leqslant f_2(t)$ для t, достаточно близких к точке a (но не совпадающих с ней). Действительно,

$$f_1''(a) = -q_1(a) f_1(a) < -q_2(a) f_2(a) = f_2''(a),$$

т. е. для t, достаточно близких к точке a,

$$\frac{f_1'(t) - f_1'(a)}{t-a} \leqslant \frac{f_2'(t) - f_2'(a)}{t-a},$$

и поэтому $f_1'(t) \leqslant f_2'(t)$. Так как $f_1(a) = f_2(a)$, то отсюда, очевидно, следует, что $f_1(t) \leqslant f_2(t)$.

(b) Пусть c — самая далекая от a точка, такая, что для $a \leqslant t \leqslant c$ мы имеем $f_1(t) \leqslant f_2(t)$. Таким образом, для $t > c$ и t, достаточно близких к c, $f_1(t) \geqslant f_2(t)$, т. е. график функции f_1 пересекает график функции f_2 в точке c. Поэтому $f_1'(c) \geqslant f_2'(c)$. Интегрируя по частям, находим, что

$$0 = \int_a^c [f_2''(t) + q_2(t) f_2(t)] f_1(t)\, dt =$$

$$= \int_a^c [f_2(t) f_1''(t) + q_2(t) f_2(t) f_1(t)]\, dt + [f_2'(t) f_1(t) - f_1'(t) f_2(t)]_a^c =$$

$$= \int_a^c f_1(t) f_2(t) [q_2(t) - q_1(t)]\, dt + f_1(c) [f_2'(c) - f_1'(c)] < 0,$$

ибо $f_1(t) f_2(t) > 0$ и $q_2(t) - q_1(t) < 0$ в первом слагаемом и $f_2'(c) - f_1'(c) \leqslant 0$ и $f_1(c) \geqslant 0$ во втором слагаемом. Это противоречие устанавливает лемму в частном случае, когда $q_1(t) > q_2(t) \geqslant 0$ для $a \leqslant t \leqslant b$. Общий случай, когда $q_1(t) \geqslant q_2(t) \geqslant 0$ для $a \leqslant t \leqslant b$, выводится из рассмотренного при помощи очевидного предельного перехода; мы предоставляем читателю провести рассуждение во всех деталях.

26. Следствие. *Пусть q — непрерывная отрицательная монотонно убывающая функция в конечном интервале $[a, b)$. Тогда каждое действительное решение f уравнения $f'' = qf$ равномерно ограничено.*

Доказательство. Следует рассмотреть только те решения, которые не обращаются тождественно в нуль. Возникают два случая: либо f имеет конечное число нулей в интервале $[a, b)$, либо f имеет в нем бесконечное число нулей. В первом случае мы можем без ограничения общности считать, что f не имеет нулей в $[a, b)$, поэтому можно предполагать, снова не уменьшая общности, что f положительна в $[a, b)$. Так как q отрицательна, то f выпукла вниз в $[a, b)$. Таким образом, если g — линейная функция, определенная соотношением $g(t) = f(a) + f'(a)(t-a)$, то $g \geqslant f$, откуда ограниченность f очевидна.

Теперь предположим, что f имеет бесконечное число нулей в $[a, b)$. Если c — точка накопления множества нулей и $a \leqslant c < b$, то $f(c) = f'(c) = 0$, откуда следует, что $f(t) = 0$ для всех t. Таким образом, следует рассматривать только случай, когда f имеет бесконечно возрастающую последовательность $s_1, s_2, \ldots$ нулей в $[a, b)$. Если $f(t) > 0$ между s_i и s_{i+1}, то f выпукла вверх между s_i и s_{i+1}, поэтому f имеет единственный максимум в некоторой точке $t = m_i$ между s_i и s_{i+1}. Более того, поскольку f не равняется тождественно нулю, $f'(s_{i+1}) \neq 0$. Так как $f(t) > 0$ для $s_i < t < s_{i+1}$, то значение $f'(s_{i+2})$ отрицательно. Таким образом, функция f отрицательна между s_{i+1} и s_{i+2}, положительна между s_{i+2} и s_{i+3} и т. д. Очевидно, f имеет единственный минимум $f(m_{i+1})$ между s_{i+1} и s_{i+2}, единственный максимум $f(m_{i+2})$ между s_{i+2} и s_{i+3} и т. д. Мы покажем, что $|f(m_i)| \geqslant |f(m_{i+1})| \geqslant \geqslant |f(m_{i+2})| \geqslant \ldots$. Тем самым будет установлен требуемый результат.

На интервале $[s_{i+1}, m_{i+1}]$ рассмотрим две функции $-f(t)$ и $f_1(t) = +f(2s_{i+1} - t)$. Мы имеем $(-f)'' = q(-f)$, $f_1'' = q_1 f$, где $q_1(t) = q(2s_{i+1} - t) \geqslant q(t)$, поскольку q монотонно убывает. По предыдущей лемме $-f(t) \leqslant f_1(t)$ в $[s_{i+1}, m_{i+1}]$. В частности, $-f(m_{i+1}) = |f(m_{i+1})| \leqslant f_1(m_{i+1})$. Так как $0 \leqslant -f(t) \leqslant f_1(t) = = f(2s_{i+1} - t)$ для $t \in [s_{i+1}, m_{i+1}]$, то ни одна из точек $2s_{i+1} - t$ не может лежать в интервале $[s_{i-1}, s_i]$ (где функция $f(t)$ отрицательна). Поэтому $2s_{i+1} - m_{i+1} \in [s_i, s_{i+1}]$, так что $f_1(m_{i+1}) = = f(2s_{i+1} - m_{i+1}) \leqslant f(m_i)$, ч. т. д.

27. Следствие. *Пусть q — непрерывная отрицательная монотонно возрастающая функция на конечном интервале $(a, b]$. Тогда каждое действительное решение f уравнения $f'' = qf$ равномерно ограничено.*

Доказательство. Чтобы доказать это следствие, достаточно сделать замену переменной $t \longrightarrow -t$ в предыдущем следствии.

Доказательство теоремы 24. Если функция q из теоремы 24 неотрицательна для значений t, достаточно близких к нулю, то она ограничена, и требуемый результат следует из теоремы 23. Если q отрицательна для t, достаточно близких к нулю, то предыдущее следствие приводит к требуемому результату.

Теперь мы хотим доказать один результат об индексах дефекта некоторого дифференциального оператора порядка n, подобный теоремам, приведенным выше, но не столь глубокий.

28. Теорема. *Пусть заданы два формально самосопряженных дифференциальных оператора τ и τ', причем порядок последнего не больше, чем порядок первого. Допустим, что*

(a) $\mathfrak{D}(T_1(\tau')) \supseteq \mathfrak{D}(T_1(\tau))$;

(b) *если A — любое ограниченное подмножество из $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$, рассматриваемое как подмножество пространства $\mathfrak{H}$, то сужение оператора $T_1(\tau')$ на A является непрерывным отображением множества A в $\mathfrak{H}$.*

Тогда, в предположении, что $\tau+\tau'$ имеет ненулевой старший коэффициент,

(A) *гильбертовы пространства $\mathfrak{D}(T_1(\tau+\tau'))$ и $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$ состоят из одних и тех же элементов и имеют эквивалентные топологии;*

(B) *дифференциальные операторы τ и τ' имеют равные индексы дефекта.*

Доказательство. Сначала докажем утверждение (A). Пусть f принадлежит области определения оператора $T_1(\tau)$. Тогда, согласно предположению (a), f принадлежит области определения оператора $T_1(\tau')$, т. е. обе функции τf и $\tau' f$ интегрируемы в квадрате. Поэтому $(\tau+\tau')f$ тоже интегрируема в квадрате и, таким образом, $\mathfrak{D}(T_1(\tau)) \subseteq \mathfrak{D}(T_1(\tau+\tau'))$.

Остальная часть доказательства разбивается на следующие шаги.

(a′) Топология гильбертова пространства $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$ эквивалентна индуцированной топологии этого пространства, рассматриваемого как подпространство гильбертова пространства $\mathfrak{D}(T_1(\tau+\tau'))$.

Действительно, пусть $\{f_n\}$ — последовательность из $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$. Предположим, что $\{f_n\}$ сходится к нулю в топологии пространства $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$. Тогда по предположению (b) $\{f_n\}$ сходится к нулю в топологии пространства $\mathfrak{D}(T_1(\tau+\tau'))$. Обратно, пусть $\{f_n\}$ сходится к нулю в топологии пространства $\mathfrak{D}(T_1(\tau+\tau'))$, т. е.

$$[*] \qquad |f_n| + |T_1(\tau+\tau')f_n| \longrightarrow 0.$$

Если последовательность $\{f_n\}$ не ограничена в $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$, то существует подпоследовательность $\{f_{n_i}\}$, такая, что $h_{n_i} = f_{n_i}/|T_1(\tau)f_{n_i}|$ сходится к нулю в $\mathfrak{H}$ и ограничена в $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$. По условию (b) отсюда следует, что $T_1(\tau')h_{n_i}$ сходится к нулю в $\mathfrak{H}$. Однако соотношение [*] показывает, что $|T_1(\tau+\tau')h_{n_i}| \longrightarrow 0$;

следовательно,

$$1 = |T_1(\tau) h_{n_i}| \leqslant |T_1(\tau+\tau') h_{n_i}| + |T_1(\tau') h_{n_i}| \to 0,$$

и мы пришли к противоречию. Итак, последовательность $\{f_n\}$ ограничена в $\mathfrak{D}(T)$ и, согласно [*], сходится к нулю в $\mathfrak{H}$. Из условия (b) следует, что $T_1(\tau') f_n \to 0$. Следовательно, в силу [*],

$$|T_1(\tau) f_n| \leqslant |T_1(\tau+\tau') f_n| + |T_1(\tau') f_n| \to 0,$$

что и требовалось доказать

(b′) $\mathfrak{D}(\overline{T_0(\tau)}) = \mathfrak{D}(\overline{T_0(\tau+\tau')})$.

Пусть $z \in \mathfrak{D}(\overline{T_0(\tau)})$ и (ср. с леммой XII.4.5(c)) $z_n \in \mathfrak{D}(T_0(\tau))$, причем $z_n \to z$ в топологии пространства $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$. По определению 2.8 $\mathfrak{D}(T_0(\tau)) = \mathfrak{D}(T_0(\tau+\tau'))$. Таким образом, согласно (a′), $z_n \to z$ в топологии пространства $\mathfrak{D}(T_1(\tau+\tau')) \supseteq \mathfrak{D}(T_1(\tau))$, так что $z \in \mathfrak{D}(\overline{T_0(\tau+\tau')})$. Обратно, пусть $z \in \mathfrak{D}(\overline{T_0(\tau+\tau')})$ и $z_n \in \mathfrak{D}(T_0(\tau+\tau'))$, причем $z_n \to z$ в топологии пространства $\mathfrak{D}(T_1(\tau+\tau'))$. Тогда $\lim\limits_{m,\, n\to\infty} (z_m - z_n) = 0$ в топологии пространства $\mathfrak{D}(T_1(\tau+\tau'))$, так что, согласно (a), $\{z_n\}$ — фундаментальная последовательность в (полном) гильбертовом пространстве $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$. Поэтому она сходится к некоторому элементу z_∞ из $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$, и ясно, что $z_\infty \in \mathfrak{D}(\overline{T_0(\tau)})$. С другой стороны, из (a) следует, что $z_\infty = z$. Таким образом, утверждение (b′) доказано.

(c′) Пусть $\mathfrak{D}_+$, $\mathfrak{D}_-$ — дефектные пространства оператора $T_0(\tau)$, а $\mathfrak{D}'_+$, $\mathfrak{D}'_-$ — дефектные пространства оператора $T_0(\tau+\tau')$. Тогда

$$\dim \mathfrak{D}_+ \geqslant \dim \mathfrak{D}'_+; \quad \dim \mathfrak{D}_- \geqslant \dim \mathfrak{D}'_-,$$

где $\dim \mathfrak{X}$ обозначает размерность (конечномерного) подпространства $\mathfrak{X}$ гильбертова пространства.

Ради определенности предположим, что первое из этих неравенств неверно. Чтобы упростить обозначения, положим $\mathfrak{D}_0 = \mathfrak{D}(\overline{T_0(\tau)}) = \mathfrak{D}(\overline{T_0(\tau+\tau')})$. Тогда по теореме XII.4.19 и нашему предположению

$$\dim\{(T_1(\tau+\tau') - \lambda I)(\mathfrak{D}_0 + \mathfrak{D}_+)\}^\perp \geqslant \dim\{(T_1(\tau+\tau') - \lambda I)\mathfrak{D}_0\}^\perp - \\ - \dim\{(T_1(\tau+\tau') - \lambda I)\mathfrak{D}_+\} \geqslant \dim \mathfrak{D}'_+ - \dim \mathfrak{D}_+ > 0$$

для любого λ, такого, что $\operatorname{Im}\lambda < 0$. Следовательно, для всех таких λ множество $(T_1(\tau+\tau') - \lambda I)(\mathfrak{D}_0 + \mathfrak{D}_+)$ не является всюду плотным в L_2. Мы получим противоречие, если покажем, что множество $(T_1(\tau+\tau') + niI)(\mathfrak{D}_0 + \mathfrak{D}_+)$ всюду плотно в L_2 для достаточно больших n. Во-первых, заметим, что

$$\begin{aligned}|(T_1(\tau)+\mu iI)(d_0+d_+)|^2 &\geqslant \mu^2|d_0+d_+|^2+\\ +(T_1(\tau)(d_0+d_+),\ \mu i(d_0+d_+))&+(\mu i(d_0+d_+),\ T_1(\tau)(d_0+d_+))=\\ =\mu^2|d_0+d_+|^2&+(id_+,\ \mu i(d_0+d_+))+(\mu id_+,\ T_1(\tau)(d_0+d_+))=\\ =\mu^2|d_0+d_+|^2&+\mu(d_+,\ d_0+d_+)-\mu(d_+,\ d_0)+\mu|d_+|^2\geqslant\\ \geqslant\mu^2|d_0+d_+|^2,&\quad d_0\in\mathfrak{D}_0,\quad d_+\in\mathfrak{D}_+,\end{aligned}$$

для положительных μ. Таким образом,

$$['] \qquad |(T_1(\tau)+\mu iI)x|\geqslant\mu|x|,\quad x\in\mathfrak{D}_0+\mathfrak{D}_+,\quad \mu>0.$$

Пусть S — сужение оператора $T_1(\tau)$ на $\mathfrak{D}_0+\mathfrak{D}_+$. По лемме XII.4.11 S — замкнутый оператор. Поэтому из ['] следует, что

$$[''] \qquad |(S+\mu iI)x|\geqslant\mu|x|,\quad x\in\mathfrak{D}(S),\quad \mu>0.$$

Кроме того, для каждого $\mu>0$ область значений оператора $S+\mu iI$ замкнута. Действительно, если $z=\lim\limits_{n\to\infty}(S+\mu iI)x_n$, то $\lim\limits_{m,\,n\to\infty}|(S+\mu iI)(x_m-x_n)|=0$; поэтому, согласно [''], $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность. Если x — ее предел, то, поскольку оператор S замкнут, очевидно, что $x\in\mathfrak{D}(S)$ и $(S+\mu iI)x=z$.

Пусть $y\in((S+iI)\mathfrak{D}(S))^{\perp}$. Тогда $y\in((T_0(\tau)+iI)\mathfrak{D}_0)^{\perp}$, следовательно, по определению XII.4.9 $y\in\mathfrak{D}_+$. Однако, поскольку $(S+iI)\mathfrak{D}(S)\supseteq(S+iI)\mathfrak{D}_+=\mathfrak{D}_+$, мы имеем $y\in\mathfrak{D}_+^{\perp}$. Следовательно, $y=0$. Это показывает, что множество $(S+iI)\mathfrak{D}(S)$ всюду плотно; будучи замкнутым, оно должно совпадать со всем гильбертовым пространством. Таким образом, из [''] следует, что $-i$ принадлежит резольвентному множеству оператора S. Пусть μ_0 — наибольшее действительное число, такое, что весь интервал $[-i,-\mu_0 i)$ отрицательной части мнимой оси принадлежит резольвентному множеству оператора S. Так как по лемме XII.1.3 это резольвентное множество открыто, то μ_0 ему не принадлежит. Пусть $\mu_0<\infty$, и пусть $\{\mu_n\}$ — последовательность действительных чисел, сходящаяся к μ_0 снизу. Согласно [''], $|R(-\mu_n i;\ S)|\leqslant\mu_n^{-1}$. Из леммы XII.1.3 следует, что $\{R(-\mu_n i;\ S)\}$ — фундаментальная последовательность в равномерной операторной топологии. Пусть R — предел этой последовательности. Тогда, поскольку

$$\lim_{n\to\infty}(S+\mu_0 iI)R(-\mu_n i;\ S)x=\lim_{n\to\infty}(x+(\mu_0-\mu_n)R(-\mu_n i;\ S)x)=x$$

и оператор S замкнут, мы имеем $Rx\in\mathfrak{D}(S)$ и $(S+\mu_0 iI)Rx=x$. Это показывает, что множество $(S+\mu_0 iI)\mathfrak{D}(S)$ совпадает со всем гильбертовым пространством, так что $\mu_0 i$ принадлежит резольвентному множеству оператора S вопреки предположению.

Отсюда мы заключаем, что для каждого $n \geqslant 1$ оператор $(S+niI)$ имеет обратный R_n, норма которого, согласно [″], не превосходит n^{-1}. Так как $-ni \in \varrho(S)$, то по предположению (a) R_n отображает L_2 на $\mathfrak{D}_0+\mathfrak{D}_+ \subseteq \mathfrak{D}(T_1(\tau)) \subseteq \mathfrak{D}(T_1(\tau'))$.

Теперь мы докажем, что всюду опеделенный оператор $T_1(\tau_1')R_n$ ограничен и что для достаточно больших n мы имеем $|T_1(\tau')R_n| < 1$. Действительно, если это не так, то существует $\varepsilon > 0$ и последовательность таких элементов f_n, что $|f_n|=1$ и $|T_1(\tau')R_n| > \varepsilon$. Положим $g_n = R_n f_n$. Тогда $|g_n| \to 0$, поскольку $|nR_n| \leqslant 1$. Более того, $T_1(\tau)g_n = f_n - nR_nf_n$, и так как $|nR_n| \leqslant 1$, то норма $|T_1(\tau)g_n|$ ограничена. Из условия (b) следует, что $|T_1(\tau')g_n| \to 0$. Это противоречие доказывает наше утверждение.

Следовательно, существует такое $n \geqslant 1$, что $|T_1(\tau')R_n| < 1$. Пусть x — произвольный элемент гильбертова пространства. Тогда

$$(T_1(\tau)+T_1(\tau')+niI)\sum_{k=0}^{m}(-1)^k R_n(T_1(\tau')R_n)^k x =$$
$$=(I+(-1)^m(T_1(\tau')R_n)^{m+1})x.$$

Итак, поскольку R_n отображает L_2 на $\mathfrak{D}_0+\mathfrak{D}_+$, множество $(S+T_1(\tau')+niI)\mathfrak{D}(S)$ всюду плотно в гильбертовом пространстве. Это доказывает (c′).

Теперь мы закончим доказательство следующим образом. По лемме XII.4.10 гильбертовы пространства $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$ и $\mathfrak{D}(T_1(\tau+\tau'))$ разлагаются в следующие ортогональные прямые суммы:

[‴] $\mathfrak{D}(T_1(\tau))=\mathfrak{D}_0 \oplus \mathfrak{D}_+ \oplus \mathfrak{D}_-;\qquad \mathfrak{D}(T_1(\tau+\tau'))=\mathfrak{D}_0 \oplus \mathfrak{D}_+' \oplus \mathfrak{D}_-'.$

Пусть P — ортогональный проектор пространства $\mathfrak{D}(T_1(\tau+\tau'))$ на $\mathfrak{D}_+' \oplus \mathfrak{D}_-'$. Так как, согласно (c′),

$$\dim \mathfrak{D}_+ \oplus \mathfrak{D}_- \geqslant \dim \mathfrak{D}_+' \oplus \mathfrak{D}_-',$$

то либо $P(\mathfrak{D}_+ \oplus \mathfrak{D}_-) = \mathfrak{D}_+' \oplus \mathfrak{D}_-'$, либо должен существовать ненулевой элемент y из $\mathfrak{D}_+ \oplus \mathfrak{D}_-$, такой, что $Py=0$. Но тогда мы имели бы $y \in \mathfrak{D}_0$, что невозможно, согласно первому равенству из [‴]. Таким образом, $P(\mathfrak{D}_+ \oplus \mathfrak{D}_-) \supseteq \mathfrak{D}_+' \oplus \mathfrak{D}_-'$. Отсюда следует, что $\mathfrak{D}_0 \oplus \mathfrak{D}_+ \oplus \mathfrak{D}_- \supseteq \mathfrak{D}_+' \oplus \mathfrak{D}_-'$, и поэтому $\mathfrak{D}_0 \oplus \mathfrak{D}_+ \oplus \mathfrak{D}_- \supseteq \mathfrak{D}_0 \oplus \mathfrak{D}_+' \oplus \mathfrak{D}_-'$, т. е. $\mathfrak{D}(T_1(\tau)) \supseteq \mathfrak{D}(T_1(\tau+\tau'))$.

Таким образом, утверждение (A) доказано.

Последнее рассуждение также показывает, что неравенство

$$\dim \mathfrak{D}_+ \oplus \mathfrak{D}_- > \dim \mathfrak{D}_+' \oplus \mathfrak{D}_-'$$

невозможно. Следовательно,

$$\dim \mathfrak{D}_+ + \dim \mathfrak{D}_- = \dim \mathfrak{D}_+' + \dim \mathfrak{D}_-'.$$

Так как в силу (c′) $\dim \mathfrak{D}_\pm \geqslant \dim \mathfrak{D}'_\pm$, отсюда вытекает, что $\dim \mathfrak{D}_\pm = \dim \mathfrak{D}'_\pm$, и это доказывает утверждение (B).

29. Следствие. *В условиях и в обозначениях предыдущей теоремы каждое граничное значение для* τ *является граничным значением для* $\tau+\tau_1$, *и обратно.*

Утверждение вытекает непосредственно из предыдущей теоремы и определения 2.17 граничного значения.

30. Следствие. *Пусть* τ — *формальный дифференциальный оператор, а* q — *ограниченная функция. Тогда*

(a) $\mathfrak{D}(T_1(\tau)) = \mathfrak{D}(T_1(\tau+q))$;

(b) τ *и* $\tau+q$ *имеют одинаковые индексы дефекта*;

(c) *каждое граничное значение для* τ *является граничным значением для* $\tau+q$.

31. Лемма. *Пусть* $f(t)$ — *функция класса* C^∞, *определенная на конечном или бесконечном интервале* $[a, b)$. *Пусть* $\{t_n\}$ — *возрастающая последовательность точек из* $[a, b)$, *сходящаяся к* b. *Пусть* $\mu_i(n) = \max\limits_{a\leqslant s\leqslant t_n} |f^{(i)}(s)|$. *Тогда если* $\lim\limits_{n\to\infty}(\mu_0(n)/\mu_1(n)) = 0$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty}(\mu_j(n)/\mu_{j+1}(n)) = 0$ *для всех* j.

Доказательство. Если рассматриваемая функция тождественно равна нулю, то утверждение тривиально. Если f не есть тождественный нуль, то ясно, что $\mu_1(n)\to\infty$. Для данного $\varepsilon>0$ выберем n таким большим, что

$$\mu_0(n) < \frac{\varepsilon}{16}\mu_1(n). \tag{*}$$

Пусть s_0 — точка из $[a, t_n]$, такая, что $\mu_1(n) = |f'(s_0)|$. Мы докажем, что существует точка s_1 из $[s_0-(\varepsilon/4), s_0]$, такая, что

$$|f'(s_0) - f'(s_1)| > \frac{1}{2}|f'(s_0)|. \tag{**}$$

Мы можем предположить, не уменьшая общности, что значение $f'(s_0)$ положительно. Если неравенство [**] не выполняется, то мы имеем

$$\operatorname{Re} f'(s) > \frac{1}{2} f'(s_0), \qquad s_0 - \frac{\varepsilon}{4} \leqslant s \leqslant s_0,$$

и после интегрирования

$$\left|\operatorname{Re} f(s_0) - \operatorname{Re} f\left(s_0 - \frac{\varepsilon}{4}\right)\right| > \frac{\varepsilon}{8} f'(s_0).$$

Следовательно, либо $|\operatorname{Re} f(s_0)|$, либо $|\operatorname{Re} f(s_0-\varepsilon/4)|$ не меньше, чем $(\varepsilon/16) f'(s_0)$, что противоречит неравенству [*]. Из неравенства [**] мы заключаем, что либо

$$|\operatorname{Im} f'(s_0) - \operatorname{Im} f'(s_1)| > \frac{1}{4}|f'(s_0)|,$$

либо

$$|\operatorname{Re} f'(s_0) - \operatorname{Re} f'(s_1)| > \frac{1}{4}|f'(s_0)|,$$

где $|s_1 - s_0| \leqslant \varepsilon/4$. Тогда по теореме о среднем значении существует точка s_2 из $[s_1, s_0]$, такая, что

$$\frac{\varepsilon}{4}|f''(s_2)| \geqslant |s_0 - s_1||f''(s_2)| > \frac{1}{4}|f'(s_0)|,$$

т. е.

$$|f'(s_0)| < \varepsilon |f''(s_2)|,$$

и поэтому $\mu_1(n) < \varepsilon\mu_2(n)$, ч. т. д.

32. Лемма. *Пусть* $\tau = \sum_{k=0}^{n} a_k(t)(d/dt)^k$ — *формальный дифференциальный оператор порядка* n, *определенный на интервале* $I = [a, \infty)$. *Предположим, что* $a_n(t) = 1$ *и все коэффициенты* a_i *ограничены на* I. *Тогда если* $\tau f = 0$ *и* $f \in L_2(a, \infty)$, *то все функции* $f, f', \ldots, f^{(n)}$ *равномерно ограничены на* I.

Доказательство. Мы докажем, что функция f ограничена. Из предыдущей леммы следует, что существует постоянная k, такая, что для всех t из $[a, \infty)$

$$[*] \qquad k \max_{a \leqslant s \leqslant t_m} |f(s)| \geqslant \max_{a \leqslant s \leqslant t_m} |f'(s)|.$$

Действительно, если бы это было не так, то мы каждому целому числу m сопоставили бы точку t_m из $[a, \infty)$, такую, что

$$m \max_{a \leqslant s \leqslant t_m} |f(s)| < \max_{a \leqslant s \leqslant t_m} |f'(s)|.$$

Последовательность $\{t_m\}$ удовлетворяла бы условиям предыдущей леммы. Поэтому, используя обозначения предыдущей леммы, мы получили бы, что

$$\lim_{m \to \infty} [\mu_j(m)/\mu_{j+1}(m)] = 0, \qquad 0 \leqslant j < n,$$

откуда следует также, что для $j < n$

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\mu_j(m)}{\mu_n(m)} = \lim_{m\to\infty} \frac{\mu_j(m)}{\mu_{j+1}(m)} \cdot \frac{\mu_{j+1}(m)}{\mu_{j+2}(m)} \cdots \frac{\mu_{n-1}(m)}{\mu_n(m)} = 0.$$

Пусть $\{s_m\}$ — такая последовательность, что

$$['] \qquad |f^{(n)}(s_m)| = \max_{a \leqslant s \leqslant t_m} |f^{(n)}(s)|, \quad 0 \leqslant s_m \leqslant t_m.$$

Тогда для $j<n$ мы тем более имеем

$$[''] \qquad \lim_{m\to\infty} \frac{|f^{(j)}(s_m)|}{|f^{(n)}(s_m)|}=0.$$

Пусть M — общая граница коэффициентов a_j, $1\leqslant j<n$. Выберем m таким большим, что для $1\leqslant j<n$

$$|f^{(j)}(s_m)|<\frac{\varepsilon}{Mn}|f^{(n)}(s_m)|.$$

Тогда

$$0=\tau f\geqslant|f^{(n)}(s_m)|-\left|\sum_{k=0}^{n-1} a_k(s_m) f^{(k)}(s_m)\right|\geqslant$$

$$\geqslant|f^{(n)}(s_m)|-\varepsilon|f^{(n)}(s_m)|=(1-\varepsilon)|f^{(n)}(s_m)|.$$

Так как ε произвольно, отсюда следует, что $f^n(s_m)=0$ для больших m. Из формул ['] и [''] видно, что это невозможно, за исключением случая, когда f тождественно обращается в нуль. Мы заключаем, что неравенство [*] справедливо. Таким же образом можно показать, что существует постоянная k, такая, что

$$[**] \qquad k\max_{a\leqslant s\leqslant t}|f^j(s)|\geqslant\max_{a\leqslant s\leqslant t}|f^{(j+1)}(s)|,\quad t\geqslant a,\quad 1\leqslant j<n.$$

Теперь предположим, что функция f неограничена. Тогда для каждого заданного целого N мы можем найти точку t из $[a, \infty)$, такую, что $|f(t)|>N$. Умножая f на подходящую постоянную, равную по модулю 1, мы можем предполагать, что $f(t)>N$.

Согласно [*], мы имеем

$$\max_{a\leqslant s\leqslant t}|\operatorname{Re} f'(s)|\leqslant\max_{a\leqslant s\leqslant t}|f'(s)|\leqslant kf(t).$$

По теореме о среднем значении

$$|t-s|^{-1}|\operatorname{Re} f(s)-\operatorname{Re} f(t)|\leqslant|\operatorname{Re} f'(s_0)|\leqslant kf(t),$$

где $s\leqslant s_0\leqslant t$. В частности, для $t-(1/2k)\leqslant s<t$

$$|\operatorname{Re} f(s)-f(t)|\leqslant\frac{f(t)}{2},$$

и поэтому $|\operatorname{Re} f(s)|>f(t)/2>N/2$. Следовательно,

$$\int_a^\infty|f(s)|^2\,ds\geqslant\int_{t-(1/2k)}^{t}|f(s)|^2\,ds\geqslant\frac{N^2}{8k}.$$

Так как N — произвольно большое число, это противоречит предположению, что f интегрируема в квадрате. Таким образом, функция f ограничена, поэтому, согласно [*] и [**], все $f^{(j)}$, $0\leqslant j\leqslant n$, также ограничены, ч. т. д.

33. Лемма. *Пусть f — функция из A^n, определенная на действительной оси и обращающаяся в нуль вне компактного подмножества действительной оси. Тогда если $0 \leqslant k \leqslant n$, то*

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt\right)^{1-(k/n)} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f^{(n)}(t)|^2 dt\right)^{k/n} \geqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f^{(k)}(t)|^2 dt\right).$$

Доказательство. Предположим, что $f^{(n)}$ интегрируема в квадрате, поскольку если это не так, то неравенство очевидно. Рассмотрим преобразование Фурье

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{ist} ds.$$

Мы имеем

$$(-it)^k F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f^{(k)}(s) e^{ist} ds, \quad 0 \leqslant k \leqslant n.$$

В силу неравенства Гёльдера

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t^k F(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F(t)|^{2(1-k/n)} |t^{2n} F^2(t)|^{k/n} dt \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\int_{-\infty}^{\infty} |F(t)|^2 dt\right\}^{1-k/n} \left\{\int_{-\infty}^{\infty} |t^n F(t)|^2 dt\right\}^{k/n}.$$

Теперь лемма следует непосредственно из теоремы Планшереля (см. XI.3.21).

34. Лемма. *Пусть $\tau = \sum_{k=0}^{n} a_k(t)(d/dt)^k$ — формальный дифференциальный оператор порядка n, определенный на интервале $I = [a, \infty)$. Предположим, что $a_n(t) \equiv 1$ и все коэффициенты a_i ограничены в I. Тогда если $\tau f = 0$ и $f \in L_2(I)$, то все $n-1$ функций $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ принадлежат $L_2(I)$.*

Доказательство. Для простоты предположим, что $a = 0$. Построим бесконечно дифференцируемую функцию h на $(-\infty, \infty)$, тождественно равную единице при $t > 1$ и нулю при $t < 0$. Пусть $f_m(t) = h(m-t) h(t) f(t)$. Тогда функция f_m бесконечно дифференцируема и обращается в нуль вместе со всеми своими производными при $t < 0$ и $t > m$. Кроме того, f_m совпадает с f при $1 < t < m-1$, и поэтому функция $\tau(f_m - f)$ равна нулю тождественно по t, за исключением интервалов $m-1 \leqslant t \leqslant m$ и $0 \leqslant t \leqslant 1$. Применяя правило Лейбница, мы видим, что τf_m есть линейная комбинация производных функций $h(m-t)$, $h(t)$, f и коэффициентов оператора τ, причем в силу леммы 32 и наших предположений все они ограничены. Пусть M — общая верхняя граница для всех этих функций и для функций f_m.

Тогда

$$['] \qquad |\tau f_m|_2^2 = |\tau(f_m - f)|_2^2 = \left(\int_0^1 + \int_{m-1}^m\right) |\tau(f_m)(t)|^2 dt < 2M^2$$

равномерно по n. Предположение о том, что некоторая производная порядка не выше n не интегрируема в квадрате, приводит к противоречию с этим соотношением.

Так как $f \in L_2$, мы, очевидно, имеем

$$C = \sup_{0 \leqslant m < \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_m(t)|^2 dt \leqslant \sup_{0 \leqslant m < \infty} \int_1^{m-1} |f(t)|^2 dt + 2M^2 <$$
$$< |f|_2^2 + 2M^2 < \infty.$$

По предыдущей лемме

$$[*] \qquad |f_m^{(k)}|_2 = O(|f_m^{(n)}|_2^{k/n}).$$

и

$$[**] \qquad |f_m^{(k)}|_2 / |f_m^{(n)}|_2 \leqslant C^{1/2 - k/2n} |f_m^{(n)}|_2^{k/n - 1}, \qquad 0 \leqslant k \leqslant n.$$

Теперь предположим, что для некоторого $k_0 \leqslant n$ функция $f^{(k_0)}$ не интегрируема в квадрате. Тогда, очевидно, $\lim\limits_{m\to\infty} |f_m^{(k_0)}|_2 = \infty$ и, согласно [*], $\lim\limits_{m\to\infty} |f_m^{(n)}|_2 = \infty$. Следовательно, в силу [**] $|f_m^{(k)}|_2 = o(|f_m^{(n)}|)$ для $0 \leqslant k < n$. Кроме того,

$$|\tau f_m - f_m^{(n)}|_2 = \left|\sum_{k=0}^{n-1} a_k f_m^{(k)}\right|_2 \leqslant M \sum_{k=0}^{n-1} |f_m^{(k)}|_2,$$

и поэтому

$$\left| |\tau f_m|_2 - |f_m^{(n)}|_2 \right| \leqslant |\tau f_m - f_m^{(n)}|_2 = o(|f_m^{(n)}|_2).$$

Таким образом, $\lim\limits_{m\to\infty} |\tau f_m|_2 = \infty$, что противоречит соотношению ['].

35. Теорема. *Пусть*

$$\tau = \sum_{k=0}^{n} a_k(t) \left(\frac{d}{dt}\right)^k$$

— формально самосопряженный дифференциальный оператор порядка n, определенный на интервале $I = [a, \infty)$. Предположим, что

(a) *величина* $|a_n(t)|$ *ограничена снизу положительным числом;*
(b) *величина* $|a_k(t)|$ *ограничена для* $0 \leqslant k \leqslant n$.
Тогда τ *не имеет граничных значений в бесконечности.*

Доказательство. Не уменьшая общности, предположим, что $a=0$. Пусть τ' — формально самосопряженный дифференциальный оператор $i^n(d/dt)^n$. Установив эквивалентность гильбертовых пространств $\mathfrak{D}(T_1(\tau'))$ и $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$, мы докажем, что τ' не имеет граничных значений в бесконечности. Так как по определению $\mathfrak{D}(T_0(\tau))$ совпадает с $\mathfrak{D}(T_0(\tau'))$, отсюда будет следовать, что граничные значения операторов τ и τ' совпадают, и после этого нетрудно будет доказать теорему.

Разобьем доказательство на несколько шагов.

(a) τ' не имеет граничных значений в бесконечности. Действительно, пусть $\omega_1, \ldots, \omega_n$ — корни n-й степени из числа $(-i)^{n-1}$. Тогда функции $\exp(\omega_i t)$ образуют базис для решений уравнения $\tau'\sigma = i\sigma$. Среди них те решения интегрируемы в квадрате, для которых действительная часть числа ω_j отрицательна. Аналогично пусть $\omega_1', \ldots, \omega_n'$ — корни n-й степени из числа $-(-i)^{n-1}$. Тогда квадратично интегрируемыми решениями уравнения $\tau'\sigma = -i\sigma$ являются функции $\exp(\omega_i' t)$, для которых ω_i' имеет отрицательную действительную часть. Если n нечетно, то корни n-й степени из $-t$ равны взятым со знаком минус корням n-й степени из t. Таким образом, в этом случае сумма индексов дефекта оператора τ' равна числу корней n-й степени из $(-i)^{n-1}$, не являющихся чисто мнимыми. Это число равно n, поскольку если n нечетно, то $i^n = \pm i$ и $(-i)^{n-1} = \pm 1$. Если n четно, то аналогичные элементарные вычисления приводят к выводу, что сумма индексов дефекта оператора τ' равна n. Теперь наше утверждение вытекает непосредственно из следствия 2.23 и леммы XII.4.21.

(b) $\mathfrak{D}(T_1(\tau)) \supseteq \mathfrak{D}(T_1(\tau'))$.

Предположим, что $f \in \mathfrak{D}(T_1(\tau'))$. По определению это означает, что обе функции f и $f^{(n)}$ квадратично интегрируемы. Образуем функции $f_m^{(k)}$, $0 \leqslant k \leqslant n$, как выше в доказательстве леммы 34. Тогда норма $|f_m^{(n)}|_2$ ограничена по m, так как $f^{(n)}$ квадратично интегрируема и, согласно лемме 32, $f^{(k)}(t)$ ограничены на интервале $[a, \infty)$ для $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Следовательно, в силу леммы 33, $|f_m^{(k)}|$ ограничены по k и m, и поэтому нормы $|f^{(k)}|_2$ конечны для $0 \leqslant k \leqslant n$. Пусть M — верхняя граница для функций $|a_k(\cdot)|$. Тогда

$$|\tau f|_2 \leqslant M \sum_{k=0}^{n} |f^{(k)}|_2 < \infty$$

и, следовательно, $f \in \mathfrak{D}(T_1(\tau))$. Поэтому $\mathfrak{D}(T_1(\tau')) \subseteq \mathfrak{D}(T_1(\tau))$.

(c) Тождественное отображение гильбертова пространства $\mathfrak{D}(T_1(\tau'))$ в пространство $\mathfrak{D}(T_1(\tau'))$, рассматриваемое как подпространство пространства $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$, замкнуто и поэтому непрерывно.

Пусть $\{f_n\}$ — последовательность из $\mathfrak{D}(T_1(\tau'))$, сходящаяся к f в топологии пространства $\mathfrak{D}(T_1(\tau'))$ и к g в топологии пространства $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$. Пусть J — любой компактный подинтервал из I. Тогда, согласно следствию 2.16(b), сужение последовательности $\{f_n\}$ на J сходится в $H_n(J)$ и к f, и к g. Следовательно, поскольку f и g — непрерывные функции, они совпадают на J. Так как J — произвольный подинтервал, они совпадают всюду на I.

(d) Пусть $\{g_n\}$ — последовательность из $\mathfrak{D}(T_0(\tau'))$, сходящаяся к нулю по норме пространства $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$. Тогда $\{g_m\}$ сходится к нулю по норме пространства $\mathfrak{D}(T_1(\tau'))$. Действительно, мы имеем $|g_m|_2 \to 0$, $|\tau g_m|_2 \to 0$ и

$$[*]\quad \Big|\,\Big|\sum_{k=0}^{n-1} a_k g_m^{(k)}\Big|_2 - |a_n g_m^{(n)}|_2\Big| \leqslant \Big|\sum_{k=0}^{n-1} a_k g_m^{(k)} + a_n g_m^{(n)}\Big|_2 = |\tau g_m|_2 \to 0.$$

Норма $|a_n g_m^{(n)}|_2$ ограничена, ибо в противном случае (после перехода к подпоследовательности, для которой $|a_n g_m^{(n)}|_2 \to \infty$) из леммы 33 следовало бы, что

$$|g_m^{(k)}|_2 = O\left(|g_m^{(n)}|_2^{k/n}\right) = o\left(|g_m^{(n)}|_2\right), \qquad 0 \leqslant k \leqslant n.$$

Но тогда ввиду ограниченности коэффициентов a_k

$$\Big|\sum_{k=0}^{n-1} a_k g_m^{(k)}\Big|_2 = o\left(|g_m^{(n)}|_2\right) = o\left(|a_n g_m^{(n)}|_2\right).$$

Отсюда ясно, что

$$|\tau g_m|_2 \geqslant |a_n g_m^{(n)}|_2 - \Big|\sum_{k=0}^{n-1} a_k g_m^{(k)}\Big|_2 = |a_n g_m^{(n)}|_2 (1 - o(1)) \to \infty,$$

вопреки соотношению [*]. Пусть $M = \sup_m |g_m^{(n)}|_2$. Из леммы 33 мы получаем, что

$$|g_m|_2^{1-k/n} M^{k/n} \geqslant |g_m^{(k)}|_2.$$

Так как $|g_m|_2 \to 0$, отсюда следует, что $|g_m^{(k)}|_2 \to 0$ для $0 \leqslant k < n$, поэтому

$$\Big|\sum_{k=0}^{n-1} a_k g_m^{(k)}\Big|_2 \to 0.$$

В силу [*] это означает, что $|a_n g^{(n)}|_2 \to 0$ и, поскольку, согласно предположению, величина $|a_n(\cdot)|^{-1}$ ограничена, $|g_m^{(n)}|_2 \to 0$. Таким образом, последовательность $\{g_m\}$ сходится к нулю по норме пространства $\mathfrak{D}(T_1(\tau'))$.

(e) Замыкание множества $\mathfrak{D}(T_0(\tau'))$ по норме пространства $\mathfrak{D}(T_1(\tau'))$ совпадает с замыканием пространства $\mathfrak{D}(T_0(\tau'))$ по норме пространства $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$.

Пусть $\mathfrak{D}_1$ и $\mathfrak{D}_2$ — замыкания множества $\mathfrak{D}(T_0(\tau'))$ соответственно по нормам пространств $\mathfrak{D}(T_1(\tau'))$ и $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$. Согласно (c), мы имеем $\mathfrak{D}_2 \supseteq \mathfrak{D}_1$. Пусть $g \in \mathfrak{D}_2$, а $\{g_m\}$ — фундаментальная последовательность из $\mathfrak{D}(T_0(\tau'))$, сходящаяся к g по норме пространства $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$. Чтобы показать, что $g \in \mathfrak{D}_1$, достаточно в силу (c) показать, что $\{g_n\}$ — фундаментальная последовательность по норме пространства $\mathfrak{D}(T_1(\tau'))$. Предположим, что это не так. Тогда обобщенная последовательность $\{g_{mn}\} = \{g_m - g_n\}$ не сходится к нулю в $\mathfrak{D}(T_1(\tau'))$, следовательно, некоторая ее подпоследовательность, которую мы обозначим $\{f_i\}$, не сходится к нулю в $\mathfrak{D}(T_1(\tau'))$, но сходится к нулю $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$. Это противоречит утверждению пункта (d).

(f) $\mathfrak{D}(T_1(\tau')) \supseteq \mathfrak{D}(T_1(\tau))$.

Ясно, что $\mathfrak{D}(T_0(\tau)) = \mathfrak{D}(T_0(\tau'))$, поэтому, согласно (e), $\mathfrak{D}(\overline{T_0(\tau)}) = \mathfrak{D}(\overline{T_0(\tau')})$. Пусть $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}(\overline{T_0(\tau)}) = \mathfrak{D}(\overline{T_0(\tau')})$. Тогда (см. XII.4.10) $\mathfrak{D}(T_1(\tau)) = \mathfrak{D}_1 \oplus \mathfrak{D}_+ \oplus \mathfrak{D}_-$, где $\mathfrak{D}_+$ и $\mathfrak{D}_-$ — дефектные пространства оператора τ. Теперь достаточно доказать, что $\mathfrak{D}_+ \oplus \mathfrak{D}_- \subseteq \mathfrak{D}(T_1(\tau'))$. Пусть f — элемент из $\mathfrak{D}_+$. Тогда для t из I $[a_n(t)]^{-1}((\tau - i)f)(t) = 0$. Оператор $a_n^{-1}(\tau - i)$ удовлетворяет условиям предыдущей леммы. Поэтому $f^{(n)}$ интегрируема в квадрате, так что $f \in \mathfrak{D}(T_1(\tau'))$. Таким образом, $\mathfrak{D}_+ \subseteq \mathfrak{D}(T_1(\tau'))$. Аналогично $\mathfrak{D}_- \subseteq \mathfrak{D}(T_1(\tau'))$. Из (c) и II.2.2 следует, что две рассматриваемые топологии на $\mathfrak{D}(T_1(\tau)) = \mathfrak{D}(T_1(\tau'))$ эквивалентны, ч. т. д.

В заключение анализа методов, пригодных для вычисления индексов дефекта формальных дифференциальных операторов, мы отметим один случай, который, хотя и является более частным, чем многие изученные выше, имеет большое практическое значение. Это случай, когда коэффициенты формального дифференциального оператора аналитичны в I и имеют полюсы в свободных концах интервала I. В этом случае можно получить точные сведения об асимптотическом поведении решений уравнения $\tau f = \lambda f$.

Сначала предположим, что рассматриваемая концевая точка конечна; тогда без ограничения общности мы можем предполагать, что она находится в нуле. Разделив, если это необходимо, на старший коэффициент a_n оператора τ, мы можем представить уравнение $(\tau-\lambda)f=0$ в виде

$$[*] \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k(z)}{z^{\nu(n-k)}} f^{(k)}(z)=0,$$

где $\alpha_n=1$, α_k — аналитические функции в окрестности нуля для $0\leqslant\alpha_k\leqslant n$ и число ν минимально, т. е. дифференциальное уравнение [*] нельзя записать в виде $\sum\limits_{k=0}^{n} \beta_k(t)\, t^{-\mu(n-k)} f^{(k)}(z)$, где все β_k — аналитические функции в окрестности нуля для $0\leqslant k\leqslant n$ и $\mu<\nu$. В этом случае ν называется *порядком* особенности уравнения [*] в нуле. Если $\nu=0$, то особенности нет, и нуль называется *регулярной* точкой этого дифференциального уравнения. Если $\nu=1$, то особенность уравнения [*] в нуле называется *регулярной*; если $\nu>1$, то эта особенность называется *иррегулярной*. Если уравнение [*] имеет регулярную особенность в точке $z=0$, то уравнение

$$\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)+\alpha_{n-1}(0)\,\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+2)+$$
$$+\alpha_{n-2}(0)\,\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+3)+\ldots+\alpha_1(0)\,\mu+\alpha_0(0)=0$$

называется *определяющим уравнением уравнения* [*] *в нуле*. Если определяющее уравнение имеет различные корни $e_1, \ldots, e_n$, причем никакие два из них не отличаются на целое число, то система решений уравнения [*] имеет бáзис вида $\sigma_j(z)=z^{e_j}\varphi_j(z)$, где φ_j — аналитические функции, отличные от нуля в окрестности точки $z=0$. В этом случае число решений уравнения $\tau f=\lambda f$ с интегрируемым квадратом в окрестности точки $z=0$ равно в точности числу корней определяющего уравнения, действительные части которых больше $-1/2$. Соответствующий результат можно сформулировать и в том случае, когда определяющее уравнение имеет два корня, которые отличаются на целое число, или имеет кратные корни, однако при этом базис для решений уравнения [*] может иметь более сложный вид, включающий логарифмические члены. Мы не будем подробно приводить здесь эти результаты, а отошлем читателя к работам Пула [1] и Коддингтона и Левинсона [1], где можно найти превосходное изложение этих вопросов. Тем не менее следует подчеркнуть, что во всех этих случаях задача определения числа решений уравнения [*] с интегрируемым квадратом в окрестности нуля может быть сведена к конечной алгебраической задаче.

В случае $\nu>1$, когда уравнение [*] имеет иррегулярную особенность в нуле, уравнение

$$(-\nu\mu)^n+\alpha_{n-1}(0)\,(-\nu\mu)^{n-1}+\ldots+\alpha_0(0)=0$$

называется *характеристическим уравнением уравнения* [*] *в нуле*. Если характеристическое уравнение имеет различные корни $\mu_1, \ldots, \mu_n$, то система решений уравнения [*] имеет базис вида

$$\sigma_j(z)=\{\exp(\mu_j z^{1-\nu}+k_j^{(2)}z^{2-\nu}+\ldots+k_j^{(\nu-1)}z^{-1})\}\, z^{e_j}(1+c_j^{(1)}(z)+\ldots);$$

бесконечный ряд, образующий последний сомножитель этого выражения, не сходится, но является расходящимся асимптотическим разложением. Коэффициенты $k_j^{(2)}, \ldots, k_j^{(\nu-1)}, e_j, c_j^{(1)}, c_j^{(2)}, \ldots$ можно определить при помощи формальной подстановки асимптотического выражения для σ_j в уравнение [*] и сравнения коэффициентов. Соответствующий результат можно сформулировать и в том случае, когда характеристическое уравнение имеет кратные корни; при этом асимптотические выражения для решений уравнения [*] могут иметь более сложный вид, включающий ряд по дробным степеням z и логарифмические члены. Мы не будем подробно приводить этот результат, а отошлем читателя к соответствующей главе книги Коддингтона и Левинсона [1]. Для наших целей решающее значение имеет то обстоятельство, что существование асимптотического ряда для решений уравнения [*] сводит задачу нахождения числа решений уравнения [*] с интегрируемым квадратом в окрестности нуля к конечной алгебраической задаче.

При помощи замены переменных $z \to 1/z$ аналогичные результаты можно получить для особенностей в бесконечности. Предположим, что мы имеем дело с уравнением вида

$$[**] \qquad \sum_{k=0}^{n} \alpha_k(z)\, z^{\nu(n-k)} f^{(k)}(z)=0,$$

где $\alpha_n(z)=1$ и коэффициенты α_k аналитичны в окрестности точки $z=\infty$ для $0 \leqslant k \leqslant n$, а число ν минимально в том смысле, что уравнение [**] нельзя записать в подобном виде с меньшим индексом ν. Тогда если $\nu=-1$, то говорят, что [**] имеет *регулярную особенность в бесконечности*; если $\nu>-1$, то говорят, что [**] имеет *иррегулярную особенность порядка* $\nu+2$ *в бесконечности*. Если [**] имеет регулярную особенность в бесконечности, то уравнение

$$\mu(\mu+1)\ldots(\mu+n-1)-\alpha_{n-1}(\infty)\,\mu(\mu+1)\ldots(\mu+n-2)+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^{n-1}\alpha_1(\infty)\,\mu+(-1)^n\alpha_0(\infty)=0$$

называется *определяющим уравнением уравнения* [**] *в бесконечности*. Если корни $e_1, \ldots, e_n$ определяющего уравнения различны и никакие два из них не отличаются на целое число, то система решений уравнения [**] имеет базис вида $\sigma_j(z)=z^{-e_j}\varphi_j(z)$, где φ_j — аналитические функции, отличные от нуля в окрестности точки $z=\infty$.

Если [**] имеет иррегулярную особенность порядка $\nu+2$ в бесконечности, то уравнение

$$((\nu+1)\mu)^n+\alpha_{n-1}(\infty)((\nu+1)\mu)^{n-1}+\ldots+\alpha_0(\infty)=0$$

называется *характеристическим уравнением уравнения* [**] *в бесконечности*. Если корни $\mu_1, \ldots, \mu_n$ характеристического уравнения различны, то [**] имеет систему решений вида

$$\sigma_j(z)=\{\exp(\mu_j z^{\nu+1}+k_j^{(\nu)}z^\nu+\ldots+k_j^{(1)}z)\}\times \\ \times z^{-e_j}(1+c_j^{(1)}z^{-1}+c_j^{(2)}z^{-2}+\ldots);$$

бесконечный ряд, образующий последний сомножитель этого выражения, не сходится, но представляет собой расходящееся асимптотическое разложение. Коэффициенты $k_j^{(\nu)}, \ldots, k_j^{(1)}, e_j, c_j^{(1)}, c_j^{(2)}, \ldots$ можно определить при помощи формальной подстановки асимптотического выражения для σ_j в уравнение [**] и сравнения коэффициентов при z^{-n}.

Таким образом, во всех случаях, когда мы имеем дело с формальным дифференциальным оператором на интервале I, имеющим аналитические в I коэффициенты с полюсами в свободных концах интервала I, теория регулярных и иррегулярных особенностей позволяет свести задачу определения индексов дефекта оператора τ к конечной алгебраической задаче.

Мы будем возвращаться к теории регулярных и иррегулярных особых точек ниже в связи с изучением в § 8 некоторых специальных примеров формально симметрических дифференциальных операторов. В том же параграфе мы получим возможность изучить некоторые стороны этой теории несколько более подробно.

7. Качественная теория спектра

В этом параграфе мы увидим, как разнообразные качественные результаты относительно спектра формально самосопряженного дифференциального оператора τ могут быть легко получены из аналитических свойств коэффициентов, определяющих этот оператор. Например, если эти коэффициенты периодические, то спектр совпадает с непрерывным спектром и состоит из множества непересекающихся интервалов (ср. с теоремой 64). Кроме того, будет показано, как классические теоремы Штурма об отделимости связаны со спектральной теорией. Применяемые методы, как правило, элементарны и аналогичны методам, использованным при исследовании индексов дефекта оператора τ в предыдущем параграфе.

1. Теорема. *Пусть T — замкнутый оператор в B-пространстве $\mathfrak{X}$; предположим, что для каждой точки λ из точечного*

спектра оператора T нуль-многообразие $\{x \mid (T-\lambda I)x=0\}$ конечномерно. Тогда $\lambda_0 \in \sigma_e(T)$ в том и только том случае, когда существует ограниченная последовательность $\{f_n\}$ элементов из $\mathfrak{D}(T)$, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty}(T-\lambda_0 I)f_n$ существует, но $\{f_n\}$ не имеет сильно сходящихся подпоследовательностей.

Доказательство. При переходе от рассмотрения оператора T к рассмотрению оператора $T-\lambda_0 I$ не произойдет никаких существенных изменений, поэтому мы можем без ограничения общности предполагать, что $\lambda_0=0$. Пусть $0 \notin \sigma_e(T)$. Так как многообразие $\mathfrak{N}=\{x \mid Tx=0\}$ конечномерно, мы можем найти его базис $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$. Согласно следствию IV.3.2, каждое конечномерное подпространство B-пространства замкнуто. Следовательно, по теореме II.3.13 Хана — Банаха, существует совокупность $x_1^*, \ldots, x_k^*$ непрерывных линейных функционалов на рассматриваемом B-пространстве, таких, что $x_i^*(\varphi_j)=0$ для $1 \leqslant i \neq j \leqslant k$, $x_i^*(\varphi_i)=1$. Пусть $\mathfrak{D}=\{x \in \mathfrak{D}(T) \mid x_i^*(x)=0,\ i=1, \ldots, k\}$. Тогда по лемме 6.2 сужение T_1 оператора T на $\mathfrak{D}$, которое, очевидно, замкнуто, имеет замкнутую область значений $\mathfrak{R}$.

Обратный к T_1 оператор T_1^{-1}, очевидно, замкнут и дает взаимно однозначное отображение пространства $\mathfrak{R}$ на $\mathfrak{X}$. Таким образом, по теореме о замкнутом графике (II.2.4) T_1^{-1} ограничен. Отсюда вытекает, что если $\{f_n\}$ — последовательность элементов из $\mathfrak{D}$, таких, что последовательность $\{Tf_n\}$ сходится, то $\{f_n\}$ сходится. Пусть $\{g_n\}$ — ограниченная последовательность элементов из $\mathfrak{D}(T)$, таких, что $\{Tg_n\}$ сходится. Найдем подпоследовательность $\{g_{n_i}\}=\{h_i\}$, такую, что $x_j^*(h_i)$ сходится для каждого j, $1 \leqslant j \leqslant k$. Тогда $\widetilde{h}_i=h_i-\sum\limits_{j=1}^{k} x_j^*(h_i)\varphi_j$ принадлежит $\mathfrak{D}$ и $T\widetilde{h}_i=Th_i$. Поэтому последовательность $\{\widetilde{h}_i\}$ сходится и последовательность $\{h_i\}=\left\{\widetilde{h}_i+\sum\limits_{j=1}^{k} x_j^*(h_i)\varphi_j\right\}$ тоже сходится. Таким образом, $\{g_n\}$ имеет сходящуюся подпоследовательность, что доказывает первую часть нашей теоремы.

Обратно, предположим, что если $\{f_n\}$ ограничена и $\{Tf_n\}$ сходится, то $\{f_n\}$ имеет сходящуюся подпоследовательность. Мы хотим показать, что множество $T\mathfrak{D}(T)$ замкнуто; пусть $g \in \overline{T\mathfrak{D}(T)}$, $g_n=Th_n$ и $g_n \to g$. Пусть d_n — расстояние от h_n до замкнутого многообразия $\mathfrak{N}$. Пусть y_n — последовательность элементов из $\mathfrak{N}$, таких, что $|h_n-y_n|-d_n \to 0$. Пусть, наконец, $h_n-y_n=k_n$. Тогда если последовательность d_n ограничена, то ограничена и последовательность k_n, причем $Tk_n=Th_n$ сходится. Поэтому k_n имеет подпоследовательность k_{n_i}, сходящуюся к некоторому элементу k.

Так как $Tk_{n_i} \to g$ и оператор T замкнут, то $k \in \mathfrak{D}(T)$ и $Tk = g$. Следовательно, для доказательства замкнутости множества $T\mathfrak{D}(T)$ достаточно доказать, что последовательность d_n ограничена. Если это не так, то, переходя к подпоследовательности, мы можем предполагать, что $d_n \to \infty$, так что $|k_n| \to \infty$. Полагая $\widetilde{k}_n = k_n/|k_n|$, мы получаем $|\widetilde{k}_n| = 1$, в то время как расстояние $\widetilde{d}_n$ от $\widetilde{k}_n$ до $\mathfrak{N}$ равно $d_n/|k_n| \to 1$. Но, так как $T\widetilde{k}_n \to 0$, последовательность $\widetilde{k}_n$ имеет сходящуюся подпоследовательность $\widetilde{k}_{n_i}$, причем ясно, что $\widetilde{k}_{n_i}$ сходится к элементу пространства $\mathfrak{N}$ вопреки тому, что $\widetilde{d}_n \to 1$. Это доказывает обратную часть нашей теоремы.

2. Следствие. *Пусть τ — формальный дифференциальный оператор; $\lambda_0 \in \sigma_e(\tau)$ тогда и только тогда, когда существует ограниченная последовательность $\{f_n\}$ функций из $\mathfrak{D}(T_0(\tau))$, такая, что $\{(\tau - \lambda_0) f_n\}$ сходится, но $\{f_n\}$ не имеет сильно сходящихся подпоследовательностей.*

Доказательство. Предположим, что существует ограниченная последовательность $\{f_n\}$ элементов из $\mathfrak{D}(T_0(\tau))$, такая, что $\{(\tau - \lambda_0) f_n\}$ сходится, но последовательность $\{f_n\}$ не имеет сходящихся подпоследовательностей. Тогда, поскольку $T_0(\tau) \subseteq T_1(\tau)$, из предыдущей леммы непосредственно следует, что $\lambda_0 \in \sigma_e(T_1(\tau))$, так что по определению 6.1 $\lambda_0 \in \sigma_e(\tau)$.

Обратно, пусть $\lambda_0 \in \sigma_e(\tau)$. Пусть $\mathfrak{D}_1$ — замыкание множества $\mathfrak{D}(T_0(\tau))$ в гильбертовом пространстве $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$, а $\overline{T_0(\tau)}$ — сужение оператора $T_1(\tau)$ на $\mathfrak{D}_1$. Пусть $\mathfrak{D}$ — ортогональное дополнение множества $\mathfrak{D}_1$ в $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$. Тогда $\mathfrak{D}(T_1(\tau)) = \mathfrak{D}(\overline{T_0(\tau)}) \oplus \mathfrak{D}$. Кроме того, если $f \in \mathfrak{D}$, то $(f, g) + (T_1(\tau) f, T_0(\tau) g) = 0$ для g из $\mathfrak{D}(T_0(\tau))$. Следовательно, $f + T_0(\tau)^* T_1(\tau) f = 0$, так что по теореме 2.10 и следствию 1.4 f является решением из класса C^∞ дифференциального уравнения $f + \tau^*\tau f = 0$. Это уравнение конечного порядка, поэтому пространство $\mathfrak{D}$ конечномерно. Таким образом, из леммы 6.2 следует, что λ_0 принадлежит существенному спектру замкнутого оператора $\overline{T_0(\tau)}$. Следовательно, по предыдущей теореме существует ограниченная последовательность $\{\widetilde{f}_n\}$ элементов из $\mathfrak{D}(\overline{T_0(\tau)})$, такая, что $\{(\overline{T_0(\tau)} - \lambda I)\widetilde{f}_n\}$ сходится, но $\{\widetilde{f}_n\}$ не имеет сходящихся подпоследовательностей. Из определения множества $\mathfrak{D}(\overline{T_0(\tau)})$ вытекает, что существуют элементы f_n из $\mathfrak{D}(T_0(\tau))$, такие, что

$$|f_n - \widetilde{f}_n| \to 0 \quad \text{и} \quad |T_0(\tau) f_n - \overline{T_0(\tau)}\widetilde{f}_n| \to 0.$$

Тогда $\{f_n\}$ ограничена и не содержит сходящихся подпоследовательностей, в то время как $\{(T_0(\tau)-\lambda I)f_n\}=\{(\tau-\lambda)f_n\}$ сходится. Это доказывает обратную часть нашей теоремы.

3. Следствие. *Пусть τ — формальный дифференциальный оператор, а B_i, $i=1, \ldots, k$, — система граничных значений для τ. Пусть T — оператор, полученный из τ наложением системы $B_i(f)=0$, $i=1, \ldots, k$, граничных условий. Тогда $\sigma_e(T)=\sigma_e(\tau)$.*

Доказательство. В ходе предыдущего доказательства мы показали, что $\mathfrak{D}(T_1(\tau))=\mathfrak{D}(\overline{T_0(\tau)})\oplus\mathfrak{D}$, где $\mathfrak{D}$ конечномерно. Поэтому $\mathfrak{D}(T)=\mathfrak{D}(\overline{T_0(\tau)})\oplus\mathfrak{D}_1$ и $\mathfrak{D}(T_1(\tau))=\mathfrak{D}(T)\oplus\mathfrak{D}_2$, где $\mathfrak{D}_1$ и $\mathfrak{D}_2$ конечномерны. Следовательно, по лемме 6.2 $\sigma_e(T)=\sigma_e(T_1(\tau))=$ $=\sigma_e(\tau)$, ч. т. д.

Следующий результат является аналогом для спектра следствия 2.26 об индексах дефекта.

4. Теорема. *Пусть τ — формальный дифференциальный оператор, определенный на интервале I с концами a, b, и пусть I — объединение двух подинтервалов I_1 и I_2. Обозначим сужение оператора τ на I_1 (на I_2) через τ_1 (через τ_2). Тогда*

$$\sigma_e(\tau)=\sigma_e(\tau_1)\cup\sigma_e(\tau_2).$$

Доказательство. Пусть $\lambda_0\in\sigma_e(\tau_1)$. Тогда, согласно следствию 2, существует ограниченная последовательность $\{f_n\}$ элементов из $\mathfrak{D}(T_0(\tau_1))$, такая, что $\{(\tau-\lambda_0)f_n\}$ сходится, но $\{f_n\}$ не имеет сходящихся подпоследовательностей. Так как $\mathfrak{D}(T_0(\tau_1))\subseteq\mathfrak{D}(T_0(\tau))$, то из следствия 2 непосредственно вытекает, что $\lambda_0\in\sigma_e(\tau)$. Таким образом, $\sigma_e(\tau_1)\subseteq\sigma_e(\tau)$. Аналогично $\sigma_e(\tau_2)\subseteq\sigma_e(\tau)$. Итак, мы имеем

$$\sigma_e(\tau_1)\cup\sigma_e(\tau_2)\subseteq\sigma_e(\tau).$$

Обратно, пусть $\lambda_0\in\sigma_e(\tau)$; предположим, что $\lambda_0\notin\sigma_e(\tau_1)=$ $=\sigma_e(T_1(\tau_1))$ и $\lambda_0\notin\sigma_e(\tau_2)=\sigma_e(T_1(\tau_2))$. Пусть $\{f_n\}$ — ограниченная последовательность из $\mathfrak{D}(T_0(\tau))$, такая, что $\{(\tau-\lambda_0)f_n\}$ сходится, но $\{f_n\}$ не содержит сходящихся подпоследовательностей. Тогда, поскольку сужение $\varrho_1 f_n$ функции f_n на I_1 принадлежит $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$, последовательность $\{\varrho_1 f_n\}$ имеет сходящуюся подпоследовательность $\{\varrho_1 f_{n_i}\}$. Точно так же последовательность сужений функций $\{f_{n_i}\}$ на I_2 имеет сходящуюся подпоследовательность. Поэтому последовательность $\{f_n\}$ имеет подпоследовательность, сходящуюся в топологии пространства $L_2(I)$, что противоречит предположению.

5. Теорема. *Пусть τ — формальный дифференциальный оператор, определенный на интервале I, а C — наименьшее замкнутое выпуклое множество, содержащее все значения $(\tau f, f)$, где $f\in\mathfrak{D}(T_0(\tau))$ и $|f|=1$. Тогда $\sigma_e(\tau)\subseteq C$.*

Доказательство. Мы должны только показать, что если H — замкнутая полуплоскость комплексной плоскости, содержащая C, то $\sigma_e(\tau) \subseteq H$ (см. V.2.12). Переходя от рассмотрения оператора τ к рассмотрению оператора $\alpha\tau+\beta$, где $\alpha \neq 0$ (при этом не возникает никаких существенных изменений), мы можем без ограничения общности считать, что H — правая полуплоскость и λ — действительная точка. Таким образом, мы имеем $\operatorname{Re}(\tau f, f) \geqslant 0$ для f из $\mathfrak{D}(T_0(\tau))$ и хотим показать, что ни одна точка $\lambda < 0$ не принадлежит $\sigma_e(\tau)$. Предположим, что это не так, т. е. существует ограниченная последовательность $\{f_n\}$ элементов из $\mathfrak{D}(T_0(\tau))$, такая, что $\{(\tau-\lambda)f_n\}$ сходится, но $\{f_n\}$ не имеет сходящихся подпоследовательностей. Тогда

$$\lim_{i, j \to \infty} (\tau-\lambda)(f_i - f_j) = 0,$$

так что

$$\lim_{i, j \to \infty} \operatorname{Re}((\tau-\lambda)(f_i-f_j),\ (f_i-f_j)) =$$
$$= \lim \operatorname{Re}(\tau(f_i-f_j),\ (f_i-f_j)) - \lambda |f_i - f_j|^2 = 0.$$

Поскольку $\operatorname{Re}(\tau(f_i-f_j),\ (f_i-f_j)) \geqslant 0$ и $-\lambda |f_i-f_j|^2 \geqslant 0$, отсюда следует, что

$$\lim_{i, j \to \infty} (-\lambda |f_i - f_j|^2) = 0.$$

Таким образом, $\{f_n\}$ — фундаментальная последовательность, поэтому она сходится. Это противоречие доказывает нашу теорему.

6. Определение. Говорят, что формальный дифференциальный оператор τ является *формально положительным*, если $(\tau f, f) \geqslant 0$ для каждой функции $f \in \mathfrak{D}(T_0(\tau))$.

Примером такого оператора служит

$$\tau = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\frac{d}{dt}\right)^k p_k(t) \left(\frac{d}{dt}\right)^k,$$

где все коэффициенты p_k неотрицательны, поскольку в этом случае мы имеем

$$(\tau f, f) = \int_I \tau f(t)\, \overline{f(t)}\, dt = \sum_{k=0}^{n} \int p_k(t) |f^{(k)}(t)|^2 dt.$$

7. Следствие. *Если формальный дифференциальный оператор формально положителен, то его существенный спектр является подмножеством положительной части действительной оси.*

Доказательство. Это следует непосредственно из предыдущего определения и теоремы 5.

8. Теорема. *Предположим, что все значения коэффициентов* p_k *формального дифференциального оператора*

$$\tau=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(\frac{d}{dt}\right)^k p_k(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^k,\quad t\in[a, b),$$

лежат в правой полуплоскости и $\operatorname{Re} p_0(t)\to\infty$ *при* $t\to b$. *Тогда существенный спектр оператора* τ *пуст.*

Доказательство. Мы имеем $\operatorname{Re} p_k(t)\geqslant 0$, $0\leqslant k\leqslant n$, и $\operatorname{Re} p_0(t)\to\infty$, когда $t\to b$. Если τ' — сужение оператора τ на интервал $[c, b)$, то по теореме 4 $\sigma_e(\tau)=\sigma_e(\tau')$. Если задано любое действительное число λ_0, то мы можем выбрать c таким, что $\operatorname{Re} p_0(t)\geqslant\lambda_0$ для $t\in[c, b)$. Тогда

$$\operatorname{Re}(\tau' f, f)=\sum_{k=0}^{n}\int_c^b[\operatorname{Re} p_k(t)]\,|f^{(k)}(t)|^2\,dt\geqslant\lambda_0|f|^2,\quad f\in\mathfrak{D}(T_0(\tau')).$$

Из теоремы 5 вытекает, что $\sigma_e(\tau')$ и, следовательно, $\sigma_e(\tau)$ лежат полностью в полуплоскости $\operatorname{Re} z\geqslant\lambda_0$. Так как λ_0 произвольно, множество $\sigma_e(\tau)$ пусто, ч. т. д.

9. Теорема. *Предположим, что* τ — *формальный дифференциальный оператор порядка* $2n$, *определенный на интервале* $I=[a, b)$; *пусть* τ *имеет вид*

$$\tau=(-1)^n\left(\frac{d}{dt}\right)^{2n}+\sum_{j=1}^{2n-1}p_j(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^j+p_0(t),$$

где коэффициенты $p_1, \ldots, p_{2n-1}$ *равномерно ограничены и* $\operatorname{Re} p_0(t)\to\infty$, *когда* $t\to b$. *Тогда множество* $\sigma_e(\tau)$ *пусто.*

Доказательство. Пусть c — действительное число. Рассмотрим дифференциальный оператор

$$\tau_c=(-1)^n\left(\frac{d}{dt}\right)^{2n}+\sum_{j=1}^{2n-1}p_j(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^j+c.$$

Сначала покажем, что $\operatorname{Re}(\tau_c f, f)\geqslant 0$ для $f\in\mathfrak{D}(T_0(\tau))$ при достаточно больших c. Если это не верно, то существует последовательность $\{g_m\}$ элементов из $\mathfrak{D}(T_0(\tau))$, такая, что

$$\operatorname{Re}(\tau_0 g_m, g_m)\leqslant -m|g_m|_2^2.$$

Поэтому существует последовательность $\{f_m\}$ элементов из $\mathfrak{D}(T_0(\tau))$, такая, что $|f_m|_2=1$, но $\operatorname{Re}(\tau_0 f_m, f_m)\to-\infty$. Если норма

$|f_m^{(2n)}|_2$ ограничена, то из леммы 6.33 следует, что $|f_m^{(k)}|_2$ ограничена для всех $0 \leqslant k \leqslant 2n$, и поэтому величина $(\tau_0 f_m, f_m)$ ограничена вопреки предположению. Итак, не уменьшая общности, мы можем предполагать, что $|f_m^{(2n)}|_2$ стремится к ∞. Тогда снова по лемме 6.33

$$|f_m^{(k)}|_2 = o(|f_m^{(2n)}|_2), \qquad 0 \leqslant k \leqslant 2n,$$

откуда

$$(\tau_0 f_m, f_m) = (-1)^n (f_m^{(2n)}, f_m)(1 + o(1)) = |f_m^{(n)}|_2^2 (1 + o(1))$$

вопреки тому, что $\operatorname{Re}(\tau_0 f_m, f_m) \longrightarrow -\infty$.

Таким образом, $\operatorname{Re}(\tau_c f, f) \geqslant 0$ для $f \in \mathfrak{D}(T_0(\tau))$, если c достаточно велико. Пусть λ_0 — действительное положительное число. Принимая во внимание теорему 4 и переходя к достаточно малому подинтервалу $[a_0, b)$ интервала $[a, b)$, мы можем предполагать, не уменьшая общности, что $\operatorname{Re}(p_0(t) - c) \geqslant \lambda_0$. Тогда

$$\operatorname{Re}(\tau f, f) \geqslant (\tau_c f, f) + \lambda_0 (f, f)$$

для $f \in \mathfrak{D}(T_0(\tau))$. Из теоремы 5 следует, что $\sigma_e(\tau)$ лежит полностью в правой полуплоскости $\operatorname{Re} z \geqslant \lambda_0$. Так как λ_0 произвольно, то $\sigma_e(\tau)$ пусто, ч. т. д.

10. Теорема. *Предположим, что τ — формальный дифференциальный оператор порядка $2n$, определенный на интервале $I = [a, b)$; пусть τ имеет вид*

$$\tau = (-1)^n \left(\frac{d}{dt}\right)^{2n} + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \left(\frac{d}{dt}\right)^k p_k(t) \left(\frac{d}{dt}\right)^k + p_0(t).$$

Предположим, что все $\operatorname{Re} p_k$ ограничены снизу при $1 \leqslant k \leqslant n-1$ и $\operatorname{Re} p_0(t) \longrightarrow \infty$, когда $t \longrightarrow b$. Тогда множество $\sigma_e(\tau)$ пусто.

Доказательство. Полагая

$$\tau_c = (-1)^n \left(\frac{d}{dt}\right)^{2n} + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \left(\frac{d}{dt}\right)^k p_k(t) \left(\frac{d}{dt}\right)^k + c,$$

мы покажем, что $\operatorname{Re}(\tau_c f, f) \geqslant 0$ для f из $\mathfrak{D}(T_0(\tau))$ при достаточно больших c. Это позволит нам завершить доказательство настоящей теоремы точно так же, как это было сделано в последнем абзаце предыдущего доказательства. Если наше утверждение неверно, то существует последовательность $\{g_m\}$ элементов из $\mathfrak{D}(T_0(\tau))$, такая, что $\operatorname{Re}(\tau_0 g_m, g_m) \leqslant -m\,|g_m|_2^2$. Поэтому существует последовательность $\{f_m\}$ элементов из $\mathfrak{D}(T_0(\tau))$, такая, что $\operatorname{Re}(\tau_0 f_m, f_m) \longrightarrow -\infty$ и $|f_m|_2 = 1$. Если $|f_m^{(n)}|_2$ неограничены, то отсюда по лемме 6.33 следует, что $|f_m^{(k)}|_2 = O(|f_m^{(n)}|_2)$ для $0 \leqslant k < n$;

таким образом, если B — нижняя граница для $\operatorname{Re} p_1$, $\operatorname{Re} p_2$, ..., $\operatorname{Re} p_{n-1}$, то справедливо неравенство

$$\operatorname{Re}(\tau_0 f_m, f_m) = \int_I |f_m^{(n)}(t)|^2 dt + \sum_{j=1}^{n-1} \int_I \operatorname{Re} p_j(t) |f_m^{(j)}(t)|^2 dt \geqslant$$

$$\geqslant |f_m^{(n)}|_2^2 - B \sum_{j=1}^{n-1} |f_m^{(j)}|_2^2 \geqslant |f_m^{(n)}|_2^2 (1 + O(1)),$$

противоречащее тому, что $\operatorname{Re}(\tau_0 f_m, f_m) \to -\infty$. Если $|f_m^{(n)}|_2$ ограничены, то из леммы 6.33 следует, что $|f_m^{(k)}|_2$ ограничены для всех k, $0 \leqslant k \leqslant n$, и из первой части предыдущего неравенства вытекает, что $\operatorname{Re}(\tau_0 f_m, f_m)$ ограничены, а это снова противоречит тому, что $\operatorname{Re}(\tau_0 f_m, f_m) \to -\infty$.

Таким образом, если c достаточно велико, то $\operatorname{Re}(\tau_0 f, f) \geqslant 0$ для всех f из $\mathfrak{D}(T_0(\tau))$, и, как замечено выше, это доказывает теорему.

11. Теорема. *Пусть τ — формальный дифференциальный оператор порядка n, определенный на интервале $I = [a, b)$, а k — целое число, не превосходящее n. Предположим, что существует конечная постоянная M, такая, что*

$$|f^{(k)}|_2^2 \leqslant M \{|\tau f|_2^2 + |f|_2^2\}, \quad f \in \mathfrak{D}(T_0(\tau)).$$

Пусть τ_1 — (регулярный или иррегулярный) формальный дифференциальный оператор вида

$$\tau_1 = \sum_{j=0}^{k} a_j(t) \left(\frac{d}{dt}\right)^j,$$

где $\lim_{t \to b} a_j(t) = 0$, $j = 0, \ldots, k$. Тогда если $\tau + \tau_1$ имеет не обращающийся в нуль старший коэффициент, то

$$\sigma_e(\tau) = \sigma_e(\tau + \tau_1).$$

Доказательство. Пусть $\lambda_0 \in \sigma_e(\tau)$; допустим, что $\lambda_0 \notin \sigma_e(\tau + \tau_1)$. Тогда, согласно следствию 2, существует ограниченная последовательность функций f_m из $\mathfrak{D}(T_0(\tau))$, такая, что $\{(\tau - \lambda_0) f_m\}$ сходится и $\{f_m\}$ не содержит сильно сходящихся подпоследовательностей. Поскольку всякая ограниченная последовательность функций в гильбертовом пространстве содержит слабо сходящуюся подпоследовательность, мы можем без ограничения общности предполагать, что $\{f_m\}$ слабо сходится. Тогда по лемме 2.16 $\{f_m\}$ слабо сходится в топологии пространства $H^{(n)}(J)$ для каждого компактного подинтервала $J = [a, b_0]$ из I. Из леммы 2.16(a) следует, что $\{f_m^{(p)}(t)\}$ сходится для каждого t и $0 \leqslant p \leqslant n-1$; согласно принципу равномерной ограниченности, последовательность $\{f_m^{(p)}(t)\}$ равномерно ограничена для $0 \leqslant p \leqslant n-1$ и для t из любого компактного подинтервала J интервала I. Таким образом, по теореме Лебега

['] $$\lim_{m, m_1 \to \infty} \int_J |f_m^{(p)}(t) - f_{m_1}^{(p)}(t)|^2 dt = 0, \qquad 0 \leqslant p \leqslant n-1.$$

Пусть

$$\tau = \sum_{j=0}^{n} b_j(t) \left(\frac{d}{dt}\right)^j.$$

Тогда, поскольку $b_n(t) \neq 0$ и $\{(T - \lambda_0) f_n\}$ сильно сходится, из ['] следует, что

$$\lim_{m, m_1 \to \infty} \int_J |f_m^{(n)}(t) - f_{m_1}^{(n)}(t)|^2 dt = 0.$$

Таким образом,

$$\overline{\lim_{m, m_1 \to \infty}} \int_J |\tau_1 (f_m(t) - f_{m_1}(t))|^2 dt = 0.$$

По лемме 6.33 норма $|f^{(j)}|_2$ ограничена некоторым постоянным числом N при $j = 0, \ldots, k$. Если подинтервал J выбран таким большим, что $|a_j(t)| \leqslant (kN)^{-1} \varepsilon$ для $x \in I - J$, то мы имеем

$$\overline{\lim_{m, n \to \infty}} \int_{I-J} |\tau_1 (f_m(t) - f_n(t))|^2 dt \leqslant \varepsilon^2.$$

Это доказывает, что

$$\overline{\lim_{m, n \to \infty}} |\tau_1 (f_m - f_n)|_2 \leqslant \varepsilon^2,$$

и, поскольку ε произвольно,

$$\lim_{m, n \to \infty} |\tau_1 (f_m - f_n)|_2 = 0.$$

Следовательно, $\{\tau_1 f_m\}$ сходится. Таким образом, $\lim\limits_{m \to \infty} (\tau + \tau_1 - \lambda_0) f_m$ существует. Так как $\lambda_0 \notin \sigma_e(\tau + \tau_1)$, то $\{f_m\}$ имеет сильно сходящуюся подпоследовательность. Но выше мы видели, что это невозможно. Следовательно, мы доказали, что $\sigma_e(t) \supseteq \sigma_e(\tau + \tau_1)$.

Из соображений симметрии ясно, что для доказательства остальной части теоремы достаточно доказать существование такой постоянной M_1, что

$$|f^{(k)}|_2^2 \leqslant M_1 \{|(\tau + \tau_1) f|_2^2 + |f|_2^2\}, \quad f \in \mathfrak{D}(T_0(\tau + \tau_1)) = \mathfrak{D}(T_0(\tau)).$$

Чтобы доказать это, очевидно достаточно показать, что существует постоянная M_2, такая, что

$$|\tau f|_2^2+|f|_2^2\leqslant M_2\{|(\tau+\tau_1)f|_2^2+|f|_2^2\},\quad f\in\mathfrak{D}(T_0(\tau)).$$

Если это не так, то существует последовательность $\{f_m\}$ элементов из $\mathfrak{D}(T_0(\tau))$, такая, что $|(\tau+\tau_1)f_m|_2\to 0$ и $|f_m|_2\to 0$, тогда как $|\tau f_m|_2$ не сходится к нулю, так что $|\tau_1 f_m|_2$ не сходится к нулю. По условию и лемме 6.33 норма $|f_m^{(j)}|_2$ равномерно ограничена по m для $j=0, \ldots, k$. Таким образом, поскольку коэффициенты оператора τ_1 стремятся к нулю, когда $t\to b$, мы имеем

$$\lim_{c\to b}\int_c^b|(\tau_1 f_m)(t)|^2\,dt=0$$

равномерно по m. С другой стороны, согласно следствию 2.15,

$$\lim_{m\to\infty}\int_a^c|(\tau_1 f_m)(t)|^2\,dt=0$$

для каждой точки $a<c<b$. Итак $|\tau_1 f_m|_2\to 0$. Полученное противоречие доказывает теорему.

12. Следствие. *Пусть τ — формальный дифференциальный оператор вида*

$$\tau=\sum_{j=0}^{n}p_j(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^j,$$

определенный на интервале $I=[a, b)$. Предположим, что все коэффициенты $p_0, \ldots, p_{n-1}$ равномерно ограничены на I, а функция $p_n(t)$ ограничена снизу положительным числом на I. Пусть τ_1 — (регулярный или иррегулярный) формальный дифференциальный оператор вида

$$\tau_1=\sum_{j=0}^{n}a_j(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^j,$$

где $\lim\limits_{x\to b}a_j(t)=0$, $j=0, \ldots, n$. Тогда если $\tau+\tau_1$ имеет не обращающийся в нуль старший коэффициент, то

$$\sigma_e(\tau)=\sigma_e(\tau+\tau_1).$$

Доказательство. Это будет следовать из предыдущей теоремы, как только мы установим существование постоянной M, такой, что

$$|f^{(n)}|_2^2\leqslant M\{|\tau f|_2^2+|f|_2^2\},\qquad f\in\mathfrak{D}(T_0(\tau)).$$

Если таких M не существует, то ясно, что мы можем найти последовательность $\{f_m\}$ элементов из $\mathfrak{D}(T_0(\tau))$, такую, что $|f_m^{(n)}|_2=1$, $|\tau f_m|_2\to 0$, $|f_m|_2\to 0$. Так как коэффициенты $p_0, \ldots$ $\ldots, p_{n-1}$ ограничены, из леммы 6.33 следует, что

$$|\tau f_m - p_n(\cdot) f_m^{(n)}(\cdot)|_2\to 0.$$

Так как функция p_n ограничена снизу положительным числом и $|f_m^{(n)}|=1$, то норма $|p_n(\cdot) f_m^{(n)}(\cdot)|_2$ ограничена снизу положительным числом. Таким образом, $|\tau f_m|_2$ не стремится к нулю, и мы получили противоречие.

13. Следствие. *Пусть τ — формальный дифференциальный оператор вида*

$$\tau=\sum_{j=0}^{n} p_j(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^j,$$

определенный на интервале $I=[a, \infty)$. Предположим, что $\lim\limits_{t\to\infty} p_j(t)=q_j$ существует для $j=0, \ldots, n$ и $q_n\neq 0$. Тогда

$$\sigma_e(\tau)=\left\{\lambda \mid \lambda=\sum_{j=0}^{n} q_j(it)^j,\ -\infty<t<+\infty\right\}.$$

Доказательство. Пусть τ_1 — формальный дифференциальный оператор

$$\tau_1=\sum_{j=0}^{n} q_j\left(\frac{d}{dt}\right)^j,$$

определенный на интервале $(-\infty, +\infty)$, а τ_2 — его сужение на $[a, \infty)$. В силу предыдущей теоремы мы должны только показать, что

$$\sigma_e(\tau_2)=\left\{\lambda \mid \lambda=\sum_{j=0}^{n} q_j(it)^j,\ -\infty<t<+\infty\right\}=V.$$

Для этого мы сначала покажем, что $\sigma_e(\tau_2)=\sigma_e(\tau_1)$, а затем — что $\sigma_e(\tau_1)=V$. Так как $\mathfrak{D}(T_0(\tau_2))\subseteq\mathfrak{D}(T_0(\tau_1))$, из следствия 2 вытекает, что $\sigma_e(\tau_2)\subseteq\sigma_e(\tau_1)$. С другой стороны, пусть $\lambda\in\sigma_e(\tau_1)$. Тогда, согласно следствию 2, существует ограниченная последовательность функций f_n из $\mathfrak{D}(T_0(\tau))$, такая, что $\{(\tau_1-\lambda)f_n\}$ сходится, но $\{f_n\}$ не имеет сильно сходящихся подпоследовательностей. Так как $\{f_n\}$ не является фундаментальной последовательностью, существуют $\varepsilon>0$ и подпоследовательность $\{f_{n_i}\}$, такие, что $|f_{n_{i+1}}-f_{n_i}|\geqslant\varepsilon$, $i\geqslant 1$. Положим $g_i=f_{n_{i+1}}-f_{n_i}$. Тогда $\{(\tau_1-\lambda)g_n\}$ сходится к нулю, но $\{g_n\}$ не сходится к нулю.

Определим оператор сдвига T_p формулой $(T_pf)(t)=f(t-p)$. Ясно, что если $f, g \in \mathfrak{D}(T_0(\tau_1))$, то T_pf и g ортогональны для достаточно больших p, так что

$$|T_pf-g|=(|f|^2+|g|^2)^{1/2}$$

для достаточно больших p. Для $n \geqslant 1$ пусть p_n выбрано таким большим, что $h_n = T_{p_n}g_n$ обращается в нуль вне $[a, \infty)$, а функция h_n ортогональна к $h_1, \ldots, h_{n-1}$. Тогда $h_n \in \mathfrak{D}(T_0(\tau_2))$,

$$|(\tau_2-\lambda)h_n|=|(\tau_1-\lambda)g_n| \to 0,$$

в то время как

$$|h_n-h_m|=(|g_n|^2+|g_m|^2)^{1/2}>\varepsilon, \qquad n, m \geqslant 1.$$

Таким образом, $\{(\tau_2-\lambda)h_m\}$ сходится к нулю, тогда как $\{h_m\}$ не содержит сходящихся подпоследовательностей, так что, согласно следствию 2, $\lambda \in \sigma_e(\tau_2)$. Итак, $\sigma_e(\tau_2)=\sigma_e(\tau_1)$.

Пусть ϱ — формально симметрический дифференциальный оператор

$$\varrho=\frac{1}{i}\frac{d}{dt},$$

определенный на интервале $(-\infty, +\infty)$, а T — единственное его самосопряженное расширение (см. замечания, следующие за определением 2.20, случай 3). Тогда, как установлено в § 5 (см. замечания после следствия 5.30), спектр оператора T является непрерывным и покрывает всю действительную ось. Пусть T_1 — полином $\sum_{j=0}^{n} q_j(iT)^j$ от T. Очевидно, что оператор T_1 является расширением оператора $T_0(\tau_1)$. Согласно следствию XII.2.8 и теореме XII.2.6, оператор T_1 замкнут. В силу XII.2.6 (d)

$$T_1^*=\sum_{j=0}^{n}\bar{q}_j(-i)^jT^j.$$

Таким образом, $T_1^* \supseteq T_0(\tau_1^*)$, откуда по теореме 2.10

$$T_1=T_1^{**} \subseteq T_0(\tau_1^*)^*=T_1(\tau_1).$$

Согласно следствию 3, $\sigma_e(\tau_1)=\sigma_e(T_1)$. По теореме XII.2.9 (b) $\sigma(T_1)$ содержится в области значений V полинома $\sum_{j=0}^{n} q_j(it)^j$. Таким образом, $\sigma_e(T_1) \subseteq V$. С другой стороны, пусть

$$\lambda=\sum_{j=0}^{n} q_j(it_0)^j,$$

а $\{I_n\}$ — последовательность непересекающихся открытых интервалов действительной оси, такая, что $I_n \subseteq \{t \mid |t-t_0| < 1/n\}$. Поскольку $\sigma(T)$ — действительная ось, по теореме XII.2.9(b) оператор $E(I_n)$ отличен от нуля для каждого n. Следовательно, существует последовательность $\{f_n\}$ в $\mathfrak{D}(T)$, такая, что $E(I_n) f_n = f_n$, $n \geqslant 1$, и $|f_n| = 1$. В силу XII.2.6(c) $T_1 f_n - \lambda f_n$ стремится к нулю, когда $n \to \infty$. С другой стороны, поскольку f_n и f_m ортогональны при $n \neq m$, мы имеем

$$|f_n - f_m|^2 = |f_n|^2 + |f_m|^2 = 2,$$

т. е. $\{f_n\}$ не содержит сходящихся подпоследовательностей. Таким образом, $\lambda \in \sigma_e(T_1) = \sigma_e(\tau)$, ч. т. д.

14. Следствие. *Пусть τ — формально самосопряженный дифференциальный оператор вида*

$$\tau = \sum_{j=0}^{n} p_j(t) \left(\frac{d}{dt}\right)^j,$$

определенный на интервале $[a, \infty)$. *Предположим, что* $\lim\limits_{t\to\infty} p_j(t) = q_j$ *существует для каждого* $j = 0, \ldots, n$ *и что* $q_n \neq 0$. *Тогда*

(a) *если n нечетно, то $\sigma_e(\tau)$ — вся действительная ось*;

(b) *если n четно и $(-1)^{n/2} q_n \geqslant 0$, то $\sigma_e(\tau)$ — положительная полуось, ограниченная снизу числом*

$$\lambda_0 = \min_{-\infty < t < +\infty} \sum_{j=0}^{n} q_j (it)^j.$$

Доказательство. Так как τ — формально самосопряженный оператор, то $(\tau f, f) = (f, \tau f)$ для f из $\mathfrak{D}(T_0(\tau))$, поэтому $(\tau f, f)$ — действительное число. Следовательно, по теореме 5 множество $\sigma_e(\tau)$ расположено на действительной оси. По предыдущей теореме полином $P(t) = \sum_{j=0}^{n} q_j (it)^j$ действителен. Если n нечетно, то это полином нечетной степени. Поэтому он стремится к $+\infty$ при $t \to +\infty$ и к $-\infty$ при $t \to -\infty$ и, следовательно, принимает все действительные значения. Теперь утверждение (a) следует непосредственно из предыдущей теоремы.

Если n четно и $i^n q_n = (-1)^{n/2} q_n \geqslant 0$, то $P(t)$ стремится к $+\infty$ при $t \to \pm\infty$. Таким образом, $P(t)$ принимает все значения от $+\infty$ до своего минимума. Это доказывает утверждение (b).

15. Следствие. *Пусть τ — формальный дифференциальный оператор вида*

$$\tau=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\left(\frac{d}{dt}\right)^j p_j(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^j,$$

определенный на интервале $I=[a, b)$. Предположим, что $\operatorname{Re} p_j$ ограничены снизу, $j=0, \ldots, n$, причем функция $\operatorname{Re} p_n$ ограничена снизу положительной постоянной. Пусть τ_1 — регулярный или иррегулярный формальный дифференциальный оператор вида

$$\tau_1=\sum_{j=0}^{n}a_j(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^j,$$

где $\lim\limits_{t\to b}a_j(t)=0$, $j=0, \ldots, n$. Тогда τ и $\tau+\tau_1$ имеют один и тот же существенный спектр.

Доказательство. Это будет следовать непосредственно из теоремы 11, как только мы установим, что существует положительная постоянная M, такая, что

$$|f^{(n)}|_2^2\leqslant M\{|\tau f|_2^2+|f|_2^2\},\qquad f\in\mathfrak{D}(T_0(\tau)).$$

Если это не так, то мы можем найти последовательность $\{f_m\}$ элементов из $\mathfrak{D}(T_0(\tau))$, такую, что $|\tau f_m|_2\to 0$, $|f_m|_2\to 0$, в то время как $|f_m^{(n)}|_2=1$. По лемме 6.33 $|f_m^{(k)}|_2\to 0$ для $0\leqslant k<n$. Тогда, поскольку $\operatorname{Re} p_0, \ldots, \operatorname{Re} p_{n-1}$ ограничены снизу,

$$\varliminf_{m\to\infty}\operatorname{Re}\int_I\left\{\sum_{j=0}^{n-1}p_j(t)\,|f_m^{(j)}(t)|^2\right\}dt\geqslant 0.$$

Поэтому, если M — положительная нижняя граница для $\operatorname{Re} p_n$, то мы имеем

$$0=\varliminf_{m\to\infty}\operatorname{Re}(\tau f_m, f_m)=\varliminf_{m\to\infty}\operatorname{Re}\int_I\left\{\sum_{j=0}^{n-1}p_j(t)\,|f_m^{(j)}(t)|^2\right\}dt\geqslant$$
$$\geqslant M\varliminf_{m\to\infty}|f_m^{(n)}|_2^2=M.$$

Полученное противоречие доказывает наше утверждение.

Приведенные выше теоремы представляют собой лишь небольшую часть результатов, полученных в этом направлении. Дополнительные результаты даются в упражнениях в конце этой главы.

Теоремы, доказанные выше, дают довольно полное описание спектра действительных самосопряженных операторов второго порядка; для удобства ссылок мы объединим полученные результаты в следующие две теоремы.

16. Теорема. *Пусть* τ — *действительный оператор второго порядка вида*

$$-\left(\frac{d}{dt}\right)^2+q(t),$$

определенный на интервале $I=[a, \infty)$.

(a) *Если* $q(t)\to\infty$ *при* $t\to\infty$, *то* $\sigma_e(\tau)$ *пусто.*

(b) *Если* $q(t)\to c$ *при* $t\to\infty$, *то* $\sigma_e(\tau)=\{\lambda\mid\lambda\geqslant c\}$.

(c) *Если* $q(t)\to-\infty$ *и если*

$$\int_{a_0}^{\infty}\left|\left(\frac{q'(t)}{|q(t)|^{3/2}}\right)'-\frac{1}{4}\frac{(q'(t))^2}{|q(t)|^{5/2}}\right|dt<\infty$$

и

$$\int_{a_0}^{\infty}|q(t)|^{-1/2}\,dt<\infty$$

для достаточно больших a_0, *то* $\sigma_e(\tau)$ *пусто.*

(d) *Если* $q(t)\to-\infty$, q — *монотонно убывающая функция для достаточно больших* t, *и если*

$$\int_{a_0}^{\infty}\left|\left(\frac{q'(t)}{|q(t)|^{3/2}}\right)'-\frac{1}{4}\frac{(q'(t))^2}{|q(t)|^{5/2}}\right|dt<\infty$$

для достаточно больших a_0 *и*

$$\int_{a_0}^{\infty}|q(t)|^{-1/2}\,dt=\infty$$

для всех a_0, *то* $\sigma_e(\tau)$ — *вся действительная ось.*

Доказательство. Утверждения (a) и (b) следуют непосредственно из теоремы 9 и следствия 14; (c) вытекает из следствий 6.22 и 6.11; (d) выводится из следствия 6.21 (b).

Следует заметить, что, применяя теорему 4, предыдущую теорему можно обобщить на случай, когда I представляет собой интервал $(-\infty, +\infty)$. Детальную формулировку соответствующих результатов мы предоставляем читателю.

Результат, подобный предыдущей теореме, может быть установлен и в случае, когда I — интервал $(a, b]$ с конечным a. Ради простоты мы, не уменьшая общности, предположим, что $a=0$.

17. Теорема. *Пусть τ — действительный оператор второго порядка вида*

$$-\left(\frac{d}{dt}\right)^2+q(t),$$

определенный на интервале $I=(0, b]$.

(a) *Если $q(t)\to\infty$ при $t\to 0$, то $\sigma_e(\tau)$ пусто.*

(b) *Если $\overline{\lim\limits_{t\to 0}}\,|t^2 q(t)|<3/4$, то $\sigma_e(\tau)$ пусто.*

(c) *Если $q(t)\to-\infty$ при $t\to 0$ и если*

$$\int_0^{b_0}\left|\left(\frac{q'(t)}{|q(t)|^{3/2}}\right)'-\frac{1}{4}\frac{(q'(t))^2}{|q(t)|^{5/2}}\right|dt<\infty$$

и

$$\int_0^{b_0}|q(t)|^{-1/2}\,dt<\infty$$

для достаточно малых b_0, то $\sigma_e(\tau)$ пусто.

(d) *Если $q(t)\to-\infty$ при $t\to 0$, $q(t)$ — монотонно убывающая функция для достаточно малых t и если*

$$\int_0^{b_0}\left|\left(\frac{q'(t)}{|q(t)|^{3/2}}\right)'-\frac{1}{4}\frac{(q'(t))^2}{|q(t)|^{5/2}}\right|dt<\infty$$

для достаточно малых b_0 и

$$\int_0^{b_0}|q(t)|^{-1/2}\,dt=\infty$$

для всех $b_0>0$, то $\sigma_e(\tau)$ — вся действительная ось.

Доказательство. Утверждение (a) следует непосредственно из теоремы 9; (b) — из следствия 6.12 и теоремы 6.23(b). Утверждение (c) вытекает из теоремы 6.23(c) и следствия 6.12; часть (d) выводится из следствия 6.21(b).

Несколько дополнительных критериев такого рода для оператора второго порядка

$$-\left(\frac{d}{dt}\right)^2+q(t)$$

следуют из соответствующих теорем § 6. Некоторые из них приводятся в виде упражнений в конце главы.

Теорема 8, очевидно, может быть обобщена следующим образом.

18. Теорема. *Предположим, что все значения коэффициентов* p_k, $k \geqslant 1$, *формального дифференциального оператора*

$$\tau = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\frac{d}{dt}\right)^k p_k(t) \left(\frac{d}{dt}\right)^k, \qquad t \in [a, b),$$

лежат в правой полуплоскости, а $\varliminf_{t \to b} \operatorname{Re} p_0(t) \geqslant \lambda_0$. *Тогда существенный спектр* $\sigma_e(\tau)$ *лежит в правой полуплоскости* $\operatorname{Re} z \geqslant \lambda_0$.

Доказательство. Если τ' — сужение оператора τ на интервал $[c, b)$, то по теореме 4 $\sigma_e(\tau) = \sigma_e(\tau')$. Если задано любое действительное число $\lambda < \lambda_0$, то мы можем выбрать точку c так, что $\operatorname{Re} p_0(t) \geqslant \lambda$ для $x \in [c, b)$. Тогда мы получим

$$\operatorname{Re}(\tau' f, f) = \sum_{k=0}^{n} \int_c^b (\operatorname{Re} p_k(t)) \, |f^{(k)}(t)|^2 \, dt \geqslant \lambda |f|^2, \qquad f \in \mathfrak{D}(T_0(\tau')).$$

Из теоремы 5 следует, что $\sigma_e(\tau)$ целиком лежит в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geqslant \lambda$. Поскольку λ — любое число, меньшее λ_0, множество $\sigma_e(\tau)$ целиком лежит в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geqslant \lambda_0$, ч. т. д.

19. Следствие. *Пусть* τ — *действительный самосопряженный формальный дифференциальный оператор второго порядка вида*

$$\tau = -\left(\frac{d}{dt}\right) p(t) \left(\frac{d}{dt}\right) + q(t),$$

определенный в интервале $[a, b)$. *Предположим, что* $p(t) > 0$ *для* $t \in [a, b)$. *Тогда если* $\varliminf_{t \to b} q(t) = \lambda_0$, *то каждое* $\lambda \in \sigma_e(\tau)$ *удовлетворяет неравенству* $\lambda \geqslant \lambda_0$.

Несколько более сильные результаты могут быть установлены для формально симметрических формальных дифференциальных операторов, ограниченных снизу в смысле определения XII.5.1, которое мы воспроизводим ниже для удобства читателя.

Определение XII.5.1. Симметрический оператор T называется *ограниченным сверху* (*ограниченным снизу*), если существует такое вещественное число c, что $(Tx, x) \leqslant c(x, x)$ $((Tx, x) \geqslant c(x, x))$ для всех $x \in \mathfrak{D}(T)$. Если T ограничен сверху или снизу, то говорят, что T *полуограничен*. Число c называется *гранью* для T, а наименьшее (наибольшее) из таких c называется *верхней* (*нижней*) *гранью* оператора T. Если $(Tx, x) \geqslant 0$ для всех $x \in \mathfrak{D}(T)$, то T называется *неотрицательным*.

20. Определение. Пусть τ — формально симметрический дифференциальный оператор. Говорят, что τ *ограничен снизу*, тогда и только тогда, когда $T_0(\tau)$ ограничен снизу.

21. Лемма. *Самосопряженный оператор T ограничен снизу в смысле определения* XII.5.1 *тогда и только тогда, когда множество $\sigma(T)$ ограничено снизу как подмножество действительной оси, т. е. тогда и только тогда, когда существует конечное число μ, такое, что $\mu \leqslant \lambda$ для каждого $\lambda \in \sigma(T)$.*

Доказательство. Предположим, что такое μ существует. Тогда по теореме XII.2.6

$$(Tx, x) = \int_{\mu}^{\infty} \lambda \, | E(dx) x |^2 \geqslant \mu \, | x |^2, \qquad x \in \mathfrak{D}(T);$$

таким образом, если величина $|x|$ ограничена, то форма (Tx, x) ограничена снизу.

Обратно, предположим, что для каждого n множество $e_n = (-\infty, -n) \cap \sigma(T)$ не пусто. По теореме XII.2.9(b) $E(e_n) \neq 0$ для любого n. Используя это, выберем элемент x_n так, что $E(e_n) x_n = x_n$, $x_n \in \mathfrak{D}(T)$, $|x_n| = 1$. Тогда по теореме XII.2.6

$$(Tx_n, x_n) = \int_{-\infty}^{-n} \lambda \, | E(d\lambda) x_n |^2 < -n \, | x_n |^2, \qquad n \to \infty.$$

Таким образом, T не ограничен снизу, ч. т. д.

22. Лемма. *Пусть T_1 и T_2 — два симметрических оператора в гильбертовом пространстве. Предположим, что $T_1 \subseteq T_2$ и $\mathfrak{D}(T_2) = \mathfrak{D}(\overline{T}_1) + \mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ конечномерно. Оператор T_1 ограничен снизу тогда и только тогда, когда T_2 ограничен снизу.*

Доказательство. Из определения XII.5.1 видно, что если T_2 ограничен снизу, то T_1 также должен быть ограниченным снизу. Обратно, пусть T_1 ограничен снизу. Предположим, что лемма неверна, т. е. T_2 не ограничен снизу.

По индукции мы покажем, что для каждого $K > 0$ и для каждого целого n существует n-мерное подпространство $\mathfrak{S}_n(K)$ пространства $\mathfrak{D}(T_2)$, такое, что

$$(T_2 x, x) \leqslant -K \, | x |^2, \qquad x \in \mathfrak{S}_n(K).$$

Для $n = 1$ это следует из определения XII.5.1 и предположения, что T_2 не ограничен снизу. Предположим, что $\mathfrak{S}_n(K)$ существует для данного n и для любого K, но что имеется такая положительная постоянная K_0, для которой $\mathfrak{S}_{n+1}(K_0)$ не существует. Пусть E — ортогональная проекция гильбертова пространства $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{S}_n(2K_0)$. Пусть T — отображение пространства $\mathfrak{S}_n(2K_0)$ в $\mathfrak{H}$, определенное равенством $Tx = T_2 x$, $x \in \mathfrak{S}_n(2K_0)$, и пусть $|T|$ — его норма. Положим

$$m = \max(|T|, |T|/K_0, K_0).$$

Покажем, что неравенство

$$(T_2 y, y) \geqslant -m|y|^2, \qquad y \in \mathfrak{D}(T_2) \cap (\mathfrak{S}_n(2K_0))^{\perp},$$

не имеет места. Действительно, если бы оно выполнялось, то мы имели бы

$$\begin{aligned}(T_2x, x) &= (T_2(Ex + (I-E)x), Ex + (I-E)x) = \\ &= (T_2Ex, Ex) + (T_2(I-E)x, (I-E)x) + \\ &+ (T_2Ex, (I-E)x) + ((I-E)x, T_2Ex) \geqslant \\ &\geqslant -|T||Ex|^2 - 2|T||Ex||(I-E)x| - m|(I-E)x|^2 \geqslant \\ &\geqslant -2m(|Ex|^2 + |(I-E)x|^2) = -2m|x|^2,\end{aligned}$$

вопреки предположению, что T_2 не ограничен снизу. Следовательно, существует единичный вектор y, $y \in \mathfrak{D}(T_2) \cap (\mathfrak{S}_n(2K_0))^{\perp}$, такой, что $(T_2y, y) < -m$. Пусть $\mathfrak{S}$ — пространство, натянутое на $\mathfrak{S}_n(2K_0)$ и y. Тогда каждый элемент x из $\mathfrak{S}$ может быть однозначно представлен в виде $x = u + \alpha y$, где $u \in \mathfrak{S}_n(2K_0)$. Для каждого $x \in \mathfrak{S}$ мы имеем

$$\begin{aligned}(T_2x, x) &= (T_2(u + \alpha y), (u + \alpha y)) = \\ &= (T_2u, u) + (T_2u, \alpha y) + (\alpha y, T_2u) + (T_2\alpha y, \alpha y) \leqslant \\ &\leqslant -2K_0|u|^2 + 2|T||u||\alpha| - m|\alpha|^2 \leqslant \\ &\leqslant -K_0(|u|^2 + |\alpha|^2) - K_0|u|^2 + 2|T||u||\alpha| - (|T|/K_0)|\alpha|^2 = \\ &= -K_0|x|^2 - K_0(|u| - (|T|/K_0)|\alpha|)^2 \leqslant K_0|x|^2.\end{aligned}$$

Следовательно, мы можем положить $\mathfrak{S}_{n+1}(K_0) = \mathfrak{S}$. Таким образом, существует $\mathfrak{S}_{n+1}(K_0)$, и поэтому существует $\mathfrak{S}_n(K)$ для всех $n \geqslant 1$, $K > 0$.

Из определения XII.5.1 видно, что существует постоянная K, такая, что

$$(T_1x, x) \geqslant -K(x, x), \qquad x \in \mathfrak{D}(T_1).$$

Отсюда вытекает (см. XII.4.6), что

$$(\overline{T}_1x, x) \geqslant -K(x, x), \qquad x \in \mathfrak{D}(\overline{T}_1).$$

График $\overline{\Gamma}_1$ оператора $\overline{T}_1$ является подпространством графика $\overline{\Gamma}_2$ оператора $\overline{T}_2$, который в свою очередь является подпространством прямой суммы $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$ двух экземпляров гильбертова пространства $\mathfrak{H}$. Поскольку оператор $\overline{T}_1$ замкнут, $\overline{\Gamma}_1$ — замкнутое подпространство из $\overline{\Gamma}_2$. По предположению $\Gamma_2 = \overline{\Gamma}_1 \dotplus \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}$ конечномерно. Пусть P — ортогональный проектор пространства Γ_2 на $\overline{\Gamma}_1$. Тогда $\Gamma_2 = \overline{\Gamma}_1 \oplus (I - P)\Gamma_2$. С другой стороны, пространство $\mathfrak{M}_1 = (I - P)\Gamma_2 = (I - P)\mathfrak{M}$ конечномерно. Следовательно, $\Gamma_2 = \overline{\Gamma}_1 \oplus \mathfrak{M}_1$, где $\mathfrak{M}_1$ конечномерно; пусть размерность пространства $\mathfrak{M}_1$ равна n_1. Пусть P_1 — ортогональный проектор пространства Γ_2 на $\mathfrak{M}_1$. Для x из $\mathfrak{D}(T_2)$ положим $P_2x = P_1[x, T_2x]$. Тогда P_2 — (разрывное) линейное отображение пространства $\mathfrak{D}(T_2)$ в n-мерное пространство $\mathfrak{M}_1$. Следовательно, существует элемент $x \neq 0$ из построенного выше $(n+1)$-мерного пространства $\mathfrak{S}_{n+1}(2K)$, такой, что $P_2x = 0$. Но если $P_2x = 0$, то очевидно, что $x \in \mathfrak{D}(\overline{T}_1)$. Таким образом, с одной стороны, мы имеем $x \in \mathfrak{D}(\overline{T}_1)$, так что $(\overline{T}_1x, x) \geqslant K(x, x)$, а с другой стороны, $x \in \mathfrak{S}_{n+1}(2K)$, так что $(\overline{T}_1x, x) = (T_2x, x) \leqslant -2K(x, x)$. Полученное противоречие доказывает лемму.

23. Лемма. *Если T — замкнутый симметрический оператор в гильбертовом пространстве, ограниченный снизу, то*

(a) *существенный спектр оператора T есть подмножество действительной оси, ограниченное снизу;*

(b) *индексы дефекта оператора T равны.*

Доказательство. Чтобы доказать (a), заметим, что если T ограничен снизу, то существует постоянная K, такая, что

$$(Tx, x) \geqslant -K(x, x), \qquad x \in \mathfrak{D}(T).$$

Из доказательства теоремы 5 видно, что $\sigma_e(T)$ — подмножество полуоси $\infty > t \geqslant -K$. Поскольку T ограничен снизу, из теоремы XII.5.2 и следствия XII.4.13(a) вытекает, что индексы дефекта оператора T равны. Это доказывает утверждение (b).

24. Следствие. *Если τ — формально симметрический дифференциальный оператор, ограниченный снизу, то*

(a) *существенный спектр оператора τ есть подмножество действительной оси, ограниченное снизу;*

(b) *индексы дефекта оператора $T_0(\tau)$ равны;*

(c) *все симметрические расширения оператора $T_0(\tau)$ ограничены снизу.*

Доказательство. В силу определений 20 и 6 утверждения (a) и (b) следуют из предыдущей леммы. В силу конечности индексов дефекта оператора $T_0(\tau)$ (см. 2.13) утверждение (c) следует из лемм 22 и XII.4.11.

25. Определение. (a) Если T — ограниченный снизу замкнутый симметрический оператор в гильбертовом пространстве, и его

существенный спектр $\sigma_e(T)$ не пересекает интервал $(-\infty, \lambda)$ действительной оси, то мы говорим, что T *существенно ограничен снизу числом* λ.

(b) Если τ — формально симметрический дифференциальный оператор, ограниченный снизу, и его существенный спектр $\sigma_e(\tau)$ не пересекает интервал $(-\infty, \lambda)$ действительной оси, то мы говорим, что τ *существенно ограничен снизу числом* λ.

26. Следствие. *Пусть τ — формально симметрический дифференциальный оператор, а T — любое замкнутое симметрическое расширение (в частности, самосопряженное расширение) оператора $T_0(\tau)$. Оператор τ существенно ограничен снизу числом λ тогда и только тогда, когда T существенно ограничен снизу числом λ.*

Доказательство. Это следует из леммы 22 и следствия 6.3.

27. Следствие. *Самосопряженный оператор T существенно ограничен снизу числом λ тогда и только тогда, когда для каждого $\varepsilon > 0$ множество $(-\infty, \lambda-\varepsilon) \cap \sigma(T)$ конечно.*

Доказательство. Допустим, что множество $(-\infty, \lambda-\varepsilon) \cap \sigma(T)$ конечно. Тогда очевидно, что $\sigma(T)$ есть ограниченное снизу подмножество действительной оси, так что по лемме 21 оператор T ограничен снизу. По теореме 6.5 $\sigma_e(T) \cap (-\infty, \lambda-\varepsilon)$ пусто. Поэтому T существенно ограничен снизу числом λ.

Обратно, предположим, что T существенно ограничен снизу числом λ. Тогда по теореме 6.5 и лемме 21 множество $(-\infty, \lambda-\varepsilon) \cap \sigma(T)$ конечно для каждого $\varepsilon > 0$, ч. т. д.

Следующая теорема тесно связана с теоремой 4.

28. Теорема. *Пусть τ — формальный дифференциальный оператор, определенный на интервале I с концами a, b, и пусть I — объединение двух (не обязательно непересекающихся) подинтервалов I_1 и I_2. Обозначим сужение оператора τ на I_1 (на I_2) через τ_1 (через τ_2). Оператор τ ограничен снизу тогда и только тогда, когда τ_1 и τ_2 ограничены снизу.*

Доказательство. Сначала предположим, что τ ограничен снизу. Пусть $\{f_n\}$ — последовательность элементов из $\mathfrak{D}(T_0(\tau_1))$, ограниченных по норме пространства L_2. Тогда f_n принадлежат $\mathfrak{D}(T_0(\tau))$, и поскольку $T_0(\tau)$ ограничен снизу, последовательность $(T_0(\tau_1) f_n, f_n) = (T_0(\tau) f_n, f_n)$ ограничена снизу. Таким образом, величина $(T_0(\tau_1) f, f)$ ограничена снизу, когда f меняется на любом множестве из $\mathfrak{D}(T_0(\tau_1))$, для которого величина (f, f) ограничена. Отсюда видно, что оператор $T_0(\tau_1)$, а поэтому и τ_1, ограничен снизу. Аналогично оператор τ_2 ограничен снизу.

Обратно, предположим, что τ имеет порядок n, а операторы τ_1 и τ_2 оба ограничены снизу. Для определенности предположим, что I_1 содержит некоторую окрестность левого конца a интервала I, так что, за исключением случая $I_1 = I$ (в этом случае $\tau = \tau_1$ и очевидно, что τ ограничен снизу), I_2 содержит окрестность правого конца b интервала I.

За исключением случая $I_2 = I$, когда опять-таки доказывать нечего, правый конец c_1 интервала I_1 и левый конец c_2 интервала I_2 являются внутренними точками интервала I. Пусть $\hat{I}_1 = I_1 \cup c_1$, $\hat{I}_2 = I_2 \cup c_2$, а $\hat{\tau}_1$ и $\hat{\tau}_2$ — сужения оператора τ соответственно на $\hat{I}_1$ и $\hat{I}_2$. Тогда, очевидно, $\mathfrak{D}(T_0(\hat{\tau}_i)) = \mathfrak{D}(T_0(\tau_i))$, $i = 1, 2$. Следовательно, не уменьшая общности, мы можем предполагать, что $c_1 \in I_1$, $c_2 \in I_2$, т. е. что I_1 содержит свой правый конец, а I_2 содержит свой левый конец. Пусть c — внутренняя точка интервала I, общая для I_1 и I_2. Тогда $(a, c] \subseteq I_1$ и $[c, b) \subseteq I_2$. Пусть $g_0, g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}$ — система n функций из $\mathfrak{D}(T_0(\tau))$, таких, что

$$g_i^{(j)}(c) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant i = j \leqslant n-1, \\ 0, & 0 \leqslant i \neq j \leqslant n-1, \end{cases}$$

а $\mathfrak{N}$ есть n-мерное подпространство пространства $\mathfrak{D}(T_0(\tau))$, натянутое на эти функции. Пусть $\mathfrak{D}$ — подпространство пространства $\mathfrak{D}(T_0(\tau))$, определенное условием

$$\mathfrak{D} = \{f \in \mathfrak{D}(T_0(\tau)) \mid f^{(j)}(c) = 0, \quad 0 \leqslant j \leqslant n-1\}.$$

Тогда $\mathfrak{D}(T_0(\tau)) = \mathfrak{D} + \mathfrak{N}$. Поэтому, обозначая через T сужение оператора $T_0(\tau)$ на $\mathfrak{D}$, мы выводим из леммы 22, что для доказательства ограниченности $T_0(\tau)$ снизу достаточно показать, что T ограничен снизу.

Поскольку τ_1 и τ_2 ограничены снизу, существует постоянная K, такая, что

$$(T_0(\tau_1) f, f) \geqslant -K(f, f), \qquad f \in \mathfrak{D}(T_0(\tau_1)),$$
$$(T_0(\tau_2) f, f) \geqslant -K(f, f), \qquad f \in \mathfrak{D}(T_0(\tau_2)).$$

Отсюда следует (см. определение XII.4.7), что

$$(\overline{T_0(\tau_1)} f, f) \geqslant -K(f, f), \qquad f \in \mathfrak{D}(\overline{T_0(\tau_1)}),$$
$$(\overline{T_0(\tau_2)} f, f) \geqslant -K(f, f), \qquad f \in \mathfrak{D}(\overline{T_0(\tau_2)}).$$

Пусть $h \in \mathfrak{D}$. Положим

$$h_1(t) = h(t), \quad t \leqslant c; \qquad h_1(t) = 0, \quad t > c;$$
$$h_2(t) = h(t), \quad t \geqslant c; \qquad h_2(t) = 0, \quad t < c.$$

Тогда очевидно, что $h_1 \in \mathfrak{D}(T_1(\tau_1))$, $h_2 \in \mathfrak{D}(T_1(\tau))$. Так как h_1 обращается в нуль в окрестности левого конца интервала I_1 и обращается в нуль вместе со своими $n-1$ производными в правом конце этого интервала, из теоремы 2.19 и следствия 2.23 вытекает, что если B — любое граничное значение для $T_0(\tau_1)$, то $B(h_1)=0$. Тогда из определения XII.4.7 и леммы XII.4.26 следует, что $h_1 \in \mathfrak{D}(\overline{T_0(\tau_1)})$. Поэтому

$$(T_1(\tau_1)h_1, h_1) \geqslant -K(h_1, h_2).$$

Аналогично

$$(T_1(\tau_2)h_2, h_2) \geqslant -K(h_2, h_2).$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$(Th, h) = (T_1(\tau)h, h) \geqslant -K(h, h), \quad h \in \mathfrak{D}(T).$$

Таким образом, T ограничен снизу, ч. т. д.

29. Лемма. *Пусть τ — формально симметрический дифференциальный оператор на конечном замкнутом интервале I. Тогда если τ нечетного порядка, то он не ограничен снизу. Если τ четного порядка $2n$ и его старший коэффициент $a_{2n}(t)$ (который обязательно действителен и не обращается в нуль) удовлетворяет условию $(-1)^n a_{2n}(t) \geqslant 0$, то τ существенно ограничен снизу любым конечным λ, но $-\tau$ не является существенно ограниченным снизу.*

Доказательство. Пусть $\tau = a_m(t)(d/dt)^m + \ldots$, причем m нечетно. Тогда $\tau = \tau^* = -\overline{a_m(t)}(d/dt)^m + \ldots$, поэтому функция a_m чисто мнимая. (Аналогично, если m четное, то a_m действительная.) Пусть φ — функция из $C^\infty(I)$, равная нулю в окрестностях концов интервала I. Тогда $\tau(\varphi(t)e^{ikt})$ имеет асимптотику $(ik)^m a_m(t) e^{ikt}\varphi(t)$, когда k стремится к $\pm\infty$. Следовательно, устремляя k к $+\infty$ (или $-\infty$), мы заставим форму $(\tau\varphi(\cdot)e^{ik\cdot}, \varphi(\cdot)e^{ik\cdot})$ стремиться к $\pm\infty$ (или $\mp\infty$). Так как система функций $\{\varphi(\cdot)e^{ik\cdot}\}$ ограничена, это показывает, что оператор τ не ограничен ни сверху, ни снизу. Таким же способом мы можем показать, что в случае, когда $m=2n$ четно и $(-1)^n a_{2n}(t) \geqslant 0$, оператор $-\tau$ не является существенно ограниченным снизу.

Согласно теоремам 4.1 и 4.2, $\sigma_e(\tau) = \varnothing$, поэтому для того, чтобы завершить наше доказательство, достаточно показать, что в случае, когда $m=2n$ четно и $(-1)^n a_{2n}(t) \geqslant 0$, оператор τ ограничен снизу. Принимая во внимание теорему 28, для этого достаточно доказать существование такого малого $\varepsilon > 0$, что если J — подинтервал из I длины, не превосходящей ε, то сужение $\hat{\tau}$ оператора τ на J ограничено снизу.

Пусть b — нижняя граница для $(-1)^n a_{2n}(t)$, а B — верхняя граница для $|a_k^{(j)}(t)|$, $0 \leqslant j, k \leqslant 2n$. Тогда если $f \in \mathfrak{D}(T_0(\hat{\tau}))$, то

$$(T_0(\hat{\tau}) f, f) = (-1)^n \int_J a_{2n}(t) \, |f^{(n)}(t)|^2 \, dt + \sum_{j=1}^{2n-1} \int_J a_j(t) f^{(j)}(t) \overline{f(t)} \, dt \geqslant$$

$$\geqslant b \int_J |f^{(n)}(t)|^2 \, dt + \sum_{j=1}^{2n-1} \int_J a_j(t) f^{(j)}(t) \overline{f(t)} \, dt.$$

Повторно интегрируя по частям сумму в правой части этого неравенства, мы получаем сумму конечного числа N интегралов с подинтегральными выражениями вида $\pm a_j^{(k)}(t) f^{(l)}(t) f^{(p)}(t)$, $0 \leqslant k \leqslant 2n$, $0 \leqslant l \leqslant n$, $0 \leqslant p < n$, где N зависит только от n. Таким образом, мы имеем

[*] $$(T_0(\hat{\tau}) f, f) \geqslant b \int_J |f^{(n)}(t)|^2 dt - NB \max_{\substack{0 \leqslant l \leqslant n \\ 0 \leqslant p < n}} \int_J |f^{(l)}(t)| \, |f^{(p)}(t)| \, dt.$$

Если g обращается в нуль в окрестности левого конца a интервала J и длина J не превосходит ε, то для t из интервала J

$$|g(t)| = \left| \int_a^t g'(t) \, dt \right| \leqslant \varepsilon \int_J |g'(t)| \, dt \leqslant \varepsilon^{3/2} \left\{ \int_J |g'(t)|^2 dt \right\}^{1/2},$$

так что

$$\int_J |g(t)|^2 dt \leqslant \varepsilon^4 \int_J |g'(t)|^2 dt.$$

Отсюда по индукции следует, что если $\varepsilon < 1$, то

$$\int_J |g^{(p)}(t)|^2 dt \leqslant \varepsilon^4 \int_J |g^{(n)}(t)|^2 dt, \quad 0 \leqslant p < n.$$

Таким образом, в силу неравенства Шварца и [*]

$$(T_0(\hat{\tau}) f, f) \geqslant b \int_J |f^{(n)}(t)|^2 - NB\varepsilon^2 \int_J |f^{(n)}(t)|^2 dt.$$

Если ε настолько мало, что $b - NB\varepsilon^2 \geqslant 0$, то отсюда следует, что оператор $\hat{\tau}$ ограничен снизу, ч. т. д.

30. Следствие. *Формально положительный формально симметрический дифференциальный оператор τ существенно ограничен снизу нулем.*

Доказательство. Определение 20 показывает, что оператор τ ограничен снизу. Поэтому наше утверждение вытекает из следствия 7 и определения 25(b).

31. Следствие. *В условиях теоремы* 8 *предположим, что коэффициенты* p_k *действительны. Тогда* τ *существенно ограничен снизу любым конечным* λ.

Доказательство. Мы используем обозначения из доказательства теоремы 8. Для того чтобы доказать, что τ существенно ограничен снизу числом λ_0, достаточно по лемме 29 и теореме 28 показать, что τ' существенно ограничен снизу числом λ_0. Но, как показано в доказательстве теоремы 8, точка c может быть выбрана так, что оператор $\tau'-\lambda_0$ будет формально положительным. Согласно предыдущему следствию, $\tau'-\lambda_0$ существенно ограничен снизу нулем, откуда по определению 25 мы получаем, что τ' существенно ограничен снизу числом λ_0, ч. т. д.

32. Следствие. *В условиях теоремы* 9 *предположим, что* τ *формально симметричен. Тогда* τ *существенно ограничен снизу любым конечным* λ.

Доказательство. Мы используем обозначения из доказательства теоремы 9. Из этого доказательства видно, что $\tau=\tau_c+p_0$ ограничен снизу (поскольку τ_c формально положителен для достаточно больших c, а функция p_0 ограничена снизу). Так как по теореме 9 $\sigma_e(\tau)=\varnothing$, то наше утверждение вытекает из определения 25.

33. Следствие. *В условиях теоремы* 10 *предположим, что коэффициенты* p_k *действительны. Тогда* τ *существенно ограничен снизу любым конечным* λ.

Доказательство. Это утверждение может быть доказано так же, как следствие 32.

Можно установить ряд дополнительных результатов, связанных с результатами, выраженными теоремой 11, ..., следствием 19, почти так же, как следствия 31, 32 и 33 связаны с теоремами 8, 9 и 10. Некоторые результаты такого рода можно найти в упражнениях в конце этой главы.

Следующая «теорема сравнения» часто оказывается полезной при определении существенного спектра формального дифференциального оператора.

34. Теорема. *Пусть* τ — *формально самосопряженный дифференциальный оператор порядка* n *на интервале* I. *Предположим, что* τ *ограничен снизу. Пусть* τ_1 — *регулярный или иррегулярный дифференциальный оператор порядка, не превосходящего* n, *определенный на том же интервале* I, *формально самосопряженный*

и формально положительный. Тогда если τ существенно ограничен снизу числом λ, а старший коэффициент оператора $\tau+\tau_1$ нигде не обращается в нуль, то $\tau+\tau_1$ существенно ограничен снизу числом λ.

Доказательство. Не уменьшая общности, мы можем предполагать, что $\lambda=0$. В силу следствий 24(b), XII.4.13 и 26 $T_0(\tau)$ имеет самосопряженное расширение T, которое также существенно ограничено снизу нулем. Пусть $\varepsilon>0$. Тогда, согласно следствию 27, множество $(-\infty, -\varepsilon)\cap\sigma(T)$ конечно. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ — его точки, $E(\cdot)$ — спектральное разложение оператора T и $E_i = E(\lambda_i)$. По теореме XII.2.6 каждая функция f из $E_i(L_2)$ удовлетворяет уравнению $Tf=\lambda_i f$. Так как по теореме 2.10 и лемме XII.4.1(b) из равенства $Tf=\lambda_i f$ следует равенство $T_1(\tau)f=\lambda_i f$, то отсюда следует, что $E_i(L_2(I))$ конечномерно для каждого $i=1, \ldots, p$. Следовательно, мы можем найти конечный ортонормальный базис $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ для $E_i(L_2(I))+\ldots+E_p(L_2(I))$. Если $f\in L_2(I)$ удовлетворяет условиям $(f, \varphi_i)_n=0$, $i=1, 2, \ldots, n$, то $\left(I-\sum_{i=1}^{n} E_i\right)f=f$ и поэтому $E([-\varepsilon, \infty))f=f$. Следовательно, если $f\in\mathfrak{D}(t)$ удовлетворяет условиям $(f, \varphi_i)=0$, $i=1, \ldots, n$, то из теоремы XII.2.6 вытекает, что

$$(Tf, f)=\int_{-\varepsilon}^{\infty}\lambda\,|E(d\lambda)f|^2\geqslant-\varepsilon\,|f|^2. \qquad [*]$$

Для каждого целого $k\leqslant n$ мы можем представить пространство $\mathfrak{D}(T_0(\tau))$ в виде суммы пространств $\mathfrak{D}_k=\{f\in\mathfrak{D}(T_0(\tau))\,|\,(f, \varphi_i)=0, i=1, \ldots, k\}$ и конечномерного подпространства $\mathfrak{N}_k$, таких, что существует ограниченный оператор проектирования P_k, проектирующий $\mathfrak{D}(T_0(\tau))$ на $\mathfrak{N}_k$, для которого $(I-P_k)\mathfrak{D}(T_0(\tau))=\mathfrak{D}_k$. Это легко доказать при помощи индукции по k. Применяя индукцию, мы должны только показать, что $\mathfrak{D}_k$ можно представить в виде суммы пространства $\mathfrak{D}_{k+1}$ и конечномерного пространства $\hat{\mathfrak{N}}_k$, для которого существует ограниченный оператор $\hat{P}_k$, проектирующий $\mathfrak{D}_k$ на $\hat{\mathfrak{N}}_k$, такой, что $(I-\hat{P}_k)\mathfrak{D}_k=\mathfrak{D}_{k+1}$. В самом деле, в этом случае мы можем положить $\mathfrak{N}_{k+1}=\mathfrak{N}_k+\hat{\mathfrak{N}}_k$ и определить P_{k+1} формулой $P_{k+1}=P_k+\hat{P}_k(I-P_k)$. Если $(f, \varphi_{k+1})=0$ для всех $f\in\mathfrak{D}_k$, то $\mathfrak{D}_k=\mathfrak{D}_{k+1}$, $\hat{\mathfrak{N}}_k=0$. С другой стороны, если существует функция $g\in\mathfrak{D}_k$, такая, что $(g, \varphi_{k+1})=1$, то $f-(f, \varphi_{k+1})g\in\mathfrak{D}_{k+1}$ для каждой функции $f\in\mathfrak{D}_k$, так что $\mathfrak{D}_k$ является суммой $\mathfrak{D}_{k+1}$ и одномерного пространства $\hat{\mathfrak{N}}_k$, натянутого на g. При этом мы полагаем $\hat{P}_k f=(f, \varphi_{k+1})g$. Итак, мы можем заключить, что $\mathfrak{D}(T_0(\tau))=\{f\in\mathfrak{D}(T_0(\tau))\,|\,(f, \varphi_i)=0, i=1, \ldots, n\}+\mathfrak{N}=\mathfrak{D}_n+\mathfrak{N}_n$, где $\mathfrak{N}$ — конечномерное подпространство пространства $\mathfrak{D}(T_0(\tau))$, причем существует ограниченный оператор $P=P_n$, проектирующий $\mathfrak{D}(T_0(\tau))=\mathfrak{D}(T_0(\tau+\tau_1))$ на $\mathfrak{N}_n$, такой, что $(I-P)\mathfrak{D}(T_0(\tau+\tau_1))=\mathfrak{D}_n$.

Пусть $\mu>0$; применяя следствие 2, мы покажем, что $-(\mu+\varepsilon)\notin \sigma_e(\tau+\tau_1)$. Если это неверно, то, согласно следствию 2, существует ограниченная последовательность $\{f_m\}$ из $\mathfrak{D}(T_0(\tau+\tau_1))$, такая, что $\{(\tau+\tau_1+\mu+\varepsilon)f_m\}$ сходится, но $\{f_m\}$ не имеет сходящихся подпоследовательностей. Пусть $g_m=Pf_m$. Тогда $\{g_m\}$ — ограниченная последовательность в конечномерном пространстве $\mathfrak{N}_n$, поэтому мы можем считать без ограничения общности (переходя, если необходимо, к подпоследовательности), что $\{g_m\}$ сходится. Отображение $T_0(\tau+\tau_1)$ определено и линейно на *конечномерном* пространстве $\mathfrak{N}_n$, поэтому оно непрерывно на этом пространстве. Следовательно, $\{(\tau+\tau_1+\mu+\varepsilon)g_m\}$ сходится. Поэтому, полагая $\hat{f}_m=f_m-g_m$, мы получаем ограниченную последовательность $\{\hat{f}_m\}$ элементов из $\mathfrak{D}_n$, такую, что $\{(\tau+\tau_1+\mu+\varepsilon)\hat{f}_m\}$ сходится, но $\{\hat{f}_m\}$ не содержит сходящихся подпоследовательностей. С другой стороны, в силу [*] мы имеем

$$\overline{\lim_{m,\,q\to\infty}}\,|f_m-f_q|^2\leqslant\mu^{-1}\overline{\lim_{m,\,q\to\infty}}\,((\tau+\tau_1+\mu+\varepsilon)(\hat{f}_m-\hat{f}_q),\ \hat{f}_m-\hat{f}_q)=0,$$

поскольку норма $|\hat{f}_m-\hat{f}_q|$ ограничена и последовательность $\{(\tau+\tau_1+\mu+\varepsilon)f_m\}$ сходится. Таким образом, $\{\hat{f}_m\}$ — фундаментальная последовательность, поэтому она сходится. Это противоречие доказывает теорему.

В случае действительного формально самосопряженного дифференциального оператора

$$\tau=-\left(\frac{d}{dt}\right)p(t)\left(\frac{d}{dt}\right)+q(t)$$

имеется тесная связь между спектральной теорией различных самосопряженных расширений оператора $T_0(\tau)$ и более классической «осцилляционной теорией» Штурма. Теперь мы намерены установить эту связь.

В нашем дальнейшем изложении мы будем использовать основные факты теории Штурма о нулях решений дифференциальных уравнений второго порядка; мы сформулируем их в виде следующих лемм.

35. Лемма. *Пусть*

$$\tau_1=-\left(\frac{d}{dt}\right)p_1(t)\left(\frac{d}{dt}\right)+q_1(t),$$

$$\tau_2=-\left(\frac{d}{dt}\right)p_2(t)\left(\frac{d}{dt}\right)+q_2(t)$$

— два действительных формально самосопряженных дифференциальных оператора, определенных на замкнутом интервале I. Предположим, что $p_1(t) \geqslant p_2(t) > 0$ и $q_1(t) \geqslant q_2(t)$ для $t \in I$. Пусть f_1 — ненулевое действительное решение уравнения $\tau_1 f_1 = 0$, а f_2 — ненулевое действительное решение уравнения $\tau_2 f_2 = 0$. Пусть $f_1(c) = 0$, $f_1(d) = 0$. Тогда, за исключением случая, когда $p_1(t) = p_2(t)$, $q_1(t) = q_2(t)$, а f_2 отличается от f_1 постоянным множителем в $[c, d]$, всегда существует точка b в открытом интервале (c, d), такая, что $f_2(b) = 0$.

Доказательство. Предположим, что утверждение теоремы неверно. Тогда функция $f_1(t)/f_2(t)$ непрерывна в $[c, d]$. Действительно, если f_2 обращается в нуль в одной из точек c, d, скажем в точке c, то обязательно $f_2'(c) \neq 0$ (поскольку $f_2(c) = f_2'(c) = 0$ означает, что $f_2 \equiv 0$ вопреки предположению), и

$$\lim_{t \to c} \frac{f_1(t)}{f_2(t)} = \frac{f_1'(c)}{f_2'(c)}.$$

Следовательно, функция g, определенная формулой

$$g(t) = f_1(t) f_2^{-1}(t) [p_1(t) f_1'(t) f_2(t) - p_2(t) f_1(t) f_2'(t)],$$

непрерывна в $[c, d]$. Более того, она обращается в нуль в концах интервала $[c, d]$, даже если $f_2(c) = 0$ или $f_2(d) = 0$. Далее,

$$g = p_1 f_1' f_1 - (p_2 f_2') f_1^2 f_2^{-1},$$

так что

$$\begin{aligned} g' &= q_1 f_1^2 - q_2 f_1^2 + p_1 (f_1')^2 - 2 p_2 f_2' f_1' f_1 f_2^{-1} + p_2 f_2' f_1^2 f_2' f_2^{-2} = \\ &= (q_1 - q_2) f_1^2 + p_1 (f_1')^2 + p_2 f_2^{-2} [(f_2')^2 f_1^2 - 2 f_1 f_1' f_2 f_2' + (f_1')^2 f_2^2] - p_2 (f_1')^2 = \\ &= (q_1 - q_2) f_1^2 + (p_1 - p_2)(f_1')^2 + p_2 f_2^{-2} (f_1' f_2 - f_2' f_1)^2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$0 = g(d) - g(c) = \int_c^d \{(q_1 - q_2) f_1^2 + (p_1 - p_2)(f_1')^2 + p_2 f_2^{-1} (f_1' f_2 - f_2' f_1)^2\}.$$

Так как все члены под интегралом в правой части неотрицательны, мы имеем $f_1' f_2 - f_2' f_1 \equiv 0$ в $[c, d]$. Таким образом,

$$(f_1 f_2^{-1})' = f_2^{-2} (f_1' f_2 - f_2' f_1)$$

есть тождественный нуль в $[c, d]$, поэтому $f_1 f_2^{-1}$ — постоянная величина. Кроме того, поскольку f_1 и f_1' имеют только конечное число нулей в $[c, d]$, обязательно $p_1(t) = p_2(t)$, $q_1(t) = q_2(t)$ для $t \in [c, d]$, ч. т. д.

36. Следствие. *Пусть*

$$\tau = -\left(\frac{d}{dt}\right) p(t) \left(\frac{d}{dt}\right) + q(t)$$

— действительный формально самосопряженный формальный дифференциальный оператор, определенный на открытом, полуоткрытом или замкнутом интервале I. Тогда

(a) *между любыми двумя последовательными нулями любого отличного от тождественного нуля решения f_1 уравнения $\tau f = 0$ имеется один нуль любого линейно независимого решения f_2;*

(b) *если некоторое отличное от тождественного нуля решение уравнения $\tau f = 0$ имеет бесконечное число нулей в I, то каждое отличное от тождественного нуля решение этого уравнения имеет бесконечное число нулей в I.*

Доказательство. Утверждение (a) есть частный случай $\tau_1 = \tau_2$ предыдущей теоремы. Утверждение (b) очевидным образом следует из утверждения (a).

Примером, иллюстрирующим утверждение леммы, служит пара функций $\sin \lambda t$ и $\sin \mu t$ для $\mu > \lambda$; утверждению следствия отвечает пара функций $\sin t$ и $\cos t$.

Другой пример, показывающий, насколько сильной является теорема сравнения Штурма, доставляет следующая теорема Кнезера, которая, как мы увидим ниже, дает интересные сведения о спектре самосопряженных расширений оператора $T_0(\tau)$ в случае, когда она применима.

37. Следствие. *Пусть*

$$\tau = -\left(\frac{d}{dt}\right)^2 + q(t)$$

— действительный формально самосопряженный формальный дифференциальный оператор, определенный на интервале $[a, \infty)$. Тогда

(a) *если $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\, t^2 q(t) < -1/4$, то каждое решение уравнения $\tau f = 0$ имеет бесконечное число нулей на интервале $[a, \infty)$;*

(b) *если $\underline{\lim\limits_{t\to\infty}}\, t^2 q(t) > -1/4$, то всякое отличное от тождественного нуля решение уравнения $\tau f = 0$ имеет не более конечного числа нулей на $[a, \infty)$.*

Доказательство. В соответствии с предыдущей теоремой достаточно показать, что при $\alpha < -1/4$ каждое решение уравнения $-f'' + \alpha t^{-2} f = 0$ имеет бесконечное число нулей и что при $\alpha > -1/4$ каждое отличное от тождественного нуля решение уравнения $-f'' + \alpha t^{-2} f = 0$ имеет только конечное число нулей.

Здесь двумя решениями уравнения $-f''+\alpha t^{-2}f=0$ являются t^{e_1} и t^{e_2}, где $e_1,\ e_2=1/2 \pm \sqrt{\alpha+(1/4)}$. Если $\alpha>-1/4$, то e_1 и e_2 действительны и очевидно, что t^{e_1}, t^{e_2} не имеют нулей. Если $\alpha<-1/4$, так что $i\mu=\sqrt{\alpha+(1/4)}$ — чисто мнимое число, то

$$t^{e_1}+t^{e_2}=t^{1/2}(t^{i\mu}+t^{-i\mu})=2t^{1/2}\cos(\mu\log t)$$

имеет бесконечно много нулей, ч. т. д.

38. Следствие. *Пусть*

$$\tau=-\left(\frac{d}{dt}\right)^2+q(t)$$

— действительный формально самосопряженный формальный дифференциальный оператор, определенный на интервале $(0, a]$. *Тогда*

(a) *если* $\overline{\lim_{t\to 0}}\, t^2q(t)<-1/4$, *то каждое решение уравнения* $\tau f=0$ *имеет бесконечное число нулей на интервале* $(0, a]$;

(b) *если* $\underline{\lim_{t\to 0}}\, t^2q(t)>-1/4$, *то всякое отличное от тождественного нуля решение уравнения* $\tau f=0$ *имеет не более конечного числа нулей на* $(0, a]$.

Доказательство. Читатель, изучивший доказательство предыдущего следствия, сможет без труда изменить его так, чтобы получить доказательство следствия 38.

Теперь мы приведем первый результат, связывающий осцилляционную теорию со спектральной теорией.

39. Лемма. *Пусть*

$$\tau=-\left(\frac{d}{dt}\right)p(t)\left(\frac{d}{dt}\right)+q(t)$$

— действительный формально самосопряженный формальный дифференциальный оператор, определенный на интервале $I=(a, b)$. *Пусть* $p(x)>0$ *для* $x\in I$, *а* λ_0 *— действительное число. Тогда*

(a) *если* τ *существенно ограничен снизу числом* λ_0, *то для каждого* $\varepsilon>0$ *никакое действительное решение уравнения* $\tau\sigma=(\lambda_0-\varepsilon)\sigma$ *не имеет бесконечно много нулей в* I;

(b) *если для всех* $\varepsilon>0$ *каждое действительное решение уравнения* $\tau\sigma=(\lambda_0-\varepsilon)\sigma$ *имеет только конечное число нулей в* I, *то* τ *существенно ограничен снизу числом* λ_0.

Доказательство. Пусть функция σ действительна, удовлетворяет уравнению $\tau\sigma=(\lambda_0-\varepsilon)\sigma$ и имеет бесконечно много нулей в I. Тогда σ имеет либо возрастающую, либо убывающую бесконечную последовательность различных нулей. Для определенности предположим, что σ имеет возрастающую бесконечную последовательность нулей z_1, z_2, z_3, ... Пусть $g_n(t)=k_n\sigma(t)$ для $z_n\leqslant t\leqslant z_{n+1}$, где постоянная k_n выбирается так, что

$$\int_{z_n}^{z_{n+1}} g_n^2(t)\,dt=1$$

и $g_n(t)=0$ в других точках.

Дальше нам понадобится следующий общий вспомогательный принцип. Пусть g — непрерывно дифференцируемая функция в конечном замкнутом интервале J, равная нулю в концах этого интервала. Пусть $\varepsilon>0$. Тогда существует функция $h\in C^\infty(J)$, такая, что

$$\max_{t\in J}|h(t)-g(t)|<\varepsilon,$$

$$|h'-g'|_2=\left\{\int_J |h'(t)-g'(t)|^2\,dt\right\}^{1/2}<\varepsilon,$$

причем h обращается в нуль в окрестностях концов интервала J. Это можно доказать следующим образом. Прежде всего для определенности мы, очевидно, можем без ограничения общности предполагать, что $J=[-1,\ +1]$. Продолжим функцию g, полагая $g(t)=0$ при $|t|>1$. Тогда ясно, что при $\delta\to 0$

$$\max_{t\in J}|g(t)-g((1+\delta)t)|\to 0,$$

$$\int\left|g'(t)-\frac{d}{dt}g((1+\delta)t)\right|^2dt\to 0.$$

Поэтому, выбирая δ достаточно малым и полагая $\hat{g}(t)=g((1+\delta)t)$, мы найдем непрерывную функцию $\hat{g}$ с непрерывной всюду, за исключением двух точек $\pm(1+\delta)^{-1}$, производной, такую, что

$$\max_{t\in J}|g(t)-\hat{g}(t)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$|g'-\hat{g}'|_2<\frac{\varepsilon}{2},$$

причем $\hat{g}$ обращается в нуль вне интервала $[-1+\eta,\ 1-\eta]$, где η — некоторое положительное число. Далее, пусть φ — бесконечно дифференцируемая действительнозначная неотрицательная функция, равная нулю вне интервала $J=(-1,\ +1)$ и такая, что

$$\int_J \varphi(t)\,dt=1.$$

Тогда при $\alpha \to \infty$ мы, очевидно, имеем следующее:

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \alpha\varphi(\alpha s)\hat{g}(t-s)\,ds \to \hat{g}(t)$ равномерно;

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \alpha\varphi(\alpha s)\hat{g}(t-s)\,ds$ обращается в нуль вне отрезка $[-1+\eta-\alpha^{-1},\ 1-\eta+\alpha^{-1}]$;

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \alpha\varphi(\alpha s)\hat{g}'(t-s)\,ds \to \hat{g}'(t)$ в каждой точке непрерывности функции $\hat{g}'$;

$\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} \alpha\varphi(\alpha s)\hat{g}'(t-s)\,ds\right| \leqslant \max\limits_{t\in J}|\hat{g}'(t)|$.

Из последних трех утверждений и теоремы Лебега мы заключаем, что при $\alpha \to \infty$

$$\int\limits_J \left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} \alpha\varphi(\alpha s)\hat{g}'(t-s)\,ds - \hat{g}'(t)\right|^2 dt \to 0.$$

Поскольку $\hat{g}(t-s)$ обращается в нуль в точках разрыва своей производной, мы находим интегрированием по частям, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \alpha\varphi(\alpha s)\,\hat{g}'(t-s)\,ds = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\{\frac{d}{ds}\alpha\varphi(\alpha s)\right\}\hat{g}(t-s)\,ds =$$

$$= -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\{\frac{d}{ds}\alpha\varphi(\alpha(t-s))\right\}\hat{g}(t)\,ds = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt}\alpha\varphi(\alpha(t-s))\,\hat{g}(s)\,ds =$$

$$= -\frac{d}{dt}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \alpha\varphi(\alpha(t-s))\,\hat{g}(s)\,ds = \frac{d}{dt}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \alpha\varphi(\alpha s)\,\hat{g}(t-s)\,ds.$$

Здесь используется также тот факт, что $\varphi \in C^\infty(J)$. Таким образом, выбирая α достаточно большим и полагая

$$h(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \alpha\varphi(\alpha s)\hat{g}(t-s)\,ds,$$

мы получаем

$$\max_{t\in J}|h(t)-g(t)| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\quad |h'-g'|_2 < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

причем h обращается в нуль вне интервала $[-1+\eta/2,\ 1+\eta/2]$, где $\eta>0$.

Более того, поскольку $h(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\alpha\varphi(\alpha(t-s))\,\hat{g}(s)\,ds$, очевидно, что $h\in C^{\infty}(I)$; общий вспомогательный принцип доказан.

Теперь, используя этот принцип, выберем последовательность $\{h_{nm}\}$ бесконечно дифференцируемых функций, таких, что $h_{nm}(t)$ обращается в нуль всюду, кроме интервала $z_n<t<z_{n+1}$,

$$\lim_{m\to\infty}|h'_{nm}-g'_n|_2=0$$

и $h_{nm}(t)\to g_n(t)$ равномерно, когда $m\to\infty$. Тогда

$$(\tau h_{nm},\ h_{nm})=\int\limits_{z_n}^{z_{n+1}}\{p(t)\,|h'_{nm}(t)|^2+q(t)\,|h_{nm}(t)|^2\}\,dt\to$$

$$\to\int\limits_{z_n}^{z_{n+1}}\{p(t)\,|g'_n(t)|^2+q(t)\,|g_n(t)|^2\}\,dt=$$

$$=\int\limits_{z_n}^{z_{n+1}}(\tau g_n)(t)\,\overline{g_n(t)}\,dt=(\lambda_0-\varepsilon)\,|g_n|_2^2=(\lambda_0-\varepsilon).$$

Следовательно, выбирая достаточно большое $m=m_n$ и полагая $f_n=h_{nm_n}/|h_{nm_n}|_2$, мы можем построить последовательность функций $f_n\in\mathfrak{D}(T_0(\tau))$, такую, что

$$[*]\qquad\begin{aligned}&(f_n,\ f_m)=0, && 1\leqslant n\neq m,\\ &|f_n|=1, && 1\leqslant n,\\ &(\tau f_n,\ f_n)\leqslant\lambda_0-\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Теперь предположим, что τ существенно ограничен снизу числом λ_0. Согласно следствиям 24 (b), XII.4.13 и 26, $T_0(\tau)$ имеет самосопряженное расширение T, которое также существенно ограничено снизу числом λ_0. Тогда в силу следствия 27 множество $(-\infty,\ \lambda_0-\varepsilon/4)\cap\sigma(\tau)$ конечно. Пусть $\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_p$ — его точки, $E(\cdot)$ — спектральное разложение для T и $E_i=E(\lambda_i)$. По теореме XII.2.6 каждая функция f из $E_i(L_2)$ удовлетворяет уравнению $Tf=\lambda_i f$. Так как по теореме 2.10 и лемме XII.4.1 из равенства $Tf=\lambda_i f$ следует равенство $T_1(\tau)f=\lambda_i f$, из предыдущего вытекает, что $E_i(L_2)$ конечномерно для каждого $i=1,\ \ldots,\ p$. Следовательно, мы можем найти конечный ортонормальный базис

$\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ для $E_1(L_2)\oplus\ldots\oplus E_p(L_2)$. Если $f\in L_2$ удовлетворяет условию $(f, \varphi_i)=0$, $i=1, \ldots, m$, то $\left(I-\sum_{i=1}^{n} E_i\right)f=f$ и поэтому $E([\lambda_0-\varepsilon/4, \infty))f=f$. Следовательно, если $f\in\mathfrak{D}(T)$ удовлетворяет условию $(f, \varphi_i)=0$, $i=1, \ldots, m$, то из теоремы XII.2.6 вытекает, что

$$[**] \qquad (Tf, f) \doteq \int_{\lambda_0-\varepsilon/4}^{\infty} \lambda\,|E(d\lambda)f|^2 \geqslant \left(\lambda_0-\frac{\varepsilon}{4}\right)|f|^2.$$

С другой стороны, так как выше построено бесконечно много функций f_n, мы можем, очевидно, найти такую нетривиальную линейную комбинацию $f=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i$ этих функций, что $(f, \varphi_i)=0$, $i=1, \ldots, m$. Тогда справедливо неравенство [**]; однако, согласно [*],

$$(Tf, f)=\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^2(Tf_i, f_i)\leqslant\left(\lambda_0-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^2=\left(\lambda_0-\frac{\varepsilon}{2}\right)|f|^2.$$

Это противоречие доказывает, что τ не является существенно ограниченным снизу числом λ_0, откуда следует утверждение (a).

Чтобы доказать (b), рассуждаем следующим образом. Предположим, что для всех $\varepsilon>0$ каждое действительное решение уравнения $\tau\sigma=(\lambda_0-\varepsilon)\sigma$ имеет только конечное число нулей в I. Мы хотим показать, что τ существенно ограничен снизу числом λ_0. По теореме 28 и теореме 4 достаточно показать, что сужения оператора τ на $(a, c]$ и $[c, b)$, где $a<c<b$, существенно ограничены снизу числом λ_0.

Таким образом, не уменьшая общности, мы можем предполагать, что I — полуоткрытый, скажем справа, интервал, так что $I=[a, b)$. Решение уравнения $\tau\sigma=(\lambda_0-\varepsilon/2)\sigma$, удовлетворяющее условию $f(a)=0$, единственное с точностью до постоянного множителя, имеет только конечное число нулей. Пусть c — его наибольший нуль, так что решение уравнения $\tau\sigma=(\lambda_0-\varepsilon/2)\sigma$, удовлетворяющее условию $f(c)=0$, не имеет нулей внутри $[c, b)$. По теореме 28 и лемме 29 сужение оператора τ на $[c, b)$ существенно ограничено снизу числом $\lambda_0-\varepsilon$ для каждого $\varepsilon>0$ тогда и только тогда, когда сужение оператора τ на $[a, b)$ существенно ограничено снизу числом $\lambda_0-\varepsilon$ для каждого $\varepsilon>0$. Таким образом, не уменьшая общности, мы можем предполагать, что решение уравнения $\tau\sigma=(\lambda_0-\varepsilon/2)\sigma$, удовлетворяющее условию $f(a)=0$, не имеет нулей внутри I. По принципу сравнения (лемма 35) если $\lambda\leqslant\lambda_0-\varepsilon/2$, то решение уравнения $\tau\sigma=\lambda\sigma$, удовлетворяющее условию $f(a)=0$, не имеет нулей внутри I. Поэтому если c — любая точка, такая, что $a<c<b$, то самосопряженный оператор T_c, полученный из сужения оператора τ на $[a, c]$ наложением граничных условий $f(a)=f(c)=0$, не имеет собственных значений, меньших, чем $\lambda-\varepsilon/2$. Тогда из теорем 4.1, 4.2 и XII.7.2 следует, что $(\tau f, f)=(T_c f, f)\geqslant(\lambda_0-\varepsilon/2)|f|^2$ для f из $\mathfrak{D}(T_c)$. Так как $\bigcup\limits_{a<c<b}\mathfrak{D}(T_c)\supseteq\mathfrak{D}(T_0(\tau))$, то $((\tau-(\lambda_0-\varepsilon/2))f, f)\geqslant 0$ для f из $\mathfrak{D}(T_0(t))$; поэтому оператор $\tau-(\lambda_0-\varepsilon/2)$ является формально положительным и, согласно следствию 30, τ существенно ограничен снизу числом $\lambda_0-\varepsilon/2$ для любого $\varepsilon>0$, ч. т. д.

40. Теорема. *Пусть*

$$\tau=-\left(\frac{d}{dt}\right)p(t)\left(\frac{d}{dt}\right)+q(t)$$

— действительный формально самосопряженный дифференциальный оператор, определенный на интервале $I=(a, b)$. *Пусть* $p(t)>0$ *для* t *из* I. *Тогда*

(a) *если* τ *не ограничен снизу, то все решения каждого уравнения* $\tau\sigma=\lambda\sigma$ *имеют бесконечно много нулей в* I, *и обратно*;

(b) *если* τ *ограничен снизу и* λ_0 *— наименьшее число из* $\sigma_e(\tau)$ *(в данном случае* $\lambda_0>-\infty$*), то для* $\mu>\lambda_0$ *каждое решение уравнения* $\tau\sigma=\mu\sigma$ *имеет бесконечно много нулей, тогда как для* $\mu<\lambda_0$ *всякое решение этого уравнения имеет не более конечного числа нулей.*

Доказательство. Оператор τ ограничен снизу тогда и только тогда, когда он существенно ограничен снизу некоторым конечным λ. Поэтому утверждение (a) следует непосредственно из предыдущей леммы.

Чтобы доказать утверждение (b), заметим, что τ существенно ограничен снизу числом λ_0, но не всяким $\lambda>\lambda_0$. Утверждение (b) следует из предыдущей леммы.

Теперь мы обратимся к более детальному анализу случая (b) предыдущей теоремы. Пусть τ — формальный дифференциальный оператор, рассматриваемый в этой теореме, а λ_0 — наименьшее число из $\sigma_e(\tau)$. Пусть τ имеет n_a $(=0$ или 2 по теореме 2.30) граничных значений в точке a и n_b граничных значений в точке b. Пусть T — самосопряженное сужение оператора $T_1(\tau)$, определенное распадающейся системой граничных условий. Согласно следствию 2.32, эти граничные условия действительны и состоят из $(1/2)\,n_a$ $(=0$ или $1)$ граничных условий в точке a и из $(1/2)\,n_b$ $(=0$ или $1)$ граничных условий в точке b.

Проведем подробное исследование решений уравнения $\tau\sigma=\lambda\sigma$ для $\lambda\in(-\infty, \lambda_0)$. Для упрощения дальнейших формулировок условимся, если одно из n_a или n_b равно нулю, предполагать, что $n_b=0$. Это не уменьшает общности, так как всегда можно сделать замену переменной $t \to -t$. Таким образом, за исключением случаев, когда τ вообще не имеет граничных значений, он имеет два граничных значения в точке a, и, согласно следствию 2.31, система граничных условий, определяющая T, содержит в точности одно действительное граничное условие B в точке a.

Пусть t — любая точка из (a, b). Пусть τ_1 и τ_2 — сужения оператора τ соответственно на $(a, t]$ и $[t, b)$. По теореме 2.20 любое граничное значение для τ_1 (для τ_2) в точке a (в точке b) можно рассматривать как граничное значение для τ в точке a (в точке b). Если τ имеет некоторые граничные значения в точке a, то по теореме 2.30 мы можем найти два действительных граничных значения G_1, G_2 для τ_1 в точке a и два действительных граничных значения E_1, E_2 для τ_1 в точке t, таких, что

$$(\tau_1 f, g)-(f, \tau_1 g)=G_1(f)\overline{G_2(g)}-G_2(f)\overline{G_1(g)}+$$
$$+E_1(f)\overline{E_2(g)}-E_2(f)\overline{E_1(g)}, \qquad f, g \in \mathfrak{D}(T_1(\tau_1)).$$

Согласно следствию 2.23, мы можем написать

$$E_1(f)=a_{11}f(t)+a_{12}f'(t), \qquad E_2(f)=a_{21}f(t)+a_{22}f'(t), \qquad f \in \mathfrak{D}(T_1(\tau_1)),$$

где, поскольку E_1 и E_2 действительны, коэффициенты a_{ij} действительны. Отсюда мы находим

$$(\tau_1 f, g)-(f, \tau_1 g)=G_1(f)\overline{G_2(g)}-G_2(f)\overline{G_1(g)}+$$
$$+(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})(f(t)\overline{g'(t)}-f'(t)\overline{g(t)}), \qquad f, g \in \mathfrak{D}(T_1(\tau_1))$$

Если мы выберем f и g так, чтобы они обращались в нуль в окрестности точки a, и применим формулу Грина (теорема 2.4), то получим

$$(\tau_1 f, g)-(f, \tau_1 g)=F_t(f, g)+G_1(f)\overline{G_2(g)}-G_2(f)\overline{G_1(g)},$$
$$f, g \in \mathfrak{D}(T_1(\tau_1)),$$

где $F_t(f, g)$ — граничная форма для τ в точке t, определяемая выражением

$$F_t(f, g)=p(t)(f(t)\overline{g'(t)}-f'(t)\overline{g(t)}), \quad a<t<b.$$

Если τ_1 не имеет граничных значений в точке a, то мы таким же способом находим

$$(\tau_1 f, g)-(f, \tau_1 g)=F_t(f, g), \quad f, g \in \mathfrak{D}(T_1(\tau_1)).$$

Аналогично мы имеем

$$(\tau_2 f, g)-(f, \tau_2 g)=-F_t(f, g), \quad f, g \in \mathfrak{D}(T_1(\tau_2)),$$

если τ не имеет граничных значений в точке b; если же τ имеет граничные значения в точке b, то мы можем найти два действительных граничных значения D_1, D_2 для τ_2 в точке b, таких, что

$$(\tau_2 f, g)-(f, \tau_2 g)=D_1(f)\overline{D_2(g)}-D_2(f)\overline{D_1(g)}-F_t(f, g),$$
$$f, g \in \mathfrak{D}(T_1(\tau_2)).$$

По теореме 2.30 и следствию 2.31 система граничных условий, определяющая самосопряженное сужение T оператора $T_1(\tau)$, имеет вид

$$B(f)=\alpha_1 G_1(f)+\alpha_2 G_2(f)=0,\quad \alpha_1^2+\alpha_2^2 \neq 0,\quad \alpha_1,\ \alpha_2 \text{ — действительные},$$
$$\hat{B}(f)=\beta_1 G_1(f)+\beta_2 G_2(f)=0,\quad \beta_1^2+\beta_2^2 \neq 0,\quad \beta_1,\ \beta_2 \text{ — действительные},$$

если τ имеет граничные значения в обеих точках a и b, и

$$B(f)=\alpha_1 G_1(f)+\alpha_2 G_2(f)=0,\quad \alpha_1^2+\alpha_2^2 \neq 0,\quad \alpha_1,\ \alpha_2 \text{ — действительные},$$

если τ имеет граничные значения в точке a, но не имеет их в точке b. Следовательно,

(a) если $f, g \in \mathfrak{D}(T_1(\tau_1))$ удовлетворяют граничному условию $B(f)=0$ или если τ не имеет граничных значений в точке a и $f, g \in \mathfrak{D}(T_1(\tau_1))$, то

$$(\tau_1 f, g)-(f, \tau_1 g)=F_t(f, g);$$

(b) если S — сужение оператора $T_1(\tau_1)$, определенное граничным условием $f(t)+cf'(t)=0$ и граничным условием $B(f)=0$ (когда τ имеет граничные значения в точке a), то S^* — сужение оператора $T_1(\tau_1)$, определенное граничным условием $f(t)+\bar{c}f'(t)=0$ и граничным условием $B(f)=0$ (когда τ имеет граничные значения в точке a).

Это следует из предыдущей формулы, теоремы 2.10 и теоремы XII.4.28. Аналогично мы имеем

(c) если $\hat{S}$ — сужение оператора $T_1(\tau_1)$, определенное граничными условиями $f(t)=f'(t)=0$ и $B(f)=0$ (когда τ имеет граничные значения в точке a), то $\hat{S}^*$ — сужение оператора $T_1(\tau_1)$, определенное граничным условием $B(f)=0$ (когда τ имеет граничные значения в точке a).

Если τ не имеет граничных значений в точке a, то, поскольку $(-\infty, \lambda_0) \cap \sigma_e(\tau)=\varnothing$, из лемм 6.7 и 6.9 следует, что для $\lambda \in (-\infty, \lambda_0)$ существует ровно одно (с точностью до постоянного множителя) решение $\sigma(x, \lambda)$ уравнения $\tau\sigma=\lambda\sigma$ с интегрируемым квадратом в окрестности точки a.

Если τ имеет два граничных значения в точке a, то существует ровно одно (с точностью до постоянного множителя) решение $\sigma(x, \lambda)$ уравнения $\tau\sigma=\lambda\sigma$ с интегрируемым квадратом в окрестности точки a, удовлетворяющее граничному условию B. Действительно, так как по теореме 6.7 все решения уравнения $\tau\sigma=\lambda\sigma$ интегрируемы в квадрате в окрестности точки a, то очевидно, что по крайней мере одно такое решение обязательно существует. С другой стороны, если два линейно независимых решения уравнения $\tau\sigma=\lambda\sigma$ удовлетворяют граничному условию B, то все его решения удовлетворяют этому условию. Тогда, согласно замечанию (а), сделанному выше, отсюда следует, что для любых двух решений f, g уравнения $\tau\sigma=\lambda\sigma$ при $a<c<b$ мы имеем

$$0=\int_a^c \{((\tau-\lambda) f)(t)\overline{g(t)}-f(t)\overline{((\tau-\lambda) g)(t)}\}\,dt=$$

$$=\int_a^c \{(\tau f)(t)\overline{g(t)}-f(t)\overline{(\tau g)(t)}\}\,dt=-p(c)(\overline{g(c)}f'(c)-f(c)\overline{g'(c)}).$$

Однако это невозможно, так как существуют решения f и g уравнения $\tau\sigma=\lambda\sigma$, удовлетворяющие условиям $f(c)=0$, $f'(c)=1$, $g(c)=1$, $g'(c)=0$.

Для удобства дальнейших ссылок сформулируем эти замечания в виде следующей леммы.

41. Лемма. *Пусть оператор τ и граничное условие B (если τ имеет граничные значения в точке a) определены, как выше. Тогда при $-\infty<\lambda<\lambda_0$ уравнение $\tau\sigma=\lambda\sigma$ имеет ровно одно (с точностью до постоянного множителя) решение $\sigma(t, \lambda)$ с интегрируемым квадратом в окрестности точки a, удовлетворяющее граничному условию B.*

42. Лемма. *Решение $\sigma(t, \lambda)$, определенное выше, может быть выбрано так, чтобы оно было действительным и бесконечно дифференцируемым по t и λ для $t\in I$ и $\lambda\in(-\infty, \lambda_0)$.*

Доказательство. Согласно предыдущим замечаниям, граничное условие B в точке a, определяющее оператор T, действительно. Поэтому если решение f уравнения $\tau\sigma=\lambda\sigma$ интегрируемо в квадрате в точке a и удовлетворяет граничному условию B, то таким будет и $\bar f$. Так как по предыдущей лемме существует только одно такое решение (с точностью до постоянного множителя), то мы должны иметь $\bar f=\alpha f$, где $|\alpha|=1$, поскольку $|\bar f|=|f|$. Полагая $\varrho=\alpha^{1/2}$, мы имеем $\bar\varrho=\varrho^{-1}$, так что $\overline{\varrho f}=\varrho f$. Таким образом, f отличается ненулевым множителем от действительного решения уравнения $\tau\sigma=\lambda\sigma$, поэтому если $a<c<b$, то отношение $f'(c)/f(c)$ действительно. Итак, если мы предположим, что τ_1 — сужение оператора τ на интервал $\hat I=(a, c]$,

а T — сужение оператора $T_1(\tau_1)$, определенное граничными условиями B (когда τ имеет граничные значения в точке a) и $f(c) = if'(c)$, то уравнение $Tf = \lambda f$ не имеет решений ни при каком действительном λ. По теореме 2.10, лемме XII.1.6(a) и определению XII.4.20 оператор T замкнут. Согласно замечанию (b), предшествующему лемме 41, сопряженный к T оператор T^* является сужением оператора $T_1(\tau)$, определенным граничными условиями B (когда τ имеет граничные значения в точке a) и $f(c) = -if'(c)$. Следовательно, уравнение $T^*f = \lambda f$ не имеет решений для действительных λ. Это означает по лемме XII.3.6(d), что множество $(T-\lambda)\mathfrak{D}(T)$ плотно в $L_2(\hat{I})$ при каждом действительном λ.

Далее, пусть $-\infty < \lambda < \lambda_0$. Согласно определению 6.1, $(T-\lambda I)\mathfrak{D}(T) = L_2(\hat{I})$. Поэтому $\lambda I - T$ есть замкнутое взаимно однозначное отображение пространства $\mathfrak{D}(T)$ на $L_2(\hat{I})$, откуда $(\lambda I - T)^{-1}$ есть замкнутое всюду определенное отображение. Таким образом, по теореме II.2.4 о замкнутом графике и лемме VII.9.2 резольвента $R(\lambda; T)$ есть аналитическая функция, определенная в некоторой окрестности V интервала $(-\infty, \lambda_0)$ в комплексной плоскости. По теореме 2.16 выражение

$$\varphi_\lambda(f) = (R(\lambda;\ T)f)(c)$$

определяет ограниченный линейный функционал на $L_2(\hat{I})$ для каждого λ из V. Следовательно, существует элемент $g_{\bar{\lambda}}$ из $L_2(\hat{I})$, такой, что $\varphi_\lambda(f) = (f,\ g_{\bar{\lambda}})$ для каждого λ из V. Очевидно, что g_λ аналитически зависит от λ для $\bar{\lambda}$ из V.

Пусть $T_2 \subseteq T$ — сужение оператора $T_1(\tau_1)$, определенное граничными условиями B (когда τ имеет граничные значения в точке a) и $f(c) = f'(c) = 0$.

Согласно следствию 2.23 и XII.4.28, T_2^* — сужение оператора $T_1(\tau)$, определенное одним граничным условием B. Если $f \in \mathfrak{D}(T_2)$, то мы имеем

$$((\lambda I - T_2)f,\ g_{\bar{\lambda}}) = ((\lambda I - T)f,\ g_{\bar{\lambda}}) = R(\lambda; T)((\lambda I - T)f)(c) = f(c) = 0.$$

Таким образом, $(\bar{\lambda} I - T_2^*)g_{\bar{\lambda}} = 0$ для λ из V. Следовательно, для λ из $(-\infty, \lambda_0)$ функция g_λ — решение уравнения $\tau_1\sigma = \lambda\sigma$, лежащее в $L_2(\hat{I})$ и удовлетворяющее граничному условию $B(g_\lambda) = 0$ (если τ имеет граничные значения в точке a). Когда λ меняется, g_λ и $\tau_1 g_\lambda = \lambda g_\lambda$ меняются аналитически в норме пространства $L_2(\hat{I})$. Поэтому в силу леммы 2.16 $g_\lambda(c)$ и $g'_\lambda(c)$ меняются аналитически по λ, когда λ пробегает интервал $(-\infty, \lambda_0)$. Если мы предположим, что $\sigma(t, \lambda)$ — единственное решение уравнения $\tau\sigma = \lambda\sigma$, определенное начальными условиями $\sigma(c, \lambda) = g_\lambda(c)$,

$\sigma'(c, \lambda) = g'_\lambda(c)$, то из следствия 1.5 ясно, что $\sigma(t, \lambda)$ является функцией класса C^∞ по t и λ для t из I и λ из $(-\infty, \lambda_0)$. Более того, очевидно, что $\sigma(\cdot, \lambda)$ интегрируема в квадрате в окрестности точки a и удовлетворяет граничному условию B (если τ имеет граничные значения в точке a), ч. т. д.

Теперь мы допустим, что J_n — подмножество λ-оси, для которого $\sigma(t, \lambda)$ имеет в точности n нулей внутри I. По теореме 40 каждое множество J_n лежит в области $\lambda \leqslant \lambda_0$, тогда как открытый интервал $\lambda < \lambda_0$ содержится в объединении $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} J_n$. Точка λ_0 может лежать или не лежать в одном из интервалов J_n. Ниже мы увидим, какое значение имеет эта альтернатива для спектра оператора T.

43. Лемма. *Если $\lambda \in J_n$ и $\lambda_1 \in J_{n+1}$, то $\lambda < \lambda_1$.*

Доказательство. Пусть это не верно. Тогда $\lambda_1 < \lambda$. Так как по лемме 35 $\sigma(t, \lambda)$ имеет нуль между каждыми двумя нулями функции $\sigma(t, \lambda_1)$, то мы должны только показать, что интервал $(a, z]$ между a и наименьшим нулем z функции $\sigma(t, \lambda_1)$ содержит нуль функции $\sigma(t, \lambda)$; тем самым будет установлено, что $\sigma(t, \lambda)$ имеет по крайней мере $n+1$ нулей, вопреки тому, что $\lambda \in J_n$.

Для этого заметим, что в противном случае мы можем, умножая на подходящие постоянные, считать $\sigma(t, \lambda_1)$ и $\sigma(t, \lambda)$ неотрицательными в (a, z). Так как z есть нуль функции $\sigma(t, \lambda_1)$, но не функции $\sigma(t, \lambda)$, то отсюда сразу следует, что $\sigma'(z, \lambda_1) < 0$, $\sigma(z, \lambda) > 0$. Согласно замечанию (a), предшествующему лемме 41,

$$
\begin{aligned}
0 &< (\lambda - \lambda_1) \int_a^z \sigma(t, \lambda)\,\sigma(t, \lambda_1)\, dt = \\
&= \int_a^z \{(\tau\sigma)(t, \lambda)\,\sigma(t, \lambda_1) - \sigma(t, \lambda_1)\,(\tau\sigma)(t, \lambda)\}\, dt = \\
&= p(z)\,\sigma(z, \lambda)\,\sigma'(z, \lambda_1) < 0.
\end{aligned}
$$

Это противоречие устанавливает наше утверждение.

44. Следствие. *Множества J_n являются интервалами действительной оси, причем J_n лежит левее J_{n+1}.*

Доказательство. Из предыдущей леммы следует, что если $\lambda_1, \lambda_2 \in J_n$ и $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$, то $\lambda \in J_n$. Поэтому J_n — интервал. Второе утверждение также следует непосредственно из предыдущей леммы.

45. Лемма. *В каждом интервале J_n лежит не более одного собственного значения оператора T.*

Доказательство. Предположим, что это не так. Пусть λ_1 и λ_2 — две точки из J_n, являющиеся собственными значениями оператора T. Тогда $\sigma(t, \lambda_1)$ и $\sigma(t, \lambda_2)$ — собственные функции оператора T. Пусть $\lambda_1 < \lambda_2$. По теореме сравнения Штурма (лемма 35) $\sigma(\cdot, \lambda_2)$ имеет один нуль в открытом интервале между каждыми двумя нулями функции $\sigma(\cdot, \lambda_1)$. Пусть z_1 и z_2 — наименьший и наибольший нули функции $\sigma(\cdot, \lambda_1)$. Если мы сможем показать, что $\sigma(\cdot, \lambda_2)$ имеет один нуль в $(a, z_1]$ и один нуль в $[z_2, b)$, то тем самым мы установим, что $\sigma(\cdot, \lambda_2)$ имеет по крайней мере $n+1$ нулей в (a, b). Это противоречит тому, что $\lambda_2 \in J_n$. При этом достаточно доказать, что $\sigma(\cdot, \lambda_2)$ имеет один нуль в $(a, z_1]$; отсюда по симметрии будет следовать, что $\sigma(\cdot, \lambda_2)$ имеет один нуль в $[z_2, b)$.

Заметим, что в противном случае мы без ограничения общности можем считать $\sigma(t, \lambda_1)$ и $\sigma(t, \lambda_2)$ неотрицательными в $(a, z_1]$, ибо мы можем умножить их на подходящие постоянные. Так как z_1 — нуль функции $\sigma(t, \lambda_1)$, но не функции $\sigma(t, \lambda_2)$, отсюда непосредственно следует, что $\sigma'(z_1, \lambda_1) < 0$, $\sigma(z_1, \lambda_2) > 0$. Согласно замечанию (а), предшествующему лемме 41,

$$0 < (\lambda_2 - \lambda_1) \int_a^{z_1} \sigma(t, \lambda_2)\, \sigma(t, \lambda_1)\, dt =$$

$$= \int_a^{z_1} \{(\tau\sigma)(t, \lambda_2)\, \sigma(t, \lambda_1) - \sigma(t, \lambda_2)\, (\tau\sigma)(t, \lambda_1)\}\, dt =$$

$$= p(z_1)\, \sigma(z_1, \lambda_2)\, \sigma'(z_1, \lambda_1) < 0.$$

Это противоречие устанавливает наше утверждение.

46. Следствие. *Каждый k-й нуль функции $\sigma(t, \lambda)$ (нули считаются в порядке возрастания) является монотонно убывающей функцией от λ.*

Доказательство. Пусть $\lambda_1 < \lambda_2$. По теореме сравнения (лемма 35) $\sigma(\cdot, \lambda_2)$ имеет один нуль в открытом интервале между каждыми двумя нулями функции $\sigma(\cdot, \lambda_1)$. Пусть z_1 — наименьший нуль функции $\sigma(\cdot, \lambda_1)$. Если мы сможем показать, что $\sigma(\cdot, \lambda_2)$ имеет один нуль в интервале $(a, z_1]$, то отсюда будет немедленно следовать наше утверждение. А это доказывается в точности так же, как в последнем абзаце доказательства предыдущей леммы.

47. Лемма. *Все ненулевые интервалы J_n, $n < \infty$, открыты слева.*

Доказательство. Пусть наше утверждение неверно, т. е. существует точка λ_0, такая, что $\sigma(t, \lambda_0)$ имеет n нулей, а $\sigma(t, \lambda_0-\varepsilon)$ имеет меньше нулей при каждом $\varepsilon>0$. Функция $\sigma(t, \lambda_0)$ меняет знак в каждом своем нуле $z_1, \ldots, z_n$. Поэтому мы можем найти достаточно малое δ, такое, что $\sigma(z_i+\delta, \lambda_0)$ и $\sigma(z_i-\delta, \lambda_0)$ имеют противоположные знаки. Тогда (по лемме 42) $\sigma(z_i+\delta, \lambda_0-\varepsilon)$ и $\sigma(z_i-\delta, \lambda_0-\varepsilon)$ при достаточно малых ε имеют противоположные знаки. Но это означает, что $\sigma(t, \lambda_0-\varepsilon)$ имеет один нуль в δ-окрестности каждого $z_1, z_2, \ldots, z_n$, т. е. $\sigma(t, \lambda_0-\varepsilon)$ имеет по крайней мере n нулей. Это противоречие доказывает лемму.

48. Лемма. *Проекторы $E(\lambda)$, соответствующие собственным значениям $\lambda<\lambda_0$, имеют одномерные области значений.*

Доказательство. По теореме XII.2.6 имеем $(T-\lambda)E(\lambda)f=0$. Таким образом, каждый элемент из области значений оператора $E(\lambda)$ есть решение уравнения $\tau\sigma=\lambda\sigma$ с интегрируемым квадратом, удовлетворяющее граничным условиям в точках a и b, определяющим T. Но выше в лемме 41 мы видели, что любое такое решение отличается от $\sigma(t, \lambda)$ постоянным множителем, ч. т. д.

49. Лемма. *Если $\sigma(t, \lambda)$ имеет n нулей внутри I, то $\sigma(T)$ содержит по крайней мере n точек, лежащих в интервале $\{\mu \mid \mu\leqslant\lambda\}$.*

Доказательство. Предположим, что это утверждение неверно. Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — нули функции $\sigma(t, \lambda)$, занумерованные в порядке возрастания. Положим

$$f_1=\begin{cases}\sigma(t, \lambda), & a<t\leqslant z_1,\\ 0 & \text{в других точках},\end{cases}$$

$$f_2=\begin{cases}\sigma(t, \lambda), & z_1\leqslant t\leqslant z_2,\\ 0 & \text{в других точках},\end{cases}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_n=\begin{cases}\sigma(t, \lambda), & z_{n-1}\leqslant t\leqslant z_n,\\ 0 & \text{в других точках}.\end{cases}$$

Так как $\sigma(T)$ содержит не более p точек $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, $p<n$, лежащих в интервале $\{\mu \mid \mu\leqslant\lambda\}$, то из леммы 48 следует, что мы можем найти ортонормальный базис $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ для пространства

$$E((-\infty, \lambda])L_2=E(\lambda_1)L_2\oplus\ldots\oplus E(\lambda_p)L_2,$$

содержащий самое большее $n-1$ векторов. Таким образом, мы можем найти ненулевую систему постоянных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, таких, что функция $g=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i$ ортогональна к области значений оператора $E((-\infty,\lambda])$, т. е. $E((-\infty,\lambda])g=0$. Поскольку $\lambda<\lambda_0$, мы имеем $\lambda\notin\sigma_e(T)$. Поэтому λ должна быть либо изолированной точкой множества $\sigma(T)$, либо точкой, в которой определена резольвента оператора T. Таким образом, по теореме XII.2.3 существует $\varepsilon>0$, такое, что $E((-\infty,\lambda+\varepsilon))g=0$. Для $2\leqslant j\leqslant n$ пусть $\{h_{jm}\}$ — последовательность функций из $C^\infty(I)$, таких, что h_{jm} обращается в нуль всюду, за исключением области $z_{j-1}\leqslant t\leqslant z_j$, $|h'_{jm}-f'_j|_2\to 0$ и $h_{jm}\to h_j$ равномерно при $m\to\infty$. Такие функции h_{jm} существуют, согласно общему вспомогательному принципу, сформулированному и доказанному во втором абзаце доказательства леммы 39, и $|h_{jm}-f_j|_2\to 0$. Пусть $a<c<z_1$. Пусть f_1 разлагается в сумму двух бесконечно дифференцируемых в (a,z_1) функций: $f_1=f+\hat f$, где $f_1(t)=\hat f(t)$ в окрестности точки z_1 и $\hat f(t)=0$ в $(a,c]$. Применим снова вспомогательный общий принцип; пусть $\hat h_m$ — последовательность функций из C^∞, равных нулю вне (c,z_1) и таких, что $|\hat h'_m-\hat f'|_2\to 0$. Тогда $\hat h_m\to\hat f$ равномерно, так что $|\hat h_m-f|_2\to 0$. Таким образом, полагая $h_{1m}=\hat h_m+f$, мы имеем $h_{1m}(t)=f_1(t)$ для t из некоторой окрестности точки a, $|h'_{1m}-f'_1|_2\to 0$ и $|h_{1m}-f_1|_2\to 0$. Пусть $g_m=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i h_{im}$. Тогда $g_m\in\mathfrak{D}(T)$, $g_m\to g$ и $|g'_m-g'|_2\to 0$. Более того, $g_m(t)=g(t)$ для $t\leqslant c$ и $g_m(t)=0$ для $t\geqslant z_n$. Таким образом,

$$((T-\lambda)g_m,\ g_m)=\int_c^{z_n}\{-(p(t)g'_m(t))'+(q(t)-\lambda)g_m(t)\}\overline{g_m(t)}\,dt=$$

$$=p(c)g'_m(c)\cdot\overline{g_m(c)}+\int_c^{z_n}\{p(t)|g'_m(t)|^2+(q(t)-\lambda)|g_m(t)|^2\}\,dt=$$

$$=p(c)g'(c)\overline{g(c)}+\int_c^{z_n}\{p(t)|g'_m(t)|^2+(q(t)-\lambda)|g_m(t)|^2\}\,dt\to$$

$$\to p(c)g'(c)\overline{g(c)}+\int_c^{z_n}\{p(t)|g'(t)|^2+(q(t)-\lambda)|g(t)|^2\}\,dt=$$

$$=\int_c^{z_n}((\tau-\lambda)g)(t)\,\overline{g(t)}\,dt=0.$$

Кроме того, $E((-\infty, \lambda+\varepsilon)) g_m \to E((-\infty, \lambda+\varepsilon)) g=0$. Таким образом, по теореме XII.2.6

$$\left|((T-\lambda) g_m, g_m) - \int_{\lambda+\varepsilon}^{\infty} (\mu-\lambda)(E(d\mu) g_m, g_m)\right| \to 0.$$

Следовательно,

$$\int_{\lambda+\varepsilon}^{\infty} (\mu-\lambda)(E(d\mu) g_m, g_m) \to 0.$$

Так как

$$\int_{\lambda+\varepsilon}^{\infty} (\mu-\lambda)(E(d\mu) g_m, g_m) \geqslant \varepsilon \int_{\lambda+\varepsilon}^{\infty} (E(d\mu) g_m, g_m) = \\ = \varepsilon \left| E([\lambda+\varepsilon, \infty)) g_m \right|^2,$$

то мы имеем $E([\lambda+\varepsilon, \infty)) g_m \to 0$. Таким образом,

$$g_m = E((-\infty, \lambda+\varepsilon)) g_m + E([\lambda+\varepsilon, \infty)) g_m \to 0.$$

Поскольку $g_m \to g$, отсюда следует, что $g=0$. Но выше мы видели, что $g \neq 0$. Это противоречие доказывает наше утверждение.

Теперь на основе предыдущей леммы мы можем сформулировать три теоремы, описывающие связь между спектральной теорией и осцилляционной теорией действительного формального дифференциального оператора τ второго порядка в случае, когда τ ограничен снизу. Теорема 40 (а) описывает эту связь в случае, когда τ не ограничен снизу.

50. Теорема. *Пусть τ — действительный формально самосопряженный формальный дифференциальный оператор второго порядка, определенный на интервале I. Пусть T — самосопряженное расширение оператора $T_0(\tau)$, определенное распадающейся системой граничных условий. Предположим, что τ ограничен снизу, а множество $\sigma_e(\tau)$ пусто. Пусть элементы спектра $\sigma(\tau)$ занумерованы в порядке возрастания $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$. Тогда $\lambda_n \to \infty$. Существует единственная (с точностью до постоянного множителя) собственная функция φ_n оператора T, соответствующая λ_n, и φ_n имеет в точности $n-1$ нулей внутри I.*

Доказательство. Так как $\sigma_e(\tau)$ пусто, то по теореме 6.5 каждая точка из $\sigma(T)$ является изолированной. Поэтому, согласно следствиям 26 и 27, $\lambda_n \to \infty$. Единственность φ_n следует непосредственно из леммы 41. Так как по лемме 45 собственные функции, соответствующие разным собственным значениям, имеют разное число нулей и поскольку, согласно следствию 44, число нулей возрастает с ростом n, то φ_n имеет по крайней мере $n-1$ нулей. С другой стороны, предположим, что φ_n имеет $p \geqslant n$ нулей. По лемме 47 для некоторого достаточно малого $\varepsilon > 0$ функция $\varphi(t, \lambda_n - \varepsilon)$ имеет $p \geqslant n$ нулей, так что по лемме 49 существует по крайней мере n собственных значений в интервале $(-\infty, \lambda_n - \varepsilon]$. Полученное противоречие доказывает утверждение теоремы.

51. Лемма. *Если каждое решение уравнения* $\tau\sigma = \lambda\sigma$ *имеет бесконечное число нулей, то бесконечное число точек из* $\sigma(T)$ *лежит левее* λ.

Доказательство. Если $\lambda > \lambda_0$, то интервал $(-\infty, \lambda)$ содержит точки из $\sigma_e(T) = \sigma_e(\tau)$, и наше утверждение следует из теоремы 40. Поэтому мы можем предполагать, что $\lambda \leqslant \lambda_0$. Пусть $a < c < b$, а $f(t, \mu)$ — решение уравнения $\tau\sigma = \mu\sigma$ с начальными условиями $f(c, \mu) = 0$, $f'(c, \mu) = 1$. Так как $f(t, \mu)$ непрерывно зависит от μ для каждого t из I, $f(\cdot, \lambda)$ имеет бесконечно много нулей и, наконец, $f(\cdot, \lambda)$ имеет производную, отличную от нуля (и поэтому меняет знак) в своих нулях, то при $\mu \to \lambda$ число нулей функции $f(\cdot, \mu)$ стремится к бесконечности. Поэтому в силу следствия 36 число нулей функции $\sigma(\cdot, \mu)$ стремится к бесконечности, когда $\mu \to \lambda$. Теперь наше утверждение следует непосредственно из леммы 49.

52. Лемма. *Если* τ *не имеет граничных значений в точке* b, *то никакая точка интервала* J_n, *кроме его правого конца, не может быть собственным значением оператора* T.

Доказательство. Пусть λ — точка интервала J_n, отличная от его правого конца. Используя лемму 47, допустим, что $\varepsilon > 0$ выбрано таким малым, что $\lambda - \varepsilon$ и $\lambda + \varepsilon$ принадлежат J_n. Пусть M — наибольший нуль функции $\sigma(\cdot, \lambda + \varepsilon)$, а m — наибольший нуль функции $\sigma(\cdot, \lambda - \varepsilon)$. Согласно следствию 46, наибольший нуль функции $\sigma(\cdot, \mu)$ лежит между M и m для $|\mu - \lambda| \leqslant \varepsilon$. Пусть $N > M$, B — граничное условие (если оно имеется) в точке a, определяющее T, а B_N — граничное условие $f(N) = 0$. Согласно замечанию (b), предшествующему лемме 41, оператор T_N, полученный из сужения τ_N оператора τ на интервал $(a, N]$ наложением граничных условий B, B_N, является самосопряженным. По лемме 41 квадратично интегрируемыми решениями уравнения $\tau_N\sigma = \mu\sigma$, удовлетворяющими условию B в точке a, являются только кратные функции $\sigma(\cdot, \mu)$. Выше мы показали, что если $|\lambda - \mu| < \varepsilon$, то эти решения не имеют нулей в $[M, \infty)$, поэтому ни одно из них не удовлетворяет граничному условию B_N. Таким образом, T_N не имеет собственных значений μ, таких, что $|\lambda - \mu| \leqslant \varepsilon$. Так как спектр оператора T_N

исчерпывается его точечным спектром, то множество $|\lambda-\mu|\leqslant\varepsilon$ не пересекает $\sigma(T_N)$. Тогда по теореме XII.2.6 $|(\tau-\lambda)f|\geqslant\varepsilon|f|$ для каждой функции f из $\mathfrak{D}(T_N)$. Это означает, что $|(\tau-\lambda)f|\geqslant\geqslant\varepsilon|f|$ для каждой функции из $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$, которая удовлетворяет граничному условию B и обращается в нуль в окрестности точки b.

Мы утверждаем, что множество Γ таких функций плотно в $\mathfrak{D}(T)$, если превратить $\mathfrak{D}(T)$ в полное гильбертово пространство с нормой

$$|f|^*=\{|f|_2^2+|Tf|_2^2\}^{1/2}.$$

Как следует из теоремы Хана—Банаха (см. II.3.13), для доказательства достаточно показать, что каждый непрерывный линейный функционал φ на $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$, который обращается в нуль на Γ, обращается в нуль также на $\mathfrak{D}(T)$. Так как $\Gamma\supseteq\mathfrak{D}(T_0(\tau))$, то φ — граничное значение для τ. Так как по предположению τ не имеет граничных значений в точке b, то из теоремы 2.19 следует, что φ — граничное значение в точке a. Пусть $f\in\mathfrak{D}(T)$, а g совпадает с f в окрестности точки a и обращается в нуль в окрестности точки b. Тогда $g\in\Gamma$, и, поскольку $\varphi(f)=\varphi(g)$, мы имеем $\varphi(f)=0$. Таким образом, Γ плотно в $\mathfrak{D}(T)$.

Итак, неравенство $|(T-\lambda)f|\geqslant\varepsilon|f|$, которое выполняется для f из Γ, должно выполняться и для f из $\mathfrak{D}(T)$. Отсюда следует, что λ не может быть собственным значением оператора T, ч. т. д.

53. Теорема. *Пусть τ — действительный формально самосопряженный оператор второго порядка, определенный на интервале I. Пусть T — самосопряженное расширение оператора $T_0(\tau)$, определенное распадающейся системой граничных условий. Предположим, что τ ограничен снизу, а множество $\sigma_e(\tau)$ не пусто. Пусть λ_0 — наименьшее число из $\sigma_e(\tau)$. Тогда если каждое решение уравнения $\tau\sigma=\lambda_0\sigma$ имеет бесконечное число нулей в I, то $\sigma(T)$ содержит бесконечное число изолированных точек, лежащих левее λ_0. Если эти точки занумеровать в порядке возрастания $\mu_1<\mu_2<\ldots$, то $\mu_n\to\lambda_0$. Более того, существует единственная (с точностью до постоянного множителя) собственная функция φ_n оператора T, соответствующая μ_n, и φ_n имеет в точности $n-1$ нулей.*

Доказательство. Так как множество $\sigma_e(\tau)\cap(-\infty,\lambda_0)$ пусто, то, согласно следствию 6.3 и теореме 6.5, каждая точка из $\sigma(T)\cap\cap(-\infty,\lambda_0)$ изолированная. По лемме 51 в $\sigma(T)$ имеется бесконечное число точек левее λ_0. Таким образом, из следствия 24 (с) и леммы 21 вытекает, что $\mu_n\to\lambda_0$. Единственность функции φ_n и утверждение о ее нулях доказываются точно так же, как в предыдущей теореме.

54. Следствие. *В условиях и обозначениях предыдущей теоремы пусть T определяется не более чем одним граничным условием, которое задается в концевой точке a интервала I. Пусть $\lambda < \lambda_0$, а $\sigma(t, \lambda)$ — интегрируемое в квадрате в окрестности точки a решение уравнения $\tau\sigma = \lambda\sigma$, удовлетворяющее заданному граничному условию (если оно имеется) в точке a. Тогда число точек из $\sigma(T)$, лежащих в области $z < \lambda$, в точности равно числу нулей функции $\sigma(t, \lambda)$ внутри I.*

Доказательство. Так как множество $\sigma_e(\tau)$ не пусто, то из теорем 4.1 и 4.2 следует, что индексы дефекта оператора τ не могут равняться (2, 2). Таким образом, согласно замечаниям об операторах τ второго порядка, сделанным в конце § 2 перед формулировкой теоремы 2.30, по крайней мере в одной концевой точке b интервала I не должно быть граничных значений. Кроме того, τ имеет не более двух граничных значений, причем оба эти значения задаются в другой концевой точке a интервала I, и каждое самосопряженное расширение T оператора $T_0(\tau)$ определяется не более чем одним граничным условием, которое является граничным условием в точке a. По предыдущей теореме и лемме 52 число точек множества $\sigma(T) \cap (-\infty, \lambda)$ равно числу интервалов $J_0, J_1, \ldots, J_n$, полностью содержащихся в интервале $(-\infty, \lambda)$. Если $\lambda \in J_k$, так что $\sigma(\cdot, \lambda)$ имеет k нулей, то это число, очевидно, равно k, ч. т. д.

55. Теорема. *Пусть τ — действительный формально самосопряженный дифференциальный оператор второго порядка, определенный на интервале I. Пусть T — самосопряженное расширение оператора $T_0(\tau)$. Предположим, что τ ограничен снизу, а множество $\sigma_e(\tau)$ не пусто. Пусть λ_0 — самая левая точка из $\sigma_e(\tau)$. Тогда если некоторое решение уравнения $\tau\sigma = \lambda_0\sigma$ имеет конечное число k нулей в I, то часть множества $\sigma(T)$, лежащая левее λ_0, состоит не менее чем из $k-1$ и не более чем из $k+2$ точек. Если эти точки занумерованы в порядке возрастания $\mu_1, \ldots, \mu_m$, то существует единственная (с точностью до постоянного множителя) собственная функция φ_n оператора T, соответствующая μ_n, и φ_n имеет в точности $n-1$ нулей.*

Доказательство. Так же как в доказательстве теоремы 53, мы установим, что если собственные значения μ_n оператора T, лежащие в $(-\infty, \lambda_0)$, занумерованы в порядке возрастания, то собственная функция φ_n, соответствующая значению μ_n из $(-\infty, \lambda_0)$, единственна и имеет в точности $n-1$ нулей. Пусть m — число точек μ_n в интервале $(-\infty, \lambda_0)$. Если бы m было бесконечным, то из леммы 35 следовало бы, что каждое решение уравнения $\tau\sigma = \lambda_0\sigma$ имеет сколь угодно много нулей в I вопреки предположению. Поэтому m конечно. Так как φ_m имеет $m-1$ нулей, то по лемме 35 число k нулей решения σ уравнения $\tau\sigma=\lambda_0\sigma$ не меньше $m-2$. Таким образом, $m\leqslant k+2$.

С другой стороны, если σ имеет k нулей и $a<c<b$, то для достаточно малых ε решение f уравнения $\tau f=(\lambda_0-\varepsilon)f$, удовлетворяющее условиям $f(c)=\sigma(c)$, $f'(c)=\sigma'(c)$, также имеет k нулей (см. доказательство леммы 47). Следовательно, по лемме 35 $\sigma(t, \lambda_0-\varepsilon)$ имеет не менее $k-1$ нулей. Согласно лемме 49, по крайней мере $k-1$ собственных значений оператора T лежат левее $\lambda_0-\varepsilon$. Поэтому $m\geqslant k-1$, ч. т. д.

56. Следствие. *В условиях и обозначениях предыдущей теоремы пусть оператор T определен не более чем одним граничным условием, которое задается в концевой точке a интервала I.*

Пусть $\lambda<\lambda_0$, а $\sigma(t, \lambda)$ — решение уравнения $\tau\sigma=\lambda\sigma$, которое квадратично интегрируемо в точке a и удовлетворяет заданному граничному условию (если оно имеется) в точке a. Тогда число точек из $\sigma(T)$, лёжащих в области $z<\lambda$, равно числу нулей функции $\sigma(t, \lambda)$ внутри I.

Доказательство. Это выводится из предыдущей теоремы в точности так же, как следствие 54 из теоремы 53.

57. Следствие. *Пусть τ — действительный самосопряженный формальный дифференциальный оператор второго порядка вида*

$$\tau=-\left(\frac{d}{dt}\right)^2+q(t),$$

определенный на интервале $[a, \infty)$. Предположим, что $\lim_{t\to\infty} q(t)=\lambda_0$. Пусть T — самосопряженное расширение оператора $T_0(\tau)$. Тогда τ существенно ограничен снизу числом λ_0 и λ_0 — наименьшее число из $\sigma_e(\tau)$. Если

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, t^2(q(t)-\lambda_0)<-\frac{1}{4},$$

то множество $\sigma(T)\cap(-\infty, \lambda_0)$ состоит из бесконечной последовательности изолированных точек, сходящейся к λ_0, тогда как если

$$\underline{\lim_{t\to\infty}}\, t^2(q(t)-\lambda_0)>-\frac{1}{4},$$

то это множество состоит из конечного числа точек.

Доказательство. Если $c=\sup_{a\leqslant t<\infty}|q(t)|$, то очевидно, что оператор $\tau+c$ положителен и, следовательно, τ ограничен снизу, поэтому сформулированное утверждение вытекает из следствия 37, теорем 16 и 6.5, следствия 26 и теорем 55 и 53.

Следующая теорема показывает, как, применяя разработанные выше методы, получить полезный результат об асимптотическом распределении собственных значений дифференциального оператора второго порядка. Менее элементарные методы позволяют получить аналогичные, но более тонкие результаты.

58. Теорема. *Пусть τ — формальный дифференциальный оператор*

$$\tau = -\left(\frac{d}{dt}\right)^2 + q(t), \qquad 0 \leqslant t < \infty,$$

где q возрастает, а q' возрастает и положительна. Для каждого достаточно большого λ пусть $t(\lambda)$ — единственное решение уравнения $q(t(\lambda)) = \lambda$. Пусть T — самосопряженный оператор, определенный оператором τ и граничным условием

$$f(0) + kf'(0) = 0, \qquad -\infty < k \leqslant \infty.$$

Пусть $N(\lambda)$ — число собственных значений оператора T в области $\mu \leqslant \lambda$. Тогда при $\lambda \to \infty$ мы имеем асимптотическую формулу

$$N(\lambda) \sim \frac{1}{\pi} \int_0^{t(\lambda)} (\lambda - q(t))^{1/2}\, dt.$$

Доказательство. Положим $\varphi_\lambda(t) = (\lambda - q(t))^{1/2}$, $0 \leqslant t \leqslant t(\lambda)$. Функция $\lambda - q(t)$ вогнута вниз. Так как $(f(t))^{1/2}$ вогнута вниз всюду, где f положительна и вогнута вниз, то φ_λ — убывающая функция, вогнутая вниз. Пусть σ_λ — решение уравнения $\tau\sigma_\lambda = \lambda\sigma_\lambda$, так что

$$\sigma_\lambda''(t) + \varphi_\lambda^2(t)\,\sigma_\lambda(t) = 0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant t(\lambda);$$

предположим, что $\sigma_\lambda(t)$ удовлетворяет также граничному условию, определяющему T. Тогда, согласно следствию 54, $N(\lambda)$ равно числу $Z(\lambda)$ нулей функции σ_λ.

Далее определим конечную последовательность точек следующим образом. Положим $t_0 = 0$ и $t_{i+1} = t_i + \pi[\varphi_\lambda(t_i)]^{-1}$ до тех пор, пока функция $\varphi_\lambda(t_i)$ определена, т. е. пока $t_i \leqslant t(\lambda)$. Тем самым определена конечная последовательность $t_0, \ldots, t_n$ точек (зависящих от λ). Так как φ_λ убывает, отсюда вытекает, что последовательность $t_1 - t_0,\ t_2 - t_1,\ \ldots,\ t_n - t_{n-1}$ возрастает. Применяя лемму 35, мы можем сравнить уравнение

$$\sigma_\lambda''(t) + \varphi_\lambda^2(t)\,\sigma_\lambda(t) = 0$$

с уравнением

$$\sigma_0''(t) + \varphi_\lambda^2(t_i)\,\sigma_0(t) = 0$$

и заключить, что σ_λ имеет не более одного нуля в полуоткрытом интервале $[t_{i-1}, t_i)$. Таким образом, σ_λ имеет не более n нулей в интервале $(0, t_n)$. Так как по лемме сравнения 35 σ_λ имеет самое большее один нуль в интервале $[t_n, t(\lambda))$ и не имеет ни одного нуля в интервале $[t(\lambda), \infty)$, то $Z(\lambda) \leqslant n+1$.

Далее, $t_{i+1}-t_i=\pi[\varphi_\lambda(t_i)]^{-1}$, поэтому $\varphi_\lambda(t_i)(t_{i+1}-t_i)=\pi$. Следовательно,

$$[*] \qquad n=\frac{1}{\pi}\sum_{i=0}^{n-1}\varphi_\lambda(t_i)(t_{i+1}-t_i).$$

Пусть $\varepsilon>0$ фиксировано, а j — наименьшее целое, такое, что $\varphi_\lambda(t_{j+1}) \leqslant (1-\varepsilon)\varphi_\lambda(t_j)$ (если такое j существует). Если такого j нет, то пусть $j=n$. Тогда

$$\varphi_\lambda(t_j)-\varphi_\lambda(t_{j+1}) \geqslant \varepsilon\varphi_\lambda(t_j).$$

Так как φ_λ вогнута вниз, а $(t_{i+1}-t_i)$ — возрастающая функция от i, то мы имеем

$$\varphi_\lambda(t_i)-\varphi_\lambda(t_{i+1}) \geqslant \varepsilon\varphi_\lambda(t_j)$$

для всех $n-1 \geqslant i \geqslant j$. Следовательно,

$$\varphi_\lambda(t_j)-\varphi_\lambda(t_{n-1}) \geqslant (n-1-j)\varepsilon\varphi_\lambda(t_j).$$

Так как $\varphi_\lambda(t_{n-1}) \geqslant 0$, то $\varepsilon(n-1-j) \leqslant 1$, откуда $(n-j) \leqslant 1/\varepsilon+1$. Следовательно, поскольку φ_λ убывает и все члены в сумме [*] равны единице, мы имеем

$$\begin{aligned} N(\lambda)-2 &\leqslant n-1 \leqslant \frac{1}{\pi}\sum_{i=0}^{n-1}\varphi_\lambda(t_i)(t_{i+1}-t_i)-1 \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{\pi}\sum_{i=0}^{j-1}\varphi_\lambda(t_i)(t_{i+1}-t_i)+\frac{1}{\varepsilon} \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{\pi}(1-\varepsilon)^{-1}\sum_{i=0}^{j-1}\varphi_\lambda(t_{i+1})(t_{i+1}-t_i)+\frac{1}{\varepsilon} \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{\pi}(1-\varepsilon)^{-1}\int_0^{t_j}\varphi_\lambda(t)\,dt+\frac{1}{\varepsilon} \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{\pi}(1-\varepsilon)^{-1}\int_0^{t(\lambda)}(\lambda-q(t))^{1/2}\,dt+\frac{1}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Таким образом, поскольку $N(\lambda)\to\infty$,

$$\varlimsup_{\lambda\to\infty}\frac{N(\lambda)}{\frac{1}{\pi}\int_0^{t(\lambda)}(\lambda-q(t))^{1/2}\,dt} \leqslant 1.$$

Это доказывает одну часть нашего утверждения. Чтобы доказать вторую часть, мы поступим (почти так же, как раньше) следующим образом. Если λ достаточно велико, то мы можем определить конечную последовательность точек, полагая s_0 равным единственному корню уравнения $\varphi_\lambda(s_0)=\pi$, а затем полагая $s_{i+1}=s_i-\pi[\varphi(s_i)]^{-1}$, когда $s_i-\pi[\varphi(s_i)]^{-1}\geqslant 0$, и $s_{i+1}=0$, когда $s_i-\pi[\varphi(s_i)]^{-1}<0$. Тем самым определена убывающая последовательность точек $s_0, \ldots, s_m=0$, и так же, как выше, мы видим, что

$$m-\theta=\frac{1}{\pi}\sum_{i=0}^{m}\varphi_\lambda(s_{i-1})(s_i-s_{i-1}),$$

где θ — неотрицательная величина, не превосходящая 1. Так как φ_λ убывает, то мы можем, применяя лемму 35, сравнить уравнение

$$\sigma''_\lambda(t)+\varphi^2_\lambda(t)\sigma_\lambda(t)=0$$

с уравнением

$$\sigma''_\lambda(t)+\varphi^2_\lambda(s_i)\sigma_\lambda(t)=0$$

и так же, как выше, заключить, что σ_λ имеет не менее $m-1$ нулей в интервале $[0, \infty)$. Таким образом, $Z(\lambda)\geqslant m-1$.

Далее допустим, что j — наибольшее целое, меньшее, чем m, такое, что $\varphi_\lambda(s_j)\leqslant(1-\varepsilon)\varphi_\lambda(s_{j+1})$; если такого $j<m$ не существует, то положим $j=m$. Рассуждая точно так же, как выше, мы заключаем, что $j\leqslant 1/\varepsilon-1$. Так как s_j-s_{j+1} убывает с ростом j и $s_0-s_i=\pi[\varphi_\lambda(s_0)]^{-1}=1$, то $s_0-s_{j+1}\leqslant j+1<\varepsilon^{-1}$. Так как $q'(t)$ положительна и возрастает, мы можем найти постоянную K, такую, что $q'(t)\geqslant K^{-1}$. Тогда решение s_0 уравнения $q(s_0)=\lambda-\pi^2$ связано с решением $t(\lambda)$ уравнения $q(t(\lambda))=\lambda$ неравенствами $t(\lambda)\geqslant s_0\geqslant t(\lambda)-K\pi^2$. Поэтому мы имеем $y_{j+1}\geqslant t(\lambda)-K-\varepsilon^{-1}$. Пусть $K\pi^2-\varepsilon^{-1}=K_\varepsilon$. Так как K_ε конечно, то для достаточно больших λ, таких, что $t(\lambda)>K_\varepsilon$, мы имеем $s_j\neq 0$ и поэтому $j\neq m$. Тогда

$$N(\lambda)+1\geqslant m=\frac{1}{\pi}\sum_{i=0}^{m}\varphi_\lambda(s_{i-1})(s_{i-1}-s_i)+\theta\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{\pi}(1-\varepsilon)\sum_{i=j+2}^{m}\varphi_\lambda(s_i)(s_i-s_{i-1})\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{\pi}(1-\varepsilon)\int_0^{s_{j+1}}\varphi_\lambda(t)\,dt\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1-\varepsilon}{\pi}\left\{\int_0^{t(\lambda)}\varphi_\lambda(t)\,dt-\int_{t(\lambda)-K_\varepsilon}^{t(\lambda)}\varphi_\lambda(t)\,dt\right\}.$$

Так как φ_λ убывает, то

$$\frac{1}{t(\lambda)}\int_0^{t(\lambda)}\varphi_\lambda(t)\,dt \geqslant \frac{1}{K_\varepsilon}\int_{t(\lambda)-K_\varepsilon}^{t(\lambda)}\varphi_\lambda(t)\,dt.$$

Отсюда следует, что

$$N(\lambda)+1 \geqslant \frac{1-\varepsilon}{\pi}\left(1-\frac{K_\varepsilon}{t(\lambda)}\right)\int_0^{t(\lambda)}\varphi_\lambda(t)\,dt.$$

Это показывает, что

$$\varliminf_{\lambda\to\infty}\frac{N(\lambda)}{\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{t(\lambda)}(\lambda-q(t))^{1/2}\,dt}\geqslant 1,$$

и завершает доказательство теоремы.

Уравнения с периодическими коэффициентами[1]), которые играют фундаментальную роль в квантовой теории твердого тела, обладают интересными и важными свойствами. В следующих пунктах τ обозначает формально самосопряженный дифференциальный оператор порядка n, определенный на интервале $R=\{-\infty<t<+\infty\}$. Пусть τ имеет вид

$$\tau=\sum_{j=0}^{n}a_j(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^j;$$

предположим, что все коэффициенты a_j — периодические функции с одним и тем же периодом. Не уменьшая общности, мы можем допустить, что этот период равен 1, т. е.

$$a_j(t+1)=a_j(t), \qquad j=0,\ \ldots,\ n.$$

Отсюда непосредственно следует, что все коэффициенты оператора τ ограничены, поэтому, согласно теореме 6.35, τ *не имеет граничных значений в* $+\infty$ *и* $-\infty$. По теореме 2.19 τ не имеет граничных значений. Таким образом, согласно определению 2.17, каждый линейный функционал на гильбертовом пространстве $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$, который обращается в нуль на $\mathfrak{D}(T_0(\tau))$, тождественно равен нулю. Поэтому $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$ является замыканием пространства $\mathfrak{D}(T_0(\tau))$, так что $T_1(\tau)$ — замыкание оператора $T_0(\tau)$. Так как $T_1(\tau^*)=T_0(\tau)^*$, то по лемме XII.1.5 мы имеем $T_1(\tau^*)=T_1(\tau)^*$. В частности, если τ формально самосопряжен, то $T=T_1(\tau)$ самосопряжен.

[1]) Другое изложение теории операторов с периодическими коэффициентами, пригодное и для случая частных производных, см. в работе И. М. Гельфанда [7*] — *Прим. ред.*

Заметим далее, что T *не имеет точечного спектра*. Действительно, пусть $\lambda \in \sigma_p(T)$. Пусть $\mathfrak{A}$ — пространство квадратично интегрируемых решений уравнения $(\tau f) = Tf = \lambda f$. Тогда $\mathfrak{A}$, очевидно, конечномерно. Пусть S обозначает оператор сдвига на единицу: $(Sf)(t) = f(t-1)$. Тогда, поскольку коэффициенты оператора τ периодичны, ясно, что $S\tau = \tau S$. Ясно также, что оператор S унитарный. Если $\hat{S}$ — его сужение на конечномерное гильбертово пространство $\mathfrak{A}$, то $\hat{S}$ — унитарное отображение в $\mathfrak{A}$. Следовательно, поскольку $\mathfrak{A} \neq \{0\}$, оператор $\hat{S}$ должен иметь некоторое собственное значение α. По теореме X.4.2 $|\alpha| = 1$. Таким образом, существует ненулевая функция $f \in \mathfrak{A}$, такая, что $Sf = \alpha f$, т. е. $f(t-1) = \bar{\alpha} f(t)$. Следовательно, $|f(\cdot)|$ — периодическая функция, и поэтому $f \notin L_2(-\infty, \infty)$. Это противоречие доказывает сделанное выше утверждение.

Пусть E^n обозначает n-мерное унитарное пространство. Каждому комплексному числу λ мы следующим образом сопоставим линейное преобразование $B(\lambda)$ в E^n. Если $[c_0, \ldots, c_{n-1}] \in E^n$, то пусть σ обозначает единственное решение уравнения $\tau\sigma = \lambda\sigma$, удовлетворяющее условиям $\sigma^{(i)}(0) = c_i$, $i = 0, \ldots, n-1$. Положим $(B(\lambda)c)_i = \sigma^{(i)}(-1)$, $i = 0, \ldots, n-1$. Согласно следствию 1.5, $B(\lambda)$ аналитически зависит от λ.

59. Лемма. *Спектр, существенный спектр и непрерывный спектр оператора* $T = T_1(\tau)$ *совпадают.*

Доказательство. Как мы только что показали, множество $\sigma_p(T)$ пусто. Поскольку $T^* = T_1(\tau^*)$ и τ^* — также формальный дифференциальный оператор с коэффициентами периода 1, множество $\sigma_p(\tau^*)$ также пусто. По лемме XII.1.6 $\bar{\lambda}$ — остаточный спектр оператора T только тогда, когда $\lambda \in \sigma_p(T_1(\tau^*))$. Поэтому остаточный спектр оператора T пуст и $\sigma(T) \subseteq \sigma_c(T)$. Мы имеем $\sigma_c(T) \subseteq \subseteq \sigma_e(T) \subseteq \sigma(T) \subseteq \sigma_c(T)$, ч. т. д.

60. Лемма. *Если* λ — *комплексное число, такое, что* $B(\lambda)$ *имеет собственное значение, по модулю равное* 1, *то* $\lambda \in \sigma(T)$.

Доказательство. Предположим, что $\lambda \notin \sigma(T)$. Отсюда в силу леммы 3.2 (см. в особенности первый абзац доказательства этой леммы), поскольку $\lambda \notin \sigma_p(T)$, следует, что пространство Σ всех решений уравнения $\tau\sigma = \lambda\sigma$ является прямой суммой пространства Σ_+ всех решений этого уравнения, принадлежащих $L_2(0, \infty)$, и пространства Σ_- всех его решений, принадлежащих $L_2(-\infty, 0)$. Ясно, что оба пространства Σ_+ и Σ_- инвариантны относительно оператора сдвига S.

Пусть E — оператор проектирования на Σ, определенный соотношениями $E\Sigma_- = 0$, $Ef = f$, $f \in \Sigma_+$. Пусть S_+ и S_- — сужения оператора сдвига S соответственно на Σ_+ и Σ_-, а $\hat{S}$ — сужение оператора S на Σ. Если $\lambda \in \sigma(S_-)$, т. е. λ — собственное значение оператора S_-, то существует ненулевая функция $f \in \Sigma_-$, такая, что $S_- f = \lambda f$. Следовательно, $\hat{S} f = \lambda f$. Поэтому λ — собственное значение оператора $\hat{S}$ и $\lambda \in \sigma(\hat{S})$. Это показывает, что $\sigma(S_-) \subseteq \subseteq \sigma(\hat{S})$; аналогично $\sigma(S_+) \subseteq \sigma(\hat{S})$, так что $\sigma(S_-) \cup \sigma(S_+) \subseteq \sigma(\hat{S})$. С другой стороны, пусть $\lambda \in \sigma(\hat{S})$, так что существует ненулевая функция f из Σ, такая, что $Sf = \lambda f$. Так как $S\Sigma_+ \subseteq \Sigma_+$, $S\Sigma_- \subseteq \Sigma_-$, отсюда непосредственно следует, что $SE = ES$. Таким образом, $SEf = \lambda Ef$, $S(I-E)f = \lambda(I-E)f$. Так как $0 \neq f = Ef + (I-E)f$, то либо $Ef \neq 0$ и тогда $\lambda \in \sigma(S_+)$, либо $(I-E)f \neq 0$ и тогда $\lambda \in \sigma(S_-)$. Это показывает, что $\sigma(\hat{S}) = \sigma(S_+) \cup \sigma(S_-)$.

Теперь мы покажем, что ни $\sigma(S_+)$, ни $\sigma(S_-)$ не содержат точек, лежащих на единичной окружности. Сначала рассмотрим S_-. Превратим Σ_- в конечномерное гильбертово пространство с нормой

$$|f| = \left(\int_{-\infty}^{0} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}, \quad f \in \Sigma_-.$$

Тогда мы имеем

$$|S_- f| = \left(\int_{-\infty}^{0} |f(t-1)|^2 dt \right)^{1/2} = \left(\int_{-\infty}^{-1} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} < |f|, \quad f \in \Sigma_-, \qquad f \neq 0.$$

Таким образом, все собственные значения оператора S_- по модулю меньше единицы. Аналогично если пространство Σ_+ превратить в конечномерное гильбертово пространство с нормой

$$|f| = \left\{ \int_{0}^{\infty} |f(t)|^2 dt \right\}^{1/2}, \quad f \in \Sigma_+,$$

то мы найдем, что $|S_+ f| > |f|$, $f \in \Sigma_+$, $|f| \neq 0$. Следовательно, все собственные значения оператора S_+ по модулю больше единицы.

Отсюда вытекает, что ни одна точка из $\sigma(\hat{S})$ не может иметь модуль 1. Последний шаг доказательства — показать, что $\sigma(\hat{S}) = \sigma(B(\lambda))$, откуда мы сможем заключить, что $\sigma(B(\lambda))$ не содержит точек с модулем 1 вопреки предположению. Для этого мы рассуждаем следующим образом. Пусть $c=[c_0, \ldots, c_{n-1}] \in E^n$, и пусть $\sigma = M(c)$ — единственное решение уравнения $\tau\sigma = \lambda\sigma$, такое, что $\sigma^{(i)}(0) = c_i$, $i = 0, \ldots, n-1$. Тогда из определения отображения $B(\lambda)$ ясно, что $B(\lambda) = M^{-1}\hat{S}M$. Поэтому $B(\lambda)$ и $\hat{S}$ — эквивалентные отображения, откуда $\sigma(B(\lambda)) = \sigma(\hat{S})$, ч. т. д.

Замечание. Последние две леммы остаются справедливыми и доказательства их почти не меняются, если не предполагать, что оператор τ формально самосопряжен.

61. Лемма. *Пусть оператор τ формально самосопряжен. Предположим, что $B(\lambda_1)$ не имеет собственных значений модуля* 1. *Тогда λ_1 не может принадлежать $\sigma(T)$.*

Доказательство. Пусть (обозначения см. в определении VII.3.17 и далее) $E_+(\lambda) = E(U_+\sigma(B(\lambda)); B(\lambda))$ и $E_-(\lambda) = E(U_-\sigma(B(\lambda)); B(\lambda))$, где $U_+ = \{z \mid |z| > 1\}$ и $U_- = \{z \mid |z| < 1\}$. Тогда по лемме VII.6.6 $E_+(\lambda)$ и $E_-(\lambda)$ — аналитические функции от λ для λ из некоторой окрестности замыкания открытого круга N с центром λ_1. Очевидно, что $E_+(\lambda) + E_-(\lambda) = I$. Пусть $v_1, \ldots, v_k$ — базис для $E_+(\lambda_1)E^n$, а $v_{k+1}, \ldots, v_n$ — базис для $E_-(\lambda_1)E^n$. Положим $v_i(\lambda) = E_+(\lambda)v_i$ для $i = 1, \ldots, k$; $v_i(\lambda) = E_-(\lambda)v_i$ для $i = k+1, \ldots, n$. По теореме Хана — Банаха существуют функционалы $u_1^*, \ldots, u_n^* \in (E^n)^*$, такие, что $u_i^*(v_j(\lambda_1)) = \delta_{ij}$, $i = 1, \ldots, n$. Поэтому существует круговая окрестность N_1 точки λ_1 с центром λ_1, такая, что $\det\{u_i^*(v_j(\lambda))\} \neq 0$, $\lambda \in N_1$. Очевидно, что $v_1(\lambda), \ldots, v_n(\lambda)$ — независимая система векторов для $\lambda \in N_1$. Таким образом, $v_1(\lambda), \ldots$ $\ldots, v_n(\lambda)$ — базис для E^n, если $\lambda \in N_1$. Отсюда следует, что если $\lambda \in N_1$, то $v_1(\lambda), \ldots, v_k(\lambda)$ — базис для $E_+(\lambda)E^n$, а $v_{k+1}(\lambda), \ldots$ $\ldots, v_n(\lambda)$ — базис для $E_1(\lambda)E^n$.

Для $c = [c_0, \ldots, c_{n-1}] \in E^n$ пусть $M_\lambda(c)$ — единственное решение σ уравнения $\tau\sigma = \lambda\sigma$, такое, что $\sigma^{(i)}(0) = c_i$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Положим $\sigma_i(\cdot, \lambda) = M_\lambda(v_1(\lambda))$, $i = 1, \ldots, n$, $\lambda \in N_1$. По лемме VII.3.4 мы имеем $|B(\lambda)^n v_i(\lambda)| = O((1-\varepsilon)^n)$ для некоторого $\varepsilon = \varepsilon(\lambda) > 0$, $1 \leqslant i \leqslant k$, $\lambda \in N$. Таким образом, функция $\sigma_i(t, \lambda)$ и все ее производные экспоненциально убывают при $n \to \infty$ равномерно по $\lambda \in N$ для $1 \leqslant i \leqslant k$. В частности, $\sigma_i(\cdot, \lambda) \in L_2(0, \infty)$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Таким же способом мы получаем, что $\sigma_i(\cdot, \lambda) \in L_2(-\infty, 0)$, $k < i \leqslant n$.

Пусть $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\sigma_i(\cdot, \lambda)$ квадратично интегрируема в $-\infty$. Тогда так как $\sigma_i(\cdot, \lambda) \in L_2(-\infty, 0)$ для $i \leqslant k$, то и $\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i\sigma_i(\cdot, \lambda) \in$ $\in L_2(-\infty, 0)$. С другой стороны, $\sigma_i(\cdot, \lambda) \in L_2(0, \infty)$ для $i > k$.

Следовательно, $\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i \sigma_i(\cdot, \lambda) \in L_2(0, \infty) \bigcup L_2(-\infty, 0) = L_2(-\infty, +\infty)$. Как мы показали, ни одно решение уравнения $\tau\sigma = \lambda\sigma$ не принадлежит $L_2(-\infty, \infty)$, поэтому $\sigma_i = 0$ для $i > k$. Таким образом, система $\{\sigma_1(\cdot, \lambda), \ldots, \sigma_k(\cdot, \lambda)\}$ образует базис множества решений уравнения $\tau\sigma = \lambda\sigma$ с интегрируемым квадратом в $-\infty$. Аналогично $\{\sigma_{k+1}(\cdot, \lambda), \ldots, \sigma_n(\cdot, \lambda)\}$ — базис множества решений этого уравнения с интегрируемым квадратом в $+\infty$. Пусть $F_{ij}(\lambda)$ определяются в терминах граничной формы F_t формального дифференциального оператора τ (см. определение 2.1) равенством

$$F_{ij}(\lambda) = F_t(\sigma_i(\lambda), \overline{\sigma_j(\bar{\lambda})}).$$

По формуле Грина 2.4 эта матрица не зависит от t. Так как для $\lambda \in N_1$ функции $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ образуют базис пространства решений уравнения $\tau\sigma = \lambda\sigma$, то из леммы 2.2 следует, что матрица $F_{ij}(\lambda)$ невырождена для $\lambda \in N_1$. Пусть $G_{ij}(\lambda)$ — обратная к ней матрица. В силу следствия 3.13 для $\lambda \in N_1$, $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ резольвента $R(\lambda; t)$ оператора T выражается интегральным ядром $K(t, s; \lambda)$ вида

$$K(t, s; \lambda) = -\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k+1}^{n} G_{ij}(\lambda)\, \varphi_j(t, \lambda)\, \overline{\varphi_i(t, \bar{\lambda})}, \quad s < t, \quad \operatorname{Im}\lambda \neq 0.$$

Так как $G_{ij}(\lambda)$ аналитична всюду в N_1 и, в частности, в точках множества N_1, лежащих на действительной оси, то требуемый результат следует из формулы Титчмарша — Кодаиры (5.18) и следствия 5.29.

62. Определение. Пусть λ_1 — действительное число, такое, что $B(\lambda_1)$ имеет собственное значение модуля 1. Пусть $\mu_1, \ldots, \mu_p$ — семейство всех таких собственных значений. По теореме VII.6.9 существуют окрестность V точки λ_1, окрестности U_i точек μ_i, $i = 1, \ldots, p$, и целые числа $k_i \geqslant 1$, $i = 1, \ldots, p$, такие, что если $i = 1, \ldots, p$ и $\lambda \in V$, то $U_i \sigma(B(\lambda))$ состоит из k_i точек, определяемых различными значениями дробно-степенного ряда

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_{ilj} (\lambda - \lambda_1)^{j/k_i}, \quad l = 1, \ldots, k_i, \quad i = 1, \ldots, p,$$

по $(\lambda - \lambda_1)^{1/k_i}$. Тогда λ_1 называется *точкой разветвления* оператора τ, если одно из целых чисел k_i больше 1.

Если первые два предложения этого определения изменить так: «Пусть λ_1 — некоторое число, а $\mu_1, \ldots, \mu_p$ — собственные значения оператора $B(\lambda_1)$», — то получится определение *точки разветвления оператора τ в расширенном смысле*.

Замечание. Дробно-степенной ряд $\sum_{i=0}^{\infty} \beta_i z^{i/L}$, который не может быть записан в виде $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i z^{i/M}$, где M делит L, очевидно, принимает по крайней мере L различных значений для произвольно малых z. Кроме того, ряд $\sum_{i=0}^{\infty} \beta_i z^{i/L}$, очевидно, может быть записан в виде $\sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i z^{i/M}$ для любого M, кратного L. Если λ_1 не является точкой разветвления, то корни $\mu_1(\lambda), \ldots, \mu_p(\lambda)$ меняются аналитически по λ для λ из достаточно малой окрестности точки λ_1. Если λ_1 — точка разветвления, то, очевидно, существует некоторая окрестность U единичного круга, такая, что для $\lambda \neq \lambda_1$, достаточно близкого к λ_1, число точек в $U\sigma(B(\lambda))$ постоянно и больше, чем число точек в $U\sigma(B(\lambda_1))$. Таким образом, *точки разветвления оператора τ образуют дискретное множество.* Это замечание относится и к точкам разветвления в расширенном смысле.

63. Лемма. *Если оператор τ формально самосопряжен, а действительное число λ_1 принадлежит границе множества $\sigma(T)$, то λ_1 является точкой разветвления оператора τ.*

Доказательство. Предположим, что λ_1 принадлежит границе множества $\sigma(T)$, но не является точкой разветвления оператора τ. Пусть $\mu_1, \ldots, \mu_p$ — собственные значения модуля 1 оператора $B(\lambda_1)$. Тогда по определению 62 и следующему за ним замечанию если $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то существуют круговая окрестность N точки λ_1 и p аналитических функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$, такие, что для $\lambda \in N$

$$\{\mu \mid \mu \in \sigma(B(\lambda)), \, \| \mu | - 1 | < \varepsilon\} = \{\varphi_1(\lambda), \ \ldots, \ \varphi_p(\lambda)\}.$$

Функция φ_1, будучи аналитической, отображает открытые множества в открытые. Поэтому существует (обязательно бесконечное) множество A точек λ из N, такое, что $\varphi_1(A)$ покрывает лежащую в единичном круге окрестность точки $\alpha_1 = \varphi_1(\lambda_1)$. По лемме 60 множество A должно лежать на действительной оси. Поэтому действительная аналитическая функция $|\varphi_1(\lambda)|^2 - 1$ обращается в нуль бесконечное число раз в открытом интервале I, который вырезает из действительной оси окрестность N. Отсюда $|\varphi_1(\lambda)| = 1$ для λ из I, а это, согласно лемме 61, доказывает, что весь интервал I принадлежит $\sigma(T)$. Следовательно, $\lambda_1 \in I$ не является граничной точкой множества $\sigma(T)$, ч. т. д.

64. Теорема. *Пусть τ — формально самосопряженный дифференциальный оператор порядка n, определенный на интервале $(-\infty, +\infty)$. Предположим, что все коэффициенты оператора τ периодичны с одним и тем же периодом. Тогда τ не имеет граничных значений, и поэтому $T_0(\tau)$ имеет единственное самосопряженное расширение T. Спектр $\sigma(T)$ оператора T представляет собой последовательность непересекающихся интервалов, концы которых стремятся к $-\infty$ или $+\infty$. Весь спектр $\sigma(T)$ является непрерывным. Точка λ принадлежит $\sigma(T)$ тогда и только тогда, когда матрица $B(\lambda)$, введенная выше, имеет собственное значение модуля 1, т. е. тогда и только тогда, когда уравнение $\tau\sigma = \lambda\sigma$ имеет ограниченное решение. Каждая граничная точка каждого из интервалов, составляющих $\sigma(T)$, является точкой разветвления оператора τ.*

Доказательство. Все это следует непосредственно из предыдущей леммы и лемм 59, 60 и 61.

Далее мы рассмотрим отдельные интервалы, которые составляют спектр оператора T. Мы исследуем, какой частный вид принимает на таком интервале спектральное разложение оператора T, определенное в общем виде теоремой Вейля — Кодаиры 5.14. Согласно замечанию, следующему за определением 62, точки разветвления в расширенном смысле оператора τ являются изолированными, и поскольку спектр оператора T чисто непрерывный, счетное множество b всех точек разветвления оператора τ имеет спектральную меру $E(b; T) = 0$. Поэтому в наших рассуждениях мы можем пренебречь этим множеством, так же как любым другим счетным подмножеством спектра.

Рассмотрим открытый интервал I из $\sigma(T)$, не содержащий точек разветвления. Тогда по определению 62 и следующему за ним замечанию существует связная окрестность U интервала I, такая, что для каждой точки λ из U (за возможным исключением множества e_0 изолированных точек) матрица $B(\lambda)$ имеет фиксированное число k собственных значений, которые определяются аналитическими в U функциями $\varphi_1(\lambda), \ldots, \varphi_k(\lambda)$. (Множество e_0 есть множество тех изолированных точек из U, в которых две или более из этих различных аналитических функций принимают одно и то же значение.) Для λ из $U - e_0$ собственные значения $\varphi_i(\lambda)$, $i = 1, \ldots, k$, являются различными спектральными множествами конечномерного оператора $B(\lambda)$, так что по теореме VII.3.14 спектральные проекторы $E_i(\lambda) = E(\varphi_i(\lambda); B(\lambda))$, $i = 1, \ldots, k$, являются аналитическими для $\lambda \in U - e_0$.

Пусть λ_0 — любая фиксированная точка из $U - e_0$, $v_1, \ldots, v_{j_1}$ — базис области значений оператора $E_1(\lambda_0)$; $v_{j_1+1}, \ldots, v_{j_2}$ — базис области значений оператора $E_2(\lambda_0)$; ...; $v_{j_{k-1}+1}, \ldots, v_n$ ($v_n = v_{j_k}$) — базис области значений оператора $E_k(\lambda_0)$. Положим $v_j(\lambda) = E_i(\lambda) v_j$ для $\lambda \in U - e_0$ и $j_{i-1} < j \leqslant j_i$. Тогда векторы $v_1(\lambda), \ldots, v_n(\lambda)$ аналитически меняются в n-мерном евклидовом пространстве и являются линейно независимыми в точке $\lambda = \lambda_0$, поэтому составленный из них определитель не обращается там в нуль. Следовательно, эти векторы имеют ненулевой определитель и линейно независимы в каждой точке λ из U, за исключением точек, принадлежащих некоторому дискретному множеству e_1, содержащему e_0.

Теперь предположим, что $\sigma(t, \lambda)$ — единственное решение уравнения $\tau\sigma = \lambda\sigma$, удовлетворяющее начальным условиям

$$\sigma_j^{(i)}(0, \lambda) = (v_j(\lambda))_i, \qquad i = 0, \ldots, n-1$$

(см. абзац, предшествовавший лемме 59).

Тогда для λ из $U - e_1$ система $\sigma_1(t, \lambda), \ldots, \sigma_n(t, \lambda)$ образует базис множества решений уравнения $\tau\sigma = \lambda\sigma$. Более того, согласно сказанному перед леммой 59,

$$\sigma_j(t-1, \lambda) = \varphi_i(\lambda)\sigma_j(t, \lambda), \quad j_{i-1} < j \leqslant j_i, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Рассмотрим теперь те точки λ_0 из U, в которых одна из аналитических функций $\varphi_j(\lambda)$, скажем для определенности $\varphi_1(\lambda)$, принимает значение, модуль которого равен 1. Тогда по лемме 60 λ_0 — действительная точка. Пусть разложение функции $\varphi_1(\lambda)$ в окрестности точки λ_0 имеет вид

$$\varphi_1(\lambda) = \varphi_1(\lambda_0) + a_m(\lambda - \lambda_0)^m + a_{m+1}(\lambda - \lambda_0)^{m+1} + \ldots, \quad a_m \neq 0.$$

Если $m \neq 1$, то в силу подготовительной теоремы Вейерштрасса прообраз единичной окружности при отображении φ_1 содержит систему m аналитических дуг, пересекающихся под равными углами π/m в точке λ_0. Если $m > 1$, то не все эти дуги лежат на действительной оси. Поэтому мы обязательно имеем $m = 1$, так что отображение φ_1 взаимно однозначно в окрестности точки $\lambda = \lambda_0$, и прообразом при этом отображении малой дуги единичной окружности, содержащей $\varphi_1(\lambda_0)$, является малый интервал действительной оси, содержащий λ_0. Тогда для λ из действительной окрестности точки λ_0 мы имеем $\varphi_1(\lambda)\overline{\varphi_1(\bar{\lambda})} = 1$, и, следовательно, это равенство выполняется тождественно в U. Итак,

если одна из аналитических функций $\varphi_i(\lambda)$ принимает значение, равное по модулю 1, то $|\varphi_i(\lambda)| = 1$ для всех действительных и только действительных λ из U. В этом случае φ_i определяет гомеоморфное отображение интервала I на некоторую дугу единичной окружности.

Так как при отображениях, определяемых аналитическими функциями, ориентация сохраняется, отсюда следует, что если

φ_1 отображает I в единичный круг C так, что возрастающему аргументу θ соответствует возрастающее t, то точки области U, принадлежащие верхней полуплоскости, переходят при отображении φ_1 во внутренность единичного круга, а точки, принадлежащие нижней полуплоскости, — во внешность единичного круга; обратную картину мы имеем, если φ_1 отображает I в C таким образом, что убывающему аргументу θ соответствует возрастающее t.

Следовательно, мы можем разбить функции φ_i на четыре естественных класса.

(a) Те φ_i, которые отображают действительную ось в единичную окружность так, что возрастающему θ соответствует возрастающее t.

(b) Те φ_i, которые отображают действительную ось в единичную окружность так, что убывающему θ соответствует возрастающее t.

(c) Те φ_i, которые отображают U во внутренность единичного круга.

(d) Те φ_i, которые отображают U во внешность единичного круга.

Предположим теперь для удобства обозначений, что каждая функция φ_i повторяется столько раз, какова размерность области значений оператора $E_i(\lambda)$ (которая по лемме VII.6.4 не зависит от λ), что функции φ_j заново перенумерованы, так что имеет место соотношение

$$\sigma_j(t-1, \lambda) = \varphi_j(\lambda)\,\sigma_j(t, \lambda), \qquad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

выраженное в терминах базиса $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ для решений уравнения $\tau\sigma = \lambda\sigma$, введенного выше, и, наконец, что φ_j и σ_j занумерованы по классам (a) — (d), введенным выше, так что $\varphi_1, \ldots, \varphi_{\nu_1}$ принадлежит классу (a), $\varphi_{\nu_1+1}, \ldots, \varphi_{\nu_2}$ — классу (b), $\varphi_{\nu_2+1}, \ldots, \varphi_{\nu_3}$ — классу (c), а $\varphi_{\nu_3+1}, \ldots, \varphi_{\nu_4} = \varphi_n$ — классу (d).

Тогда очевидно, что σ из класса (c) [класса (d)] принадлежит $L_2(-\infty, 0)$ [$L_2(0, \infty)$] для всех λ из $U - e_1$, а σ из класса (a) [класса (b)] принадлежит $L_2(-\infty, 0)$ для λ из $U - e_1$ и $\operatorname{Im}\lambda > 0$ [$\operatorname{Im}\lambda < 0$] и $L_2(0, \infty)$ для λ из $U - e_1$ и $\operatorname{Im}\lambda < 0$ [$\operatorname{Im}\lambda > 0$].

Пусть функция $F_{ij}(\lambda)$ определена в терминах граничной формы F_t формального дифференциального оператора τ (см. определение 2.1) равенством

$$F_{ij}(\lambda) = F_t(\sigma_i(\lambda), \overline{\sigma_j(\bar{\lambda})}).$$

По формуле Грина 2.4 эта матрица не зависит от t. Так как для λ из $U - e_0$ функции $\sigma_1(\lambda), \ldots, \sigma_n(\lambda)$ образуют базис пространства решений уравнения $\tau\sigma = \lambda\sigma$, то из леммы 2.2 следует, что матрица $F_{ij}(\lambda)$ невырождена для λ из $U-e_0$; пусть $G_{ij}(\lambda)$ — обратная к ней матрица. Согласно следствию 3.13, для $\lambda \in U-e_0$ и $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ резольвента $R(\lambda; T)$ оператора T представляется интегральным ядром $K(t, s; \lambda)$, которое имеет вид

$$K(t, s; \lambda)=\begin{cases} -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_{ij}^{+}G_{ij}(\lambda)\,\sigma_j(t, \lambda)\,\overline{\sigma_i(s, \overline{\lambda})}, & t>s, \ \operatorname{Im}\lambda>0,\\ -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_{ij}^{-}G_{ij}(\lambda)\,\sigma_j(t, \lambda)\,\overline{\sigma_i(s, \overline{\lambda})}, & t>s, \ \operatorname{Im}\lambda<0.\end{cases}$$

В силу следствия 3.13 величины ε_{ij}^{+} и ε_{ij}^{-} равны либо нулю, либо 1. Точнее, из следствия 3.13 вытекает, что

(a′) $$\varepsilon_{ij}^{+}=\varepsilon_{ij}^{-}$$

для пары i, j, если ни σ_i, ни σ_j, будучи квадратично интегрируемыми в $L_2(0, \infty)$, не становятся квадратично интегрируемыми в $L_2(-\infty, 0)$ при переходе $\operatorname{Im}\lambda$ от положительных значений к отрицательным;

(b′) $$\varepsilon_{ij}^{+}=1, \quad \text{если} \quad 1 \leqslant i, \ j<\nu_1,$$

в то время как $\varepsilon_{ij}^{+}=0$ для всех других пар i, j из отрезка $1 \leqslant i, \ j \leqslant \nu_2$;

(c′) $$\varepsilon_{ij}^{-}=1, \quad \text{если} \quad \nu_1<i, \ j \leqslant \nu_2,$$

в то время как $\varepsilon_{ij}^{-}=0$ для всех других i, j из отрезка $1 \leqslant i, \ j \leqslant \nu_2$.

Из теоремы 5.18 Титчмарша — Кодаиры и из теоремы 5.27 следует, что $\varphi_1, \ldots, \varphi_{\nu_2}$ — определяющая система для τ и что матричная мера из теоремы 5.18 равна

$$\varrho_{ij}(\lambda_1\lambda_2)=\begin{cases} \dfrac{1}{\pi i}\displaystyle\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} G_{ji}(\lambda)\,d\lambda, & 1 \leqslant i, \ j \leqslant \nu_1,\\ -\dfrac{1}{\pi i}\displaystyle\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} G_{ji}(\lambda)\,d\lambda, & \nu_1+1 \leqslant i, \ j \leqslant \nu_2,\\ 0 & \text{в других случаях.}\end{cases}$$

Итак, справедлива следующая теорема.

65. Теорема. *Пусть* τ *и* T *определены, как в теореме* 64, *и пусть* I — *интервал оси* λ, *не содержащий ни одной точки разветвления оператора* τ. *Тогда существуют система* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *решений уравнения* $\tau\sigma=\lambda\sigma$, *аналитических по* λ *в комплексной окрестности интервала* I, *и целые числа* ν_1, ν_2, *такие, что при*

$1 \leqslant i \leqslant \nu_1$

$$\varphi_i(\cdot,\ \lambda) \in L_2(-\infty,\ 0) \quad \text{для } \operatorname{Im}\lambda > 0,$$
$$\varphi_i(\cdot,\ \lambda) \in L_2(0,\ \infty) \quad \text{для } \operatorname{Im}\lambda < 0;$$

при $\nu_1 < i \leqslant \nu_2$

$$\varphi_i(\cdot,\ \lambda) \in L_2(0,\ \infty) \quad \text{для } \operatorname{Im}\lambda > 0,$$
$$\varphi_i(\cdot,\ \lambda) \in L_2(-\infty,\ 0) \quad \text{для } \operatorname{Im}\lambda < 0$$

и при $\nu_2 < i \leqslant n$

$$\text{либо } \varphi_i(\cdot,\ \lambda) \in L_2(-\infty,\ 0) \quad \text{для } \operatorname{Im}\lambda \leqslant 0 \text{ и } \operatorname{Im}\lambda \geqslant 0,$$
$$\text{либо } \varphi_i(\cdot,\ \lambda) \in L_2(0,\ \infty) \quad \text{для } \operatorname{Im}\lambda \leqslant 0 \text{ и } \operatorname{Im}\lambda \geqslant 0.$$

Функции φ_i *можно выбрать так, чтобы они образовывали базис множества решений уравнения* $\tau\sigma = \lambda\sigma$ *всюду в* I, *за исключением дискретного множества точек. Пусть* I_1 — *подинтервал из* I, *не содержащий ни одной из этих точек. Положим*

$$F_{ij}(\lambda) = F_t(\varphi_i(\lambda),\ \overline{\varphi_j(\bar{\lambda})}), \qquad 1 \leqslant i,\ j \leqslant n,$$

(*так что по формуле Грина* 2.4 F_{ij} *не зависит от* t). *Тогда матрица* F_{ij} *невырождена. Пусть* $G_{ij}(\lambda)$ — *обратная к ней матрица. Тогда если* ϱ_{ij} — *положительно определенная матричная мера, связанная с базисом* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *решений уравнения* $\tau\sigma = \lambda\sigma$ *на интервале* I, *то по теореме* 5.18 *мы имеем*

$$\varrho_{ij}(e) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi i} \displaystyle\int_e G_{ij}(\lambda)\, d\lambda, & e \subseteq I_1, \quad 1 \leqslant i,\ j \leqslant \nu_1, \\ -\dfrac{1}{\pi i} \displaystyle\int_e G_{ij}(\lambda)\, d\lambda, & e \subseteq I_1, \quad \nu_1 < i,\ j \leqslant \nu_2, \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Дополнительные рассуждения показали бы, что спектральная кратность сужения оператора T на подпространство $E(e)\mathfrak{H}$ гильбертова пространства $\mathfrak{H}$ равна фиксированной конечной постоянной $m(I)$ для каждого подмножества e положительной меры Лебега интервала I, которое не содержит точек разветвления оператора τ. Однако здесь мы не будем приводить эти рассуждения.

В случае когда τ — действительный формально самосопряженный оператор второго порядка

$$\tau = -\left(\frac{d}{dt}\right) p(t) \left(\frac{d}{dt}\right) + q(t), \qquad p(t) > 0,$$

мы можем продвинуться несколько дальше. Пусть $\varphi(t, \lambda)$ — решение уравнения $\tau\sigma = \lambda\sigma$, удовлетворяющее условиям $\varphi(0, \lambda) = (p(0))^{-1}$, $\varphi'(0, \lambda) = 0$, и пусть $\psi(t, \lambda)$ — решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям $\psi(0, \lambda) = 0$, $\psi'(0, \lambda) = 1$. Тогда φ, ψ образуют базис системы решений уравнения $\tau\sigma = \lambda\sigma$. Матрица преобразования S по отношению к этому базису имеет вид

$$\begin{pmatrix} \varphi(-1, \lambda) & \psi(-1, \lambda) \\ \varphi'(-1, \lambda) & \psi'(-1, \lambda) \end{pmatrix}.$$

Следовательно, квадратное уравнение, которому удовлетворяют характеристические корни матрицы $B(\lambda)$, имеет вид

$$\alpha^2 - (\varphi(-1, \lambda) + \psi'(-1, \lambda))\,\alpha + 1 = 0;$$

здесь мы использовали тот факт, что $F_t^{\tau}(\varphi, \overline{\psi}) = p(t)(\varphi(t, \lambda)\psi'(t, \lambda) - \psi(t, \lambda)\varphi'(t, \lambda))$ не зависит от t, и поэтому, так как $p(-1) = p(0)$,

$$\varphi(-1, \lambda)\psi'(-1, \lambda) - \psi(-1, \lambda)\varphi'(-1, \lambda) = \\ = \varphi(0, \lambda)\psi'(0, \lambda) - \psi(0, \lambda)\varphi'(-1, \lambda) = 1.$$

Пусть $\beta(\lambda) = \varphi(-1, \lambda) + \psi'(-1, \lambda) = \operatorname{tr} B(\lambda)$. Тогда это уравнение можно записать в виде

$$\alpha^2 - \beta(\lambda)\,\alpha + 1 = 0.$$

Так как функция $\beta(\lambda)$ — действительная, то корни этого уравнения являются комплексно сопряженными, если они комплексны. Поскольку их произведение равно единице, оба они имеют модуль 1. Итак, оба корня уравнения $\alpha^2 - \beta(\lambda)\alpha + 1$ либо действительны, либо являются комплексно сопряженными и имеют модуль 1. Применяя теорему 64, мы находим, что в первом случае, т. е. при $\beta^2(\lambda) - 4 > 0$, λ не принадлежит $\sigma(T)$, а во втором случае, т. е. при $\beta^2(\lambda) - 4 \leqslant 0$, λ принадлежит $\sigma(T)$. В точке разветвления оператора τ по крайней мере два собственных значения оператора $B(\lambda)$ совпадают. Следовательно, каждая точка разветвления λ оператора τ удовлетворяет равенству $\beta^2(\lambda) = 4$, т. е. $\beta(\lambda) = \pm 2$. Таким образом, оба корня уравнения $\alpha^2 - \beta(\lambda)\alpha + 1 = 0$ равны либо $+1$, либо -1. В первом случае матрица $B(\lambda)$ обязательно имеет собственный вектор, соответствующий собственному значению $+1$, во втором случае — собственному значению -1. Таким образом, в первом случае уравнение $\tau\sigma = \lambda\sigma$ обязательно имеет периодическое решение, а во втором случае — антипериодическое решение, т. е. решение, удовлетворяющее условию $\sigma(t + 1, \lambda) = -\sigma(t, \lambda)$. Теперь рассмотрим следующие две системы граничных условий для оператора τ на конечном замкнутом интервале $[0, 1]$.

Первая система: $f(0)=f(1)$, $f'(0)=f'(1)$ (периодические условия).

Вторая система: $f(0)=-f(1)$, $f'(0)=-f'(1)$ (антипериодические условия).

Тогда по теоремам XII.4.28, 4.1 и 4.2 эти системы граничных условий определяют самосопряженные операторы T_1 и T_2, спектры которых состоят полностью из собственных значений, приближающихся к плюс бесконечности, согласно лемме 29 и следствию 24. Таким образом, в силу теоремы 64 дискретными собственными значениями в этих двух задачах могут быть только концы интервалов или «полос», составляющих $\sigma(T)$.

«Полосы», которые появляются в $\sigma(T)$ для оператора τ второго порядка, известные как «полосы устойчивости» для «уравнения Хилла»

$$-(p(t)f'(t))'+q(t)f(t)-\lambda f(t)=0,$$

подробно исследованы. Изложение соответствующих результатов увело бы нас слишком далеко в сторону. Поэтому мы упоминаем только те результаты этой теории, которые наиболее уместны в настоящем контексте.

Пусть $p_0, p_1, \ldots$ — собственные значения периодической граничной задачи, сформулированной выше, занумерованные в порядке возрастания, причем каждое собственное значение повторяется столько раз, какова его кратность. Пусть $a_0, a_1, a_2, \ldots$ — занумерованные подобным образом собственные значения антипериодической граничной задачи. Тогда из теоремы Биркгофа [4] следует, что

$$p_0<a_0\leqslant a_1<p_1\leqslant p_2\leqslant a_2\leqslant a_3<p_3\leqslant\ldots\leqslant a_{2n+1}<p_{2n+1}\leqslant$$
$$\leqslant p_{2n+1}<a_{2n+2}\leqslant\ldots.$$

Спектр $\sigma(T)$ состоит из последовательных интервалов $[a_1, p_1]$, $[p_2, a_2]$, $[a_3, p_3]$, $\ldots$. Собственная функция φ_0, соответствующая собственному значению p_0 самосопряженного оператора, определенного первой системой граничных условий, не имеет нулей в $[0, 1]$; собственные функции φ_{2n+1} и φ_{2n+2}, соответствующие собственным значениям p_{2n+1} и p_{2n+2} этого оператора, имеют в точности $2n+2$ нулей в $[0, 1]$. Собственные функции $\tilde{\varphi}_{2n}$ и $\tilde{\varphi}_{2n+1}$, соответствующие собственным значениям a_{2n} и a_{2n+1} самосопряженного оператора, определенного второй системой граничных условий, имеют $2n+1$ нулей в $[0, 1]$.

Кроме того, можно показать, что если ввести условие нормировки $\int_0^1 q(t)\,dt=0$, то будет существовать последовательность ε_n

чисел, стремящаяся к нулю, такая, что для всех достаточно больших n каждая точка интервала $((n-1/2)\pi)^2 \leqslant \lambda \leqslant ((n+1/2)\pi)^2$, не принадлежащая $\sigma(T)$, лежит в интервале $(n\pi)^2-\varepsilon_n \leqslant \lambda \leqslant (n\pi)^2+\varepsilon_n$. Таким образом, пробелы в спектре оператора T становятся произвольно малыми и спектр при $\lambda \to \infty$ становится более подобным спектру простого оператора $-(d/dt)^2$. Доказательства этих утверждений читатель найдет в книге Коддингтона и Левинсона [1].

В заключение этого параграфа заметим, что подходящая замена переменных часто улучшает область справедливости теорем о дифференциальных уравнениях. Мы проиллюстрируем это, улучшив некоторые теоремы, установленные выше. Однако сначала мы рассмотрим, как действует замена переменных на формальные дифференциальные операторы вообще и каким способом такие замены переменных можно использовать для упрощения коэффициентов оператора τ. Предположим, что τ — формально симметрический дифференциальный оператор порядка n. Пусть $a_n(t)$ — старший коэффициент оператора τ, так что его старший член имеет вид $a_n(t)(d/dt)^n$. Тогда старший член оператора τ^* равен $(-1)^n\overline{a_n(t)}(d/dt)^n$, поэтому $a_n(t)=(-1)^n\overline{a_n(t)}$. Таким образом, при четном n функция $a_n(t)$ действительная, тогда как при нечетном n она чисто мнимая. Выполним замену переменной $t=h(s)$ и соответствующее унитарное преобразование функций

$$f(\cdot) \to (Uf)(\cdot),$$

которое определяется формулой

$$(Uf)(s)=f(h(s))(h'(s))^{1/2},$$

где функция $h(s)$ будет выбрана позже. Конечно, мы выберем ее таким образом, чтобы h имела всюду положительную производную. В соответствии с этим преобразованием интервал I переходит в $h^{-1}(I)$. «Формальное преобразование» формального оператора d/dt может быть вычислено следующим образом:

$$\left(U\left(\frac{d}{dt}\right)f\right)(s)=f'(h(s))(h'(s))^{1/2}=$$

$$=(h'(s))^{-1}\left\{\frac{d}{ds}[f(h(s))(h'(s))^{1/2}]-\frac{1}{2}f(h(s))(h'(s))^{-1/2}h''(s)\right\}=$$

$$=(h'(s))^{-1}\frac{d}{ds}(Uf)(s)-\frac{1}{2}h''(s)(h'(s))^{-2}(Uf)(s).$$

Таким образом, формально мы имеем

$$\left(U\frac{d}{dt}U^{-1}f\right)(s)=\left\{(h'(s))^{-1}\frac{d}{ds}-\frac{1}{2}(h'(s))^{-2}h''(s)\right\}f(s).$$

Следовательно, замена переменной переводит формальный дифференциальный оператор $\tau = \sum_{k=0}^{n} a_k(t)(d/dt)^k$ в формальный дифференциальный оператор

$$U\tau U^{-1} = \sum_{k=0}^{n} a_k(h(s)) \left\{(h'(s))^{-1}\frac{d}{ds} - \frac{1}{2}(h'(s))^{-2}h''(s)\right\}^k =$$

$$= a_n(h(s))(h'(s))^{-n}\left(\frac{d}{ds}\right)^n + \hat{\tau}_{n-1},$$

причем τ_{n-1} является иррегулярным формальным дифференциальным оператором порядка не больше $n-1$. Если, в частности, τ — формально симметрический оператор и $h(s)$ — решение уравнения $[h'(s) = |a_n(h(s))|^{1/n}$, то старший коэффициент оператора $U\tau U^{-1}$ равен ± 1 (если n четно) или $\pm i$ (если n нечетно). Здесь следует заметить, что $(U\tau U^{-1})^* = U\tau^* U^{-1}$, $U\tau_1\tau_2 U^{-1} = U\tau_1 U^{-1} U\tau_2 U^{-1}$, $U(\tau_1 + \tau_2)U^{-1} = U\tau_1 U^{-1} + U\tau_2 U^{-1}$, причем все эти равенства справедливы как формальные равенства. Поэтому наше унитарное преобразование переводит формально симметрические дифференциальные операторы в формально симметрические дифференциальные операторы и т. д. Кроме того, следует заметить, что решение уравнения $h'(s) = |a_n(h(s))|^{1/n}$ является обратной функцией к решению уравнения $g'(t) = |a_n(t)|^{-1/n}$, т. е. h — обратная функция для неопределенного интеграла

$$g(t) = \int^{t} \frac{ds}{|a_n(s)|^{1/n}}.$$

Таким образом, следствие 19, например, даст несколько интересных результатов, если мы сделаем замену переменных указанного выше типа в операторе

$$\tau = -\frac{d}{dt}p(t)\frac{d}{dt} + q(t),$$

рассматриваемом в этом следствии. Пусть ψ — произвольная положительная бесконечно дифференцируемая функция от t; положим $\varphi(t) = (\psi(t))^{-1}(p(t)\psi'(t))'$. Тогда, в соответствии со сделанными выше замечаниями, при замене переменной $t = h(s)$, где $h(s)$ — функция, обратная к функции

$$s(t) = \int_0^t \psi^2(\tau)\,d\tau,$$

оператор τ преобразуется в оператор

$$\tau_1 = -\frac{d}{ds} P(s) \frac{d}{ds} + Q(s),$$

где

$$P(s) = p(h(s)) \psi^4(h(s))$$

и

$$Q(s) = q(h(s)) - \varphi(h(s)).$$

Случай $\psi(t) = (p(t))^{-1/4}$, который дает $P(s) \equiv 1$, есть случай, указанный выше. В этом случае мы имеем

$$Q(s) = q(h(s)) + \frac{1}{4}\left\{p''(h(s)) - \frac{1}{4}[p(h(s))]^{-1}[p'(h(s))]^2\right\}.$$

Поэтому из теорем 16 и 17 мы получаем следующие теоремы.

66. Теорема. *Пусть τ — действительный формально симметрический дифференциальный оператор второго порядка вида*

$$\tau = -\frac{d}{dt} p(t) \frac{d}{dt} + q(t),$$

определенный на интервале $[a, b)$. Предположим, что

$$\int_a^b (p(t))^{-1/2}\, dt = \infty.$$

Пусть

$$Q(t) = q(t) + \frac{1}{4}\left\{p''(t) - \frac{1}{4}[p(t)]^{-1}[p'(t)]^2\right\}.$$

Тогда

(a) *если $Q(t) \to \infty$ при $t \to b$, то множество $\sigma_e(\tau)$ пусто;*
(b) *если $Q(t) \to c$ при $t \to b$, то $\sigma_e(\tau) = \{\lambda \mid \lambda \geqslant c\}$.*

67. Теорема. *Пусть τ — действительный формально симметрический дифференциальный оператор второго порядка вида*

$$\tau = -\left(\frac{d}{dt}\right) p(t) \left(\frac{d}{dt}\right) + q(t),$$

определенный в интервале $[a, b)$. Предположим, что

$$\int_a^b (p(t))^{-1/2}\, dt < \infty.$$

Пусть

$$Q(t) = q(t) + \frac{1}{4}(p''(t) - \frac{1}{4}[p(t)]^{-1}[p'(t)]^2).$$

Тогда

(a) *если* $q(t) \to \infty$ *при* $t \to b$, *то множество* $\sigma_e(\tau)$ *пусто*;

(b) *если* $\overline{\lim\limits_{t\to b}}\left|\left\{\int\limits_t^b (p(t))^{-1/2}\,dt\right\}^2 Q(t)\right| < 3/4$, *то множество* $\sigma_e(\tau)$ *пусто.*

Как показал Фридрихс, различные случаи $\psi(t) = f(a(t))$, где $a(t) = \int\limits^t (p(s))^{-1}\,ds$, а f — подходящим образом выбранная функция, также приводят к интересным результатам. Здесь мы имеем

$$\varphi(t) = (p(t))^{-1} f''(a(t))\,[f(a(t))]^{-1}.$$

Удобно выбрать функцию $f(t)$ равной $t^{1/2}$, что дает $\varphi(t) = -(1/4)\,(p(t))^{-1}(a(t))^{-2}$. Делая эту замену в следствии 19, мы приходим к следующему результату Фридрихса.

68. Следствие. *Пусть*

$$\tau = -\left(\frac{d}{dt}\right) p(t) \left(\frac{d}{dt}\right) + q(t)$$

— действительный формально самосопряженный дифференциальный оператор, определенный на интервале $I = [a, b)$. *Пусть* $p(t) > 0$ *для* t *из* I; *положим*

$$Z(t) = q(t) + \left[4p(t)\left(\int\limits_a^t (p(\tau))^{-1}\,d\tau\right)^2\right]^{-1}.$$

Если $\underline{\lim\limits_{t\to b}}\, Z(t) = K$, *то* $\sigma_e(\tau)$ *полностью принадлежит лучу* $\lambda \geqslant K$ *действительной оси.*

Таким же способом из теоремы 6.14 мы получаем такое следствие.

69. Следствие. *В условиях и обозначениях предыдущего следствия предположим, что* $\int\limits_a^b (p(t))^{-1}\,dt = \infty$. *Тогда если функция* Z *ограничена снизу, то* τ *не имеет граничных значений в* b.

Различные другие результаты можно получить, выполнив подходящую замену переменной в теоремах 7—19 настоящего параграфа и в теоремах 12—15, 18—22 и 33 предыдущего. Несколько результатов такого типа приводятся в качестве упражнений в конце главы.

Другая полезная замена переменной есть унитарная «замена зависимой переменной», определяемая уравнением

$$(Vf)(t) = \exp(ib(t)) f(t),$$

где b — некоторая подходящая действительная функция. Нетрудно видеть, что

$$V^{-1} \frac{d}{dt} V = \frac{d}{dt} + ib'(t).$$

Поэтому если

$$\tau = \sum_{k=0}^{n} a_k(t) \left(\frac{d}{dt}\right)^k,$$

то мы имеем

$$\tau_1 = V^{-1}\tau V = \sum_{k=0}^{n} a_k(t) \left(\left(\frac{d}{dt}\right) + ib'(t)\right)^k.$$

В частности, τ и τ_1 имеют один и тот же старший коэффициент. Коэффициент при $(d/dt)^{n-1}$ в выражении для τ_1, очевидно, равен

$$a_{n-1}(t) + ina_n(t)\, b'(t).$$

Мы можем обратить его в нуль, полагая

$$b'(t) = ia_{n-1}(t)(na_n(t))^{-1},$$

т. е. выбрав

$$b(t) = \int^{t} ia_{n-1}(s)(na_n(s))^{-1}\, ds.$$

(Из формальной симметричности оператора τ следует, что функция $b(t)$ действительна.)

Очевидно, что, комбинируя два вида преобразований переменных, рассмотренных выше, мы можем, если это удобно, привести каждый формально самосопряженный дифференциальный оператор к нормальному виду

$$i^n \left(\frac{d}{dt}\right)^n + \sum_{j=0}^{n-2} a_j(t) \left(\frac{d}{dt}\right)^j.$$

Это приводит к нормальному виду id/dt для оператора порядка 1, так что каждый формально самосопряженный дифференциальный оператор порядка 1 может быть приведен к известному виду элементарными унитарными заменами переменных. Таким же способом мы находим нормальный вид

$$-\left(\frac{d}{dt}\right)^2 + q(t),$$

где $q(t)$ — действительная функция, для формально самосопряженного оператора второго порядка. Этим объясняется то, что в некоторых теоремах настоящего и предыдущих параграфов большое внимание уделялось операторам такого вида.

8. Примеры[1])

Проиллюстрируем теперь применение предыдущей теории к специальным дифференциальным уравнениям. Из изложенного в последних нескольких параграфах ясно, что при применении общих методов к специальным уравнениям необходимо определить удобные выражения для решений этих уравнений, которые позволят исследовать интегрируемость, вронскиан, предельные значения и другие свойства рассматриваемых решений. Получить такие выражения для решений данного дифференциального уравнения во многих случаях очень трудно. Поэтому мы ограничимся рассмотрением лишь нескольких простых примеров самосопряженных операторов, возникающих из линейных дифференциальных уравнений второго порядка с рациональными коэффициентами. Для этих уравнений общая теория дифференциальных уравнений в комплексной области дает удивительно много информации. Мы сформулируем теоремы, которые нам понадобятся, отсылая читателя за доказательством этих теорем к книгам Коддингтона и Левинсона [1] и Пула [1].

Пусть

$$L=\left(\frac{d}{dz}\right)^2+r_1(z)\frac{d}{dz}+r_2(z)$$

— формальный дифференциальный оператор второго порядка с рациональными коэффициентами r_1, r_2. Точка z_0 в комплексной плоскости, в которой r_1 и r_2 являются аналитическими, называется *регулярной точкой* этого оператора. В окрестности этой точки существует единственное аналитическое решение $f(z)$ уравнения $Lf=0$ с заданными начальными значениями $f(z_0)$, $f'(z_0)$. Точка z_0, которая не является регулярной, называется *особой точкой* этого уравнения. Если r_1 имеет в точке z_0 полюс порядка не выше k, а r_2 — полюс порядка не выше $2k$, то говорят, что рассматриваемый формальный дифференциальный оператор имеет *особенность порядка* k в z_0. Особенность первого порядка часто называют *регулярной особенностью*, а особенность порядка выше 1 — *иррегулярной особенностью*.

Если z_0 является регулярной особой точкой формального дифференциального оператора $L=(d/dz)^2+r_1(z)(d/dz)+r_2(z)$, то

[1]) Многочисленные примеры приведены также в книге Э. Ч. Титчмарша [16]. — *Прим. ред.*

в окрестности точки z_0 функции r_1 и r_2 могут быть представлены в виде

$$r_1(z)=(z-z_0)^{-1}(a+a'(z-z_0)+\ldots),$$
$$r_2(z)=(z-z_0)^{-2}(b+b'(z-z_0)+\ldots).$$

Уравнение $\mu(\mu-1)+a\mu+b=0$ называется *определяющим уравнением* оператора L в z_0; его корни e_1 и e_2 называются *показателями* оператора L в z_0. Если разность e_1-e_2 не равна целому числу, то уравнение $Lf=0$ имеет два линейно независимых решения вида

$$\sigma_1(z)=(z-z_0)^{e_1}(1+\alpha(z-z_0)+\ldots),$$
$$\sigma_2(z)=(z-z_0)^{e_2}(1+\beta(z-z_0)+\ldots),$$

где степенные ряды сходятся вплоть до следующей ближайшей особенности оператора L. Если e_1 и e_2 отличаются на целое число и $\operatorname{Re} e_2 \leqslant \operatorname{Re} e_1$, то решение σ_1 указанного вида существует, однако линейно независимое по отношению к σ_1 решение σ_2 указанного вида не обязательно существует. Тем не менее всегда существует линейно независимое решение вида

$$\sigma_2(z)=(z-z_0)^{e_2}(1+\beta(z-z_0)+\ldots)+\gamma\sigma_1(z)\log(z-z_0)$$

(постоянная γ может равняться нулю).

Регулярную точку дифференциального уравнения можно рассматривать как частный случай регулярной особой точки, когда показатели равны нулю и единице.

Если $Lf=0$ — дифференциальное уравнение с рациональными коэффициентами, имеющее регулярную особенность z_0, с показателями e_1 и e_2, то уравнение второго порядка $L'f'=0$, которому удовлетворяет функция $f'(z)=(z-z_0)^{\alpha}f(z)$, также имеет рациональные коэффициенты. Оператор L' имеет регулярную особенность в z_0 с показателями $e_1+\alpha$, $e_2+\alpha$. Если $\varrho(z)$ — рациональная функция, отображающая точку ζ_0 в точку z_0, и если $\varrho(z)-z_0$ имеет нуль порядка l в точке ζ_0, то уравнение второго порядка $L''f''=0$, которому удовлетворяет функция $f''=f[\varrho(z)]$, также имеет рациональные коэффициенты. Оператор L'' имеет регулярную особенность в ζ_0 с показателями le_1, le_2.

Переходя от уравнения $Lf=0$ к уравнению $L'''f'''=0$, которому удовлетворяет функция $f'''(z)=f(1/z)$, мы можем распространить понятия регулярной точки, особой точки, особой точки порядка k, регулярной особой точки, определяющего уравнения и показателей также на бесконечно удаленную точку. В результате мы получим следующее: формальный дифференциальный оператор L имеет регулярную точку в бесконечности, если $r_1(z)-2z^{-1}$ и $r_2(z)$ имеют нули второго порядка в бесконечности; L имеет особенность порядка k в бесконечности, если r_1 имеет там нуль порядка не ниже $(2-k)$, а r_2 — нуль порядка не ниже $2(2-k)$. (Функция с полюсом порядка k рассматривается здесь как функция, имеющая нуль порядка $-k$.) Если L имеет в худшем случае регулярную особенность, т. е. особенность порядка 1 в бесконечности, то мы имеем разложения Лорана

$$r_1(z) = az^{-1} + \tilde{a}z^{-2} + \ldots,$$

$$r_2(z) = bz^{-2} + \tilde{b}z^{-3} + \ldots.$$

Определяющее уравнение оператора L в ∞ имеет вид $\mu(\mu+1) - a\mu + b = 0$; его корни e_1 и e_2 называются показателями оператора L в бесконечности. Если e_1 и e_2 — показатели оператора L в бесконечности и $e_1 - e_2$ не есть целое число, то существуют два линейно независимых решения σ_1 и σ_2 уравнения $Lf = 0$, которые имеют разложения

$$\sigma_1(z) = z^{-e_1}(1 + \alpha z^{-1} + \tilde{\alpha}z^{-2} + \ldots),$$

$$\sigma_2(z) = z^{-e_2}(1 + \beta z^{-1} + \tilde{\beta}z^{-2} + \ldots).$$

Если $e_1 - e_2$ есть целое число и $\operatorname{Re} e_2 \leqslant \operatorname{Re} e_1$, то существует решение σ_1 указанного вида, но линейно независимое по отношению к σ_1 решение σ_2 указанного вида не обязательно существует. Тем не менее существует линейно независимое решение вида

$$\sigma_3(z) = z^{-e_2}(1 + \beta z^{-1} + \tilde{\beta}z^{-2} + \ldots) + \gamma\sigma_1(z)\log z.$$

Постоянная γ может равняться нулю.

Теперь перейдем к рассмотрению частных случаев. Для простоты мы будем рассматривать формально симметрические операторы L второго порядка с рациональными коэффициентами на интервалах (a, b), где оба конца a и b являются особыми точками оператора L. Более того, сначала мы ограничимся такими операторами L, что для каждого λ оператор $L - \lambda$ имеет только регулярные особенности; позже будут рассмотрены примеры операторов с иррегулярными особенностями.

Следует заметить, что интервал (a, b) находится в нашем распоряжении. Действительно, если $(d/dt)\,p(t)\,(d/dt) + q(t)$ — произвольный формально симметрический линейный дифференциальный оператор (с рациональными коэффициентами) и если мы делаем «формально унитарное» преобразование $f(t) \to (Uf)(t) = |s'(t)|^{1/2} f(s(t))$, где s представляет собой монотонную непрерывно дифференцируемую функцию от t, то мы находим, что

$(U^{-1}LUf)(s) = (d/ds)\ P(s)(d/ds) f(s) \ + Q(s) f(s)$, где

$$P(s) = p(t)(s'(t))^2 |_{t=t(s)},$$

[*] $$Q(s) = (s'(t))^{-1/2} \left(\frac{d}{dt}\right) p(t) \left(\frac{d}{dt}\right) (s'(t))^{1/2} + q(t) |_{t=t(s)},$$

причем $t = t(s)$ — функция, обратная к $s = s(t)$. Если $s(a) = A$, $s(b) = B$, то U преобразует функции f, определенные на интервале (A, B), в функции Uf, определенные на интервале (a, b). Если s — дробно-линейная функция от t, то оператор $U^{-1}LU$ также имеет рациональные коэффициенты. Более того, если L имеет только регулярные особенности, то и $U^{-1}LU$ имеет только регулярные особенности. Так как существует действительное дробно-линейное преобразование, переводящее a, b в любые две заданные точки A, B, то утверждение, что интервал (a, b) находится в нашем распоряжении, справедливо в очевидном смысле.

Теперь рассмотрим случай, когда при всех λ оператор $L - \lambda$ имеет в точности две регулярные особенности a, b. Используя изложенное выше, поместим эти особенности в нуль и бесконечность. Так как оператор

$$\left(\frac{d}{dt}\right) p(t) \left(\frac{d}{dt}\right) + q(t) = p(t) \left(\frac{d}{dt}\right)^2 + p'(t) \left(\frac{d}{dt}\right) + q(t)$$

имеет регулярные особенности только в нуле и бесконечности, то отсюда следует, что $p'(t)\, p^{-1}(t)$ — рациональная функция, имеющая единственный полюс, а именно полюс первого порядка в нуле, и что она обращается в нуль в ∞. Таким образом, $p'(t)\, p^{-1}(t) = a/t$ и аналогично $q(t)/p(t) = b/t^2$. Поскольку предполагается, что оператор $L - \lambda$ имеет только две регулярные особенности при каждом λ, таким же способом получается, что $(q(t) - \lambda)/p(t) = b(\lambda)/t^2$ для всех λ. Поэтому $p(t) = \mathrm{const} \cdot t^{-2}$. Таким образом, после умножения на постоянную и прибавления постоянной оператор L принимает вид $-(d/dt)\, t^2 (d/dt)$. Если выполнить унитарное преобразование $f \to Uf = t^{-1/2} f(\log t)$, то по формуле [*] оператор L преобразуется в $-(d/ds)^2 + 1/4$, или после вычитания постоянной $1/4$ в $-(d/ds)^2$. Мы рассматриваем этот оператор на интервале $(-\infty, \infty)$. Читатель без труда может выяснить, что этот формальный дифференциальный оператор имеет нулевые индексы дефекта, так что он приводит к единственному самосопряженному оператору $T = (id/ds)^2$, где id/ds — самосопряженный оператор, рассмотренный в конце § 5. Операционное исчисление, развитое в § 5, показывает, что спектральное разложение оператора T может быть выражено в терминах разложения оператора id/ds и, следовательно, в конечном счете в терминах преобразования Фурье. Итак, случай, когда $L - \lambda$ имеет только две регулярные особенности, не дает ничего нового.

Поэтому мы обратимся к более сложному случаю: к таким формальным дифференциальным операторам L, что $L-\lambda$ имеет не более трех регулярных особенностей для любого λ. Если оператор L имеет точно три особенности, то он полностью характеризуется этими особенностями ζ_0, ζ_1, ζ_2 и соответствующими им показателями e_0, e_0'; e_1, e_1'; e_2, e_2'. Действительно, если бы это было не так, то мы имели бы два дифференциальных оператора L_1, L_2 с этими особенностями и показателями. Выполнив дробно-линейное преобразование независимой переменной, отображающее ζ_0, ζ_1, ζ_2 в 0, 1, ∞, мы получили бы два дифференциальных оператора с теми же показателями в точках 0, 1 и ∞. Умножив затем зависимую переменную на $z^{-e_0}(z-1)^{-e_1}$, мы получили бы два оператора L, L' с регулярными особенностями в точках 0, 1, ∞ и с показателями вида 0, a; 0, b; c, d в этих особенностях. Пусть $L=D^2+r_1(z)D+r_2(z)$. Тогда r_1 — рациональная функция с простыми полюсами в точках 0, 1, обращающаяся в нуль в ∞. Поэтому $r_1(z)$ должна иметь вид $\alpha z^{-1}+\beta(z-1)^{-1}$. Аналогично $r_2(z)$ должна иметь вид $(\gamma z+\gamma')z^{-2}+(\delta(z-1)+\delta')(1-z)^{-2}$. Используя теперь то, что корнями определяющего уравнения в точках 0, 1, ∞ служат числа 0, a; 0, b; c, d, мы найдем, что $\alpha=1-a$, $\beta=1-b$, $\gamma'=\delta'=0$; $\gamma=\delta=cd$. Следовательно, L однозначно определяется числами a, b, c, d; это доказывает, что $L_1=L_2$, и тем самым устанавливает единственность формального дифференциального оператора с тремя заданными регулярными особенностями и тремя заданными парами показателей. Из определяющих уравнений мы также находим, что $c+d=\alpha+\beta-1$, т. е. $a+b+c+d=1$. Таким образом, сумма показателей уравнения с тремя особенностями равна 1, и никаких других условий на них не налагается.

Для того чтобы выяснить, как меняется рассматриваемое дифференциальное уравнение при различных заменах переменной, о которых шла речь выше, удобно использовать следующие символические обозначения, впервые введенные Риманом. Мы только что показали, что существует одно и только одно линейное дифференциальное уравнение второго порядка с регулярными особенностями a, b, c и соответствующими парами α_1, α_2; β_1, β_2; γ_1, γ_2 показателей в этих особенностях. Предположим, что символ

$$[*]\qquad P\begin{pmatrix} a & b & c & \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1; & z \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \end{pmatrix}$$

обозначает какую-нибудь ветвь функции (вообще говоря, многозначной), удовлетворяющей рассматриваемому дифференциальному уравнению. В некоторых случаях желательно выделить некоторую частную ветвь этой (многозначной) функции; обычно это будет та (однозначно определенная) ветвь, которая имеет заданное асимптотическое поведение в окрестности одной из особенностей. Мы поступим следующим образом. Ветвь многозначной функции [*], которая имеет асимптотический вид $(z-a)^{\alpha_1}(1+c_1(z-a)+\dots)$ в окрестности регулярной особой точки $z=a$ нашего уравнения, мы будем обозначать через

$$P_{\alpha_1}^{a}\begin{pmatrix} a & b & c & \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1; & z \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \end{pmatrix}.$$

Аналогично через

$$P_{\beta_2}^{b}\begin{pmatrix} a & b & c & \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1; & z \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \end{pmatrix}$$

обозначается единственная ветвь функции [*], которая имеет асимптотический вид $(z-b)^{\beta_2}(1+c_1(z-b)+\dots)$ в окрестности точки $z=b$. Если $c=\infty$, то символом

$$P_{\gamma_1}^{\infty}\begin{pmatrix} a & b & \infty & \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1; & z \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \end{pmatrix}$$

обозначается единственная ветвь функции [*], которая имеет асимптотический вид $z^{-\gamma_1}(1+\tilde{c}_1 z^{-1}+\dots)$ в окрестности точки $z=\infty$. Из определения введенных символов и изложенного ранее принципа замены переменной почти очевидно, что

$$P_{\alpha_1}^{a}\begin{pmatrix} a & b & c & \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1; & z \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \end{pmatrix}=\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha_1}P_{0}^{a}\begin{pmatrix} a & b & c & \\ 0 & \beta_1+\alpha_1 & \gamma_1; & z \\ \alpha_2-\alpha_1 & \beta_2+\alpha_1 & \gamma_2 & \end{pmatrix},$$

$$P_{0}^{0}\begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \gamma_1; & \dfrac{z}{z-1} \\ 1-\alpha & \alpha-\gamma_1-\gamma_2 & \gamma_2 & \end{pmatrix}=$$

$$=(1-z)^{\gamma_1}P_{0}^{0}\begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \gamma_1; & z \\ 1-\alpha & \gamma_2-\gamma_1 & \alpha-\gamma_2 & \end{pmatrix}$$

и т. д. Такие замены переменной будут часто применяться в дальнейших рассуждениях. Мы не будем подробно выполнять такие замены переменной, предоставляя читателю провести их самостоятельно. Во всяком случае они легко осуществляются, если только вычисления проводить в символических обозначениях, как мы только что объяснили.

Как мы видели выше, дифференциальное уравнение $Lf=0$, где L имеет три регулярные особенности в точках $0, 1, \infty$ с показателями α, β в ∞; $0, 1-\gamma$ в нуле и $0, \gamma-\alpha-\beta$ в 1, имеет (после умножения на $z(1-z)$) вид

$$(1) \qquad z(1-z)\left(\frac{d}{dz}\right)^2 f-(\gamma-(\alpha+\beta+1)z)\left(\frac{d}{dz}\right)f-\alpha\beta f=0.$$

Это уравнение представляет собой известное *гипергеометрическое уравнение* Эйлера—Гаусса. Если γ не равняется целому неотрицательному числу, то, как показано выше, это уравнение имеет единственное решение вида $\sigma(z)=1+a_1z+\ldots$. Сравнение коэффициентов дает *гипергеометрический ряд* Эйлера

$$(2) \qquad F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ z)=1+\frac{\alpha\beta}{\gamma}z+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\,\gamma(\gamma+1)}z^2+\ldots.$$

Используя интегральное представление β-функции Эйлера

$$(3) \qquad \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt, \quad \operatorname{Re}x>0, \quad \operatorname{Re}y>0,$$

где Γ есть Γ-функция, мы находим, что

$$F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ z)=$$
$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{n!}z^n\int_0^1 t^{\alpha-1+n}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}\,dt;$$

таким образом, мы получаем интеграл Эйлера

$$(4) \qquad F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-tz)^{-\beta}\,dt,$$

имеющий смысл при $|z|<1$, $\operatorname{Re}\alpha>0$, $\operatorname{Re}(\gamma-\alpha)>0$.

В этом случае можно провести полный анализ подобно тому, как это было сделано выше для случая двух регулярных особенностей. Однако проведение такого анализа во всех подробностях потребовало бы слишком много места. Мы ограничимся рассмотрением нескольких примеров, выбранных так, чтобы показать, какие здесь могут встретиться типы спектров и какие методы применяются для их исследования.

Сначала рассмотрим формальный дифференциальный оператор

$$L=L^{\alpha,\beta}=-\left(\frac{d}{dt}\right)(1-t^2)\left(\frac{d}{dt}\right)+\frac{2\alpha^2}{1+t}+\frac{2\beta^2}{1-t}$$

на интервале $(-1, 1)$, где α и β предполагаются действительными положительными. Для любого λ оператор $L-\lambda$ имеет регулярные особенности в точках -1, $+1$ и ∞. Из определяющих уравнений видно, что показатели в точках -1, $+1$ и ∞ равны соответственно α, $-\alpha$; β, $-\beta$ и $1/2+\gamma$, $1/2-\gamma$, где $\lambda=\gamma^2-1/4$. Таким образом, могут представиться три случая.

Случай 1: $\alpha \geqslant 1/2$, $\beta \geqslant 1/2$. Тогда уравнение $Lf = \pm if$ имеет одно решение (с асимптотикой $(x+1)^{\alpha}$), принадлежащее $L_2(-1, 0)$, тогда как никакое линейно независимое по отношению к нему решение не принадлежит $L_2(-1, 0)$. Аналогичное утверждение справедливо в точке 1, так что, согласно следствию 2.25, индексы дефекта оператора L равны нулю. Поэтому L порождает единственный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве, который мы по-прежнему будем обозначать буквой L.

Случай 2: $\alpha \geqslant 1/2$ и $0 \leqslant \beta < 1/2$ или $0 \leqslant \alpha < 1/2$ и $\beta \geqslant 1/2$. Эти случаи эквивалентны, поскольку они сводятся один к другому при помощи замены переменной $x \to -x$. Здесь, как и в случае 1, мы видим, что уравнение $Lf = \pm if$ имеет одно решение из L_2 в одной из концевых точек, тогда как в другой концевой точке все решения этого уравнения принадлежат L_2. Таким образом, согласно следствию 2.25, индексы дефекта оператора L равны $(1, 1)$. Поэтому чтобы получить самосопряженный оператор, мы должны задать одно граничное условие. Вид этого граничного условия будет изучен более подробно ниже.

Случай 3: $0 \leqslant \alpha < 1/2$, $0 \leqslant \beta < 1/2$. Здесь все решения уравнения $Lf = \pm if$ интегрируемы в квадрате в обеих концевых точках. Поэтому $d_+ = d_- = 2$, и мы должны задать два граничных условия, чтобы получить самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве.

По теоремам 4.1 и 4.2 $L^{\alpha, \beta}$ не имеет существенного спектра, если $0 \leqslant \alpha < 1/2$, $0 \leqslant \beta < 1/2$. Поскольку оператор $L^{\alpha, \beta}$ возрастает с ростом α и β и формально положителен, из теоремы 7.34 следует, что он не имеет существенного спектра ни при каких положительных α, β. Таким образом, во всех случаях $L^{\alpha, \beta}$ имеет только дискретные собственные значения.

Вернемся теперь к более подробному анализу случая 1, где не возникает вопроса о граничных условиях. Прежде всего ясно, что в этом случае каждое собственное значение оператора L является простым, ибо пространству $L_2(-1, 1)$ может принадлежать самое большее одно решение уравнения $(L-\lambda)f=0$. (Это замечание справедливо также для самосопряженных операторов, получаемых из L в случае 2.) Для того чтобы число λ было собственным значением оператора L, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы решение $\sigma=\sigma_{-1}$ уравнения $(L-\lambda)f=0$, имеющее вид $(t+1)^{\alpha}(1+\ldots)$, было интегрируемо в квадрате в точке $+1$, т. е. отличалось постоянным множителем от решения σ_{+1} этого уравнения, имеющего вид $(t-1)^{\beta}(1+\ldots)$. Если это так, то функция $(t+1)^{-\alpha}(t-1)^{-\beta}\sigma$ является аналитической функцией в точках $+1$ и -1. Поскольку дифференциальное уравнение $(L-\lambda)f=0$ не имеет других конечных особых точек, кроме ± 1, функция $(t+1)^{-\alpha}(t-1)^{-\beta}\sigma$ является аналитической и во всех других точках комплексной плоскости. Так как $L-\lambda$ имеет регулярную особенность в бесконечности, то $(t+1)^{-\alpha}(t-1)^{-\beta}\sigma$ имеет вид $O(|z|^{+N})$ в ∞ для некоторого достаточно большого N. Отсюда в силу известных элементарных теорем теории функций комплексного переменного следует, что $(t+1)^{-\alpha}(t-1)^{-\beta}\sigma$ — полином. Таким образом, для того чтобы число λ было собственным значением оператора L, необходимо и достаточно, чтобы уравнение $(L-\lambda)\sigma=0$ имело решение вида $(1+t)^{\alpha}(1-t)^{\beta}P(t)$, где P — полином.

Отсюда после замены зависимой и независимой переменных, указанной выше, получаем, что σ отличается постоянным множителем от

$$(t+1)^{\alpha}(1-t)^{\beta}F\left(\alpha+\beta+\gamma+\frac{1}{2},\ \alpha+\beta+\frac{1}{2}-\gamma;\ 1+2\alpha;\ \frac{t+1}{2}\right)$$

(где, как и раньше, $\lambda=\gamma^2-1/4$). Поэтому λ является собственным значением тогда и только тогда, когда F — полином, т. е. тогда и только тогда, когда гипергеометрический ряд превращается в конечную сумму. Из формулы (2) видно, что это происходит тогда и только тогда, когда $\alpha+\beta+n+1/2=\pm\gamma$, где n — неотрицательное целое число. Следовательно, числа $\lambda_n=(n+\alpha+\beta+1)(n+\alpha+\beta)$ являются собственными значениями оператора L, а функции

$$\varphi_n(x)=c_n(1+t)^{\alpha}(1-t)^{\beta}F\left(-n,\ +n+2\alpha+2\beta+1;\ 1+2\alpha;\ \frac{t+1}{2}\right)$$

являются соответствующими ортонормированными собственными функциями, где c_n — нормирующий множитель, который мы должны еще определить. Полином в правой части обозначается обычно $\left(\text{после умножения на } \binom{n+2\alpha}{n}\right)$ через $P_n^{(2\alpha,\,2\beta)}$ и называется *полиномом Якоби*. Частные случаи: $\alpha=\beta$ — *ультрасферические полиномы*; $\alpha=\beta=\pm 1/4$ — *полиномы Чебышева первого и второго рода*; $\alpha=\beta=0$ — *полиномы Лежандра*.

Теперь нормируем функцию φ_n. Это можно сделать следующим образом. Поскольку $E(\{\lambda_n\})$ — ортогональный проектор пространства $L_2(-1, 1)$ на одномерное линейное пространство, порождаемое собственной функцией φ_n, и поскольку $\{\varphi_n\}$ — полная ортонормальная система, оператор $E(\{\lambda_n\})$ должен определяться формулой

$$E(\{\lambda_n\}) f = (f, \varphi_n) \varphi_n,$$

т. е. формулой

$$(E(\{\lambda_n\}) f)(t) = \varphi_n(t) \int_{-1}^{1} \varphi_n(s) f(s) \, ds.$$

Далее, согласно теореме 3.16, следствию 5.30 и замечанию, следующему за теоремой 5.16, $E(\{\lambda_n\})$ задается формулой

$$(E(\{\lambda_n\}) f)(t) = k_n \varphi(t, \lambda_n) \int_{-1}^{1} \psi(s, \lambda_n) f(s) \, ds,$$

где

$$\varphi(t, \lambda) = (t+1)^{\alpha} (1-t)^{\beta} \times$$
$$\times F\left(\alpha+\beta+\gamma+\frac{1}{2}, \quad \alpha+\beta+\frac{1}{2}-\gamma; \ 1+2\alpha; \ \frac{t+1}{2}\right),$$
$$\psi(t, \lambda) = (t+1)^{\alpha} (1-t)^{\beta} \times$$
$$\times F\left(\alpha+\beta+\gamma+\frac{1}{2}, \quad \alpha+\beta+\frac{1}{2}-\gamma; \ 1+2\beta; \ \frac{1-t}{2}\right),$$

причем $\gamma = \sqrt{\lambda + 1/4}$, k_n — вычет в точке $\lambda = \lambda_n$ функции $\{(1-t^2) W(\varphi(t, \lambda), \psi(t, \lambda))\}^{-1}$, а $W(f, g)$ обозначает, как обычно, определитель Вронского $f'g - g'f$ двух функций f и g. Заметим далее, что если гипергеометрические функции в правой части предыдущих формул обозначить соответственно через $F_\alpha((1+t)/2)$ и $F_\beta((1-t)/2)$, то

$$(1-t^2) W(\varphi, \psi) =$$
$$= (1+t)^{2\alpha+1} (1-t)^{2\beta+1} W\left(F_\alpha\left(\frac{1+t}{2}\right), \ F_\beta\left(\frac{1-t}{2}\right)\right) =$$
$$= 2^{2\alpha+2\beta+1} s^{2\alpha+1} (1-s)^{2\beta+1} W(F_\alpha(s), \ F_\beta(1-s)),$$

где $s = (1+t)/2$. Теперь из рассуждений о замене переменных, проведенных в начале этого параграфа, следует, что F_α и F_β являются решениями уравнения с регулярными особенностями в точках $0, 1, \infty$ и соответствующими показателями $0, -2\alpha$; $0, -2\beta$; $1/2+\gamma+\alpha+\beta$, $1/2-\gamma+\alpha+\beta$. Частное решение $F_\alpha(s)$

этого уравнения характеризуется тем, что оно регулярно и принимает значение 1 в нуле, а $F_\beta(1-s)$ регулярно и принимает значение 1 в единице.

Пусть F_α^+ — единственное решение уравнения с теми же самыми регулярными особенностями и показателями, которое имеет вид $z^{-2\alpha}(1+z+\ldots)$ в окрестности точки $z=0$. Тогда, поскольку F_α и F_α^+ вместе образуют базис для решений нашего уравнения, мы имеем соотношение $F_\beta=\varkappa_1 F_\alpha+\varkappa_2 F_\alpha^+$. Следовательно, $W(F_\alpha, F_\beta)=$ $=\varkappa_2 W(F_\alpha, F_\alpha^+)$. Далее, как следует из формулы Грина, $s^{2\alpha+1}(1-s)^{2\beta+1}W(F, F')$ — постоянная величина для любой пары решений нашего уравнения. Поэтому мы имеем $W(F_\alpha, F_\alpha^+)=$ $=\mathrm{const}\cdot s^{-2\alpha-1}(1-s)^{-2\beta-1}$, и так как $W(F_\alpha, F_\alpha^+)=F'_\alpha F_\alpha^+-F_\alpha(F_\alpha^+)'=$ $=(+2\alpha)s^{-2\alpha-1}(1+\ldots)$ для s, близких к нулю, то $W(F_\alpha, F_\alpha^+)=$ $=2\alpha s^{-2\alpha-1}(1-s)^{-2\beta-1}$ и $W(F_\alpha, F_\beta)=2\alpha\varkappa_2 s^{-2\alpha-1}(1-s)^{-2\beta-1}$.

Чтобы вычислить коэффициент $\varkappa_2$, можно рассуждать следующим образом. Функция $z^{2\alpha}F_\alpha^+$ является единственным решением уравнения с особенностями в точках 0, 1, ∞ и соответствующими показателями 2α, 0; 0, -2β; $1/2+\gamma-\alpha+\beta$, $1/2-\gamma-\alpha+\beta$, которое регулярно и принимает значение 1 в нуле; функция $F^{2\alpha}F_\beta$ — единственное решение этого уравнения, которое регулярно и принимает значение 1 в точке 1. Поэтому мы имеем

$$2^{2\alpha}F_\alpha^+(z)=F\left(\frac{1}{2}+\gamma-\alpha+\beta,\ \frac{1}{2}-\gamma-\alpha+\beta;\ 1-2\alpha;\ z\right),$$

$$z^{2\alpha}F_\beta(z)=F\left(\frac{1}{2}+\gamma-\alpha+\beta,\ \frac{1}{2}-\gamma-\alpha+\beta;\ 1+2\beta;\ 1-z\right).$$

Полагая $z=0$ в уравнении $z^{2\alpha}F_\beta(z)=\varkappa_1 z^{2\alpha}F_\alpha(z)+\varkappa_2 z^{2\alpha}F_\alpha^+(z)$, мы находим (поскольку $\alpha>0$), что

$$F\left(\frac{1}{2}+\gamma-\alpha+\beta,\ \frac{1}{2}-\gamma-\alpha+\beta;\ 1+2\beta;\ 1\right)=\varkappa_2.$$

Тогда по формуле (4)

$$\varkappa_2=\frac{\Gamma(1+2\beta)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\gamma-\alpha+\beta\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\beta-\gamma+\alpha\right)}\int_0^1 t^{\gamma-\alpha+\beta-1/2}(1-t)^{2\alpha-1}\,dt=$$

$$=\frac{\Gamma(1+2\beta)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\gamma-\alpha+\beta\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\beta-\gamma+\alpha\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(\gamma-\alpha+\beta+\frac{1}{2}\right)\Gamma(2\alpha)}{\Gamma\left(\alpha+\gamma+\beta+\frac{1}{2}\right)}=$$

$$=\frac{\Gamma(1+2\beta)\,\Gamma(2\alpha)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\beta-\gamma+\alpha\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\alpha+\beta+\gamma\right)}.$$

Таким образом,

$$s^{2\alpha+1}(1-s)^{2\beta+1}W(F_\alpha, F_\beta)=\frac{2\alpha\Gamma(1+2\beta)\Gamma(2\alpha)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\alpha+\beta-\gamma\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\alpha+\beta+\gamma\right)}=$$

$$=\frac{\Gamma(1+2\beta)\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\alpha+\beta-\gamma\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\alpha+\beta+\gamma\right)}.$$

Вычет функции $\{(1-t^2)W(\varphi(t,\lambda),\psi(t,\lambda))\}^{-1}$ в точке $\lambda=\lambda_n$, где $1/2+\alpha+\beta-\gamma_n=-n$, равен

$$\varkappa_2=2^{-2\alpha-2\beta-1}\frac{\Gamma(1+2\alpha+2\beta+n)(-1)^n}{\Gamma(1+2\alpha)\Gamma(1+2\beta)n!}2\sqrt{\lambda+1/4}=$$

$$=2^{-2\alpha-2\beta-1}\frac{\Gamma(1+2\alpha+2\beta+n)(2n+2\alpha+2\beta+1)(-1)^n}{\Gamma(1+2\alpha)\Gamma(1+2\beta)n!}.$$

Здесь мы использовали известный факт, что вычет функции $\Gamma(z)$ в простом полюсе $z=-n$ равен $(-1)^n/n!$

Поскольку при $\lambda=\lambda_n$ функции $\varphi(t,\lambda)$ и $\psi(t,\lambda)$ становятся линейно зависимыми, мы имеем $\varphi(t,\lambda_n)=\varepsilon_n\psi(t,\lambda_n)$, откуда, полагая $t=1$, находим

$$\varepsilon_n=F\left(\alpha+\beta+\gamma_n+\frac{1}{2},\ \alpha+\beta-\gamma_n+\frac{1}{2};\ 1+2\alpha;\ 1\right)=$$

$$=F(1+2\alpha+2\beta+n,\ -n;\ 1+2\alpha;\ 1).$$

Снова применяя формулу (4), находим

$$\varepsilon_n=\frac{\Gamma(1+2\alpha)\Gamma(-2\beta)}{\Gamma(-2\beta-n)\Gamma(1+2\alpha+n)}=(-1)^n\frac{\Gamma(1+2\alpha)\Gamma(1+2\beta+n)}{\Gamma(1+2\alpha+n)\Gamma(1+2\beta)}.$$

Здесь мы использовали формулу $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\pi\operatorname{cosec}\pi z$. Таким образом,

$$(E(\{\lambda_n\})f)(t)=\varepsilon_n^{-1}k_n\varphi(t,\lambda_n)\int_{-1}^{1}\varphi(s,\lambda_n)f(s)\,ds=$$

$$=\varphi_n(t)\int_{-1}^{1}\varphi_n(s)f(s)\,ds,$$

где $\varphi(t,\lambda_n)=(t+1)^\alpha(1-t)^\beta F(-n,n+2\alpha+2\beta+1;1+2\alpha;(t+1)/2)$ и $\varphi_n(t)=c_n\varphi(t,\lambda_n)$. Следовательно,

$$|c_n|^2=k_n/\varepsilon_n=\frac{2^{-2\alpha-2\beta-1}\Gamma(1+2\alpha+2\beta+n)\Gamma(1+2\alpha+n)(2n+2\alpha+2\beta+1)}{\{\Gamma(1+2\alpha)\}^2\Gamma(1+2\beta+n)n!}.$$

Итак, мы нормировали функции φ_n.

Обратимся теперь к анализу случая 2, предполагая, что $\alpha\geqslant 1/2$ и $0<\beta<1/2$, так что по теореме 2.30 $L^{\alpha,\beta}$ имеет два линейно независимых граничных значения, оба в точке $+1$. (Для простоты случаи $\beta=0$ или $\alpha=1/2$ не рассматриваются и предоставляются читателю в качестве упражнения.) Пусть $\varphi_+(\varphi_-)$ — любая функция класса C^∞, определенная на интервале $(-1, +1)$, равная нулю при $t<0$ и $(t-1)^\beta$ $((t-1)^{-\beta})$ для t, близких к 1. Тогда простое вычисление дает

$$L^{\alpha,\beta}\varphi_\pm(t)=(1-t)^{\pm\beta}((-2\beta^2+2\beta^2)(1-t)^{-1}+\mathrm{const}+\ldots),$$

так что $L\varphi_\pm \in L_2(-1, 1)$ и $\varphi_\pm \in \mathfrak{D}(T_1(L))$. Таким образом, по определению XII.4.20 $\tilde{A}_\pm(f)=(Lf, \varphi_\pm)-(f, L\varphi_\pm)$ — граничные значения оператора L. Мы имеем

$$\tilde{A}_\pm(f)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{1-\varepsilon} -[(1-t^2)f'(t)]'\varphi_\pm(t)+f(t)\{(1-t^2)\varphi_\pm'(t)\}'\,dt=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}(1-t^2)(\varphi_\pm'(t)f(t)-\varphi_\pm(t)f'(t)|_{-1}^{1-\varepsilon}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}2\varepsilon(\pm\beta\varepsilon^{\pm\beta-1}f(1-\varepsilon)-\varepsilon^{\pm\beta}f'(\varepsilon))=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\{-2[\varepsilon^{\pm\beta+1}f'(1-\varepsilon)\mp\beta\varepsilon^{\pm\beta}f(1-\varepsilon)]\}.$$

Таким образом, пределы

$$A_+(f)=\lim_{\varepsilon\to 0}\{\varepsilon^{\beta+1}f'(1-\varepsilon)-\beta\varepsilon^{\beta}f(1-\varepsilon)\},$$

$$A_-(f)=\lim_{\varepsilon\to 0}\{\varepsilon^{-\beta+1}f'(1-\varepsilon)+\beta\varepsilon^{-\beta}f(1-\varepsilon)\}$$

существуют для всех f из $\mathfrak{D}(T_1(L))$ и определяют граничные значения для L. После несложных вычислений мы получаем

$$A_+(\varphi_+)=0, \qquad A_-(\varphi_+)=2\beta,$$
$$A_+(\varphi_-)=-2\beta, \quad A_-(\varphi_-)=0.$$

Отсюда следует, что A_+ и A_- являются независимыми граничными значениями. Более того, равенство

$$\{f, g\}=-i\{(Lf, g)-(f, Lg)\}=(i\beta)^{-1}\{A_+(f)\overline{A_-(g)}-A_-(f)\overline{A_+(g)}\}$$

справедливо, если f и g выбраны из числа функций φ_+ и φ_-; следовательно, по теореме XII.4.24 оно справедливо для всех f и g из $\mathfrak{D}(T_1(L))$. Согласно следствию 2.31, наиболее общим самосопряженным сужением оператора $T_1(L)$ является его сужение на область, определенную одним граничным условием $A_+(f)=kA_-(f)$, где k — некоторое действительное число, $-\infty<k\leqslant+\infty$.

Если $k=0$, то единственным решением уравнения $Lf=\lambda f$ с интегрируемым квадратом в точке $+1$, удовлетворяющим заданному граничному условию $A_+(f)=0$, является, как легко видеть, решение с асимптотикой $(1-t)^\beta$ в окрестности точки $t=1$. Таким образом, все наши вычисления проводятся точно так же, как в случае 1, и мы снова приходим к собственным значениям $\lambda_n=(n+\alpha+\beta+1)(n+\alpha+\beta)$ и ортонормированным собственным функциям

$$\varphi_n(t)=c_n(1+t)^\alpha(1-t)^\beta F\left(-n,\ n+2\alpha+2\beta+1;\ 1+2\alpha;\ \frac{t+1}{2}\right),$$

$$|c_n|^2=\frac{2^{-2\alpha-2\beta-1}\,\Gamma(1+2\alpha+2\beta+n)\,\Gamma(1+2\alpha+n)}{\{\Gamma(1+2\alpha)\}^2\,\Gamma(1+2\beta+n)\,n!}(2n+2\alpha+2\beta+1).$$

Если $k=\infty$, так что наше граничное условие имеет вид $A_-(f)=0$, то единственное решение уравнения $Lf=\lambda f$, интегрируемое в квадрате при $t=+1$ и удовлетворяющее заданному граничному условию, есть решение с асимптотикой $(1-t)^{-\beta}$ в окрестности точки $t=1$. Замена $\beta'=-\beta$ возвращает нас к предыдущему случаю, так что мы имеем собственные значения $\lambda_n=(n+\alpha-\beta+1)(n+\alpha-\beta)$ и ортонормированные собственные функции

$$\varphi_n(t)=c_n(1+t)^\alpha(1-t)^{-\beta} F\left(-n,\ n+2\alpha-2\beta+1;\ 1+2\alpha;\ \frac{t+1}{2}\right),$$

$$|c_n|^2=\frac{2^{-2\alpha+2\beta-1}\,\Gamma(1+2\alpha-2\beta+n)\,\Gamma(1+2\alpha+n)}{\{\Gamma(1+2\alpha)\}^2\,\Gamma(1-2\beta+n)\,n!}(2n+2\alpha-2\beta+1).$$

Если $0<|k|<\infty$, то мы не можем ожидать столь полной аналогии со случаем 1. В этом случае нетрудно показать, что решением уравнения $L\sigma=\lambda\sigma$, удовлетворяющим граничному условию $A_+(f)=kA_-(f)$ при $t=1$, является $\varrho=(\psi-k\tau)$, где ψ (соответственно τ) есть единственное решение этого уравнения вида $(1+t)^\alpha(1-t)^\beta(1+\ldots)$ (соответственно вида $(1+t)^\alpha(1-t)^{-\beta}(1+\ldots)$) в окрестности точки $t=1$. Следовательно, собственные функции больше не являются полиномами. Если, как в случае 1, мы положим

$$\varphi(t,\lambda)=(t+1)^\alpha(1-t)^\beta\times$$
$$\times F\left(\alpha+\beta+\gamma+\frac{1}{2},\quad \alpha+\beta+\frac{1}{2}-\gamma;\quad 1+2\alpha;\ \frac{t+1}{2}\right),$$

так что $\varphi(t,\lambda)$ — единственное решение уравнения $Lf=\lambda f$ с интегрируемым квадратом в окрестности точки $t=1$, то, как в случае 1, получим

$$(1-t^2)\,W(\varphi(t,\lambda),\ \psi(t,\lambda))=\frac{2^{2\alpha+2\beta+1}\,\Gamma(1+2\beta)\,\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\alpha+\beta-\gamma\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\alpha+\beta+\gamma\right)}.$$

Решения ψ и τ переходят друг в друга при замене $\beta \to -\beta$. Поэтому

$$(1-t^2)\,W(\varphi(t,\lambda),\ \tau(t,\lambda)) = \frac{2^{2\alpha-2\beta+1}\,\Gamma(1-2\beta)\,\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\alpha-\beta-\gamma\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\alpha-\beta+\gamma\right)}.$$

Следовательно, если γ_n — корни уравнения

$$\frac{2^{2\beta}\Gamma(1+2\beta)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\alpha+\beta-\gamma_n\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\alpha+\beta+\gamma_n\right)} = k\cdot 2^{-\beta}\frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\alpha-\beta-\gamma_n\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\alpha-\beta+\gamma_n\right)},$$

то собственные значения λ_n определяются из уравнения $\gamma_n = (\lambda_n + 1/4)^{1/2}$. Соответствующими ортонормированными собственными функциями являются $\varphi_n(t) = c_n\varphi(t,\lambda_n)$, где c_n — нормирующие множители, которые мы должны определить. Рассуждая, как в случае 1, мы видим, что $|c_n|^2 = k_n/\varepsilon_n$, где k_n — вычет функции $\{(1-t^2)\,W(\varphi,\varrho)\}^{-1}$ в точке $\lambda=\lambda_n$, а ε_n — коэффициент в уравнении $\varphi(t,\lambda_n) = \varepsilon_n\varrho(t,\lambda_n)$. Если

$$(1-t^2)\,W(\varphi(t,\lambda),\ \varrho(t,\lambda)) = W(\lambda),$$

то $k_n = (W'(\lambda_n))^{-1}$; так как

$$W(\lambda) = 2^{2\alpha+1}\Gamma(2\alpha+1)\left\{\frac{2^{\beta}\Gamma(1+2\beta)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\alpha+\beta-\gamma\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\alpha+\beta+\gamma\right)} - \frac{k\cdot 2^{-\beta}\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\alpha-\beta-\gamma\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\alpha-\beta+\gamma\right)}\right\},$$

то мы имеем

$$W'(\lambda_n) = 2^{2\alpha}\Gamma(2\alpha+1)\,\gamma_n^{-1}\times$$
$$\times\left[\frac{2^{\beta}\Gamma(1+2\beta)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\alpha+\beta-\gamma_n\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\alpha+\beta+\gamma_n\right)}\times\right.$$
$$\times\left\{\xi\left(\frac{1}{2}+\alpha+\beta-\gamma_n\right)-\xi\left(\frac{1}{2}+\alpha+\beta+\gamma_n\right)\right\}-$$
$$-k\cdot 2^{-\beta}\frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\alpha-\beta-\gamma_n\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\alpha-\beta+\gamma_n\right)}\times$$
$$\left.\times\left\{\xi\left(\frac{1}{2}+\alpha-\beta-\gamma_n\right)-\xi\left(\frac{1}{2}+\alpha-\beta+\gamma_n\right)\right\}\right],$$

где $\xi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ — логарифмическая производная Г-функции. Таким образом, постоянная $k_n = \{W'(\lambda_n)\}^{-1}$ определена. Чтобы определить ε_n, заметим, что в обозначениях, использованных в случае 1, мы имеем

$$\varphi(t, \lambda_n) = \varepsilon_n \psi(t, \lambda_n) - \varepsilon_n k \tau(t, \lambda_n),$$

$$\psi(t, \lambda_n) = (1+t)^\alpha (1-t)^\beta F_\beta\left(\frac{1-t}{2}\right),$$

$$\tau(t, \lambda_n) = (1+t)^\alpha (1-t)^\beta F_\beta^+\left(\frac{1-t}{2}\right).$$

Поэтому ε_n можно определить, зная коэффициент ε в уравнении $F_\alpha(t) = \varepsilon F_\beta(1-t) + \varepsilon' F_\beta^+(1-t)$. Чтобы определить этот коэффициент, предположим временно, что $\beta < 0$; тогда $F_\beta^+(0) = 0$ и, следовательно, в силу (4)

$$\varepsilon = F_\alpha(1) = F\left(\alpha+\beta+\gamma+\frac{1}{2},\ \alpha+\beta-\gamma+\frac{1}{2};\ 1+2\alpha;\ 1\right) =$$

$$= \frac{\Gamma(1+2\alpha)\,\Gamma(-2\beta)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\alpha-\beta-\gamma\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\alpha-\beta+\gamma\right)};$$

по принципу аналитического продолжения это справедливо и для $\beta > 0$. Поэтому

$$\varepsilon_n = \frac{\Gamma(1+2\alpha)\,\Gamma(-2\beta)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\alpha-\beta-\gamma_n\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\alpha-\beta+\gamma_n\right)}.$$

Таким образом, мы выразили ортонормированные собственные функции φ_n в замкнутой форме в терминах гипергеометрических функций, корней γ_n уравнения, определяющего собственные значения, гамма-функции и ее производных.

Наконец, проведем краткий анализ случая 3. Здесь мы имеем четыре граничных значения, два в точке $+1$ и два в точке -1. Нетрудно видеть, что если в случае $0 < \alpha < 1/2$ мы возьмем граничные значения

$$B_+(f) = \lim_{\varepsilon \to 0} \{\varepsilon^{\alpha+1} f'(\varepsilon-1) - \alpha\varepsilon^\alpha f(\varepsilon-1)\},$$

$$B_-(f) = \lim_{\varepsilon \to 0} \{\varepsilon^{-\alpha+1} f'(\varepsilon-1) + \alpha\varepsilon^{-\alpha} f(\varepsilon-1)\}$$

в дополнение к граничным значениям A_+ и A_-, введенным в случае 2, то мы получим полную систему граничных значений. Рассуждения, аналогичные использованным в случае 2, т. е. применение теоремы XII.4.24, показывают, что

$$\{f, g\} = (i\beta)^{-1}\{A_+(f)\overline{A_-(g)} - A_-(f)\overline{A_+(g)}\} -$$

$$-(i\alpha)^{-1}\{B_+(f)\overline{B_-(g)} - B_-(f)\overline{B_+(g)}\}.$$

В этом случае семейство всех самосопряженных сужений оператора $T_1(L)$ зависит от произвольной унитарной (2×2)-матрицы и, следовательно, от четырех действительных параметров. Поэтому мы лишь исследуем несколько простых частных случаев.

Прежде всего, если мы наложим условие $B_+(f)=0$ и второе условие в точке $t=+1$, то единственным решением уравнения $Lf=\lambda f$, удовлетворяющим заданному граничному условию в точке -1, так же как и в случае 2, является

$$\varphi(t, \lambda)=$$
$$=(t+1)^{\alpha}(1-t)^{\beta} F\left(\frac{1}{2}+\alpha+\beta+\gamma,\ \frac{1}{2}+\alpha+\beta-\gamma;\ 1+2\alpha; \frac{1-t}{2}\right),$$

где $\gamma=(\lambda+1/4)^{1/2}$. Поэтому вычисления для граничного условия $B_+(f)=0$ почти совпадают с вычислениями в случае 2. В частности, граничные условия $B_+(f)=0$, $A_+(f)=0$ дают собственные значения $\lambda_n=(n+\alpha+\beta+1)(n+\alpha+\beta)$ и нормированные собственные функции $c_n\varphi(t, \lambda_n)$, где $|c_n|^2$ определяется той же формулой, что и в случае 2.

Все предыдущие системы граничных условий являются распадающимися. Представляет интерес самосопряженная система смешанных граничных условий $A_+(f)=B_-(f)$, $A_-(f)=-B_+(f)$, которую мы изучим для случая $\alpha=\beta$. Обозначим соответствующее сужение оператора $T_1(L)$ через T. Если $f(t)=g(-t)$, то мы имеем $A_+(f)=-B_-(g)$ и $A_-(f)=-B_+(g)$. Поэтому если $f\in\mathfrak{D}(T)$, то функция $g(t)=f(-t)$ также принадлежит $\mathfrak{D}(T)$. Так как $Lf=Lg$, то четная и нечетная части собственной функции оператора T являются его собственными функциями. Кроме граничных условий $A_+(f)=B_-(f)$, $A_-(f)=-B_+(f)$, четная собственная функция оператора T удовлетворяет условиям $A_+(f)=-B_-(f)$ и $A_-(f)=-B_+(f)$; поэтому $A_+(f)=0=B_-(f)$. Обратно, если $A_+(f)=0=B_-(f)$ и f — четная функция, то оба граничных условия, определяющих $\mathfrak{D}(T)$, удовлетворяются. Таким образом, четными собственными функциями оператора T являются четные функции, удовлетворяющие самосопряженной системе $A_+(f)=0=B_-(f)$ граничных условий и уравнению $Lf=\lambda f$ для некоторого λ.

Из предыдущих рассуждений ясно, что такой класс функций в точности составляют четные функции из системы

$$\varphi_n(t)=c_n(1+t)^{\alpha}(1-t)^{\alpha} F\left(-n,\ n+4\alpha+1;\ 1+2\alpha; \frac{1+t}{2}\right),$$

$$|c_n|^2=\frac{2^{-4\alpha-1}\,\Gamma(1+4\alpha+n)(2n+4\alpha+1)}{\{\Gamma(1+2\alpha)\}^2\, n!}.$$

Далее, если, $A_+(f)=0=B_-(f)$ и $g(t)=f(-t)$, то $A_+(g)=0=B_-(g)$; таким образом, если f — собственная функция самосопряженного сужения S оператора $T_1(L)$, определенного этой последней парой граничных условий, то g — также собственная функция оператора S. Как мы видели, каждое собственное значение оператора S простое, поэтому каждая собственная функция этого оператора, т. е. каждая функция φ_n, определенная предыдущей формулой, либо четна, либо нечетна. Так как $F(-n, n+4\alpha+1, 1+2\alpha, (1+t)/2)$ есть полином степени n, он обязательно четный при четном n и нечетный при нечетном n. Таким образом, φ_n является собственной функцией оператора T для четных n, но для нечетных n это не так. Подобные рассуждения для нечетных собственных функций f оператора T показывают, что они удовлетворяют соотношению $A_-(f)=0=B_+(f)$ и, следовательно, в точности совпадают с функциями

$$\tilde{\varphi}_n(t)=\tilde{c}_n(1+t)^{-\alpha}(1-t)^{-\alpha}F\left(-n, n-4\alpha+1;\ 1-2\alpha;\ \frac{1+t}{2}\right),$$

$$|\tilde{c}_n|^2=\frac{2^{4\alpha-1}\Gamma(1-4\alpha+n)(2n-4\alpha+1)}{\{\Gamma(1-2\alpha)\}^2\, n!}$$

для нечетных $n\geqslant 1$. Таким образом, собственные значения оператора T разбиваются на две подпоследовательности

$$\lambda_n=(n+4\alpha+1)(n+4\alpha),\quad \text{если } n \text{ четно, } n\geqslant 0,$$

$$\tilde{\lambda}_n=(n-4\alpha+1)(n-4\alpha),\quad \text{если } n \text{ нечетно, } n\geqslant 0,$$

которым соответствуют ортонормированные функции φ_n (если n четно) и $\tilde{\varphi}_n$ (если n нечетно).

Теперь мы перейдем к рассмотрению оператора

$$L_1=-L=-\left(\frac{d}{dt}\right)(t^2-1)\left(\frac{d}{dt}\right)-\frac{2\alpha^2}{1+t}-\frac{2\beta^2}{1-t}$$

на интервале $(1, \infty)$. Здесь мы предполагаем, что β — положительное число, а α — действительное или чисто мнимое. Как и выше, мы видим, что показатели оператора $L_1-\lambda$ в точках $-1, +1, \infty$ равны соответственно $\pm\alpha$, $\pm\beta$, $1/2\pm\gamma$, где $\lambda=1/4-\gamma^2$. Полагая $\gamma_0=1/2+i$, так что $\lambda_0=1+i$, мы видим, что уравнение $(L_1-\lambda_0)f=0$ имеет одно решение порядка t^{-1-i} при $t\to\infty$ и другое, которое ведет себя, как t^i, при $t\to\infty$. Для $\lambda_0=1-i$ решения будут точно такими же. Таким образом, согласно теореме XII.4.19, уравнение $(L_1-\lambda)f=0$ имеет в точности одно решение из $L_2(2, \infty)$ для каждого невещественного λ. Могут представиться два случая.

Случай 1: $\beta\geqslant 1/2$. Индексы дефекта оператора L_1 равны нулю, поэтому не надо налагать никаких граничных условий; L_1 приводит к единственному самосопряженному оператору в $L_2(1, \infty)$, который мы будем по-прежнему обозначать символом L_1.

Случай 2: $0 \leqslant \beta < 1/2$. Индексы дефекта оператора L_1 равны 1, и, чтобы получить самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве, мы должны наложить на L_1 одно граничное условие в точке $+1$.

Рассмотрим случай 1. Если γ чисто мнимое, $\gamma = i\varrho$, т. е. если $\lambda \geqslant 1/4$, то уравнение $(L_1 - \lambda) f = 0$ имеет два линейно независимых решения, которые ведут себя в ∞ как $t^{-1/2 \pm i\rho}$; таким образом, ни одно решение этого уравнения не принадлежит $L_2(1, \infty)$. Следовательно, точечный спектр оператора L_1 полностью лежит в области $\lambda < 1/4$. В этой области уравнение $(L_1 - \lambda) f = 0$ имеет одно решение порядка $t^{-1/2-\gamma}$ и одно решение порядка $t^{-1/2+\gamma}$; таким образом, имеется одномерное подпространство решений с интегрируемым квадратом в бесконечности. Рассуждения, примененные выше к оператору L на интервале $(-1, 1)$, показывают, что λ является собственным значением тогда и только тогда, когда уравнение $(L_1 - \lambda) f = 0$ имеет решение σ вида

$$(t-1)^{\beta} (1+t)^{-1/2-\gamma-\beta} P((1+t)/2),$$

где γ — положительный квадратный корень из $1/4 - \lambda$, а P — некоторый полином. Из описания преобразования независимой и зависимой переменных, изложенного в начале этого параграфа, следует что σ отличается постоянным множителем от функции

$$(t-1)^{\beta} (1+t)^{-1/2-\gamma-\beta} F\left(\beta-\alpha+\gamma+\frac{1}{2},\ \beta+\alpha+\gamma+\frac{1}{2};\ 2\gamma+1; \frac{1+t}{2}\right).$$

Поэтому λ является собственным значением тогда и только тогда, когда $\beta - \alpha + \gamma + 1/2 = -n$, где n — неотрицательное целое число, а γ — положительное действительное число. (Заметим, что $\beta + \alpha + \gamma + 1/2$ не может быть неположительным целым числом, поскольку $\alpha, \beta, \gamma > 0$.) Если α не является действительным, то это невозможно; если α действительное, то мы имеем ортонормированные собственные функции

$$c_n (t-1)^{\beta} (1+t)^{n-\alpha} F\left(-n,\ -n+2\alpha;\ 2\alpha-2\beta-2n;\ \frac{2}{1+t}\right),$$

где $0 \leqslant n < \alpha - \beta - 1/2$, а c_n — нормирующие множители, которые мы должны определить. Таким образом, мы имеем только конечное число собственных значений $(\alpha - \beta - n)(n + 1 + \beta - \alpha)$, $0 \leqslant n < \alpha - \beta - 1/2$. Нормирующие множители c_n можно определить непосредственно общим методом, использованным при изучении оператора L на интервале $(-1, +1)$; однако в этом случае их можно найти также из результатов, полученных при изучении оператора L, при помощи следующей элементарной замены. Число $|c_n|^2$ равно обратной величине интеграла

$$I = \int_1^\infty (t-1)^{2\beta}(1+t)^{2n-2\alpha} \times \\ \times \left\{F\left(-n, -n+2\alpha;\ 2\alpha-2\beta-2n;\ \frac{2}{1+t}\right)\right\}^2 dt.$$

После замены

$$\frac{2}{1+t} = \frac{1+s}{2}, \quad t-1 = \frac{2(1-s)}{1+s}, \quad \frac{-4\,ds}{(1+s)^2} = dt$$

получаем

$$I = 2^{2\beta+4n-4\alpha+2} \int_{-1}^{1} (1-s)^{2\beta}(1+s)^{2\alpha-2\beta-2n-2} \times \\ \times \left\{F\left(-n, -n+2\alpha;\ 2\alpha-2\beta-2n;\ \frac{1+s}{2}\right)\right\}^2 ds.$$

Выше мы установили соотношение

$$\int_{-1}^{1} (1+s)^{2a}(1-s)^{2b} \times \\ \times \left\{F\left(-n, n+2a+2b+1;\ 1+2a;\ \frac{s+1}{2}\right)\right\}^2 ds = \\ = \frac{2^{2a+2b+1}\{\Gamma(1+2a)\}^2\,\Gamma(1+2b+n)\,n!}{\Gamma(1+2a+2b+n)\,\Gamma(1+2a+n)\,(2n+2a+2b+1)}.$$

Полагая $2\alpha-2\beta-2n = 2a+1$ и $2n+2a+2b+1 = 2\alpha$, мы получаем

$$I = \frac{2^{2\beta+2n-2\alpha+1}\{\Gamma(2\alpha-2\beta-2n)\}^2\,\Gamma(1+2\beta+n)\,n!}{\alpha\Gamma(2\alpha-n)\,\Gamma(2\alpha-2\beta-n)}; \qquad |c_n|^2 = I^{-1}.$$

Таким образом, дискретный спектр оператора L изучен полностью, и мы переходим к анализу его непрерывного спектра.

Сначала определим местоположение непрерывного спектра. Согласно следствию 7.4, мы можем рассматривать концевые точки $t=1$ и $t=\infty$ отдельно. Так как наш оператор имеет два граничных значения в точке $t=1$ при $0 \leqslant \beta < 1/2$, полуограничен снизу на любом интервале $(1, c]$, $c < \infty$, и возрастает с ростом β, из теоремы сравнения 7.34 и из теорем 4.1 и 4.2 следует, что концевая точка $i=1$ дает нулевой вклад в существенный спектр при любом значении β. Так как в рассматриваемом случае $\int\limits_2^\infty [p(t)]^{-1/2}\,dt=\infty$ и

$$\lim_{t\to\infty} q(t)+\frac{1}{4}\left(p''(t)-\frac{1}{4}[p(t)]^{-1}[p'(t)]^2\right)=$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{4}\left(2-\frac{1}{4}(t^2-1)^{-1}(2t)^2\right)=\frac{1}{4},$$

то из теоремы 7.66 следует, что существенным спектром оператора L_1 является часть $\lambda\geqslant 1/4$ действительной оси. Таким образом, спектр оператора L_1 состоит из собственных значений, перечисленных выше, которые лежат в области $\lambda<1/4$, и из непрерывного спектра, покрывающего луч $\lambda\geqslant 1/4$. Теперь мы хотим найти явные формулы для той части спектрального разложения оператора L_1, которая соответствует непрерывному спектру.

Условимся при $\operatorname{Re}\lambda>1/4$ выбирать то значение величины $\gamma=\gamma(\lambda)=(1/4-\lambda)^{1/2}$, для которого $\operatorname{Im}\gamma>0$. Таким образом, $\gamma(\lambda)$ — аналитическая функция от λ в правой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda>1/4$. Мы имеем $\operatorname{Re}\gamma>0$, если $\operatorname{Im}\lambda>0$, и $\operatorname{Re}\gamma<0$, если $\operatorname{Im}\lambda<0$. Пусть $S_\pm$ — единственное решение дифференциального уравнения $L_1\sigma=\lambda\sigma$, имеющее вид $t^{-1/2\pm\gamma}(1+c/t+\ldots)$ в окрестности точки $t=\infty$, и пусть S_β — единственное решение того же дифференциального уравнения, имеющее в окрестности точки $t=1$ вид $2^\alpha(t-1)^\beta(1+c'(t-1)+\ldots)$. После замены зависимой и независимой переменных, описанной в начале этого параграфа, мы получаем

$$S_\beta=(t+1)^\alpha(t-1)^\beta F\left(\alpha+\beta+\gamma+\frac{1}{2},\ \alpha+\beta-\gamma+\frac{1}{2};\ 1+2\beta;\ \frac{1-t}{2}\right),$$

$$S_+=(t-1)^\beta(1+t)^{-1/2-\gamma-\beta}\times$$
$$\times F\left(\beta-\alpha+\gamma+\frac{1}{2},\ \beta+\alpha+\gamma+\frac{1}{2};\ 2\gamma+1;\ \frac{2}{1+t}\right),$$

$$S_-=(t-1)^\beta(1+t)^{-1/2+\gamma-\beta}\times$$
$$\times F\left(\beta-\alpha-\gamma+\frac{1}{2},\ \beta+\alpha-\gamma+\frac{1}{2};\ 1-2\gamma;\ \frac{2}{1+t}\right).$$

Следовательно, все решения S_β, S_+, S_- аналитически зависят от λ, для которых $\operatorname{Re}\lambda>1/4$. Поскольку любое из этих трех решений линейно зависит от двух других, мы имеем соотношение $S_-=k_+(\lambda)S_++k_\beta(\lambda)S_\beta$, где коэффициенты k_+ и k_β — аналитические функции от λ для $\operatorname{Re}\lambda>1/4$. Используем решения S_β и S_+ в качестве стандартного базиса для решений уравнения $L_1\sigma=\lambda\sigma$.

Решение S_+ интегрируемо в квадрате в окрестности точки $t=\infty$ при $\operatorname{Im}\lambda>0$, а S_- интегрируемо в квадрате в окрестности точки $t=1$ при $\operatorname{Im}\lambda>0$. Поэтому, согласно теореме 3.16, ядро Грина K_λ определяется формулой

$$K_\lambda(t,\ s)=\begin{cases}\dfrac{S_\beta(t,\ \lambda)\overline{S_+(s,\ \bar{\lambda})}}{(t^2-1)\,W(S_\beta,\ \bar{S}_+)}, & t<s,\ \operatorname{Im}\lambda>0,\ \operatorname{Re}\lambda>1/4,\\[2ex] \dfrac{S_\beta(t,\ \lambda)\overline{S_-(s,\ \bar{\lambda})}}{(t^2-1)\,W(S_\beta,\ \bar{S}_-)}, & t<s,\ \operatorname{Im}\lambda<0,\ \operatorname{Re}\lambda>1/4.\end{cases}$$

В терминах базиса S_β, S_+ мы имеем

$$K_\lambda(t,\ s)=\frac{\overline{k_+(\bar{\lambda})}\,S_\beta(t,\ \lambda)\,\overline{S_+(s,\ \bar{\lambda})}}{(t^2-1)\ \overline{k_+(\bar{\lambda})}\,W(S_\beta,\ \overline{S}_+)}+\frac{\overline{k_\beta(\bar{\lambda})}\,S_\beta(t,\ \lambda)\,\overline{S_\beta(s,\ \bar{\lambda})}}{(t^2-1)\,W(S_\beta,\ \overline{S}_-)},$$

$$t<s,\quad \operatorname{Im}\lambda<0,\quad \operatorname{Re}\lambda>1/4.$$

Таким образом, в обозначениях теоремы Титчмарша—Кодаиры 5.18

$$\gamma^-_{\beta,+}(\lambda)=\frac{1}{(t^2-1)\,W(S_\beta,\ \overline{S}_+)},\qquad \gamma^-_{\beta,\beta}(\lambda)=0\qquad \operatorname{Im}\lambda>0,$$

$$\gamma^-_{+,+}(\lambda)=0,\ \ \gamma^-_{+,\beta}(\lambda)=0,\qquad \operatorname{Re}\lambda>1/4;$$

$$\gamma^-_{\beta,+}(\lambda)=\frac{1}{(t^2-1)\,W(S_\beta,\ \overline{S}_+)},\ \ \gamma^-_{\beta,\beta}(\lambda)=\frac{\overline{k_\beta(\bar{\lambda})}}{(t^2-1)\,W(S_\beta,\ \overline{S}_-)},\quad \operatorname{Im}\lambda<0,$$

$$\gamma^-_{+,+}(\lambda)=0,\ \ \gamma^-_{+,\beta}(\lambda)=0,\qquad \operatorname{Re}\lambda>1/4.$$

Поэтому в силу теоремы 5.27 и того, что все наши величины являются аналитическими функциями даже на действительной оси, мы имеем $\varrho_{++}=0$, $\varrho_{+,\beta}=0$ (так что и $\varrho_{\beta,+}=\overline{\varrho}_{+,\beta}=0$) и

$$\varrho_{\beta,\beta}(e)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_e\frac{\overline{k_\beta(\bar{\lambda})}}{(t^2-1)\,W(S_\beta,\ \overline{S}_-)}\,d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_e\frac{-[\overline{k_\beta(\bar{\lambda})}]^2}{(t^2-1)\ \overline{k_+(\bar{\lambda})}\,W(\overline{S}_+,\ \overline{S}_-)}\,d\lambda.$$

Теперь мы знаем, что $(t^2-1)\,W(S_+,\ S_-)$ — постоянная величина, и так как в окрестности точки $t=\infty$ мы имеем $(t^2-1)\,W(S_+,S_-)\sim\sim-2\gamma$, то $(t^2-1)\,W(\overline{S}_+,\ \overline{S}_-)=-2\bar{\gamma}$. Чтобы вычислить постоянную k_β, мы рассуждаем следующим образом. Выполняя преобразования переменных, указанные в начале параграфа, мы видим, что функция

$$(t-1)^{\beta}(t+1)^{-\beta-\gamma-1/2}\times$$
$$\times F\left(\frac{1}{2}+\gamma+\beta+\alpha,\ \frac{1}{2}+\gamma+\beta-\alpha;\ 1+2\beta;\ \frac{t-1}{t+1}\right)=S(t)$$

является решением уравнения $L_1\sigma=\lambda\sigma$. Более того, она регулярна и имеет вид $2^{-\beta-\gamma-1/2}(t-1)^{\beta}(1+c(t-1)+\ldots)$ в окрестности точки $t=1$. Поэтому $2^{\alpha+\beta+\gamma+1/2}S=S_\beta$. Мы имеем $S=l_+S_++l_-S_-$, где в случае $\operatorname{Re}\gamma<0$ можно положить $t=\infty$ и получить

$$l_+=F(1/2+\gamma+\beta+\alpha,\ 1/2+\gamma+\beta-\alpha;\ 1+2\beta;\ 1);$$

согласно принципу аналитического продолжения, это верно и в случае $\operatorname{Re}\gamma>0$. При инволюции $\gamma\to-\gamma$ функции S_+ и S_- переходят друг в друга, а S_β отображается в себя. Так как $2^{\alpha+\beta+\gamma+1/2}S=S_\beta$, то при этом S умножается на $2^{2\gamma}$. Поэтому должно быть

$$l_-=2^{-2\gamma}F\left(\frac{1}{2}-\gamma+\beta+\alpha,\ \frac{1}{2}-\gamma+\beta-\alpha;\ 1+2\beta;\ 1\right).$$

Поскольку $k_\beta S_\beta+k_+S_+=S_-$, мы имеем $k_\beta=(2^{\alpha+\beta+\gamma+1/2}l_-)^{-1}$, $k_+=-l_+l_-$; таким образом, $-k_\beta^2/k_+=(2^{2\alpha+2\beta+2\gamma+1}l_-l_+)^{-1}$. Так как для действительных $\lambda>1/4$ число γ чисто мнимое и $\operatorname{Im}\gamma>0$, то

$$2^{2\alpha+2\beta+2\gamma+1}l_-l_+=$$
$$=2^{2\alpha+2\beta+1}\left|F\left(\frac{1}{2}+\gamma+\beta+\alpha,\ \frac{1}{2}+\gamma+\beta-\alpha;\ 1+2\beta;\ 1\right)\right|^2,$$

$$\varrho_{\beta,\beta}(e)=\frac{2^{2\alpha+2\beta+1}}{\{2\pi\Gamma(1+2\beta)\}^2}\times$$
$$\times\int_e\frac{\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+\beta-\gamma+\alpha\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\beta-\gamma-\alpha\right)\right|^2\operatorname{sh}2\pi\sqrt{\lambda-1/4}}{\lambda-1/4}\,d\lambda,$$

где $\gamma=i\sqrt{\lambda-1/4}$, для подмножеств непрерывного спектра $\lambda>1/4$. Это завершает анализ оператора L_1 в случае 1. Интересно объединить полученные результаты и дать их общую формулировку.

Для простоты мы рассмотрим только частные случаи случая 1, когда L_1 имеет чисто непрерывный спектр и не имеет точечного спектра. Читатель сможет без труда сформулировать общий результат, относящийся к случаю 1.

Теорема. *Пусть L_1 — формальный дифференциальный оператор*

$$L_1=-\frac{d}{dt}(t^2-1)\frac{d}{dt}-\frac{2\alpha^2}{1+t}-\frac{2\beta^2}{1-t}$$

на интервале $(1, \infty)$. *Предположим, что* $\beta \geqslant 1/2$ *и* α — *либо чисто мнимое число, либо* $\alpha < \beta + 3/2$. *Тогда* L_1 *не имеет граничных значений и поэтому определяет единственный самосопряженный оператор, который мы по-прежнему обозначаем символом* L_1. *Если* $\psi(t, \lambda)$ *обозначает функцию*

$$\psi(t, \lambda) = 2^{\alpha+\beta-1/2}\pi^{-1}[\Gamma(1+2\beta)]^{-1} \times$$
$$\times \left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+\beta-\gamma+\alpha\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\beta-\gamma-\alpha\right)\right|^2 \left(\frac{\operatorname{sh} 2\pi(\lambda-1/4)^{1/2}}{\lambda-1/4}\right)^{1/2} \times$$
$$\times (t+1)^{\alpha}(t-1)^{\beta} F\left(\alpha+\beta+\gamma+\frac{1}{2},\ \alpha+\beta-\gamma+\frac{1}{2};\ 1+2\beta;\ \frac{1-t}{2}\right),$$

то предел в среднем

$$(Vf)(\lambda) = \underset{k\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \int_0^k \psi(t, \lambda) f(t)\, dt$$

существует для каждой функции $f \in L_2(0, \infty)$ *и определяет унитарное отображение пространства* $L_2(1, \infty)$ *на* $L_2(1/4, \infty)$. *Обратный к* V *оператор определяется формулой*

$$(V^{-1}f)(t) = \underset{\mu\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \int_{1/4}^{\mu} \psi(t, \lambda) f(\lambda)\, d\lambda.$$

Если $F(L_1)$ — *любая борелевская функция самосопряженного оператора* L_1, *то* $VF(L_1)V^{-1}$ — *операция умножения на* $F(\cdot)$ *в пространстве* $L_2(1/4, \infty)$.

Вместо того чтобы продолжать изучение формального дифференциального оператора L в случае 2, перейдем к изучению другого уравнения. В интеграле Эйлера (4) положим $z = \zeta/\beta$ и $\beta \to \infty$; в пределе получится целая функция

$$\Phi(\alpha, \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1} e^{iz}\, dt, \tag{5}$$

$$\operatorname{Re}\alpha > 0, \quad \operatorname{Re}(\gamma-\alpha) > 0,$$

так называемая *вырожденная гипергеометрическая функция*. Этот же процесс в применении к ряду (2) дает

$$\Phi(\alpha, \gamma; z) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} z + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!\gamma(\gamma+1)} z^2 + \ldots; \tag{6}$$

таким образом, $\Phi(\alpha, \gamma; z)$ — аналитическая функция от всех трех своих аргументов, если только γ не является отрицательным целым числом. Тот же процесс, примененный к гипергеометрическому уравнению (1), показывает, что $\Phi(\alpha, \gamma; z)$ удовлетворяет *вырожденному гипергеометрическому уравнению*

$$z\left(\frac{d^2}{dz^2}\right)\Phi + (\gamma - z)\frac{d}{dz}\Phi - \alpha\Phi = 0. \tag{7}$$

Это уравнение имеет особенности в нуле и бесконечности. Особенность в нуле — регулярная с показателями 0 и $1-\gamma$. Особенность в бесконечности — иррегулярная порядка 2. Поэтому для изучения вырожденного гипергеометрического уравнения нам понадобятся некоторые сведения из теории уравнений с иррегулярными особыми точками.

Удобнее всего взять уравнение $Lf = (d/dz)^2 f + p(z)(d/dz) f + q(z) f = 0$, имеющее иррегулярную особенность порядка $k > 1$ в бесконечности; полученные результаты можно затем с помощью замены $z = z_0 + 1/w$ перенести на случай иррегулярных особенностей в конечной точке z_0. Пусть $p(z) = z^{k-2}P(z)$, $q(z) = z^{2(k-2)}Q(z)$, так что функции $P(z)$, $Q(z)$ регулярны в бесконечности. Тогда уравнение $[(k-1)\alpha]^2 + P(\infty)(k-1)\alpha + Q(\infty) = 0$ называется *характеристическим уравнением* уравнения $D^2f + p(z)Df + q(z)f = 0$ в бесконечности; корни $\zeta_1^{(1)}$ и $\zeta_2^{(1)}$ характеристического уравнения называются *первыми характеристиками*. В дальнейшем мы всюду предполагаем, что $\zeta_1^{(1)} \neq \zeta_2^{(1)}$. Линии проходящие через начало координат, вдоль которых величина $(\zeta_1^{(1)} - \zeta_2^{(1)}) z^{k-1}$ остается чисто мнимой, называются *линиями Стокса* дифференциального уравнения. В любом замкнутом угле, содержащем не более чем одну из линий Стокса, дифференциальное уравнение имеет решение, поведение которого в бесконечности выражается асимптотическим рядом

$$\{\exp(\zeta_1^{(1)}z^{k-1} + \zeta_1^{(2)}z^{k-2} + \ldots + \zeta_1^{(k-1)}z)\} z^{-e_1}\left\{1 + \frac{\alpha}{z} + \frac{\beta}{z^2} + \ldots\right\},$$

и второе решение, поведение которого в бесконечности выражается асимптотическим рядом

$$\{\exp(\zeta_2^{(1)}z^{k-1} + \zeta_2^{(2)}z^{k-2} + \ldots + \zeta_2^{(k-1)}z)\} z^{-e_2}\left\{1 + \frac{\alpha'}{z} + \frac{\beta'}{z^2} + \ldots\right\}.$$

Эти асимптотические соотношения справедливы, когда $|z| \to \infty$ равномерно в любом замкнутом угле, содержащем не более чем одну из линий Стокса. Следовательно, их можно дифференцировать произвольное число раз. Величины $\zeta_1^{(2)}, \zeta_1^{(3)}, \ldots, \zeta_1^{(k-1)}, e_1$ называются соответственно *второй*, *третьей* и т. д. *характеристиками*, относящимися к первой характеристике $\zeta_1^{(1)}$, и *показа-*

телем, относящимся к первой характеристике $\zeta_1^{(1)}$. Аналогично определяются величины $\zeta_2^{(2)}, \zeta_2^{(3)}, \ldots, \zeta_2^{(k-1)}, e_2$.

Упорядоченные системы $[\zeta_i^{(1)}, \ldots, \zeta_i^{(k-1)}, e_i]$, $i=1, 2$, называются *характеристическими системами* для иррегулярной особенности в бесконечности рассматриваемого дифференциального уравнения. Характеристические системы и коэффициенты соответствующих асимптотических рядов однозначно определяются дифференциальным уравнением; они могут быть найдены при помощи простой подстановки асимптотических рядов в уравнение и решения полученной последовательности алгебраических уравнений для коэффициентов. Первое из этих уравнений — характеристическое уравнение дифференциального уравнения — квадратное, все следующие уравнения линейные. Если мы найдем дифференциальное уравнение $L'f'=0$, которому удовлетворяет функция

$$f' = \{\exp(\zeta^{(1)}z^{k-1} + \ldots + \zeta^{(k-1)}z)\} z^{-e} f,$$

где f — решение первоначального уравнения $Lf=0$, то мы увидим, что $L'f'=0$ имеет рациональные коэффициенты и иррегулярную особенность в бесконечности с характеристическими системами $[\zeta_i^{(1)}+\zeta^{(1)}, \ldots, \zeta_i^{(k-1)}+\zeta^{(k-1)}, e_i+e]$, $i=1, 2$. Если $z(w)$ — рациональная функция от w вида

$$aw^s\left(1+\frac{c}{w}+\frac{d}{w^2}+\ldots\right), \qquad s \geqslant 1,$$

в окрестности бесконечности, то дифференциальное уравнение $L''f''=0$, которому удовлетворяет функция $f''(w)=f(z(w))$, также имеет рациональные коэффициенты и иррегулярную особенность порядка ks в бесконечности; характеристики, соответствующие этой особенности, легко определить при помощи замены $z=z(w)$ в асимптотическом ряду для f. В частности, если $z=aw$, то $ks=k$, и характеристиками для L'' являются

$$[a^{k-1}\zeta_i^{(1)}, \ldots, a\zeta_i^{(k-1)}, e_i], \qquad i=1, 2.$$

Следует заметить, что в любом замкнутом угле, не содержащем ни одной линии Стокса нашего дифференциального уравнения, величины $\operatorname{Re}(\zeta_1^{(1)}z^{k-1})$ и $\operatorname{Re}(\zeta_2^{(1)}z^{k-1})$ удовлетворяют некоторому фиксированному неравенству, скажем $\operatorname{Re}(\zeta_1^{(1)}z^{k-1}) < \operatorname{Re}(\zeta_2^{(1)}z^{k-1})$. Тогда в этом угле любое решение уравнения $Lf=0$, асимптотическое разложение которого начинается с множителя $\exp(\zeta_1^{(1)}z^{k-1})$, экспоненциально мало (при $|z| \to \infty$ в этом угле) относительно любого решения, асимптотическое разложение которого начинается с множителя $\exp(\zeta_2^{(1)}z^{k-1})$. Таким образом, решение, имеющее асимптотическое разложение первого типа («малое решение»), однозначно определяется своим асимптотическим разложением, тогда как решение, имеющее асимптотическое разложение второго типа («большое решение»), не определяется однозначно, поскольку мы можем прибавлять к нему любое малое решение, и при этом его асимптотическое разложение не изменится.

Вырожденному гипергеометрическому уравнению соответствует характеристическое уравнение $\alpha^2-\alpha=0$, так что $\zeta_1^{(1)}=0$, $\zeta_2^{(1)}=1$. Поэтому линиями Стокса для этого уравнения являются положительная и отрицательная части мнимой оси. Разыскивая решения вырожденного гипергеометрического уравнения в виде $z^{-e_1}(1+ +c/z+\ldots)$ и $e^z z^{-e_2}(1+c'/z+\ldots)$, получаем, что $e_1=\alpha$, $e_2=\gamma-\alpha$. Пусть задано произвольное дифференциальное уравнение $Lf=0$ с одной регулярной и одной иррегулярной особенностями; пусть характеристические корни этого уравнения в его иррегулярной особенности различны. Мы покажем, что задание регулярной особенности и ее показателей и иррегулярной особенности и ее характеристик и показателей однозначно определяют уравнение.

Прежде всего заметим, что, выполнив подходящее дробно-линейное преобразование независимой переменной, мы можем предполагать, не уменьшая общности, что регулярная особенность находится в нуле, а иррегулярная — в бесконечности. Тогда, умножая зависимую переменную на множитель $e^{az}z^b$, мы можем предполагать, что один из показателей в регулярной особенности и одна из первых характеристик в иррегулярной особенности равны нулю. Если наше уравнение имеет вид

$$D^2f+\left(\beta+\frac{\gamma}{t}\right)Df+\left(\delta-\frac{\alpha}{t}+\frac{\varepsilon}{t^2}\right)f=0,$$

то должно быть $\delta=\varepsilon=0$. Сделав замену $z=kw$ независимой переменной, мы можем предполагать, что первые характеристики в бесконечности равны 0 и 1; таким образом, $\beta=-1$ и наше уравнение есть вырожденное гипергеометрическое уравнение $xD^2f+(\gamma-x)Df-\alpha f=0$, характеристики которого равны $(0, \alpha)$, $(1, \gamma-\alpha)$. Это доказывает наше утверждение. Более того, отсюда следует, что сумма четырех показателей уравнения, имеющего одну регулярную и одну иррегулярную особенности и различные первые характеристики в иррегулярной особенности, равна 1. В остальном эти показатели и характеристики произвольны.

Тот факт, что имеется в точности одно линейное дифференциальное уравнение второго порядка с регулярной особенностью в a, имеющей показатели α_1, α_2, и иррегулярной особенностью в b порядка 2, имеющей характеристические системы $[\zeta_1, e_1]$, $[\zeta_2, e_2]$, дает нам право ввести символическое обозначение

$$\Phi\begin{pmatrix} a & b & \\ \alpha_1 & [\zeta_1,\ e_1]; & z \\ \alpha_2 & [\zeta_2,\ e_1] & \end{pmatrix}$$

для некоторой ветви (вообще говоря, многозначной) функции, удовлетворяющей рассматриваемому дифференциальному уравнению. Если мы хотим выделить определенную ветвь этого уравнения, мы можем написать

$$\Phi^{a}_{\alpha_1}\begin{pmatrix} a & b & \\ \alpha_1 & [\zeta_1,\ e_1]; & z \\ \alpha_2 & [\zeta_2,\ e_2] & \end{pmatrix}$$

для обозначения (однозначно определенной) ветви, которая имеет асимптотический вид $(z-a)^{\alpha_1}(1+c_1(z-a)+\ldots)$ в окрестности регулярной особой точки $z=a$ нашего уравнения, и

$$\Phi^{b}_{\zeta_1}\begin{pmatrix} a & b & \\ \alpha_1 & [\zeta_1,\ e_1]; & z \\ \alpha_2 & [\zeta_2,\ e_2] & \end{pmatrix}$$

для обозначения той ветви, которая имеет асимптотический вид

$$\exp\{\zeta_1(z-b)^{-1}\}(z-b)^{e_1}(1+\hat{c}_1(z-b)+\ldots)$$

в некотором заранее заданном угловом секторе окрестности точки $z=b$, содержащем не более одной линии Стокса. Если этот угловой сектор содержит одну линию Стокса, то указанная ветвь определяется однозначно. Если он не содержит ни одной линии Стокса, то действительные части функций $\zeta_1(z-b)^{-1}$ и $\zeta_2(z-b)^{-1}$ удовлетворяют фиксированному неравенству в этом секторе; при этом однозначно определяется только та ветвь, асимптотическое разложение которой содержит одно из этих двух выражений с меньшей действительной частью.

Из определения введенных символов и изложенного выше принципа замены переменной почти очевидно, что

$$\Phi\begin{pmatrix} 0 & \infty & \\ 0 & [0,\ \gamma]; & z \\ 1-\alpha & [1,\alpha-\gamma] & \end{pmatrix} = e^{z}\Phi\begin{pmatrix} 0 & \infty & \\ 0 & [-1,\ \gamma]; & z \\ 1-\alpha & [0,\ \alpha-\gamma] & \end{pmatrix} =$$

$$= e^{z}\Phi\begin{pmatrix} 0 & \infty & \\ 0 & [0,\ \alpha-\gamma]; & -z \\ 1-\alpha & [1,\ \gamma] & \end{pmatrix}$$

и т. д. Такие замены переменных будут часто использоваться (хотя и неявно) в дальнейшем; во всех случаях их без труда можно осуществить, применяя введенные символические обозначения.

Если $\operatorname{Re}\alpha>0$, $\operatorname{Re}(\gamma-\alpha)>0$, так что справедлива интегральная формула (5), то мы можем непосредственно получить асимптотическую оценку функции $\Phi(\alpha, \gamma; z)$ следующим образом. Если $|z|\to\infty$ так, что $(-z)$ остается в замкнутом угле $|\arg(-z)|\leqslant\leqslant\pi/2-\varepsilon$, содержащемся в открытой правой полуплоскости, то интеграл (5) отличается экспоненциально малым членом, а именно интегралом $\int\limits_{1/2}^{1} t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}e^{tz}\,dt$, который не превосходит

$$e^{1/2\operatorname{Re}z}\int\limits_{1/2}^{1}|t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}|\,dt=O\left(\exp\left(\frac{1}{2}|z|\sin\varepsilon\right)\right),$$

от интеграла

$$\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\alpha)}\int\limits_{0}^{1/2} t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}e^{-t(-z)}\,dt=$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\alpha)}\int\limits_{0}^{1/2} t^{\alpha-1}e^{-t(-z)}\,dt+A_1,$$

где

$$A_1=O\left(\int\limits_{0}^{\infty} t^{\alpha}e^{-t|z|\sin\varepsilon}\,dt\right)=O(\{|z|\sin\varepsilon\}^{-\alpha-1})=O(|z|^{-\alpha-1}).$$

Аналогично интеграл в правой части последней формулы отличается экспоненциально малым членом от интеграла

$$\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int\limits_{0}^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-t(-z)}\,dt=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}(-z)^{-\alpha}.$$

Таким образом,

$$\Phi(\alpha, \gamma; z)\sim\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}(-z)^{-\alpha}, \tag{8}$$

когда $|z|\to\infty$ ($|\arg(-z)|\leqslant\pi/2-\varepsilon$) в любом замкнутом угле открытой левой полуплоскости при условии, что $\operatorname{Re}\alpha>0$ и $\operatorname{Re}(\gamma-\alpha)>0$. Мы хотим снять эти ограничения. Для этого заметим, что из формулы (5) непосредственно следует равенство

$$\frac{d}{dz}\Phi(\alpha, \gamma; z)=\frac{\alpha}{\gamma}\Phi(\alpha+1, \gamma+1; z). \tag{9}$$

Поэтому если бы функция $\Phi(\alpha, \gamma; z)$ была экспоненциально малой в левой полуплоскости для любых значений α, γ, то и функция $\Phi(\alpha+n, \gamma+n; z)$ была бы экспоненциально малой в левой полуплоскости, но при $\gamma-\alpha>0$ из нашей асимптотической формулы (8) следует, что это невозможно. Поэтому мы должны иметь

$$\Phi(\alpha, \gamma; z) \sim \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} k(\alpha, \gamma)(-z)^{-\alpha}$$

в левой полуплоскости для $\operatorname{Re}(\gamma-\alpha)>0$; здесь $k(\alpha, \gamma)=1$ для $\operatorname{Re}\alpha>0$, однако для $\alpha\leqslant 0$ мы должны еще определить эту функцию. Используя (9), мы получаем

$$\frac{\alpha}{\gamma}\Phi(\alpha+1, \gamma+1; z) \sim \alpha\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} k(\alpha, \gamma)(-z)^{-\alpha-1}.$$

Поэтому $k(\alpha+1, \gamma+1)=k(\alpha, \gamma)$, так что $k(\alpha, \gamma)=1$, и асимптотическая формула (8) справедлива для $\operatorname{Re}(\alpha-\gamma)>0$. Функция $e^z\Phi(\gamma-\alpha, \gamma; -z)$ регулярна в начале координат и является решением уравнения с показателями 0, $1-\gamma$ в нуле и характеристическими системами $(1, \gamma-\alpha)$, $(0, \alpha)$ в бесконечности, т. е. вырожденного гипергеометрического уравнения. Таким образом,

$$\Phi(\alpha, \gamma; z)=e^z\Phi(\gamma-\alpha, \gamma; -z). \tag{10}$$

Применяя (10) и (8), мы находим, что

$$\Phi(\alpha, \gamma; z) \sim \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} e^z z^{\alpha-\gamma}, \qquad |z|\to\infty, \qquad |\arg z|\leqslant\frac{\pi}{2}-\varepsilon, \tag{11}$$

при условии, что $\operatorname{Re}\alpha>0$. Тогда, используя (9), точно так же, как выше, мы находим, что условие $\operatorname{Re}\alpha>0$ лишнее и формула (11), а поэтому и (8) справедливы для всех α, γ, за исключением только целых отрицательных значений γ.

Рассмотрим теперь формально симметрический дифференциальный оператор

$$B=-\left(\frac{d}{dt}\right)^2+\frac{k^2-1/4}{t^2}$$

и подвергнем его спектральному анализу.

Уравнение $(B-\lambda)f=0$ имеет регулярную особенность в точке $t=0$ с показателями $1/2\pm k$ и иррегулярную особенность в ∞ с характеристиками $[\pm i\sqrt{\lambda}, 0]$. Следовательно, это уравнение имеет два граничных значения в нуле, если $\operatorname{Re}k<1$, и ни одного, если $\operatorname{Re}k\geqslant 1$. Для простоты мы ограничимся лишь последним случаем. Мы будем также предполагать, что $2k$ не является целым числом, так что уравнение $(B-\lambda)f=0$ имеет решения $S_\pm$ вида $t^{1/2\pm k}(1+\ldots)$ при $t=0$. Замена зависимой и независимой переменных дает

$$S_+(t, \lambda) = t^{1/2+k} e^{-i\mu t} \Phi\left(\frac{1}{2}+k,\ 1+2k;\ 2i\mu t\right),$$

$$S_-(t, \lambda) = t^{1/2-k} e^{-i\mu t} \Phi\left(\frac{1}{2}-k,\ 1-2k;\ 2i\mu t\right),$$

где $\mu = \lambda^{1/2}$. Пусть $\operatorname{Im}\lambda > 0$; тогда по асимптотической формуле (8)

$$S_+(t, \lambda) \sim \frac{\Gamma(1+2k)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+k\right)} e^{-i\mu t} (-2i\mu)^{-1/2-k},$$

$$S_-(t, \lambda) \sim \frac{\Gamma(1-2k)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-k\right)} e^{-i\mu t} (-2i\mu)^{-1/2+k},$$

где величина $-2i\mu$ лежит в правой полуплоскости и мы берем главное значение ее логарифма. Таким образом, не все решения уравнения $(B-\lambda) f = 0$ интегрируемы в квадрате в бесконечности, и по лемме XII.4.21, следствию 2.23 и теореме XII.4.18 B не имеет граничных значений в бесконечности. Поэтому оператор $T_0(B)$ имеет единственное самосопряженное расширение $T_1(B)$, которое является одновременно его замыканием и его сопряженным. Для простоты мы будем писать B вместо $T_1(B)$ там, где это не вызовет недоразумений. Для f из $\mathfrak{D}(T_0(B))$ мы имеем

$$(Bf, f) = \int_0^\infty \left\{ |f'(t)|^2 + \frac{k^2 - 1/4}{t^2} |f(t)|^2 \right\} dt \geqslant 0.$$

Поскольку $T_1(B)$ — замыкание оператора $T_0(B)$, мы имеем $(Bf, f) \geqslant 0$ для всех f из $\mathfrak{D}(T_1(B))$. Поэтому оператор $T_1(B)$ положительный, так что по лемме XII.7.2 $\sigma(B)\ (= \sigma(T_1(B)))$ полностью лежит на неотрицательной части действительной оси. Если $\lambda = 0$, то решениями уравнения $(B-\lambda) f = 0$ являются функции $t^{1/2 \pm k}$, так что ни одно его решение не принадлежит $L_2(0, \infty)$, а $\lambda = 0$ не принадлежит точечному спектру. Поэтому спектральная мера $E(\{0\})$ одной точки 0 равна нулю. Таким образом, чтобы дать полный спектральный анализ оператора B, мы должны рассмотреть только ту часть спектра, которая лежит в области $\lambda > 0$. Из асимптотических разложений для S_+ и S_-, данных выше, видно, что решение

$$\Sigma(t, \lambda) = \frac{\Gamma(1/2+k)}{\Gamma(1+2k)} (-2i\mu)^{1/2+k} S_+(t, \lambda) -$$

$$- \frac{\Gamma(1/2-k)}{\Gamma(1-2k)} (-2i\mu)^{1/2-k} S_-(t, \lambda) =$$

$$= c_+(\lambda) S_+(t, \lambda) + c_-(\lambda) S_-(t, \lambda)$$

уравнения $(B-\lambda)\Sigma=0$ есть $O(e^{-i\mu t})$ при $t\to\infty$. Поскольку характеристики уравнения $(B-\lambda)f=0$ в бесконечности равны $[\pm i\mu, 0]$, так что любое решение этого уравнения асимптотически ведет себя как умноженное на постоянную $e^{i\mu t}$ либо $e^{-i\mu t}$ (если μ не является действительным), мы должны иметь $\Sigma(t, \lambda)=O(e^{i\mu t})$ при $t\to\infty$; таким образом, $\Sigma(t, \lambda)$ интегрируемо в квадрате в бесконечности. Поэтому, согласно теореме 3.16, для $\operatorname{Im}\lambda>0$ и $t<s$ ядро Грина $K_\lambda(t, s)$ определяется формулой

$$K_\lambda(t, s)=\frac{S_+(t, \lambda)\overline{\Sigma(s, \bar{\lambda})}}{W(S_+, \bar{\Sigma})}=\frac{S_+(t, \lambda)\Sigma(s, \lambda)}{W(S_+, \Sigma)}.$$

Теперь $W(S_+(t, \lambda), S_-(t, \lambda))$ — постоянная, и, поскольку

$$W(S_+(t, \lambda), S_-(t, \lambda))=\left(\frac{1}{2}+k\right)t^{k-1/2}t^{1/2-k}-\left(\frac{1}{2}-k\right)t^{k+1/2}t^{-k-1/2}\sim 2k$$

в точке $t=0$, мы имеем $W(S_+, S_-)=2k$. Отсюда по теореме 5.27 $\varrho_{+-}=\varrho_{-+}=\varrho_{--}=0$,

$$\varrho_{++}(\Delta)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_\Delta \operatorname{Im}\left\{\frac{c_+(\lambda+i\varepsilon)}{c_-(\lambda+i\varepsilon)W(S_+(t, \lambda+i\varepsilon), S_-(t, \lambda+i\varepsilon))}\right\}d\lambda=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}-\frac{1}{2\pi k}\frac{\Gamma(1/2+k)\Gamma(1-2k)}{\Gamma(1/2-k)\Gamma(1+2k)}\int_\Delta \operatorname{Im}\{-2i\mu(\lambda+i\varepsilon)\}^{2k}d\lambda=$$

$$=\frac{\sin k\pi}{2\pi k}\frac{\Gamma(1/2+k)\Gamma(1-2k)}{\Gamma(1/2-k)\Gamma(1+2k)}\int_\Delta(2\mu)^{2k}d\lambda.$$

Применяя формулы $\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\pi/\sin\pi x$ и

$$\Gamma(2z)=\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}2^{2z-1/2}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2),$$

мы получаем

$$\varrho_{++}(\Delta)=\frac{1}{[2^{k+1/2}\Gamma(k+1)]^2}\int_\Delta\lambda^k d\lambda.$$

Интересно сформулировать этот результат в каком-нибудь другом виде. Если положить $\mathcal{Y}_k(\mu t)=\mathcal{Y}_k(t, \mu)=(\mu^{k+1/2}/2^k\Gamma(k+1))S_+(t, \lambda)$, то из теорем 5.23 и 5.24 будет следовать, что выражение

$$(H_k f)(\mu)=\underset{t\to\infty}{\text{l.i.m.}}\int_0^\infty \mathcal{Y}_k(t, \mu)f(t)\,dt$$

определяет изометрический изоморфизм пространства $L_2(0, \infty)$ на себя, причем обратное отображение совпадает с H_k. Если мы положим $t^{-1/2}\mathscr{Y}_k(t)=J_k(t)$, чтобы привести наши результаты в соответствие с результатами теоремы XI.3.34, то мы получим следующее утверждение.

Теорема. *Пусть $f\in L_2(0, \infty)$ относительно меры Лебега. Тогда предел*

$$g(s)\doteq \underset{R\to\infty}{\text{l.i.m.}}\int_0^R (rs)^{1/2}J_k(rs)f(r)\,dr$$

существует по норме пространства $L_2(0, \infty)$ и преобразование (Ганкеля) H_k: $f\to g$ является унитарным отображением пространства $L_2(0, \infty)$ в себя, причем обратное к нему есть также H_k.

Из теорем 5.23 и 5.24 мы знаем, что $H_kBH_k^{-1}$ — операция умножения на μ в $L_2(0, \infty)$; отсюда ясно, что B не имеет точечного спектра, но имеет непрерывный спектр, покрывающий интервал $[0, \infty)$.

Функция J_k (после замены зависимой переменной) является единственным решением *уравнения Бесселя*

$$B_k(J)=t^2\left(\frac{d}{dt}\right)^2 J+\left(t\left(\frac{d}{dt}\right)+(t^2-k^2)\right)J=0,$$

имеющим вид $(t/2)^k\{\Gamma(k+1)\}^{-1}(1+\ldots)$ в окрестности регулярной особенности в нуле. Применяя дифференциальный оператор B_k к функции $(1/2\pi)\int_0^{2\pi} e^{i(n\theta-z\sin\theta)}\,d\theta$ из теоремы XI.3.23, мы получаем

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n\theta-z\sin\theta)}(z^2\cos^2\theta-iz\sin\theta-n^2)\,d\theta=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d}{d\theta}\{i(n+z\cos\theta)e^{i(n\theta-z\sin\theta)}\}\,d\theta=0.$$

Разлагая $(1/2\pi)\int_0^{2\pi} e^{i(n\theta-z\sin\theta)}\,d\theta$ в степенной ряд, мы находим, что его низший ненулевой член равен

$$\frac{1}{2\pi n!}(-z)^n\int_0^{2\pi}\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^n e^{in\theta}\,d\theta=\frac{1}{n!}\left(\frac{z}{2}\right)^n,$$

так что

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n\theta - z\sin\theta)}\,d\theta = J_n(z),$$

и предыдущая теорема является прямым обобщением теоремы XI.3.23 для нецелых значений параметра k.

В качестве последнего примера мы рассмотрим формальный дифференциальный оператор $H = -(d/dt)^2 + t^2$ на интервале $(-\infty, \infty)$. Так как оператор $H-\lambda$ инвариантен относительно замены $z \to -z$, то мы попробуем написать его решение $f(z)$ в виде $g(z^2)$. Мы найдем, что

$$-4z^2g''(z^2) - 2g'(z^2) + (z^2-\lambda)\,g(z^2) = 0;$$

таким образом, $g(w)$ удовлетворяет вырожденному гипергеометрическому уравнению

$$-4wg'' - 2g' + (w-\lambda)\,g = 0$$

с показателями 0, 1/2 в нуле и характеристиками $\pm 1/2$, $1/4\,(1 \pm \lambda)$. Следовательно, уравнение $(H-\lambda)f = 0$ имеет решение, которое асимптотически ведет себя как $e^{t^2/2}t^{-(1/2)(\lambda+1)}$ при $t \to \infty$, поэтому не все решения этого уравнения квадратично интегрируемы в окрестности точки $t = \infty$ и в бесконечности нет граничных значений. В силу симметрии при замене $t \to -t$ в точке $-\infty$ также нет граничных значений. Таким образом, единственным самосопряженным расширением оператора $T_0(H)$ является его замыкание, которое мы обозначим через H. Поскольку

$$(Hf, f) = \int_{-\infty}^{\infty} \{|f'(t)|^2 + t^2|f(t)|^2\}\,dt \geqslant 0, \qquad f \in \mathfrak{D}(T_0(H)),$$

отсюда следует (как выше), что оператор H неотрицательный, поэтому $\sigma(H)$ полностью лежит на положительной части действительной оси; по теореме 7.16(a) $\sigma(H)$ представляет собой последовательность дискретных собственных значений, стремящуюся к бесконечности. Выполнив преобразование зависимой переменной, мы видим, что уравнение $(H-\lambda)f = 0$ имеет решения

$$S_e(t, \lambda) = e^{-t^2/2}\Phi\left(\frac{1}{4} - \frac{\lambda}{4},\ \frac{1}{2};\ t^2\right),$$

$$S_o(t, \lambda) = e^{-t^2/2}\,t\Phi\left(\frac{3}{4} - \frac{\lambda}{4},\ \frac{3}{2};\ t^2\right).$$

Первое из них четно, второе нечетно. Так как по асимптотической формуле (11)

$$S_e(t, \lambda) \sim \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/4 - \lambda/4)}\, e^{t^2/2}t^{-(1/2)(1+\lambda)}, \qquad \lambda \neq 1 + 4n,$$

когда $t \to \pm\infty$, и

$$S_o(t, \lambda) \sim \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(3/4-\lambda/4)} e^{t^2/2} t^{-(1/2)(3+\lambda)}, \qquad \lambda \neq -1+4n,$$

когда $t \to \pm\infty$, то единственно возможными собственными значениями являются числа $\lambda = 4n+1$, $n \geqslant 0$, и $\lambda = 4n-1$, $n \geqslant 1$. Поскольку при целых k функция $\Phi(-k, a; z)$ — полином, эти числа действительно являются собственными значениями; им соответствуют ортонормальные собственные функции

$$c_n e^{-t^2/2} \Phi\left(-n, \frac{1}{2}, t^2\right), \qquad \lambda = 4n+1, \qquad n \geqslant 0,$$

$$c_n' e^{-t^2/2} \Phi\left(1-n, \frac{3}{2}, t^2\right), \qquad \lambda = 4n-1, \qquad n \geqslant 1.$$

Чтобы определить нормирующие множители c_n и c_n', заметим, что при $t \to \infty$

$$S_+ = \frac{\Gamma(1/4-\lambda/4) S_e}{\Gamma(1/2)} - \frac{\Gamma(-1/4-\lambda/4) S_o}{\Gamma(3/2)} = O(e^{-t^2/2}),$$

$$S_- = \frac{\Gamma(1/4-\lambda/4) S_e}{\Gamma(1/2)} + \frac{\Gamma(-1/4-\lambda/4) S_o}{\Gamma(3/2)} = O(e^{-t^2/2}).$$

Так как $W(S_o, S_e) = 1$, то отсюда следует, что для $t < s$ ядро Грина K_λ определяется формулой

$$K_\lambda(t, s) = \frac{S_-(t) S_+(s)}{W(S_-, S_+)} = \frac{\Gamma(1/4-\lambda/4)}{\Gamma(-1/4-\lambda/4)} S_e(t) S_e(s) -$$

$$- \frac{\Gamma(-1/4-\lambda/4)}{4\Gamma(1/4-\lambda/4)} S_o(t) S_o(s) - \frac{1}{2} S_e(t) S_o(s) + \frac{1}{2} S_o(t) S_e(s).$$

Используя замечания, следующие за теоремой 5.16, мы получаем для нормирующих множителей c_n и c_n' формулы

$$|c_n|^2 = -\frac{4(-1)^n}{n!\,\Gamma(-n-1/2)} = \frac{4\Gamma(n+3/2)}{\pi n!},$$

$$|c_n'|^2 = \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(1/2-n)} = \frac{\Gamma(n+1/2)}{\pi n!}.$$

9. Упражнения

В настоящем параграфе мы приводим несколько групп связанных между собой упражнений, относящихся к различным аспектам спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов. Параграф делится на десять разделов; для удобства читателя мы перечислим здесь темы, к которым относятся упражнения каждого из этих разделов.

(A) Общие вопросы; (B) Несамосопряженные операторы; (C) Полуограниченные операторы; (D) Принципы минимакса; (E) Дифференциальные операторы в пространствах $L_p(I)$; (F) Оператор Штурма — Лиувилля, I; (G) Оператор Штурма — Лиувилля, II; (H) Оператор Штурма — Лиувилля с интегрируемым коэффициентом; (I) Спектральный анализ некоторых дифференциальных операторов; (J) Разные упражнения.

A. *Общие вопросы*

A1. Пусть τ — регулярный формальный дифференциальный оператор на некотором интервале I. Доказать, что $T_1(\tau)$ — замкнутый оператор.

A2. Доказать, что каждое расширение оператора $T_0(\tau)$, полученное наложением граничных условий, является замкнутым оператором.

A3. Пусть τ — регулярный формальный дифференциальный оператор на некотором интервале I. Доказать, что точка 0 комплексной плоскости не принадлежит существенному спектру оператора τ тогда и только тогда, когда каждое замкнутое расширение оператора $T_0(\tau)$ отображает ограниченные замкнутые множества на замкнутые множества.

A4. Пусть τ — регулярный дифференциальный оператор на интервале $[0, \infty)$. Доказать, что комплексное число λ принадлежит существенному спектру оператора τ тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{f_n\}$ функций из $\mathfrak{D}(T_0(\tau))$, таких, что $|f_n| = 1$, f_n обращается в нуль в интервале $[0, n]$ и

$$|(\lambda - \tau) f_n| \longrightarrow 0 \qquad \text{при } n \longrightarrow \infty.$$

A5. Пусть τ — регулярный формальный дифференциальный оператор на некотором интервале I. Предположим, что для каждой конечной системы $f_1, f_2, \ldots, f_n$ функций из $\mathfrak{D}(T_0(\tau))$ и для каждого $\varepsilon > 0$ мы можем найти функцию g из $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$, ортогональную к функциям f_i, такую, что

$$|(\lambda - \tau) g| < \varepsilon |g|.$$

Тогда точка λ принадлежит существенному спектру оператора τ.

A6. Пусть τ — регулярный формально симметрический дифференциальный оператор на $[0, \infty)$ с одинаковыми индексами дефекта, а λ — некоторое действительное число. Доказать, что расстояние от λ до существенного спектра оператора τ меньше или равно K тогда и только тогда, когда существует последовательность функций f_n из $\mathfrak{D}(T_0(\tau))$, такая, что $|f_n| = 1$, f_n обращается в нуль в интервале $[0, n]$ и

$$|(\lambda - \tau) f_n| \leqslant K.$$

A7. Пусть τ — формально симметрический дифференциальный оператор на $[0, \infty)$ с одинаковыми индексами дефекта. Доказать, что существенный спектр оператора τ пуст тогда и только тогда, когда для каждой последовательности $\{f_n\}$ функций из $\mathfrak{D}(T_0(\tau))$, такой, что $|f_n|=1$ и f_n обращается в нуль в интервале $[0, n]$, мы имеем

$$|\tau f_n| \to \infty \qquad \text{при } n \to \infty.$$

A8. Пусть τ_1 и τ_2 — формальные дифференциальные операторы на некотором интервале I, причем их коэффициенты совпадают всюду, за исключением некоторого компактного подинтервала интервала I. Доказать, что существенные спектры операторов τ_1 и τ_2 совпадают.

A9. Пусть τ — формальный дифференциальный оператор на интервале $[0, \infty)$, а C_n — наименьшее замкнутое выпуклое множество, содержащее все значения

$$\{(\tau f, f) \mid f \in \mathfrak{D}(T_0(\tau)),\ f(t)=0,\ 0 \leqslant t \leqslant n\}.$$

Доказать, что существенный спектр оператора τ содержится в множестве $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} C_n$.

A10. Пусть τ — регулярный формальный дифференциальный оператор на некотором интервале I, а B — вполне непрерывный оператор в $L_2(I)$. Доказать, что существенный спектр оператора τ совпадает с существенным спектром оператора $T_1(\tau)+B$.

A11. Пусть τ — регулярный формальный дифференциальный оператор на некотором интервале I, а B — линейный оператор в $L_2(I)$, определенный в $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$, который является вполне непрерывным оператором из $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$ в $L_2(I)$. Доказать, что существенный спектр оператора τ совпадает с существенным спектром оператора $T_1(\tau)+B$.

B. *Несамосопряженные операторы*

B1. Пусть задан формальный дифференциальный оператор

$$\tau = -\left(\frac{d}{dt}\right) p(t) \left(\frac{d}{dt}\right) + q(t)$$

на интервале $[0, \infty)$, где $\operatorname{Re} p(t) > 0$ и $\operatorname{Re} q(t)$ ограничена снизу. Показать, что τ не имеет граничных значений в бесконечности.

B2. Пусть τ — формальный дифференциальный оператор на I, существенный спектр которого лежит в полосе $|\operatorname{Im}\lambda| \leqslant K$, а q — ограниченная измеримая функция на I. Показать, что каждое граничное значение для τ является граничным значением для $\tau+q$ и обратно.

B3. Пусть τ — формальный дифференциальный оператор вида

$$\tau=\sum_{k=0}^{n} a_k(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^k$$

на интервале $[a, \infty)$, существенный спектр которого лежит в полосе $|\operatorname{Im}\lambda|\leqslant K$. Допустим, что функция $|a_n(\cdot)|$ ограничена снизу положительным числом, а все функции $|a_k(\cdot)|$ ограничены. Показать, что оператор τ не имеет граничных значений в бесконечности.

B4. Пусть τ — формальный дифференциальный оператор на интервале I; предположим, что для всех функций f из $\mathfrak{D}(T_0(\tau))$

$$\operatorname{Re}(\tau f, f)\geqslant 0.$$

Показать, что существенный спектр оператора τ лежит в полуплоскости $\{\lambda \mid \operatorname{Re}\lambda > 0\}$.

B5. Пусть задан оператор Штурма — Лиувилля

$$\tau=-\left(\frac{d}{dt}\right)p(t)\left(\frac{d}{dt}\right)+q(t)$$

на интервале $[0, \infty)$ (p — положительная, а q — действительная функции). Предположим, что

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\,|(p(t)\,q'(t))'\,|\,q^2(t)<1.$$

(a) Показать, что если f принадлежит $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$, то функция qf интегрируема в квадрате.

(b) Пусть функция r такова, что $r(t)=o(q(t))$ при $t\to\infty$. Показать, что существенный спектр оператора τ совпадает с существенным спектром оператора $\tau+r$.

B6. Пусть задан дифференциальный оператор

$$\tau=-\left(\frac{d}{dt}\right)^2+q(t)$$

на интервале $[0, \infty)$, причем функция q не обязательно действительная. Пусть

$$\tau_1=a(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^2+b(t)\left(\frac{d}{dt}\right)+c(t),$$

где $c(t)=o(|q(t)|)$, $a(t)=o(1)$, $b(t)=o(1)$ при $t\to\infty$. Показать, что существенный спектр оператора τ совпадает с существенным спектром оператора $\tau+\tau_1$.

B7. Пусть τ — формально симметрический дифференциальный оператор на интервале I, а B — ограниченный оператор в $L_2(I)$, норма которого не превосходит K. Предположим, что точка λ

комплексной плоскости находится на расстоянии, большем чем K, от существенного спектра оператора τ. Показать, что λ не принадлежит существенному спектру оператора $T_1(\tau)+B$.

B8. Пусть τ — дифференциальный оператор вида

$$\tau=-\left(\frac{d}{dt}\right)p(t)\left(\frac{d}{dt}\right)+q(t)$$

на интервале $[a, b)$, где функция p положительна и

$$\int_a^b (p(t))^{-1}\,dt=\infty.$$

Пусть функция Q определена, как в теореме 7.66. Предположим, что $\operatorname{Re} Q(t)\longrightarrow\infty$ при $t\longrightarrow b$. Показать, что существенный спектр оператора τ пуст.

B9. В условиях и обозначениях предыдущего упражнения предположим, что $\operatorname{Re} Q(t)$ ограничена снизу. Показать, что оператор τ не имеет граничных значений в концевой точке b.

С. *Полуограниченные операторы*

С1. Пусть τ — формально самосопряженный дифференциальный оператор вида

$$\tau=\sum_{j=0}^{n} p_j(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^j$$

на интервале $[a, \infty)$. Предположим, что $\lim\limits_{t\to\infty} p_j(t)=q_j$ существует для $j=0, 1, \ldots, n$, и $(-1)^{n/2}q_n\geqslant 0$. Показать, что оператор τ ограничен снизу.

С2. Предположим, что оператор τ ограничен снизу на интервале $[a, b)$ и существует постоянная M, такая, что

$$|f^{(k)}|^2\leqslant M((\tau f, f)+|f|^2), \qquad f\in\mathfrak{D}(T_0(\tau)).$$

Пусть τ_1 — (регулярный или иррегулярный) формальный дифференциальный оператор вида

$$\tau_1=\sum_{j=0}^{k} a_j(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^j,$$

где $\lim\limits_{t\to b} a_j(t)=0$, $0\leqslant j\leqslant k$. Тогда оператор $\tau+\tau_1$ ограничен снизу, если он имеет ненулевой старший коэффициент.

С3. Пусть формальный дифференциальный оператор τ ограничен снизу на интервале $[a, b)$ и удовлетворяет условиям предыдущей задачи, а τ_1 — (регулярный или иррегулярный) формальный дифференциальный оператор вида

$$\tau_1 = \sum_{j=0}^{k} \left(\frac{d}{dt}\right)^j a_j(t) \left(\frac{d}{dt}\right)^j,$$

где $\lim\limits_{j \to b} a_j(t) = 0$, $0 \leqslant j \leqslant k$. Тогда оператор $\tau + \tau_1$ ограничен снизу, если он имеет ненулевой старший коэффициент.

C4. Пусть T_1 и T_2 — замкнутые операторы в гильбертовом пространстве, такие, что $\mathfrak{D}(T_2) = \mathfrak{D}(T_1) + \mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ — конечномерное подпространство, и

$$\operatorname{Re}(T_1x, x) \leqslant \operatorname{Re}(T_2x, x), \qquad x \in \mathfrak{D}(T_1).$$

Показать, что форма $\operatorname{Re}(T_1x, x)$ ограничена снизу для всех x из $\mathfrak{D}(T_1)$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{Re}(T_2x, x)$ ограничена снизу для всех x из $\mathfrak{D}(T_2)$.

C5. Пусть τ — формальный дифференциальный оператор четного порядка в конечном замкнутом интервале $[0, 1]$, и пусть его старший коэффициент a_{2n} удовлетворяет неравенству $(-1)^n \operatorname{Re} a_{2n}(t) \geqslant 0$. Показать, что существует постоянная K, такая, что

$$\operatorname{Re}(\tau f, f) \geqslant K(f, f)$$

для каждой функции f из $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$, для которой $f(0) = \ldots$ $\ldots = f^{(n-1)}(0) = f(1) = \ldots = f^{(n-1)}(1) = 0$.

C6. Пусть τ — формально симметрический дифференциальный оператор вида

$$\tau = -\left(\frac{d}{dt}\right) p(t) \left(\frac{d}{dt}\right) + q(t)$$

на интервале $[a, b)$. Предположим, что

$$\int_a^b (p(t))^{-1/2}\, dt = \infty,$$

а функция $Q(t)$ определена, как в теореме 7.66, и ограничена снизу. Показать, что оператор τ ограничен снизу.

C7. Пусть оператор τ и функция Q определены, как в предыдущем упражнении, и пусть $[a, b) = [0, \infty)$. Предположим, что Q интегрируема. Показать, что оператор τ ограничен снизу.

D. *Принципы минимакса*

D1. Пусть T — неограниченный снизу симметрический оператор и A — действительное число. Тогда существует бесконечномерное подпространство $\mathfrak{H}_0$ пространства $\mathfrak{D}(T)$, такое, что

$$(Tx, x) \leqslant A(x, x), \qquad x \in \mathfrak{H}_0.$$

(Указание: переделать доказательство леммы 7.22.)

D2. (Берковиц.) Пусть T — (неограниченный) самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Пусть $\mathscr{S}^{(n)}$ обозначает семейство всех n-мерных подпространств пространства $\mathfrak{H}$. Если $\mathfrak{H}_0$ — подпространство пространства $\mathfrak{H}$, то пусть $P_{\mathfrak{H}_0}$ — ортогональный оператор проектирования с областью значений $\mathfrak{H}_0$. Определим последовательность действительных чисел $\{\lambda_n^{(i)}\}$ $(1 \leqslant i \leqslant 4)$ следующим образом:

$$(1) \qquad \lambda_n^{(1)} = \inf_{\mathfrak{H}_0 \in \mathscr{S}^{(n)}} \sup_{\substack{u \in \mathfrak{H}_0 \\ u \neq 0,\ u \in \mathfrak{D}(T)}} (u, Tu)/(u, u),$$

$$(2) \qquad \lambda_n^{(2)} = \sup_{\mathfrak{H}_0 \in \mathscr{S}^{(n-1)}} \inf_{\substack{(u, \mathfrak{H}_0)=0 \\ u \neq 0,\ u \in \mathfrak{D}(T)}} (u, Tu)/(u, u),$$

$$(3) \qquad \lambda_n^{(3)} = \sup_{f_1, \ldots, f_{n-1} \in \mathfrak{H}} \inf_{\substack{u \neq 0 \\ u \in \mathfrak{D}(T)}} \left[(u, Tu) + \sum_{\nu=1}^{n-1} |(u, f_\nu)|^2\right]/(u, u),$$

$$(4) \qquad \lambda_n^{(4)} = \sup_{\substack{\mathfrak{H}_0 \in \mathscr{S}^{(n-1)} \\ a > 0}} \inf_{\substack{u \neq 0 \\ u \in \mathfrak{D}(T)}} ((T - aP_{\mathfrak{H}_0})u, u)/(u, u).$$

(a) Доказать, что $\lambda_n^{(1)} = \lambda_n^{(2)} = \lambda_n^{(3)} = \lambda_n^{(4)}$ для всех n.

(b) Обозначая через λ_n общее значение, показать, что последовательность λ_n является неубывающей.

(c) Если $\lambda_n \neq -\infty$ для некоторого n, то $\lambda_n \neq -\infty$ для всех n, и это имеет место тогда и только тогда, когда оператор T ограничен снизу.

(d) Пусть $\lambda_\infty = \lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n$. Показать, что оператор T существенно ограничен снизу числом λ_∞, но ни одно число, большее, чем λ_∞, не удовлетворяет этому условию.

(e) Если $\lambda_n < \lambda_\infty$, то $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — это n наименьших собственных значений оператора T, причем каждое число повторяется столько раз, какова его кратность.

(Указание: воспользоваться упражнением D1, леммой 7.22 и спектральной теоремой.)

D3. Пусть S — симметрический оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, определенный на всюду плотной области. Допустим, что S ограничен снизу, T — самосопряженное расширение оператора S, а T_1 — его расширение Фридрихса (см. XII.10). Пусть $\lambda_n(T)$ и $\lambda_n(T_1)$ — числа, определенные в упражнении D2, соответственно для операторов T и T_1. Показать, что в обозначениях упражнения D2

$$\lambda_n(T) \leqslant \lambda_n(T_1) = \sup_{\mathfrak{H}_0 \in \mathcal{S}^{n-1}} \inf_{\substack{u \neq 0 \\ (u, \mathfrak{H}_0)=0,\ u \in \mathfrak{D}(S)}} (u, Su)/(u, u).$$

D4. В условиях и обозначениях предыдущего упражнения показать, что для подходящего оператора S все $\lambda_n(T_1)$ могут быть неотрицательными, тогда как $\lambda_n(T) = -\infty$ для некоторого другого самосопряженного расширения T.

Для подходящего оператора S существенный спектр оператора T_1 может быть пуст, тогда как непрерывный спектр оператора T может покрывать всю действительную ось.

D5. Пусть τ — формально самосопряженный дифференциальный оператор, ограниченный снизу. Тогда расширение Фридрихса T оператора $T_0(\tau)$ определяется оператором τ и распадающейся системой граничных условий.

D6. Пусть τ — ограниченный снизу формально самосопряженный дифференциальный оператор на полуоткрытом интервале $[a, b)$. Тогда это оператор четного порядка. Если f принадлежит области определения расширения Фридрихса T оператора $T_0(\tau)$, то $f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$ есть система всех граничных условий в точке a в распадающейся системе граничных условий, определяющих T. (Указание: см. предыдущее упражнение.)

D7. (Фридрихс.) Пусть τ — действительный формально самосопряженный дифференциальный оператор второго порядка вида

$$\tau = -\left(\frac{d}{dt}\right) p(t) \left(\frac{d}{dt}\right) + q(t),$$

определенный на интервале $I = (a, b)$, где $p(t) > 0$ для $t \in I$, а функция $q(t)$ ограничена снизу постоянной q. Условимся говорить, что конец b (или конец a) является концом типа A относительно τ или что оператор τ является оператором типа A в точке b (в точке a), если интеграл

$$\int_a^b [p(t)\,|f'(t)|^2 + q(t)\,|f(t)|^2]\,dt$$

сходится для каждой функции $f \in \mathfrak{D}(T_1(\tau))$, которая обращается в нуль в окрестности точки b (или точки a), и концом типа B относительно τ в противном случае. Доказать следующие утверждения.

(а) Если τ не имеет граничных условий в точке b, то это оператор типа A в точке b.

(b) Если τ есть оператор типа A в точке b, то либо τ не имеет граничных значений в точке b, либо $b < \infty$,

$$\int^{b} (p(t))^{-1}\,dt < \infty,$$

и пределы

$$f(b) = \lim_{t\to b} f(t), \qquad p(b) f'(b) = \lim_{t\to b} p(t) f'(t)$$

существуют и определяют линейно независимые граничные значения для τ, в терминах которых мы имеем

$$\int_a^b [p(t) f'(t) g'(t) + q(t) f(t) g(t)]\,dt - [p(b) f'(b)]\,g(b) = (\tau f, g)$$

для каждой пары функций f и g из $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$, обращающихся в нуль в окрестности точки a.

(c) Расширение Фридрихса T оператора $T_0(\tau)$ является сужением оператора $T_1(\tau)$ на множество функций, определенных следующими условиями:

(I) интеграл $\int_a^b [p(t)(f'(t))^2 + q(t)(f(t))^2]\,dt$ сходится;

(II) $f(b) = 0$, если b — конец типа A и τ имеет граничные значения в точке b;

(III) $f(a) = 0$, если a — конец типа A и τ имеет граничные значения в точке a.

D8. Предположим, что выполняются условия предыдущего упражнения. Пусть $\mathfrak{D}_0$ — подпространство пространства $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$, состоящее из всех функций, для которых интеграл

$$L(f) = \int_a^b [p(t)\,|f'(t)|^2 + q(t)\,|f(t)|^2]\,dt$$

сходится. Пусть для каждой из концевых точек a, b, которая является точкой типа A и в которой τ имеет граничные значения, выбрано некоторое действительное число w.

Пусть $T(w)$ — сужение оператора $T_1(\tau)$, определенное условиями

(I) интеграл $\int_a^b [p(t)\,|f'(t)|^2 + q(t)\,|f(t)|^2]\,dt = L(f)$ сходится;

(II) $p(a) f'(a) + w f(a) = 0$.

Пусть $T(\infty)$ — сужение оператора $T_1(\tau)$, определенное условием (I) и условием

(III) $f(a) = 0$.

(a) Показать, что $T(w)$ — самосопряженный оператор для каждого w из интервала $-\infty < w \leqslant \infty$.

Пусть $\lambda_n(T(w))$ — числа, определенные для каждого самосопряженного оператора $T(w)$, как в упражнении D2. Пусть $\mathfrak{D}_0$ — множество функций в $\mathfrak{H}^{(1)}(a, b)$, определенных условием (I).

(b) Показать, что для каждой функции f из $\mathfrak{D}_0$ предел

$$f(a) = \lim_{t \to a} f(t)$$

существует.

(c) Показать, что для $-\infty < w < \infty$

$$\lambda_n(T(w)) = \sup_{\mathfrak{H}_0 \in \mathcal{S}^{(n-1)}} \inf_{\substack{u \neq 0 \\ u \in \mathfrak{D}_0 \\ (u, \mathfrak{H}_0) = 0}} [w\,|u(a)|^2 + L(u)]/(u, u).$$

(d) Показать, что

$$\lambda_n(T(\infty)) = \sup_{\mathfrak{H}_0 \in \mathcal{S}^{(n-1)}} \inf_{\substack{u \neq 0,\ u(a) = 0 \\ (u, \mathfrak{H}_0) = 0 \\ u \in \mathfrak{D}_0}} L(u)/(u, u).$$

(e) Показать, что для любых w и w_1, не равных $-\infty$,

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n(T(w)) = \lim_{n \to \infty} \lambda_n(T(w_1)).$$

(f) Показать, что когда w монотонно меняется на действительной оси, $\lambda_n(T(w))$ монотонно меняется между $\lambda_{n-1}(T(\infty))$ и $\lambda_n(T(\infty))$, и что $\lambda_n(T(w)) \neq \lambda_n(T(w'))$, если $w \neq w'$, и $\lambda_{n-1}(T(\infty)) \neq \lambda_n(T(\infty))$.

(g) Показать, что $\lambda_{n-1}(T(\infty)) \neq \lambda_n(T(\infty))$ всегда, за исключением случая, когда $\lambda_m(T(\infty)) = \lambda_n(T(\infty))$ для всех $m \geqslant n$.

(Указание: применить осцилляционную теорию § 7, упражнения D7, D3, D2 и метод доказательства теоремы 6.10.)

D9. Пусть τ и $\hat{\tau}$ — дифференциальные операторы второго порядка вида

$$\tau = -\left(\frac{d}{dt}\right) p(t) \left(\frac{d}{dt}\right) + q(t),$$
$$\hat{\tau} = -\left(\frac{d}{dt}\right) \hat{p}(t) \left(\frac{d}{dt}\right) + \hat{q}(t),$$

определенные на интервале $I = (0, b)$. Предположим, что $p(t) \geqslant \hat{p}(t) > 0$ и $q(t) \geqslant \hat{q}(t)$ для $t \in I$ и что ни один из операторов τ и $\hat{\tau}$ не имеет граничных значений в точке b. Пусть v и w — действительные числа, а T и $\hat{T}$ — сужения операторов $T_1(\tau)$ и $T_1(\hat{\tau})$, определенные нетривиальным граничным условием $vf(0) + wf'(0) = 0$.

Пусть $\lambda_n(T)$ и $\lambda_n(\hat{T})$ — числа, определенные для самосопряженных операторов T и $\hat{T}$, как в упражнении D2. Доказать, что $\lambda_n(T) \geqslant \lambda_n(\hat{T})$, $n \geqslant 1$.

D10. Пусть S и $\hat{S}$ — два симметрических оператора в гильбертовом пространстве, определенных на всюду плотной области. Предположим, что $\mathfrak{D}(S) \subseteq \mathfrak{D}(\hat{S})$, $\hat{S}$ ограничен снизу и оператор $S-\hat{S}$ является положительным. Пусть T и $\hat{T}$ — расширение Фридрихса соответственно операторов S и $\hat{S}$, а $\lambda_n(T)$ и $\lambda_n(\hat{T})$ — числа, определенные для самосопряженных операторов T и $\hat{T}$, как в задаче D2. Показать, что $\lambda_n(T) \geqslant \lambda_n(\hat{T})$, $n \geqslant 1$.

D11. Пусть T_1 — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}_1$, а T_2 — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}_2$. Определим оператор T в $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$, полагая $\mathfrak{D}(T) = \mathfrak{D}(T_1) \oplus \mathfrak{D}(T_2)$ и

$$Tx = T(x_1 \oplus x_2) = T_1x_1 \oplus T_2x_2, \quad x \in \mathfrak{D}(T).$$

Показать, что оператор T самосопряжен. Показать, что оператор T ограничен снизу тогда и только тогда, когда T_1 и T_2 ограничены снизу.

Пусть $\lambda_n(T_1)$, $\lambda_n(T_2)$ и $\lambda_n(T)$ — числа, определенные, как в упражнении D2, соответственно для операторов T_1, T_2 и T.

Предположим, что $\lambda_\infty(T_1) = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n(T_1) \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n(T_2)$. Показать, что последовательность $\{\lambda_n(T)\}$ получается при помощи перестановки в порядке возрастания всех чисел $\lambda_n(T_1)$, взятых вместе со всеми числами $\lambda_n(T_2)$, меньшими, чем $\lambda_\infty(T_1)$.

D12. Пусть τ — формально симметрический дифференциальный оператор, определенный на интервале I; предположим, что оператор τ ограничен снизу и, следовательно (лемма 7.29), имеет четный порядок $2n$. Пусть c — внутренняя точка интервала I, а $\tau^+(\tau^-)$ — сужение оператора τ на $I \cap [c, \infty)$ (на $I \cap (-\infty, c]$). Пусть T — самосопряженное расширение оператора $T_0(\tau)$, определенное распадающейся системой B граничных условий.

(a) Пусть T_1 и T_2 — расширения операторов $T_0(\tau^+)$ и $T_0(\tau^-)$, определенные граничными условиями $f(c) = f'(c) = \ldots = f^{(n-1)}(c) = 0$ и граничными условиями системы B соответственно в правой и левой концевых точках интервала I. Показать, что операторы T_1 и T_2 являются самосопряженными. Пусть $\lambda_n(T)$, $\lambda_n(T_1)$ и $\lambda_n(T_2)$ — числа, определенные, как в упражнении D2, соответственно для операторов T, T_1 и T_2. Предположим, что $\lambda_\infty(T_1) = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n(T_1) \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n(T_2)$. Пусть $\{\mu_m\}$ — последовательность, полученная при помощи перестановки в порядке возрастания всех чисел $\lambda_n(T_1)$, взятых вместе со всеми числами $\lambda_n(T_2)$, для которых $\lambda_n(T_2) < \lambda_\infty(T_1)$. Показать, что $\lambda_m(T) \leqslant \mu_m$, $m \geqslant 1$.

(b) Пусть $\hat{T}_1$ и $\hat{T}_2$ — расширения соответственно операторов $T_0(\tau^+)$ и $T_0(\tau^-)$, определенные граничными условиями $f^{(n)}(c) = \ldots = f^{(2n-1)}(c) = 0$ и граничными условиями системы B соответственно в правой и левой концевых точках интервала I. Показать, что $\hat{T}_1$ и $\hat{T}_2$ являются самосопряженными. Пусть $\lambda_n(\hat{T}_1)$ и $\lambda_n(\hat{T}_2)$ — числа, определенные, как в упражнении D2, соответственно для операторов $\hat{T}_1$ и $\hat{T}_2$. Предположим, что $\lambda_\infty(\hat{T}_1) = \lim_{n\to\infty} \lambda_n(\hat{T}_1) \leqslant \lim_{n\to\infty} \lambda_n(\hat{T}_2)$. Пусть $\{\hat{\mu}_m\}$ — последовательность, полученная при помощи перестановки в порядке возрастания всех чисел $\lambda_n(\hat{T}_1)$, взятых вместе со всеми числами $\lambda_n(\hat{T}_2)$, для которых $\lambda_n(\hat{T}_2) < \lambda_\infty(\hat{T}_1)$. Показать, что $\hat{\mu}_m \leqslant \lambda_m(T)$, $m \geqslant 1$.

E. *Дифференциальные операторы в банаховых пространствах $L_p(I)$*

Следующая группа упражнений относится к обобщениям понятий, введенных в § 1, 2, 3 и 6, на пространства $L_p(I)$, $1 < p < \infty$. В задачах, приведенных ниже, мы ограничиваемся лишь наиболее прозрачными результатами, однако интересующийся читатель, несомненно, заметит, что различные результаты более сложного характера также допускают подходящие, но менее тривиальные обобщения. Например, несколько утверждений, приведенных ниже, справедливы в пространствах $L_1(I)$, $L_\infty(I)$ и $C(I)$, хотя доказательства часто являются более сложными.

Во всех следующих упражнениях предполагается, что индексы p и q—действительные числа, бóльшие единицы.

E1. Заданный на интервале I регулярный формальный дифференциальный оператор τ порядка n определяет оператор $T_1(\tau, p)$ в банаховом пространстве $L_p(I)$ следующим образом: $\mathfrak{D}(T_1(\tau, p))$ — множество всех функций f из $A^n(I)$, таких, что f и τf принадлежат $L_p(I)$. Для f из $\mathfrak{D}(T_1(\tau, p))$ положим

$$(T_1(\tau, p) f)(t) = (\tau f)(t), \qquad t \in I.$$

Доказать аналог леммы 2.9.

E2. Пусть оператор $T_0(\tau, p)$ — сужение оператора $T_1(\tau, p)$ на множество функций из его области определения, обращающихся в нуль вне (переменного) компактного подмножества интервала I. Доказать, что $T_0(\tau, p)^* = T_1(\tau^*, q)$, где $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

E3. Доказать, что $T_1(\tau, p)$ — замкнутый оператор.

E4. Обобщить лемму 2.16 на оператор $T_1(\tau, p)$.

E5. Обобщить определения граничных значений, граничных условий и расширений на дифференциальные операторы в $L_p(I)$. Доказать утверждения, аналогичные теоремам 19, 20 и 27 и следствиям 21, 23, 28 из § 2.

E6. Получить представление резольвенты расширения оператора $T_0(\tau, p)$ аналогично тому, как это было сделано в § 3 для гильбертова пространства.

E7. Предположим, что для некоторого (действительного или комплексного) λ каждое решение уравнения $(\lambda-\tau)f=0$ принадлежит классу $L_p(I)$, а каждое решение уравнения $(\bar{\lambda}-\tau^*)f=0$ — классу $L_q(I)$ $(p^{-1}+q^{-1}=1)$. Доказать, что существенный спектр оператора τ в $L_p(I)$ есть пустое множество.

E8. (Беллман.) Предположим, что каждое решение уравнения $\tau f=0$ принадлежит классу $L_p(I)$, а каждое решение уравнения $\tau^* f=0$ — классу $L_q(I)$ $(p^{-1}+q^{-1}=1)$. Доказать, что для каждого (действительного или комплексного) λ каждое решение уравнения $(\lambda-\tau)f=0$ принадлежит $L_p(I)$.

E9. Пусть T — любое замкнутое расширение оператора $T_0(\tau, p)$. Доказать, что существенный спектр оператора T совпадает с существенным спектром оператора $T_1(\tau, p)$.

E10. Доказать, что существенный спектр оператора $T_1(\tau, p)$ совпадает с существенным спектром оператора $T_1(\tau^*, q)$.

E11. Пусть оператор

$$\tau=\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dt}\right)^n$$

определен на интервале $[0, \infty)$. Доказать, что существенным спектром оператора $T_1(\tau, p)$ является положительная полуось, если n четно, и вся действительная ось, если n нечетно.

E12. Пусть K — любая постоянная, которая не записывается в виде $-(i\lambda)^n$ ни для какого действительного λ. Доказать, что существует положительная постоянная c, зависящая только от p и K, такая, что

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} |Kf(t)+f^{(n)}(t)|^p\, dt\right) \Big/ \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^p\, dt\right) < c$$

для всех функций из $A^n(-\infty, \infty)$, для которых числитель и знаменатель предыдущего выражения определены и конечны.

E13. Предположим, что функция q принадлежит $L_p[0, \infty)$ и

$$\tau=-\left(\frac{d}{dt}\right)^2+q(t), \qquad 0\leqslant t<\infty.$$

Доказать, что существенным спектром оператора $T_1(\tau, p)$ является положительная полуось.

F. *Оператор Штурма — Лиувилля*

В следующих упражнениях буква τ будет обозначать оператор Штурма — Лиувилля

$$\tau = -\frac{d}{dt}\, p(t)\, \frac{d}{dt} + q(t),$$

где функция p считается положительной во всем интервале определения, а функция q — действительной и непрерывной.

F1. Предположим, что $q(t) \geqslant 1$ на действительной оси. Доказать, что существенный спектр оператора τ на действительной оси пуст тогда и только тогда, когда множество непрерывно дифференцируемых функций с компактным носителем, для которых

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{p(t)\,|f'(t)|^2 + q(t)\,|f(t)|^2\}\, dt \leqslant 1,$$

компактно в $L_2(-\infty, \infty)$.

F2. Действительное число λ принадлежит существенному спектру оператора τ тогда и только тогда, когда существует непрерывная функция g с интегрируемым квадратом на интервале определения I, такая, что уравнение

$$(\lambda - \tau) f = g$$

не имеет интегрируемых в квадрате решений.

F3. (Хартман.) Пусть оператор τ определен на интервале $[0, \infty)$, а $N(\lambda, t)$ — число нулей решения уравнения $(\lambda - \tau) f = 0$ в интервале $[0, t)$. Доказать, что точка λ_0 на действительной оси принадлежит существенному спектру оператора τ тогда и только тогда, когда для всех $\lambda < \lambda_0 < \mu$

$$\varlimsup_{t\to\infty} [N(\mu, t) - N(\lambda, t)] = \infty.$$

F4. Пусть оператор τ и функция Q определены, как в теореме 7.66. Допустим, что

$$\int_a^b (p(t))^{-1}\, dt = \infty.$$

Тогда

(а) если $Q(t) \longrightarrow -\infty$,

$$\int_A^b \left| \left[\frac{q'(t)}{|q(t)|^{3/2}} \right]' + \frac{1}{4}\, \frac{[q'(t)]^2}{|q(t)|^{5/2}} \right| dt < \infty$$

для больших A и

$$\int_A^\infty (Q(t))^{-1/2}\,dt < \infty,$$

то существенный спектр оператора τ пуст;

(b) если $Q(t) \to -\infty$, функция Q монотонно убывает при достаточно больших t,

$$\int_A^b \left| \left[\frac{q'(t)}{|q(t)|^{3/2}} \right]' + \frac{1}{4}\,\frac{[q'(t)]^2}{|q(t)|^{5/2}} \right| dt < \infty$$

для больших A и

$$\int_A^\infty (Q(t))^{-1/2}\,dt = \infty,$$

то существенным спектром оператора τ является вся действительная ось.

F5. Используя аппарат, развитый в теореме 7.55, вывести из каждого критерия, данного в разделе G, соответствующий критерий для определения существенного спектра или числа граничных значений оператора Штурма—Лиувилля.

G. *Оператор Штурма—Лиувилля* $-(d/dt)^2 + q(t)$

Следующая группа упражнений связана с оператором $\tau = -(d/dt)^2 + q(t)$, где предполагается, что функция q действительна и непрерывна. Интервалом определения служит $[0, \infty)$. Символ λ будет обозначать действительное число.

G1. Предположим, что для достаточно больших t

$$q(t) \leqslant -Kt^{-2}, \qquad K > 2.$$

Доказать, что уравнение $\tau f = 0$ имеет решение из $L_2(0, \infty)$.

G2. (Уинтнер.) Предположим, что оператор τ обладает тем свойством, что всякий раз, когда функция $f \in L_2(0, \infty)$ является решением уравнения $(\lambda - \tau) f = 0$, функция f' также принадлежит $L_2(0, \infty)$.

(a) Доказать, что τ не имеет граничных значений в бесконечности.

(b) Доказать, что τ обладает этим свойством, если функция q ограничена снизу.

(c) Если, кроме того, предполагать, что функция q ограничена, то любое решение, линейно независимое от решения с интегрируемым квадратом, неограничено.

G3. Пусть оператор τ обладает тем свойством, что для некоторого λ производная каждого квадратично интегрируемого решения уравнения $(\lambda-\tau)f=0$ ограничена. Доказать, что τ не имеет граничных значений в бесконечности.

G4. (Уинтнер.) Предположим, что функция q удовлетворяет условию Липшица

$$|q(t)-q(s)|\leqslant K|t-s|$$

для больших s и t из $[0, \infty)$. Доказать, что оператор τ удовлетворяет условиям упражнения G3.

G5. (Хартман и Уинтнер.) Предположим, что функция q ограничена снизу на интервале $[0, \infty]$, а f — ограниченное решение уравнения $(\lambda-\tau)f=0$. Доказать, что

(a) либо f интегрируемо в квадрате, либо точка λ принадлежит существенному спектру оператора τ;

(b) если все решения уравнения $(\lambda-\tau)f=0$ ограничены, то λ принадлежит существенному спектру оператора τ.

G6. Допустим, что τ не имеет граничных значений в бесконечности и что

(I) если f—ограниченное решение уравнения $(\lambda-\tau)f=0$, то f' ограничена;

(II) если f — решение из $L_2(0, \infty)$ того же уравнения, то существует такая последовательность t_n, стремящаяся к бесконечности, что

$$(f(t_n))^2+(f'(t_n))^2\longrightarrow 0$$

при $n\longrightarrow\infty$.

Доказать, что если f — ограниченное решение уравнения $(\lambda-\tau)f=0$, то либо f квадратично интегрируемо, либо λ принадлежит существенному спектру оператора τ.

G7. Предположим, что в уравнении

$$\text{(A)}\qquad (P(t)F'(t))'-Q(t)F(t)=0, \quad 0\leqslant t<\infty,$$

P — положительная, а Q — неотрицательная функции. Доказать, что это уравнение имеет ограниченное решение.

G8. Предположим, что $q_1(t)\leqslant q_2(t)$ $(0\leqslant t<\infty)$ и уравнение

$$f''(t)-q_1(t)f(t)=0$$

имеет решение с конечным числом нулей и решение с интегрируемым квадратом. Доказать, что уравнение

$$g''(t)-q_2(t)g(t)=0$$

имеет решение из $L_2(0, \infty)$.

(Указание. Написать $g(t)=h(t)f(t)$ и методом вариации произвольных постоянных получить уравнение типа (A) для h, как в G7. Заключить, что $g(t)=O(f(t))$.)

G9. Пусть $N(t)$ — число нулей некоторого решения уравнения $\tau f=0$ в интервале $[0, t)$. Доказать следующие утверждения.

(a) Если $N(t)>1$, то

$$\int_0^t |q(s)|\,ds > 4t^{-1}.$$

(b) Предположим, что q неположительна, а t_n есть n-й нуль некоторого решения уравнения $\tau f=0$. Тогда

$$\int_0^{t_n} q(t)\,dt > 4(n-1)^2 t_n^{-1}.$$

(c) $$N(t)=O\left(\left[t\int_0^t \max(0, -q(s))\,ds\right]^{1/2}\right)+O(1).$$

(d) Если

$$\int_0^t \max(0, -q(s))\,ds = O(t^3),$$

то оператор τ не имеет граничных значений в бесконечности.

(Указания. (a) $\int_0^t |f''(s)(f(s))^{-1}|\,ds > (\max_{0\leqslant s\leqslant t} f(s))^{-1}\int_0^t |f''(s)|\,ds >$ $> (\max_{0<s<t}|f(s)|)^{-1}\max_{0<s,\,u\leqslant t}|f'(s)-f'(u)|$; применить теорему Ролля.

(c) Привести к случаю, когда q не положительна, и применить (b).

(d) Применить упражнение G14, используя (c).)

G10. Предположим, что q — отрицательная невозрастающая функция, а f — решение уравнения $\tau f=0$. Пусть $\{s_n\}$ — возрастающая последовательность нулей функции f.

(a) Доказать, что $s_n - s_{n-1} \geqslant s_{n+1}-s_n$.

(b) Пусть m_n — точка между s_{n-1} и s_n, в которой $f'(s)$ обращается в нуль. Предположим, что функция f интегрируема в квадрате. Доказать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} f^2(m_n)(m_{n+1}-m_n) < \infty.$$

(c) В предположении, что функция q дифференцируема, доказать, что

$$[(f(s))^2-(f'(s))^2(q(s))^{-1}]' \leqslant 0.$$

(d) Вывести, что если функция f интегрируема в квадрате, то

$$\int_0^\infty [(f(s))^2 - (f'(s))^2 (q(s))^{-1}]\, ds < \infty.$$

(e) (Хартман и Уинтнер.) При дополнительном предположении

$$\int_0^\infty |q(t)|^{-1/2}\, dt = \infty$$

доказать, что оператор τ не имеет граничных значений в бесконечности.

G11. (Хартман и Уинтнер.) Предположим, что функция q отрицательна и не возрастает и

$$\int_0^\infty |q(t)|^{-1}\, dt = \infty.$$

Доказать, что нуль принадлежит непрерывному спектру каждого самосопряженного расширения оператора τ. (Указание: применить неравенство

$$[(f'(s))^2 + (q(s))^2]' \geqslant 0,$$

справедливое для решения уравнения $\tau f = 0$.)

G12. Предположим, что функция q неположительна, а уравнение $\tau f = 0$ имеет решение с интегрируемым квадратом. Доказать, что f имеет бесконечное число нулей.

G13. Пусть f и g — решения уравнения $\tau f = 0$, такие, что $fg' - f'g = 1$. Показать, что они могут быть представлены в виде

$$f(t) = r(t) \cos\theta(t),$$
$$g(t) = r(t) \sin\theta(t),$$

где $r(t) > 0$, $0 \leqslant t < \infty$. Показать, что оператор τ имеет два граничных значения в бесконечности тогда и только тогда, когда

$$\int_0^\infty (\theta'(t))^{-1}\, dt < \infty.$$

Какое соотношение имеется между $\theta(t)$ и числом нулей решения рассматриваемого уравнения?

G14. Применяя результат предыдущего упражнения, показать, что если оператор τ имеет два граничных значения в бесконечности, то

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t^2} = \infty,$$

где $N(t)$ — число нулей решения уравнения

$$\tau f = 0.$$

G15. Пусть функции f и g выбраны, как в упражнении G13. Предположим, что функция $[(f(t))^2 + (g(t))^2]^{-1}$ интегрируема на $[0, \infty)$. Доказать, что каждое решение уравнения $\tau f = 0$ имеет конечное число нулей.

(Указание: из условий следует, что $\int\limits_0^\infty \theta'(t)\,dt < \infty$. Выразить это в терминах функции $N(t)$ и проинтегрировать.)

G16. (Хартман.) Предположим, что уравнение $\tau f = 0$ имеет некоторое решение с конечным числом нулей. Доказать, что существует решение g того же уравнения, такое, что функция $(g(t))^{-1}$ интегрируема в квадрате на полуоси, достаточно удаленной от начала.

(Указание. Пусть f — некоторое решение, скажем положительное. Тогда $g(t) = f(t) \int\limits_0^t (f(s))^{-2}\,ds$ также является положительным решением. Поэтому для некоторой постоянной K мы имеем $f(t)(g(t))^{-1} = K - \int\limits_0^t (g(s))^{-2}\,ds$, откуда следует наше утверждение.)

G17. (Хартман и Уинтнер.) Пусть f и g — решения уравнения $\tau f = 0$, такие, что $fg' - f'g = 1$. Тогда обе функции f' и g' не могут одновременно быть квадратично интегрируемыми.

(Указание. В противном случае функция $(f^2 + g^2)^{-1}$ интегрируема, поэтому для некоторого решения h функция h^{-1} интегрируема в квадрате (см. G15, G16). Но h' интегрируема в квадрате, поэтому $h'h^{-1}$ интегрируема, однако, как легко показать, это невозможно.)

G18. (Хартман и Уинтнер.) Если уравнение $\tau f = 0$ имеет решение, производная которого интегрируема в квадрате, то оператор τ не имеет граничных значений в бесконечности.

(Указание. Пусть f и g определены, как в G17, причем f' и g интегрируемы в квадрате. Тогда функция $(gf)' - 1$ интегрируема и $fg - t$ стремится к некоторому пределу. Поэтому f^{-1} интегрируема в квадрате на $[A, \infty)$ при больших A, а $f^{-1}g$ стремится к пределу, который, как легко показать, равен нулю. Таким образом, $f^{-1}g = -\int\limits_0^t (f(s))^{-2}\,ds$, что приводит к противоречию.)

G19. (Хартман и Уинтнер.) Предположим, что уравнение $(\lambda - \tau) f = 0$ имеет решение, не интегрируемое в квадрате, но имеющее интегрируемую в квадрате производную. Доказать, что точка λ принадлежит существенному спектру оператора τ.

G20. (Уинтнер.) Предположим, что q ограничена снизу и λ не принадлежит существенному спектру оператора τ. Пусть f — решение уравнения $(\lambda-\tau)f=0$ с интегрируемым квадратом, и пусть g — второе решение этого уравнения, такое, что $fg'-f'g=1$.

(a) Пусть h — любая функция с интегрируемым квадратом, и пусть r — квадратично интегрируемое решение уравнения $(\lambda-\tau)\,r=h$. Доказать, что функция r' квадратично интегрируема.

(b) Доказать, что

$$f(t)\,r'(t)-r(t)\,f'(t)=-\int_t^\infty f(t)\,h(t)\,dt.$$

(c) Доказать, что

$$\int_0^\infty t\,(f(t))^2\,dt<\infty.$$

(d) Вывести, что

$$\int_0^\infty t\,(f'(t))^2\,dt<\infty.$$

(e) Доказать по индукции, что

$$\int_0^\infty t^k\,(f(t))^2\,dt<\infty \quad \text{и} \quad \int_0^\infty t^k\,(f'(t))^2\,dt<\infty.$$

(Указания. (a) Применить тождество $ff''=(ff')'-(f')^2$; если f' не интегрируема в квадрате, то $(ff')'$ стремится к бесконечности, поэтому $(f^2)'$ и тем более f^2 стремятся к бесконечности, и мы получаем противоречие. (d) Получить промежуточные оценки

$$\int_0^t sf(s)\,f''(s)\,ds+\int_0^t s\min(-q(s),\,0)\,(f(s))^2\,ds=o(1),$$

$$tf(t)\,f'(t)-\int_0^t sf'(s)\,ds+\int_0^t s\min(-q(s),\,0)\,(f(s))^2\,ds=O(1),$$

из которых легко выводится требуемый результат. (e) Начать с доказательства того, что функция $t^k\,(f(t)\,r'(t)-r(t)\,f'(t))$ интегрируема.)

G21. Пусть $q(t)=-e^{kt}$, где k — положительная постоянная. Доказать, что оператор τ имеет два граничных значения в бесконечности.

G22. Пусть $q(t) = -t^2 \log^4 t$. Доказать, что оператор τ имеет два граничных значения в бесконечности.

G23. (Хартман.) Пусть $Q(t)$ — положительная непрерывная неубывающая функция, а $\theta(t)$ определена, как в задаче G13.

(a) Доказать, что для $u < t$

$$\int_u^t (\theta'(s))^{-1} ds \geqslant 2 \int_u^t (Q(s))^{-1} ds - \int_u^t (Q(s))^{-2} \theta'(s)\, ds.$$

(b) Используя соотношение между θ и числом нулей $N(t)$ решения в интервале $[0, t)$, установленное в упражнении G13, показать, что правая часть последнего неравенства больше, чем π, умноженное на величину

$$N(u)(Q(u))^{-2} - N(t)(Q(t))^{-2} + \int_u^t N(s)\, d((Q(s))^{-2}) - \\ - (Q(t))^{-2} - (Q(u))^{-2} + \int_u^t d((Q(s))^{-2}).$$

(c) Вывести неравенство

$$\int_u^t (\theta'(s))^{-1} ds \geqslant \int_u^t (Q(s))^{-1} ds - \pi \int_u^t (Q(s))^{-2} dN(s) - \\ - \pi (Q(t))^{-2} - \pi (Q(u))^{-2} + \pi \int_u^t d((Q(s))^{-2}).$$

(d) Доказать, что если $u = u(t)$ можно выбрать так, что

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \Big[2 \int_u^t (Q(s))^{-1} ds - \pi \int_u^t (Q(s))^{-2} dN(s) - \\ - \pi (Q(t))^{-2} - \pi Q(u) + \pi \int_u^t d((Q(s))^{-2}) \Big] > 0,$$

то оператор τ не имеет граничных значений в бесконечности.

G24. Предположим, что

$$\underline{\lim_{t\to\infty}} \left[\left(N(t) - N\left(\frac{t}{2}\right)\right) t^{-2} \right] < \infty.$$

Доказать, что оператор τ не имеет граничных значений в бесконечности. (Указание: в предыдущем упражнении положить $u = t/2$ и $Q(t) = t/\varepsilon$.)

G25. Предположим, что

$$\varliminf_{t\to\infty} [N(t)-N(t-1)] < \infty.$$

Доказать, что оператор τ не имеет граничных значений в бесконечности. (Указание: в упражнении G23 положить $u=t-1$ и $Q(t)=1/t$.)

G26. Предположим, что существует бесконечная последовательность непересекающихся интервалов длины не меньше единицы, и на объединении всех этих интервалов функция q равномерно ограничена снизу. Доказать, что оператор τ не имеет граничных значений в бесконечности.

(Указание: применить предыдущее упражнение.)

G27. (Хартман.) Пусть Q — положительная непрерывная функция, которая не убывает и имеет ограниченную вариацию на каждом конечном интервале, причем

$$\int_0^\infty (Q(s))^{-1}\,ds=\infty.$$

Как обычно, пусть $N(t)$ — число нулей решения уравнения $\tau f=0$ в интервале $[0, t)$; предположим, что

$$N(t)\leqslant \int_0^t Q(s)\,ds+K(Q(\varepsilon))^{2-\varepsilon},$$

где $0<\varepsilon<2$.

(a) Показать, что

$$\int_u^t (Q(s))^{-2}\,dN(s)\leqslant \int_u^t (Q(s))^{-1}\,ds+K\int_1^t Q^{-1-\varepsilon}\,dQ(s).$$

(b) Применяя результат упражнения G23, показать, что оператор τ не имеет граничных значений в бесконечности.

G28. Предположим, что Q — невозрастающая положительная непрерывная функция, имеющая ограниченную вариацию на каждом конечном интервале, причем

$$\int_0^\infty (Q(s))^{-1}\,ds=\infty.$$

Далее, пусть $N(t)$ удовлетворяет условию предыдущего упражнения. Доказать, что оператор τ не имеет граничных значений в бесконечности.

(Указание: это следует непосредственно из G27.)

G29. Предположим, что Q — монотонная положительная непрерывная функция, причем

$$\int_0^\infty (Q(s))^{-1}\,ds=\infty,$$

и

$$\int_0^t \max(-q(s),\,0)\,ds\leqslant t^{-1}\left(\int_0^t Q(s)\,ds\right)^2.$$

Доказать, что оператор τ не имеет граничных значений в бесконечности.

(Указание: применить упражнение G19.)

G30. Предположим, что

$$N(t)=O(t^3\log t).$$

Доказать, что оператор τ не имеет граничных значений в бесконечности.

G31. Доказать следующее уточнение результата упражнения G19 (d): если

$$\int_0^t \max(-q(s),\,0)\,ds=O(t^3\log^2 t),$$

то оператор τ не имеет граничных значений в бесконечности.

G32. (Хартман и Уинтнер.) Предположим, что q — отрицательная дифференцируемая функция. Пусть $N(t)$ — число нулей решения f уравнения $\tau f=0$ в интервале $[0,\,t)$, такого, что $f(0)=0$, и пусть

$$\theta(t)=\operatorname{arc\,tg}([-q(t)]^{1/2}f(t)(f'(t))^{-1}).$$

(a) Доказать, что

$$|\theta(t)-\pi N(t)|\leqslant\pi.$$

(b) Доказать, что

$$\theta'(t)=(-q(t))^{1/2}-$$
$$-[(f'(t))^2-q(t)(f(t))^2][(-q(t))^{1/2}f(t)f'(t)]\frac{q'(t)}{2q(t)}.$$

(c) Доказать, что

$$N(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^t(-q(s))^{1/2}\,ds+\int_0^t k(s)(\log(-q(s)))'\,ds+r(t),$$

где k и r — измеримые функции, такие, что

$$-1/2 < k(t) < 1/2 \quad \text{и} \quad -\pi < r(t) < \pi.$$

G33. Предположим, что функция Q дифференцируема,

$$Q(t) \geqslant K > 0, \qquad 0 \leqslant t < \infty,$$
$$|Q'(t)|\,(Q(t))^{-2} \leqslant M$$

для некоторых постоянных M и K и

$$\left| \int_0^t q(s)\,ds \right| \leqslant Q(t).$$

Пусть f — интегрируемое в квадрате решение уравнения $(\lambda - \tau) f = 0$. Доказать по порядку следующие утверждения:

(a) $$\int_0^t [f'(s)(Q(s))^{-1}]^2\,ds = \int_0^t [f(s) f'(s)]' (Q(s))^{-2}\,ds +$$
$$+ \lambda \int_0^t [f(s)(Q(s))^{-1}]^2\,ds - \int_0^t q(s)(f(s))^2 (Q(s))^{-2}\,ds = J_1 + J_2 + J_3;$$

(b) $$J_1 = O(|f(t) f'(t)|) + O\left(\left(\int_0^t [f'(s)(Q(s))^{-1}]^2\,ds\right)^{1/2}\right) + O(1),$$
$$J_2 = O(1),$$
$$J_3 = O((f(t))^2) + O\left(\left(\int_0^t f'(s)(Q(s))^{-1}\,ds\right)^{1/2}\right) + O(1);$$

(c) $$\int_0^t [f'(s)(Q(s))^{-1}]^2\,ds = O[|f(t) f'(t)| + (f(t))^2] +$$
$$+ O\left(\left(\int_0^t f'(s)(Q(s))^{-1}\,ds\right)^{1/2}\right);$$

(d) функция $f'(t)(Q(t))^{-1}$ интегрируема в квадрате (Хартман).

G34. (Борг.) Предположим, что

$$\overline{\lim}\,(\log t)^{-1} \int_0^t |q(s)|\,ds = A < \infty.$$

Доказать, что непрерывный спектр каждого самосопряженного расширения оператора τ содержит полуось $[A^2, \infty)$.

(Указание. В предыдущем упражнении положить $Q(t)=\log t$; пусть $(\lambda-\tau)f=0$, где $\lambda>A^2$. Если f интегрируема в квадрате, то неравенство

$$(f(t))^2+\lambda^{-1}(f'(t))^2\geqslant K\,\mathrm{ex}\left(-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^t|q(s)|\,ds\right)$$

приводит к противоречию.)

G35. (Хартман.) Используя упражнения F3 и G33, доказать, что если q — невозрастающая отрицательная функция и $|q(t)|=O(t^2)$, то существенным спектром оператора τ является вся действительная ось.

G36. (Хартман.) Предположим, что q — монотонная отрицательная функция, стремящаяся к $-\infty$, и для некоторого $k>1$

$$\int_0^\infty|q(s)|^{-k/2}\,ds=\infty.$$

Доказать следующие утверждения.

(a) Для заданного $t>0$ пусть $s(t)$ — наибольшее действительное число, такое, что $q(s)=2q(t)$. Тогда

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\int_t^{s(t)}|q(s)|^{k/2}\,ds=\infty.$$

(b) Существенным спектром оператора τ является вся действительная ось.

(Указание: использовать F3, G3.)

G37. Пусть f — решение уравнения $(\lambda-\tau)f=0$, такое, что $f(0)=0$, и пусть

$$\theta(t,\lambda)=\operatorname{arctg}\sqrt{\lambda}\,f(t)\,(f'(t))^{-1},\qquad \theta(0,\lambda)=0,\qquad \lambda>0.$$

Это определяет единственную непрерывную функцию на положительной полуоси для каждого $\lambda\geqslant 0$.

(a) Доказать, что

$$|\theta'(t,\lambda)-\sqrt{\lambda}|\leqslant\lambda^{-1/2}|q(t)|.$$

(b) Вывести оценку

$$|\pi N(t,\lambda)-\lambda^{1/2}t|\leqslant O(1)+\lambda^{-1/2}\int_0^t|q(s)|\,ds,$$

где $N(t,\lambda)$ — число нулей функции f в интервале $[0,t)$.

G38. (Хартман.) Предположим, что

$$\varliminf_{t\to\infty} t^{-1}\int_0^t |q(s)|\,ds = 0.$$

Доказать, что существенный спектр оператора τ содержит положительную полуось. (Указание: использовать предыдущее упражнение и F3.)

G39. (Хартман.) Предположим, что

$$\varliminf_{t\to\infty} t^{-1}\int_0^t |q(s)|\,ds = A.$$

Доказать, что каждый интервал $[\lambda, \lambda+4A+4A^2\lambda^{-1}]$ $(\lambda>0)$ пересекается с существенным спектром оператора τ. (Указание: использовать метод предыдущего упражнения.)

G40. (Шноль.) Предположим, что существует последовательность $\{(a_n, b_n)\}$ интервалов положительной действительной полуоси, таких, что $b_n-a_n\to\infty$ и

$$(b_n-a_n)^{-1}\int_{a_n}^{b_n}(q(t))^2\,dt\to 0.$$

(a) Для достаточно больших n пусть h_n — бесконечно дифференцируемая функция, которая обращается в нуль вне (a_n, b_n) и тождественно равна единице на интервале $(a_n+1,\ b_n-1)$, и пусть

$$f_n(t)=h_n(t)\sin t\sqrt{\lambda}, \qquad \lambda>0.$$

Доказать, что

$$|(\lambda-\tau)f_n| = O\left(\sqrt{b_n-a_n}\right).$$

(b) Доказать, что существенный спектр оператора τ содержит положительную полуось.

(Указание: применить теорему 7.1.)

G41. Предположим, что функция q ограничена снизу и нуль принадлежит существенному спектру оператора τ.

(*a*) Пусть $\{f_n\}$ — последовательность из $\mathfrak{D}(T_0(\tau))$, такая, что $|f_n|=1$, $|\tau f_n|\to 0$ и f_n обращается в нуль в интервале $[0, n)$. Положим

$$g_n(t)=f_n(t)\sin t\sqrt{\lambda}, \qquad \lambda>0.$$

Доказать, что $|g_n|>1/3$.

(b) Показать, что $|(\lambda-\tau)g_n| = O\left(\sqrt{\lambda}\right)$.

(c) (Шноль). Доказать, что для больших λ каждый интервал вида $[\lambda-\sqrt{\lambda}, \lambda+\sqrt{\lambda}]$ пересекается с существенным спектром оператора τ.

(Указание: упражнение A6).

G42. Предположим, что функция q ограничена снизу. Доказать, что существенный спектр оператора τ либо пуст, либо не ограничен сверху.

G43. (Молчанов.) Предположим, что функция q ограничена снизу. Доказать, что существенный спектр оператора τ пуст тогда и только тогда, когда для каждого $u>0$

$$\lim_{t\to\infty}\int_t^{t+u} q(s)\,ds=\infty.$$

(Указание: использовать F2.)

G44. (Путнам.) Предположим, что функция q интегрируема в квадрате. Доказать, что положительная действительная полуось принадлежит существенному спектру оператора τ.

(Указание. Допустим, что существует интегрируемая в квадрате функция f, такая, что $(\lambda-\tau)f=0$, где $\lambda>0$, и пусть $g_1(t)$ и $g_2(t)$ — линейно независимые решения уравнения $g''(t)-\lambda g(t)=0$. Если λ не принадлежит существенному спектру, то существуют интегрируемые в квадрате функции f_1 и f_2, такие, что $f_i''+(\lambda-q(t))f_ig=g_ig$. Получить противоречие.)

G45. Предположим, что функция q интегрируема в квадрате, а f — решение уравнения $(\lambda-\tau)f=0$ с интегрируемым квадратом. Доказать, что f' и f'' интегрируемы в квадрате и равны $o(1)$. Доказать, что если $\lambda\neq 0$, то предел

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^{t} f(s)\,ds$$

существует и конечен.

H. *Оператор* $-(d/dt)^2+q(t)$ *с суммируемой функцией* q

Следующая группа упражнений связана с оператором $\tau=-(d/dt)^2+q(t)$. В дальнейшем, если специально не оговорено противное, везде предполагается, что этот оператор определен на интервале $[0, \infty)$, что q — действительная непрерывная суммируемая функция в этом интервале, а λ — действительное число.

H1. Доказать, что оператор τ не имеет граничных значений в бесконечности и его существенным спектром является положительная полуось.

H2. (Вспомогательная лемма.) Пусть f — непрерывная функция, а g — суммируемая функция на интервале $[0, A]$. Предположим, что

$$f(t) \leqslant O(1) + \int_0^t f(s)\, g(s)\, ds, \quad 0 < t \leqslant A.$$

Доказать, что

$$f(t) \leqslant k \exp\left(\int_0^t g(s)\, ds\right).$$

H3. Пусть $f(t, \lambda)$ и $g(t, \lambda)$ — решения уравнения $(\lambda - \tau) f = 0$, удовлетворяющие граничным условиям

$$f(0, \lambda) = \sin\theta, \qquad f'(0, \lambda) = -\cos\theta,$$
$$g(0, \lambda) = \cos\theta, \qquad g'(0, \lambda) = \sin\theta.$$

Доказать, что функция f удовлетворяет интегральному уравнению

$$f(t, \lambda) = \sin\theta \cos t\sqrt{\lambda} - \left(\sqrt{\lambda}\right)^{-1} \cos\theta \sin t\sqrt{\lambda} + \\ + \left(\sqrt{\lambda}\right)^{-1} \int_0^t \sin\left((t-s)\sqrt{\lambda}\right) q(s) f(s, \lambda)\, ds, \qquad \lambda > 0.$$

H4. Из упражнений H3 и H2 вывести, что для $\lambda > 0$

$$f(t, \lambda) = O\left((1 + (\sqrt{\lambda})^{-1}) \exp\left((\sqrt{\lambda})^{-1} \int_0^t |q(s)|\, ds\right)\right)$$

и аналогичная оценка справедлива для решения g.

H5. Получить следующую оценку для решения f:

$$f(t, \lambda) = m(\lambda) \cos t\sqrt{\lambda} + n(\lambda) \sin t\sqrt{\lambda} + o(1) = \\ = \sqrt{m^2(\lambda) + n^2(\lambda)} \sin\left(\sqrt{\lambda}\,(t - \alpha(\lambda))\right) + o(1)$$

при $t \to \infty$, где

$$m(\lambda) = \sin\theta - \left(\sqrt{\lambda}\right)^{-1} \int_0^\infty \sin\left(s\sqrt{\lambda}\right) q(s) f(s, \lambda)\, ds,$$

$$n(\lambda) = -\left(\sqrt{\lambda}\right)^{-1} \cos\theta + \left(\sqrt{\lambda}\right)^{-1} \int_0^\infty \cos\left(s\sqrt{\lambda}\right) q(s) f(s, \lambda)\, ds.$$

Показать, что подобная асимптотическая оценка справедлива для g. Показать, что эту оценку можно дифференцировать.

H6. Пусть T — самосопряженное расширение оператора $T_0(\tau)$, полученное наложением граничного условия

$$Bf = f(0)\cos\theta + f'(0)\sin\theta = 0.$$

Взяв в качестве определяющей системы (см. теорему 5.23) решение $f(t, \lambda)$ уравнения $(\tau-\lambda)f=0$, удовлетворяющее начальным условиям $f(0, \lambda)=\sin\theta$ и $f'(0, \lambda) = -\cos\theta$, доказать, что мера μ, связанная с этой определяющей системой (см. теорему 5.23), задается выражением

$$\mu(I) = \frac{1}{\pi}\int_I \left(\sqrt{\lambda}\right)^{-1}[m^2(\lambda)+n^2(\lambda)]^{-1}\,d\lambda, \qquad I \subseteq (0, \infty).$$

Показать, что этот результат может быть сформулирован следующим образом. Для каждого $\mu>0$ пусть $\sigma(t, \mu)$ — единственное решение с асимптотикой $\sin(\mu t-\alpha(\mu))\,(1+o(1))$ при $t\to\infty$ уравнения $\tau\sigma=\mu^2\sigma$, удовлетворяющее заданному граничному условию при $t=0$. Тогда формула [1])

$$(Uf)(\mu) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \underset{A\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_0^A f(t)\,\sigma(t, \mu)\,dt, \qquad \mu>0,$$

определяет ограниченный оператор, отображающий $L_2[0, \infty)$ в себя, и для каждой ограниченной борелевской функции F

$$(E((0, \infty); T)F(T)f)(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \underset{A\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_0^A (Uf)(\mu)\,F(\mu^2)\,\sigma(t, \mu)\,d\mu$$

и

$$|E((0, \infty); T)f|^2 = \int_0^\infty |(Uf)(\mu)|^2\,d\mu.$$

H7. Пусть T — любое самосопряженное расширение оператора τ. Доказать, что любая мера, полученная по теореме 5.23, абсолютно непрерывна относительно меры Лебега.

H8. Рассмотрим оператор $\tau = -(d/dt)^2+q(t)$ на интервале (a, ∞), где $-\infty\leqslant a<\infty$. Предположим, что $a<b<\infty$ и $\int_b^\infty q(t)\,dt<\infty$. Пусть τ_1 — сужение оператора τ на интервал (a, b), а Λ — подинтервал интервала $(0, \infty)$, не пересекающийся с $\sigma_e(\tau_1)$. Пусть T — самосопряженное расширение оператора $T_0(\tau)$.

[1]) Это утверждение верно, когда T не имеет отрицательных дискретных собственных значений.— *Прим. перев.*

(a) Показать, что либо $T = T_1(\tau)$, либо T определяется простым граничным условием $B(f) = 0$ в точке a, причем последний случай имеет место тогда и только тогда, когда каждое решение уравнения $\tau f = \lambda f$ квадратично интегрируемо в окрестности точки a.

(b) Обобщая последнее заключение упражнения Н6, получить следующее утверждение: для каждого числа $\mu > 0$, такого, что $\mu^2 \in \Lambda$, пусть $\sigma(t, \mu)$ — единственное решение уравнения $\tau\sigma = \mu^2\sigma$ с асимптотикой $\sin(\mu t - \alpha(\mu))(1 + o(1))$, квадратично интегрируемое в окрестности точки $t = a$ и удовлетворяющее граничному условию $B(f) = 0$ в точке a, определяющему T, если только $T \neq T_1(\tau)$. Тогда формула

$$(Uf)(\mu) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname*{l.i.m.}_{A\to\infty} \int_0^A f(t)\,\sigma(t, \mu)\,dt, \quad \mu > 0, \quad \mu^2 \in \Lambda,$$

определяет ограниченный оператор, отображающий $L_2(0, \infty)$ в $L_2(\Lambda_0)$, где $\Lambda_0 = \{\mu > 0 \mid \mu^2 \in \Lambda\}$. Для каждой ограниченной борелевской функции F

$$(E(\Lambda_0, T)\,F(T)\,f)(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\Lambda_0} (Uf)(\mu)\,F(\mu^2)\,\sigma(t, \mu)\,d\mu,$$

причем интеграл в правой части существует в смысле среднего квадратического и

$$|E(\Lambda_0, T)\,F(T)\,f|^2 = \int_{\Lambda_0} |Uf(\mu)|^2\,|F(\mu^2)|^2\,d\mu.$$

Н9. Используя упражнение Н8, установить свойства

(a) sin- и cos-преобразований Фурье;

(b) преобразования Ганкеля.

Н10. Пусть q суммируема на $(-\infty, \infty)$ и

$$\tau = -\left(\frac{d}{dt}\right)^2 + q(t).$$

Для каждого числа $\lambda = \mu^2$, где $\mu > 0$, пусть $\sigma_+(t, \lambda)$ и $\sigma_-(t, \lambda)$ — решения уравнения $\tau\sigma = \lambda\sigma$, имеющие асимптотику соответственно $e^{it\mu}$ и $e^{-it\mu}$ при $t \to -\infty$ (см. лемму 6.18), а $\Sigma_+(t, \lambda)$ и $\Sigma_-(t, \lambda)$ — решения того же уравнения, которые имеют соответственно ту же асимптотику при $t \to \infty$.

(a) Показать, что σ_+, σ_-, Σ_+ и Σ_- однозначно определяются своими асимптотиками, непрерывно зависят от λ, причем σ_+ линейно не зависит от σ_-, а Σ_+ линейно не зависит от Σ_-.

(b) Однозначно определенные коэффициенты $\varrho(\lambda)$ и $\tau(\lambda)$ уравнения

$$\tau(\lambda)\,\Sigma_+(t, \lambda) = \sigma_+(t, \lambda) + \varrho(\lambda)\,\sigma_-(t, \lambda)$$

физики называют *коэффициентом отражения и коэффициентом пропускания для потенциала* q. Показать, что $|\tau(\lambda)|^2+|\varrho(\lambda)|^2=1$, и если мы возьмем $\sigma_-(t, \lambda)$ и $\sigma_+(t, \lambda)$ в качестве определяющей системы для τ на интервале $(0, \infty)$, то соответствующая положительная матричная мера (см. теорему 5.23) задается формулой

$$\begin{pmatrix} \mu_{11}(I) & \mu_{12}(I) \\ \mu_{21}(I) & \mu_{22}(I) \end{pmatrix} = \frac{1}{\pi}\int_I \begin{pmatrix} 1 & \varrho(\lambda) \\ \overline{\varrho(\lambda)} & 1 \end{pmatrix} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}}.$$

(c) Вывести отсюда теорему Планшереля, рассматривая частный случай $q=0$.

(d) Применяя задачу H8, провести соответствующие вычисления для оператора

$$-\left(\frac{d}{dt}\right)^2+ae^{-t}$$

на интервале $(-\infty, \infty)$.

H11. Предположим, что функция q удовлетворяет условию

$$\int_0^\infty (1+t^k)|q(t)|\,dt<\infty$$

для некоторого положительного целого k, а T и μ определены, как в задаче H6. Показать, что мера μ имеет вид

$$\mu(I)=\int_I g(\lambda)\,d\lambda, \qquad I\subseteq(0, \infty),$$

где функция g дифференцируема k раз.

H12. (Йост и Пейс.) Предположим, что

$$\int_0^\infty (1+t)|q(t)|\,dt<\infty.$$

Доказать, что самосопряженное расширение оператора τ может иметь отрицательное собственное значение только тогда, когда

$$\int_0^\infty t|q(t)|\,dt\geqslant 1.$$

H13. Предположим, что

$$\int_0^\infty (1+t)|q(t)|\,dt<\infty.$$

Доказать, что нуль принадлежит непрерывному спектру каждого самосопряженного расширения оператора $T_0(\tau)$.

(Указание: существуют два линейно независимых решения f и g уравнения $\tau f=0$, таких, что $f(t)\sim 1$ и $g(t)\sim t$ при $t\to\infty$.)

H14. Оператор $T_1(\tau, 1)$ определяется в $L_1[0, \infty)$ следующим образом: $\mathfrak{D}(T_1(\tau, 1))$ — множество всех функций f из $A^2[0, \infty)$, таких, что f и τf суммируемы, и для f из $\mathfrak{D}(T_1(\tau, 1))$

$$(T(\tau, 1)f)(t)=-f''(t)+q(t)f(t), \quad 0\leqslant t<\infty.$$

Пусть $T_0(\tau, 1)$ — сужение оператора $T_1(\tau, 1)$ на класс функций из его области определения, обращающихся в нуль вне переменного компактного подмножества положительной полуоси.

Доказать, что оператор $T_1(\tau, 1)$ замкнут в $L_1(0, \infty)$.

H15. Доказать, что существенным спектром оператора $T_1(\tau, 1)$ в $L_1[0, \infty)$ является положительная полуось. (Указание: использовать метод упражнения G44.)

H16. Сформулировать определение граничного значения для оператора $T_1(\tau, 1)$ в $L_1[0, \infty)$, аналогичное определению 2.17. Доказать результат, аналогичной теореме 2.19, и показать, что оператор T_1 в $L_1[0, \infty)$ не имеет граничных значений в бесконечности.

H17. Предположим, что $\operatorname{Im}\lambda\neq 0$, а f — интегрируемое в квадрате решение уравнения $(\lambda-\tau)f=0$. Доказать, что функция f суммируема. (Указание: это следует непосредственно из предыдущего упражнения.)

I. *Специальные функции*

Следующая группа задач связана с вычислением специальных формул, которые возникают при спектральном анализе некоторых конкретных формальных дифференциальных операторов. Вычисления в каждом случае следует выполнять методами § 8.

I1. Задан формально симметрический дифференциальный оператор

$$\tau=-\left(\frac{d}{dt}\right)t\left(\frac{d}{dt}\right)+\frac{k^2}{t}, \qquad k>\frac{1}{2},$$

на интервале $(0, \infty)$. Доказать следующие утверждения.

(a) Оператор $T_0(\tau)$ не имеет граничных значений и $T_1(\tau)$ — самосопряженный оператор.

(b) Оператор $T_1(\tau)$ не имеет точечного спектра, а его непрерывный спектр покрывает всю действительную ось.

(c) Пусть U — изометрия пространства $L_2(0, \infty)$ в себя, определяемая формулой

$$(Uf)(t)=(2t)^{1/2}f(t^2),$$

а H_{2k} обозначает преобразование Ганкеля

$$(H_{2k}f)(\lambda)=\underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int\limits_0^N (\lambda s)^{1/2}J_{2k}(\lambda s)f(s)\,ds,$$

где $J_{2k}(t)$ — решение уравнения Бесселя

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^2 f+\frac{1}{t}\left(\frac{d}{dt}\right)f+(1-(2k)^{1/2}t^{-2})f=0,$$

$$J_{2k}(t)=\frac{1}{2^{ik}\,\Gamma(2k+1)}e^{-it}t^{2k}\Phi\left(2k+\frac{1}{2},\ 1+4k;\ 2it\right).$$

Показать, что изоморфизм $U^{-1}H_{2k}U$ дает спектральное разложение оператора $T_1(\tau)$.

12. Задан формально самосопряженный дифференциальный оператор

$$\tau=-\left(\frac{d}{dt}\right)t\left(\frac{d}{dt}\right)+t+\frac{b^2}{t},\qquad b^2>\frac{1}{4},$$

на интервале $(0,\infty)$. Доказать следующие утверждения.

(a) Этот оператор не имеет граничных значений, а $T_1(\tau)$ — самосопряженное расширение оператора $T_0(\tau)$.

(b) $T_1(\tau)$ имеет чисто точечный спектр с собственными значениями в точках $1+2n+2b$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$.

(c) Система функций

$$\psi_n(t)=\frac{2^b}{2b\Gamma(2b)}\left(\frac{\pi\Gamma(1+n+2b)}{n!}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-t}t^b\Phi(-n,\ 1+2b;\ 2t),\ n=1,2,\ \ldots,$$

является полной ортонормальной системой в $L_2(0,\infty)$.

(d) Если функция $f\in\mathfrak{D}(T_1(\tau))$ выражается формулой

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(t)\int\limits_0^{\infty}\overline{\psi_n(s)}f(s)\,ds,$$

то

$$(T_1(\tau)f)(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(t)(1+2n+2b)\int\limits_0^{\infty}\overline{\psi_n(s)}f(s)\,ds.$$

13. (Радиальная часть уравнения для атома водорода.) Проанализировать формально самосопряженный дифференциальный оператор

$$L=-\left(\frac{d}{dt}\right)^2-\frac{1}{t}+\frac{k^2-1/4}{t^2},\qquad k\geqslant 1,$$

и доказать следующие утверждения.

(a) Оператор $T_0(\tau)$ не имеет граничных значений.

(b) Самосопряженный оператор $T_1(\tau)$ имеет точечный спектр на отрицательной действительной полуоси с собственными значениями, расположенными в точках

$$\lambda_n=\frac{-1}{(1+2k+2n)^2},$$

с соответствующими нормированными собственными функциями

$$\psi_n(t)=\frac{2^{k+1}}{(1+2k+2n)^{k+2}\Gamma(1+2k)}\left(\frac{\Gamma(2+2k+n)}{n!}\right)^{1/2}t^{1/2+k}\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{t}{1+2k+n}\right)\Phi\left(-n,\ 1+2k;\ \frac{2t}{1+2k+2n}\right),$$

и непрерывный спектр, покрывающий положительную действительную полуось.

(c) Показать, что функция $\sigma(t,\lambda)$ из теоремы 5.23 определяется формулой

$$\sigma(t,\mu)=\frac{\mu^{-1}}{2\sqrt{\pi}}\frac{\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+k+i\mu\right)\right|}{\Gamma(1+2k)}e^{\pi\mu/2}\left(\frac{t}{\mu}\right)^{1/2+k}e^{-it/2\mu}\times$$
$$\times\Phi\left(\frac{1}{2}+k+i\mu,\ 1+2k;\ \frac{it}{\mu}\right),$$

где $\mu=2^{-1}\lambda^{-1/2}$.

14. Задан формально симметрический дифференциальный оператор

$$\tau=-\left(\frac{d}{dt}\right)t\left(\frac{d}{dt}\right)-t+\frac{b^2}{t},\qquad b\geqslant\frac{1}{2},$$

на интервале $(0,\infty)$. Доказать следующие утверждения.

(a) Оператор τ не имеет граничных значений, и поэтому $T_1(\tau)$ — самосопряженный оператор.

(b) Непрерывный спектр оператора $T_1(\tau)$ покрывает всю действительную ось.

(c) Пусть

$$\psi(t,\lambda)=\left(\sqrt{2\pi}\right)^{-1/2b}\Gamma(1+2b)\,e^{-(1/4)\lambda}\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+b+\frac{1}{2}i\lambda\right)\right|t^b\times$$
$$\times e^{-it}\Phi\left(\frac{1}{2}+b-\frac{1}{2}i\lambda,\ 1+2b;\ 2it\right),$$

и пусть

$$(Uf)(\lambda)=\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}}\int_0^N\psi(t,\lambda)f(t)\,dt,\qquad f\in L_2(0,\infty).$$

Тогда U — изометрический изоморфизм пространства $L_2(0, \infty)$ на $L_2(-\infty, \infty)$, и обратное отображение определяется формулой

$$(U^{-1}g)(t) = \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \int_{-N}^{N} \psi(t, \lambda)\, g(\lambda)\, d\lambda.$$

(d) Показать, что изоморфизм U дает спектральное разложение оператора $T_1(\tau)$.

15. Задан формально симметрический дифференциальный оператор

$$\tau = -\left(\frac{d}{dt}\right) t^2 \left(\frac{d}{dt}\right) - t^2 - \frac{1}{4}$$

на интервале $(0, \infty)$. Доказать следующие утверждения.

(a) Оператор τ не имеет граничных значений в нуле и имеет два граничных значения в бесконечности.

(b) Два линейно независимых граничных значения в бесконечности определяются соотношениями

$$B_1(f) = \lim_{t\to\infty} e^{2it}\,(tf(t)\,e^{-it})',$$

$$B_2(f) = \lim_{t\to\infty} e^{-2it}\,(tf(t)\,e^{it})'.$$

(c) Расширение T_θ оператора $T_0(\tau)$, полученное наложением граничного условия

$$B_\theta(f) = e^{(1/2)(\pi i)(1/2-\theta)} B_1(f) - e^{-(1/2)(\pi i)(1/2-\theta)} B_2(f) = 0, \quad 0 < \theta < 2,$$

является самосопряженным оператором.

(d) Оператор T_θ имеет непрерывный спектр, покрывающий положительную полуось, и собственные значения в точках $-(2n+\theta)^2$ с соответствующими нормированными собственными функциями

$$(4n+2\theta)^{1/2} t^{-1/2} J_{2n+\theta}(t),$$

где $J_\mu(t)$ — функция Бесселя порядка μ:

$$J_\mu(t) = \frac{1}{2^\mu \Gamma(1+\mu)}\, e^{-it} t^\mu \Phi\left(\mu + \frac{1}{2};\ 2\mu+1;\ 2it\right).$$

(e) Пусть

$$\psi(t, \mu) = t^{-1/2}(2\pi)^{-1}\,|\Gamma(1+i\mu)|\,\left\{\operatorname{sh}\left[\frac{\pi}{2}(\mu+i\theta)\right] J_{i\mu}(t) + \right.$$
$$\left. + \operatorname{sh}\left[\frac{\pi}{2}(\mu-i\theta)\right] J_{-i\mu}(t)\right\},$$

а E — разложение единицы для оператора T_θ. Тогда оператор

$$(Uf)(\lambda) = \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \int_0^N \psi(t, \mu) f(t)\, dt$$

осуществляет изометрический изоморфизм пространства $E([0, \infty)) L_2(0, \infty)$ на $L_2(0, \infty)$, и обратный к нему оператор определяется формулой

$$(U^{-1}g)(t) = \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \int_0^N \psi(t, \mu) g(\mu)\, d\mu.$$

(f) Показать, что оператор U дает спектральное разложение гильбертова пространства $E([0, \infty)) L_2(0, \infty)$ относительно сужения оператора T_θ на это пространство.

16. Задан формально симметрический дифференциальный оператор

$$\tau = -\left(\frac{d}{dt}\right) t^2 \left(\frac{d}{dt}\right) + t^2 + bt, \qquad b \geqslant 0,$$

на интервале $(0, \infty)$.

(a) Показать, что оператор τ не имеет граничных значений, и поэтому замыкание оператора $T_0(\tau)$ определяет единственный самосопряженный оператор $T_1(\tau)$.

(b) Показать, что спектр оператора $T_1(\tau)$ состоит из непрерывного спектра на полуоси $[1/4, \infty)$.

(c) Полагая $\gamma = \sqrt{4\lambda - 1}$ и взяв в качестве определяющей системы функции

$$f_1(t) = t^{(-1+i\nu)/2} e^{-t} \Phi\left(\frac{1+b+i\nu}{2},\ 1+i\nu;\ 2t\right),$$

$$f_2(t) = t^{(-1-i\nu)/2} e^{-t} \Phi\left(\frac{1+b-i\nu}{2},\ 1-i\nu;\ 2t\right),$$

показать, что спектральная плотность матрицы из теоремы 5.23 определяется формулой

$$\{h_{ij}(d\lambda)\} = \frac{1}{2\pi\nu} \begin{bmatrix} 1 & c \\ c^{-1} & 1 \end{bmatrix} d\lambda, \text{ где } c = -2^{i\nu} \frac{\Gamma\left(\frac{1+b-i\nu}{2}\right) \Gamma(1+i\nu)}{\Gamma\left(\frac{1+b+i\nu}{2}\right) \Gamma(1-i\nu)}.$$

17. Задан формально симметрический дифференциальный оператор

$$\tau = -(t^2+1)^{-1/2} \left(\frac{d}{dt}\right) t^2 \left(\frac{d}{dt}\right) (t^2+1)^{-1/2}$$

на интервале $(0, \infty)$. Доказать следующие утверждения.

(a) Без граничных значений τ дает самосопряженный оператор $T_1(\tau)$.

(b) Спектр оператора $T_1(\tau)$ состоит из непрерывного спектра, покрывающего положительную полуось.

(c) Кратность непрерывного спектра оператора $T_1(\tau)$ равна единице при $0 \leqslant \lambda < 1/4$ и двум при $1/4 < \lambda < \infty$.

(d) Пусть E — разложение единицы для оператора $T_1(\tau)$, и пусть

$$\psi(t, k) = \sqrt{\frac{k}{\pi}} \frac{\Gamma(1/2+k)}{\Gamma(1+2k)} 2^{2k} (t+t^{-1})^{1/2} J_k\left(t\sqrt{\frac{1}{4}-k^2}\right),$$

где

$$k = \sqrt{\frac{1}{4}-\lambda}.$$

Показать, что оператор

$$(Uf)(\lambda) = \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \int_0^N \psi(t, k) f(t)\,dt$$

осуществляет изометрический изоморфизм пространства $E(0, 1/4) L_2(0, \infty)$ на $L_2(0, 1/2)$, и обратное отображение определяется формулой

$$(U^{-1}g)(t) = \underset{N\to 1/2}{\text{l.i.m.}} \int_0^N \psi(t, k)\, g(k)\, dk.$$

(e) Взяв в качестве определяющей системы функции

$$f_1(t) = (t^2+1)^{1/2} t^{-1/2+ir} e^{-i\sqrt{\lambda}t}\, \Phi\left(\frac{1}{2}-ir,\ 1-2ir;\ 2it\mu\right),$$

$$f_2(t) = (t^2+1)^{1/2} t^{-1/2-ir} e^{i\sqrt{\lambda}t}\, \Phi\left(\frac{1}{2}-ir,\ 1-2ir;\ -2it\mu\right),$$

где

$$r = \sqrt{\lambda-\frac{1}{4}},$$

показать, что спектральная плотность матрицы из теоремы 5.23 определяется формулой

$$\{h_{ij}(d\lambda)\} = \frac{1}{2\pi}\begin{bmatrix} 1 & \left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\right)^{2ir} \frac{\Gamma(1-ir)}{\Gamma(1+ir)} e^{-\pi r} \\ \left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\right)^{-2ir} \frac{\Gamma(1+ir)}{\Gamma(1-ir)} e^{-\pi r} & 1 \end{bmatrix} dr.$$

18. Задан формально симметрический дифференциальный оператор

$$\tau = -(1+t^2)^{-1/2}\left(\frac{d}{dt}\right)t^2\left(\frac{d}{dt}\right)(1+t^2)^{-1/2} - \frac{1}{4}(1+t^2)^{-1}$$

на интервале $(0, \infty)$.

(a) Показать, что τ не имеет граничных значений.

(b) Показать, что спектр самосопряженного оператора $T_1(\tau)$ состоит из непрерывного спектра, занимающего положительную полуось.

(c) Полагая $\mu = \lambda^{1/2}$ и взяв в качестве определяющей системы функции

$$f_1(t) = (1+t^2)^{1/2}\, t^{-1/2+i\mu}\, e^{-it\mu}\Phi\left(\frac{1}{2}+i\mu,\, 1+2i\mu;\; 2it\mu\right),$$

$$f_2(t) = (1+t^2)^{1/2} t^{-1/2-i\mu} e^{it\mu}\Phi\left(\frac{1}{2}-i\mu,\; 1-2i\mu;\; -2it\mu\right),$$

показать, что плотность матрицы из теоремы 5.23 определяется формулой

$$\{h_{ij}(d\lambda)\} = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{(2\mu)^{-2i\mu}}{e^{\pi\mu}}\,\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\mu\right)\Gamma(1+2i\mu)}{\Gamma(1-2i\mu)\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\mu\right)} \\ \dfrac{(2\mu)^{2i\mu}}{e^{\pi\mu}}\,\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\mu\right)\Gamma(1-2i\mu)}{\Gamma(1+2i\mu)\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\mu\right)} & 1 \end{bmatrix} d\mu.$$

19. Задан формально симметрический дифференциальный оператор

$$\tau = -\left(\frac{d}{dt}\right)t^2\left(\frac{d}{dt}\right) + bt$$

на интервале $(0, \infty)$.

(a) Показать, что оператор τ не имеет граничных значений.

(b) Показать, что спектр оператора $T_1(\tau)$ состоит из непрерывного спектра, покрывающего полуось $\left[\frac{1}{4}, \infty\right)$.

(c) Полагая $c = b^{1/2}$, $s = t^{1/2}$, $\mu = \sqrt{4\lambda - 1}$ и взяв в качестве определяющей системы функции

$$f_1(t) = e^{-2cs} s^{-1+i\mu}\Phi\left(\frac{1}{2}+i\mu,\; 1+2i\mu;\; 4cs\right),$$

$$f_2(t) = e^{-2cs} s^{-1-i\mu}\Phi\left(\frac{1}{2}-i\mu,\; 1-2i\mu;\; 4cs\right),$$

вычислить плотность матрицы, как в теореме 5.23.

I10. Задан формально симметрический дифференциальный оператор

$$\tau=\left(\frac{d}{dt}\right)^2+e^{kt}, \qquad k>0.$$

(a) Определить выражения для граничных значений оператора τ в бесконечности.

(b) Показать, что τ не имеет граничных значений в $-\infty$.

(c) Провести полный спектральный анализ оператора τ в интервале $[0, \infty)$.

(d) Провести полный спектральный анализ этого оператора в интервале $(-\infty, 0]$.

(e) Провести полный спектральный анализ оператора τ в интервале $(-\infty, \infty)$.

(Указание: решения уравнения $\tau f=\lambda f$ могут быть выражены в терминах гипергеометрических функций.)

J. *Разные упражнения*

J1. Рассмотрим формальный дифференциальный оператор

$$\tau_0=(-1)^n\left(\frac{d}{dt}\right)^{2n},$$

$$\tau=\tau_0+q_{2n-2}(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^{2n-2}+q_{2n-3}(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^{2n-3}+\ldots+q_0(t)$$

на компактном интервале $I=[a, b]$. Доказать следующие утверждения.

(a) Уравнение $\tau\sigma+\mu^{2n}\sigma=0$ имеет систему $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{2n}$ решений, удовлетворяющих асимптотическим соотношениям

$$\sigma_j(t, \mu)=e^{i\omega_j\mu t}(1+O(\mu^{-1})) \quad \text{при} \quad \mu\to\infty$$

для $j=1, 2, \ldots, 2n$ равномерно по t из I, где ω_j — различные корни уравнения $\omega^{2n}=-1$.

(b) Если

$$\tau\sigma(t, \mu)+\mu^{2n}\sigma(t, \mu)=0, \qquad t\in I, \qquad \mu>0,$$

и норма $|\sigma(\cdot, \lambda)|_2$ остается ограниченной при $\mu\to\infty$, то $|\sigma(t, \mu)|\to 0$ при $\mu\to\infty$ равномерно по t в любом замкнутом подинтервале J внутри интервала I.

(c) Для интегрируемой в квадрате функции h уравнения

$$\tau_0 h_0+\mu^{2n}h_0=h,$$

$$\tau h+\mu^{2n}h=h$$

имеют соответственно решения $h_0(t, \mu)$ и $h(t, \mu)$, удовлетворяющие соотношению

$$\lim_{\mu\to\infty} |h_0(t, \mu)-h(t, \mu)|=0$$

равномерно по t из I, тогда как

$$|h_0(\cdot, \mu)|_2+|h(\cdot, \mu)|_2=O(\mu^{-2n})$$

при $\mu\to\infty$.

(Указание. Пусть $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2n}$ занумерованы так, что $\operatorname{Re} i\omega_j<0$ для $j\leqslant n$ и $\operatorname{Re} i\omega_j>0$ для $j>n$. Тогда неоднородное дифференциальное уравнение

$$(\tau+\mu^{2n})f=g$$

имеет решение

$$f(t)=\sigma(t)-\frac{1}{2n}\mu^{1-2n}\Big[\sum_{j=1}^{n}\int_a^t i\omega_j e^{i\omega_j\mu(t-s)}g(s)\,ds-$$

$$-\sum_{j=n+1}^{2n}\int_t^b i\omega_j e^{i\omega_j\mu(t-s)}g(s)\,ds\Big],$$

где σ — любое решение однородного уравнения

$$(\tau+\mu^{2n})\sigma=0.$$

Используя это, построить функции σ_j, h и h_0 как решения подходящих интегральных уравнений.)

J2. (Общий принцип суммируемости.) В дополнение к условиям теоремы 5.23 предположим, что τ ограничен снизу, $\Omega\subseteq\sigma(T)$, а функция f интегрируема в квадрате. Доказать следующие утверждения.

(а) Для достаточно больших λ_0 предел

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Big[(\lambda_0+\lambda)^{-1}\sum_{i,j=1}^{k}(Vf)_i(\lambda)\,\sigma_j(t,\lambda)\,h_{ij}(d\lambda)\Big]=$$

$$=\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a}\Big[(\lambda_0+\lambda)^{-1}\sum_{i,j=1}^{k}(Vf)_i(\lambda)\,\sigma_j(t, \lambda)\,h_{ij}(d\lambda)\Big]$$

существует равномерно по t в любом компактном подинтервале интервала I.

(b) Мы имеем

$$\lim_{\lambda_0\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\lambda_0(\lambda_0+\lambda)^{-1}\sum_{i,\,j=1}^{k}(Vf)_i(\lambda)\,\sigma_j(t,\ \lambda)\,h_{ij}(d\lambda)\right]=$$

$$=\lim_{\lambda_0\to\infty}(-\lambda_0 R(-\lambda_0;\ T)f)(t)=f(t)$$

во всех внутренних точках t интервала I, для которых

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon}|f(s)-f(t)|\,ds=0.$$

(c) Если $\hat{\tau}$ — любой оператор, определенный на некотором подинтервале $\hat{I}$ интервала I и ограниченный снизу, а $\hat{T}$ — самосопряженное расширение оператора $T_0(\hat{\tau})$, то

$$\lim_{\lambda_0\to\infty}[(-\lambda_0 R(-\lambda_0;\ \hat{T})(f\,|\,\hat{I}))(t)+(\lambda_0 R(-\lambda_0;\ T)f)(t)]=0$$

равномерно по t в любом компактном подинтервале внутри интервала I.

(Указание: использовать предыдущее упражнение для вывода (c), а затем из (c) вывести (b).)

J3. Пусть τ — формальный самосопряженный дифференциальный оператор на интервале I, а T — самосопряженное расширение оператора $T_0(\tau)$. Пусть $\{f_n\}$ — ортонормальное семейство собственных функций оператора T, т. е. $Tf_n=\lambda_n f_n$; предположим, что множество λ_n ограничено. Тогда для каждой интегрируемой в квадрате функции f ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(f,\ f_n)\,f_n(t)$$

сходится абсолютно и равномерно на каждом ограниченном замкнутом подинтервале интервала I, и его можно дифференцировать произвольное число раз под знаком суммы, причем продифференцированный ряд также сходится абсолютно и равномерно.

J4. Предположим, что дифференциальный оператор τ на интервале $[a,\ b)$ удовлетворяет условиям, данным в теореме 7.16(d).

Пусть h — любая мера, полученная при помощи обращения формул из теоремы 5.23. Показать, что h абсолютно непрерывна относительно меры Лебега.

J5. Рассмотрим дифференциальный оператор

$$\tau=t\left(\frac{d}{dt}\right)$$

на интервале $[1, \infty)$. Показать, что существенным спектром оператора τ является полоса $0 \leqslant \operatorname{Re}\lambda \leqslant 1$. (Указание: использовать теорему 7.5 и равенство $\sigma_c(\tau^*) = \overline{\sigma_e(\tau)}$.)

J6. Показать, что формально симметрический дифференциальный оператор

$$\tau = (1+t)\left(\frac{d}{dt}\right)(t+1)\left(\left(\frac{d}{dt}\right)^2 - 1\right)(t+1)\frac{d}{dt}(1+t),$$

определенный на интервале $[0, \infty)$, имеет два граничных значения в бесконечности.

J7. В различных задачах прикладной математики приходится рассматривать обобщенные «задачи о собственных значениях» вида

$$\tau f = \lambda r f$$

на интервале I, где τ — формально симметрический дифференциальный оператор порядка n, определенный на I, а r — положительная функция, бесконечно дифференцируемая на I.

(a) Пусть $L_2(I, r)$ — множество измеримых функций, определенных на I, для которых

$$|f|^2 = \int_I r(t)\,|f(t)|^2\,dt < \infty.$$

Для f, g из $L_2(I, r)$ положим

$$(f, g)_r = \int_I r(t) f(t) \overline{g(t)}\,dt.$$

Пусть $T_1(r^{-1}\tau, r)$ обозначает оператор, определенный соотношениями

$$\mathfrak{D}(T_1(r^{-1}\tau, r)) = \{f \in L_2(I, r) \mid f \in A^{(n)}(I),\ r^{-1}\tau f \in L_2(I, r)\},$$
$$(T_1(r^{-1}\tau, r) f)(t) = r^{-1}(t)(\tau f)(t).$$

Показать, что оператор

$$T_0(r^{-1}\tau): L_2(I, r) \to L_2(I, r)$$

является симметрическим, и его сопряженный есть $T_1(r^{-1}\tau, r)$.

(b) Пусть T — самосопряженное сужение оператора $T(r^{-1}\tau, r)$. Показать, что если l обозначает отображение $(lf)(t) = r^{1/2}(t) f(t)$ пространства $L_2(I)$ в $L_2(I, r)$, то lTl^{-1} — самосопряженное сужение оператора $T_1(r^{-1/2}\tau r^{-1/2})$. Показать, что справедливо также обратное утверждение.

(c) В условиях утверждения (b) пусть $E(\tilde{\cdot}; T)$ и $E(\tilde{\cdot}; lTl^{-1})$ — спектральные разложения соответственно T и lTl^{-1}. Тогда $lE(\tilde{\cdot}; T)\,l^{-1} = E(\tilde{\cdot}; lTl^{-1})$.

(d) Оператор $T_0(r^{-1/2}\tau r^{-1/2})$ ограничен снизу как оператор в $L_2(I, r)$ тогда и только тогда, когда $T_0(r^{-1/2}\tau r^{-1/2})$ ограничен снизу как оператор в $L_2(I)$. Предположим, что $T_0(r^{-1}\tau)$ ограничен снизу, а T — его расширение Фридрихса (в смысле теоремы XII.5.2 и следствия XII.5.3). Пусть $\lambda_n(T)$ — числа, определенные, как в упражнении D2, для оператора T. Тогда

$$\lambda_n(T) = \sup_{\mathfrak{H}_0 \in \mathcal{J}(n-1)} \inf_{\substack{(f, \mathfrak{H}_0)=0, \\ 0 \neq f \in \mathfrak{D}(T_0(I))}} \frac{(T_0(\tau) f, f)}{\int_I r(t) |f(t)|^2 dt}.$$

(e) Пусть τ — дифференциальный оператор второго порядка вида

$$\tau = -\left(\frac{d}{dt}\right) p(t) \left(\frac{d}{dt}\right) + q(t),$$

где p — положительная функция. Оператор $T_0(r^{-1}\tau)$ ограничен снизу (как оператор в $L_2(I, r)$) тогда и только тогда, когда существует достаточно большое число λ, такое, что решения уравнения $(\lambda r - \tau) f = 0$ имеют только конечное число k нулей в I. Предположим, что такое λ существует; пусть T — самосопряженное расширение оператора $T_0(r^{-1}\tau)$. Тогда T имеет не меньше $k-1$ собственных значений (считаемых в соответствии с их кратностями) в интервале $(-\infty, -\lambda)$.

(f) (Берковиц). Пусть τ — оператор, описанный в (e); предположим, что функция $(r(t))^{-1} q(t)$ ограничена снизу, а интервал I имеет вид $[a, b)$. Тогда оператор $T_0(r^{-1/2}\tau r^{-1/2})$ (рассматриваемый как оператор в $L_2(I)$) ограничен снизу, и его существенным спектром является подмножество интервала $[c, \infty)$, где

$$c = \varliminf_{t \to b} ((r(t))^{-1} q(t)).$$

J8. Пусть оператор $\tau = -(d/dt)^2 + q(t)$ определен на интервале $[0, \infty)$ и $q(t) \to \infty$ при $t \to \infty$. Пусть T — сужение оператора $T_1(\tau)$, определенное граничным условием $f(0) = 0$.

(a) Показать, что T — самосопряженный оператор, спектр которого представляет собой бесконечную последовательность простых собственных значений $\lambda_n(q)$, стремящуюся к бесконечности.

(b) Пусть $N(\mu, q)$ — число собственных значений $\lambda_n(q)$ на интервале $(-\infty, \mu]$. Показать, что

$$\mu^{1/2} = o(N(\mu, q)) \quad \text{при} \quad \mu \to \infty.$$

(c) Предположим, что

$$t^{1/\varepsilon} = o(q(t)) \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Показать, что

$$N(\mu, q) = O(\mu^{1/2+\varepsilon}) \quad \text{при} \quad \mu \to \infty.$$

J9. Пусть τ — формально самосопряженный дифференциальный оператор порядка n, определенный на интервале I. Предположим, что τ ограничен снизу и множество $\sigma_e(\tau)$ пусто. Пусть T — самосопряженное расширение оператора $T_0(\tau)$, а $N(\mu, T)$ — число собственных значений оператора T в интервале $(-\infty, \mu)$. Показать, что $\mu^{1/n} = O(N(\mu, T))$ при $\mu \to \infty$. Показать, что если интервал I бесконечен, а старший коэффициент оператора τ ограничен сверху или если старший коэффициент оператора τ стремится к нулю в одном из свободных концов интервала I, то справедливо более сильное утверждение

$$\mu^{1/n} = o(N(\mu, T)).$$

10. Примечания и дополнения

А. *Исторические замечания*. Среди применений спектральной теории самосопряженных операторов, развитой в гл. X и XII, наиболее значительное место занимают применения к изучению линейных дифференциальных операторов. Общий подход к таким вопросам, как разложение по собственным функциям дифференциальных операторов второго порядка, граничные значения сингулярных дифференциальных операторов или разложения в обобщенный «интеграл Фурье», оказался возможным благодаря вполне прояснившимся связям всех этих вопросов с геометрией гильбертова пространства. Вместе с тем, как бы это ни казалось теперь парадоксальным, теория собственных значений операторов Штурма — Лиувилля еще до расцвета теории матриц стимулировала развитие общей спектральной теории.

Идея разложения функции в линейную комбинацию функций более простого вида возникла еще в восемнадцатом веке. Даниилу Бернулли мы обязаны первыми смутными намеками на возможность разложения по собственным функциям непрерывной функции, заданной на конечном интервале. В самом деле, его подход к задаче о колебании струны позволил ему впервые сформулировать принцип, названный в дальнейшем принципом суперпозиции (1753), который вызвал уже в девятнадцатом веке многочисленные работы по дифференциальным уравнениям второго порядка и гармоническому анализу. Даниилу Бернулли мы обязаны пробуждением интереса к задаче о колебании струны, которая с 1713 г., когда этой задачей впервые занялся Б. Тейлор, оставалась без внимания.

Лагранж под влиянием этой работы Бернулли и близких исследований Эйлера и Даламбера в 1779 г. впервые применил к уравнению струны идею аппроксимации решения линейного дифференциального уравнения решениями конечной системы линейных уравнений. Впоследствии эта идея превратилась в один из основных принципов функционального анализа. Непрерывное распределение массы в струне Лагранж заменял конечным числом равномерно размещенных точечных масс.

Разложения в ряды по ортогональным (в современной терминологии) системам функций, таким, как сферические функции или полиномы Лежандра, также были известны еще в восемнадцатом веке. Однако систематический подход к проблеме разложения по собственным функциям произвольного самосопряженного оператора второго порядка оказался возможным лишь к 1830 г. Именно в этом году Штурм [1, 2] и Лиувилль [1, 2] почти одновременно в серии из четырех мемуаров, опубликованных в журнале Лиувилля, развили элегантную теорию дифференциального оператора

$$-\left(\frac{d}{dt}\right)p(t)\left(\frac{d}{dt}\right)+q(t),$$

где q — вещественная, а p — положительная дважды дифференцируемая функция на конечном замкнутом интервале. С современной точки зрения может показаться, что эти работы страдают известными недостатками — они были ограничены существовавшей в то время теорией интегрирования и использовали некоторые аргументы скорее эвристического, чем строго логического характера (которые не были сделаны строгими вплоть до 1905 г.). Однако в этих работах содержалось практически все существенное для будущей теории разложения по собственным функциям дифференциального оператора на замкнутом интервале, включая существование бесконечной последовательности собственных значений, не имеющей конечных предельных точек, свойство ортогональности собственных функций и равенство Парсеваля.

Штурму мы обязаны также теорией осцилляции решений дифференциальных уравнений второго порядка. Его знаменитые теоремы «осцилляции» и «сравнения» оказали влияние на многие, казалось бы, совсем далекие от них проблемы анализа, среди которых не последнее место занимает задача о локализации спектра сингулярного оператора, о которой мы уже говорили в конце § 7 и несколько слов скажем ниже.

Исследования Штурма и Лиувилля вызвали многочисленные работы по теории специальных функций, на которых мы также кратко остановимся ниже. Однако период бурного развития открытой ими «спектральной» теории наступил лишь в первом десятилетии нашего века. Дини [1] начал в 1880 г. и продолжал до 1910 г. изучение разложений в ряды Фурье, в ряды по бесселевым и сферическим функциям; его подход к вопросам сходимости рядов находится на вполне современном уровне. Дини предложил первый критерий равномерной сходимости рядов Фурье и рядов Штурма — Лиувилля. В 1905 г. Диксон [1] дал первое строгое доказательство существования бесконечного дискретного множества собственных значений. Работа Диксона появилась почти одновременно с работами Кнезера [1, 2, 3, 4], который ослабил требования гладкости коэффициентов. Вскоре после этого, с появлением интеграла Лебега, Гобсон (1908, [2]) и Стеклов [1], используя операторы Штурма — Лиувилля, начали изучать проблемы сходимости разложений произвольных интегрируемых функций. Гобсон доказал «принцип локализации», аналогичный соответствующему принципу для тригонометрических рядов. Эти исследования продолжил Хаар (1910—1911, [3]), открывший общий принцип сравнения рядов Штурма — Лиувилля и тригонометрических рядов. В том же году Пиконе [1] опубликовал чрезвычайно элементарное доказательство теоремы сравнения Штурма.

В этот период начинает привлекать внимание задача о распространении теории Штурма на дифференциальные операторы высшего порядка или на операторы более общего типа. Уже в диссертации Вестфаля (1905, [1]) мы находим распространение теории разложения на вещественные самосопряженные дифференциальные операторы четного порядка на замкнутом интервале. Однако наиболее полная теория таких операторов принадлежит Биркгофу [1—7], который в исчерпывающей серии работ, начатых в 1908 г., построил теорию разложений по биортогональным системам, возникающим из (не обязательно самосопряженных) дифференциальных операторов произвольного порядка на замкнутом интервале. Частным случаям проблем, изученных Биркгофом, посвящены также некоторые работы Гильба [2, 3], Бохера [3, 4, 5] и Тамаркина [2, 3] этого периода. Современный вариант теории Биркгофа будет изложен в гл. XIX.

После законченных исследований этих авторов интерес к дифференциальным операторам на конечном замкнутом интервале постепенно спадал. Параллельные исследования Хеллингера [1], Шмидта [1, 2] и Гильберта [1] по интегральным уравнениям естественно привели к мысли об аналогичном подходе к дифференциальным операторам, коэффициенты которых имеют особенности в одном или обоих концах интервала определения.

Этому была посвящена работа Гильба [2], 1909 г. В этой работе рассматривается дифференциальный оператор вида

$$(\tau f)(t)=\left(\frac{d}{dt}\right)t\left(\frac{d}{dt}\right)f(t)+[g(t)+\lambda h(t)]\,t^{-1}f(t)$$

на интервале (0, 1], причем функции g и h предполагаются аналитическими. Это уравнение при помощи функции Грина сводится к интегральному, а затем применяется теория интегральных уравнений. Кроме того, Гильб впервые заметил, что задача на собственные значения для дифференциальных операторов второго порядка с вещественными коэффициентами может оказаться как определенной, так и неопределенной (в современной терминологии — случай ненулевых индексов дефекта).

Однако лишь Герман Вейль сумел соединить эти разрозненные нити и создать единую и далеко идущую теорию самых общих сингулярных формально самосопряженных дифференциальных операторов. В двух статьях Вейля [7, 8] из *Göttingen Nachrichten* и особенно в его мемуаре [5] из 68-го тома *Mathematische Annalen* содержалась исчерпывающая систематическая теория, которая покрывала все предыдущие исследования и на многие годы осталась одним из краеугольных камней линейного анализа.

Мемуар Вейля примечателен с нескольких точек зрения. Представление функций с интегрируемым квадратом при помощи «интеграла Фурье» по «собственным функциям» сингулярного дифференциального оператора позволило по-новому взглянуть на спектральную теорему Гильберта. Кроме того, эта теорема впервые применяется здесь к неограниченному оператору. По существу, в этом мемуаре впервые обсуждаются многие структурные свойства замкнутого самосопряженного неограниченного оператора, такие, как существование «индексов дефекта» и их инвариантность (теорема XII.4.19 в нашей книге) и соответствующие вопросы теории расширений. При этом Вейль применяет свой остроумный геометрический метод стягивающихся кругов. В этой работе Вейля впервые найдены признаки, позволяющие по особенностям коэффициентов определять наличие непрерывного спектра и находить число граничных значений (в смысле определения 2.17) для дифференциального оператора. Исследования Вейля тридцать лет спустя послужили исходным пунктом для работ Хартмана, Уинтнера и их школы по этим вопросам.

Примечательно, что открытия Вейля не привели немедленно к более широким исследованиям. Хотя в двадцатые годы абстрактный линейный анализ вошел в моду, трудности, связанные с обобщением метода предельной точки и предельного круга, препятствовали любым попыткам построить спектральную теорию для дифференциальных операторов высшего порядка. Работа Виндау [1] — вот, по-видимому, все, что было сделано в течение этого десятилетия.

В годы, последовавшие за открытиями Вейля, вплоть до конца сороковых годов, три разные школы вели работу в этом направлении. В 1920 г. появилась волновая механика Шредингера, в которой центральное место занимает некоторое сингулярное уравнение, а именно уравнение Шредингера. В следующие два десятилетия развитие квантовой механики показало, что спектральная теория дифференциальных операторов второго порядка играет существенную роль в физических задачах. Естественно, что в этот период физики заинтересовались теорией Вейля. Однако, хотя связи с новыми физическими теориями стимулировали к дальнейшим математическим исследованиям, необычность аналитического аппарата окружала эти новые концепции ореолом таинственности и благоговейного страха. Квадратичная интегрируемость, спектральные меры, непрерывный спектр вызывали недоверие, которое исчезло только в тридцатых годах после работ таких математиков, как фон Нейман и Фридрихс. Типичный пример имевшегося заблуждения мы находим в ошибочном расширении непрерывного спектра — эвристический «principle of infection» привел к убеждению, что непрерывный спектр обязательно должен содержать полуось (см. книгу Дирака [1]).

Среди математических исследований наметились два направления, которые в последние восемь лет привели к окончательной систематизации. Еще в 1915 г. Гильб [4] предложил доказательство основной формулы обращения Вейля, в котором вместо сингулярных интегральных уравнений широко применяются методы теории функций. Формула обращения была получена при помощи вычетов функции Грина. Ту же идею использовал Титчмарш [5] в 1938 г. В большой серии работ [5—16], почти не затрагивающих функциональный анализ, Титчмарш, применяя исключительно методы теории вычетов, решил задачу вычисления спектральной меры для сингулярных дифференциальных операторов. Вершиной его труда является вывод основной формулы 5.18 для дифференциальных операторов второго порядка.

В первые тридцать лет после опубликования мемуаров Вейля развитие спектральной теории дифференциальных операторов в духе функционального анализа продвигалось довольно медленно. В работе [17] в 1926 г. М. Стоун изучает оператор

$$-\left(\frac{d}{dt}\right)^2+q(t)$$

с суммируемой функцией q и находит, в частности, формулы для преобразования Ганкеля. Несколько других его работ этого периода [18, 19, 20] посвящены более тонким вопросам сходимости разложений в теории Биркгофа. В более поздней книге [3] того же автора кратко описано приложение к дифференциальным операторам спектральной теоремы в гильбертовом пространстве. Несколько лет спустя, в 1937 г., Гальперин [5] опубликовал первое исследование свойств замыкания и сопряженных операторов для неограниченных операторов в гильбертовом пространстве, возникающих из обыкновенных дифференциальных операторов. Почти одновременно Калкин [1, 3] ввел понятие абстрактного граничного значения, плодотворность которого мы старались продемонстрировать на протяжении этой главы. В тот же период Фридрихс [3, 5, 7] продвинул программу Вейля.

В последние годы многие математики занимались различными вопросами спектральной теории самосопряженных дифференциальных операторов. Следуя идеям Вейля, Кодаира в 1949 г. предпринял попытку методами функционального анализа объединить результаты Вейля и Титчмарша. Его работы [1, 4, 5], завершающие теорию операторов четного порядка, имеют несколько точек соприкосновения с материалом § 5 настоящей главы. Основное различие состоит в использовании метода стягивающихся гиперповерхностей, обобщающего метод стягивающихся кругов Вейля. Дальнейшую ясность в формулы Титчмарша — Кодаиры внес Иосида [10] в 1950 г. Упрощенное доказательство теоремы о разложении предложил Левинсон [5, 6]. Коддингтон (1954, [2]) нашел другое доказательство этой теоремы и установил единственность спектральной матрицы. Недавно вышедшая книга [1] этих авторов посвящена дальнейшему развитию теории в данном направлении.

Начиная с 1947 г. и по сей день многочисленные результаты по различным спектральным задачам, связанным с операторами второго порядка, были получены П. Хартманом [1—16], Уинтнером [1—20], Хартманом и Уинтнером [1—21] и их школой (Путнам [1—18], Хартман и Путнам [1, 2], Уоллах [1, 2], Вульфсон [1, 2]). Задача определения существенного спектра и числа граничных значений для операторов второго порядка была изучена в большой серии заметок, опубликованных в *American Journal of Mathematics*. Некоторые из этих результатов обобщены в § 6 и 7, другие упоминаются ниже в разделах C и D.

В России интерес к этой теории возник в 1948 г., начиная с работы М. Г. Крейна [12], в которой его «методом направляющих функционалов» были получены прозрачные доказательства основных теорем. Это, по-видимому, был первый метод, не использующий аппроксимации с конечного интервала и достаточно сильный для применения к операторам произвольного порядка [1]).

Другое доказательство теоремы о разложении, не включающее, правда, случая неединственности матричной меры, принадлежит Левитану [4]. В диссертации Глазмана 1949 г. проведена окончательная классификация задач, связанных с граничными значениями для сингулярного дифференциального оператора. Способ Глазмана прост и не нуждается в геометрическом методе стягивающихся гиперповерхностей.

В последние годы русская школа преуспевает. Достаточно указать на работы Березанского [1, 2], Дородницына [1], Фаге [1, 2],

[1]) Заметим, что фактически М. Г. Крейн первым в 1946 г. установил теорему о разложимости по собственным функциям для сингулярного дифференциального оператора [11, 12].— *Прим. ред.*

Гельфанда и Костюченко [1], Гельфанда и Левитана [1, 2], Карасевой [1], Крейна [10—18], Крейна, Красносельского и Мильмана [1], Левитана [1—7], Лидского [1], Лившица [5], Марченко [1, 2], Молчанова [1], Наймарка [4, 9, 10, 11, 12], Немыцкого [2], Повзнера [5, 6, 7, 8], Рапопорта [1, 2], Шноля [1] и Сташевской [1], а также на книги Ахиезера и Глазмана [1], Левитана [2] и Наймарка [5] [1]).

В. *Комментарии к тексту.* § 1. Литература, посвященная решению линейных дифференциальных уравнений методом последовательных приближений, весьма обширна и выходит за рамки этих замечаний. Мы отсылаем читателя к любому стандартному руководству по дифференциальным уравнениям за дальнейшими ссылками.

Идея, использованная в теореме 5, принадлежит Пеано ([1], 1888). Для реализации этой идеи Пеано развил матричное исчисление. См. также статью Бейкера [1]. Метод назван именами обоих этих авторов.

§ 2. Формально сопряженный оператор к данному линейному дифференциальному оператору впервые в 1765 г. написал Лагранж [2] в *Miscellanea Taurinіensia*. Термин «сопряженный» впервые использовал Л. Фукс [1] в 1873 г.

Трудно установить, когда впервые начали свободно оперировать формулами, связанными с сопряженными операторами и функцией Грина. Интересующийся читатель может найти более детальное обсуждение этих вопросов в статье Бореля [1], книге Бохера [5] или в третьем томе Théorie des Surfaces Дарбу. То же самое можно сказать и об аналитической технике, связанной с нахождением сопряженного оператора к данному дифференциальному оператору в гильбертовом пространстве. Основы теории операторов Штурма — Лиувилля изложены в работе фон Неймана [7], 1929 г. Более полное изложение содержится в книге Стоуна [3], 1932 г. Наиболее тщательное изложение теории этих операторов можно найти в статье Гальперина [1], 1937 г. Аналитический вывод леммы 3.16 следует искать в недавней работе Дж. Шварца [2].

После появления мемуара Г. Вейля и вплоть до публикации диссертации Глазмана все попытки обобщения алгебры граничных значений (которое было необходимо для того, чтобы применять теорию фон Неймана к формально самосопряженным операторам) были связаны с расширением геометрического метода Вейля на поверхности более высокого порядка. В этом направлении мы отметим работу Виндау [1] и серию работ Шина [1, 2, 3]. Настойчивые попытки выполнить эту программу заставили предположить, что

[1]) Этот список, несомненно, можно было бы значительно расширить.— *Прим. ред.*

дифференциальный оператор порядка $2n$ обязан иметь либо ни одного, либо n граничных значений на каждом сингулярном конце. Однако это утверждение было опровергнуто Глазманом в 1949 г.

Принятое здесь определение граничного значения (определение 17) впервые было предложено в диссертации Калкина [1]. Многие результаты, касающиеся индексов дефекта, и, в частности, следствие 22 и теорема 27 принадлежат Глазману [1, 2], доказательства которого, однако, отличаются от наших. Два следствия, принадлежащих Кодаире, были им получены более сложным методом стягивающихся гиперповерхностей в работах [1, 2, 4]. Терминология, принятая в определении 29, имеет, по-видимому, физическое происхождение. В 1910 г. Вейль [5] впервые разработал достаточно полную теорию граничных значений для сингулярных операторов Штурма — Лиувилля. Читатель может обратиться к работам Фаге [1, 2] и Феллера [4—7], а также к учебникам Ахиезера и Глазмана [1] и Наймарка [5], в которых можно найти обсуждение различных задач, связанных с определением граничных значений.

В работе У. Уайберна [1] дано исчерпывающее изложение теории граничных значений для линейных и нелинейных операторов. Алгебра граничных задач для операторов на конечном замкнутом интервале изложена в хорошо известной работе Биркгофа [3], см. также Джексон [1] и Латшоу [1].

§ 3. В рамках этого краткого обзора мы не в состоянии подробно остановиться на развитии теории функции Грина для дифференциальных операторов на конечном интервале. Достаточно сказать, что первое опубликованное сообщение о функции Грина для обыкновенного дифференциального оператора появилось в статье Буркхардта [1] в 1894 г. В этой статье рассматривается дифференциальный оператор $(d/dt)^2$ на конечном интервале. Обобщение на случай дифференциальных операторов произвольного порядка принадлежит Бохеру [2], 1901 г. Спустя три года Гильберт [1] свел общую дифференциальную задачу к интегральной, получив интегральное представление резольвенты. В дальнейшем метод Гильберта был развит Гильбом [2] и Вейлем [5]. Для получения интегрального представления резольвенты сингулярного оператора эти авторы аппроксимировали функцию Грина последовательностью функций Грина, отвечающих сужениям данного оператора на конечные интервалы. Метод, использованный в данной главе, по-видимому, нов. Из других методов мы упомянем метод Глазмана, который подробно изложен в книге Ахиезера и Глазмана [1], а также основанный на аппроксимации метод Коддингтона и Левинсона [1].

Детальное описание задач, связанных с нахождением функции Грина для дифференциального оператора на конечном интервале, можно найти в недавней работе Мора [1].

§ 4. Уже в работе Гильберта [1], 1904 г., имеется указание на то, что функция Грина для оператора второго порядка на компактном интервале является ядром оператора Гильберта — Шмидта. Вскоре после того как стали известны результаты Гильберта и Шмидта, возникла идея получить теорию разложения для дифференциальных операторов на замкнутом интервале при помощи обратных операторов. См. в связи с этим работы Кнезера [3, 4]. Позже Вейль установил более общий факт, что функция Грина для формально самосопряженного дифференциального оператора второго порядка с четырьмя граничными значениями является ядром Гильберта — Шмидта.

§ 5. Мы уже говорили в первой части этих замечаний об истории основных результатов параграфа. Напомним, что другие доказательства были найдены Вейлем [5] (для операторов второго порядка на полуоси), Гильбом [4] (формула обращения для операторов Вейля), Стоуном [17] (оператор $-(d/dt)^2+q(t)$ с интегрируемым q и общая теория операторов Штурма — Лиувилля в [3]), Титчмаршем [5] (теорема 5.18 для оператора $-(d/dt)^2+q(t)$), Кодаирой [1, 4, 5] (для операторов четного порядка), Левинсоном [5, 6], Коддингтоном [2], Крейном [12], Левитаном [4]. Классический способ перехода от абсолютно интегрируемых функций к квадратично интегрируемым в теореме Планшереля Сирс [6] распространил на операторы второго порядка.

По-видимому, Кодаира [4, 5] систематизировал терминологию, связанную с матричными мерами. Вероятно, первое доказательство теоремы 5.10 принадлежит И. Кацу [1]. Первые общие доказательства единственности (следствие 21) нашли Коддингтон [3] и Марченко [1, 2].

§ 6. Большинство результатов, изложенных в этом параграфе, постепенно, начиная с работ Г. Вейля, развивалось (особенно в последние пятнадцать лет) в работах Титчмарша [5—16], Наймарка [4, 9, 10, 12], Хартмана и Уинтнера, Левинсона [2], Фридрихса [3, 5, 6, 7, 10, 13] и Сирса [1, 2, 5, 7]. См. также интересные работы Глазмана [1—4], Крейна [13—16], Лидского [1], Молчанова [1], Шноля [1], а также книгу Наймарка [5].

Термин «существенный спектр» был введен Хартманом и Уинтнером в их работе из *American Journal of Mathematics*, 1948 г. Использованное ими характеристическое свойство совпадает с указанным в теореме 4. Дальнейшие построения этого и следующих параграфов, в которых широко используется определение 1, применялись также Шнолем [1] и Наймарком [5]. Лемма 7 принадлежит Глазману [1, 2]. Результат, аналогичный лемме 8, был получен в совместной работе Крейна, Красносельского и Мильмана [1]. Теорема 11 для операторов второго порядка была найдена Г. Вейлем, обобщение принадлежит Глазману [1]. Прием, примененный в теореме 14, использовался в работах Уинтнера. Теорема 15 принадлежит Левинсону [2].

Асимптотика, приведенная в теореме 18, хорошо известна, см. Стоун [17], 1928 г. Теорему 20 можно найти в работе Коддингтона и Левинсона [1]. Теорема 23 сформулирована в работе Фридрихса [1]. Сирс [1] и Берковиц [1] улучшили этот результат. Теорема 28 является новой.

Первый результат, напоминающий лемму 32, принадлежит Эсклангону [1] и Ландау [2]. Они предполагали, что функция f, фигурирующая в утверждении леммы, ограничена. Лемма 33 хорошо известна, см. книгу Харди, Литлвуда и Пойа [1]. Лемма 34 принадлежит фон Нейману; первое опубликованное доказательство этой леммы содержится в работе Гальперина [5]. Теорема 35 для операторов второго порядка хорошо известна. В общем случае она была доказана Наймарком [5].

§ 7. Большинство результатов этого параграфа можно найти в литературе только для операторов второго порядка. Некоторые из теорем были доказаны Наймарком [5] [1]). Во всех случаях мы даем новые доказательства.

Характеристика существенного спектра (теорема 1) принадлежит Вейлю [5] (для случая самосопряженных операторов). Теоремы 8, 9, 10 и 18 раньше были известны для операторов второго порядка (см. книгу Титчмарша [16]). Условия на коэффициент q в следствии 14 неоднократно ослаблялись; окончательный вариант принадлежит Хартману. Относительно условия (с) в теореме 16 см. книгу Коддингтона и Левинсона [1]. По поводу теоремы 17 см. работу Фридрихса [10].

Другое доказательство леммы 22 имеется в работе Реллиха [6]. Полуограниченные дифференциальные операторы изучались Фридрихсом [3] и Реллихом [6]. Лемма 23 есть частный случай того факта, что наличие лакун в существенном спектре влечет за собой совпадение индексов дефекта.

Лемма 35 известна как «теорема сравнения Штурма». Приведенное здесь доказательство аналогично доказательству Пиконе [1]. Следствие 37 было получено еще Кнезером [1]. Изучением связей между свойствами существенного спектра и осцилляцией решений занимались Хартман [8] и Путнам (Хартман и Путнам [1, 2]) (теоремы 50—55). В статье Реллиха [6] рассматривается частный случай операторов, ограниченных снизу [2]).

---

[1]) В книге Наймарка [5] содержатся и более общие, а также и более тонкие результаты для операторов произвольного порядка. — *Прим. ред.*

[2]) См. по этому поводу книгу Глазмана [6*], где изучается связь между спектральными и осцилляционными свойствами операторов произвольного порядка.— *Прим. ред.*

Имеется обширная литература по асимптотическому распределению собственных значений оператора Штурма — Лиувилля на компактном интервале. Упомянем здесь только работы Биркгофа [2], Бриллюэна [1], Данема [1], Крамерса [1], Кембла [1], Лангера [1, 2, 3], Милна [3] и Титчмарша [16].

Изучение «периодических потенциалов» для операторов второго порядка начато физиками (см., например, Крамерс [2]). Более строгий подход осуществили Титчмарш [10] и Уоллах [2]. Читатель, интересующийся физическими аспектами теории и ее связями с теорией твердого тела, может с успехом воспользоваться книгой Зейца [1].

Следствие 68 принадлежит Фридрихсу [10]. Другие теоремы такого типа имеются в диссертации Берковица [1].

Ниже упоминается ряд результатов, связанных с результатами § 6 и 7.

§ 8. Большинство использованных в этом параграфе классических формул, связанных со специальными функциями, имеется в курсе Уиттекера и Ватсона [1]. Выкладки, связанные с изучением гипергеометрической функции, восходят к Риману. Распространение на вырожденную гипергеометрическую функцию является новым. Другие упомянутые в этом параграфе результаты спектральной теории разбросаны по физической литературе. Некоторые подобные примеры рассмотрены в книге Титчмарша [16] и в книге Ахиезера и Глазмана [1].

С. *Существенный спектр дифференциального оператора второго порядка.* Здесь мы приведем сравнительно полную сводку известных результатов о связи между асимптотическим поведением коэффициентов оператора

$$\tau = -\left(\frac{d}{dt}\right) p(t) \left(\frac{d}{dt}\right) + q(t)$$

и его существенным спектром. Интервалом определения будет $[a, b)$ или $(a, b]$, причем $a > -\infty$ или $a = -\infty$ и $b < \infty$ или $b = \infty$; в каждом случае этот интервал будет специально указан. Если интервал определения оператора τ не указан, то подразумевается, что сформулированное утверждение верно для любого конечного или бесконечного интервала. Предполагается, что p и q — действительные непрерывные функции и, кроме того, p — положительная.

Следующие условия обеспечивают пустоту существенного спектра оператора τ:

(1) Для некоторого (действительного или комплексного) λ уравнение $(\lambda - \tau) f = 0$ имеет два линейно независимых решения, интегрируемых в квадрате (6.6).

(2) Для каждого действительного λ решения уравнения $(\lambda-\tau)f=0$ имеют только конечное число нулей (7.39).

(3) Функция p ограничена снизу положительным числом, функция q ограничена снизу, а множество всех интегрируемых в квадрате функций f, для которых

$$\int_a^b [p(t)\,|f'(t)|^2+q(t)\,|f(t)|^2]\,dt\leqslant 1,$$

относительно компактно. Если p ограничена снизу положительным числом и q ограничена снизу, то это условие является также необходимым (Реллих [6], Наймарк [5], упражнение 9.F1).

(4) Вообще, условие, данное в (3), является необходимым и достаточным, если оператор τ ограничен снизу (Реллих [6]).

(5) В интервале $[a, b)$

(a) функции p и q положительны в окрестности точки b,

(b) $$\int_a^b \left| \left[\frac{(q(t)\,p(t))'}{(q(t))^{3/2}\,(p(t))^{1/2}} \right]' + \frac{1}{4}\,\frac{\{[q(t)\,p(t)]'\}^2}{(p(t))^{3/2}\,(q(t))^{5/2}} \right| dt<\infty,$$

(c) (6.21) для x из окрестности точки b

$$\int_x^b |\,p(t)\,q(t)\,|^{-1/2}\,dt<\infty.$$

(6) В интервале $[a, b)$ $(b\leqslant\infty)$

(a) функция g неотрицательна и кусочно непрерывна в интервале $[0, \infty)$,

(b) решения дифференциального уравнения

$$\frac{d^2f(t)}{dt^2}+g(t)\,f(t)=0 \qquad (0\leqslant t<\infty)$$

имеют только конечное число нулей,

(c) функция h, определенная в $[a, b)$, положительна,

(d) $|h'(t)|=1/p(t)$,

(e) либо $h(t)\to 0$, либо $h(t)\to\infty$, когда t стремится к b,

(f) функция Z определяется формулой

$$Z(t)=q(t)+\frac{g(h(t))}{p(t)}$$

или

$$Z(t)=q(t)+\frac{1}{p(t)}\left[\frac{1}{4(h(t))^2}+\frac{1}{(h(t))^2}\,g\left(\log\frac{1}{h(t)}\right)\right],$$

если соответственно $h(t)\to\infty$ или $h(t)\to 0$, когда t стремится к b, и мы имеем $\lim\limits_{t\to b} Z(t)=\infty$ (Беркович [1]).

(7) (7.66) В интервале $[a, b)$

$$Q(t) = q(t) + \frac{1}{4}\left[p''(t) - \frac{1}{4}(p(t))^{-1}(p'(t))^2\right]$$

и

$$\lim_{t \to b} Q(t) = \infty.$$

(8) (7.67) В интервале $[a, b)$ Q определяется, как в (7), и

$$\int_a^b (p(t))^{-1/2}\, dt < \infty,$$

$$\overline{\lim_{t \to b}} \left[\int_t^b (p(s))^{-1/2}\, ds\right] |Q(t)| < \frac{3}{4}.$$

Имеют место также следующие критерии для определения существенного спектра:

(9) В предположениях (a) и (b) из (5) при дополнительном условии, что для всех x

$$\int_x^b |p(t)\, q(t)|^{-1/2}\, dt = \infty,$$

существенным спектром оператора τ является вся действительная ось (6.21).

(10) Пусть выполнены условия (a) — (e) из (6) и функция Z определена, как в (f); тогда если

$$\underline{\lim_{t \to b}}\, Z(t) \geqslant c > -\infty,$$

то существенный спектр оператора τ содержится в полуоси $[c, \infty)$ (Берковиц [1]).

(11) В интервале $[a, b)$ пусть функция Q определена, как в (7). Предположим, что

$$\int_a^b (p(t))^{-1/2}\, dt = \infty, \qquad \lim_{t \to b} Q(t) = c.$$

Тогда существенным спектром оператора τ является полуось $[c, \infty)$ (7.66).

(12) В интервале $[a, b)$ пусть

$$Z(t) = q(t) + \left[4p(t)\left(\int_a^t (p(s))^{-1}\, ds\right)^2\right]^{-1}$$

и

$$\varlimsup_{t \to b} Z(t) = K.$$

Тогда существенный спектр оператора τ содержится в полуоси $[K, \infty)$ (7.68).

(13) Предположим, что в интервале $[a, b)$

$$\varlimsup_{t \to b} q(t) = K.$$

Тогда существенный спектр оператора τ содержится в полуоси $[K, \infty)$ (7.19).

(14) В интервале $[a, b)$ пусть $N(t, \lambda)$ — число нулей некоторого решения уравнения $(\lambda - \tau) f = 0$ в интервале $[a, t)$ $(t < b)$. Точка λ_0 действительной оси принадлежит существенному спектру оператора τ тогда и только тогда, когда для каждой пары λ и μ, такой, что $\lambda < \lambda_0 < \mu$, имеем

$$\varlimsup_{t \to b} [N(t, \mu) - N(t, \lambda)] = \infty$$

(Хартман [8], упражнение 9.F3).

(15) Предположим, что оператор τ ограничен снизу и функция r неотрицательна в интервале определения оператора τ. Тогда самая левая точка в существенном спектре оператора τ находится левее, чем самая левая точка в существенном спектре оператора $\tau + r$. Это утверждение неверно, если не предполагать, что оператор τ ограничен снизу (см. упражнения в разделе 9.D).

Ниже даются дополнительные критерии для более специального оператора

$$\tau = -\left(\frac{d}{dt}\right)^2 + q(t),$$

где функция q предполагается действительной и непрерывной. Следующие условия позволяют полностью определить существенный спектр оператора τ:

(16) Если в интервале $[0, \infty)$ функция q ограничена снизу и для каждого положительного действительного числа a

$$\lim_{t \to \infty} \int_t^{t+a} q(s)\, ds = \infty,$$

то существенный спектр оператора τ в $[0, \infty)$ пуст. Если функция q ограничена снизу, это условие является также необходимым (Молчанов [1], Наймарк [5], упражнение 9.G43).

(17) В интервале $[a, \infty)$ предположим, что

$$\lim_{t\to\infty} q(t) = -\infty,$$

$$\int_a^\infty \left| \left[\frac{q'(t)}{(q(t))^{3/2}} \right]' + \frac{1}{4} \frac{[q'(t)]^2}{(q(t))^{5/2}} \right| dt < \infty.$$

Тогда

(a) если при больших x интеграл

$$\int_x^\infty |q(t)|^{-1/2} dt$$

сходится, то существенный спектр оператора τ пуст;

(b) если этот интеграл расходится для всех x из $[a, \infty)$, то существенным спектром оператора τ является вся действительная ось (7.16).

(18) В интервале $[0, \infty)$ предположим, что

(a) $\lim\limits_{t\to\infty} q(t) = -\infty$,

(b) $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}} \dfrac{(q'(t))^2}{|q(t)|^3} < \infty$,

(c) $\displaystyle\int_M^\infty \frac{(q'(t))^2}{|q(t)|^{5/2}} dt < \infty$

для больших M. Тогда существенный спектр оператора τ пуст (Уинтнер [8]).

(19) В интервале $[a, \infty)$ предположим, что

$$\lim_{t\to\infty} q(t) = c.$$

Тогда существенным спектром оператора τ является полуось $[c, \infty)$ (7.16).

(20) В интервале $[0, \infty)$ предположим, что функция $q(t) - c$ принадлежит классу $L_p[0, \infty)$ для некоторого p, $1 \leqslant p < \infty$. Тогда существенным спектром оператора τ в интервале $[0, \infty)$ является полуось $[c, \infty)$ (Наймарк [5]).

(21) Предположим, что q монотонно стремится к $-\infty$ в интервале $[0, \infty)$ и

$$q(t) = o(t^2).$$

Тогда существенным спектром оператора τ является вся действительная ось (Хартман [16]).

(22) В интервале $(0, a]$ предположим, что q — отрицательная неубывающая функция и

$$\lim_{t\to 0} q(t) = -\infty.$$

Тогда существенный спектр оператора τ пуст (6.27, Сирс [1]).

(23) В интервале $[0, \infty)$ предположим, что q монотонно стремится к $-\infty$ и для некоторого $k > 1$

$$\int_0^\infty |q(t)|^{-k/2}\, dt = \infty.$$

Тогда существенным спектром оператора τ является вся действительная ось (Хартман [16], упражнение 9.G36).

(24) В интервале $[0, \infty)$ предположим, что q монотонно стремится к $-\infty$ при $t \to \infty$ и для некоторого целого n

$$\int_0^\infty |q(t)|^{-1/2} [\log|q(t)| \log_2|q(t)| \ldots (\log_n|q(t)|)^{k/2}]^{-1}\, dt = \infty$$

(где $\log_2 t = \log\log t$, $\log_{n+1} t = \log\log_n t$). Тогда существенным спектром оператора τ является вся действительная ось (Хартман [16]).

(25) В интервале $(0, b]$ предположим, что

$$\varliminf_{t\to 0} t^2 q(t) > -1/4.$$

Тогда существенный спектр оператора τ пуст и τ ограничен снизу. (Использовать теорему 7.34.)

(26) В интервале $(0, b]$ предположим, что

$$\lim_{t\to 0} q(t) = \infty.$$

Тогда существенный спектр оператора τ пуст (7.17).

(27) В интервале $(0, b]$ предположим, что

$$\varlimsup_{t\to 0} |t^2 q(t)| < 3/4.$$

Тогда существенный спектр оператора τ пуст (7.17).

(28) В интервале $(0, b]$ предположим, что

(a) $\lim\limits_{t\to 0} q(t) = -\infty$

и для всех x из некоторой окрестности нуля

(b) $$\int_0^x \left| \left[\frac{q'(t)}{(q(t))^{3/2}} \right]' + \frac{1}{4} \frac{(q'(t))^2}{(q(t))^{5/2}} \right| dt < \infty,$$

(c) $\int_0^x |q(t)|^{-1/2}\,dt < \infty$.

Тогда существенный спектр оператора τ пуст (7.17).

(29) В интервале $(0, b]$ предположим, что выполняются условия (a) и (b) из (28) и, кроме того,

(c) функция q монотонно убывает в некоторой окрестности нуля,

(d) для всех $x > 0$

$$\int_0^x |q(t)|^{-1/2}\,dt = \infty.$$

Тогда существенным спектром оператора τ является вся действительная ось (7.17).

(30) В интервале $(0, b]$ допустим, что при $t \to 0$

$$q(t) + \frac{1}{4t^2} + \frac{1}{4t^2 \log^2 t} \to \infty.$$

Тогда существенный спектр оператора τ пуст (Берковиц [1]).

Следующие условия позволяют приближенно вычислить существенный спектр.

(31) Пусть

$$K = \overline{\lim_{t\to\infty}}\, q(t) - \underline{\lim_{t\to\infty}}\, q(t)$$

в интервале $[0, \infty)$. Тогда на положительной действительной полуоси каждый интервал длины K содержит точку из существенного спектра оператора τ (Глазман [4], упражнение 9.A 6).

(32) На интервале $[0, \infty)$ если $q(t)$ монотонно стремится к $-\infty$ и

$$-q(t) \leqslant Ct^2$$

для больших t, то существует постоянная K (зависящая только от C), такая, что каждый интервал длины K содержит точку из существенного спектра оператора τ (Хартман [16], упражнение 9.G 35).

(33) Предположим, что функция q ограничена на интервале $[0, \infty)$. Пусть

$$v(t, \varepsilon, q) = \overline{\lim}\, |q(s) - q(t)| \quad \text{для} \quad |s - t| < \varepsilon,$$

$$v(\varepsilon, q) = \overline{\lim_{t\to\infty}}\, \frac{1}{t} \int_0^t v(s, \varepsilon, q)\,ds.$$

Тогда существует постоянная $K = K(q)$, такая, что для больших λ каждый интервал $[\lambda, \lambda + K(v(\pi/\lambda^{1/2}, q) + 1/\lambda)]$ пересекает существенный спектр оператора τ (Хартман и Путнам [2]).

(34) В дополнение к условиям (33) предположим, что $b = \infty$ и функция q имеет ограниченную производную q'. Тогда существует постоянная $M = M(q)$, такая, что для больших λ каждый интервал $[\lambda, \lambda + M(1/\lambda^{1/2})(v(\pi/\lambda^{1/2}, q') + 1/\lambda)]$ пересекает существенный спектр оператора τ (Хартман и Путнам [2]).

(35) В дополнение к условиям (34) предположим, что производные q' и q'' ограничены. Тогда существует постоянная $N = N(q)$, такая, что каждый интервал $[\lambda, \lambda + N(1/\lambda)(v(\pi/\lambda^{1/2}, q'') + 1/\lambda^{1/2})]$ для больших λ пересекает существенный спектр оператора τ (Хартман и Путнам [2]).

(36) Предположим, что функция q дважды дифференцируема, а (λ, μ) — открытый интервал, не пересекающий существенный спектр оператора τ, концы которого принадлежат существенному спектру этого оператора. Если

$$\int_0^t |q''(s)|\, ds = O(t),$$

то

$$|\lambda - \mu| = O(1/\mu)$$

(Хартман и Путнам [2]).

(37) Аналогично если q — трижды дифференцируемая функция и

$$\int_0^t |q'''(s)|\, ds = O(t),$$

то

$$|\lambda - \mu| = O(1/\mu^{3/2})$$

(Хартман и Путнам [2]).

(38) Предположим, что q ограничена снизу в интервале $[0, \infty)$ и существенный спектр оператора τ не пуст. Для действительного положительного λ пусть $d(\lambda)$ — расстояние от точки λ до существенного спектра оператора τ. Тогда

$$d(\lambda) = O\left(\sqrt{\lambda}\right)$$

(Путнам [12], Шноль [1]). Отсюда, в частности, следует, что существенный спектр оператора τ либо пуст, либо неограничен (упражнения 9.G 41 и 9.G 42).

(39) Пусть функция q ограничена на интервале $[0, \infty)$, а существенный спектр оператора τ не пуст. Тогда (ср. (38))

$$d(\lambda) = O\left(1/\sqrt{\lambda}\right)$$

(Шноль [1]).

(40) В интервале $[0, \infty)$ пусть

$$\lim_{\overline{t\to\infty}} \frac{1}{t} \int_0^t |q(s)|\, ds = 0.$$

Тогда существенный спектр оператора τ содержит положительную полуось, причем включение может быть собственным (Хартман [14], упражнение 9.G 38).

(41) В интервале $[0, \infty)$ предположим, что существует последовательность интервалов $[a_n, b_n]$, длины которых монотонно стремятся к бесконечности и для которых

$$\lim_n \frac{1}{b_n - a_n} \int_{a_n}^{b_n} |q(t)|^2\, dt = 0.$$

Тогда существенный спектр оператора τ содержит положительную полуось (Шноль [1], упражнение 9.G 40).

Следующие критерии позволяют ответить на вопрос о том, принадлежит ли данная точка λ существенному спектру оператора τ.

(42) В интервале $[0, \infty)$ если q ограничена снизу и уравнение $(\lambda - \tau) f = 0$ имеет два линейно независимых ограниченных решения, то λ принадлежит существенному спектру оператора τ (Хартман и Уинтнер [8], упражнение 9.G 5).

(43) В интервале $[0, \infty)$, если q ограничена снизу и уравнение $(\lambda - \tau) f = 0$ имеет ограниченное решение с не интегрируемым квадратом, то λ принадлежит существенному спектру оператора τ (Хартман и Уинтнер [8], упражнение 9.G 5).

(44) В интервале $[0, \infty)$, если q монотонна и отрицательна и

$$\int_0^\infty |q(t)|^{-1}\, dt = \infty,$$

то нуль принадлежит существенному спектру оператора τ (Хартман и Уинтнер [4]).

(45) В интервале $[0, \infty)$, если q отрицательна и монотонна и существует последовательность $\{t_n\}$ действительных чисел, стремящаяся к бесконечности, для которой

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, -\frac{q(t_n)}{t_n} < \infty,$$

то нуль принадлежит существенному спектру оператора τ (Хартман и Уинтнер [4]).

(46) В интервале $[0, \infty)$ предположим, что существует решение уравнения $(\lambda - \tau) f = 0$, не интегрируемое в квадрате и удо-

влетворяющее условию

$$\int_0^t |f'(s)|\,ds = O(t^2).$$

Тогда точка λ принадлежит существенному спектру оператора τ (Хартман и Уинтнер [14]).

(47) В интервале $[0, \infty)$ предположим, что уравнение $(\lambda-\tau)f=0$ имеет два линейно независимых решения f и g, таких, что

$$\int_0^t |f'(s)|^2\,ds = O(t^2) \quad \text{и} \quad \int_0^t |g'(s)|\,ds = O(t^2).$$

Тогда точка λ принадлежит существенному спектру оператора τ (Хартман и Уинтнер [14]).

(48) Предположим, что функция q ограничена снизу, а f — действительное решение уравнения $(\lambda-\tau)f=0$ на $[0, \infty)$, не интегрируемое в квадрате, но удовлетворяющее условию

$$\int_0^t |f(s)|^2\,ds = O(t^k)$$

для некоторого $k>0$. Тогда точка λ принадлежит существенному спектру оператора τ (Уинтнер [17]).

(49) Предположим, что функция q ограничена снизу и при некотором постоянном $k>0$ каждое решение уравнения $(\lambda-\tau)f=0$ удовлетворяет условию

$$\int_0^t |f(s)|^2\,ds = O(t^k).$$

Тогда точка λ принадлежит существенному спектру оператора τ (Уинтнер [17]).

(50) Предположим, что функция q ограничена и что некоторое действительное решение f уравнения $(\lambda-\tau)f=0$ на $[0, \infty)$ не интегрируемо в квадрате, но удовлетворяет условию

$$\int_0^t |f(s)|^2\,ds = O(e^{kt})$$

для любого $k>0$. Тогда точка λ принадлежит существенному спектру оператора τ (Хартман [10]).

(51) В интервале $[0, \infty)$ предположим, что функция q ограничена и каждое решение уравнения $(\lambda-\tau)f=0$ удовлетворяет

условию

$$\int_0^t |f(s)|^2 ds = O(e^{kt})$$

для любого $k > 0$. Тогда точка λ принадлежит существенному спектру оператора τ (Хартман [10]).

(52) В интервале $[0, \infty)$ предположим, что функция $Q \geqslant 0$ не убывает, $q(t) \geqslant -Q(t)$ и

$$\int_0^\infty (Q(t))^{-1} dt = \infty.$$

Если каждое решение уравнения $\tau f = 0$ ограничено, то нуль принадлежит существенному спектру оператора τ (Хартман [15]).

(53) В интервале $[0, \infty)$, если

$$\int_0^t \max(0, \ -q(s))\, ds = O(t^2)$$

и уравнение $\tau f = 0$ имеет два линейно независимых ограниченных решения, то нуль принадлежит существенному спектру оператора τ (Хартман [15]).

(54) В интервале $[0, \infty)$, если функция q ограничена снизу и существует интегрируемое в квадрате решение уравнения $(\lambda - \tau) f = 0$, такое, что для некоторого положительного N

$$f(t) = O(t^{-N}) \quad \text{при} \quad t \to \infty,$$

то точка λ принадлежит существенному спектру оператора τ (Уинтнер [17], упражнение 9.G20).

(55) В интервале $[0, \infty)$ предположим, что функция q ограничена снизу и существует интегрируемое в квадрате решение уравнения $(\lambda - \tau) f = 0$, такое, что для всех $k > 0$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} [(f(t))^2 + (f'(t))^2]\, e^{kt} = \infty.$$

Тогда точка λ принадлежит существенному спектру оператора τ (Хартман [10]).

(56) Предположим, что в интервале $[0, \infty)$ функция q удовлетворяет неравенству

$$|q(t)| \leqslant \frac{p+1}{t^2 p^2} + \frac{p+2}{t^2 p^2} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\log t \log_2 t \ldots \log_i t} + g(t)$$

($\log_2 t = \log\log t$, $\log_{n+1} t = \log\log_n t$) для некоторого $p > 1$ и некоторого $n \geqslant 0$, где функция g удовлетворяет условиям

$$\int_0^\infty t\,|g(t)|\,dt < \infty, \qquad \int_0^\infty t^{2q-1}\,|g(t)|^q\,dt < \infty \qquad (p^{-1}+q^{-1}=1).$$

Тогда уравнение $\tau f = 0$ не имеет решений из $L_p[0, \infty)$. В частности, если $p = 2$, то нуль принадлежит существенному спектру оператора τ в интервале $[0, \infty)$.

Если $p = 1$, то написанное выше неравенство заменяется неравенством

$$|q(t)| \leqslant 2t^{-2} + 3t^{-2} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\log t \log_2 t \ldots \log_i t} + g(t),$$

где функция g удовлетворяет условиям

$$\int_0^\infty t\,|g(t)|\,dt < \infty, \qquad g(t) = O(t^{-2}) \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Ни одну из постоянных в этих неравенствах нельзя улучшить (Сирс [5]).

Замечание. Во многих случаях, когда существенный спектр оператора Штурма — Лиувилля ограничен снизу, можно установить, что и сам оператор ограничен снизу: ср. 7.31, 7.32, 7.33, упражнения 9.С1 — 7, Берковиц [1], Реллих [6], Фридрихс [3, 10, 13]. Мы не будем обсуждать здесь этот вопрос и ограничимся указанными ссылками.

D. *Число граничных значений сингулярного дифференциального оператора второго порядка.* Приведем сравнительно полную сводку опубликованных результатов о связи между поведением коэффициентов оператора Штурма — Лиувилля

$$\tau = -\left(\frac{d}{dt}\right) p(t) \left(\frac{d}{dt}\right) + q(t)$$

и числом граничных значений в сингулярной концевой точке (точках) оператора τ. Функции p и q будут подчиняться условиям, указанным в § 2. Однако, вообще говоря, от функции q требуется только непрерывность. Интервалом определения оператора будет $[a, b)$ или $(a, b]$; случаи $a = -\infty$, $a > -\infty$, $b = \infty$, $b < \infty$ каждый раз указываются.

Каждый из предыдущих критериев, который устанавливает, что существенный спектр не пуст, устанавливает также, что не существует граничных значений в свободной концевой точке.

Мы не будем повторять эти критерии и ограничимся следующим перечнем условий, характеризующих существование или отсутствие граничных значений.

Аналогично каждый из следующих критериев, который устанавливает, что оператор τ имеет два граничных значения в сингулярной концевой точке, устанавливает также, что существенный спектр оператора в этой концевой точке пуст.

(1) Если функция q ограничена снизу в интервале $[0, \infty)$, то τ не имеет граничных значений в бесконечности.

(2) В интервале $[0, \infty)$ предположим, что существует положительная непрерывно дифференцируемая функция M, такая, что

(a) функция $(p(t))^{1/2} M'(t) (M(t))^{-3/2}$ ограничена сверху,

(b) $\int\limits_0^\infty p(t)(M(t))^{-1/2}\,dt = \infty$,

(c) функция $q(t)(M(t))^{-1}$ ограничена снизу.

Тогда τ не имеет граничных значений в ∞ (6.14).

(3) В интервале $[0, b)$ предположим, что

(a) q положительна в некоторой окрестности точки b,

(b) $\int\limits_0^b \left| \left[\frac{q(t)\,p'(t)}{(q(t))^{3/2}(p(t))^{1/2}} \right]' + \frac{1}{4} \frac{([q(t)\,p(t)]')^{1/2}}{(p(t))^{3/2}(q(t))^{5/2}} \right| dt < \infty$,

(c) $\int\limits_0^x |p(t)\,q(t)|^{-1/2}\,dt < \infty$ для x из некоторой окрестности точки b. Тогда τ имеет два граничных значения в точке b (6.20).

(4) В интервале $[0, \infty)$, если уравнение $\tau f = 0$ имеет решение, такое, что

$$\int\limits_0^t |f'(s)|^2\,ds = O\left(\int\limits_0^t (p(s))^{-1}, ds\right),$$

и интеграл в правой части неограничен, то τ не имеет граничных значений в бесконечности (Хартман и Уинтнер [12]).

(5) В интервале $[a, b)$ пусть

$$Z(t) = q(t) + \left[4p(t)\left(\int\limits_a^t (p(s))^{-1}\,ds\right)^2\right]^{-1}.$$

Если

(a) Z ограничена снизу,

(b) $\int\limits_a^b (p(t))^{-1}\,dt=\infty$,

то τ не имеет граничных значений в точке b (7.69).

Следующие критерии применяются к оператору

$$\tau=-\left(\frac{d}{dt}\right)^2+q(t).$$

(6) Если в интервале $[0, \infty)$ функция $(1+t^2)^{-1}q(t)$ ограничена снизу, то τ не имеет граничных значений в бесконечности (6.17).

(7) В интервале $(0, b]$

(a) если $\underline{\lim}_{t\to 0}\, t^2 q(t)>3/4$, то τ не имеет граничных значений в нуле;

(b) если $\overline{\lim}_{t\to 0}\, |t^2 q(t)|<3/4$ то τ имеет два граничных значения в нуле (6.23).

(8) Если q — монотонно возрастающая функция в интервале $(0, b]$, то τ имеет два граничных значения в нуле (6.24).

(9) Если $[a, b)=[0, \infty)$ и для некоторого действительного λ уравнение $(\lambda-\tau)f=0$ имеет решение с интегрируемыми в квадрате производными, то τ не имеет граничных значений в сингулярной концевой точке (Хартман и Уинтнер [12]).

Каждое из следующих условий на функцию q позволяет заключить, что оператор τ, определенный на интервале $[0, \infty)$, не имеет граничных значений в бесконечности.

(10) $\int\limits_0^t \max(0, \ -q(s))\,ds=O(t^3)$ при $t\to\infty$ (Хартман и Уинтнер [12]).

(11) $q(t)\geqslant -Q(t)$, где Q — положительная неубывающая функция, причем

$$\int\limits_0^\infty (Q(t))^{-1}\,dt=\infty$$

и уравнение $\tau f=0$ имеет ограниченное решение (Хартман [15]).

(12) Существует постоянная K, такая, что для больших s и t

$$q(t)-q(s)\geqslant K(s-t)$$

(Уинтнер [4]).

(13) Функция q монотонна и

$$\int_0^\infty |q(t)|^{-1/2}\,dt=\infty$$

(Хартман и Уинтнер [4]).

(14) Функция q дифференцируема и

(a) $\int_0^\infty |q(t)|^{-1/2}\,dt=\infty$,

(b) $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\left|\frac{q'(t)}{(q(t))^{3/2}}\right|<\infty$

(Хартман и Уинтнер [7]).

(15) $q(t)\geqslant -Q(t)$, где Q — непрерывная монотонная функция, причем $Q(t)\geqslant K>0$ и

$$\int_0^\infty |Q(t)|^{-1/2}\,dt=\infty$$

(Сирс [2]).

(16) $q(t)\geqslant -Q(t)$, где Q — дифференцируемая функция, причем $Q(t)\geqslant K>0$ и

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\left|\frac{Q'(t)}{(Q(t))^{3/2}}\right|<\infty$$

(Сирс [2]).

(17) Пусть Q — положительная непрерывная функция, имеющая ограниченную вариацию на каждом конечном интервале. Пусть $N(t, \lambda)$ — число нулей в интервале $[0, t)$ некоторого решения уравнения $(\tau-\lambda)f=0$. Для некоторого действительного λ

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\Big[2\int_0^t (Q(s))^{-1}\,ds-\int_0^t (Q(s))^{-2}\,dN(s, \lambda)-$$
$$-(Q(t))^{-2}-\int_0^t dQ^2(s)\Big]=\infty$$

(Хартман [9]).

Замечание. Этот критерий, по-видимому, наиболее общий среди всех полученных до сих пор. Читатель может проверить, что из него следуют несколько предыдущих критериев.

Е. *Существенный спектр и индексы дефекта дифференциальных операторов произвольного порядка.* Ниже мы приводим немногочисленные разбросанные в разных местах результаты, связывающие асимптотическое поведение коэффициентов регулярного формального дифференциального оператора порядка выше, чем 2, с существенным спектром и индексами дефекта этого оператора. Многие из этих результатов принадлежат Наймарку [5].

Если не оговорено противное, то буква τ будет обозначать регулярный формальный дифференциальный оператор вида

$$[*] \qquad \tau=\sum_{k=0}^{n} a_k(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^k$$

на интервале, который будет указан в каждом случае. Коэффициенты a_k подчиняются условиям, сформулированным в подразделах I и II.

I. *Существенный спектр.* Существенный спектр оператора τ пуст, если

(1) оператор τ самосопряжен и его индексы дефекта равны (n, n) (6.12);

(2) оператор τ имеет вид

$$\tau=(-1)^n\left(\frac{d}{dt}\right)^{2n}+\sum_{k=1}^{2n-1} p_k(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^k+p_0(t)$$

на интервале $[a, b)$, где $p_1, p_2, \ldots, p_{2n-1}$ — ограниченные функции и $\operatorname{Re} p_0(t)\to\infty$ при $t\to b$ (7.9);

(3) на интервале $[a, b)$ оператор τ имеет вид

$$\tau=(-1)^n\left(\frac{d}{dt}\right)^{2n}+\sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^k\left(\frac{d}{dt}\right)^k p_k(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^k+p_0(t),$$

где функция $\operatorname{Re} p_k(t)$ ограничена снизу при $1\leqslant k\leqslant n-1$ и $\operatorname{Re} p_0(t)\to\infty$ при $t\to b$ (7.10);

(4) на интервале $[0, \infty)$ оператор τ имеет вид

$$[**] \qquad \tau=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(\frac{d}{dt}\right)^k p_k(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^k,$$

где все значения коэффициентов p_k лежат в правой полуплоскости и $\operatorname{Re} p_0(t)\to\infty$ при $t\to\infty$ (7.8);

(5) на интервале $[0, \infty)$ оператор τ имеет вид [**], где коэффициенты p_k действительны и

(a) $p_0(t) \longrightarrow \infty$ при $t \longrightarrow \infty$,

(b) p_0' и p_0'' при больших t имеют постоянные знаки,

(c) $p_0'(t) = O(p_0^k(t))$ при $t \longrightarrow \infty$ для некоторого k, $0 < k < 1 + n/2$,

(d) функции

$$\frac{p_n'}{p_n}, \quad p_{n-1}p_n^{-1/2n}, \quad p_{n-2}p_n^{-3/2n}, \ \ldots, \ p_{n-1}p_n^{-(2n-3)/2n}$$

суммируемы в интервале $[0, \infty)$,

(e) $\lim\limits_{t\to\infty} p_n(t) = 1$

(Наймарк [5]);

(6) в интервале $[0, \infty)$ оператор τ имеет вид [**], причем его коэффициенты p_j действительны и выполняются следующие условия:

(a) $p_0(t) \longrightarrow \infty$ при $t \longrightarrow \infty$,

(b), (c), (d) и (e) из (5) и

(f) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |p_0(t)|^{-1+1/2n}\, dt < \infty$

(Наймарк [5]).

Следующие условия позволяют определить существенный спектр.

(7) Если существует постоянная M, такая, что

$$|f^{(k)}|_2^2 \leqslant M(\tau|f|_2^2 + |f|_2^2),$$

и

$$\tau_1 = \sum_{j=0}^{k} b_j(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^j,$$

где

$$\overline{\lim_{t\to b}}\, b_j(t) = 0 \qquad (0 \leqslant j \leqslant k),$$

и если оператор $\tau + \tau_1$ на интервале $[a, b)$ имеет не обращающийся в нуль старший коэффициент, то существенный спектр оператора τ совпадает с существенным спектром оператора $\tau + \tau_1$ (7.11).

(8) Если коэффициенты $|a_1(t)|$, $|a_2(t)|$, ..., $|a_{n-1}(t)|$ оператора τ ограничены, а коэффициент $|a_n(t)|$ ограничен снизу положительным числом в интервале $[a, b)$, и если τ_1 удовлетворяет условиям утверждения (7) при $k = n$, то существенный спектр оператора τ совпадает с существенным спектром оператора $\tau + \tau_1$ (7.12).

(9) В интервале $[0, \infty)$, если

$$\lim_{t\to\infty} a_k(t) = q_k, \qquad 0 \leqslant k \leqslant n,$$

то существенным спектром оператора τ является множество

$$\left\{\lambda \,|\, \lambda = \sum_{j=0}^{n} q_j (it)^j, \ -\infty < t < \infty\right\}$$

(7.13).

(10) Если τ имеет вид [**] на интервале $[0, \infty)$, где функция $\operatorname{Re} p_j$ ограничена снизу для $0 \leqslant j < n$, $\operatorname{Re} p_n$ ограничена снизу положительным числом, а τ_1 определяется формулой, данной в (7), где $k = n$, то существенный спектр оператора τ совпадает с существенным спектром оператора $\tau + \tau_1$ (7.15).

(11) В интервале $[0, \infty)$, если τ имеет вид [**], где все коэффициенты действительны и $(1/p_n)'$, p_{n-1}, ..., p_0 суммируемы в $[0, \infty)$, то существенным спектром оператора τ является положительная полуось (Наймарк [5]).

(12) Пусть $[a, b) = [0, \infty)$. Если выполняются предположения (a), (b), (c), (d), (e) утверждения (6) и интеграл в (f) расходится, то существенным спектром оператора τ является вся действительная ось (Наймарк [5]).

Следующие условия позволяют приближенно вычислить существенный спектр.

(13) Предположим, что τ имеет вид [**] и все его коэффициенты действительны и при больших аргументах не отрицательны. Тогда существенный спектр содержится в положительной действительной полуоси (7.7).

(14) В интервале $[0, \infty)$, если в условиях утверждения (13)

$$\lim_{t\to\infty} p_n(t) = P,$$

то существенный спектр оператора τ содержится в $[P, \infty)$ (Наймарк [5]).

(15) Предположим, что $[a, b) = [0, \infty)$, индексы дефекта оператора τ равны и существует последовательность $\{f_n\}$ интегрируемых в квадрате функций, таких, что f_n равняется нулю в интервале $[0, n]$, $|f_n| = 1$ и

$$|(\lambda - \tau) f_n| \leqslant K.$$

Тогда интервал $[\lambda - K, \lambda + K]$ содержит точку из существенного спектра оператора τ (Шноль [1], упражнение 9.A6).

(16) в интервале $[0, b)$ пусть

$$K = \overline{\lim_{t\to b}}\, q(t).$$

Тогда расстояние от любой точки существенного спектра оператора вида [*] до существенного спектра оператора

$$\tau_1 = \tau + q$$

меньше, чем K (Путнам [9]).

II. *Индексы дефекта и граничные значения.* Поскольку каждая оценка индексов дефекта немедленно дает оценку числа граничных значений, но не наоборот, мы будем всегда, когда это возможно, формулировать результаты в терминах индексов дефекта, предоставляя читателю выразить их в терминах граничных значений в сингулярной концевой точке (или точках). Всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, через τ обозначается формально симметрический формальный дифференциальный оператор вида [*] на интервале, который будет в каждом случае указан. Если интервал не указан, это означает, что сформулированный результат справедлив для произвольного интервала определения.

(1) Если существенный спектр оператора τ не совпадает со всей действительной осью, то индексы дефекта оператора τ равны между собой (6.6).

(2) В частности, индексы дефекта равны, если τ ограничен снизу.

(3) Если для некоторого действительного или комплексного λ все решения уравнения $(\lambda - \tau) f = 0$ интегрируемы в квадрате, то индексы дефекта оператора τ равняются (n, n) (6.11).

(4) Если q — ограниченная функция, то τ и $\tau + q$ имеют одни и те же индексы дефекта (6.30).

(5) В интервале $[a, b) = [a, \infty)$, если функция $a_n(t)$ ограничена снизу положительным числом и функции $a_k(t)$ ограничены, $0 \leqslant k < n$, то сумма индексов дефекта оператора τ равна n (6.35).

Далее предполагается, что оператор τ имеет вид [**] на интервале $[0, \infty)$ и все его коэффициенты вещественны. Все следующие теоремы принадлежат Наймарку [5].

(6) При условиях (a), (b), (c), (d) утверждения I (6) и

$$\lim_{t \to \infty} p_n(t) > 0$$

мы имеем

(a) если $p_0(t) \to \infty$ при $t \to \infty$, то индексы дефекта оператора τ равны (n, n);

(b) если $p_0(t) \to -\infty$ при $t \to \infty$ и интеграл

$$\int_0^\infty |p_0(t)|^{-1+1/2n}\, dt$$

сходится, то индексы дефекта оператора τ равны $(n+1, n+1)$;

(c) если $p_0(t) \to -\infty$ при $t \to \infty$ и интеграл в (b) расходится, то индексы дефекта оператора τ равны (n, n).

(7) Если для некоторых постоянных $c_0, c_1, \ldots, c_n$ функции

$$c_n - (1/p_n)', \quad c_{n-1} - p_{n-1}, \quad \ldots, \quad c_0 - p_0$$

суммируемы в интервале $[0, \infty)$, то индексы дефекта оператора τ равны (n, n).

(8) Если функции $(1/p_n)', p_{n-1}, \ldots, p_0$ суммируемы,

$$\lim_{t\to\infty} p_n(t) > 0$$

и q — функция ограниченной вариации, то индексы дефекта оператора $\tau + q$ равны (n, n).

(9) Если пределы

$$\lim_{t\to\infty} p_k(t), \qquad 0 \leqslant k \leqslant n,$$

существуют, то индексы дефекта оператора τ равны (n, n).

F. *Дифференциальные операторы, не являющиеся формально самосопряженными*. Последующие главы этой книги посвящены в основном изучению линейных операторов, не являющихся самосопряженными, к которым, следовательно, не применима спектральная теорема из гл. X и XII. В гл. XV, XVI, XVII и XVIII будет развита более общая теория спектральных операторов, которую затем в гл. XIX и XX мы применим к дифференциальным операторам. Таким способом нам удастся показать, что большой класс несамосопряженных операторов обладает спектральным разложением в соответствующем обобщенном смысле. Однако результаты, которые будут изложены в этих главах, получаются при помощи методов теории возмущений, применяемых к самосопряженным операторам, и, таким образом, в конечном счете опираются на результаты этой главы.

Без использования теории возмущений при изучении формально несамосопряженных операторов мало что можно сделать. Обобщение теории граничных значений и расширений можно найти в диссертации Рота [1], результаты которого формулируются далее.

Замкнутый оператор $T_1(\tau, \mathfrak{X})$ в банаховом пространстве $\mathfrak{X}$, например в одном из пространств $L_p(I)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ или $C(I)$, может быть определен в терминах формального дифференциального оператора τ методом, аналогичным изложенному в § 2. В то время как доказательство замкнутости и вычисление сопряженного оператора в пространствах $L_p(I)$ $(1<p<\infty)$ не представляют особого труда, установление аналогичных результатов в пространствах $L_1(I)$ и $C(I)$ требует применения нескольких глубоких понятий теории банаховых пространств, таких, как понятие ограниченной $\mathfrak{X}$-топологии пространства $\mathfrak{X}^*$, данное в гл. V.

Пространство граничных значений можно определить почти так же, как в § 2; можно доказать, что его размерность конечна. Существенный спектр следует определять так же, как в § 6; он представляет собой замкнутое множество комплексной плоскости, которое совпадает с существенным спектром формального сопряженного оператора в сопряженном пространстве. Существенный спектр формального дифференциального оператора обладает следующим свойством «спектрального отображения»: если p — полином с постоянными коэффициентами и если $p(\tau)$ — соответствующий «полином» от τ, то существенным спектром формального дифференциального оператора $p(\tau)$ является множество

$$\{p(\lambda) \mid \lambda \in \sigma_e(\tau)\}.$$

Дополнение существенного спектра оператора τ в $\mathfrak{X}$ можно разложить на счетное или конечное число связных компонент. Замечательно, что когда λ пробегает любую такую компоненту, размерность пространства решений уравнения $(\lambda-\tau)f=0$, принадлежащих пространству $\mathfrak{X}$, остается постоянной. Кроме того, если λ принадлежит дополнению существенного спектра оператора τ в $\mathfrak{X}$, то сумма размерностей пространства решений уравнения $(\lambda-\tau)f=0$, принадлежащих $\mathfrak{X}$, и пространства решений уравнения $(\lambda-\tau^*)g=0$, принадлежащих сопряженному пространству $\mathfrak{X}^*$, постоянна и равна размерности пространства граничных значений оператора τ в $\mathfrak{X}$. Этот результат позволяет приписать каждой связной компоненте дополнения существенного спектра оператора τ два «индекса дефекта», на основе которых может быть построена теория расширения.

Сужение оператора $T_1(\tau, \mathfrak{X})$ получается сужением области определения на множество всех функций, удовлетворяющих заданной системе граничных условий, так же как в гильбертовых пространствах. В то время как существенный спектр оператора τ в $\mathfrak{X}$ инвариантен относительно сужения оператора $T_1(\tau, \mathfrak{X})$, остальная часть спектра зависит от выбранного сужения и может лежать в остаточном спектре и (или) в точечном спектре или в резольвентном множестве суженного оператора. Главная задача состоит в выделении тех сужений, спектры которых минимальны. Общее решение этой задачи дает следующее утверждение: если все индексы дефекта оператора τ в $\mathfrak{X}$ равны, то можно найти такое сужение оператора $T_1(\tau, \mathfrak{X})$, спектр которого состоит из существенного спектра оператора τ в $\mathfrak{X}$, взятого вместе с конечной или бесконечной последовательностью собственных значений, все предельные точки которой лежат в существенном спектре оператора τ.

G. *Спектральные асимптотики.* (a) Титчмарш в работе [16] уточнил результат теоремы 7.58 методом ВКБ (Вентцель — Крамер — Бриллюэн), который используют физики. Титчмарш применил этот метод только в случае, когда q есть полином t^k, но этот результат можно обобщить. Это позволяет получить для собственных значений последовательность асимптотических выражений возрастающей точности. Приближение второго порядка дает

$$N(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_0^{t(\lambda)}(\lambda-s^k)^{1/2}\,ds-\frac{1}{2}+O(\lambda^{-1/2-1/k}).$$

Дальнейшее приближение дает

$$N(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_0^{t(\lambda)}(\lambda-s^k)^{1/2}\,ds-\frac{1}{2}-\frac{1}{8\pi}\int_0^{t(\lambda)}\frac{(q'(s))^2}{(\lambda-q(s))^{5/2}}\,ds+O(\lambda^{-1-2/k})$$

и т. д., где $t(\lambda)=\lambda^{1/k}$. Подробности читатель найдет в книге Титчмарша.

(b) Хартман [11] показал, что формула, данная в теореме 7.58, остается в силе при меньших ограничениях на коэффициент q. Он предполагает только, что q — возрастающая функция и

$$\lim_{t\to\infty}\ \inf_{t\leqslant u,v\leqslant\infty}\ [q(v)-q(u)]\Big/\left(\int_u^v s^{-3}\,ds\right)=\infty.$$

Дальнейшие исследования подобного рода вопросов выполнены Хартманом и Н. С. Розенфельдом. В следующих четырех пунктах дается литература, касающаяся результатов в духе теоремы 7.58, связанных с асимптотическим распределением собственных значений оператора $-(d/dt)^2+q(t)$, $0\leqslant t<\infty$, с подходящими граничными условиями. Мы обозначаем соответствующий оператор в $L_2(0,\infty)$ через T.

(a) $\lim\limits_{t\to\infty} q(t)=\infty$ и функция $q(t)$ выпукла. Этому случаю посвящены работы: Милн [2], Титчмарш [16], Хартман и Уинтнер [22] и Хартман [17]. Лучший результат, принадлежащий Хартману, формулируется в обозначениях теоремы 7.58 следующим образом.

Теорема. *Пусть $q(t)$ — непрерывная возрастающая выпуклая функция; тогда*

[*] $$\pi N(\lambda) = \int_0^{t(\lambda)} [\lambda - q(t)]^{1/2} dt + O(1).$$

(a′) $\lim\limits_{t\to\infty} q(t) = \infty$ и $q(t)$ не обязательно выпукла. Этому случаю посвящены работы: Аткинсон [5], Хартман [11][1]).

(b) $\lim\limits_{t\to\infty} q(t) = 0$. Этому случаю посвящена работа: Розенфельд [1]. Розенфельд доказал следующую теорему.

Теорема. *Пусть $q(t) < 0$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, $\lim\limits_{t\to\infty} q(t) = 0$, $q'(t) > 0$, $q''(t) \leqslant 0$ и $\lim\limits_{t\to\infty} q''(t)[q'(t)]^{-4/3} = 0$. Тогда T имеет бесконечную последовательность отрицательных собственных значений, сходящуюся к нулю. Пусть $N(\lambda)$, $\lambda < 0$, обозначает число собственных значений, не превосходящих λ. Тогда при $\lambda \to 0$*

$$\pi N(\lambda) \sim \int_0^{t(\lambda)} [\lambda - q(t)]^{1/2} dt.$$

Если, кроме того, $q''(t)$ имеет ограниченную вариацию на компактных интервалах и $[q''(t)]^2 [q'(t)]^{-7/3}$ суммируема, то справедлива формула [*].

(c) Распределение собственных значений оператора

$$\tau = -\left(\frac{d}{dt}\right)^2 + q(t),$$

определенного на интервале $[0, \infty)$, в некоторых случаях, когда τ имеет два граничных значения в бесконечности, было недавно исследовано в диссертации Хейвуда [1]. Предполагается, что

(I) $q(0) = 0$,

(II) $q'(t) < 0$ для $t > 0$,

(III) $\int\limits_0^\infty (q(t))^{-1/2} dt < \infty$,

(IV) $q''(t)$ при больших t имеет постоянный знак,

(V) $q''(t) = O((q'(t))^k)$ для некоторого k, $1 < k < 4/3$,

---

1) При более общих условиях формула [*] была получена Б. М. Левитаном [9*]. См. также работу А. Г. Костюченко [1*], где устанавливаются подобные формулы для обыкновенных операторов произвольного порядка, а также для частных производных.— *Прим. ред.*

(VI) для некоторого $r < 3/2$ функция

$$\frac{-q''(t)}{(-q(t))^r}$$

при больших t монотонно убывает.

Для любого самосопряженного расширения оператора τ пусть $N_1(\lambda)$ — число неотрицательных собственных значений, не превосходящих λ, а $N_2(\lambda)$ — число отрицательных собственных значений, не превосходящих λ по абсолютной величине. Пусть $t(\lambda)$ определяется, как в теореме 7.58. Тогда

$$N_1(\lambda) \sim \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty [(\lambda - q(t))^{1/2} - (q(t))^{1/2}]\, dt;$$

$$N_2(\lambda) \sim \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{t(\lambda)} |q(t)|^{1/2}\, dt + \frac{1}{\pi} \int\limits_{t(\lambda)}^\infty [\, |q(t)|^{1/2} - (-q(t) - \lambda)^{1/2}]\, dt.$$

(d) Качественный результат о распределении собственных значений оператора Штурма — Лиувилля получен Хартманом и Уинтнером [11]. Предположим, что интервал $[a, b)$ действительной оси не пересекает существенный спектр. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ — расположенные в порядке возрастания собственные значения самосопряженного расширения оператора Штурма — Лиувилля. Тогда любое другое самосопряженное расширение имеет одно и только одно собственное значение, заключенное между λ_k и λ_{k+1}.

(e) Об асимптотических свойствах мер и матричных мер, полученных из спектральных разложений дифференциальных операторов с непустым существенным спектром, известно мало. В этой связи стоит заметить, что результаты Гельфанда и Левитана по поводу обратной задачи, данные ниже в пункте I, можно интерпретировать как асимптотические результаты для непрерывного спектра.

H. *Сходимость и суммируемость.* Некоторые вопросы сходимости и суммируемости, аналогичные тем, которые составляют часть классической теории рядов Фурье и интегралов Фурье, были изучены, главным образом британской школой, для разложения по собственным функциям оператора, возникающего из самосопряженного расширения оператора Штурма — Лиувилля[1]). Для конечного замкнутого интервала определения эти задачи были

---

[1]) Полное решение задачи о равносходимости для оператора Штурма — Лиувилля было дано Б. М. Левитаном [7] и В. А. Марченко [3*]. Для обыкновенных операторов произвольного порядка решение этой задачи было дано А. Г. Костюченко [2*]. — *Прим. ред.*

исследованы в первом десятилетии XX века Хааром и позднее Уолшем (Хаар [3], Уолш [1]). Соответствующее исследование свойств суммируемости обобщенного интегрального представления Фурье, возникающего при спектральном анализе оператора

$$\tau = -\left(\frac{d}{dt}\right)^2 + q(t) \qquad [*]$$

на действительной оси, где функция q предполагается суммируемой, можно найти в статье Стоуна [17], напечатанной в 1928 г. Работа Титчмарша [16] относится к сингулярным операторам на интервале $[0, \infty)$, не имеющим существенного спектра. Сирс [4] расширил результаты Титчмарша и Стоуна. В недавней статье Рутовица [1] делаются первые шаги в изучении сходимости в L_p. Основные результаты этих статей следующие:

(1) Хаар [3] доказал, что для собственных функций оператора Штурма — Лиувилля, полученных наложением распадающихся граничных условий,

(a) существуют непрерывные функции, для которых ряд Штурма — Лиувилля расходится в некоторой данной точке;

(b) сходимость или расходимость ряда Штурма — Лиувилля $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(t)$ определяется сходимостью или расходимостью косинус-ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt$ или синус-ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nt$;

(c) ряд Штурма — Лиувилля непрерывной функции равномерно суммируем по Чезаро к этой функции.

(2) Уолш [2] доказал следующую теорему.

Пусть $\{f_n\}$ — ортонормальные собственные функции оператора Штурма — Лиувилля, полученного наложением распадающихся граничных условий, а $\{g_n\}$ — ортонормальные собственные функции оператора, полученного из оператора $-(d/dt)^2$ наложением тех же граничных условий на интервале $[a, b]$. Пусть f — интегрируемая в квадрате функция и

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(t) \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k g_k(t)$$

— два соответствующих разложения функции f. Тогда ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} [a_k f_k(t) - b_k g_k(t)]$$

абсолютно и равномерно сходится к нулю.

Резюме последних работ о свойствах сходимости разложений по собственным функциям на конечном замкнутом интервале дается в разделе примечаний и дополнений в гл. XIX.

(3) Если q — непрерывная функция, монотонно стремящаяся к бесконечности на положительной действительной полуоси, то формула обращения для спектрального представления некоторого самосопряженного расширения T оператора τ вида [*] принимает обычную форму разложения в ряд (для функции f, интегрируемой в квадрате)

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(t), \quad c_n = \int_0^{\infty} f(t) \overline{f_n(t)}\, dt,$$

где f_n есть n-я нормированная собственная функция. Титчмарш [16] нашел, что, как и в случае ряда Фурье, этот ряд сходится в любой точке t, в окрестности которой функция f имеет ограниченную вариацию.

(4) Некоторые результаты о суммируемости разложения по собственным функциям при тех же условиях, что и в (3), были получены Титчмаршем [16]. При этом применяется естественный метод суммирования

$$\lim_{\lambda \to \infty} [-\lambda (R(-\lambda;\ T) f)(t)] = \lim_{\lambda \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda + \lambda_n} c_n f_n(t),$$

где λ_n есть n-е собственное значение. Этот предел существует для каждой интегрируемой в квадрате функции f во всех точках t, в которых

$$\int_0^{\varepsilon} |f(t+s) - f(t)|\, ds = O(\varepsilon),$$

и, в частности, равен $f(t)$ во всех точках непрерывности функции f. (См. пункт (8) ниже, где дается общий вид этого принципа.)

(5) (Титчмарш [15]). Если, кроме того, предполагать, что функция q ведет себя, как полином, т. е.

$$q(t) \sim At^k, \quad q'(t) \sim t^{k-1},$$
$$q''(t) = O(t^{k-2}), \quad q'''(t) = O(t^{k-3}),$$

то предыдущий результат обобщается на более широкий класс функций, чем класс квадратично интегрируемых функций. Метод суммируемости (R, p) определяется так:

$$\lim_{\lambda \to \infty} \sum_{\lambda_n < \lambda} \left(\frac{\lambda - \lambda_n}{\lambda} \right)^p c_n f_n(t).$$

Можно показать, что если функция f интегрируема на любом конечном интервале и для некоторого достаточно большого положительного числа a, зависящего от p,

$$\int_0^N |f(t)|\,dt = O(N^a),$$

то соответствующее разложение функции f в ряд существует и этот ряд (R, p)-суммируем во всех точках t, в которых

$$\int_0^\varepsilon |f(t+s)-f(t)|\,dt = O(\varepsilon).$$

(6) Предположим, что функция q не только непрерывна, но еще и суммируема в интервале $[0, \infty)$. Тогда спектр самосопряженного расширения оператора τ на интервале $[0, \infty)$, полученного наложением граничного условия в нуле, состоит из непрерывного спектра, покрывающего положительную действительную полуось, и последовательности собственных значений с простыми нормированными собственными функциями $\{f_n\}$. Пусть $f(t, \lambda)$ — решение уравнения $(\lambda-\tau)f=0$, которое удовлетворяет граничному условию в нуле, и пусть μ — мера, полученная из спектрального разложения (теорема 5.13). Тогда можно показать (см., например, Стоун [17]), что, когда λ меняется на компактном множестве, функция $f(t, \lambda)$ равномерно ограничена по t и λ. Таким образом. интеграл

$$\int_0^\infty g(t)\,f(t, \lambda)\,dt$$

определен для каждой интегрируемой функции g. Наиболее общий результат, полученный Сирсом [4], состоит в следующем: ряд

$$\sum_{n=1}^\infty c_n f_n(t), \qquad c_n = \int_0^\infty g(t)\,\overline{f_n(t)}\,dt,$$

сходится при $0 < t < \infty$, и для каждого $R > 0$ мы имеем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^R f(t, \lambda)\left[\int_0^\infty g(t)\,f(t, \lambda)\,dt\right]\mu(d\lambda)+\sum_{n=1}^\infty c_n f_n(t)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty g(s)\,\frac{\sin\left((t-s)\sqrt{R}\right)}{s-t}\,ds+w(R, t),$$

где при $R \to \infty$ функция $w(R, t)$ стремится к нулю равномерно на каждом конечном замкнутом интервале, не содержащем начала.

Этот результат показывает, что обобщенный интеграл Фурье сходится таким же образом, как и обычный интеграл Фурье. Например, если g имеет ограниченную вариацию в окрестности точки $t > 0$, то

$$\lim_{R\to\infty} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon}^{R} f(t, \lambda) \left[\int_0^{\infty} g(t) f(t, \lambda)\, dt \right] \mu(d\lambda) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(t) = \frac{1}{2}[g(t+0) - g(t-0)].$$

(7) Сирс [4] исследовал также суммируемость по Чезаро обобщенного интеграла Фурье для интегрируемых и квадратично интегрируемых функций. Для любой квадратично интегрируемой функции f интеграл

$$\int_0^{\infty} f(t, \lambda) \hat{f}(\lambda) \mu(d\lambda),$$

где

$$\hat{f}(\lambda) = \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \int_0^N f(t, \lambda) f(t)\, dt,$$

суммируем по Чезаро при любом $p > 0$ в любой точке, в которой

$$\int_0^{\varepsilon} |f(t+s) - f(t-s)|\, ds = O(\varepsilon)$$

при $\varepsilon \to 0$, и, в частности, почти всюду и во всех точках непрерывности функции f. Этот же результат справедлив для интегрируемых функций.

(8) (См. упражнение 9.J2.) В условиях и обозначениях теоремы 5.23 мы можем сформулировать общий принцип суммируемости следующим образом: предположим, что дифференциальный оператор τ ограничен снизу и что f — квадратично интегрируемая функция на интервале определения оператора τ. Тогда

(a) для достаточно больших λ_0 предел

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\lambda_0 + \lambda)^{-1} \sum_{i, j=1}^{k} (Vf)_i(\lambda) \sigma_j(t, \lambda) \varrho_{ij}(d\lambda) = \lim_{a\to\infty} \int_{-\infty}^{a} (\lambda_0 + \lambda)^{-1} \sum_{i, j=1}^{k} (Vf)_i(\lambda) \sigma_j(t, \lambda) \varrho_{ij}(d\lambda)$$

существует равномерно по t в любом компактном подинтервале из I;

(b)
$$\lim_{\lambda_0\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda_0(\lambda_0+\lambda)^{-1}\sum_{i,\,j=1}^{k}(Vf)_i(\lambda)\,\sigma_j(t,\lambda)\,\varrho_{ij}(d\lambda)=$$
$$=\lim_{\lambda_0\to\infty}(-\lambda_0 R(-\lambda_0;\ T)f)(t)=f(t)$$

для каждого t внутри I, для которого
$$\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon}|f(s)-f(t)|\,ds=O(\varepsilon)$$
при $\varepsilon\to 0$;

(c) если $\hat{\tau}$ — любой оператор, определенный на подинтервале $\hat{I}$ из I, $\hat{\tau}$ ограничен снизу, $\hat{T}$ — самосопряженное расширение оператора $T_0(\hat{\tau})$, то
$$\lim_{\lambda_0\to\infty}[(-\lambda_0 R(-\lambda_0;\ \hat{T})(f\,|\hat{I}))(t)+\lambda_0 R(-\lambda_0;\ T)f(t)]=0$$
равномерно по t в любом компактном подинтервале внутри интервала I.

(9) (См. упражнения 9.J1 — J3.) Пусть τ — формально самосопряженный формальный дифференциальный оператор на интервале I, а T — некоторое самосопряженное расширение оператора $T_0(\tau)$. Пусть $\{f_n\}$ — ортонормальное семейство собственных функций оператора T, $(\lambda_n-T)f_n=0$, и пусть множество $\{\lambda_n\}$ ограничено. Тогда для каждой функции f из $L_2(I)$ ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty}(f,\,f_n)\,f_n(t)$$
сходится абсолютно и равномерно в каждом ограниченном замкнутом подинтервале интервала I и его можно дифференцировать произвольное число раз под знаком суммы, причем продифференцированный ряд также сходится абсолютно и равномерно.

(10) Проблема справедливости формул обращения обобщенных интегралов Фурье, возникающих из сингулярных операторов вида
$$\tau=-\left(\frac{d}{dt}\right)^2+q(t)$$
на интервале $[0,\infty)$, для функций из $L_p[0,\infty)$ $(1\leqslant p\leqslant 2)$ была недавно рассмотрена Рутовицем [1]. Предполагается, что

(a)
$$\int_0^{\infty}|(1+t)\,q(t)|\,dt<\infty,$$

(b) функция $(1+t)(q(t))$ имеет ограниченную вариацию.

Пусть самосопряженное расширение T оператора τ определяется граничным условием в нуле, и пусть f — функция класса $L_p[0, \infty)$ $(1 \leqslant p \leqslant 2)$. Пусть $f(t, \lambda)$ — решение уравнения $(\lambda - \tau) g = 0$, удовлетворяющее данному граничному условию в нуле. Пусть μ — соответствующая мера (см. теорему 5.13), полученная из спектрального представления оператора T. Тогда предел

$$\underset{N \to \infty}{\mathrm{l.i.m.}} \int_0^N f(t) f(t, \lambda)\, dt = \hat{f}(\lambda)$$

существует в смыле сходимости в L_p. Более того, существует постоянная $K(p, q)$, такая, что

$$\left| \int_{-\Lambda}^{\Lambda} f(\lambda) f(t, \lambda) \mu(d\lambda) \right|_p \leqslant K(p, q) |f|_p,$$

и мы имеем

$$\lim_{\Lambda \to \infty} \left| \int_{-\Lambda}^{\Lambda} f(\lambda) f(t, \lambda) \mu(d\lambda) - f \right|_p = 0.$$

I. *Обратная задача.* Широкое применение спектральной теории дифференциальных операторов к различным задачам современной физики не только показало физический смысл многих математических понятий, но и способствовало возникновению некоторых задач, которые еще не имеют полного математического решения. Среди этих задач выделяется так называемая «обратная задача», а именно задача нахождения необходимых и достаточных условий, которым должна удовлетворять данная матричная мера для того, чтобы она была мерой, полученной из спектрального представления самосопряженного расширения некоторого дифференциального оператора, и задача выражения этого дифференциального оператора в явном виде, если он существует.

Первый поход к этой задаче следует искать в статье Борга [2], 1945 г., где она изучается в случае, когда оператор второго порядка задан на компактном интервале. Борг показал, что если задано распределение собственных значений для *двух* самосопряженных расширений оператора

$$\tau = -\left(\frac{d}{dt}\right)^2 + q(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant \pi,$$

то функция q однозначно определяется. Левинсон [4] упростил рассуждения Борга и доказал, что уже распределение собственных значений одного самосопряженного расширения однозначно определяет функцию q в том случае, когда $q(\pi - t) = q(t)$.

Сингулярная задача для оператора второго порядка, определенного на положительной полуоси, была впервые изучена Крейном [13, 14], который использовал принадлежащую ему теорию продолжения положительно определенных функций[1]). Гельфанд и Левитан в исчерпывающей статье [1] представили полное изложение всех результатов, которые были до сих пор известны по поводу этой задачи. Недавно Кей и Мозес в работах [1, 2] разъяснили идеи, лежащие в ее основе. Здесь мы даем краткое изложение результатов этих работ.

Основной результат заключается в следующем.

Пусть μ — мера, которая получается из спектрального представления самосопряженного расширения оператора

$$\tau_0 = -\left(\frac{d}{dt}\right)^2$$

на интервале $[0, \infty)$ (см. конец § 5), полученного наложением граничного условия $B(f) = f'(0) = 0$, а именно

$$\mu([a, b]) = \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}}.$$

Пусть ϱ — положительная борелевская мера на положительной действительной полуоси и $\sigma = \varrho - \mu$. Предположим, что ϱ удовлетворяет следующим условиям:

(1) $$\int_{-\infty}^{0} e^{\sqrt{|\lambda|}\, t} \varrho(d\lambda) < \infty, \qquad t > 0;$$

(2) функция

$$a(t) = \int_1^\infty \frac{\cos t\sqrt{\lambda}}{\lambda} \sigma(d\lambda)$$

четырежды дифференцируема.

При этих условиях мы можем найти дифференциальный оператор

$$\tau = -\left(\frac{d}{dt}\right)^2 + q(t), \qquad 0 \leqslant t,$$

такой, что ϱ служит мерой, связанной со спектральным представлением самосопряженного расширения T оператора τ (см. теорему 5.13 и следствие 21), полученного наложением граничного условия $B(f) = f'(0) = 0$.

[1]) Вопросы единственности обратной задачи в сингулярном случае впервые рассмотрел В. А. Марченко [3*]. — *Прим. ред.*

Обратно, если предполагать, что функция q имеет непрерывную производную, то мера, полученная из спектрального представления (см. теорему 5.13) любого самосопряженного расширения T оператора τ, удовлетворяет условиям (1) и (2).

Идея Гельфанда и Левитана интуитивно проста. Предположим, что оператор τ задан, а $f(t, \lambda)$ — решение дифференциального уравнения $(\lambda - \tau) f = 0$, удовлетворяющее граничному условию $B(f) = 0$. Пусть ϱ — мера, описанная в теореме 5.13, для самосопряженного оператора T. Тогда функции $f(t, \lambda)$ обладают свойством ортогональности

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(s, \lambda) f(t, \lambda) \varrho(d\lambda) = 0, \qquad 0 < s \neq t < \infty.$$

Функции $\cos t\sqrt{\lambda}$, полученные из оператора τ_0, также обладают свойством ортогональности

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos s\sqrt{\lambda} \cos t\sqrt{\lambda}\, \mu(d\lambda) = 0, \quad s \neq t.$$

Используя эти соотношения, Гельфанд и Левитан пытаются восстановить функции $f(t, \lambda)$ методом «ортогонализации» функций $\cos t\sqrt{\lambda}$ относительно меры ϱ. Первый шаг состоит в выражении функции $f(t, \lambda)$ в виде «линейной комбинации» функций $\cos t\sqrt{\lambda}$ в терминах интегрального оператора с ядром типа Вольтерра

$$[*] \qquad f(t, \lambda) = \cos t\sqrt{\lambda} + \int_0^t K_1(t, s) \cos s\sqrt{\lambda}\, ds.$$

Покажем кратко, как получается ядро K_1, если функции $f(t, \lambda)$ известны. Формальное дифференцирование формулы [*] дает следующее дифференциальное уравнение с частными производными для K_1:

$$\frac{\partial^2 K_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 K_1}{\partial s^2} = q(t) K_1(s, t)$$

с граничными условиями

$$K_1(t, 0) = 0,$$

$$K_1(t, t) = \frac{1}{2} \int_0^t q(t)\, dt.$$

Из общей теории гиперболических уравнений известно, что решение этого уравнения существует и единственно. Таким образом, если ядро K_1 известно, то мы можем найти функции $f(t, \lambda)$. а функция q определяется единственным образом из соотношения

$$q(t) = 2K_1'(t, t).$$

Аналогично функции $\cos t\sqrt{\lambda}$ можно выразить в виде «линейных комбинаций» функций $f(t, \lambda)$:

$$\cos t\sqrt{\lambda} = f(t, \lambda) + \int_0^t K_2(t, s) f(s, \lambda)\, ds,$$

где ядро K_2 определяется аналогично K_1.

Следующий шаг состоит в том, чтобы найти интегральное уравнение для ядра K_1, когда функции $f(t, \lambda)$ заранее не известны. Для этого нужно сначала показать, что если $f(t, \lambda)$ является «линейной комбинацией» функций $\cos t\sqrt{\lambda}$, то имеет место тождество

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t, \lambda) \cos s\sqrt{\lambda}\, d\lambda = 0, \qquad s < t.$$

При помощи формальной подстановки в это тождество выражения f через ядро K_1 мы получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos t\sqrt{\lambda} \cos s\sqrt{\lambda}\, \varrho(d\lambda) + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \cos s\sqrt{\lambda} \left[\int_0^t K_1(t, s) \cos s\sqrt{\lambda} \right] \varrho(d\lambda) = 0, \quad s < t.$$

Ясно, что интегралы в этом уравнении, вообще говоря, расходятся. Однако, используя определенную ранее функцию множества σ, можно так преобразовать эти интегралы, что ограничения, налагаемые на ϱ, будут обеспечивать их сходимость, и мы получим

$$F(t, s) + \int_0^t F(t, u) K_1(t, u)\, du + K_1(t, s) = 0,$$

где

$$F(t, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos t\sqrt{\lambda} \cos s\sqrt{\lambda}\, \sigma(d\lambda).$$

Затем доказывается, что однородное уравнение, соответствующее этому уравнению Фредгольма для K_1 (при фиксированном t, $s<t$), не имеет ненулевых решений. Поэтому решение неоднородного уравнения определяет ядро K_1 и, следовательно, функцию q.

Преимущества этого метода очевидны, поскольку он требует только решения интегрального уравнения, допускающего последовательное интегрирование. Более того, теорема Гельфанда и Левитана показывает, что меры из теоремы 5.13 могут проявлять несколько патологических свойств: например, они могут быть сингулярными относительно меры Лебега и в то же время обращаться в нуль на целых отрезках.

Если оператор τ определен на компактном интервале $[0, a]$, теорема Гельфанда и Левитана допускает особенно простую формулировку. Пусть заданы две бесконечные системы действительных чисел $\{\lambda_n\}$ и $\{c_n\}$, удовлетворяющие асимптотическим соотношениям[1])

$$\sqrt{\lambda_n}=\frac{\pi}{a}n+O(n^{-1}),$$

$$c_n=\frac{a}{2}+O(n^{-1});$$

тогда существуют непрерывная функция q и числа h, H, такие, что спектр самосопряженного расширения оператора, полученного из оператора $\tau=-(d/dt)^2+q$ наложением граничных условий $B_1(f)=f'(0)-hf(0)=0=f'(a)+Hf(a)=B_2(f)$, совпадает с последовательностью $\{\lambda_n\}$.

Если f_n — собственная функция, соответствующая собственному значению λ_n и нормированная условием $f_n(0)=1$, то

$$c_n=\int_0^a (f_n(t))^2\,dt.$$

Более того, функция q может быть явно вычислена указанным выше методом.

Патологические свойства спектра исследованы Хартманом в работе [13] совершенно другим путем. Он использовал характеризацию спектра оператора второго порядка, полученную в теории осцилляции (см. упражнение 9.F3). Хартман доказал, что если задано любое замкнутое подмножество действительной оси, то

---

[1]) Точнее, все $c_n>0$ и $\sqrt{\lambda_n}=n+\alpha_0/n+O(1/n^2)$, $c_n=a/2+O(1/n^2)$.— *Прим. перев.*

существует функция q, такая, что существенным спектром оператора

$$-\left(\frac{d}{dt}\right)^2+q(t)$$

на интерале $[0, \infty)$ является заданное множество. Функция q может быть выбрана бесконечно дифференцируемой.

Среди других недавних работ по поводу обратной задачи отметим следующие: Березанский [1], Кей [1], Крейн [14, 17, 18], Ньютон и Йост [1], Сташевская [1] [1]).

Родственные теории. Недавно привлекли внимание некоторые новые применения линейного анализа к изучению дифференциальных операторов, помимо спектральной теории, изложенной в настоящей главе. Две из этих теорий представляются особенно интересными.

Русская школа развила теорию операторов обобщенного сдвига, построенную Б. М. Левитаном и А. Я. Повзнером на основе идеи, высказанной Дельсартом (1938). Исходя из формального дифференциального оператора

$$\tau=-\left(\frac{d}{dt}\right)^2+q(t)$$

на интервале I, который может совпадать с положительной полуосью или со всей действительной осью, где функция q предполагается ограниченной [2]), они определяют оператор в $L_p(I)$ $(1\leqslant p<\infty)$ таким же образом, как это делается для гильбертова пространства в § 2. Обозначим этот оператор через S и не будем уточнять, в каком именно пространстве он рассматривается; предположим только, что область определения $\mathfrak{D}(S)$ состоит из достаточное число раз дифференцируемых функций. Допустим на время, что функция q тождественно обращается в нуль, так что оператор S сводится к обычному дифференцированию. Полагая

$$(T(s)f)(t)=f(t+s), \qquad s\in I,$$

мы находим, что семейство операторов $T(s)$ обладает следующими свойствами:

---

[1]) Следует отметить фундаментальную работу Марченко [4*], в которой полностью решена обратная задача по сдвигу фаз; см. также работы Левитана и Гасымова [1*], Шноля [2*], Фаддеева [1*].— *Прим. ред.*

[2]) Случай неограниченной функции q был изучен Фан Ван Чыонгом на основе работы Костюченко и Митягина [2*] по ядерным пространствам.— *Прим. ред.*

(a) при фиксированном s оператор $T(s)$ отображает $\mathfrak{D}(S)$ в себя;

(b) при фиксированном t для $f \in \mathfrak{D}(S)$ функция

$$F_t(\cdot) = (T(\cdot) f)(t)$$

принадлежит $\mathfrak{D}(S)$;

(c) для f из $\mathfrak{D}(S)$

$$(S(T(s) f))(t) = (S(T(t) f))(s);$$

(d) (ассоциативность)

$$(T(u) F_t)(s) = (T(u)(T(s) f))(t);$$

(e) (коммутативность)

$$T(t)(T(s) f) = T(s)(T(t) f);$$

(f) $T(0) f = f$.

Если мы теперь отбросим условие $q(t) = 0$ и примем свойства (a) — (f) за основные аксиомы, то придем к следующему определению: семейство ограниченных операторов $T(s)$, $s \in I$, называется семейством *операторов обобщенного сдвига*, связанным с оператором S, если оно удовлетворяет условиям (a) — (f). С помощью операторов $T(s)$ можно обобщить понятие свертки двух функций, определяя обобщенную свертку формулой

$$(f * g)(s) = \int_I (T(s) f)(t)\, g(t)\, dt.$$

Продолжая подобным образом, можно получить интересные обобщения различных понятий гармонического анализа: положительно определенных функций, алгебр со сверткой, почти периодических функций и т. д. Более того, с помощью операторов обобщенного сдвига можно дать еще одно доказательство спектральной теоремы для самосопряженных дифференциальных операторов второго порядка.

Для того чтобы построить операторы $T(s)$, нужно построить два решения u и v уравнения с частными производными

$$\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - q(s) w = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q(t) w,$$

удовлетворяющих соответственно начальным условиям

$$u(s, 0) = f(s), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0,$$

$$v(s, 0) = 0, \qquad \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = f(s),$$

и положить

$$(T(s)f)(t) = u(t, s) + av(t, s)$$

для любого действительного числа a. Оператор $T(t)$ будет тогда удовлетворять условиям (a) — (f). Подробное изложение этой теории можно найти в работе Левитана [1].

Подход к изучению дифференциальных операторов в банаховых пространствах более сложного характера, чем гильбертовы пространства, был указан Феллером в работах [1—7], где он исследовал структуру полугрупп в пространстве $C(I)$. В частности, Феллер построил теорию граничных значений, которая имеет несколько точек соприкосновения с теорией, развитой в этой книге для гильбертова пространства. Работы Феллера близки к исследованиям Хилле [5] и Иосида [8, 9] по полугруппам, порожденным дифференциальными операторами. Подробное изложение этих теорий увело бы нас слишком далеко в сторону теории полугрупп. Поэтому мы отсылаем читателя к оригинальным работам.

ГЛАВА XIV

Линейные дифференциальные уравнения и операторы с частными производными

1. Введение. Задача Коши. Локальная зависимость

В этой главе будет рассмотрен ряд теорем о линейных дифференциальных операторах с частными производными. Так как теория линейных дифференциальных операторов с частными производными является обширной и весьма разветвленной, мы коснемся лишь некоторых ее аспектов, стремясь скорее к тому, чтобы продемонстрировать все разнообразие применений функционального анализа, чем к тому, чтобы изложить какую-либо часть этой теории ради нее самой.

Чтобы проиллюстрировать, как функциональный анализ может быть применен к получению результатов о дифференциальных уравнениях, мы начнем с элементарного примера. Под *формальным* (*линейным*) *дифференциальным оператором* L *с частными производными порядка* m, *определенным в области* D *евклидова* n-*мерного пространства*, мы понимаем формальное выражение

$$L = \sum_{j=0}^{m} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_j = 1} a_{i_1 \ldots i_j}(t_1, \ldots, t_n) \frac{\partial^j}{\partial t_{i_1} \ldots \partial t_{i_j}}, \tag{1}$$

где коэффициенты $a_{i_1 \ldots i_j}(t_1, \ldots, t_n)$ предполагаются определенными для $t = [t_1, \ldots, t_n] \in D$, симметричными по индексам $i_1, i_2, \ldots, i_j$ и, если явно не оговорено противное, бесконечно дифференцируемыми в D. Слагаемое в этом формальном дифференциальном операторе, соответствующее индексу $j = 0$, является по определению оператором умножения на функцию, заданную в D.

Пусть S — гладкая поверхность в D. Тогда *задача Коши* для L на поверхности S есть задача нахождения такого решения f дифференциального уравнения с частными производными $Lf = 0$, что оно и его первые $m - 1$ нормальных производных имеют произвольно заданные значения в каждой точке поверхности S. Для определенности мы будем предполагать, что D есть все евклидово n-мерное пространство, а S — гиперплоскость в D размерности $n - 1$. Поскольку допустимо соответствующее вращение евклидова n-мерного пространства, мы можем для простоты и без ограничения общности считать, что $S=\{[t_1, \ldots, t_n] \mid t_n=0\}$. Тем самым мы можем сказать, что задача Коши для L состоит в следующем: показать, что для каждого набора $g_0, g_1, \ldots, g_{m-1}$ бесконечно дифференцируемых функций на S существует единственная функция $f \in C^\infty(D)$, удовлетворяющая уравнению $Lf=0$, и такая, что

$$f(t)=g_0(t), \quad \frac{\partial f}{\partial t_n}(t)=g_1(t), \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{m-1} f}{\partial t_n^{m-1}}(t)=g_{m-1}(t), \qquad t \in S;$$

здесь и далее мы пишем ради краткости t вместо $[t_1, \ldots, t_n]$. Функции $g_0, \ldots, g_{m-1}$ называются *данными* задачи Коши, а функция f — решением задачи Коши. Простым функционально-аналитическим рассуждением будет показано, что предположение об однозначной разрешимости задачи Коши для L на поверхности S приводит к такому удивительному следствию.

Если A — компактное подмножество в D, в частности если $A=\{p\}$ состоит из одной точки, то существует такое компактное подмножество K в S, что для данных $g_0, \ldots, g_{m-1}$ задачи Коши, обращающихся в нуль на K, решение f обращается в нуль на A.

Это очень общее описание явления, состоящего в том, что имеется конечная область зависимости. Доказательство состоит в простом применении теоремы о замкнутом графике. Пусть Ξ есть F-пространство всех решений уравнения $Lf=0$, принадлежащих $C^\infty(D)$ с нормой

$$|f|=\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i_1, \ldots, i_j=1}^{n} \frac{1}{k!j!} \frac{\mu_{i_1 \ldots i_j}(k, f)}{1+\mu_{i_1 \ldots i_j}(k, f)},$$

где

$$\mu_{i_1 \ldots i_j}(k, f)=\max_{t_1^2+\ldots+t_n^2 \leqslant k^2} \left| \frac{\partial^j f(t_1, \ldots, t_n)}{\partial t_{i_1} \ldots \partial t_{i_j}} \right|.$$

При этом символ $\mu_{i_1 \ldots i_j}$ для $j=0$ есть функция

$$\mu(k, f)=\max_{t_1^2+\ldots+t_n^2 \leqslant k^2} |f(t_1, \ldots, t_n)|.$$

Пусть Δ есть F-пространство всех наборов $[g_0, \ldots, g_{m-1}]$ начальных данных с нормой

$$|[g_0, \ldots, g_{m-1}]|=\sum_{p=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i_1, \ldots, i_{m-1}}^{n-1} \frac{1}{k!j!} \frac{\hat{\mu}_{i_1 \ldots i_j}(k, p)}{1+\hat{\mu}_{i_1 \ldots i_j}(k, p)},$$

где

$$\hat{\mu}_{i_1 \ldots i_j}(k, p) = \hat{\mu}_{i_1 \ldots i_j}(k, p; [g_0, \ldots, g_{m-1}]) =$$
$$= \max_{0 \leqslant q \leqslant m-1} \max_{t_1^2 + \ldots + t_{n-1}^2 \leqslant k^2} \left| \frac{\partial^j g_q(t_1, \ldots, t_{n-1})}{\partial t_{i_1} \ldots \partial t_{i_j}} \right|.$$

Пусть $T: \Delta \to \Xi$ — отображение, переводящее каждый набор $[g_0, \ldots, g_{m-1}]$ начальных данных в соответствующее единственное решение f уравнения $Lf = 0$. Очевидно, что T линейно, и столь же очевидно, что T замкнуто. Следовательно, по теореме о замкнутом графике (II.2.4) T непрерывно. Тем самым для любых заданных $\varepsilon > 0$ и натурального k существуют $\delta > 0$ и натуральное l, такие, что $\mu(k, T[g_0, \ldots, g_{m-1}]) < \varepsilon$, если выполнены неравенства

$$|\hat{\mu}_{i_1 \ldots i_m}(l, p; [g_0, \ldots, g_{m-1}])| < \delta,$$
$$i_1, \ldots, i_m \leqslant n-1, \quad p = 0, \ldots, m-1.$$

Так как T линейно, то отсюда немедленно вытекает, что если

$$\hat{\mu}_{i_1 \ldots i_m}(l, p; [g_0, \ldots, g_{m-1}]) = 0,$$
$$i_1, \ldots, i_m \leqslant n-1, \quad p = 0, \ldots, m-1,$$

то $\mu(k, T[g_0, \ldots, g_{m-1}]) = 0$. Таким образом, для каждого натурального k существует такое натуральное число l, что если начальные данные задачи Коши обращаются в нуль в шаре $t_1^2 + \ldots + t_{n-1}^2 \leqslant l^2$, то решение задачи Коши обращается в нуль в шаре $t_1^2 + \ldots + t_n^2 \leqslant k^2$. Отсюда легко получается сформулированное ранее утверждение.

В качестве поучительного примера рассмотрим тот частный случай, когда $n = 2$, $m = 2$, а L — оператор Лапласа

$$L = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$

Имеет ли задача Коши

$$\nabla^2 f(x_1, x_2) = 0, \quad +\infty > x_i > -\infty, \quad f(x_1, 0) = g_0(x_1),$$
$$\frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, 0) = g_1(x_1),$$

единственное решение для каждой пары g_0, g_1 начальных данных из $C^\infty(-\infty, +\infty)$? Следующие рассуждения приводят к отрицательному ответу. Как известно, вещественная и мнимая части решения уравнения $\nabla^2 f = 0$ в области $R = \{[x_1, x_2] \mid x_2 > 0\}$ являются вещественными частями пары аналитических функций комплексного переменного $z = x_1 + ix_2$, определенных в этой области. Следовательно, решение уравнения $\nabla^2 f = 0$ в R есть аналитическая функция переменных x_1, x_2, и потому, если f обращается в нуль в подобласти из R, она должна быть тождественным нулем. С другой стороны, если бы задача Коши имела единственное решение для каждой пары g_0, g_1 выбранных начальных данных, то в силу доказанного выше имело бы место явление локальной зависимости, и мы могли бы построить решения уравнения $\nabla^2 f = 0$, обращающиеся в нуль в подобласти R, но не являющиеся тождественными нулями. Это рассуждение, очевидно, имеет общий характер и показывает, что два следующих свойства формального дифференциального оператора L являются взаимно исключающими.

Свойство A. Некоторая соответствующим образом поставленная задача Коши для L имеет единственное решение для каждого набора предписанных гладких начальных данных.

Свойство B. Решения уравнения $Lf = 0$ являются настолько гладкими, что к ним может быть применен теоретико-функциональный принцип единственности продолжения.

Формальные дифференциальные операторы с частными производными, обладающие свойствами, подобными свойству A, обычно называются *гиперболическими операторами*; операторы, обладающие свойствами, подобными свойству B, обычно называются *эллиптическими*. Мы уже отметили, что оператор Лапласа $\nabla^2 = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$ является характерным примером второго типа. Вскоре мы увидим, что оператор

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

является гиперболическим. Эллиптико-гиперболическая дихотомия хорошо иллюстрируется этой парой операторов. Мы уже указывали, что решения уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right) f(x_1, x_2) = 0$$

являются аналитическими функциями. С другой стороны, любая дважды дифференцируемая функция f вида

$$f(x_1, x_2) = g(x_1 - x_2)$$

удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right) f(x_1, x_2) = 0.$$

Ясно, что решения этого последнего уравнения не обязаны быть аналитическими или даже иметь какие-либо производные, кроме тех, которые требуются начальными условиями.

Третья категория формальных дифференциальных операторов с частными производными — *параболические*; их типичный представитель — оператор

$$\frac{\partial}{\partial x_1}-\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$

Операторы этого типа тесно связаны с теорией полугрупп, в которой, как мы уже видели, важную роль играют общие уравнения вида

$$\frac{d}{dt}T(t)f=AT(t)f,$$

где A — неограниченный и в некотором смысле (см. следствие VIII.1.14) отрицательный оператор. Рассматривая дифференциальный оператор A с частными производными, отрицательный в этом смысле, мы оказываемся у общих истоков теории полугрупп и теории параболических дифференциальных уравнений с частными производными.

Не следует думать, что эти три категории операторов — эллиптические, параболические и гиперболические — исчерпывают всю совокупность формальных линейных дифференциальных операторов с частными производными. Так, например, оператор

$$[*]\qquad \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_4^2},$$

иногда классифицируемый как *ультрагиперболический*, не принадлежит ни одной из этих категорий. Оператор типа

$$[**]\qquad \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+i\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}-i\frac{\partial^2}{\partial x_4^2}$$

вообще трудно классифицировать. Кроме того, многие авторы в различных смыслах используют термины *эллиптический*, *параболический*, *гиперболический*, так что между этими категориями нельзя провести строгой границы. Понятия эллиптического, параболического и гиперболического формальных дифференциальных операторов с частными производными следует рассматривать скорее как ориентиры в широком поле операторов, чем как надежные знаки, по которым можно различать отдельные уравнения. В дальнейшем мы увидим, что многие важные свойства формальных дифференциальных операторов с частными производными, близкие к тем, на которые указывают эти ориентиры, можно установить на весьма общей основе. С другой стороны, как ультрагиперболический оператор [*], так и загадочный оператор [**] лежат еще в terra incognita.

В то время как основное элементарное выражение (1) довольно громоздко, сокращенное обозначение для дифференциальных операторов и уравнений явно недостаточно. В связи с этим мы посвятили следующий параграф введению ряда обозначений, которые окажутся полезными в дальнейшем. Центральным моментом нашего исследования и данного выше элементарного доказательства локальной зависимости, как будет видно, является то решающей важности обстоятельство, что исследование можно проводить в *полных* пространствах дифференцируемых функций, если надлежащим образом определить *обобщенные производные*. Для этой цели подходят определения, принятые в теории Лорана Шварца, которой и посвящен § 3. После определения обобщенных производных в смысле теории распределений важно получить информацию о непрерывности и дифференцируемости (в обычном смысле) функций, обладающих обобщенными производными в том или ином обобщенном смысле. Такого рода информация извлекается из общих теорем Соболева, которым посвящен § 4.

В небольшом § 5 рассмотрены некоторые элементарные вопросы геометрической теории дифференциальных уравнений с частными производными.

В § 6 содержится теория эллиптических дифференциальных уравнений с частными производными и связанных с ними граничных задач. Он начинается сравнительно элементарным доказательством принципа дифференцируемости слабых решений. На его основе дается краткое доказательство обобщения Маутнера — Гординга — Браудера на произвольные сингулярные самосопряженные эллиптические дифференциальные операторы с частными производными теоремы Вейля — Кодаиры о спектральном представлении для сингулярных самосопряженных обыкновенных дифференциальных операторов [1]. Далее мы рассматриваем спектральную теорию эллиптических операторов в ограниченных областях, излагая теорию общей задачи Дирихле (которая основывается на фундаментальном неравенстве Гординга) и принципа дифференцируемости вплоть до границы. В конце параграфа оказывается возможным дать очень короткое доказательство интересной теоремы Браудера о полноте в несамосопряженном случае [2].

В § 7 некоторые из методов, развитых в предыдущих параграфах этой главы, применяются к изучению задачи Коши для

[1]) Следует заметить, что основная заслуга в нахождении спектрального разложения эллиптических сингулярных операторов принадлежит А. Я. Повзнеру [9*], рассмотревшему оператор Шредингера $-\Delta+q(x_1, x_2, x_3)$. Общий случай был разобран на пути, проложенном в работе А. Я. Повзнера. — *Прим. ред.*

[2]) Эта теорема является частным случаем общей теоремы М. В. Келдыша [1] о полноте корневых векторов одного класса абстрактных самосопряженных операторов. — *Прим. ред.*

гиперболических уравнений, при этом дается доказательство общей теоремы Фридрихса и Лакса о существовании и единственности решения задачи Коши для симметрических гиперболических систем дифференциальных уравнений первого порядка с частными производными.

В § 8 теория эллиптических граничных задач, развитая в § 6, применяется для получения решения задачи с начальными граничными условиями для «не зависящего от времени» параболического уравнения. Эта теория использует некоторые идеи абстрактной теории полугрупп.

2. Обозначения и предварительные сведения

Символ J в этой главе будет обозначать *индекс*, т. е. k-набор $J=[j_1, \ldots, j_k]$ целых чисел. Мы пишем $|J|=k$, $\min J=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant k} j_i$, $\max J=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k} j_i$ и, если множество J пусто, $|J|=0$. Через E^n обозначается вещественное евклидово n-мерное пространство, а через U^n — комплексное унитарное n-мерное пространство. Индекс J будем называть индексом для E^n, если $\min J\geqslant 1$ и $\max J\leqslant n$. Если $\xi\in U^n$, т. е. $\xi=[\xi_1, \ldots, \xi_n]$, и J — индекс для E^n, т. е. $J=[j_1, \ldots, j_k]$, $k=|J|$, то через ξ^J будет обозначаться выражение $\xi_{j_1}\xi_{j_2}\ldots\xi_{j_k}$. Если $J=[j_1, \ldots, j_k]$ и $\hat{J}=[\hat{j}_1, \ldots, \hat{j}_k]$ — два индекса, то $J\cup\hat{J}$ обозначает индекс $[j_1, \ldots, j_k, \hat{j}_1, \ldots, \hat{j}_k]$. Если $L=[l_1, \ldots, l_n]$ — такой индекс, что $|L|=n$, а $\xi=[\xi_1, \ldots, \xi_n]\in U^n$, то $L\cdot\xi=\xi\cdot L$ будет обозначать величину $l_1\xi_1+\ldots+l_n\xi_n$. Если $\xi=[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ и $\zeta=[\zeta_1, \ldots, \zeta_n]$ — два вектора в U^n, то через $\xi\zeta$ мы записываем вектор $[\xi_1\zeta_1, \ldots, \xi_n\zeta_n]$.

Операции $\frac{\partial}{\partial x_j}$ и $\frac{\partial}{\partial s}$ частного дифференцирования будут иногда записываться как ∂_{x_j} или ∂_j и ∂_s соответственно. Если J — индекс для E^n и $|J|=k$, то смешанная частная производная

$$\frac{\partial^k}{\partial x_{j_1}\partial x_{j_2}\ldots\partial x_{j_k}}$$

будет называться частной производной порядка $k=|J|$ и записываться как ∂^J. Если $|J|=0$, то оператор ∂^J определяется как тождественный оператор

В оставшейся части этой главы, кроме случаев, когда оговорено противное, n будет фиксированным положительным целым числом, и мы будем исследовать дифференциальные операторы, уравнения с частными производными и т. п., относящиеся к различным классам функций и «обобщенных функций», определенных на том или ином подмножестве E^n. Однако иногда мы будем выделять ту или иную координатную переменную в E^n, если она играет особую роль в нашем анализе. Чтобы сделать это с наименьшим числом неудобств в обозначениях, мы будем часто в таких случаях переходить от рассмотрения подмножеств в E^n к рассмотрению подмножеств в E^{n+1} и считать E^{n+1} отождествленным с прямой суммой $E^{n+1}=E^n\oplus E^1$ n-мерного и одномерного пространств. В соответствии с этим каждый вектор $y\in E^{n+1}$ будет записываться в виде $[x, s]$, где $y=[y_1, \ldots, y_{n+1}]$, $s=y_{n+1}$. Если же E^n и E^{n+1} рассматриваются одновременно, то y будет обозначать переменную точку в E^{n+1}, x — переменную точку в E^n, равную $[y_1, \ldots, y_n]$, а $s=y_{n+1}$ — вещественное переменное, равное «выделенной» последней координате вектора y. Как указано в этих двух последних предложениях, координаты вектора x в E^n будут записываться как x_j или, если желательно подчеркнуть, что x_j есть j-я координата вектора x, а не j-й вектор последовательности, иногда используется обозначение $(x)_j$. Тем самым если $\{x_m\}$ — последовательность векторов в E^n, то $\{(x_m)_j\}$ — соответствующая последовательность j-х координат. В общем случае, если явно не оговорено противное, J, $\hat{J}$, $\tilde{J}$ и т. д. будут обозначать индексы для E^n, т. е. индексы, область изменения которых ограничена условиями $\min J\geqslant 1$, $\max J\leqslant n$. Аналогично через $J_1, \hat{J}_1, \tilde{J}_1$ будут записываться индексы для E^{n+1}. Таким образом, например, если $\xi\in U^n$, то $\sum\limits_{|J|=m}\xi^J$ есть сокращенное обозначение для

$$\sum_{j_1=1,\ldots,j_m=1}^{n}\xi_{j_1}\xi_{j_2}\ldots\xi_{j_m}=\left(\sum_{j=1}^{n}\xi_j\right)^m=\left(\sum_{|J|=1}\xi^J\right)^m,$$

и аналогично

$$\sum_{|J_1|=m}\xi_1^J=\left(\sum_{j=1}^{n+1}(\xi_1)_j\right)^m.$$

При рассмотрении функций или обобщенных функций, определенных на E^n или на его подмножествах, символы L, L_1, $\tilde{L}$ и т. д. будут обычно использоваться для индексов, подчиненных условию $|L|=n$, а в остальном произвольных. Так, например, ряд Фурье функции f, определенной на E^n и периодической с периодом 2π по каждой из переменных, будет записываться либо как

$$f(x)=\sum_{|L|=n}a_Le^{iL\cdot x},$$

либо просто как

$$f(x)=\sum_{L}a_Le^{iL\cdot x}.$$

Если m — положительное целое число, то выражение

$$\tau = \sum_{|J| \leqslant m} a_J(x)\,\partial^J,$$

где коэффициенты a_J — бесконечно дифференцируемые функции в открытом множестве $I \subseteq E^n$, будет называться *формальным дифференциальным оператором с частными производными, определенным в* I, а m — *порядком* τ. В этом выражении допускается слагаемое, для которого $|J| = 0$. Формальный оператор $a_J(x)\,\partial^J$, соответствующий такому индексу J, есть по определению оператор умножения на бесконечно дифференцируемую функцию, заданную на I. Если

$$\hat{\tau} = \sum_{|\hat{J}| \leqslant m} \hat{a}_{\hat{J}}(x)\,\partial^{\hat{J}}$$

— другой формальный дифференциальный оператор с частными производными, определенный в I, а f — функция, бесконечно дифференцируемая в I, то, используя правило Лейбница, мы можем выражение

$$\hat{\tau}(\tau f)(x) = \sum_{|\hat{J}| \leqslant \hat{m}} \sum_{|J| \leqslant m} \hat{a}_{\hat{J}}(x)\,\partial^{\hat{J}}((a_J(x))\,\partial^J f)(x)$$

переписать в виде

$$\sum_{|\tilde{J}| \leqslant \hat{m}+m} b_{\tilde{J}}(x)\,(\partial^{\tilde{J}} f)(x).$$

Применяя правило Лейбница, было бы нетрудно выразить алгебраически коэффициенты $b_{\tilde{J}}$ через коэффициенты $\hat{a}_{\hat{J}}$, a_J и их частные производные. Мы пишем

$$\hat{\tau}\tau = \tilde{\tau} = \sum_{|\tilde{J}| \leqslant \hat{m}+m} b_{\tilde{J}}(x)\,\partial^{\tilde{J}}$$

и называем $\tilde{\tau}$ *произведением* операторов $\hat{\tau}$ и τ. Аналогично, *сумма* τ и $\hat{\tau}$ определяется по формуле

$$\sum_{|J| \leqslant \max(m,\,\hat{m})} (a_J(x) + \hat{a}_J(x))\,\partial^J,$$

где мы полагаем $a_J = 0$ при $|J| > m$ и $\hat{a}_J = 0$ при $|J| > \hat{m}$.

Пусть I — открытое множество в E^n и $\bar{I}$ — его замыкание. Множество $C^\infty(I)$ состоит из тех определенных на I числовых функций f, которые имеют непрерывные частные производные всех порядков. Аналогично, множество $C^k(I)$ состоит из тех определенных на I числовых функций, которые имеют все непрерывные частные производные порядка не выше k. Множествам $C_0^\infty(I)$ и $C_0^k(I)$ принадлежат те функции из $C^\infty(I)$ и $C^k(I)$ соответственно, которые обращаются в нуль вне компактного множества. $C^k(\bar{I})$ содержит все функции, определенные на $\bar{I}$, имеющие все частные производные порядка не выше k в каждой точке I и такие, что каждая частная производная имеет непрерывное продолжение на $\bar{I}$. В этом случае $\partial^J f(x)$ определяется для $x\in\bar{I}$ и $|J|\leqslant k$ как непрерывное продолжение функции $\partial^J f(x)$ с I на $\bar{I}$. Далее мы полагаем

$$C^\infty(\bar{I})=\bigcap_{k\geqslant 1} C^k(\bar{I}),\qquad C_0^\infty(\bar{I})=C_0^\infty(I),\qquad C_0^k(\bar{I})=C_0^k(I).$$

Часто мы будем рассматривать тот случай, когда $\bar{I}$ — прямоугольный параллелепипед в E^n вида

$$I=\{x\in E^n\,|\,a_j\leqslant x_j\leqslant b_j,\quad j=1,\ \ldots,\ n\},$$

где $a_1,\ \ldots,\ a_n$ и $b_1,\ \ldots,\ b_n$ — две последовательности вещественных постоянных. В этом случае через $C_\pi^k(\bar{I})$ будет обозначаться подмножество в $C^k(\bar{I})$, выделяемое условиями «периодичности»

$$\begin{gathered}\partial^J f(a_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)=\partial^J f(b_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n),\quad |J|\leqslant k,\\ a_j\leqslant x_j\leqslant b_j,\quad j=2,\ \ldots,\ n\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \partial^J f(x_1,\ \ldots,\ x_{n-1},\ a_n)=\partial^J f(x_1,\ \ldots,\ x_{n-1},\ b_n),\quad |J|\leqslant k,\\ a_j\leqslant x_j\leqslant b_j,\quad j=1,\ \ldots,\ n-1.\end{gathered}$$

Мы полагаем $C_\pi^\infty(\bar{I})=\bigcap\limits_{k\geqslant 0} C_\pi^k(\bar{I})$. Тогда, очевидно, $C_\pi^k(\bar{I})$ можно рассматривать как подмножество кратнопериодических функций из $C^k(E^n)$ с периодом b_j-a_j по переменной x_j, $j=1,\ \ldots,\ n$.

Векторные пространства $C^k(I)$ и т. д. можно следующим образом превратить в F-пространства. Пусть K_m — возрастающая последовательность компактных подмножеств из I или $\bar{I}$. Предположим, что эти множества таковы, что всякое компактное подмножество из I принадлежит одному из множеств K_m. Тогда для функции f, лежащей в одном из пространств $C^k(I)$, $C^k(\bar{I})$ или $C_\pi^k(\bar{I})$, мы полагаем

$$\mu(f;\ J,\ m)=\sup_{x\in K_m}|\partial^J f(x)|$$

и определяем норму f равенством

$$|f| = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{k} \sum_{|J|=j} \frac{1}{2^m 2^j j!} \frac{\mu(f; J, m)}{1+\mu(f; J, m)}.$$

Эта норма превращает каждое из перечисленных выше пространств в полное F-пространство. Если $k<\infty$ и $\bar{I}$ — компакт, и только в этом случае, пространства $C^k(\bar{I})$ и $C^k_\pi(\bar{I})$ являются B-пространствами с нормой, эквивалентной выписанной выше, хотя с ней и не совпадающей. Именно имея в виду эти нормы, мы говорим о *топологии пространств* $C^k(I)$, $C^k(\bar{I})$ и т. д.

Если τ — формальный дифференциальный оператор с частными производными вида

$$\tau = \sum_{|J|\leqslant m} a_J(x)\, \partial^J,$$

то формальный дифференциальный оператор с частными производными

$$\tau^* = \sum_{|J|\leqslant m} (-1)^J \partial^J \overline{a_J(x)}$$

называется *сопряженным*, или *формально сопряженным*, к оператору τ. Если $\tau=\tau^*$, то говорят, что τ — *формально симметрический*, или *формально самосопряженный*. Формальный дифференциальный оператор с частными производными

$$\tau^+ = \sum_{|J|\leqslant m} (-1)^J \partial^J a_J(x)$$

называется *вещественно сопряженным* к τ. Формальный дифференциальный оператор с частными производными

$$\bar{\tau} = \sum_{|J|\leqslant m} \overline{a_J(x)}\, \partial^J$$

называется *комплексно присоединенным* к τ. Непосредственные вычисления показывают, что

$$(\tau+\hat{\tau})^* = \tau^* + \hat{\tau}^*, \qquad (\tau+\hat{\tau})^+ = \tau^+ + \hat{\tau}^+,$$
$$(\tau\hat{\tau})^* = \hat{\tau}^*\tau^*, \qquad (\tau\hat{\tau})^+ = \hat{\tau}^+\tau^+,$$

в то время как

$$(\alpha\tau)^* = \bar{\alpha}\tau^*, \qquad (\alpha\tau)^+ = \alpha\tau^+,$$

если α — комплексное число.

Очень важным является тот факт, что функции $f \in C^\infty(E^n)$ могут вести себя более или менее произвольно, т. е. они не имеют глобальных «структурных» свойств, которые вытекали бы непосредственно из определения класса $C^\infty(E^n)$. Следующая лемма выражает один из аспектов этого общего принципа, который найдет важные применения в последующих параграфах этой главы.

1. Лемма. *Пусть K — компактное подмножество в E^n и U — открытое множество, содержащее K. Тогда существует такая функция $\varphi \in C^\infty(E^n)$, что $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$ для всех $x \in E^n$, $\varphi(x)=1$ для $x \in K$ и $\varphi(x)=0$ для $x \notin U$.*

Доказательство. Мы дадим явное построение искомой функции в несколько этапов. Функция f_1, определяемая уравнениями

$$f_1(s)=\begin{cases} 0, & s \leqslant 0, \\ \exp(-s^{-2}), & s > 0, \end{cases}$$

принадлежит $C^\infty(E^1)$, обращается в нуль при $s \leqslant 0$, положительна при $s > 0$ и монотонно возрастает. Функция f_2, определяемая соотношением $f_2(s)=f_1(s)f_1(1-s)$, принадлежит $C^\infty(E^1)$, обращается в нуль при $s \leqslant 0$ и $s \geqslant 1$ и положительна при $0 < s < 1$. Функция f_3 из $C^\infty(E^1)$, определяемая интегралом

$$f_3(s)=\int_{-\infty}^{s} f_2(t)\,dt,$$

обращается в нуль при $s \leqslant 0$, монотонно возрастает, тождественно равна единице при $s \geqslant 1$, и $0 \leqslant f_3(s) \leqslant 1$ при всех s. Функция g_ε из $C^\infty(E^n)$, определяемая равенством

$$g_\varepsilon(x)=f_2\left(\frac{x_1-\frac{1}{2}}{\varepsilon}\right)\ldots f_2\left(\frac{x_n-\frac{1}{2}}{\varepsilon}\right),$$

обращается в нуль, если $|x| > \varepsilon/2$, положительна при $|x| < \varepsilon/2$ и принимает лишь неотрицательные значения. Предположим, что каждой точке $p \in K$ сопоставлено такое положительное число ε_p, что $\{q \in E^n \mid |q-p| \leqslant \varepsilon_p\} \subseteq U$. По теореме Гейне — Бореля конечный набор $\{U_{p_1}, \ldots, U_{p_k}\}$ множеств $U_p=\{q \in E^n \mid |q-p| < \varepsilon_p/2\}$ при $p \in K$ покрывает множество K. Если положить

$$g(x)=\sum_{j=1}^{k} g_{\varepsilon_{p_j}}(x-p_j),$$

то ясно, что $g \in C^\infty(E^n)$, $g(x) > 0$ для $x \in K$, $g(x)=0$ для $x \notin U$ и что g принимает лишь неотрицательные значения. Пусть δ — наименьшее значение, принимаемое функцией g на множестве K.

Тогда функция φ, определяемая равенством

$$\varphi(x) = f_3\left(\frac{g(x)}{\delta}\right),$$

лежит в $C^\infty(E^n)$, $\varphi(x)=1$ для $x \in K$, $\varphi(x)=0$ для $x \notin U$ и принимает значения в отрезке $[0, 1]$, ч. т. д.

Другое полезное свойство функций из C^∞ состоит в их плотности; это свойство выражено в двух следующих леммах.

2. Лемма. *Пусть I — область в E^n и $1 \leqslant p < \infty$. Тогда подмножество $C_0^\infty(I)$ пространства $L_p(I)$ плотно в $L_p(I)$.*

Доказательство. Пусть R — большой фиксированный куб в E^n, A — замкнутое подпространство в $L_p(R)$, порожденное множеством $C_0^\infty(R)$, и B — множество ограниченных функций из A. В силу леммы 1 очевидно, что B содержит характеристическую функцию всякого куба, содержащегося в R. Если $f \in C_0^\infty(R)$ и $g_n \to g$ по норме $L_p(R)$, то ясно, что $fg_n \to fg$ в $L_p(R)$. Таким образом, если $f \in C_0^\infty(R)$ и $g \in A$, то $fg \in A$. Повторяя это рассуждение, находим, что если обе функции f и g лежат в B, то и их произведение fg лежит в B. Так как A содержит разность любых двух своих элементов, то этим же свойством обладает и B. Таким образом, если Σ — семейство всех подмножеств из R, характеристические функции которых принадлежат B, то Σ содержит дополнение всякого своего элемента, а также пересечение и объединение любых двух своих элементов, т. е. Σ есть поле множеств. Если $\{f_n\}$ — возрастающая последовательность характеристических функций, принадлежащих B, то ясно, что $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ принадлежит A и, следовательно, принадлежит B. Таким образом, Σ есть σ-поле. Поэтому Σ содержит всякое измеримое по Лебегу подмножество из R (см. III.11.3), и, следовательно, A содержит все $L_p(R)$ (см. III.3.8).

Пусть G — замкнутое подпространство в $L_p(E^n)$, порожденное $C_0^\infty(E^n)$. Если χ_j обозначает характеристическую функцию куба

$$\{x \in E^n \mid |x_i| \leqslant j, \quad i = 1, \ldots, n\},$$

то очевидно, что $\chi_j f \to f$ при $j \to \infty$ для каждой функции $f \in L_p(E^n)$. Следовательно, в силу первого абзаца настоящего доказательства $L_p(E^n) = G$.

Пусть, наконец, D — замкнутое подпространство в $L_p(I)$, порожденное $C_0^\infty(I)$. Если $f \in L_p(I)$, то, как было доказано выше, существует последовательность $\{f_n\}$ элементов из $C_0^\infty(E^n)$, сходящаяся к f в $L_p(I)$. Пусть χ — характеристическая функция I. Тогда

$\chi f_m \to \chi f = f$ при $m \to \infty$. Следовательно, если бы было показано, что $\chi f_m \in D$, то отсюда вытекало бы, что $f \in D$, и лемма была бы доказана. Пусть I_0 — то ограниченное открытое подмножество в I, где $f_m(x) \neq 0$. Так как I_0 — открытое подмножество в E^n, то существует возрастающая последовательность $\{K_p\}$ компактных подмножеств из I_0, такая, что $\bigcup_{p=1}^{\infty} K_p = I_0$. Используя лемму 1, построим последовательность $\{\varphi_q\}$ функций из $C_0^\infty(I_0)$, таких, что $0 \leqslant \varphi_q(x) \leqslant 1$ для всех x и $\varphi_q(x) = 1$ для $x \in K_q$. Тогда в силу теоремы Лебега ясно, что $f_m \varphi_q \to \chi f_m$ при $q \to \infty$, и тем самым $\chi f_m \in D$, ч. т. д.

3. Лемма. *Пусть I — открытое множество в E^n и p — неотрицательное целое число. Тогда подмножество $C_0^\infty(I)$ в $C_0^p(I)$ плотно в $C_0^p(I)$.*

Доказательство. Полагая все функции из $C_0^p(I)$ равными нулю вне их областей определения, мы можем считать их принадлежащими $C_0^p(E^n)$. Из принципа равномерной непрерывности ясно, что $f(x+y) \to f(x)$ равномерно по x при $|y| \to 0$ для любой функции $f \in C_0^p(E^n)$.

Поэтому очевидно, что если $f \in C_0^p(E^n)$, то $f(\cdot + y) \to f(\cdot)$ в топологии $C^p(E^n)$ при $|y| \to 0$. Для заданной функции $f \in C_0^p(I)$ пусть K — компактное подмножество в I, вне которого функция f обращается в нуль. Пусть задано $\delta > 0$, выберем $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$ так, что

(I) никакая из точек $E^n - I$ не лежит на расстоянии, меньшем или равном 2ε от K;

(II) $|\partial^J f(x+y_0) - \partial^J f(x)| < \delta, \quad x \in E^n, \quad |y_0| \leqslant \varepsilon, \quad |J| \leqslant p.$

Используя лемму 1, построим неотрицательную функцию $\varphi \in C_0^\infty(E^n)$, такую, что

(III) $\varphi(x) = 0, \qquad x \geqslant \varepsilon;$

(IV) $\displaystyle\int_{E^n} \varphi(x)\,dx = 1.$

Пусть

$$(f * \varphi)(x) = \int_{E^n} f(x-y)\,\varphi(y)\,dy = \int_{E^n} \varphi(x-y)\,f(y)\,dy.$$

Из второго представления функции $f * \varphi$ и соотношений (I) и (III) непосредственно вытекает, что $f * \varphi \in C_0^\infty(I)$. Из первого представления для $f*\varphi$ и соотношений (II), (III) и (IV) мы имеем

$$|\partial^J(f*\varphi)(x)-\partial^J f(x)|\leqslant\delta\int_{E^n}\varphi(x)\,dx=\delta,\quad |J|\leqslant p,\quad x\in E^n.$$

Таким образом, f сколь угодно близко приближается по норме $C^p(E^n)$ функцией $\varphi*f$ из $C_0^\infty(I)$; лемма тем самым доказана.

В следующей лемме формулируется «принцип разложения единицы», который будет очень полезен в дальнейшем.

4. Лемма. *Пусть K — компактное подмножество в E^n и $\{U_\alpha\}$ — покрытие K открытыми множествами. Тогда существует конечный набор $f_1, \ldots, f_q$ неотрицательных элементов из $C_0^\infty(E^n)$ со следующими свойствами:*

(I) $\sum_{j=1}^{q} f_j(x)\leqslant 1,\qquad x\in E^n;$

(II) $\sum_{j=1}^{q} f_j(x)=1,\qquad x\in K;$

(III) *каждая функция f_j обращается в нуль вне некоторого из множеств U_α.*

Доказательство. По лемме 1 для каждой точки $y\in K$ существует неотрицательная функция $\hat{f}_y\in C_0^\infty(E^n)$ со следующими свойствами: $\hat{f}_y(y)>0$ и $\hat{f}_y(x)=0$, если x лежит вне некоторого множества U_α. Пусть $N_y=\{x\in E^n\mid \hat{f}_y(x)>0\}$. Так как K — компакт, то конечный набор множеств N_y покрывает K. Если $\{\hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_q\}$ — соответствующий набор функций, то мы имеем $\sum_{j=1}^{q}\hat{f}_j(x)>0$ для любого $x\in K$. Пусть

$$N=\Big\{x\in E^n\,\Big|\,\sum_{j=1}^{q}\hat{f}_j(x)>0\Big\}.$$

Тогда в силу леммы 1 можно найти функцию $G\in C_0^\infty(E^n)$, такую, что $0\leqslant G(x)\leqslant 1$ для всех x, $G(x)=1$ для $x\in K$ и $G(x)=0$ для $x\notin N$. Если положить

$$f_j(x)=\Big\{1-G(x)+\sum_{j=1}^{q}\hat{f}_j(x)\Big\}^{-1}\hat{f}_j(x),$$

то, очевидно, множество $\{f_1, \ldots, f_q\}$ функций из $C_0^\infty(E^n)$ обладает желаемыми свойствами, ч. т. д.

Следующая лемма будет использована в § 7.

5. Лемма. *Пусть* $f \in C_0^p(E^n)$, *тогда* $f(t\cdot) \to f(\cdot)$ *при* $t \to 1$ *в топологии пространства* $C^p(E^n)$.

Доказательство. По принципу равномерной непрерывности $g(tx) \to g(x)$ равномерно по x при $t \to 1$ для каждой функции $g \in C_0^0(E^n)$. Аналогично, если $t \to 1$, то $t^{|J|}\partial^{|J|}g(tx) \to \partial^J g(x)$ равномерно по x для каждой функции $g \in C_0^p(E^n)$ при условии, что $|J| \leqslant p$.

Если f — интегрируемая по Лебегу функция, определенная на подмножестве e в E^n, то через

$$\int_e f(x)\,dx$$

будем обозначать интеграл f по множеству e. Пусть I — открытое подмножество в E^n, τ — формальный дифференциальный оператор порядка m и f — функция из $C^m(I)$. Тогда если $g \in C_0^m(I)$ и обращается в нуль вне некоторого маленького шара, содержащегося в I, то, последовательно интегрируя по частям относительно всех переменных $x_1, \ldots, x_n$, мы немедленно получаем, что

$$\int_I (\tau f)(x)\overline{g(x)}\,dx = \int_I f(x)\overline{(\tau^* g)(x)}\,dx, \tag{1}$$

$$\int_I (\tau f)(x)\,g(x)\,dx = \int_I f(x)(\tau^+ g)(x)\,dx. \tag{2}$$

Покажем теперь, что эти два соотношения остаются справедливыми для любой функции g из $C_0^m(I)$. Пусть K — компактное подмножество в I, вне которого g обращается в нуль. Пусть $K \subseteq S_1 \cup \ldots \cup S_p$ — конечное покрытие K замкнутыми шарами, целиком содержащимися в I, а $S_i^0 \supseteq S_i$ — семейство открытых шаров, целиком лежащих в I. Используя лемму 4, мы можем найти такой конечный набор $\{f_j\}$, $j = 1, \ldots, q$, функций из $C_0^\infty(I)$, каждая из которых обращается в нуль вне какого-нибудь шара S_i^0, причем $\sum_{j=1}^{q} f_j(x) = 1$ для $x \in K$. Если положить $g_j = f_j g$, то, очевидно, $\sum_{j=1}^{q} g_j = g$. Так как

$$\int_I (\tau f)(x)\,g_j(x)\,dx = \int_I f(x)(\tau^+ g_j)(x)\,dx, \qquad j = 1, \ldots, q,$$

то, складывая все эти равенства, мы видим, что из уже доказанного вытекает справедливость соотношения (2) для всех $g \in C_0^m(I)$. Справедливость соотношения (1) в общем случае устанавливается точно так же.

3. Теория распределений [1])

В последующих параграфах весьма существенно, чтобы дифференциальные операторы с частными производными действовали в *полных* пространствах функций. Предположим, например, что мы рассматриваем оператор, определенный на каждой функции f из $C_0^\infty(E^2)$ соотношением

$$(\Lambda_0 f)(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y}(x, y).$$

Этот оператор определен на всюду плотном множестве в $L_2(E^2)$, но не замкнут. Если принять за Λ его замыкание, то окажется, что $D(\Lambda)$ содержит недифференцируемые функции. Какие именно недифференцируемые функции? Можно было бы ожидать такого ответа: «те (недифференцируемые) функции f, у которых $\partial_x \partial_y f$ принадлежит $L_2(E^2)$». Чтобы этот ответ имел смысл, желательно уметь определять $\partial_x \partial_y$ для всякой функции, дифференцируемой или нет, независимо от того, принадлежит ли $\partial_x \partial_y f$ к $L_2(E^2)$ или нет. Такая «производная» может уже не быть элементом какого-либо пространства функций, но должна лишь быть «функцией» в некотором обобщенном смысле. Все это приводит нас к попытке определить некоторый вид «обобщенной функции». Весьма полное и интересное развитие такой теории обобщенных функций было дано Лораном Шварцем [2]); обобщенные функции были названы им «распределениями». Целью настоящего параграфа является изложение тех разделов теории распределений, которые будут нам необходимы для дальнейшего изучения теории дифференциальных операторов с частными производными.

1. Определение. (I) Пусть I — открытое множество в E^n, $\{\varphi_n\}$ — последовательность функций из $C_0^\infty(I)$ и $\varphi \in C_0^\infty(I)$. Если существует такое компактное подмножество $K \subseteq I$, что все функции φ_n обращаются в нуль вне K, и если, кроме того, $\varphi_n \to \varphi$ в топо-

---

[1]) В советской математической литературе распределения часто называют «обобщенными функциями». — *Прим. ред.*

[2]) Дальнейшее развитие этой теории дано И. М. Гельфандом и Г. Е. Шиловым [2*], а также и другими авторами. — *Прим. ред.*

логии $C_0^\infty(I)$, то мы будем писать

$$\varphi_n \rightrightarrows \varphi \text{ в } I.$$

(II) Линейный функционал F, определенный на $C_0^\infty(I)$, и такой, что $F(\varphi_n) \to F(\varphi)$, если $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ в I, называется *распределением* в I.

(III) Семейство всех распределений на I мы будем обозначать через $D(I)$.

Следующее определение показывает, в каком смысле функции можно рассматривать как частный случай распределений, раскрывая тем самым содержание утверждения: пространство распределений является пространством обобщенных функций.

2. Определение. Пусть I — открытое множество в E^n, а f — функция, определенная на I и интегрируемая (по Лебегу) на каждом компактном подмножестве из I. Тогда распределение F, определяемое соотношением

$$F(\varphi) = \int_I \varphi(x) f(x)\, dx, \qquad \varphi \in C_0^\infty(I),$$

называется *распределением, соответствующим функции* f.

Ясно, что если F соответствует функции f, а G — функции g в смысле данного выше определения, то $\alpha F + \beta G$ соответствует функции $\alpha f + \beta g$. Таким образом, линейное пространство функций, интегрируемых на каждом компактном подмножестве в I, можно считать вложенным как подпространство в пространство всех распределений на I. Следующая лемма показывает, что это вложение существенно взаимно однозначно.

3. Лемма. *Если в смысле предыдущего определения распределение соответствует двум функциям f и g, то $f(x) = g(x)$ для почти всех x.*

Доказательство. Рассматривая разность $f - g$, мы можем, очевидно, без ограничения общности считать, что $g = 0$. Таким образом, мы должны показать, что если для всех $\varphi \in C_0^\infty(I)$

$$\int_I f(x)\varphi(x)\, dx = 0,$$

то $f(x) = 0$ для почти всех $x \in I$. Если χ — характеристическая функция борелевского подмножества $e \subset I$, замыкание $\bar{e}$ которого компактно и содержится в I, то из лемм 2.2, III.3.6 и III.6.2 вытекает существование такой последовательности $\{\varphi_n\}$ элементов из $C_0^\infty(I)$, что $\varphi_n \to \varphi$ почти всюду. Если, используя лемму 2.1, выбрать такой элемент $\psi \in C_0^\infty(I)$, что $\psi(x)=1$ для $x \in \bar{e}$, и заменить φ_n на $\varphi_n\psi$, то мы получим, что без ограничения общности можно считать все функции φ_n обращающимися в нуль вне некоторого компактного подмножества K из I. Если, снова используя лемму 2.1, выбрать $\zeta \in C_0^\infty(E^n)$ так, что $\zeta(t)=t$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$, $\zeta(t)=0$ для $|t| \geqslant 2$, и заменить $\varphi_n(\cdot)$ на $\zeta(\varphi_n(\cdot))$, то ясно, что без ограничения общности можно также считать $\{\varphi_n\}$ равномерно ограниченной последовательностью функций. Тогда по теореме Лебега

$$\int_e f(x)\,dx = \int_I f(x)\,\chi(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_I f(x)\,\varphi_n(x)\,dx = 0$$

для всякого борелевского подмножества e из I, замыкание $\bar{e}$ которого содержится в I. Отсюда вытекает (см. III.2.15), что $f(x)=0$ для почти всех $x \in I$, ч. т. д.

Лемма 3 позволяет дать следующее определение.

4. Определение. Мы будем говорить, что распределение F, соответствующее в смысле определения 2 некоторой функции, *является функцией*. Если f непрерывна, дифференцируема, принадлежит $L_p(I)$, $C^n(I)$, $C_0^\infty(I)$ и т. д., то F будет называться непрерывной, дифференцируемой, принадлежащей $L_p(I)$, $C^n(I)$, $C_0^\infty(I)$ и т. д. *Вообще, мы будем просто отождествлять распределение, являющееся функцией, с функцией, которой оно соответствует.*

В связи с определением 4 следует отметить, что две непрерывные функции, определенные в I и различающиеся самое большее на множестве нулевой лебеговой меры, на самом деле совпадают всюду. Таким образом, в силу леммы 3 распределение F *соответствует единственной непрерывной функции, если оно вообще соответствует какой-либо непрерывной функции.*

Следующее определение показывает, как можно дифференцировать распределение в I, а также, как можно умножать его на элемент из $C^\infty(I)$.

5. Определение. Пусть τ — формальный дифференциальный оператор с частными производными, определенный в открытом подмножестве $I \subset E^n$ с коэффициентами из $C^\infty(I)$, а F — распределение в I. Тогда τF будет обозначать распределение, определяемое соотношением

$$(\tau F)(\varphi) = F(\tau^+\varphi), \qquad \varphi \in C_0^\infty(I).$$

Тот очевидный факт, что из соотношения $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ вытекает $\tau^+\varphi_n \rightrightarrows \tau^+\varphi$, показывает, что τF удовлетворяет условию (II) определения 1, оправдывая тем самым определение 5. Дополнительные доводы в пользу корректности определения 5 содержатся в следующей лемме.

6. Лемма. *Пусть I — открытое подмножество в E^n.*

(I) *Если распределение F в I соответствует функции f из $C^n(I)$, а τ — формальный дифференциальный оператор с частными производными порядка не выше m, определенный в I, то τF соответствует функции τf;*

$$\text{(II)}\qquad \tau(\alpha F+\beta G)=\alpha\tau F+\beta\tau G,\qquad F,\ G\in D(I);$$
$$\text{(III)}\qquad (\alpha\tau_1+\beta\tau_2)F=\alpha(\tau_1F)+\beta(\tau_2F),\qquad F\in D(I);$$
$$\text{(IV)}\qquad (\tau_1\tau_2)F=\tau_1(\tau_2F),\qquad F\in D(I).$$

Доказательство. Часть (I) вытекает из определения 5 и результата об интегрировании по частям, доказанного в последнем абзаце § 2.

Части (II), (III) и (IV) получаются из определения 5 и очевидных равенств

$$(\alpha\tau_1+\beta\tau_2)^+\varphi=\alpha(\tau_1^+\varphi)+\beta(\tau_2^+\varphi),$$
$$(\tau_1\tau_2)^+\varphi=\tau_2^+(\tau_1^+\varphi),$$

справедливых для $\varphi\in C_0^\infty(I)$, ч. т. д.

Если оператором τ определения 5 является ∂^J, где J — какой-либо индекс для E^n, то определение 5 придает смысл распределению $\partial^J F$ для каждого $F\in D(I)$. Если, с другой стороны, оператор τ нулевого порядка, т. е. является оператором умножения на функцию a из $C^\infty(I)$, то определение 5 придает смысл произведению aF для всякого $F\in D(I)$. Можно рассмотреть несколько примеров. Предположим, что F — распределение на вещественной оси E^1, которое соответствует недифференцируемой функции ζ (функции Хевисайда), определяемой уравнениями

$$\zeta(s)=\begin{cases}0, & s\leqslant 0,\\ 1, & s>0.\end{cases}$$

Тогда

$$F(\varphi)=\int_0^\infty \varphi(s)\,ds,\qquad \varphi\in C_0^\infty(E^1),$$

и

$$(\partial_s F)(\varphi)=-\int_0^\infty \varphi'(s)\,ds=\varphi(0)-\varphi(\infty)=\varphi(0),$$

так что

$$\partial_s F = \delta,$$

где δ — распределение Дирака, определяемое соотношением

$$\delta(\varphi) = \varphi(0).$$

Производные этого распределения, очевидно, определяются по формулам

$$\delta^{(n)}(\varphi) = \left(\left(\frac{d}{ds}\right)^n \delta\right)(\varphi) = (-1)^n \varphi^{(n)}(0).$$

Мы имеем

$$(s^m \delta^{(n)})(\varphi) = \begin{cases} (-1)^n (s^m \varphi)^{(n)}(0) = 0, & m > n, \\ m!\,(-1)^n \varphi^{(n-m)}(0), & m \leqslant n. \end{cases}$$

Тем самым

$$s^m \delta^{(n)} = \begin{cases} 0, & m > n, \\ m!\,(-1)^n \delta^{(n-m)}, & m \leqslant n; \end{cases}$$

эти равенства впервые были установлены Дираком.

Очевидным образом можно также определить комплексно сопряженное распределение.

7. Определение. Пусть I — открытое множество в E^n и F — распределение в I. Тогда распределение $\overline{F}$ в I, определяемое равенством

$$\overline{F}(\varphi) = \overline{F(\overline{\varphi})}, \qquad \varphi \in C_0^\infty(I),$$

называется *комплексно сопряженным к* F.

8. Лемма. *Пусть I и F — те же, что и в предыдущем определении, а τ — формальный дифференциальный оператор с частными производными, определенный в I. Тогда*

(I) $$\overline{\overline{F}} = F,$$

(II) $$\overline{\alpha F} = \overline{\alpha}\,\overline{F},$$

(III) $$\overline{F_1 + F_2} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2,$$

(IV) $$\overline{\tau F} = \overline{\tau}\,\overline{F}.$$

(V) *Если F соответствует функции f, то $\overline{F}$ соответствует комплексно сопряженной к f функции.*

Доказательство этой леммы предоставляем читателю в качестве упражнения.

Другой важной операцией над распределениями является операция *сужения*.

9. Определение. Пусть I — открытое множество в E^n, I_0 — открытое подмножество в I, а F — распределение на I. Тогда распределение $F \mid I_0$ на I_0, определяемое равенством

$$(F \mid I_0)(\varphi) = F(\varphi), \qquad \varphi \in C_0^\infty(I_0),$$

называется *сужением F на I_0*.

10. Лемма. *Пусть I и I_0 — те же, что и в предыдущем определении*, а F и G — *распределения на I. Тогда*

(I) *соответствие $F \to F \mid I_0$ есть линейное отображение $D(I)$ в $D(I_0)$;*

(II) *если F соответствует функции f, то $F \mid I_0$ соответствует функции $f \mid I_0$;*

(III) *если τ — дифференциальный оператор с частными производными, определенный в I, а $\tau \mid I_0$ обозначает его сужение на I_0, то*

$$(\tau \mid I_0)(F \mid I_0) = (\tau F \mid I_0);$$

(IV)
$$\overline{(F \mid I_0)} = \overline{F} \mid I_0;$$

(V) *пусть I — открытое множество в E^n, $\{I_\alpha\}$ — семейство открытых подмножеств в I и $F \in D(I)$. Если F обращается в нуль на каждом множестве I_α, то оно обращается в нуль на $\bigcup_\alpha I_\alpha$.*

Доказательство. Первые четыре части этой леммы предоставляем читателю в качестве упражнения.

Для доказательства (V) мы должны показать, исходя из наших предположений, что $F(\varphi) = 0$, если $\varphi \in C_0^\infty(\bigcup_\alpha I_\alpha)$. Пусть K — компактное подмножество множества $\bigcup_\alpha I_\alpha$, вне которого φ обращается в нуль. Используя лемму 2.4, построим такое конечное множество $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_p\}$ функций из $C_0^\infty(E^n)$, что $\varphi = \sum_{j=1}^{p} \varphi_j \varphi$ и каждая функция φ_j обращается в нуль вне некоторого множества I_α. Тогда

$$F(\varphi) = \sum_{j=1}^{p} F(\varphi_j \varphi) = 0, \text{ ч. т. д.}$$

Лемма 10 позволяет дать следующее определение.

11. Определение. Пусть F — распределение в открытом подмножестве $I \subset E^n$. Замкнутое множество C_F в I, являющееся дополнением в I к наибольшему открытому в I множеству, на котором F обращается в нуль, т. е. являющееся дополнением в I к объединению всех открытых подмножеств из I, на которых F обращается в нуль, называется *носителем* распределения F.

12. Лемма. *Пусть I — открытое подмножество в E^n, F — распределение в I, а C_F — его носитель. Пусть I_0 — открытое подмножество в E^n, замыкание которого не пересекается с C_F. Тогда существует единственное распределение $G \in D(I \cup I_0)$, такое, что $G \mid I = F$ и $C_G = C_F$.*

Доказательство. Пусть K — произвольное компактное подмножество в $I \cup I_0$. Тогда $K\bar{I}_0$ и KC_F — непересекающиеся компактные множества. Следовательно, по лемме 2.1 существует такая функция $\psi_K \in C_0^\infty(I \cup I_0)$, что $\psi_K(x) = 1$ для x из окрестности множества KC_F и $\psi_K(x) = 0$ для x из окрестности множества $K\bar{I}_0$. Положим $G(\varphi) = F(\psi_K\varphi)$ для всякой функции $\varphi \in C_0^\infty(I \cup I_0)$, обращающейся в нуль вне K. Чтобы это определение было законным, мы должны показать, что если K_0 — другое компактное подмножество из $I \cup I_0$, вне которого φ обращается в нуль, то $F(\psi_K\varphi - \psi_{K_0}\varphi) = 0$. Но так как в этом случае $\psi_K\varphi - \psi_{K_0}\varphi$ обращается в нуль вне компактного подмножества в $I - C_F$, то утверждение очевидно.

Из определения 1 (I) непосредственно вытекает, что $G(\varphi_n) \longrightarrow G(\varphi)$, если $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ в $C_0^\infty(I \cup I_0)$. Так как любые две функции из $C_0^\infty(I \cup I_0)$ обе обращаются в нуль вне некоторого общего компактного подмножества в $I \cup I_0$, то ясно, что G — линейный функционал. Таким образом, G лежит в $D(I \cup I_0)$. Если $\varphi \in C_0^\infty(I)$ и φ обращается в нуль вне K, то $\psi_K\varphi - \varphi$ обращается в нуль вне компактного подмножества в $I - C_F$, так что $G(\varphi) = F(\psi_K\varphi) = F(\varphi)$. Тем самым $G \mid I = F$. Если $KC_F = 0$ и функция φ из $C_0^\infty(I \cup I_0)$ обращается в нуль вне K, то ясно, что $\varphi\psi_K$ обращается в нуль вне некоторого компактного подмножества в $I - C_F$; таким образом, $G(\varphi) = F(\psi_K\varphi) = 0$. Это показывает, что $C_G \subseteq C_F$; ясно и обратное: $C_F = C_G \mid I \subseteq C_G$. Этим завершено доказательство существования распределения G.

Нам осталось доказать лишь единственность G. Допустим, что G_1 — второй элемент из $D(I \cup I_0)$, такой, что $C_{G_1} = C_F$ и $G_1 \mid I = F$. Тогда в силу леммы 10 и определения 11 очевидно, что $C_{(G_1 - G)} \subseteq C_F$, в то время как по лемме 10 $(G_1 - G) \mid I = F - F = 0$, $G_1 - G = 0$ в I. Таким образом, из леммы 10 вытекает, что $G_1 - G = 0$, ч. т. д.

Замечание. Если распределение F является сужением распределения G, определенного в открытом множестве I, то говорят что G есть *расширение* F на I.

13. Лемма. *Пусть H — линейная комбинация распределений F и G, определенных в I, τ — формальный дифференциальный оператор с частными производными, определенный в I, и $a \in C^\infty(I)$. Тогда*

(I) $C_H \subseteq C_F \cup C_G$;

(II) $C_{\tau F} \subseteq C_F$;

(III) $C_{\overline{F}} = C_F$;

(IV) *если a обращается в нуль вне замкнутого множества K, то $C_{aF} \subseteq KC_F$.*

Доказательства этих утверждений предоставляем читателю.

Теперь мы хотим заняться изучением важных подпространств в $D(I)$, являющихся в то же время пространствами функций. Полезный результат в этом направлении дает нам следующая элементарная лемма.

14. Лемма. *Пусть I — открытое множество в E^n и $F \in D(I)$. Пусть $\infty \geqslant p > 1$, $1/p + 1/p' = 1$. Распределение F является функцией из $L_p(I)$ тогда и только тогда, когда существует такая конечная постоянная K, что*

[*] $$|F(\varphi)| \leqslant K |\varphi|_{p'}, \qquad \varphi \in C_0^\infty(I).$$

Доказательство. Если $F \in L_p(I)$, то неравенство [*] есть просто неравенство Гельдера (см. III.3.2). С другой стороны, если неравенство [*] выполнено, то по теореме Хана—Банаха (II.3.11) F может быть продолжено до непрерывного линейного функционала, определенного на всем $L_{p'}(I)$, и тогда лемма вытекает непосредственно из теоремы IV.8.1.

15. Определение. Пусть I — открытое подмножество в E^n и k — неотрицательное целое число. Тогда

(I) множество всех $F \in D(I)$, таких, что $\partial^J F \in L^2(I)$ для любого $|J| \leqslant k$, мы будем обозначать через $H^{(k)}(I)$. Для каждой пары F, $G \in H^{(k)}(I)$ положим

$$(F, G)_{(k)} = \sum_{|J| \leqslant k} \int_I (\partial^J F)(x) (\partial^J \overline{G})(x)\, dx$$

и

$$|F|_{(k)} = \{(F, F)_{(k)}\}^{\frac{1}{2}};$$

(II) символ $H_0^{(k)}(I)$ будет обозначать замыкание по норме $H^{(k)}(I)$ подпространства $C_0^\infty(I)$;

(III) символ $A^{(k)}(I)$ будет обозначать множество всех таких $F \in D(I)$, что $F \mid I_0 \in H^{(k)}(I_0)$ для любого открытого подмножества $I_0 \subset I$, замыкание которого компактно и содержится в I.

16. Лемма. *Пусть I — открытое множество в E^n. Пространство $H^{(k)}(I)$ предыдущего определения является полным гильбертовым пространством, а пространство $H_0^{(k)}(I)$ — его замкнутым подпространством.*

Доказательство. Пусть $\{F_n\}$ — фундаментальная последовательность в $H^{(k)}(I)$. Так как $|F|_{(k)} \geqslant |F|_2$ для любого $F \in H^{(k)}(I)$, то ясно, что $\{F_n\}$ сходится к некоторому F в $L_2(I)$. Аналогично, так как $|F|_{(k)} \geqslant |\partial^J F|_2$ для любого $F \in H^{(k)}(I)$ и любого индекса J, такого, что $|J| \leqslant k$, то ясно, что при $|J| \leqslant k$ последовательность $\{\partial^J F_n\}$ сходится к некоторому F_J в $L_2(I)$. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(I)$. Тогда

$$\int_I F_J(x)\,\varphi(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \partial^J F_n(\varphi) = \lim_{n\to\infty} (-1)^{|J|} F_n(\partial^J \varphi) = (-1)^{|J|} F(\partial^J \varphi);$$

этим доказано, что $\partial^J F = F_J \in L_2(I)$ при $|J| \leqslant k$ и тем самым что $F \in H^{(k)}(I)$. Так как $|\partial^J F_n - \partial^J F|_2 \to 0$ при $n \to \infty$ для любого индекса J, $|J| \leqslant k$, то ясно, что $|F_n - F|_{(k)} \to 0$ при $n \to \infty$. Это доказывает полноту пространства $H^{(k)}(I)$. То, что это пространство гильбертово, вытекает из определения 15(I). То, что $H_0^{(k)}(I)$ — замкнутое подпространство $H^{(k)}(I)$, вытекает из определения 15 (II), ч. т. д.

17. Определение. Пусть I — открытое подмножество в E^n и k — положительное целое число. Тогда

(I) множество всех $F \in D(I)$, таких, что

$$|F|_{(-k)} = \sup_{\varphi \in C_0^\infty(I)} \frac{|F(\varphi)|}{|\varphi|_{(k)}} < \infty,$$

будет обозначаться через $H^{(-k)}(I)$;

(II) множество всех $F \in D(I)$, сужения $F \mid I_0$ которых лежат в $H^{(-k)}(I_0)$ для любого открытого подмножества $I_0 \subset I$, такого, что его компактное замыкание содержится в I, будет обозначаться через $A^{(-k)}(I)$.

18. Лемма. *Пусть I — открытое подмножество в E^n. Тогда*

(I) $A^{(k)}(I) \supseteq A^{(k+1)}(I)$, $\qquad +\infty > k > -\infty$;

(II) $H^{(k)}(I) \supseteq H^{(k+1)}(I)$, $\qquad +\infty > k > -\infty$;

(III) $H_0^{(k)}(I) \supseteq H_0^{(k+1)}(I)$, $\qquad +\infty > k \geqslant 0$;

Более того, тождественное отображение $H^{(k+1)}(I)$ в $H^{(k)}(I)$ не увеличивает норму и потому непрерывно.

Доказательство. Утверждение (I) вытекает из (II) в силу определений 15(III) и 17(II). Утверждение (III) вытекает из (II) и того факта, что $|F|_{(k+1)} \geqslant |F|_{(k)}$ для всех $k \geqslant 0$ и $F \in H^{(k+1)}(I)$ (см. определение 15(I)). Для доказательства (II) и последнего утверждения леммы заметим сначала, что в силу определения 15(I) они очевидны при $k \geqslant 0$. Если $k < 0$ и $F \in H^{(k+1)}(I)$, то

$$\frac{|F(\varphi)|}{|\varphi|_{(-k)}} \leqslant \frac{|F(\varphi)|}{|\varphi|_{(-k-1)}} \leqslant |F|_{(-k-1)}, \qquad \varphi \in C_0^{\infty}(I),$$

ибо $|\varphi|_{(-k-1)} \leqslant |\varphi|_{(-k)}$ по определению 15(I). Таким образом, $F \in H^{(k)}(I)$. Этим также доказано и последнее утверждение леммы для $k < 0$.

19. Лемма. *Пусть I — открытое множество в E^n, а k — целое число, положительное или отрицательное. Пространство $H^{(k)}(I)$ является полным B-пространством.*

Доказательство. При $k \geqslant 0$ это утверждение совпадает с леммой 16. Если $k < 0$, то $H^{(k)}(I)$ определено просто как банахово пространство, сопряженное к $H^{(-k)}(I)$, так что лемма вытекает из следствия II.3.2.

20. Определение. Пусть I — открытое множество в E^n и k — целое число, положительное или отрицательное. Пусть $\{I_m\}$, $m \geqslant 1$, — последовательность открытых подмножеств в I, замыкания которых компактны и содержатся в I, причем $\bigcup_{m=1}^{\infty} I_m = I$. Тогда для каждого $F \in A^{(k)}(I)$ мы полагаем

$$\|F\|_{(k)} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{|(F \mid I_m)|_{(k)}}{1 + |(F \mid I_m)|_{(k)}}.$$

21. Лемма. *Пусть I и k — те же, что и в предыдущей лемме. Тогда*

(I) *$A^{(k)}(I)$ с нормой определения 20 является полным F-пространством;*

(II) *если* $\{\hat{I}_m\}$, $m \geqslant 1$, *— другая последовательность открытых подмножеств из* I, *замыкания которых компактны и содержатся в* I, *такая, что* $\bigcup_{m=1}^{\infty} \hat{I}_m = I$, *то норма* $\| F \|_{(k)}$, *введенная в* $A^{(k)}(I)$ *по определению 20, но со слагаемыми, соответствующими последовательности* $\{\hat{I}_m\}$, *задает в* $A^{(k)}(I)$ *топологию, эквивалентную той, которая определялась по последовательности* $\{I_m\}$.

Доказательство. Часть (I) является простым следствием леммы 19; детали доказательства мы оставляем читателю. Так как обе топслогии в пункте (II) являются метрическими, то для доказательства (II) достаточно, очевидно, заметить, что $F_n \to 0$ в любой из этих двух топологий тогда и только тогда, когда $|(F_n \mid I_0)|_{(k)} \to 0$ для всякого открытого подмножества $I_0 \subset I$, замыкание которого компактно и содержится в I.

Замечание. В дальнейшем под словами «топология пространства $A^{(k)}(I)$» будет пониматься топология, определяемая метрикой определения 20 и леммы 21.

22. Лемма. *Пусть* I *— открытое множество в* E^n, τ *— формальный дифференциальный оператор с частными производными порядка* k, *коэффициенты которого принадлежат* $C^{\infty}(I)$. *Тогда*

(I) $F \to \tau F$ *есть непрерывное линейное отображение* $A^{(j)}(I)$ *в* $A^{(j-k)}(I)$, $-\infty < j < \infty$;

(II) *если* I *имеет компактное замыкание* $\bar{I}$, *а коэффициенты* τ *бесконечно дифференцируемы в некоторой окрестности* $\bar{I}$, *то* $F \to \tau F$ *является непрерывным линейным отображением* $H^{(j)}(I)$ *в* $H^{(j-k)}(I)$, $-\infty < j < \infty$;

(III) *если* I *имеет компактное замыкание* $\bar{I}$, *а коэффициенты* τ *бесконечно дифференцируемы в некоторой окрестности* $\bar{I}$, *то* $F \to \tau F$ *является непрерывным линейным отображением* $H_0^{(j)}(I)$ *в* $H_0^{(j-k)}(I)$, $k < j < \infty$.

Доказательство. Допустим, что (II) доказано. Тогда, поскольку $\tau F \in C_0^{\infty}(I)$ для $F \in C_0^{\infty}(I)$, утверждение (III) вытекает из определения 15(II). Так как в силу леммы 9(III), $\tau(F \mid I_0) = (\tau F) \mid I_0$, то из определения 20 вытекает (I). Следовательно, мы должны доказать лишь (II). Для этого предположим сначала, что $j \geqslant k$. Пусть

$$\partial^{J_1} \tau = \sum_{|J| \leqslant |J_1| + k} a_J(x;\, J_1)\, \partial^J$$

и

$$A = \max_{|J_1| \leqslant |J| - k} \max_{|J| \leqslant |J_1| + k} \max_{x \in I} |a_J(x; J_1)|.$$

Тогда по определению 15(I) мы имеем

$$\begin{aligned} |\tau F|_{(j-k)} &= \Big\{ \sum_{|J_1| \leqslant j-k} |\partial^{J_1} \tau F|^2 \Big\}^{1/2} = \\ &= \Big\{ \sum_{|J_1| \leqslant j-k} \Big| \sum_{|J| \leqslant |J_1|+k} a_J(\cdot; J_1) \partial^J F \Big|^2 \Big\}^{1/2} \leqslant \\ &\leqslant A |F|_{(j)} \Big\{ \sum_{|J_1| \leqslant j-k} 1 \Big\}^{1/2} = A n^{(j-k)/2} |F|_{(j)}, \end{aligned}$$

что доказывает (II) в частном случае $j \geqslant k$.

Пусть теперь $j = -p$ неположительно. Тогда по определению 17

$$\begin{aligned} |\tau F|_{(j-k)} &= \sup_{\varphi \in C_0^\infty(I)} \frac{|(\tau F)(\varphi)|}{|\varphi|_{(p+k)}} = \\ &= \sup_{\varphi \in C_0^\infty(I)} \frac{|F(\tau^+ \varphi)|}{|\tau^+ \varphi|_p} \cdot \frac{|\tau^+ \varphi|_{(p)}}{|\varphi|_{(p+k)}} \leqslant \\ &\leqslant |F|_{(j)} \cdot \sup_{\varphi \in C_0^\infty(I)} \frac{|\tau^+ \varphi|_{(p)}}{|\varphi|_{(p+k)}}. \end{aligned}$$

Из уже рассмотренного частного случая вытекает, что последний множитель конечен; это доказывает (II) в том случае, когда j неположительно.

Наконец, мы должны рассмотреть случай $k > j \geqslant 0$. Мы имеем

$$\tau F = \sum_{|J| \leqslant k} a_J(\cdot) \partial^J F,$$

так что из леммы 6 и уже доказанного вытекает, что достаточно проверить непрерывность отображения $F \to \partial^J F$ из $H^{(j)}(I)$ в $H^{(j-k)}(I)$ для $|J| = m \leqslant k$. Пусть $J = [l_1, \ldots, l_m]$, так что $\partial^J F = \partial_{l_m} \ldots \partial_{l_1} F$. Тогда, поскольку (II) доказано для положительного $j - k$, получаем, что $F \to \partial_{l_m} \ldots \partial_{l_1} F$ есть непрерывное отображение $H^{(j)}(I)$ в $L_2(I)$, а используя уже установленное утверждение (II) для неположительных j, убеждаемся, что соответствие $F \to \partial_{l_m} \ldots \partial_{l_1} F$ является непрерывным отображением $H^{(j)}(I) \to H^{(j-m)}(I)$. Так как по лемме 18(II) тождественное отображение $H^{(j-m)}(I)$ в $H^{(j-k)}(I)$ непрерывно, то лемма доказана.

Несложное доказательство следующего дополнения к лемме 22 мы предоставляем читателю.

23. Лемма. *Пусть I — открытое множество в E^n, I_0 — открытое подмножество в I, и k — целое число. Тогда*

(I) *соответствие $F \to \bar{F}$ является непрерывным отображением $A^{(k)}(I)$ в себя и $H^{(k)}(I)$ в себя;*

(II) *соответствие $F \to F \mid I_0$ является непрерывным отображением $A^{(k)}(I)$ в $A^{(k)}(I_0)$ и $H^{(k)}(I)$ в $H^{(k)}(I_0)$.*

24. Лемма. *Пусть I — открытое подмножество в E^n, k — целое число, и F — распределение в I.*

(I) *Если каждая точка $p \in I$ имеет окрестность U_p, содержащуюся в I, и такую, что $F \mid U_p \in A^{(k)}(U_p)$, то $F \in A^{(k)}(I)$.*

(II) *Если $\bar{I}$ — компакт и каждая точка $p \in \bar{I}$ имеет такую окрестность U_p, что $F \mid U_p I \in H^{(k)}(U_p I)$, то $F \in H^{(k)}(I)$.*

(III) *Если I — компакт, $k \geqslant 0$, и каждая точка $p \in \bar{I}$ имеет такую окрестность U_p, что $F \mid U_p I \in H_0^{(k)}(U_p I)$, то $F \in H_0^{(k)}(U_p I)$.*

Доказательство. Часть (I), очевидно, вытекает из (II) и леммы 23. Для доказательства (II) будем рассуждать следующим образом. Пусть $F \mid U_p I = F_p$. Используя лемму 2.4, построим $\{\varphi_m\}$, $m = 1, \ldots, M$, — такое множество функций из $C^\infty(E^n)$, что φ_m обращается в нуль вне некоторой окрестности U_m и $\sum_{m=1}^{M} \varphi_m(x) = 1$ тождественно для x из окрестности $\bar{I}$. Тогда $F = \sum_{m=1}^{M} F_m \varphi_m$, и мы должны лишь показать, что $F_m \varphi_m \in H^{(k)}(I)$ для всех $m = 1, \ldots, M$. Другими словами (см. лемму 13(IV)), мы можем и будем далее без ограничения общности предполагать, что замыкание носителя F содержится в одной окрестности U_p.

Пусть $k \geqslant 0$. Тогда, с одной стороны, $\partial^J F$ равна в U_p квадратично интегрируемой функции f_J. С другой стороны, если положить $f_J(x) = 0$ для $x \in U_p$, то $F = f_J$ и в дополнении замкнутого подмножества в $U_p I$. Следовательно, по лемме 10, $F = f_J$ из $L_2(I)$, и потому доказано, что F лежит в $H^k(I)$.

Пусть теперь $k \leqslant 0$. Используя лемму 2.1, построим функцию $\psi \in C_0^\infty(U_p)$, тождественно равную единице в окрестности замыкания носителя F. Тогда

$$F(\varphi) = F(\psi\varphi) = (F \mid U_p I)(\psi\varphi), \quad \varphi \in C_0^\infty(I),$$

так что по определению 17

$$|F|_{(k)} = \sup_{\varphi \in C_0^\infty(I)} \frac{|(F \mid U_p I)(\psi\varphi)|}{|\psi\varphi|_{(-k)}} =$$

$$= \sup_{\varphi \in C_0^\infty(I)} \frac{|(F \mid U_p I)(\psi\varphi)|}{|\psi\varphi|_{(-k)}} \frac{|\psi\varphi|_{(-k)}}{|\varphi|_{(-k)}} \leqslant |(F \mid U_p I)|_{(k)} \sup_{\varphi \in C_0^\infty(I)} \frac{|\psi\varphi|_{(-k)}}{|\varphi|_{(-k)}}.$$

Так как последний множитель по лемме 22(II) конечен, то утверждение (II) доказано.

Точно так же для доказательства (III) достаточно показать, что $F\varphi_m \in H_0^{(k)}(I)$. По предположению существует последовательность $\{\psi_l\}$ элементов из $C_0^\infty(E^n)$, каждый из которых обращается в нуль вне IU_m, и такая, что

$$\lim_{l\to\infty} \sum_{|J|\leqslant k} \int_{U_m I} |\partial^J F\varphi_m(x) - \partial^J \psi_l(x)|^2\, dx = 0.$$

Так как $\partial^J F\varphi_m(x) = 0$ для $x \in I - U_m I$, то отсюда вытекает, что

$$\lim_{l\to\infty} \sum_{|J|\leqslant k} \int_{I} |\partial^J F\varphi_m(x) - \partial^J \psi_l(x)|^2\, dx = 0.$$

Таким образом, $F\varphi_m \in H_0^{(k)}(I)$.

Аналогично, используя лемму 2.4, можно доказать следующую лемму (доказательство предоставляем провести читателю).

25. Лемма. *Пусть F — распределение в открытом подмножестве $I \subset E^n$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, и k — неотрицательное целое число. Тогда*

(I) *если каждая точка $q \in I$ имеет окрестность U_q, содержащуюся в I, и такую, что $F \mid U_q$ является функцией, то и F является функцией;*

(II) *если каждая точка $q \in I$ имеет окрестность U_q, содержащуюся в I, и такую, что $F \mid U_q$ является функцией из $C^k(U_q)$, то и F принадлежит $C^k(I)$;*

(III) *если $\bar{I}$ — компакт и каждая точка $q \in \bar{I}$ имеет окрестность U_q, такую, что $F \mid U_q I \in L_p(U_q I)$, то $F \in L_p(I)$;*

(IV) *если $\bar{I}$ — компакт и каждая точка $q \in \bar{I}$ имеет окрестность U_q, такую, что $F \mid U_q I \in C^n(\overline{U_q I})$, то $F \in C^n(\bar{I})$.*

В пространство $D(I)$ полезно ввести топологию. Рассматривая $D(I)$ как множество линейных функционалов на $C_0^\infty(I)$, наделим его слабой топологией.

26. Определение. Пусть I — открытое подмножество в E^n. Базисными окрестностями распределения F в *топологии пространства*

$D(I)$ являются множества

$$N(\varphi_1, \ldots, \varphi_m, \varepsilon, F) = \\ = \{G \in D(I) \mid |F(\varphi_i) - G(\varphi_i)| < \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, m\},$$

где ε — положительное число, m — положительное целое число, а $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ — элементы пространства $C_0^\infty(I)$.

27. Лемма. *Пусть I — открытое множество в E^n, I_0 — открытое подмножество в I. Тогда*

(I) *если τ — формальный дифференциальный оператор с частными производными с коэффициентами из $C^\infty(I)$, то $F \to \tau F$ есть непрерывное отображение $D(I)$ в себя;*

(II) *$F \to \bar{F}$ — непрерывное отображение $D(I)$ в себя;*

(III) *$F \to F \mid I_0$ — непрерывное отображение $D(I)$ в $D(I_0)$.*

Доказательство. Пусть ζ_2 и ζ_3 обозначают отображения в (II) и (III) соответственно, а Λ: $C_0^\infty(I_0) \to C_0^\infty(I)$ определяется равенствами

$$(\Lambda\varphi)(x) = 0, \quad x \in I - I_0; \quad \Lambda\varphi(x) = \varphi(x), \quad x \in I_0.$$

Тогда (I), (II) и (III) являются соответственно следствиями следующих трех очевидных формул:

$$\tau\{G \in D(I) \mid |F(\tau^+\varphi_i) - G(\tau^+\varphi_i)| < \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, m\} \subseteq \\ \subseteq \{H \in D(I) \mid |(\tau F)(\varphi_i) - H(\varphi_i)| < \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, m\};$$

$$\zeta_2\{G \in D(I) \mid |F(\bar{\varphi}_i) - G(\bar{\varphi}_i)| < \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, m\} \subseteq \\ \subseteq \{H \in D(I) \mid |(\zeta_2 F)(\varphi_i) - H(\varphi_i)| < \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, m\};$$

$$\zeta_3\{G \in D(I) \mid |F(\Lambda\varphi_i) - G(\Lambda\varphi_i)| < \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, m\} \subseteq \\ \subseteq \{H \in D(I_0) \mid |(\zeta_3 F)(\varphi_i) - H(\varphi_i)| < \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, m\}.$$

28. Лемма. *Пусть I — открытое подмножество в E^n, k — целое число, и $\{a_m\}$ — последовательность функций из $C^\infty(I)$, такая, что $a_m \to 0$ в топологии $C^\infty(I)$. Тогда*

(I) *для любого $F \in D(I)$ последовательность $a_m F \to 0$ в топологии $D(I)$;*

(II) *для любого $F \in A^k(I)$ последовательность $a_m F \to 0$ в топологии $A^k(I)$;*

(III) *если a_m и их частные производные всех порядков стремятся к нулю равномерно на I при $m \to \infty$, то последовательность отображений $F \to a_m F$ пространства $H^{(k)}(I)$ в $H^{(k)}(I)$ стремится к нулю в равномерной операторной топологии.*

Доказательство. Ясно, $a_m\varphi \rightrightarrows 0$ для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(I)$ при $m \to \infty$. Поэтому (I) вытекает непосредственно из определения 26. В силу определения 20 и леммы 10 (III) утверждение (II) вытекает непосредственно из (III). Для доказательства (III) предположим сначала, что $k \geqslant 0$. Тогда в силу леммы 6 (IV), позволяющей разложить $\partial^J a_m F$ по правилу Лейбница, мы имеем

$$|a_m F|_{(k)}^2 = \sum_{|J| \leqslant k} \int_I |\partial^J a_m F|^2 \, dx \leqslant A \{\max_{|J| \leqslant k} \sup_{x \in I} |\partial^J a_m(x)|\} |F|_{(k)}^2,$$

где A — постоянная, зависящая лишь от k. Тем самым (III) доказано для $k \geqslant 0$. Если $k = -p$, где $p \geqslant 0$, то

$$|a_m F|_{(k)} = \sup_{\varphi \in C_0^\infty(I)} \frac{|F(a_m\varphi)|}{|\varphi|_{(p)}} \leqslant |F|_{(k)} \sup_{\varphi \in C_0^\infty(I)} \frac{|a_m\varphi|_{(p)}}{|\varphi|_{(p)}},$$

так что утверждение (III) для $k \leqslant 0$, очевидно, вытекает из его справедливости для $p \geqslant 0$.

Кроме функций и распределений, введенных в определении 1 и различных определениях и леммах вплоть до леммы 27, нам необходимо рассмотреть некоторые классы кратнопериодических функций и соответствующие классы распределений. Если явно не оговорено противное, мы будем в нескольких следующих определениях и леммах иметь дело с кубом

$$C = \{x \in E^n \mid |x_i| \leqslant \pi\}$$

в евклидовом n-мерном пространстве E^n. Противоположные грани куба будут «отождествляться», т. е., если явно не оговорено противное, мы будем предполагать все функции от x кратнопериодическими с периодом 2π по переменным $x = [x_1, \ldots, x_n]$.

Это означает, что любые две точки x и $\tilde{x}$ на границе куба C, такие, что $|x_j - \tilde{x}_j| = 0$ или 2π для всех j, мы считаем отождествленными и определяем окрестность точки (после отождествления с $\tilde{x}$ и всевозможными другими точками) как пересечение C с открытым множеством в E^n, *содержащим x и все точки, с которыми x отождествлена*. Ясно, что после таких отождествлений C становится топологически эквивалентным прямому произведению n экземпляров единичной окружности на плоскости. В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что эти отождествления выполнены, и понимать такие топологические термины как «открытое множество», «замкнутое множество» и т. д. в этом несколько измененном смысле. Так как мы имеем дело лишь с кратнопериодическими функциями, то все функции будут вполне определены на множестве C даже после выполнения указанных выше отождествлений. Напротив, это основная причина того, почему мы рассматриваем лишь кратнопериодические функции. Конечно, если говорить лишь о подмножествах внутренности куба C в E^n, то никаких отождествлений не производится и термины «открытое множество», «замкнутое множество» и т. п. имеют обычный смысл. Мы будем рассматривать пространства $F_\pi(C)$ всех функций, определенных на C, кратнопериодических с периодом 2π по переменным $x=[x_1, \ldots, x_n]$, и пространства

$$C_\pi^\infty(C)=\{f\in C^\infty(C) \mid f\in F_\pi(C)\}$$

и

$$C_\pi^p(C)=\{f\in C^p(C) \mid f\in F_\pi(C)\}.$$

Если I — открытое (в смысле предыдущего абзаца) подмножество куба C, то через $C_{\pi,0}^\infty(I)$ будет обозначаться подпространство в $C_\pi^\infty(C)$, состоящее из всех функций $C_\pi^\infty(C)$, которые обращаются в нуль вне компактного подмножества из I. Пусть I — открытое подмножество в C. Мы будем писать $f_n \rightrightarrows f$ в I, если f_n, f принадлежат $C_{\pi,0}^\infty(I)$, все функции f_n обращаются в нуль вне фиксированного компактного подмножества из I и $f_n \to f$ в топологии $C^\infty(I)$ при $n\to\infty$. Мы можем дать теперь определение, соответствующее определению 1 (II).

29. Определение. Пусть I — открытое подмножество куба C. Пространство $D_\pi(I)$ состоит из всех таких линейных функционалов F на $C_{\pi,0}^\infty(I)$, что $F(\varphi_n)\to F(\varphi)$, если $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ в I. Элементы пространства $D_\pi(I)$ будут называться *распределениями, кратнопериодическими на множестве* I.

Следует специально отметить, что если I — *открытое подмножество внутренности* C, *то, очевидно,* $D_\pi(I)$ *и* $D(I)$ *являются двумя обозначениями одного и того же пространства.*

Предыдущие рассуждения могут быть теперь проведены и в этой новой ситуации. Так как различие состоит в нескольких незначительных моментах (часто лишь в замене $C_0^\infty(I)$ на $C_{\pi,0}^\infty(I)$), то мы лишь наметим их ход, а детальное проведение предоставим самому читателю.

30. Определение. Пусть I — открытое подмножество куба C. Говорят, что элемент $F\in D_\pi(I)$ *соответствует функции* f, если функция f интегрируема (по Лебегу) на каждом компактном подмножестве в I и

$$F(\varphi)=\int_G f(x)\,\varphi(x)\,dx, \qquad \varphi\in C_{\pi,0}^\infty(I).$$

Если F и f соответствуют друг другу в этом смысле, то они могут быть отождествлены в тех случаях, когда такое отождествление не приводит к путанице.

Аналоги леммы 3 и определения 4 очевидны, и вместо их формулировки, если это будет необходимо, мы просто будем ссылаться на лемму 3 или определение 4, обобщенные на $D_\pi(I)$.

31. Определение. Предположим, что I — открытое подмножество в C и $F \in D_\pi(I)$.

(I) Пусть τ — формальный дифференциальный оператор с частными производными с коэффициентами из $C_\pi^\infty(C)$. Через τF будем обозначать элемент из $D_\pi(I)$, определяемый равенством

$$(\tau F)(\varphi) = F(\tau^+ \varphi), \qquad \varphi \in C_{\pi,0}^\infty(I).$$

(II) Символ $\overline{F}$ будет обозначать элемент из $D_\pi(I)$, определяемый равенством

$$\overline{F}(\varphi) = F(\overline{\varphi}), \qquad \varphi \in C_{\pi,0}^\infty(I).$$

(III) Если I_0 — открытое подмножество в I, то сужение $F \mid I_0$ будет обозначать элемент из $D_\pi(I)$, определяемый равенством

$$(F \mid I_0)(\varphi) = F(\varphi), \qquad \varphi \in C_{\pi,0}^\infty(I_0).$$

Аналоги лемм 6—9 и леммы 14 очевидны, и вместо их подробных формулировок, приспособленных к новому случаю, мы будем, если это необходимо, просто ссылаться на лемму 6 и т. д., обобщенную на $D_\pi(I)$.

Лемма 10 также очевидным образом применима в новой ситуации, но следует, однако, помнить, что термин «открытое множество» надо понимать в смысле, разъясненном в абзаце, предшествующем определению 29. Имея это в виду, мы можем следующим образом обобщить определение 11.

32. Определение. Пусть I — открытое подмножество куба C и $F \in D_\pi(I)$. Замкнутое множество $C_F \subset I$, являющееся дополнением к наибольшему открытому в I множеству, на котором F обращается в нуль, т. е. являющееся дополнением в I к объединению всех открытых в I подмножеств, на которых F обращается в нуль, называется *носителем* F.

Лемму 12 можно теперь распространить, по существу с тем же доказательством, и на новый случай. Однако очевидное следствие леммы 12, обобщенной на $D_\pi(I)$, будет иметь большое значение в дальнейших рассмотрениях, и мы сформулируем его в виде следующей леммы.

33. Лемма. *Пусть I — открытое подмножество внутренности куба C и $F \in D(I)$. Предположим, что носитель C_F распределе-*

ния F является компактным подмножеством в I. Тогда существует единственное распределение $G\in D_\pi(C)$, такое, что $F=G\,|\,I$ и $C_G=C_F$.

В последних параграфах распределение G будет трактоваться как *естественное расширение F на C* или просто как распределение F, *рассматриваемое как элемент из $D_\pi(C)$*.

Следующие определения очевидным образом обобщают определения 15, 17 и 21 на новый случай.

34. Определение. Пусть I — открытое подмножество куба C, и k — неотрицательное целое число.

(a) Множество всех $F\in D_\pi(I)$, для которых $\partial^J F\in L_2(I)$ при $|J|\leqslant k$, будет обозначаться через $H_\pi^{(k)}(I)$. Для каждой пары F, $G\in H_\pi^{(k)}(I)$ мы полагаем

$$(F,\ G)_{(k)}=\sum_{|J|\leqslant k}\int_I(\partial^J F)(x)\,(\partial^J\overline{G})(x)\,dx$$

и

$$|F|_{(k)}=\{(F,\ F)_{(k)}\}^{1/2}.$$

(b) Через $H_{\pi,0}^{(k)}(I)$ мы будем обозначать замыкание по норме $H_\pi^{(k)}(I)$ подпространства $C_{\pi,0}^\infty(I)$ в $H_\pi^{(k)}(I)$.

(c) Символ $A_\pi^{(k)}(I)$ будет обозначать множество всех таких $F\in D_\pi(I)$, что $F\,|\,I_0\in H_\pi^{(k)}(I_0)$ для любого открытого подмножества $I_0\subset I$, замыкание которого компактно и содержится в I.

35. Определение. Пусть I — открытое подмножество куба C, и k — положительное целое число.

(I) Множество всех $F\in D_\pi(I)$, для которых

$$|F|_{(-k)}=\sup_{\varphi\in C_{\pi,0}^\infty(I)}\frac{|F(\varphi)|}{|\varphi|_{(k)}}<\infty,$$

будет обозначаться через $H_\pi^{(-k)}(I)$.

(II) Множество всех $F\in D_\pi(I)$, таких, что $F\,|\,I_0\in H_\pi^{(-k)}(I_0)$ для любого открытого подмножества $I_0\subset I$, замыкание которого компактно и содержится в I, будет обозначаться через $A_\pi^{(-k)}(I)$.

36. Определение. Пусть I — открытое подмножество куба C, k — целое число, положительное или отрицательное, и $\{I_m\}$, $m\geqslant 1$, — последовательность открытых подмножеств из I, замыкания которых компактны и содержатся в I, причем $\bigcup_{m=1}^\infty I_m=I$. Тогда

для каждого $F \in A_\pi^{(k)}(I)$ положим

$$\| F \|_{(k)} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{|(F \mid I_m)|_{(k)}}{1 + |(F \mid I_m)|_{(k)}} .$$

После того как даны эти определения, легко приспособить все леммы от леммы 13 до леммы 23 к новой ситуации. Предоставляем сделать это читателю. Вместо точных формулировок утверждений, если это будет необходимо, мы будем просто ссылаться на лемму 13 и т. д., обобщенную на $D_\pi(I)$. В случае леммы 27 топология пространства $D_\pi(I)$ должна быть описана в соответствии с обобщением определения 26. Это сделано в следующем определении.

37. Определение. Пусть I — открытое подмножество куба C. Базисными окрестностями распределения F в *топологии пространства* $D_\pi(I)$ являются множества

$$N(\varphi_1, \ldots, \varphi_m, \varepsilon, F) = \\ = \{G \in D_\pi(I) \mid |F(\varphi_i) - G(\varphi_i)| < \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, m\},$$

где ε — положительное число, m — положительное целое число, а $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ — элементы из $C_{\pi, 0}^{\infty}(I)$.

Важное значение имеет вопрос о возможности разложения элементов F пространства $D_\pi(C)$ в ряды Фурье. Следующие определение и лемма показывают, как это должно быть сделано.

38. Определение. Пусть $F \in D_\pi(C)$ и L — индекс, причем $|L| = n$. Выражение

$$F_L = F(e^{-iL \cdot x})$$

называется *L-м коэффициентом Фурье распределения F*. Формальный ряд

$$(2\pi)^{-n} \sum_L F_L e^{iL \cdot x}$$

называется *рядом Фурье распределения F*.

39. Лемма. *Ряд Фурье элемента $F \in D_\pi(C)$ сходится в $D_\pi(C)$ безусловно к F.*

Доказательство. Из определения 37 топологии в $D_\pi(C)$ вытекает, что достаточно доказать безусловную сходимость к $F(\varphi)$ ряда

$$(2\pi)^{-n} \sum_L F_L \int_C e^{iL \cdot x} \varphi(x)\, dx$$

для любой функции $\varphi \in C_\pi^\infty(C)$. Для всякого множества A индексов L мы имеем

$$(2\pi)^{-n} \sum_{L \in A} F_L \int_C e^{iL\cdot x} \varphi(x)\, dx = F\left((2\pi)^{-n} \sum_{L \in A} \varphi_L e^{-iL\cdot x}\right),$$

где

['] $$\varphi_L = \int_C \varphi(x)\, e^{iL\cdot x}\, dx, \qquad \varphi \in C_\pi^\infty(C).$$

Таким образом, достаточно показать, что для любой функции $\varphi \in C_\pi^\infty(C)$ ряд

[*] $$(2\pi)^{-n} \sum_L \varphi_L e^{iL\cdot x}$$

сходится безусловно в топологии $C_\pi^\infty(C)$ к φ. По теореме Планшереля (XI.3.9; см. также XI.3.22 и далее) для любой $\varphi \in C_\pi^\infty(C)$ этот ряд сходится безусловно к φ в топологии $L_2(C)$. Следовательно, достаточно показать, что ряд [*] сходится безусловно в топологии $C_\pi^\infty(C)$, т. е. сходится абсолютно после любого почленного дифференцирования. Мы покажем на самом деле, что выполнено соотношение

[**] $$|\varphi_L| = O\left((1 + l_1^2 + \ldots + l_n^2)^{-p}\right)$$

при любом сколь угодно большом положительном p, откуда, очевидно, будет вытекать нужная нам абсолютная сходимость. Для получения этого соотношения проинтегрируем выражение ['] по частям $2p$ раз по тем из переменных x_j, для которых l_j не равно нулю; без ограничения общности можно считать, что ими являются переменные $x_1, \ldots, x_m$. Это приводит к равенству

$$\varphi_L = (i)^{mp} (l_1 \ldots l_m)^{-2p} \int_C (\partial_1 \ldots \partial_m)^{2p} \varphi(x)\, e^{iL\cdot x}\, dx,$$

и так как $(l_1 \ldots l_m)^{-2p} \leqslant n\,(l_1^2 + \ldots + l_n^2)^{-p}$, если $l_{m+1} = \ldots = l_n = 0$, $m \neq 0$, то мы имеем

$$|\varphi_L| \leqslant n\,(l_1^2 + \ldots + l_n^2)^{-p} \max_{\substack{x \in C \\ |J| \leqslant 2mp}} |\partial^J \varphi(x)|,$$

откуда, очевидно, вытекает оценка [**], ч. т. д.

40. Лемма. *Пусть $F \in D_\pi(C)$, тогда*

(I) $\overline{F}_L = F_{(-L)}$;

(II) $(\partial^J F)_L = (iL)^J F_L$.

Доказательство. Оба эти утверждения вытекают непосредственно из определения 38.

41. Лемма. *Пусть $F \in D_\pi(C)$ и k — целое число.*

(I) *Распределение F принадлежит $H_\pi^{(k)}(C)$ тогда и только тогда, когда*

$$\|F\|_{(k)} = \{\sum_L (1 + l_1^2 + \ldots + l_n^2)^k |F_L|^2\}^{1/2} < \infty.$$

(II) *Норма $\|F\|_{(k)}$ в пространстве $H_\pi^{(k)}(C)$ эквивалентна норме этого пространства, введенной в определениях* 34 *и* 35.

(III) *Если $F \in H_\pi^{(k)}(C)$, то его ряд Фурье сходится безусловно к F в топологии $H_\pi^{(k)}(C)$.*

Доказательство. Предположим сначала, что $k = 0$. Из леммы 39 вытекает, что

$$F(\varphi) = (2\pi)^{-n} \sum_L \varphi_L F_L,$$

где

$$\varphi_L = \int_C e^{iL \cdot x} \varphi(x)\, dx.$$

Так как по теореме Планшереля (XI.3.9)

$$|\varphi|_2^2 = (2\pi)^{-n} \sum_L |\varphi_L|^2,$$

то из леммы 14 вытекает, что $F \in L_2(C)$, если $\|F\|_0 < \infty$. В этом случае по теореме Планшереля мы имеем также

$$|F|_2^2 = (2\pi)^n \sum_L |F_L|^2.$$

Предположим теперь, что $k \geqslant 0$. Пусть $\|F\|_{(k)} < \infty$. Тогда в силу леммы 40 (II) и уже доказанного, $F \in H_\pi^{(k)}(C)$ и $|F|_{(k)} \leqslant A \|F\|_{(k)}$, где A — конечная постоянная, зависящая только от k. Обратно, если $|F|_{(k)} < \infty$, то по лемме 40 (II) и теореме Планшереля мы имеем

$$\sum_{|J| \leqslant k} \sum_L |L^J|^2 |F_L|^2 = |F|_{(k)}^2.$$

Очевидно, существует такая конечная постоянная A, зависящая лишь от k, что

$$(1 + l_1^2 + \ldots + l_n^2)^k \leqslant A \sum_{|J| \leqslant k} |L^J|^2;$$

отсюда вытекает неравенство $\|F\|_{(k)} \leqslant A |F|_{(k)} < \infty$.

Тем самым утверждения (I) и (II) доказаны для $k \geqslant 0$. Предположим далее, что $k = -p$, где $p \geqslant 0$. Пусть $|F|_{(k)} < \infty$, так что в силу определения 35 и доказанного выше существует такая постоянная $M < A|F|_{(k)}$, где A зависит лишь от k, что

$$|F(\varphi)| \leqslant M \|\varphi\|_{(p)}, \qquad \varphi \in C_\pi^\infty(C).$$

В силу леммы 39 это неравенство можно переписать в виде

(1) $$\Big|\sum_L F_L \varphi_L\Big| \leqslant M \Big\{\sum_L (1 + l_1^2 + \ldots + l_n^2)^p |\varphi_L|^2\Big\}^{1/2}, \quad \varphi \in C_\pi^\infty(C),$$

где множество

$$\varphi_L = \int_C e^{iL \cdot x} \varphi(x)\, dx$$

— то же, что и в формуле ['] из доказательства леммы 39. Из неравенства (1) и теоремы Хана — Банаха (II.3.11) вытекает, что линейный функционал

$$\{\varphi_L\} \to \sum F_L \varphi_L$$

может быть продолжен до непрерывного линейного функционала с нормой, не превосходящей M, определенного на гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ всех кратных последовательностей $\{\varphi_L\}$, таких, что

$$\|\{\varphi_L\}\| = \Big\{\sum_L (1 + l_1^2 + \ldots + l_n^2)^p |\varphi_L|^2\Big\}^{1/2} < \infty.$$

Так как

$$\sum_L F_L \varphi_L = \sum_L [F_L (1 + l_1^2 + \ldots + l_n^2)^{-p}]\, \varphi_L (1 + l_1^2 + \ldots + l_n^2)^p,$$

то из теоремы IV.8.1 вытекает, что

$$\sum_L |F_L (1 + l_1^2 + \ldots + l_n^2)^{-p}|^2 (1 + l_1^2 + \ldots + l_n^2)^p \leqslant M,$$

и потому существует такая постоянная A, зависящая лишь от k, что $\|F\|_{(k)} \leqslant A|F|_{(k)}$ для всех $F \in H_\pi^{(k)}(C)$. Обратно, если $F \in D_\pi(C)$ и $\|F\|_{(k)} = M < \infty$, то из неравенства Шварца непосредственно вытекает, что

$$\Big|\sum F_L \varphi_L\Big| \leqslant \|F\|_{(k)} \Big\{\sum_L (1 + l_1^2 + \ldots + l_n^2)^p |\varphi_L|^2\Big\}^{1/2}.$$

Используя доказанное выше, мы можем это неравенство переписать в виде

$$|F(\varphi)| \leqslant A \|F\|_{(k)} |\varphi|_{(p)}, \qquad \varphi \in C_\pi^\infty(C),$$

где A — постоянная, зависящая лишь от k. Таким образом, в силу определения 35, $F \in H_\pi^{(k)}(C)$ и

$$|F|_{(k)} \leqslant A \|F\|_{(k)},$$

где A — постоянная, зависящая лишь от k. Тем самым (I) и (II) доказаны во всех случаях.

Теперь совсем нетрудно доказать (III). В силу (I) и (II) мы должны показать, что если $\{A_m\}$ — произвольная возрастающая последовательность конечных подмножеств множества $\{L \mid |L| = n\}$, такая, что

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m = \{L \mid |L| = n\},$$

и если

$$\sum_L (1 + l_1^2 + \ldots + l_n^2)^k |F_L|^2 < \infty,$$

то

$$\|F - \sum_{L \in A_m} F_L e^{iL \cdot x}\|_{(k)} = \{\sum_{L \notin A_m} |(1 + l_1^2 + \ldots + l_n^2)^k F_L|^2\}^{1/2} \to 0$$

при $m \to \infty$. Это утверждение вытекает непосредственно из теоремы Лебега. Лемма доказана.

Теория кратнопериодических распределений может быть развита точно таким же образом и для функций, определенных на произвольном прямоугольном параллелепипеде C:

['] $$\hat{C} = \{x \in E^n \mid a_j \leqslant x_j \leqslant b_j, \quad j = 1, \ldots, n\}.$$

Нужно только заменить пространство $F_\pi(C)$ функций, кратнопериодических с периодом 2π на кубе C, пространством $F_\pi(\hat{C})$ функций, кратнопериодических в параллелепипеде $\hat{C}$ и имеющих период $b_1 - a_1$ по переменной $x_1, \ldots, b_n - a_n$ по переменной x_n. Мы предоставляем читателю провести подробно эти рассмотрения. В последующих параграфах в случае необходимости мы будем просто ссылаться на определение 1, лемму 3 и т. д., обобщенные на $D_\pi(\hat{C})$, $H_\pi^{(k)}(\hat{C})$ и т. д. Следует, однако, дать аналог некоторых частей определения 38 и лемм 39 и 41.

42. Определение. Пусть $\hat{C}$ — прямоугольный параллелепипед ['], $\xi_{\hat{C}}$ обозначает вектор $(2\pi)[(b_1 - a_1)^{-1}, \ldots, (b_n - a_n)^{-1}]$, а $v(\hat{C})$ — произведение $(b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \ldots (b_n - a_n)$. Пусть L — индекс,

такой, что $|L|=n$, а $F\in D_\pi(\hat{C})$. Тогда выражение

$$F_L=F\left(e^{-iL\cdot\xi_{\hat{C}}x}\right)$$

называется *L-м коэффициентом Фурье распределения* F. Формальный ряд

$$(v(\hat{C}))^{-1}\sum_L F_L e^{iL\cdot\xi_{\hat{C}}x}$$

называется *рядом Фурье распределения* F.

43. Лемма. *Пусть выполнены условия предыдущего определения.*

(I) *Ряд Фурье элемента $F\in D_\pi(\hat{C})$ сходится в $D_\pi(\hat{C})$ безусловно к F.*

(II) *Если $F\in H_\pi^{(k)}(\hat{C})$, то ряд Фурье элемента F сходится безусловно к F в топологии пространства $H_\pi^{(k)}(\hat{C})$.*

(III) *Пусть k — целое число. Выражение*

$$\|F\|_{(k)}=\Big\{\sum_{|L|=n}(1+l_1^2+\ldots+l_n^2)^k\,|F_L|^2\Big\}^{1/2}$$

конечно тогда и только тогда, когда элемент F из $D_\pi(\hat{C})$ принадлежит $H_\pi^{(k)}(\hat{C})$; оно определяет в $H_\pi^{(k)}(\hat{C})$ норму, эквивалентную норме этого пространства, описанную в определениях 32 *и* 33 (*очевидным образом обобщенных*).

Следующий вопрос, который мы хотим затронуть, — это поведение распределений при замене переменных.

44. Определение. Пусть I_1 — область в E^{n_1}, а I_2 — область в E^{n_2}; $M: I_1\to I_2$ — такое отображение I_1 в I_2, что

(a) $M^{-1}C$ — компактное подмножество в I_1, если только C — компактное подмножество в I_2;

(b) $(M(\cdot))_j\in C^\infty(I_1)$, $\quad j=1,\ldots,n_2$.

Тогда

(I) для всякой функции $\varphi\in C^\infty(I_2)$ через $\varphi\circ M$ мы будем обозначать функцию ψ из $C^\infty(I_1)$, определяемую для $x\in I_1$ равенством $\psi(x)=\varphi(M(x))$;

(II) для любого $F\in D(I_1)$ символом $F\circ M^{-1}$ мы будем обозначать распределение $G\in D(I_2)$, определяемое для $\varphi\in C_0^\infty(I_2)$ равенством $G(\varphi)=F(\varphi\circ M)$.

Замечание. Следует отметить, что из пункта (b) данного выше определения вытекает, что $\varphi\circ M\in C^\infty(I_1)$, если $\varphi\in C^\infty(I_2)$, и что $\varphi\to\varphi\circ M$ является непрерывным отображением $C^\infty(I_2)$

в $C^\infty(I_1)$. (Определение топологий в этих пространствах см. в § 2.) В силу (a), $\varphi \to \varphi \circ M$ отображает $C_0^\infty(I_2)$ в $C_0^\infty(I_1)$. Опять же в силу (a), все функции последовательности $\{\varphi_m \circ M\}$ обращаются в нуль вне некоторого фиксированного компактного подмножества в I_1, если все функции последовательности $\{\varphi_m\}$ обращаются в нуль вне некоторого фиксированного компактного подмножества в I_2. Тем самым из (a) и (b) вытекает, что $\varphi_m \circ M \rightrightarrows \varphi \circ M$, если $\varphi_m \rightrightarrows \varphi$, и поэтому (II) предыдущего определения дает корректное определение элемента G из $D(I_2)$.

45. Лемма. *Пусть I_1 — область в E^{n_1}, а I_2 — область в E^{n_2}. Пусть $M: I_1 \to I_2$ — отображение I_1 в I_2, удовлетворяющее условиям* (a) *и* (b) *определения* 44. *Тогда*

(*a*) *отображение $F \to F \circ M^{-1}$ является непрерывным линейным отображением $D(I_1)$ в $D(I_2)$*;

(b) $\overline{F \circ M^{-1}} = \overline{F} \circ M^{-1}, \quad F \in D(I_1)$;

(c) *если $\hat{I}_2$ — открытое подмножество в I_2 и $\hat{I}_1 = M^{-1}\hat{I}_2$, то*

$$(F \circ M^{-1}) \mid \hat{I}_2 = (F \mid \hat{I}_1) \circ M^{-1}.$$

Доказательство этой леммы получается непосредственно из самих определений входящих в нее понятий. Предоставляем читателю провести доказательство этой леммы. Доказательство следующей леммы также элементарно, и мы его не приводим.

46. Лемма. *Пусть I_j — область в E^{n_j}, $j = 1, 2, 3$, и $M_1: I_1 \to I_2$, $M_2: I_2 \to I_3$ — такие отображения, что*

(a) *$M_1^{-1}C$ является компактным подмножеством в I_1 для любого компактного подмножества $C \subset I_2$; $M_2^{-1}C$ является компактным подмножеством в I_2 для любого компактного подмножества $C \subset I_3$*;

$$\text{(b)} \quad (M_1(\cdot))_j \in C^\infty(I_1), \quad 1 \leqslant j \leqslant n_2,$$
$$(M_2(\cdot))_j \in C^\infty(I_2), \quad 1 \leqslant j \leqslant n_3.$$

Тогда для любого $F \in D(I_1)$

$$F \circ (M_1 M_2)^{-1} = (F M_1^{-1}) \circ M_2^{-1}.$$

Если в лемме 45 M является взаимно однозначным отображением на все I_2, то мы можем дать дополнительную информацию.

47. Лемма. *Пусть I_1 и I_2 — области в E^n и $M: I_1 \to I_2$ — взаимно однозначное отображение I_1 на все I_2. Предположим,*

что

(a) $(M(\cdot))_j \in C^\infty(I_1), \qquad j=1, \ldots, n;$

(b) $(M^{-1}(\cdot))_j \in C^\infty(I_2), \quad j=1, \ldots, n.$

Тогда

(I) $(aF) \circ M^{-1} = a(M^{-1}(\cdot))(F \circ M^{-1}), \qquad a \in C^\infty(I_1), \ F \in D(I_1);$

(II) $(\partial_j F) \circ M^{-1} = \sum_{k=1}^{n} \{\partial_k b_{kj}(F \circ M^{-1})\}, \quad j=1, \ldots, n, \quad F \in D(I_1),$

где

$$b_{kj}(x) = ((\partial_j M)(M^{-1}(x)))_k, \qquad 1 \leqslant k, \quad j \leqslant n, \quad x \in I_2;$$

(III) *если F соответствует функции f, то $F \circ M$ соответствует функции*

$$J(\cdot) f(M^{-1}(\cdot)),$$

где J — абсолютное значение якобиана отображения $x \to M^{-1}(x)$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(I_2)$. По определению 44 мы имеем $\{(aF) \circ M^{-1}\}(\varphi) = (aF)(\varphi \circ M) = F((\varphi \circ M) a) = F((\varphi \circ M)(a \circ M^{-1} \circ M)) = F(\{\varphi(a \circ M^{-1})\} \circ M) = (F \circ M^{-1})(\varphi(a \circ M^{-1})) = \{(a \circ M^{-1})(F \circ M)\}(\varphi)$, что доказывает (I). Аналогично мы имеем

$$\{(\partial_j F) \circ M^{-1}\}(\varphi) = (\partial_j F)(\varphi \circ M) = -F(\partial_j(\varphi \circ M)) =$$
$$= -F\left(\sum_k (\varphi_k \circ M) a_{k_j}\right),$$

где $a_{k_j}(x) = (\partial_j M(x))_k$; используя (I), получаем соотношение (II).

Если F соответствует функции f, то

$$(F \circ M^{-1})(\varphi) = F(\varphi \circ M) = \int f(x) \varphi(M(x))\, dx =$$
$$= \int f(M^{-1}(x)) \varphi(x) J(x)\, dx,$$

где J обозначает абсолютное значение якобиана отображения $x \to M^{-1}(x)$; это вытекает из стандартной теоремы о замене переменных в кратном интеграле. Но тогда соотношение (III) очевидно.

Лемма 47 позволяет описать поведение пространств H^p, A^p и т. д. при замене переменных.

48. Лемма. *Пусть I_1 и I_2 — области в E^n и $M: I_1 \to I_2$ — взаимно однозначное отображение I_1 на все I_2. Предположим, что*

(a) $(M(\cdot))_j \in C^\infty(I_1), \qquad j=1, \ldots, n;$

(b) $(M^{-1}(\cdot))_j \in C^\infty(I_2), \quad j=1, \ldots, n.$

Пусть k — целое число. Тогда

(I) *$F \longrightarrow F \circ M^{-1}$ является взаимно однозначным непрерывным отображением $D(I_1)$ на все $D(I_2)$; обратным к нему является отображение $F \longrightarrow F \circ M$;*

(II) *$F \longrightarrow F \circ M^{-1}$ является взаимно однозначным непрерывным отображением $A^{(k)}(I_1)$ на все $A^{(k)}(I_2)$;*

(III) *если все частные производные функций $(M(\cdot))_j$ и $(M^{-1}(\cdot))_j$, $j=1, \ldots, n$, равномерно ограничены в I_1 и I_2 соответственно, то $F \longrightarrow F \circ M^{-1}$ является взаимно однозначным непрерывным отображением $H^{(k)}(I_1)$ на все $H^{(k)}(I_2)$; в этом случае $F \longrightarrow F \circ M^{-1}$ также является взаимно однозначным непрерывным отображением $H_0^{(k)}(I_1)$ на все $H_0^{(k)}(I_2)$.*

Доказательство. Используя леммы 46 и 45, получаем сразу же утверждение (I). Наш следующий шаг — доказать первую часть утверждения (III). В силу (I), очевидно, достаточно доказать, что $F \longrightarrow F \circ M^{-1}$ является непрерывным отображением $H^{(k)}(I_1)$ в $H^{(k)}(I_2)$. По обычной формуле замены переменных в кратном интеграле и в силу утверждения (III) предыдущей леммы мы имеем

$$|F \circ M^{-1}|_{(0)}^2 = \int_{I_2} |f(M^{-1}(x))|^2 J(x)^2 \, dx =$$
$$= \int_{I_1} |f(x)|^2 J(M(x)) \, dx \leqslant A |F|_{(0)}^2,$$

где $A = \sup_{x \in I_1} J(M(x))$ — конечная величина в силу (III). Этим доказана первая часть пункта (III) для $k=0$. Так как по определению 15

$$|F|_{(k)}^2 = \sum_{|J| \leqslant k} |\partial^J F|_{(0)}^2,$$

то из только что доказанного и утверждения (II) предыдущей леммы вытекает первая часть (III) для всех $k \geqslant 0$.

Из утверждения (I) настоящей леммы вытекает, что $F \longrightarrow F \circ M^{-1}$ и $F \longrightarrow F \circ M$ являются непрерывными отображениями $H^{(k)}(I_2)$ в $H^{(k)}(I_1)$ и $H^{(k)}(I_1)$ в $H^{(k)}(I_2)$ соответственно при $k \geqslant 0$. Поэтому найдутся такие постоянные A и B, зависящие лишь от k, что

[*] $$B|F|_{(k)} \leqslant |F \circ M^{-1}|_{(k)} \leqslant A|F|_{(k)}.$$

Пусть теперь $k = -p$, где $p \geqslant 0$. Тогда если $F \in H^{(k)}(I_1)$, то из определения 17 вытекает, что

$$|F\circ M^{-1}|_{(k)}=\sup_{\varphi\in C_0^\infty(I_2)}\frac{|F(\varphi\circ M)|}{|\varphi|_{(p)}}=\sup_{\varphi\in C_0^\infty(I_2)}\frac{F(\varphi\circ M)}{|\varphi\circ M|_{(p)}}\,\frac{|(\varphi\circ M)|_{(p)}}{|\varphi|_{(p)}}\leqslant$$

$$\leqslant|F|_{(k)}\sup_{\varphi\in C_0^\infty(I_2)}\frac{|\varphi\circ M|_{(p)}}{|\varphi|_{(p)}}\leqslant A\,|F|_{(k)}$$

в силу формулы [*]. Таким образом, $F\to F\circ M^{-1}$ — непрерывное отображение $H^{(k)}(I_1)$ в $H^{(k)}(I_2)$ и при отрицательных k, чем первая часть утверждения (III) доказана для всех k.

Так как в силу (III) предыдущей леммы $F\to F\circ M^{-1}$ отображает подпространство $C_0^\infty(I_1)\subset D(I_1)$ в подпространство $C_0^\infty(I_2)\subset\subset D(I_2)$, то вторая часть утверждения (III) вытекает непосредственно из его первой части и определения 15 (III).

Пусть $\hat{I}_1$ — открытое подмножество в I_1, замыкание которого является компактным подмножеством в I_1, и $\hat{I}_2=M\hat{I}_1$. Тогда $\hat{I}_2$ оказывается открытым подмножеством в I_2, замыкание которого является компактным подмножеством в I_2. Поэтому сужения $M\,|\,\hat{I}_1$ и $M^{-1}\,|\,\hat{I}_2=(M\,|\,\hat{I}_1)^{-1}$ удовлетворяют предположениям утверждения (III). Тем самым (II) вытекает из (III) и определений 15 (III) и 20 пространства $A^{(k)}(I)$ и его топологии, ч. т. д.

Определение 44 может быть легко обобщено с пространств $D(I_1)$ и $D(I_2)$ на соответствующие пространства кратнопериодических распределений

49. Определение. Пусть C_1 и C_2 — прямоугольные параллелепипеды вида

$$C_1=\{x\in E^{n_1}\,|\,a_j\leqslant x_j\leqslant b_j,\quad j=1,\ \ldots,\ n_1\},$$

$$C_2=\{x\in E^{n_2}\,|\,\hat{a}_j\leqslant x_j\leqslant \hat{b}_j,\quad j=1,\ \ldots,\ n_2\}.$$

Пусть I_1 и I_2 — открытые подмножества в C_1 и C_2 соответственно и $M: I_1\to I_2$ — такое отображение I_1 в I_2, что $\varphi(M(\cdot))\in C_{\pi,0}^\infty(I_1)$ для любой функции $\varphi\in C_{\pi,0}^\infty(I_2)$. Тогда

(I) для всякой функции $\varphi\in C_{\pi,0}^\infty(I_2)$ символ $\varphi\circ M$ будет обозначать функцию $\psi\in C_{\pi,0}^\infty(I_1)$, определяемую равенством $\psi(x)=\varphi(M(x))$;

(II) для всякого распределения $F\in D_\pi(I_1)$ символ $F\circ M^{-1}$ будет обозначать распределение $G\in D_\pi(I_2)$, определяемое равенством $G(\varphi)=F(\varphi\circ M)$, где $\varphi\in C_{\pi,0}^\infty(I_2)$.

Леммы 45—48 можно легко перенести с пространств $D(I_1)$, $D(I_2)$ и т. д. на пространства $D_\pi(I_1)$, $D_\pi(I_2)$ и т. д. Мы предоставляем сделать это читателю и в дальнейшем будем просто ссылаться на лемму 45 и т. д., обобщенную на пространство $D_\pi(I_1)$ и т. д. Есть, однако, одно особенно важное специальное отображение пространства $D_\pi(C)$ в себя; его свойства подробно рассматриваются в следующей лемме.

50. Лемма. *Пусть дан параллелепипед*

$$C=\{x\in E^n \mid a_j\leqslant x_j\leqslant b_j,\quad 1\leqslant j\leqslant n\}.$$

Для всякого $\Delta>0$, такого, что $\Delta<b_1-a_1$, обозначим через M_Δ отображение C в себя, определяемое соотношениями

$$M_\Delta[x_1, \ldots, x_n]=\begin{cases}[x_1+\Delta,\ x_2,\ \ldots,\ x_n], & x_1+\Delta\leqslant b_1,\\ [x_1+\Delta-b_1+a_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n], & x_1+\Delta>b_1.\end{cases}$$

Пусть k — целое число и $F\in H_\pi^{(k)}(C)$. При этом

(I) *$\partial_1 F\in H_\pi^{(k)}(C)$ тогда и только тогда, когда $|\Delta^{-1}(F\circ M_\Delta^{-1}-F)|_{(k)}$ равномерно ограничено при $0<\Delta<b_1-a_1$;*

(II) *если $\partial_1 F\in H_\pi^{(k)}(C)$, то*

$$\partial_1 F=\lim_{\Delta\to 0}\Delta^{-1}(F\circ M_\Delta^{-1}-F)$$

по норме пространства $H_\pi^{(k)}(C)$.

Доказательство. Ясно, что $\Delta^{-1}(\varphi\circ M_\Delta-\varphi)$ стремится к $\partial_1\varphi$ равномерно для $x\in C$ при $\Delta\to 0$ для любой функции $\varphi\in C_\pi^\infty(C)$. Если воспользоваться этим фактом для каждой частной производной функции φ, то мы получим, что $\Delta^{-1}(\varphi\circ M_\Delta-\varphi)$ стремится к $\partial_1\varphi$ при $\Delta\to 0$ в топологии пространства $C_\pi^\infty(C)$ для всякой функции $\varphi\in C_\pi^\infty(C)$. Таким образом, если $G\in D_\pi(C)$, то из определений 49 и 37 вытекает, что

$$\lim_{\Delta\to 0}\Delta^{-1}(G\circ M_\Delta^{-1}-G)(\varphi)=\lim_{\Delta\to 0}G(\Delta^{-1}(\varphi\circ M_\Delta-\varphi))=G(\partial_1\varphi),$$

и потому $\Delta^{-1}(G\circ M_\Delta^{-1}-G)$ сходится к $\partial_1 G$ в топологии $D_\pi(C)$.

Предположим теперь, что $F\in H_\pi^{(k)}(C)$ и что $|\Delta^{-1}(F\circ M_\Delta^{-1}-F)|_{(k)}$ равномерно ограничено при $0<\Delta<b_1-a_1$. Пусть сначала $k\geqslant 0$. Так как гильбертово пространство $H_\pi^{(k)}(C)$ рефлексивно (см. лемму 16 и следствие IV.4.6), то каждая сходящаяся к нулю последовательность $\{\Delta_m\}$ положительных вещественных чисел обладает такой подпоследовательностью $\{\hat\Delta_m\}$, что $\hat\Delta_m^{-1}(F\circ M_{\hat\Delta_m}^{-1}-F)$ слабо сходится при $m\to\infty$ к некоторому элементу $\hat F\in H_\pi^{(k)}(C)$. Очевидно, что для всякой функции $\varphi\in C_\pi^\infty(C)$ отображение $G\to G(\varphi)$

является непрерывным линейным функционалом на $H_\pi^{(k)}(C)$. Таким образом, существует элемент $H_\varphi \in H_\pi^{(k)}(C)$, такой, что

$$G(\varphi) = (G, H_\varphi)_{(k)}, \qquad G \in H_\pi^{(k)}(C).$$

Значит,

$$\lim_{m\to\infty} \hat{\Delta}_m^{-1}(F \circ M_{\hat{\Delta}_m}^{-1} - F)(\varphi) = \lim_{m\to\infty} (\hat{\Delta}_m^{-1}(F \circ M_{\hat{\Delta}_m}^{-1} - F), H_\varphi)_{(k)} =$$

$$= (\hat{F}, H_\varphi)_{(k)} = \hat{F}(\varphi), \quad \varphi \in C_\pi^\infty(C),$$

т. е.

$$\lim_{m\to\infty} \hat{\Delta}_m^{-1}(F \circ M_{\hat{\Delta}_m}^{-1} - F) = \hat{F}$$

в топологии пространства распределений. Из доказанного в предыдущем абзаце вытекает, что $\hat{F} = \partial_1 F$, и потому $\partial_1 F \in H_\pi^{(k)}(C)$.

Пусть теперь $F \in H_\pi^{(k)}(C)$, $k = -p$, где $p \geqslant 0$, и $|\Delta^{-1}(F \circ M_\Delta^{-1} - F)|_{(k)}$ равномерно ограничено постоянной A при $0 < \Delta < b_1 - a_1$. Тогда в силу определения 35 и теоремы Хана — Банаха (II.3.11) $\Delta^{-1}(F \circ M_\Delta - F) = F_\Delta$ можно продолжить до непрерывного линейного функционала на гильбертовом пространстве $H_\pi^{(p)}(C)$ с нормой, не превосходящей A для всех Δ, $0 < \Delta < b_1 - a_1$. Из теоремы IV.4.6 и следствия IV.4.7 вытекает существование сходящейся к нулю последовательности Δ_m положительных вещественных чисел и элемента $\hat{F} \in H_\pi^{(k)}(C)$, таких, что

$$\lim_{m\to\infty} \{\Delta_m^{-1}(F \circ M_{\Delta_m}^{-1} - F)\}(\varphi) = \hat{F}(\varphi), \quad \varphi \in C_\pi^\infty(C).$$

В силу доказанного выше $\hat{F} = \partial_1 F$, так что $\partial_1 F \in H_\pi^{(k)}(C)$. Этим завершается доказательство достаточности в утверждении (I).

Для доказательства необходимости предположим, что $F \in H_\pi^k(C)$ и $\partial_1 \hat{F} \in H_\pi^{(k)}(C)$. Условимся считать каждую функцию $\varphi \in C_\pi^\infty(C)$ продолженной по периодичности до кратнопериодической функции, определенной на всем E^n, с периодом $b_1 - a_1$ по переменной x_1, $b_2 - a_2$ по переменной x_2 и т. д.; продолженную функцию будем также обозначать через φ. Тогда для каждого $\Delta > 0$ отображение $\int_\Delta$, определяемое соотношением

$$\left(\int_\Delta \varphi\right)(x_1, \ldots, x_n) = \Delta^{-1} \int_{x_1}^{x_1+\Delta} \varphi(y, x_2, \ldots, x_n)\, dy, \tag{1}$$

является непрерывным отображением $C_\pi^\infty(C)$ в себя. Совершенно очевидно, что $\partial^J \int_\Delta = \int_\Delta \partial^J$ для всякого индекса J и $\Delta > 0$. Из этого сразу же получаем, что $\int\limits_\Delta$ является непрерывным отображением $C_\pi^\infty(C)$ в себя для всякого $\Delta > 0$. Более того, ясно, что $\partial_1 \int\limits_\Delta \varphi = \Delta^{-1}(\varphi \circ M_\Delta - \varphi)$ для $0 < \Delta < b_1 - a_1$ и $\varphi \in C_\pi^\infty(C)$. Таким образом, если мы определим $\int\limits_\Delta F$ для $F \in D_\pi(C)$ по формуле

$$\Big(\int\limits_\Delta F\Big)(\varphi) = -F\Big(\int\limits_\Delta \varphi\Big), \qquad \varphi \in C_\pi^\infty(C),$$

то

$$\int\limits_\Delta \partial_1 F = \partial_1 \int\limits_\Delta F = \Delta^{-1}(F \circ M_\Delta^{-1} - F).$$

Следовательно, если мы покажем, что $\int\limits_\Delta$ является отображением $H_\pi^{(k)}(C)$ в себя с нормой, не превосходящей 1 для всякого $\Delta > 0$, то будет установлена необходимость в утверждении (I) доказываемой леммы.

Предположим сначала, что $k = -p$, где $p \geqslant 0$. Тогда по определению 35 для доказательства неравенства $\Big|\int\limits_\Delta F\Big|_{(k)} = |F|_{(k)}$, где $F \in H_\pi^{(k)}(C)$, достаточно показать, что $\Big|\int\limits_\Delta \varphi\Big|_{(p)} \leqslant |\varphi|_{(p)}$ для $\varphi \in C_\pi^\infty(C)$. В силу соотношения (1), неравенства Шварца и теоремы Фубини ясно, что

$$\int\limits_C \Big|\Big(\int\limits_\Delta \varphi\Big)(x_1, \ldots, x_n)\Big|^2 dx \leqslant \Delta^{-1} \int\limits_C \int\limits_{x_1}^{x_1+\Delta} |\varphi(s, x_2, \ldots, x_n)|^2 \, ds\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \Delta^{-1} \int\limits_{s-\Delta}^{s} dx_1 \Big\{\int\limits_C |\varphi(s, x_2, \ldots, x_n)|^2 \, ds\, dx_2 \ldots dx_n\Big\} = \int\limits_C |\varphi(x)|^2 \, dx.$$

Таким образом, $\Big|\int\limits_\Delta \varphi\Big|_{(0)} \leqslant |\varphi|_{(0)}$ для всякой функции $\varphi \in C_\pi^\infty(C)$. Так как $\partial^J \int\limits_\Delta = \int\limits_\Delta \partial^J$ для любого индекса J, то мы имеем также неравенство $\Big|\int\limits_\Delta \partial^J \varphi\Big|_{(0)} \leqslant |\partial^J \varphi|_{(0)}$ для всех $\varphi \in C_\pi^\infty(C)$. Поэтому из определения 34 вытекает, что $\Big|\int\limits_\Delta \varphi\Big|_{(p)} \leqslant |\varphi|_{(p)}$, и необходимость в (I) доказана для $k \leqslant 0$.

Перейдем теперь к доказательству утверждения (II). Пусть G лежит в $C_\pi(C) \subseteq D_\pi(C)$; условимся считать, что всякая функция $F \in C_\pi(C)$ продолжена по периодичности до кратнопериодической функции, определенной на всем E^n с периодом $b_1 - a_1$ по переменной x_1, $b_2 - a_2$ по переменной x_2 и т. д.; продолженную функцию будем по-прежнему обозначать через F. Тогда по теореме Фубини

$$\left(\int_\Delta F\right)(\varphi) = -\Delta^{-1} \int_C F(x) \left\{ \int_{x_1}^{x_1+\Delta} \varphi(s, x_2, \ldots, x_n)\, ds \right\} dx =$$

$$= -\Delta^{-1} \int_C \left\{ \int_{s-\Delta}^{s} F(x_1, \ldots, x_n)\, \varphi(s, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 \right\} ds\, dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= \int_C \left\{ -\Delta^{-1} \int_{x_1-\Delta}^{x_1} F(t, x_2, \ldots, x_n) \right\} \varphi(x)\, dx.$$

Таким образом, ясно, что для $G \in C_\pi(C) \subseteq D_\pi(C)$ мы имеем $\left(\int_\Delta G\right)(x) \to G(x)$ равномерно для $x \in C$ при $\Delta \to 0$. Следовательно, $\left|\int_\Delta G - G\right| \to 0$ при $\Delta \to 0$ для всякой функции $G \in C_\pi(C) \subseteq D_\pi(C)$. Так как $C_\pi(C)$ плотно в $L_2(C) \subseteq D_\pi(C)$ в силу леммы 2.2, то из теоремы II.3.6 вытекает, что $\left|\int_\Delta G - G\right| \to 0$ при $\Delta \to 0$ для каждой $G \in H_\pi^{(0)}(C) = L_2(C)$. Поскольку $\int_\Delta \partial^J = \partial^J \int_\Delta$, то из определения 34 сразу же получаем, что для $k \geqslant 0$ $\left|\int_\Delta G - G\right|_{(k)} \to 0$ при $\Delta \to 0$ для всякой функции $G \in H_\pi^{(k)}(C)$. В частности, $\left|\int_\Delta \partial_1 F - \partial_1 F\right|_{(k)}$ стремится к нулю при $\Delta \to 0$, если $F \in H_\pi^{(k)}(C)$ и $\partial_1 F \in H_\pi^{(k)}(C)$. Так как мы видели, что $\int_\Delta \partial_1 F = \Delta^{-1}(F \circ M_\Delta^{-1} - F)$, то (II) доказано в случае $k \geqslant 0$.

Если $k = 0$, то $\left|\int_\Delta F\right| \leqslant F$ для всех $F \in L_2(I) \subseteq D_\pi(I)$. Поскольку $\partial^J \int_\Delta = \int_\Delta \partial^J$ для всех индексов J, то мы имеем также $\left|\int_\Delta \partial^J F\right| \leqslant |\partial^J F|$ для $l \geqslant 0$, $F \in H_\pi^{(l)}(I)$ и любого индекса J, такого, что

$|J| \leqslant l$. Тем самым из определения 34 вытекает, что $\left|\int\limits_{\Delta} F\right|_{(l)} \leqslant$ $\leqslant |F|_{(l)}$ для всех $l \geqslant 0$; это доказывает необходимость в утверждении (I) при $k \geqslant 0$.

Для завершения доказательства леммы мы должны лишь установить утверждение (II) для $k \leqslant 0$. Сделать это можно следующим образом. Пусть $k = -p$, где $p \geqslant 0$, $F \in H_{\pi}^{(k)}(C)$, $\partial_1 F \in$ $\in H_{\pi}^{(k)}(C)$, а G — произвольный элемент из $H_{\pi}^{(k)}(C)$. Тогда по определению 35 и по теореме Хана — Банаха (II.3.11) отображение $\varphi \to G(\varphi)$ можно продолжить до непрерывного линейного функционала (его по-прежнему мы будем обозначать через G) на гильбертовом пространстве $H_{\pi}^{(p)}(C)$. Таким образом (см. IV.4.5), существует элемент $\hat{G} \in H_{\pi}^{(p)}(C)$, такой, что

$$G(\varphi) = (\varphi, \hat{G})_{(k)}, \qquad \varphi \in C_{\pi}^{\infty}(C). \tag{2}$$

Используя определения 34 и 31 (I) и полагая

$$\zeta = \sum_{|J| \leqslant p} (-1)^{|J|} \partial^J \partial^J,$$

мы имеем $(\varphi, \hat{G})_{(k)} = (\varphi, \zeta\hat{G})$. Поэтому из (II) вытекает, что $G = \zeta\tilde{G}$, где $\tilde{G}$ — комплексно сопряженное к $\hat{G}$ распределение, так что $\tilde{G} \in H_{\pi}^{(p)}(C)$. Итак, $\int\limits_{\Delta} G = \zeta \int\limits_{\Delta} \tilde{G}$. Из доказанного в предыдущем абзаце вытекает, что $\int\limits_{\Delta} \tilde{G} \to \tilde{G}$ по норме $H_{\pi}^{(p)}(C)$ при $\Delta \to 0$. Тогда по лемме 22 (обобщенной на $H_{\pi}^{(p)}(C)$) $\int\limits_{\Delta} G \to G$ по норме $H_{\pi}^{(-p)}(C) =$ $= H_{\pi}^{(k)}(C)$ при $\Delta \to 0$. Применяя это к $\partial_1 F$ и замечая, что $\int\limits_{\Delta} \partial_1 F =$ $= \Delta^{-1}(F \circ M_{\Delta}^{-1} - F)$, получаем

$$\lim_{\Delta \to 0} |\Delta^{-1}(F \circ M_{\Delta}^{-1} - F)|_{(k)} = 0,$$

и утверждение (II) доказано также в случае $k \leqslant 0$.

Очень важно, что некоторые распределения можно применять — придав этому соответствующий смысл — к некоторым бесконечно дифференцируемым функциям, не принадлежащим C_0^{∞}. Как это сделать, объясняется в следующих определении и лемме.

51. Определение. Пусть I — открытое подмножество в E^n, $F \in D(I)$, а функция $\varphi \in C^{\infty}(I)$ обращается в нуль вне некоторого замкнутого подмножества $K \subseteq I$. Предположим, что $K_1 = C(F) \cap K$ —

компактное подмножество в I. Тогда мы полагаем

$$F(\varphi)=F(\psi\varphi),$$

где ψ — любая функция из $C_0^\infty(I)$, тождественно равная единице в некоторой окрестности K_1.

52. Лемма. *Пусть I, F и φ — те же, что в определении* 51. *Тогда $F(\varphi)$ не зависит от выбора функции ψ, входящей в его определение. Если $\hat{\varphi}$ — вторая функция из $C^\infty(I)$, обращающаяся в нуль вне некоторого замкнутого подмножества $\hat{K}\subset I$, такая, что $\hat{K}_1=C(F)\cap K$ — компакт, а α и $\hat{\alpha}$ — комплексные числа, то*

$$F(\alpha\varphi+\hat{\alpha}\hat{\varphi})=aF(\varphi)+\hat{\alpha}F(\hat{\varphi}).$$

Доказательство. Пусть $\hat{\psi}$ — вторая функция из $C_0^\infty(I)$, такая, что $\hat{\psi}(x)=1$ для x из окрестности K_1. Тогда $\psi\varphi-\hat{\psi}\varphi$ обращается в нуль в окрестности $K\cap C(F)$ и в окрестности $C(F)-K$, поскольку φ равна нулю на дополнении K. Поэтому $\psi\varphi-\hat{\psi}\varphi$ обращается в нуль в окрестности $C(F)$, так что $F(\psi\varphi)=F(\hat{\psi}\varphi)$ по определению 11.

По лемме 2.1 существует функция $\tilde{\psi}\in C_0^\infty(I)$, равная единице в окрестности $K_1\cup\hat{K}_1$. Тогда в силу определения 51 и предыдущего абзаца мы имеем

$$F(\alpha\varphi+\hat{\alpha}\hat{\varphi})=F(\tilde{\psi}(\alpha\varphi+\hat{\alpha}\hat{\varphi}))=\alpha F(\tilde{\psi}\varphi)+\hat{\alpha}F(\tilde{\psi}\hat{\varphi})=\alpha F(\varphi)+\hat{\alpha}F(\hat{\varphi}).$$

В дальнейшем нам будет полезна следующая лемма.

53. Лемма. *Пусть I — открытое подмножество в E^n, $F\in D(I)$, $\varphi\in C_0^\infty(I)$, $f\in L_1(I)$. Пусть K — такое замкнутое подмножество в I, что для $x\notin K$* имеем $\varphi(x-y)f(y)=0$ *для всех $y\in I$. Предположим также, что $K_1=C(F)\cap K$ — компакт. Тогда*

$$[*]\qquad F\left(\int_I\varphi(\cdot-y)f(y)\,dy\right)=\int_I F(\varphi(\cdot-y))f(y)\,dy.$$

Замечание. Если $f(y)\neq 0$, то по предположению $\varphi(x-y)=0$ для $x\notin K$. Следовательно, если $f(y)\neq 0$, то $F(\varphi(\cdot+y))f(y)$ определена корректно предыдущими определением и леммой. Если $f(y)=0$, то условимся полагать $F(\varphi(\cdot+y))f(y)=0$; это придает смысл подинтегральной функции в правой части формулы [*] во всех случаях. В ходе доказательства мы покажем, что интеграл в правой части [*] существует.

Доказательство. По лемме 2.1 существует такая функция $\psi \in C_0^\infty(I)$, что $\psi(x)=1$ для x из некоторой окрестности K_1. По определению 51 мы имеем

$$(1)\qquad F\left(\int_I \varphi(\cdot-y)f(y)\,dy\right)=F\left(\psi^2(\cdot)\int_I \varphi(\cdot-y)f(y)\,dy\right)=$$
$$=F\left(\psi(\cdot)\int_I \psi(\cdot)\varphi(\cdot-y)f(y)\,dy\right)$$

и

$$(2)\qquad F(\varphi(\cdot-y))f(y)=F(\psi^2(\cdot)\varphi(\cdot-y))f(y).$$

Если $y_n\to y$ и y_n и y остаются внутри I, то ясно, что $\varphi(\cdot-y_n)\to\to\varphi(\cdot-y)$ в топологии $C^m(I)$ при каждом m. Таким образом, $\psi(\cdot)\varphi(\cdot-y_n)\rightrightarrows\psi(\cdot)\varphi(\cdot-y)$. Это показывает, что $F(\psi(\cdot)\varphi(\cdot-y))$ непрерывно зависит от y при $y\in I$ (см. определение 1). Следовательно, подинтегральная функция в правой части формулы [*] интегрируема и

$$(3)\qquad \int_I F(\varphi(\cdot-y))f(y)\,dy=\int_I F(\psi(\cdot)\psi(\cdot)\varphi(\cdot-y))f(y)\,dy.$$

В силу (1) и (3) ясно, что для доказательства леммы нужно лишь показать, что

$$(4)\qquad G\left(\int_I \psi(\cdot)\varphi(\cdot-y)f(y)\,dy\right)=\int_I G(\psi(\cdot)\varphi(\cdot-y))f(y)\,dy,$$

где $G=\psi F$. Пусть K_2 — компактное подмножество в I, внутренность которого содержит второе компактное множество, вне которого функция ψ обращается в нуль. Очевидно, можно предполагать — далее мы так и делаем, — что K_2 есть замыкание своей внутренности $\mathring{K}_2$. Тогда для достаточно большого m можно продолжить G с $C_0^\infty(\mathring{K}_2)$ до непрерывного линейного функционала на $C^m(K_2)$. Действительно, в противном случае в силу теоремы II.3.11 для каждого $m\geqslant 1$ существовала бы функция $f_m\in C_0^\infty(\mathring{K}_2)$, норма которой в пространстве $C^m(K_2)$ не превосходила бы $1/m$, и такая, что $G(f_m)=1$. Но тогда $\psi f_m\rightrightarrows 0$, в то время как $F(\psi f_m)=G(f_m)=1$, что противоречит определению 1.

Ясно, что $\psi(\cdot)f(\cdot-y)$ непрерывно зависит от y в топологии $C^m(\mathring{K}_2)$, когда y пробегает I. Тем самым (4) вытекает из теоремы III.2.18.

В последующих параграфах этой главы, если τ обозначает формальный дифференциальный оператор с частными производными, определенный в области I, то через $T_0(\tau)$ и $T_1(\tau)$ будут обозначаться операторы в $L_2(I)$, определяемые соотношениями

$$\mathfrak{D}(T_0(\tau)) = C_0^\infty(I); \quad T_0(\tau) f = \tau f, \quad f \in \mathfrak{D}(T_0(\tau));$$
$$\mathfrak{D}(T_1(\tau)) = \{f \in D(I) \mid f \in L_2(I), \quad \tau f \in L_2(I)\};$$
$$T_1(\tau) f = \tau f, \quad f \in \mathfrak{D}(T_1(\tau)).$$

Следует отметить, что в силу определения 5 $T_1(\tau) = (T_0(\tau^*))^*$, и потому (см. XII.1.6) оператор $T_1(\tau)$ всегда замкнут. По лемме 6(I) $T_0(\tau) \subseteq T_1(\tau)$. По лемме 6(IV) $T_1(\tau_1) T_1(\tau_2) \subseteq T_1(\tau_1\tau_2)$. Эти элементарные факты будут использоваться в последующем без всяких оговорок.

Прежде чем закончить этот параграф, следует вернуться к вопросу об обозначениях. Если $F \in D(I)$ и F соответствует функции f, интегрируемой на каждом компактном подмножестве в I, то, как отмечалось выше, мы можем записать $F(\varphi)$ в виде

[*] $$F(\varphi) = \int_I f(x) \varphi(x)\, dx, \quad \varphi \in C_0^\infty(I).$$

Часто оказывается предпочтительным записывать $F(\varphi)$ в этом виде даже в общем случае, т. е. вводить для каждого $F \in D(I)$ некоторую идеальную «функцию» f, определяемую формулой [*]. Конечно, выигрыш состоит лишь в удобстве обозначений и ни в чем больше; в общем случае «функция» f не имеет определенных значений, да и существует она лишь постольку, поскольку формально входит в правую часть формулы [*]. Именно в этом смысле Дирак писал

$$\varphi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x)\, dx,$$

используя свою δ-«функцию» и аналогичные равенства для $\varphi^{(k)}(0)$, содержащие «функции», получающиеся при дифференцировании δ-«функции».

4. Теорема Соболева

В этом параграфе будет доказана очень важная теорема Соболева о связи между аналитическими свойствами производных различных порядков данной функции f и соответствующими свойствами самой этой функции.

1. Лемма. *Пусть $n \geqslant 1$ и E_+^n обозначает полупространство евклидова n-мерного пространства E^n, определяемое соотношением*

$$E_+^n = \{x \in E^n \mid x_1 > 0\}.$$

Пусть $\infty \geqslant p' \geqslant p \geqslant 1$ *и*

$$\frac{1}{p'} > \frac{1}{p} - \frac{1}{n},$$

а F — *определенное в* E_+^n *распределение, имеющее ограниченный носитель, производные которого* $(\partial/\partial x_i) F$ *лежат в* $L_p(E_+^n)$, $i=1, \ldots, n$. *Тогда* F *принадлежит* $L_{p'}(E_+^n)$.

Доказательство. Условимся записывать через y переменную точку в E^n, а через $r=r(y)=|y|$ и $\omega=\omega(y)=y/|y|$ — соответствующие «радиальную» и «угловую» переменные. (См. пункт § XI.7, где рассматриваются сферические полярные координаты в евклидовом n-мерном пространстве; в ходе настоящего доказательства мы будем пользоваться принятыми в § XI.7 обозначениями площади гиперповерхности борелевских подмножеств единичной сферы, преобразованиями интегралов в E^n к сферическим полярным координатам и т. д.)

Пусть K настолько велико, что носитель f содержится в полушаре $\{x \in E_+^n \mid |x| \leqslant K/2\}$, и a — неотрицательная бесконечно дифференцируемая функция, определенная в E^n, обращающаяся в нуль вне множества $\{x \in E^n \mid |x-[1, 0, \ldots, 0]| < 1/10\}$ и удовлетворяющая равенству

$$\int_S a(\omega)\,\mu(d\omega) = 1.$$

Пусть b — такая бесконечно дифференцируемая неотрицательная функция положительной вещественной переменной r, что $b(r)=1$ для $r \leqslant 2K$ и $b(r)=0$ для $r \geqslant 3K$. Тогда если g — бесконечно дифференцируемая функция с носителем в множестве

$$B = \{x \in E_+^n \mid |x| \leqslant 3K/4\},$$

то мы, очевидно, имеем

$$\text{(I)} \qquad g(x) = \int_S \left\{ \int_\infty^0 \frac{\partial}{\partial r} g(x-r\omega)\, b(r)\, dr \right\} a(\omega)\,\mu(d\omega) =$$

$$= \sum_{j=1}^n \int_S \int_0^\infty \frac{\partial g}{\partial x_j}(x-r\omega)\,\omega_j b(r)\, a(\omega)\,\mu(d\omega)\, dr =$$

$$= \sum_{j=1}^n \int_{E_+^n} \frac{\partial g}{\partial x_j}(x-y)\, h_j(y)\, dy, \qquad x \in E_+^n,$$

где $h_j(y)$ — функция, определяемая равенством

$$h_j(y) = \frac{a(\omega)\,\omega_j b(r)}{r^{n-1}}.$$

Пусть через Ω_n обозначается площадь гиперповерхности единичного шара в n-мерном пространстве. Тогда функции h_j, $j=1, \ldots, n$, удовлетворяют неравенству

$$\int_{E^n} |h_j(y)|^s\,dy \leqslant \Omega_n \sup_{\omega \in S} |a(\omega)|^s \int_0^{3K} r^{(n-1)(1-s)}\,dr < \infty$$

при условии, что $(n-1)(1-s) > -1$, т. е. h_j лежат в $L_s(E^n)$, если $1 \leqslant s < n/(n-1)$. Из соотношения (I) и лемм 3.52 и 3.53 вытекает, что если F_j — функция из $L_p(E^n_+)$, соответствующая распределению $\partial_j F$, то

$$\text{(II)} \qquad F(g) = -\sum_{j=1}^{n} \int_{E^n_+} \int_{E^n_+} F_j(x)\,g(x-y)\,h_j(y)\,dy\,dx, \qquad g \in C_0^\infty(E^n_+).$$

Тогда, полагая $x - y = u$ и используя теорему Фубини, получаем

$$F(g) = -\sum_{j=1}^{n} \int_{E^n_+} \int_{E^n_+} F_j(x)\,h_j(x-u)\,g(u)\,dx\,du, \qquad g \in C_0^\infty(E^n_+),$$

так что распределение F соответствует функции

$$\text{(III)} \qquad -\sum_{j=1}^{n} \int_{E^n_+} F_j(x)\,h_j(x-u)\,dx.$$

Мы должны лишь показать, что эта функция принадлежит $L_{p'}(E^n_+)$.

Рассмотрим теперь свертку

$$\text{(IV)} \qquad c(u) = \int_{E^n} a(x)\,b(x-u)\,du.$$

Если $b \in L_1(E^n)$, то из леммы XI.3.1 следует, что соотношение (IV) определяет непрерывное отображение $a \to c$ из $L_1(E^n)$ в $L_1(E^n)$, равно как и из $L_\infty(E^n)$ в $L_\infty(E^n)$. Из теоремы Рисса о выпуклости (VI.10.11) вытекает, что это отображение действует также непрерывно из $L_p(E^n)$ в $L_p(E^n)$. Более того, если a лежит в $L_p(E^n)$, а b в $L_q(E^n)$, где $p^{-1} + q^{-1} = 1$, то из неравенства Гёльдера (III.3.2) следует, что c принадлежит $L_\infty(E^n)$. Зафиксируем теперь a в $L_p(E^n)$, и пусть $c = Tb$ — линейное отображение, определяемое равенством (IV), а $|T|_{p,q}$ — его норма как отображения из $L_p(E^n)$ в $L_q(E^n)$. Мы видели, что при $p^{-1}+q^{-1}=1$ обе нормы $|T|_{1,p}$ и $|T|_{q,\infty}$ конечны. Рассмотрим точки $u=(q^{-1}, 0)$ и $v=(1, p^{-1})$ в единичном квадрате $0\leqslant u$, $v\leqslant 1$. Из теоремы Рисса о выпуклости вытекает, что норма $|T|_{s,p'}$ конечна, если

$$\left(\frac{1}{s}, \frac{1}{p'}\right)=\alpha u+(1-\alpha)v$$

при некотором α из отрезка $0\leqslant\alpha\leqslant 1$. Это уравнение определяет s и α через p и p', а решениями служат

$$\alpha=1-\frac{p}{p'}, \qquad s=1+\frac{1}{p'}-\frac{1}{p}.$$

Так как $p'\geqslant p\geqslant 1$, то α лежит в отрезке $0\leqslant\alpha\leqslant 1$, а так как $(p')^{-1}>p^{-1}-n^{-1}$ и $p'\geqslant p$, то $1\leqslant s<n/(n-1)$. Таким образом, как показано выше, h_j лежат в $L_s(E^n)$, и так как $|T|_{s,p'}$ конечно, то Th_j принадлежит $L_{p'}(E^n)$. Если положить $a=F_j$ на E^n_+ и $a=0$ в остальной части E^n, то мы тем самым получаем, что функция, определяемая равенством (III), лежит в $L_{p'}(E^n)$, ч. т. д.

2. Следствие. *Пусть $n\geqslant 1$ и E^n_+ — полупространство евклидова n-мерного пространства E^n_+, определяемое соотношением*

$$E^n_+=\{x\in E^n \mid x_1>0\}.$$

Пусть $\infty\geqslant p'\geqslant p\geqslant 1$ и $k\geqslant 1$ — целое число, причем

$$\frac{1}{p'}>\frac{1}{p}-\frac{k}{n}.$$

Предположим также, что F — распределение, определенное в E^n_+ и имеющее ограниченный носитель. Тогда если каждая производная F порядка k принадлежит $L_p(E^n_+)$, то F лежит в $L_{p'}(E^n_+)$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon=(p')^{-1}-p^{-1}+kn^{-1}$, а числа $p=p_0$, p_1, p_2, $\ldots$, $p_k=p'$ определяются равенствами

$$\frac{1}{p_{j+1}}=\frac{1}{p_j}-\frac{1}{n}+\frac{\varepsilon}{k}, \qquad j=0, \ldots, k-1.$$

Тогда по лемме 1 все производные F порядка $k-1$ принадлежат $L_{p_1}(E^n_+)$, все производные F порядка $k-2$ принадлежат $L_{p_2}(E^n_+)$, $\ldots$, и, наконец, F принадлежит $L_{p_n}(E^n_+)=L_{p'}(E^n_+)$, ч. т. д.

Замечание. По тем же соображениям легко видеть, что лемма 1 и следствие 2 остаются справедливыми, если область E^n_+ заменить любой неограниченной областью E_0, обладающей следующим свойством:

На единичной сфере в E^n существует открытое множество U, такое, что всякая прямая l, параллельная прямой, проходящей через начало координат и некоторую точку множества U, пересекает границу области E_0 не более чем в одной точке.

Кроме того, если воспользоваться неравенствами Торина, рассмотренными в § XI.11, то можно показать, что если в лемме 1 и следствии 2 $\infty \geqslant p' \geqslant p > 1$, то эти результаты могут быть усилены, а именно $F \in L_{p'}(E_+^n)$, если

$$\frac{1}{p'} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$$

в случае леммы 1 и если

$$\frac{1}{p'} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$$

в случае следствия 2.

Теперь мы дадим более сильный результат Соболева, применимый к тому случаю (в условиях следствия 2), когда $p^{-1} - n^{-1}$ отрицательно.

3. Лемма. *Пусть $n \geqslant 1$ и E_+^n обозначает полупространство евклидова n-мерного пространства E^n, определяемое соотношением*

$$E_+^n = \{x \in E^n \mid x_1 > 0\}.$$

Пусть $\infty \geqslant p \geqslant 1$, а $k \geqslant 1$ и $m \geqslant 0$ — целые числа, причем

$$m < k - \frac{n}{p}.$$

Пусть F — распределение на E_+^n, имеющее ограниченный носитель. Тогда если все частные производные F порядка k принадлежат $L_p(E_+^n)$, то все частные производные F порядка не выше m непрерывны в замыкании E_+^n.

Доказательство. В силу следствия 2 и неравенства Гёльдера каждая $(k-m)$-я производная любой l-й производной F принадлежит $L_p(E_+^n)$ (и имеет компактный носитель) при $l \leqslant m$. Поэтому достаточно доказать лемму в частном случае $m = 0$. В силу следствия 2 каждая производная g порядка 1 распределения F принадлежит $L_{p'}(E_+^n)$ (и имеет компактный носитель) для всякого p', удовлетворяющего неравенству

$$\text{(I)} \qquad \frac{1}{p'} > \frac{1}{p} - \frac{k-1}{n}.$$

Если p' выбрано так, что $1 < p' < \infty$, и выполняются (I) и соотношение

$$0 < 1 - \frac{n}{p'},$$

то отсюда вытекает, что настоящую лемму достаточно доказать в частном случае $k=1$, $m=0$. Поэтому в оставшейся части доказательства мы будем считать, что $k=1$, $m=0$.

Наше предположение тогда состоит в том, что каждая производная F порядка 1 принадлежит $L_p(E^n_+)$, где

$$0<1-\frac{n}{p},$$

и должно быть доказано, что F непрерывна в замыкании E^n_+. По лемме 1 F является функцией из $L_\infty(E^n_+)$.

Пусть функции h_j и F_j определены так же, как и в доказательстве леммы 1; вспомним, что $h_j \in L_s(E^n)$, если $1 \leqslant s < n/(n-1)$. Так как $p>n$, то число q, определяемое равенством $p^{-1}+q^{-1}=1$, лежит в интервале $1 \leqslant q < n/(n-1)$, и потому $h_j \in L_q(E^n)$. Поскольку $F_j \in L_p(E^n_+)$, то из неравенства Гёльдера вытекает, что $F_j(\cdot)h_j(\cdot)$ принадлежит $L_1(E^n_+)$. Элементарная замена переменной дает

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{E^n_+} F_j(x-y)\,h_j(y)\,dy = \sum_{j=1}^{n} \int_{E^n_+} F_j(y)\,h_j(x-y)\,dy.$$

Таким образом, для функции $g \in C_0^\infty(E^n_+)$ мы имеем

$$\begin{aligned}
&\int_{E^n_+} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \int_{E^n_+} F_j(x-y)\,h_j(y)\,dy \right\} g(x)\,dx = \\
&= \sum_{j=1}^{n} \int_{E^n_+} \left\{ \int_{E^n_+} F_j(y)\,h_j(x-y)\,g(x)\,dx \right\} dy = \\
&= -\sum_{j=1}^{n} F\left(\frac{\partial}{\partial y_j} \int_{E^n_+} h_j(x-y)\,g(x)\,dx \right) = \\
&= -\sum_{j=1}^{n} F\left(\frac{\partial}{\partial y_j} \int_{E^n_+} h_j(x)\,g(y+x)\,dx \right) = \\
&= F\left(-\sum_{j=1}^{n} \int_{E^n_+} \frac{\partial}{\partial y_j} h_j(x)\,g(y+x)\,dx \right) = \\
&= -F\left(\sum_{j=1}^{n} \int_{E^n_+} h_j(x)\,\frac{\partial g}{\partial x_j}(y+x)\,dx \right) = -F(g);
\end{aligned}$$

в этой цепочке равенств мы использовали тот факт, что h_j лежит в $L_q(E^n)$, неравенство Гёльдера, лемму X.3.1(a) и теорему Фубини, чтобы оправдать изменение порядка интегрирования в первом равенстве. Определения 3.4 и 3.5(a) использовались для получения второго равенства; элементарная замена переменной — для получения третьего равенства; те факты, что $h_j \in L_1(E^n)$ и $g \in C_0^\infty(E^n)$, — для получения четвертого равенства и соотношение (I) леммы — для получения последнего равенства. Таким образом, по определению 3.4 распределение F соответствует функции

$$\text{(II)} \qquad f(x) = \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{E_+^n} F_j(x+y)\, h_j(y)\, dy.$$

Заметим, что n-мерный аналог леммы XI.3.1(f) и неравенство Гёльдера показывают, что эта функция всюду определена в E_+^n, непрерывна по x и имеет единственное непрерывное продолжение на замыкание $\overline{E}_+^n$, ч. т. д.

4. Определение. Пусть p — точка подмножества A евклидова n-мерного пространства E^n. Множество A называется *гладким вблизи p*, если существуют окрестность U точки p и отображение φ окрестности U на шаровую окрестность V начала координат, такие, что

(I) φ взаимно однозначно, бесконечно дифференцируемо, и φ^{-1} бесконечно дифференцируемо,

(II) $\varphi(AU) = V \cap \{x \in E^n \mid x_1 = 0\}$.

Если множество A гладко вблизи каждой своей точки, то оно называется *гладким*, или *гладкой поверхностью*.

В терминах этого определения мы можем сформулировать теорему Соболева в общем случае.

$\longrightarrow$ 5. Теорема. *Пусть $n \geqslant 1$, а D — ограниченное открытое множество в евклидовом пространстве E^n. Предположим, что граница D является гладкой поверхностью и что никакая точка границы D не лежит внутри замыкания D. Пусть $k \geqslant 1$, $m \geqslant 0$ — целые числа, $\infty \geqslant p \geqslant 1$, $\infty \geqslant p' \geqslant 1$ и $1 > \varepsilon > 0$. Пусть F — распределение в D и каждая производная F порядка не выше k принадлежит $L_p(D)$. Тогда если*

(I) $\dfrac{1}{p'} > \dfrac{1}{p} - \dfrac{k}{n}$,

то F принадлежит $L_{p'}(D)$; если же

(II) $m < k - \dfrac{n}{p}$,

то каждая производная F порядка не выше m непрерывна в замыкании D.

Доказательство. Покроем замыкание множества D конечным набором ограниченных открытых множеств U, каждое из которых либо не пересекается с границей D, либо диффеоморфно шаровой окрестности V начала координат в E^n, такой, как в определении 4. Пусть $\{h_j\}$, $j=1, \ldots, N$, — такое семейство неотрицательных функций в $C_0^\infty(E^n)$, что $\sum_{j=1}^{N} h_j(x) = 1$ для x из некоторой окрестности замыкания множества D и каждая функция h_j обращается в нуль вне компактного подмножества некоторого множества этого покрытия (см. лемму 2.3). Пусть h_j — функция из этого разбиения единицы с носителем в U. Мы покажем, что если выполнено (I), то h_jF лежит в $L_p(D)$, в то время как при выполнении (II) каждая производная h_jF порядка не выше m непрерывна в замыкании D. Отсюда, очевидно, будет следовать справедливость настоящей теоремы.

Сначала предположим, что U не пересекается с границей D. Тогда h_jF — распределение, носитель которого является компактным множеством, содержащимся в U (см. лемму 3.13(IV)). Из леммы 3.6 следует, что каждая производная h_jF порядка не выше k принадлежит $L_p(E^n)$. Сдвигая E^n достаточно далеко вправо вдоль x_1-оси (см. леммы 3.47 и 3.48), мы можем считать без ограничения общности, что U содержится в множестве E_+^n следствия 2 и леммы 3. Тогда по лемме 3.12 h_jF можно рассматривать как распределение в E_+^n, и наше утверждение вытекает из следствия 2 и леммы 3.

Рассмотрим теперь тот случай, когда U пересекается с границей D, так что существует взаимно однозначное отображение φ окрестности U на шаровую окрестность V начала координат в E^n, причем можно считать, что φ обладает следующими свойствами:

(I) φ и φ^{-1} — бесконечно дифференцируемые отображения;

(II) $\varphi(AU) = V \cap \{x \in E^n \mid x_1 = 0\}$, где A обозначает границу D.

Так как по предположению ни одна точка из V, кроме точек из $\varphi(AU)$, не принадлежит границе $\varphi(UD)$ и ни одна точка границы D не является внутренней в замыкании D, то отсюда вытекает, что $\varphi(UD)$ должно совпадать с одним из полушаров $V_+ = \{x \in V \mid x_1 > 0\}$ или $V_- = \{x \in V \mid x_1 < 0\}$. Для определенности мы будем рассматривать случай $\varphi(UD) = \{x \in V \mid x_1 < 0\}$; другой случай эквивалентен этому ввиду возможности замены переменных. По леммам 3.13(IV) и 3.45(с) и определению 3.11 распределение $(h_jF) \circ \varphi^{-1}$ является распределением в V_+, замыкание носителя которого в E^n не пересекается со сферической частью границы V_+

и все производные которого порядка не выше k принадлежат $L_p(V_+)$ в силу лемм 3.47 и 3.48. Следовательно, по лемме 3.12 $(h_jF)\circ\varphi^{-1}$ можно рассматривать как распределение в E_+^n, все производные которого порядка не выше k принадлежат $L_p(E_+^n)$. По лемме 3 распределение $(h_jF)\circ\varphi^{-1}$ и все его производные порядка не выше m непрерывны в замыкании V_+. Отсюда в силу леммы 3.47 ясно, что $h_jF=(h_jF)\circ\varphi^{-1}\circ\varphi$ и все его производные порядка не выше m непрерывны в замыкании D.

Так как $f=\sum_{j=1}^{N} h_jf$, то теорема теперь вытекает из того очевидного факта, что и $L_{p'}(D)$, и множество всех функций, производные которых порядка не выше m непрерывны в замыкании D, являются линейными пространствами. Теорема доказана.

Замечание. Легко показать (используя первую часть замечания, сделанного после следствия 2, и тот факт, что аналогичные соображения имеют место и в связи с леммой 3), что теорема 5 справедлива даже если граница D содержит «углы», «ребра» и т. д. Эти конфигурации могут быть описаны (как и в определении 4) как конфигурации, диффеоморфные локальной конфигурации в точке пересечения конечного числа гиперплоскостей в E^n.

6. Следствие. *Пусть I — ограниченное открытое подмножество в E^n, граница Σ которого является гладкой поверхностью. Предположим, что никакая точка Σ не принадлежит внутренности $\bar{I}$. Пусть $1\leqslant p,\ q<\infty$ и k — такое положительное целое число, что*

$$\frac{1}{q}>\frac{1}{p}-\frac{k}{n}.$$

Пусть $f,\ f_m,\ m=1, 2, \ldots,$ — такие определенные на I функции, что

$$\lim_{m\to\infty}\int_I |\partial^J f_m(x)-\partial^J f(x)|^p\,dx=0,\quad |J|\leqslant k.$$

Тогда

$$\lim_{m\to\infty}\int_I |f_m(x)-f(x)|^q\,dx=0.$$

Более того, существует постоянная K, зависящая от I, q, p, k, n, но не зависящая от f, такая, что

$$\left\{\int_I |f(x)|^q\,dx\right\}^{1/q}\leqslant K\sum_{|J|\leqslant k}\left\{\int_I |\partial^J f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p}.$$

Если же

$$\frac{1}{p} < \frac{1}{n},$$

то мы имеем

$$\lim_{m\to\infty} \operatorname{vrai}\sup_{x\in I} |f_m(x) - f(x)| = 0,$$

и существует постоянная K, зависящая от I, q, p, k, n, но не зависящая от f, такая, что

$$\operatorname{vrai}\sup_{x\in I} |f(x)| \leqslant K \sum_{|J|\leqslant k} \left\{ \int_I |\partial^J f(x)|^p \, dx \right\}^{1/p}.$$

Доказательство. Пусть через $L_p^k(I)$ обозначено подпространство $L_p(I)$, состоящее из всех функций f, таких, что $\partial^J f \in L_p(I)$, если $|J| \leqslant k$, причем производные понимаются в смысле теории распределений. Положим

$$\text{(I)} \qquad |f|_{(p,\,k)} = \sum_{|J|\leqslant k} \left\{ \int_I |\partial^J f(x)|^p \, dx \right\}^{1/p}.$$

Тогда $L_p^k(I)$ становится B-пространством. Действительно, если $\{f_m\}$ — фундаментальная последовательность в $L_p^k(I)$, то в силу (I) ясно, что $\{\partial^J f_m\}$ — фундаментальная последовательность в $L_p(I)$ при $|J| \leqslant k$, а потому существуют функции g, g^J в $L_p(I)$, такие, что $\lim_{m\to\infty} |f_m - g|_p = 0$ и $\lim_{m\to\infty} |\partial^J f_m - g^J|_p = 0$. Тогда из определения 3.26 следует, что $\lim_{m\to\infty} f_m = g$ и $\lim_{m\to\infty} \partial^J f_m = g^J$ при $|J| \leqslant k$ в смысле теории распределений, так что $g^J = \partial^J g$ по лемме 3.27. Таким образом, $g \in L_p^k(I)$ и $\lim_{m\to\infty} |f_m - g|_{(p,\,k)} = 0$ в силу (I).

По теореме 5 мы имеем $L_p^k(I) \subseteq L_q(I)$, если $q^{-1} > p^{-1} - kn^{-1}$, и $L_p^k(I) \subseteq L_\infty(I)$, если $p^{-1} > kn^{-1}$. Тождественное отображение $f \to f$, как легко видеть, является замкнутым отображением пространства $L_p^k(I)$ в $L_q(I)$ в первом случае и пространства $L_p^k(I)$ в $L_\infty(I)$ — во втором. Таким образом, настоящая лемма вытекает непосредственно из теоремы о замкнутом графике (II.2.4).

7. Лемма. *Пусть $p \geqslant 1$, а F принадлежит $L_p(E^n)$ и обращается в нуль вне компактного множества K. Предположим, что для некоторого положительного целого числа k функции $\partial^J F$ лежат в $L_p(E^n)$ при $|J| \leqslant k$ (частные производные понимаются*

в смысле теории распределений) и

$$\sum_{|J|\leqslant k} \int_{E^n} |\partial^J F(x)|^p \, dx \leqslant 1.$$

Пусть $1 \leqslant q \leqslant \infty$ *и* $q^{-1} > p^{-1} - kn^{-1}$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\delta > 0$, *зависящее лишь от* K, ε, q *и* p, *но не зависящее от* F, *что для* $y \in E^n$ *и* $|y| < \delta$ *выполнено неравенство*

$$|F(\cdot) - F(\cdot + y)|_q < \varepsilon.$$

Доказательство. Делая в случае необходимости сдвиг координат, мы можем без ограничения общности считать, что K является подмножеством множества $E^n_\delta = \{x \in E^n \mid x_1 > \delta\}$. Если это так, то, как показано в первых трех абзацах доказательства леммы 1, существуют функции h_j, определенные в E^n, обращающиеся в нуль вне $E^n_+ = \{x \in E^n \mid x_1 > 0\}$, и такие, что

$$\text{(I)} \qquad \partial^J F(x) = \sum_{j=1}^{n} \int_{E^n} \partial_j \partial^J F(u) \, h_j(u - x) \, du,$$

$$\text{(II)} \qquad \partial^J F(x + y) = \sum_{j=1}^{n} \int_{E^n} \partial_j \partial^J F(u + y) \, h_j(u - x) \, du$$

для $|J| \leqslant k - 1$, $x \in E^n_+$ и $|y| < \delta$. Сами функции h_j, как показано в доказательстве леммы 1, принадлежат пространству $L_s(E^n)$ для каждого s из интервала $1 \leqslant s < n/(n-1)$.

Из (I) и (II) непосредственно вытекает, что

$$\text{(III)} \qquad \partial^J (F(x) - F(x + y)) = \sum_{j=1}^{n} \int_{E^n} \partial_j \partial^J F(u) \{h_j(u - x) - h_j(u - x - y)\} \, du$$

при $|J| \leqslant k - 1$, $x \in E^n_+$ и $|y| < \delta$.

Далее, если $a \in L_p(E^n)$, а $b \in L_1(E^n)$, то при $p = \infty$ или $p = 1$ функция

$$\text{(IV)} \qquad c(u) = \int_{E^n} a(x) \, b(x - u) \, dx$$

принадлежит $L_p(E^n)$ и $|c|_p \leqslant |a|_p |b|_1$ в силу n-мерного варианта леммы XI.3.1. Следовательно, по теореме Рисса о выпуклости (VI.10.11) это утверждение верно для всех p, таких, что

$1 \leqslant p \leqslant \infty$. Если $a \in L_p(E^n)$, а $b \in L_{\hat{p}}(E^n)$, где $p^{-1} + \hat{p}^{-1} = 1$, то функция c равенства (IV) принадлежит $L_\infty(E^n)$ и $|c|_\infty \leqslant |a|_p |b|_{\hat{p}}$ по неравенству Гёльдера (III.3.2). Таким образом, по теореме Рисса о выпуклости (VI.10.11), если $a \in L_p(E^n)$ и $b \in L_s(E^n)$ при любом s, $1 \leqslant s < n/(n-1)$, мы имеем $c \in L_{p'}(E^n)$ и $|c|_{p'} \leqslant |a|_p |b|_s$, где $p' = p'(s)$ определяется равенством

$$\frac{1}{p'} = \frac{1}{p} + \frac{1}{s} - 1.$$

Таким образом, из соотношения (III) и нашего предположения вытекает, что

$$\text{(V)} \quad |\partial^J \{F(\cdot) - F(\cdot + y)\}|_p \leqslant \sum_{j=1}^{n} \left\{ \int_{E^n} |h_j(u) - h_j(u-y)|^s \, du \right\}^{1/s},$$

$|J| < k-1$, при $|y| < \delta$ и $1 \leqslant s < n/(n-1)$. В силу следствия 6 отсюда вытекает, что если $q_0^{-1} > (p')^{-1} - (k-1)n^{-1}$, то существует постоянная $K(q_0, p')$, зависящая лишь от q_0 и p', такая, что

$$\text{(VI)} \quad |F(\cdot) - F(\cdot + y)|_{q_0} \leqslant$$
$$\leqslant K(q_0, p') \sum_{j=1}^{n} \left\{ \int_{E^n} |h_j(u) - h_j(u-y)|^s \, du \right\}^{1/s},$$

где $1 \leqslant q_0 \leqslant \infty$. Пусть теперь q удовлетворяет предположениям настоящей леммы. Тогда ясно, что можно выбрать некоторое определенное $s = s_0$ так, что $q^{-1} > \{p'(s_0)\}^{-1} - (k-1)n^{-1}$, и тогда заключение леммы вытекает непосредственно из формулы (VI) и леммы IV.8.21.

8. Лемма. *Пусть I — ограниченное открытое подмножество в E^n, граница Σ которого является гладкой поверхностью. Предположим, что ни одна точка Σ не принадлежит внутренности $\bar{I}$. Пусть $1 \leqslant p < \infty$, $1 \leqslant q < \infty$, k — положительное целое число и*

$$\frac{1}{q} > \frac{1}{p} - \frac{k}{n}.$$

Тогда если $\{f_m\}$ — такая последовательность функций, определенных на I, что

$$\int_I |\partial^J f_m(x)|^p \, dx$$

ограничен по m при $|J| \leqslant k$, то $\{f_m\}$ обладает подпоследовательностью, сходящейся по норме $L_q(I)$.

Доказательство. Пусть $\{K_m\}$ — возрастающая последовательность компактных подмножеств из I, объединение которых есть все I. Используя лемму 2.1, выберем последовательность $\{\varphi_m\}$ функций в $C_0^\infty(I)$, такую, что $\varphi_m(x)=1$ для $x\in K$ и $0\leqslant\varphi_m(x)\leqslant 1$ для всех x. Тогда в силу леммы 3.22 ясно, что

$$\int_I |\partial^J\{\varphi_j(x)f_m(x)\}|^p\,dx$$

ограничен по m при каждом фиксированном j. Из лемм 3.12 и 3.13 вытекает, что, положив $\varphi_j(x)f_m(x)=0$ для $x\notin I$, мы можем рассматривать $\varphi_j f_m$ как распределение, определенное на всем E^n; к нему будет применена предыдущая лемма. В силу этой леммы и теоремы IV.8.21 мы получаем, что для каждого $j<\infty$ последовательность $\{f_m|K_j\}$ обладает подпоследовательностью, сходящейся по норме $L_p(K_j)$. Применяя канторовский диагональный процесс, мы можем найти такую подпоследовательность $\{f_{m_i}\}$, что $\{f_{m_i}|K_j\}$ сходится по норме $L_p(K_j)$ при каждом $j\geqslant 0$. Для простоты обозначений мы будем в дальнейшем предполагать, что последовательность $\{f_m\}$ сама обладает этим свойством.

Так как $q^{-1}>p^{-1}-kn^{-1}$, то можно выбрать $q_1>q$ так, чтобы $q_1^{-1}>j^{-1}-kn^{-1}$. Тогда в силу следствия 6 нормы $|f_m|_{q_1}$ ограничены некоторой постоянной A. Следовательно, по неравенству Гёльдера (III.3.2) мы имеем

$$\text{(I)}\qquad \int_{I-K_j} |f_m(x)|^q\,dx\leqslant A^q\{\mu(I-K_j)\}^{1-q/q_1},$$

где $\mu(e)$ обозначает меру Лебега борелевского множества e. Из (I) вытекает, что

$$\lim_{j\to\infty}\int_{I-K_j}|f_m(x)|^q\,dx=0$$

равномерно по m. Так как мы уже видели, что

$$\lim_{m,\,m_1\to\infty}\int_{K_j}|f_m(x)-f_{m_1}(x)|^q\,dx=0$$

при каждом j, то отсюда вытекает, что

$$\lim_{m,\,m_1\to\infty}\int_I|f_m(x)-f_{m_1}(x)|^q\,dx=0,$$

ч. т. д.

9. Следствие. *Заключения следствия 6 и леммы 8 останутся верными, если открытое множество I в них заменить кубом*

$$C=\{x\in E^n \mid |x_j|<\pi, \quad j=1, \ldots, n\}.$$

Доказательство. В замечании, следующем за теоремой 5, отмечалось, что теорема 5 остается справедливой, даже если граница области D в этой теореме содержит углы, ребра и т. п. Используя это замечание, можно распространить доказательства следствия 6 и леммы 8 и на настоящий случай. Предоставляем читателю довести до конца доказательство этого следствия.

10. Следствие. *Пусть C — либо ограниченная область в E^n, граница Σ которой является гладкой поверхностью и не содержит внутренних точек замыкания C, либо — куб*

$$C=\{x\in E^n \mid |x_i|<\pi, \qquad i=1, \ldots, n\}$$

в E^n, а p — положительное целое чило. Тогда естественное тождественное отображение $H^{(p)}(C)$ в $H^{(p-1)}(C)$ является компактным линейным отображением.

Доказательство. Пусть $\{f_n\}$ — ограниченная последовательность в $H^p(C)$. Мы должны показать, что существует подпоследовательность $\{f_{m_i}\}$ последовательности $\{f_m\}$, такая, что $\{\partial^J f_{m_i}\}$ сходится в $L_2(I)$ при каждом J, $|J|\leqslant p-1$. Так как $\{\partial_j\partial^J f_m\}$ ограничена в $L_2(C)$ при каждом J, $|J|\leqslant p-1$, и каждом j, $1\leqslant j\leqslant n$, то ясно, что лемма является следствием частного случая $p=1$. Однако случай $p=1$ является частным случаем $k=1$, $p=2$, либо леммы 8, либо предыдущего следствия.

11. Следствие. *Пусть I — ограниченная область в E^n, а p — натуральное число. Тогда естественное тождественное отображение пространства $H_0^{(p)}(I)$ в $H_0^{(p-1)}(I)$ является компактным линейным отображением.*

Доказательство. Пусть $\{f_n\}$ — ограниченная последовательность в $H_0^{(p)}(I)$. Мы должны показать, что существует подпоследовательность $\{f_n\}$, сходящаяся в топологии $H_0^{(p-1)}(I)$. Так как $C_0^\infty(I)$ плотно в $H_0^{(p)}(I)$ по определению $H_0^{(p)}(I)$, то можно найти последовательность $\{g_n\}$ элементов из $C_0^\infty(I)$, такую, что $|g_n-f_n|_{(p)}<1/n$, а отсюда вытекает, что $|g_n-f_n|_{(p-1)}<1/n$ (см. определение 3.15). Таким образом, достаточно показать, что $\{g_n\}$ обладает подпоследовательностью, сходящейся в топологии $H_0^{(p-1)}(I)$, т. е. мы можем (и будем) без ограничения общности предполагать, что $f_n\in C_0^\infty(I)$ для всех n. В этом случае мы можем положить $f_n(x)=0$ для $x \notin I$, так что $f_n \in C_0^\infty(E^n)$. Мы хотим показать что для каждого J, $|J| \leqslant p-1$, последовательность $\partial^J f_n$ обладает подпоследовательностью, сходящейся в $L_2(I)$. Так как $\{\partial_j \partial^J f_n\}$ ограничена в $L_2(I)$ при каждом J, $|J| \leqslant p-1$, и j, $1 \leqslant j \leqslant n$, по предположению, то ясно, что лемма будет доказана, если установить следующее предложение.

Пусть $\{h_m\}$ — последовательность функций из $C_0^\infty(E^n)$, обращающихся в нуль вне I. Предположим, что $|h_m|_{(1)} \leqslant 1$, $m \geqslant 1$. Тогда $\{h_m\}$ содержит подпоследовательность, сходящуюся в $L_2(I)$.

Для доказательства этого предложения выберем куб

$$C=\{x \in E^n \mid |x_i| < a, \qquad i=1, \ldots, n\},$$

где a настолько велико, что $C \supseteq I$. Производя деление координат (см. лемму 3.48), мы будем без ограничения общности предполагать, что $a=\pi$, а тогда настоящая лемма сразу же вытекает из предыдущего следствия.

12. Лемма. *Пусть I — ограниченная область в E^n, p — натуральное число и $\varepsilon > 0$. Тогда существует конечная положительная постоянная $K(\varepsilon)$, такая, что*

$$|f|_{(p)} |f|_{(p-1)} \leqslant \varepsilon |f|_{(p)}^2 + K(\varepsilon) |f|^2, \qquad f \in C_0^\infty(I).$$

Доказательство. Предположим, что лемма неверна. Тогда существует последовательность $\{f_m\}$ в $C_0^\infty(I)$, такая, что

$$\text{(I)} \qquad |f_m|_{(p)} |f_m|_{(p-1)} \geqslant \varepsilon |f_m|_{(p)}^2 + m |f_m|^2.$$

Умножая $\{f_m\}$ на соответствующую последовательность постоянных, мы можем, очевидно, без ограничения общности предполагать, что $|f_m|_{(p)}=1$, $m \geqslant 1$. Тогда ясно, что $|f_m| \longrightarrow 0$ при $m \longrightarrow \infty$. В силу предыдущего следствия мы можем без ограничения общности считать, что $\{f_m\}$ сходится в топологии $H_0^{(p-1)}(I)$ к элементу g. Тогда $|f_m - g|_{(0)} \longrightarrow 0$ при $m \longrightarrow \infty$, и так как $|f_m|_{(0)} \longrightarrow 0$ при $m \longrightarrow \infty$, то $g=0$. Таким образом, $|f_m|_{(p-1)} \longrightarrow 0$ при $m \longrightarrow \infty$. Поскольку в силу (I) $|f_m|_{(p-1)} \geqslant \varepsilon > 0$ для всех m, то мы пришли к противоречию.

Теоремы Соболева позволяют нам завершить изложение теории распределений освещением некоторых важных ее сторон. Две следующие леммы дают полезную информацию о структуре множества $D(I)$ распределений.

13. Лемма. *Пусть I — открытое подмножество в E^n и F — распределение в I, носитель которого является компактным подмножеством I. Тогда F принадлежит $H^{(k)}(I)$ при некотором достаточно большом отрицательном k.*

Доказательство. Пусть C — компактный носитель распределения F, а φ — существующая в силу леммы 2.2 функция из $C_0^\infty(I)$, тождественно равная единице в окрестности C. Если наше утверждение ложно, то из определения 3.17 вытекает, что для каждого $n > 0$ существует функция $\psi_n \in C_0^\infty(I)$, такая, что $|\psi_n|_{(n)} \leqslant n^{-1}$, но $|F(\psi_n)| \geqslant 1$. Далее, $\psi_n = \varphi\psi_n$ в окрестности носителя F, так что (см. определение 3.11) $F(\psi_n) = F(\psi_n\varphi)$. С другой стороны, в силу леммы 3.22 ясно, что $|\psi_n\varphi|_{(k)} \to 0$ при $n \to \infty$ для каждого k. Мы можем поэтому воспользоваться второй частью следствия 6 для доказательства того, что $\partial^J\psi_n\varphi \to 0$ равномерно в I для всех J. Так как функции $\psi_n g$, очевидно, обращаются в нуль вне фиксированного компактного подмножества в I, то тем самым $\psi_n\varphi \rightrightarrows 0$ при $n \to \infty$ в смысле определения 3.1. Таким образом, по определению 3.1, $F(\psi_n\varphi) \to 0$; это противоречие и доказывает лемму.

Точно таким же способом можно доказать следующее утверждение.

14. Лемма. *Пусть I — прямоугольный параллелепипед в E^n, а F — распределение в $D_\pi(I)$. Тогда $F \in H_\pi^{(k)}(I)$ при некотором достаточно большом отрицательном k.*

Предоставляем читателю в качестве упражнения произвести необходимые изменения в доказательстве леммы 13 и получить лемму 14.

Леммы 13 и 15 вместе взятые позволяют глубоко проникнуть в природу распределений вообще.

15. Лемма. *Пусть F — распределение в открытом подмножестве $I \subset E^n$, $\{I_m\}$ — последовательность открытых подмножеств из I, такая, что их объединение есть все I, $\bar{I}_m$ — компакты, содержащиеся в I, и $\bar{I}_m \cap \bar{I}_p = \varnothing$, кроме случая $|m-p| = 0, 1$. Тогда F может быть представлено в виде суммы $F = \sum_{m=1}^{\infty} F_m$ сходящегося бесконечного ряда распределений, причем носитель каждого F_m является подмножеством соответствующего I_m.*

Доказательство. Легко видеть, что можно найти последовательность $\{C_j\}$ компактных множеств $C_j \subseteq I_j$, $j = 1, \ldots, n$, такую, что $\bigcup_{j=1}^{n} C_j = I$. По лемме 2.1 выберем функции $\psi_j \in C_0^\infty(I_j)$ так, чтобы $0 \leqslant \psi_j(x) \leqslant 1$ для всех x и $\psi_j(x) = 1$ для $x \in C_j$. Тогда очевидно, что ряд

$$\psi(x)=\sum_{j=1}^{\infty}\psi_j(x)$$

сходится к функции $\psi\in C^{\infty}(I)$, которая всюду положительна. Таким образом, если положить $\eta_j(x)=\psi(x)^{-1}\psi_j(x)$, то $\eta_j\in C_0^{\infty}(I_j)$ и

$$\sum_{j=1}^{\infty}\eta_j(x)=1.$$

Так как лишь конечное число членов этого ряда не обращается тождественно в нуль на любом компактном подмножестве в I, то ясно, что

$$\varphi=\lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{m}\eta_j\varphi,\qquad \varphi\in C_0^{\infty}(I).$$

Тем самым по определениям 3.5 и 3.26

$$F=\sum_{j=1}^{\infty}\eta_jF,\qquad F\in D(I).$$

Поскольку в силу леммы 3.13 носителем η_jF является подмножество из I_j, доказательство леммы закончено.

16. Следствие. *Пусть I — ограниченное открытое подмножество в E^n. Тогда подпространство $C_0^{\infty}(I)$ из $D(I)$ плотно в $D(I)$.*

Доказательство. Пусть F лежит в $D(I)$. Мы хотим построить последовательность $\{\varphi_m\}$ элементов подпространства $C_0^{\infty}(I)$ в $D(I)$, такую, что $\varphi_m\to F$ при $m\to\infty$. По лемме 14 существует последовательность $\{F_m\}$ элементов из $D(I)$ (каждый из которых имеет носителем компактное подмножество $C_m\subset I$), такая, что $F_m\to F$ при $m\to\infty$. Поэтому мы можем, очевидно, без ограничения общности считать, что C, носитель F, является компактным подмножеством I. Если I содержится в кубе D, то, как вытекает из лемм 13, 3.43 и 3.12, существуют единственное расширение F до распределения G на $D_\pi(D)$, носителем которого является C, и последовательность элементов $\hat{\varphi}_m$ в $C_0^{\infty}(\overline{D})$, такая, что $\hat{\varphi}_m\to G$ при $m\to\infty$. Пусть $\psi\in C_0^{\infty}(I)$ и $\psi(x)=1$ для всех x из некоторой окрестности C. Тогда $\tilde{\varphi}_m=\psi\hat{\varphi}_m$ принадлежит $C_0^{\infty}(I)$. Ясно (см. 3.22), что $\tilde{\varphi}_m\to\psi G=G$ при $m\to\infty$. Если $\varphi_m=\tilde{\varphi}_m\,|\,I$, то по лемме 3.23 $\varphi_m\to F=G\,|\,I$ при $m\to\infty$, ч. т. д.

17. Следствие. *Пусть I — ограниченное открытое подмножество в E^n, F лежит в $H^{(k)}(I)$, где k — неотрицательное целое*

число, а носитель C распределения F является компактным подмножеством в I. Тогда F принадлежит $H_0^{(k)}(I)$.

Доказательство. Пусть D — шар, содержащий I, а G — существующее в силу лемм 3.12 и 3.24 расширение F до распределения в $H^{(k)}(D)$, имеющего тот же носитель C. Пусть φ_m — построенная в предыдущей лемме последовательность из $C^\infty(\bar{D})$, такая, что $\varphi_m \to G$ в топологии $H^{(k)}(D)$ при $m \to \infty$. Используя лемму 2.1, построим функцию $\psi \in C_0^\infty(I)$, такую, что $\psi(x) = 1$ для всех x из некоторой окрестности C. Тогда по лемме 3.10 и определению 3.11 $\psi G = G$. Из леммы 3.22 вытекает, что $\varphi_m \psi \to G$ в топологии $H^{(k)}(D)$ при $m \to \infty$. Следовательно, по лемме 3.23 $\varphi_m \psi \mid I \to F = G \mid I$ при $m \to \infty$, так что F принадлежит $H_0^{(k)}(I)$ по определению 3.15, ч. т. д.

В дальнейшем нам будет очень полезна лемма, которой мы заканчиваем этот параграф.

18. Лемма. *Пусть I — ограниченное открытое множество в E^n, граница Σ которого является гладкой поверхностью. Предположим, что ни одна точка из Σ не принадлежит внутренности $\bar{I}$. Пусть p — неотрицательное целое число. Тогда подпространство $C^\infty(\bar{I})$ в $H^{(p)}(I)$ плотно в $H^{(p)}(I)$.*

Доказательство. Пусть $f \in H^{(p)}(I)$. Мы хотим показать, что f можно приблизить сколь угодно близко по норме $H^{(p)}(I)$ элементом из $C^\infty(\bar{I})$. Пусть $\{U_j\}$, $j = 1, \ldots, m$, — произвольное покрытие $\bar{I}$ конечным набором окрестностей точек из $\bar{I}$. Используя лемму 2.4, выберем в $C^\infty(E^n)$ функции $\{f_j\}$, $j = 1, \ldots, k$, так, чтобы каждая функция f_j обращалась в нуль вне компактного подмножества какой-нибудь из окрестностей $\{U_i\}$, и $\sum_{j=1}^{k} f_j(x) = 1$ для x из некоторой окрестности $\bar{I}$. Предположим, что семейство окрестностей выбрано так, что для каждого j существует отображение φ_j окрестности U_j в единичный шар V с центром в начале координат E^n, обладающее следующими свойствами:

(I) φ_j взаимно однозначно, бесконечно дифференцируемо, и φ_j^{-1} тоже бесконечно дифференцируемо;

(II) если $U_j \cap \Sigma \neq \varnothing$, то $\varphi_j(U_j \cap \Sigma) = \{x \in V \mid x_1 = 0\}$.

По лемме 3.6 мы имеем $f = \sum_{j=1}^{k} f_j f$, причем в силу леммы 3.22 каждое отдельное слагаемое принадлежит $H^{(p)}(I)$. Следовательно, достаточно показать, что каждый элемент $f_j f$ можно приблизить сколь угодно близко по норме $H^{(p)}(I)$ элементом из $C^\infty(\bar{I})$. Для определенности положим $j=1$. Переходя от рассмотрения f к рассмотрению $f_1 f$, мы можем, не теряя при этом общности, предполагать, что f обращается в нуль вне компактного подмножества из U_1. Мы покажем, что $f \mid U_1 I$ является пределом по норме $H^{(p)}(U_1 I)$ последовательности $\{g_j\}$ функций из $C_0^\infty(U_1)$, откуда сразу будет вытекать наша лемма, если продолжить g_j до функции в $C_0^\infty(E^n)$, полагая $g_j(x)=0$ при $x \notin U_1$. Положим $f \mid U_1 I = \hat{f}$.

Нам нужно рассмотреть два случая.

(a) $U_1 \cap \Sigma = \varnothing$.

В этом случае ясно, что $U_1 \subseteq I$, и тем самым $\varphi_1(U_1 I) = V$.

(b) $\varphi_1(U_1 \cap \Sigma) = \{x \in V \mid x_1 = 0\}$.

В этом случае, так как ни одна точка из $\varphi_1(U_1 \cap I)$, кроме точек $\varphi_1(U_1 \cap \Sigma)$, не принадлежит границе $\varphi_1(U_1 \cap I)$ и так как из предположений леммы вытекает, что ни одна точка $\varphi_1(U_1 \cap \Sigma)$ не является внутренней в замыкании $\varphi_1(U_1 \cap I)$, мы приходим к выводу, что $\varphi_1(I \cap U_1)$ должно совпадать с одним из полушаров $V_+ = \{x \in V \mid x_1 > 0\}$ или $V_- = \{x \in V \mid x_1 < 0\}$. Для определенности предположим, что $\varphi_1(IU_1) = V_+$; второй случай эквивалентен этому ввиду возможности замены переменных.

Рассмотрим сначала случай (a). Используя лемму 3.33, распространим $\hat{f} \circ \varphi_1^{-1}$ до элемента $F \in H_\pi^{(p)}(C)$, носитель K которого совпадает с носителем $\hat{f} \circ \varphi_1^{-1}$; здесь и далее C обозначает куб

$$C = \{x \in E^n \mid |x_j| \leqslant \pi, \quad j = 1, \ldots, n\}.$$

По лемме 3.41 F является пределом по норме $H_\pi^{(p)}(C)$ последовательности элементов из $C_\pi^\infty(C)$. Таким образом, по лемме 3.23 $\hat{f} \circ \varphi_1^{-1}$ является пределом по норме $H^{(p)}(V)$ последовательности $\{h_m\}$ элементов из $C^\infty(\bar{V})$. Используя лемму 2.1, построим функцию $\psi \in C_0^\infty(V)$, такую, что $\psi(x) = 1$ для $x \in K$. Тогда в силу лемм 3.22 и 3.10 $\hat{f} \circ \varphi_1^{-1} = \psi(\hat{f} \circ \varphi_1^{-1}) = \lim\limits_{m \to \infty} \psi h_m$ по норме $H^{(p)}(V)$, так что в случае (a) мы показали, что $\hat{f} \circ \varphi_1^{-1}$ является пределом по норме $H^{(p)}(V)$ последовательности функций из $C_0^\infty(V)$. Таким образом, в случае (a) настоящая лемма вытекает непосредственно из леммы 3.48.

Рассмотрим теперь случай (b). Используя лемму 3.12, распространим $\hat{f} \circ \varphi_1^{-1}$ до элемента $F \in H^{(p)}(C_+)$, носитель K которого совпадает с носителем $\hat{f} \circ \varphi_1^{-1}$; здесь и далее C_+ обозначает цилиндр

$$C_+ = \{x \in E^n \mid 0 < x_1 < \infty, \ |x_j| < \pi, \quad j = 2, \ldots, n\}.$$

Для каждого ε, $0 < \varepsilon < \pi$, обозначим через τ_ε отображение E^n в себя, определяемое по формуле

$$\tau_\varepsilon[x_1, \ldots, x_n] = [x_1 - \varepsilon, x_2, x_3, \ldots, x_n].$$

В силу лемм 3.47 и 3.9 и по теореме IV.8.20

$$\lim_{\varepsilon\to 0} |\partial^J \{(F \circ \tau_\varepsilon^{-1}) \mid C_+\} - \partial^J F| = 0, \quad |J| \leqslant p.$$

Таким образом, по определению 3.15

$$\text{(I)} \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} |\{(F \circ \tau_\varepsilon^{-1}) \mid C_+\} - F|_{(p)} = 0.$$

По лемме 3.48, $F \circ \tau_\varepsilon^{-1}$ является элементом из $H^{(p)}(C_\varepsilon)$, где

$$C_\varepsilon = \{x \in E^n \mid -\varepsilon < x_1 < \infty, \quad |x_j| < \pi, \quad j = 2, \ldots, n\}.$$

По лемме 3.46 носителем K_ε распределения $F \circ \tau_\varepsilon^{-1}$ является множество $K_\varepsilon = \{x - [\varepsilon, 0, \ldots, 0] \mid x \in K\}$. Используя лемму 2.1, выберем функцию φ_ε в $C_0^\infty(C_\varepsilon)$ так, что $\varphi_\varepsilon(x) = 1$ для x из некоторой окрестности K, и положим $F_\varepsilon = \varphi_\varepsilon(F \circ \tau_\varepsilon^{-1})$. Тогда по лемме 3.13 F_ε имеет компактный носитель, являющийся подмножеством K_ε. Пусть L — множество вида

$$L = \{x \in E^n \mid \quad a < x_1 < b, \quad |x_j| < \pi, \quad j = 2, \ldots, n\},$$

содержащее множества K_ε при всех ε, $0 < \varepsilon < 1$, причем в дальнейшем мы предполагаем, что это условие на ε выполнено. По лемме 3.33 распространим F_ε до элемента $\hat{F}_\varepsilon \in H_\pi^{(p)}(L)$ с тем же носителем, что и у F_ε. По лемме 3.43 $\hat{F}_\varepsilon$ является пределом по норме $H_\pi^{(p)}(L)$ последовательности функций в $C_\pi^\infty(L)$. Следовательно, по лемме 3.22 $\varphi_\varepsilon \hat{F}_\varepsilon$ является пределом по норме $H^{(p)}(L)$ последовательности $\{\hat{g}_j\}$ функций из $C_0^\infty(L)$. Полагая $\hat{g}_j(x) = 0$ для $x \in C_\varepsilon - L$, получаем из определения 3.15, что $\varphi_\varepsilon F_\varepsilon$ является пределом по норме $H^{(p)}(C_\varepsilon)$ последовательности $\{\hat{g}_j\}$ элементов из $C_0^\infty(C_\varepsilon)$. Поэтому в силу леммы 3.23 $(\varphi_\varepsilon F_\varepsilon) \mid C_+ = \varphi_\varepsilon^2 (F \circ \tau_\varepsilon^{-1}) \mid C_+$ есть предел по норме $H^{(p)}(C_+)$ последовательности функций $\{g_j \mid C_+\}$. Тогда из (I) вытекает, что F является также пределом по норме $C^\infty(C_+)$ последовательности $\{h_j\}$ функций из $C_0^\infty(E^n)$. Пусть ψ — функция из $C_0^\infty(E^n)$, обращающаяся в нуль вне V и равная тождественно единице в некоторой окрестности носителя K распределения F. Тогда по лемме 3.22 $\hat{f} \circ \varphi_1^{-1}$ является пределом по норме $H^{(p)}(V_+)$ последовательности функций $\tilde{g}_j = \psi h_j \mid V_+$. Применяя лемму 3.48, завершаем доказательство леммы в случае (b).

5. Некоторые геометрические рассмотрения

Пусть I — область в E^n, граница B которой содержит часть Σ, являющуюся гладкой поверхностью. Предположим, что ни одна точка Σ не является внутренней точкой замыкания I. Условие обращения функции $f \in C(\bar{I})$ в нуль на Σ является типичным среди граничных условий, накладываемых на функции в теории граничных задач. Мы хотим в этом небольшом параграфе показать, как вводятся соответствующие понятия для производных высших порядков, и рассмотреть некоторые их элементарные свойства.

1. Определение. Пусть I — область в E^n, граница B которой содержит часть Σ, являющуюся гладкой поверхностью. Предположим, что ни одна точка Σ не является внутренней точкой замыкания I, и пусть k — натуральное число. Тогда если $f \in C^{k-1}(\bar{I})$ и $\partial^J f(x)$ обращаются в нуль для всех $x \in \Sigma$ и всех J, $|J| \leqslant k-1$, то мы будем говорить, что f *удовлетворяет условию Дирихле порядка k на Σ* или что f *и ее первые $k-1$ нормальных производных обращаются в нуль на Σ*, и будем писать

$$(\partial_\nu(\Sigma))^j f(x) = 0, \quad x \in \Sigma, \quad 0 \leqslant j \leqslant k-1.$$

Замечание. Индекс ν в предыдущей формуле указывает на «нормальность». Ниже будет объяснен смысл, в котором условие определения 1 можно рассматривать как условие на производные f, взятые в направлении нормали к Σ.

2. Лемма. *Пусть I — область в E^n, граница B которой содержит часть Σ, являющуюся гладкой поверхностью. Предположим, что ни одна точка Σ не является внутренней точкой замыкания I. Пусть k — натуральное число и $f \in C^{k-1}(\bar{I})$. Тогда*

(I) *если I_0 — подобласть I, граница которой содержит Σ, то условия*

$$(\partial_\nu(\Sigma))^j f(x) = 0, \quad x \in \Sigma, \quad 0 \leqslant j \leqslant k-1,$$

и

$$(\partial_\nu(\Sigma))^j (f \mid I_0)(x) = 0, \quad x \in \Sigma, \quad 0 \leqslant j \leqslant k-1,$$

эквивалентны;

(II) *если I_0 — подобласть I, граница которой содержит гладкую поверхность Σ_0, являющуюся частью Σ, то из условий*

$$(\partial_\nu(\Sigma))^j f(x) = 0, \quad x \in \Sigma, \quad 0 \leqslant j \leqslant k-1,$$

вытекают соотношения

$$(\partial_\nu(\Sigma_0))^j (f \mid I_0)(x) = 0, \quad x \in \Sigma_0, \quad 0 \leqslant j \leqslant k-1;$$

(III) *если* I_α *является подобластью* I *для каждого* α *из множества* A *индексов* α *и граница* I_α *содержит гладкую поверхность* Σ_α, *причем* $\bigcup_\alpha \Sigma_\alpha = \Sigma$, *то условие*

$$(\partial_\nu(\Sigma))^j f(x) = 0, \quad x \in \Sigma, \quad 0 \leqslant j \leqslant k-1,$$

эквивалентно системе условий

$$(\partial_\nu(\Sigma_\alpha))^j (f \mid I_\alpha)(x) = 0, \quad x \in \Sigma_\alpha, \quad 0 \leqslant j \leqslant k-1, \quad \alpha \in A.$$

Эта лемма вытекает непосредственно из определения 1; подробное доказательство предоставляем провести читателю.

3. Лемма. *Пусть* I — *область в* E^n, *граница* B *которой содержит часть* Σ, *являющуюся гладкой поверхностью. Предположим, что ни одна точка* Σ *не является внутренней точкой замыкания* I. *Пусть* k *и* k_1 — *натуральные числа*, $f \in C^{k+k_1-1}(\bar{I})$ *и* $f_1 \in C^{k+k_1-1}(\bar{I})$. *Тогда если*

$$(\partial_\nu(\Sigma))^j f(x) = 0, \quad x \in \Sigma, \quad 0 \leqslant j \leqslant k-1,$$

и

$$(\partial_\nu(\Sigma))^j f_1(x) = 0, \quad x \in \Sigma, \quad 0 \leqslant j \leqslant k-1,$$

то

$$(\partial_\nu(\Sigma))^j (f f_1)(x) = 0, \quad x \in \Sigma, \quad 0 \leqslant j \leqslant k+k_1-1.$$

Доказательство. В силу правила Лейбница ясно, что мы можем написать

$$\text{(I)} \qquad \partial^J (f f_1)(x) = \sum_{|J_0|+|J_1| \leqslant |J|} c_{J_0, J_1, J}\, \partial^{J_0} f(x)\, \partial^{J_1} f_1(x)$$

для каждого J, $|J| \leqslant k+k_1-1$, и любого $x \in I$, где $c_{J_0, J_1, J}$ — некоторые постояннные коэффициенты. Так как в обеих частях этого равенства стоят непрерывные в $\bar{I}$ функции, то (I) должно выполняться и для всех $x \in \bar{I}$. Поскольку по предположению

$$\partial^{J_0} f(x)\, \partial^{J_1} f_1(x) = 0, \quad x \in \Sigma, \quad |J_0| + |J_1| \leqslant k+k_1-1,$$

то отсюда следует заключение леммы.

4. Лемма. *Пусть* I, I_1 — *две области в* E^n, *границы* B, B_1 *которых содержат части* Σ, Σ_1, *являющиеся гладкими поверхностями. Предположим, что ни одна точка в* Σ (*в* Σ_1) *не является внутренней в замыкании* I (I_1). *Пусть* k — *натуральное число*, $f \in C^{k-1}(\bar{I})$, *а* $M : \bar{I} \to \bar{I}_1$ — *взаимно однозначное отображение, такое, что*

$$\text{(I)} \qquad (M(\cdot))_j \in C^{k-1}(\bar{I}), \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$\text{(II)} \qquad (M^{-1}(\cdot))_j \in C^{k-1}(\bar{I}_1), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Тогда условия

(1) $(\partial_\nu(\Sigma))^j f(x)=0, \quad x\in\Sigma, \quad 0\leqslant j\leqslant k-1,$

и

(2) $(\partial_\nu(\Sigma_1))^j f(M^{-1}(x))=0, \quad x\in\Sigma, \quad 0\leqslant j\leqslant k-1,$

эквивалентны.

Доказательство. Используя правило дифференцирования сложной функции и правило Лейбница, получаем

$$\partial^J f(M^{-1}(x))=\sum_{|J_1|\leqslant|J|} a_{J_1,J}(x)\,(\partial^{J_1}f)(M^{-1}(x))$$

для каждого J, $|J|\leqslant k-1$, и всех $x\in I$, где $a_{J_1,J}(x)$ — вполне определенные коэффициенты, которые могут быть представлены как многочлены от координат вектора $M^{-1}(x)$ и первых $k-1$ производных этих координат. Так как обе стороны этого равенства непрерывны в $\bar I$, то (1) должно выполняться для всех $x\in\bar I$. Так как по предположению $\partial^{J_1}f(x)=0$ для $x\in\Sigma$ и $|J_1|\leqslant k-1$, то $\partial^J f(x)=0$ для всех $x\in\Sigma$ и $|J|\leqslant k-1$. Таким образом, из (1) вытекает (2). Из соображений симметрии из (2) вытекает (1), ч. т. д.

В лемме 4 устанавливается инвариантность условия Дирихле порядка k относительно соответствующих дифференцируемых отображений. В следующей лемме указывается, какой вид принимает условие Дирихле в окрестности плоской границы области I, и объясняется, почему оказывается приемлемым символическое обозначение «нормальных производных», принятое в определении 1.

5. Лемма. *Пусть I — область в E^n, граница B которой содержит открытую часть Σ гиперплоскости $E^{n-1}=\{x\mid x\in E^n,\ x_1=0\}$. Предположим, что ни одна точка Σ не является внутренней в замыкании I. Пусть k — натуральное число, а $f\in C^{k-1}(\bar I)$. Тогда условия*

(I) $(\partial_\nu(\Sigma))^j f(x)=0, \quad x\in\Sigma, \quad 0\leqslant j\leqslant k-1,$

и

(II) $\partial_1^j f(x)=0, \quad x\in\Sigma, \quad 0\leqslant j\leqslant k-1,$

эквивалентны.

Доказательство. Соотношение (II) вытекает из (I). Это следует непосредственно из определения 1. Обратно предположим, что выполнено (II). Пусть $|J|\leqslant k-1$ и $J=J_1\cup J_2$, где $\max J_1=\min J_1=1$ и $2\leqslant\min J_2\leqslant\max J_2\leqslant n$. Тогда если $|J_1|=j_1$, $|J_2|=j_2$, то $\partial^J f(x)=\partial^{J_2}\partial_1^{j_1}f(x)$ для всех $x\in I$. Так как обе части этого равенства являются непрерывными функциями в $\bar{I}$, то оно должно также выполняться для всех $x \in \bar{I}$. Множество Σ образует открытое подмножество плоскости E^{n-1}. По предположению $g(x) = \partial_1^{j_1} f(x)$ обращается в нуль при $x \in \Sigma$. Таким образом, мы должны доказать, что функция $\partial^{J_2} g(x)$, определяемая для $x \in \Sigma$ (см. § 2, стр. 803) как продолжение по непрерывности $\partial^{J_2} g(x)$ с I на $\bar{I}$, совпадает для всех $x \in \Sigma$ с производной $\partial^{J_2}(g \mid \Sigma)(x)$ сужения g на Σ, причем производная берется в открытом множестве $\Sigma \subset E^{n-1}$. Так как $j_1 + j_2 \leqslant k - 1$, то $g \in C^{k-1-j_1}(\bar{I}) \subseteq \subseteq C^{j_2-1}(\bar{I})$. Пусть $x_0 \in \Sigma$, а U — настолько маленькая окрестность точки x_0 в E^{n-1}, что $\bar{U}$ — компакт и содержится в Σ. Поскольку Σ не является подмножеством замыкания I, то все точки I из малой окрестности x должны лежать в одном из полупространств

$$E_+ = \{x \mid x \in E^n,\ x_1 > 0\}$$

или $E_- = \{x \mid x \in E^n,\ x_1 < 0\}$. Для определенности предположим, что имеет место первый случай. Тогда, если ε достаточно мало, множество

$$U_\varepsilon = \{x \mid x \in E^n, \quad 0 < x_1 < \varepsilon, \quad [x_2, \ldots, x_n] \in U\}$$

содержится в I. Так как g лежит в $C^{j_2-1}(\bar{I})$, то

$$\lim_{\delta \to 0} \partial^{J_3} g(\delta, x_2, \ldots, x_n)$$

существует равномерно для $[x_2, \ldots, x_n] \in U_1$ и для всех J_3, таких, что $2 \leqslant \min J_3 \leqslant \max J_3 \leqslant n$, $|J_3| \leqslant j_2 - 1$. Следовательно, по хорошо известной элементарной теореме о перестановке пределов и операции дифференцирования мы имеем

$$\partial^{J_3} g(0, x_2, \ldots, x_n) = \partial^{J_3} \lim_{\delta \to 0} g(\delta, x_2, \ldots, x_n) =$$
$$= \lim_{\delta \to 0} \partial^{J_3} g(\delta, x_2, \ldots, x_n),$$

что доказывает настоящую лемму.

6. Эллиптические граничные задачи

Можно ли обобщить теорию граничных задач и спектральную теорию, развитые в гл. XIII, на дифференциальные операторы с частными производными? В настоящем параграфе показано, что это возможно, по крайней мере для широкого класса эллиптических операторов с частными производными, точно описываемого ниже. Решающим моментом теории, изложенной в гл. 13, была теорема XIII.2.10, доказательство которой опиралось на лемму XIII.2.9, а потому наиболее важно получить обобщение этих теоремы и леммы для операторов с частными производными. Если теорему XIII.2.10 и лемму XIII.2.9 рассматривать с точки зрения новой терминологии теории распределений, то станет ясным, что проблема состоит в отыскании класса формальных дифференциальных операторов с частными производными τ, для которых из уравнения теории распределений $\tau f = g$ вытекает, что f является в некотором смысле более гладким, чем g. Во введении к настоящей главе мы видели, что никакой такой принцип, по-видимому, не может иметь места для тех формальных дифференциальных операторов с частными производными, для которых разрешима задача Коши, например для гиперболического оператора, такого как

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^2.$$

(В § 7 будет показано, что задача Коши для этого конкретного оператора разрешима.) Однако для эллиптических операторов, понимаемых в смысле данного ниже определения 1, будет получено обобщение теоремы XIII.2.10. Это позволит нам развить в общей форме некоторые более элементарные стороны теории, изложенной в гл. XIII. Таким образом, полученные в этой главе обобщения теорем XIII.1.3 и XIII.2.10 не являются уже столь тесно связанными, как сами эти теоремы. А теперь мы переходим к фундаментальному определению этой главы.

1. Определение. Пусть

$$\tau = \sum_{|J| \leqslant p} a_J(x)\, \partial^J$$

— формальный дифференциальный оператор с частными производными порядка p, определенный в области I евклидова n-мерного пространства E^n. Оператор τ называется *эллиптическим*, если для любого ненулевого вектора ξ в E^n выполнено соотношение

$$\sum_{|J|=p} a_J(x)\, \xi^J \neq 0, \qquad x \in I.$$

Таким образом, требование эллиптичности для дифференциальных операторов с частными производными аналогично условию необращения в нуль старшего коэффициента, которое налагалось на формальные обыкновенные дифференциальные операторы в гл. XIII. Из доказательства теоремы 2 ясно, насколько необходимо требование эллиптичности.

$\to$ 2. Теорема. *Пусть τ — эллиптический формальный дифференциальный оператор с частными производными порядка p в области I n-мерного пространства. Пусть f и g — распределения в I, и предположим, что $g \in A^{(m)}(I)$, а $\tau f = g$. Тогда f принадлежит $A^{(m+p)}(I)$.*

Теорема 2 будет выведена из следующей леммы.

3. Лемма. *Предположим, что выполнены условия предыдущей теоремы, $j = m + p - 1$ и $f \in A^{(j)}(I)$. Тогда f принадлежит $A^{(j+1)}(I)$.*

Доказательство (леммы 3). Идея доказательства состоит в том, чтобы рассмотреть τ как сумму двух операторов: оператора $\tau_0 = \sum_{|J|=p} a_J(0)\,\partial^J$ и оператора, который сравнительно мал, по крайней мере в малой окрестности точки 0. Затем мы исследуем малую окрестность точки 0 путем значительного «сокращения» (числа) координат. Технически воплощение этих двух простых идей выглядит следующим образом.

В силу леммы 3.24 достаточно показать, что каждая точка q в I имеет окрестность U, такую, что сужение $f \mid U$ функции f на U принадлежит $A^{(j+1)}(U)$. Сдвигая координаты в E^n (см. леммы 3.47 и 3.48), мы можем без ограничения общности считать, что $q = 0$. Для каждого $\varepsilon > 0$ обозначим через S_ε отображение E^n в себя, определяемое уравнением $S_\varepsilon x = \varepsilon x$. Из леммы 3.47 вытекает, что $f \circ S_\varepsilon^{-1}$ является решением дифференциального уравнения с частными производными

$$(1) \qquad \tau_\varepsilon (f \circ S_\varepsilon^{-1}) = \sum_{|J| \leqslant p} a_J(\varepsilon x)\, \varepsilon^{p-|J|} \partial^J (f \circ S_\varepsilon^{-1}) = \varepsilon^p (g \circ S_\varepsilon^{-1})$$

в области $\varepsilon^{-1} I$. Пусть ε настолько мало, что область $\varepsilon^{-1} I$ содержит внутренность единичного шара Σ_1 в E^n; мы пишем $\Sigma_a = \{x \in E^n \mid |x| < a\}$.

Пусть φ — функция из $C^\infty(E^n)$, обращающаяся в нуль вне $\Sigma_{1/2}$ и тождественно равная единице в $\Sigma_{1/4}$. Из правила Лейбница вытекает, что $\tau_\varepsilon \varphi = \varphi \tau_\varepsilon + \tau(\varepsilon)\varphi$, где $\tau(\varepsilon)$ — дифференциальный оператор с частными производными порядка не выше $p - 1$.

Если положить $f_\varepsilon = (f \circ S_\varepsilon^{-1})$, то из формулы (1) и лемм 3.22, 3.18 и 3.6 (IV) вытекает, что распределение $f_\varepsilon \varphi$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(2) \qquad \sum_{|J|=p} a_J(\varepsilon x)\, \partial^J (f_\varepsilon \varphi) = \tilde{g}_\varepsilon,$$

где $\tilde{g}_\varepsilon \in A^{(m)}(I)$; здесь в силу леммы 3.6 (IV) можно воспользоваться формулой Лейбница и показать, что $\partial^J (f_\varepsilon \varphi) = \varphi \partial^J f_\varepsilon +$

$+g(J,\ \varepsilon)$ для $|J| \leqslant p$, где по лемме 3.22 и лемме 3.18 $g(J,\ \varepsilon) \in \in A^{(m)}(I)$. Предположим, что τ_0 — дифференциальный оператор

(3) $$\tau_0 = \sum_{|J|=p} a_J(0)\, \partial^J.$$

(Оператор τ_0 можно рассматривать как «главную часть оператора τ в точке $x = 0$».) Если положить

$$\widetilde{a}_J(x) = a_J(x) - a_J(0),$$

то при ε, стремящемся к нулю, функции $a_J(\varepsilon x)$ сходятся к нулю в топологии пространства $C^\infty(\Sigma_1)$. В силу (2) $f_\varepsilon\varphi$ удовлетворяет дифференциальному уравнению с частными производными вида

(4) $$\Big(\tau_0 + \sum_{|J|\leqslant p} \widetilde{a}_J(\varepsilon x)\, \partial^J\Big)(f_\varepsilon\varphi) = \widetilde{g}_\varepsilon,$$

где все коэффициенты $\widetilde{a}_J(\varepsilon x)$ сходятся к нулю в топологии $C^\infty(\Sigma_1)$ при ε, стремящемся к нулю. Так как по предположению $f \in A^{(m+p-1)}(I)$, то из (4) вытекает, что $f_\varepsilon\varphi$ удовлетворяет дифференциальному уравнению с частными производными

(5) $$\Big((\tau_0 + \lambda) + \sum_{|J|\leqslant p} \widetilde{a}_J(\varepsilon x)\, \partial^J\Big)(f_\varepsilon\varphi) = \hat{g}_\varepsilon,$$

где выбор комплексной постоянной λ находится в нашем распоряжении и будет сделан ниже, а $\hat{g}_\varepsilon$ — распределение из $A^{(m)}(\Sigma_1)$. По лемме 3.13 (II) носитель $\hat{g}_\varepsilon$ целиком содержится в $\Sigma_{1/2}$. Пусть C обозначает куб

$$C = \{x \in E^n \,|\, |x_i| \leqslant \pi, \quad i = 1, \ldots, n\}.$$

Тогда в силу лемм 3.12, 3.33 и 3.24, обобщенных на $D_\pi(C)$, мы имеем $f_\varepsilon\varphi \in H_\pi^{(m+p-1)}(C)$, $\hat{g}_\varepsilon \in H_\pi^{(m)}(C)$. Пусть $\psi \in C^\infty(E^n)$ — такая функция, что $\psi(x) = 1$, если $x \in \Sigma_{1/2}$, и $\psi(x) = 0$, если $x \in \Sigma_{3/4}$. Тогда, полагая $\hat{a}_J(\varepsilon x) = \widetilde{a}_J(\varepsilon x)\, \psi(x)$, мы получаем функции $\hat{a}_J(\varepsilon x)$, определенные в C, принадлежащие $C_\pi^\infty(C)$ и сходящиеся к нулю в топологии $C_\pi^\infty(C)$ при $\varepsilon \to 0$.

Положим

$$\sigma_\varepsilon = \sum_{|J|=p} \hat{a}_J(\varepsilon x)\, \partial^J$$

и

$$\tau_1 = \tau_0 + \lambda.$$

Тогда, так как $\hat{a}_J(\varepsilon x) = \widetilde{a}_J(\varepsilon x)$ для $x \in \Sigma_{1/2}$ и так как по лемме 3.13 носитель $f_\varepsilon\varphi$ содержится в $\Sigma_{1/2}$, то из (5) и лемм 3.10

и 3.9 вытекает, что

(6) $$(\tau_1+\sigma_\varepsilon)(f_\varepsilon\varphi)=\hat{g}_\varepsilon.$$

Пусть

(7) $$H\sim\sum_{|L|=n}H_L e^{iL\cdot x}$$

— разложение в ряд Фурье распределения $H\in D_\pi(C)$ (см. лемму 3.39). В силу леммы 3.40 и соотношения (3)

(8) $$(\tau_0+\lambda)H\sim\sum_{|L|=n}H_L\Big(\sum_{|J|=p}a_J(0)L^J+\lambda\Big)e^{iL\cdot x}.$$

Комплексную постоянную λ мы оставили выше неопределенной. Выберем ее теперь так, чтобы $\{\sum_{|J|=p}a_J(0)L^J\}+\lambda\neq 0$ для всех индексов L при $|L|=n$. Так как λ можно выбирать из *несчетного* множества, то сделать это нетрудно. Функции

$$f_1(\xi)=|\xi|^p,\quad f_2(\xi)=\sum_{|J|=p}a_J(0)\xi^J$$

— однородные порядка p, не обращающиеся в нуль на единичной сфере Σ_1 в E^n (здесь эллиптичность τ используется в первый и последний раз, но это решающий момент). Поэтому существуют две положительные постоянные K_1 и K_2, такие, что

$$K_1\leqslant\frac{f_1(\xi)}{|f_2(\xi)|}\leqslant K_2,\qquad \xi\in E^n.$$

Таким образом,

$$K_1\leqslant\varliminf_{|\xi|\to\infty}\frac{f_1(\xi)+1}{|f_2(\xi)+\lambda|}\leqslant\varlimsup_{|\xi|\to\infty}\frac{f_1(\xi)+1}{|f_2(\xi)+\lambda|}\leqslant K_2.$$

Поскольку λ было выбрано так, что $f_2(L)+\lambda\neq 0$ для всех индексов L, $|L|=n$, то отсюда вытекает, что отношение $|\xi|^p+1$ к $f_2(\xi)+\lambda$ равномерно заключено между двумя положительными постоянными, когда ξ пробегает множество всех векторов в E^n с *целочисленными* координатами. Поэтому в силу леммы 3.41 $\tau_0+\lambda$ является непрерывным отображением с непрерывным обратным пространства $H_\pi^{(k+p)}(C)$ на $H_\pi^{(k)}(C)$ для всех k между $-\infty$ и $+\infty$. Пусть ν_k и $\hat{\nu}_k$ — нормы отображения

$$\tau_0+\lambda:\quad H_\pi^{(k+p)}(C)\to H_\pi^{(k)}(C)$$

и его обратного.

Пусть $\tau_1=\tau_0+\lambda$. Используя установленный выше факт, что функции $\hat{a}_J(\varepsilon x)$ сходятся к нулю в топологии $C_\pi^\infty(C)$ при $\varepsilon\to 0$, а также лемму 3.28 (III), обобщенную на $D_\pi(C)$, выберем ε настолько малым, чтобы формальный дифференциальный оператор с частными производными

$$\sigma_\varepsilon = \sum_{|J|=p} \hat{a}_J(\varepsilon x)\,\partial^J,$$

рассматриваемый как отображение из $H_\pi^{(m+p)}(C)$ в $H_\pi^{(m)}(C)$, а также из $H_\pi^{(m+p-1)}(C)$ в $H_\pi^{(m-1)}(C)$, имел нормы меньшие, чем $\min(\hat{\nu}_m, \hat{\nu}_{m-1})$. Тогда по лемме VII.3.4 отображение

$$(I+\sigma_\varepsilon\tau_1^{-1})$$

как отображение пространства $H_\pi^{(m)}(C)$ или пространства $H_\pi^{(m-1)}(C)$ в себя имеет ограниченное всюду определенное обратное отображение. Поэтому мы имеем

$$(\tau_1+\sigma_\varepsilon)\,\tau_1^{-1}(I+\sigma_\varepsilon\tau_1^{-1})^{-1} = (I+\sigma_\varepsilon\tau_1^{-1})(I+\sigma_\varepsilon\tau_1^{-1})^{-1} = I$$

и

$$\tau_1^{-1}(I+\sigma_\varepsilon\tau_1^{-1})^{-1}(\tau_1+\sigma_\varepsilon) = \tau_1^{-1}(I+\sigma_\varepsilon\tau_1^{-1})^{-1}(I+\sigma_\varepsilon\tau_1^{-1})\,\tau_1 = \tau_1^{-1}\tau_1 = I$$

независимо от того, рассматриваем ли мы τ_1 и σ_ε как отображения $H_\pi^{(m+p)}(C)$ в $H_\pi^{(m)}(C)$ или как отображения $H_\pi^{(m+p-1)}(C)$ в $H_\pi^{(m-1)}(C)$. Таким образом, в обоих этих случаях $\tau_p+\sigma_\varepsilon$ является взаимно однозначным отображением. Так как $\tilde{g}_\varepsilon$ принадлежит $H_\pi^{(m)}$, то существует такое распределение F в $H_\pi^{(m+p)}$, что $(\tau_1+\sigma_\varepsilon)F = \tilde{g}_\varepsilon$. Но поскольку $f_\varepsilon\varphi \in H_\pi^{(m+p-1)}$ и, в силу (5), $(\tau_1+\sigma_\varepsilon)f_\varepsilon\varphi = \tilde{g}_\varepsilon$, то $f_\varepsilon\varphi = F$ принадлежит $H_\pi^{(m+p)}(C)$ и тем более принадлежит $A_\pi^{(m+p)}(C)$. Так как $\varphi(x)=1$ для $x\in\Sigma_{1/4}$, то из лемм 3.9 и 3.23 вытекает, что сужение $f_\varepsilon\,|\,\Sigma_{1/4}$ принадлежит $A^{(m+p)}(\Sigma_{1/4})$. Таким образом (см. 3.48), $f\,|\,\Sigma_{\varepsilon/4}$ принадлежит $A^{(m+p)}(\Sigma_{\varepsilon/4})$, и доказательство леммы 3 закончено.

Доказательство (теоремы 2). Пусть J — область, замыкание которой содержится в I. Тогда в силу лемм 4.13 и 3.13 и определения 3.15 распределение $f\,|\,J$ лежит в $A^{(n)}(J)$ при некотором n. Так как по леммам 3.18 и 3.23 $g\,|\,J$ лежит в $A^{(s)}(J)$ при всех $s\leqslant m$ и так как по леммам 3.10 и 3.9 $\tau(f\,|\,J) = (g\,|\,J)$, то из леммы 3 вытекает, что если $n = s+p-1$ и $s\leqslant m$, то $f\,|\,J$ принадлежит $A^{(n+1)}(J)$. Но если $n < m+p$, мы всегда можем найти такое целое число s, что $s\leqslant m$ и $n < s+p-1$. Таким образом, если $f\,|\,J$ лежит в $A^{(n)}(J)$ и $n<m+p$, то $f\,|\,J$ лежит в $A^{(n+1)}(J)$. По индукции получаем, что $f\,|\,J\in A^{(m+p)}(J)$. Так как J — произвольное открытое подмножество, замыкание которого содержится в I, то по определениям 3.15 и 3.17 распределение f лежит в $A^{(m+p)}(I)$, ч. т. д.

4. Следствие. *Пусть выполнены условия теоремы 2, и пусть* $m+p-[n/2]-1 \geqslant 0$. *Тогда* f *является функцией, принадлежащей пространству* $C^{m+p-[n/2]-1}(I)$. *Отображение* $(f,\ T_1(\tau)f) \to f(x_0)$ *является непрерывным линейным функционалом, определенным на графике оператора* $T_1(\tau)$ *при каждом* $x_0 \in I$. *В частности, если* $g=0$, *так что* f *является решением уравнения* $\tau f=0$, *то функция* f *бесконечно дифференцируема, т. е.* $f \in C^\infty(I)$.

Доказательство. Это утверждение вытекает непосредственно из теоремы 2, теоремы Соболева (4.5) и теоремы о замкнутом графике (II.2.4).

5. Следствие. *Пусть выполнены условия теоремы 2, и* $p \geqslant [n/2]-1$. *Тогда каждая функция* f *из* $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$ *принадлежит* $C^{p-[n/2]-1}(I)$.

Доказательство. Это утверждение вытекает непосредственно из предыдущего следствия и замечания, следующего за доказательством леммы 3.53.

В качестве первого применения фундаментальной теоремы 2 и следствия 5 мы докажем следующую теорему Маутнера, Гординга и Браудера, обобщающую теорему XIII.5.1 на случай дифференциальных операторов с частными производными.

6. Теорема. *Пусть* τ — *эллиптический формально самосопряженный дифференциальный оператор с частными производными в области* I *евклидова* n-*мерного пространства,* T — *самосопряженное расширение оператора* $T_0(\tau)$, *а* U — *упорядоченное представление пространства* $L_2(I)$ *относительно* T *с мерой* μ, *множествами кратности* e_i *и кратностью* $m \leqslant \infty$. *Тогда существуют ядра* $W_i(t,\ \lambda)$, $1 \leqslant i \leqslant m$, *измеримые относительно произведения меры Лебега и меры* μ, *которые обращаются в нуль на дополнении* e_i, *принадлежат* $C^\infty(I)$ *и удовлетворяют дифференциальному уравнению* $(\tau-\lambda)W_i(\cdot,\ \lambda)=0$ *при каждом фиксированном* λ. *Более того, ядра* W_i *обладают следующими свойствами:*

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{\nu\quad t\in J} \int_e |W_i(t,\ \lambda)|^2 \mu(d\lambda) < \infty$$

для каждого компактного подмножества J *внутренности* I *и каждого ограниченного борелевского множества* e, *и*

$$\text{(I)}\quad (Uf)_i(\lambda) = \int_I f(t)\overline{W_i(t,\ \lambda)}\,dt, \qquad f \in L_2(I), \qquad 1 \leqslant i \leqslant m,$$

причем интегралы существуют в смысле среднего квадратичного в $L_2(\mu,\ e_i)$;

(II) *для каждой борелевской функции* F

$$U\mathfrak{D}(F(T))=\left\{[f_i]\,|\sum_{i=1}^{m}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\lambda)|^2\,|f_i(\lambda)|^2\,\mu(d\lambda)<\infty\right\}$$

и

$$[UF(T)g]_i(\lambda)=F(\lambda)(Ug)_i(\lambda),\quad g\in\mathfrak{D}(F(T)),\quad -\infty<\lambda<+\infty.$$

Доказательство. Так как $T=T^*\supseteq T_0(\tau)$, то по лемме XII.4.1 (a) мы имеем $T=T^*\subseteq T_0(\tau^*)^*=T_0(\tau^*)^*$, где $\tau=\tau^*$ — формально самосопряженный оператор по предположению. Как было отмечено в абзаце, следующем непосредственно после доказательства леммы 3.53, $T_0(\tau^*)^*=T_1(\tau)$; поэтому $T\subseteq T_1(\tau)$. Если

$$(1)\qquad f\in\bigcap_{m=1}^{\infty}\mathfrak{D}(T^m)\subseteq\bigcap_{m=1}^{\infty}\mathfrak{D}((T_1(\tau))^m)\subseteq\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathfrak{D}(T_1(\tau^n))$$

(последнее включение вытекает из замечания, на которое мы ссылались выше), то, в силу следствия 5, f лежит в $C^\infty(I)$. Поэтому, согласно следствиям XII.3.13 и XII.3.14, существует μ-нулевое множество N и ядра W_i, $i=1,\ldots,m\leqslant\infty$, удовлетворяющие соотношениям (I) и (II), такие, что для $\lambda\in e_i-N$ выполнено соотношение $(T_1(\tau)-\lambda)W_i(\cdot,\lambda)=0$. Из следствия 4 вытекает, что если положить $W_i(\cdot,\lambda)=0$ для $\lambda\in N$ и изменить $W_i(t,\lambda)$ на соответствующем множестве лебеговой меры нуль при каждом $\lambda\in N$, то мы получим функцию $\widetilde{W}_i$, такую, что $\widetilde{W}_i(\cdot,\lambda)$ принадлежит $C^\infty(I)$ при всех λ, и такую, что

$$\tau\widetilde{W}_i(\cdot,\lambda)=\lambda\widetilde{W}_i(\cdot,\lambda),\quad t\in I,\quad \text{при всех } \lambda.$$

Если $\widetilde{W}_i$ измерима относительно произведения меры μ и лебеговой меры, то, поскольку в силу следствий XII.3.13 и XII.3.14 функции W определены лишь с точностью до множества меры нуль, из теоремы Фубини будет вытекать, что мы можем положить $W_i=\widetilde{W}_i$. Для проверки измеримости функции $\widetilde{W}_i$ в этом смысле достаточно заметить, что если C_m — куб

$$\left\{x\in E^n\,|\,|x_i|\leqslant\frac{1}{m},\ i=1,\ldots,n\right\}$$

в евклидовом n-мерном пространстве, то

$$\widetilde{W}_i(t,\lambda)=\lim_{m\to\infty}(2m)^{-n}\int_{t+C_m}\widetilde{W}_i(s,\lambda)\,ds=\lim_{m\to\infty}(2m)^{-n}\int_{t+C_m}W_i(s,\lambda)\,ds$$

для всех точек t, внутренних в I, и $\lambda\notin N$, ч. т. д.

7. Следствие (*формула обращения*). *Пусть* I, W_i *и т. д. те же, что и в предыдущей теореме. Тогда для каждого* $f \in L_2(I)$ *мы имеем*

$$f(t) = \sum_{i=1}^{m} \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{+A} (Uf)_i(\lambda)\, W_i(t, \lambda)\, \mu(d\lambda),$$

причем предел существует в смысле среднего квадратического в $L_2(I)$, *а ряд сходится по норме* $L_2(I)$.

Доказательство. Это утверждение вытекает непосредственно из предыдущей теоремы и следствия XII.3.12.

8. Следствие. *Пусть оператор* T, *ядра* W_i *и т. д. те же, что и в теореме* 6, *а* F — *ограниченная измеримая по Борелю функция, обращающаяся в нуль вне ограниченного борелевского множества* e *вещественной оси. Тогда ограниченный оператор* $F(T)$ *имеет представление*

$$(F(T)f)(t) = \int_I f(s) K(F; t, s)\, ds, \qquad f \in L_2(I),$$

где

$$K(F; t, s) = \sum_{i=1}^{m} \int_e F(\lambda)\, W_i(t, \lambda)\, \overline{W_i(s, \lambda)}\, \mu(d\lambda),$$

причем ряд сходится в $L_2(I)$ *почти для всех фиксированных* t *в* I. *Кроме того,*

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{\nu\quad t\in J} \int_I |K(F; t, s)|^2\, ds < \infty,$$

где J — *произвольное компактное подмножество в* I.

Доказательство. Из теоремы XII.2.6 и формулы (1) доказательства теоремы 6 ясно, что если $f \in L_2(I)$, то $F(T)f$ принадлежит $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{D}(T^n) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{D}(T_1(\tau^n))$. Таким образом, из следствия 5 вытекает, что $F(T)f$ лежит в $C^\infty(I)$. Отображение $f \to F(T)f$ пространства $L_2(I)$ в F-пространство $C^\infty(I)$, очевидно, замкнуто. Следовательно, по теореме о замкнутом графике (II.2.4) оно непрерывно. Поэтому существует постоянная $M(J)$, такая, что

$$[']\qquad \sup_{t\in J} |(F(T)f)(t)| \leqslant M(J)\,|f|, \quad f \in L_2(I).$$

Из теоремы 6 (II) и предыдущего следствия вытекает, что

$$[*]\qquad (F(T)f)(t)=\sum_{i=1}^{m}\int_{e}F(\lambda)W_i(t,\lambda)\int_{I}W_i(s,\lambda)f(s)ds\mu_i(d\lambda),$$

где интеграл $\int_e f(s)W_i(s,\lambda)\,ds$ существует в смысле среднего квадратического в $L_2(\mu)$, а ряд сходится по норме $L_2(I)$. Пусть H_0 — плотное множество всех тех f в $L_2(I)$, которые обращаются в нуль вне компактного подмножества из I. Предположим сначала, что $m<\infty$. Тогда доказательство можно закончить следующим образом. Если $f\in H_0$, то можно воспользоваться теоремой Фубини (справедливой в силу свойств ядер W_i, установленных в теореме 6) для перестановки порядка интегрирования в [*] и получить соотношение

$$[**]\qquad (F(T)f)(t)=\int_I f(s)K(F;t,s)\,ds,\qquad f\in H_0,$$

а из него, используя [′], неравенство

$$\sup_{t\in J}\left|\int_I f(s)K(F;t,s)\,ds\right|\leqslant M(J)\,|f|,\qquad f\in H_0.$$

Из теоремы IV.8.1 тогда вытекают неравенство

$$\left[\int_I |K(F;t,s)|^2 ds\right]^{1/2}\leqslant M(J)$$

и соотношение [**] для всех $f\in L_2(I)$, так что доказательство в случае $m<\infty$ закончено.

Если $m=\infty$, то мы можем закончить доказательство точно так же, как и выше, показав лишь, что ряд, определяющий функцию $K(F;t,s)$, сходится по норме $L_2(I)$ почти для всех фиксированных $t\in I$ и что выполнено соотношение [**]. Это можно доказать, привлекая на помощь следующее вспомогательное соображение. Пусть $\mathfrak{H}=\sum_{n=1}^{\infty}L_2(\mu,e_i)$ — прямая сумма пространств, на которую отображается $L_2(I)$ упорядоченным представлением U теоремы XII.3.11. Для каждого $k<\infty$ определим ортогональный проектор P_k в $\mathfrak{H}$, полагая

$$P_k[f_1,\ldots,f_k,f_{k+1},\ldots]=[f_1,\ldots,f_k,0,0,\ldots].$$

Ясно, что $P_k u\to u$ при $k\to\infty$ и каждом $u\in\mathfrak{H}$. Так как отображение $f\to F(T)f$ является непрерывным отображением $L_2(I)$

в $C^\infty(I)$, то для каждого $t\in I$ формула

$$\varphi_t(f)=(F(T)f)(t)$$

определяет непрерывный линейный функционал в $L_2(I)$. Следовательно, существует вектор $g_t\in L_2(I)$, такой, что

$$[']\qquad (F(T)f)(t)=(f,\ g_t),\qquad f\in L_2(I).$$

В силу теоремы 6 (II) и предыдущего следствия для всякой функции $f\in L_2(I)$ мы имеем

$$(F(T)\,U^{-1}P_kUf)(t)=(U^{-1}P_kUF(T)f)(t)=$$
$$=\sum_{i=1}^{k}\int_e F(\lambda)\,W_i(t,\ \lambda)\int_I \overline{W_i(s,\ \lambda)}\,f(s)\,ds\,\mu(d\lambda).$$

Теперь из соображений, использованных в предыдущем абзаце для случая $m<\infty$, вытекает, что если

$$K_k(F;\ t,\ s)=\sum_{i=1}^{k}\int_e F(\lambda)\,W_i(t,\ \lambda)\,\overline{W_i(s,\ \lambda)}\,\mu(d\lambda),$$

то

$$\int_I |K_k(F;\ t,\ s)|^2\,ds<\infty,\qquad t\in I,$$

и

$$['']\qquad (F(T)\,U^{-1}P_kUf)(t)=\int_I K_k(F;\ t,\ s)\,f(s)\,ds,\qquad f\in L_2(I).$$

По определению ['] функции g_t и в силу того факта, что отображение U сохраняет скалярные произведения, мы имеем

$$(F(T)\,U^{-1}P_kUf)(t)=(U^{-1}P_kUf,\ g_t)=(f,\ U^{-1}P_kUg_t).$$

Таким образом, из соотношения [''] вытекает, что

$$\overline{K_k(F;\ t,\ \cdot)}=U^{-1}P_kUg_t.$$

Из определения последовательности проекторов P_k вытекает, что последовательность $K_k(F;\ t,\ \cdot)$ функций сходится по норме $L_2(I)$ при $k\to\infty$ и что ее пределом является g_t. Это показывает, что ряд, определяющий ядро $K(f;\ t,\ s)$, сходится по норме $L_2(I)$ при каждом фиксированном t и что

$$\int_I K(F;\ t,\ s)\,f(s)\,ds=(f,\ g_t)=(F(T)f)(t).$$

Итак, доказательство закончено.

Мы хотим теперь изложить некоторые вопросы теории граничных задач для эллиптических дифференциальных операторов с частными производными и осветить ряд результатов, полученных в этом направлении. Следует, однако, заметить, что современная теория граничных задач и граничных условий для эллиптических дифференциальных операторов порою слишком фрагментарна и не может сравниться с вполне законченной теорией, развитой для обыкновенных дифференциальных операторов (см. § XIII.2). Нами, в частности, будет проведено подробное исследование одного специального, но важного класса граничных условий — так называемых граничных условий Дирихле. Для этой цели фундаментальной теоремы 2, относящейся лишь к внутренности области I, безусловно недостаточно, и она должна быть дополнена исследованием свойств дифференцируемости в окрестности границы I распределений, удовлетворяющих эллиптическому дифференциальному уравнению с частными производными

$$\tau f = g$$

и соответствующему множеству граничных условий. Мы начнем, однако, с изучения тех сторон граничной задачи Дирихле, которые могут быть изучены без подробной информации о дифференцируемости на границе.

9. Лемма. *Пусть τ — эллиптический формальный дифференциальный оператор четного порядка $2p$, определенный в области $I_0 \subset E_n$, и пусть*

$$\tau = \sum_{|J| \leqslant 2p} a_J(x)\, \partial^J.$$

Пусть I_0 является объединением двух открытых множеств I_1 и I_2, и предположим, что существуют постоянные K_1, k_1 ($k_1 > 0$, $K_1 < \infty$), такие, что

$$\operatorname{Re}(\tau f, f) + K_1(f, f) \geqslant k_1 |f|^2_{(p)}, \qquad f \in C_0^\infty(I_1) \cup C_0^\infty(I_2).$$

Тогда если I — ограниченное подмножество из I_0, такое, что $\bar{I} \subseteq I_0$, то существует такая пара постоянных K, k ($k > 0$, $K < \infty$), что

$$\operatorname{Re}(\tau f, f) + K(f, f) \geqslant k |f|^2_{(p)}, \qquad f \in C_0^\infty(I).$$

Замечание. Норма $|f|_{(p)}$ введена в определении 3.15.

Доказательство. Компактные множества $\bar{I} - I_1 = C_1$ и $\bar{I} - I_2 = C_2$ не пересекаются. Пусть $\tilde{C}_1$ и $\tilde{C}_2$ — непересекающиеся открытые множества, содержащие соответственно C_1 и C_2. Тогда $D_1 = \bar{I} - \tilde{C}_1$ и $D_2 = \bar{I} - \tilde{C}_2$ — пара компактных подмножеств, объединение которых есть I; более того, $D_1 \subseteq I_1$ и $D_2 \subseteq I_2$. По лемме 2.1 существуют неотрицательные функции $\psi_1 \in C_0^\infty(I_1)$ и $\psi_2 \in C_0^\infty(I_2)$, такие, что $\psi_1(x) = 1$ для $x \in D_1$ и $\psi_2(x) = 1$ для $x \in D_2$. Снова используя лемму 2.1, найдем неотрицательную функцию $\eta \in C_0^\infty(E^n)$, которая равна единице для x, удовлетворяющих неравенству $\psi_1(x) + \psi_2(x) \geqslant 3/4$, и равна нулю, если $\psi_1(x) + \psi_2(x) \leqslant 1/4$; положим $\psi_3(x) = 1 - \eta(x)$. Положим также $\psi(x) = \sum_{i=1}^{3} (\psi_i(x))^2$ и $\varphi_i(x) = (\psi(x))^{-1}\psi_i(x)$, $i = 1, 2, 3$. Тогда $\varphi_1 \in C_0^\infty(I_1)$, $\varphi_2 \in C_0^\infty(I_2)$ и $(\varphi_1(x))^2 + (\varphi_2(x))^2 = 1$ для всех x из $D_1 \cup D_2 \supseteq I$. Пусть f принадлежит $C_0^\infty(I)$. Тогда

$$\text{(1)}\quad \begin{aligned} \operatorname{Re}(\tau f, f) + K_1(f, f) &= \operatorname{Re}((\varphi_1^2 + \varphi_2^2)\tau f, f) + K_1((\varphi_1^2 + \varphi_2^2) f, f) = \\ &= \operatorname{Re}(\varphi_1\tau f, \varphi_1 f) + K_1(\varphi_1 f, \varphi_1 f) + \operatorname{Re}(\varphi_2\tau f, \varphi_2 f) + K_1(\varphi_2 f, \varphi_2 f). \end{aligned}$$

По правилу Лейбница мы имеем

$$\varphi_1\tau f = \tau\varphi_1 f + \tau_1 f, \qquad \varphi_2\tau f = \tau\varphi_2 f + \tau_2 f,$$

где τ_1 и τ_2 — формальные дифференциальные операторы порядка не выше $2p - 1$. Таким образом, полагая $f_1 = f\varphi_1$, $f_2 = f\varphi_2$ и $\tau_3 = \tau_1 + \tau_2$, мы получаем из (1) и наших предположений, что

$$\text{(2)}\qquad \operatorname{Re}(\tau f, f) + K_1(f, f) \geqslant k_1 |f_1|_{(p)}^2 + k_1 |f_2|_{(p)}^2 + \operatorname{Re}(\tau_3 f, f).$$

Точно так же из (1) и неравенства Шварца мы получаем, что существует конечная постоянная $A(\tau)$, зависящая лишь от τ, такая, что

$$\text{(3)}\qquad \operatorname{Re}(\tau f, f) \leqslant A(\tau)\{|f_1|_{(p)}^2 + |f_2|_{(p)}^2\} + \operatorname{Re}(\tau_3 f, f).$$

Определим формальный дифференциальный оператор с частными производными μ порядка $2p$ равенством

$$\text{(4)}\qquad \mu = \sum_{|J| \leqslant p} (-1)^J \partial^J \partial^J.$$

Ввиду возможности интегрирования по частям ясно (см. последний абзац § 2), что

$$(\mu f, f) = |f|_{(p)}^2, \qquad f \in C_0^\infty(I).$$

Следовательно, применяя неравенство (3) к оператору μ, находим, что

$$\text{(5)}\qquad |f|_{(p)}^2 \leqslant A(\mu)\{|f_1|_{(p)}^2 + |f_2|_{(p)}^2\} + \operatorname{Re}(\mu_3 f, f),$$

где μ_3 — некоторый дифференциальный оператор порядка не выше $2p - 1$. Из неравенств (2) и (5) вытекает существование такой

56 Заказ № 134

конечной положительной постоянной k_2, что

(6) $$k_2 |f|^2_{(p)} + (\tau_4 f, f) \leqslant \operatorname{Re}(\tau f, f) + K_1(f, f), \quad f \in C_0^\infty(I),$$

где τ_4 — некоторый дифференциальный оператор с частными производными, заданный в I_0, порядка не выше $2p-1$.

Индукцией по $|J_1|$ мы можем показать, что равенство вида

$$\partial^{J_1} G(x) \partial^{J_2} = G(x) \partial^{J_1} \partial^{J_2} + \sum_{|J| < |J_1| + |J_2|} C_J(x) \partial^J$$

выполнено (при подходящих коэффициентах C_J) для всех функций G из $C^\infty(I_0)$. Поэтому очевидно, что формальный дифференциальный оператор τ_4 может быть представлен в виде

$$\tau_4 = \sum_{|J_1| < p, \ |J_2| \leqslant p} \partial^{J_1} C_{J_1, J_2}(x) \partial^{J_2}$$

через соответствующие коэффициенты C_{J_1, J_2} из $C^\infty(I_0)$. Интегрирование по частям (см. последний абзац § 2) дает

$$(\tau_4 f, f) = \sum_{|J_1| < p, \ |J_2| \leqslant p} (-1)^{J_1} \int_{I_0} C_{J_1, J_2}(x) \partial^{J_2} f(x) \overline{\partial^{J_1} f(x)}\, dx$$

для всякой функции f из $C_0^\infty(I)$. Из неравенства Гёльдера вытекает существование такой конечной постоянной M, что

$$|(\tau_4 f, f)| \leqslant M |f|_{p-1} |f|_p, \quad f \in C_0^\infty(I).$$

В силу следствия 4.12 мы приходим к выводу о существовании для любого $\varepsilon > 0$ такой конечной постоянной $K(\varepsilon)$, что

(7) $$|(\tau_4 f, f)| < \varepsilon |f|_p^2 + K(\varepsilon) |f|^2, \quad f \in C_0^\infty(I).$$

Выбирая $\varepsilon < k_2$, видим, что наша лемма является следствием неравенств (6) и (7).

10. Лемма (*неравенство Гординга*). *Пусть τ — эллиптический оператор четного порядка $2p$, определенный в области $I_0 \subset E^n$, а I — ограниченное открытое множество, замыкание которого содержится в I_0. Пусть*

$$\tau = \sum_{|J| \leqslant p} a_J(x) \partial^J,$$

и предположим, что

$$(-1)^p \operatorname{Re} \sum_{|J| \leqslant 2p} a_J(x) \xi^J > 0, \quad x \in I_0,$$

для всех векторов $\xi \neq 0$ из E^n. Тогда существуют постоянные $K < \infty$ и $k > 0$, такие, что

$$\operatorname{Re}(\tau f, f) + K(f, f) \geqslant k |f|_p^2, \quad f \in C_0^\infty(I).$$

Доказательство. Мы будем сводить наше утверждение к его все более и более простым частным случаям и, наконец, докажем простейший. Пусть $\hat{\tau} = (\tau + \tau^*)/2$. Тогда из формул § 2, приведенных непосредственно после определений операторов τ^*, τ^+ и $\bar{\tau}$, и правила Лейбница, примененного к τ^*, мы имеем $\hat{\tau} = \hat{\tau}^*$ и

$$\hat{\tau} = \frac{1}{2}(\tau + \tau^*) = \sum_{|J|=2p} \operatorname{Re} a_J(x)\,\partial^J + \sum_{|J|<2p} b_J(x)\,\partial^J,$$

где b_J — некоторые коэффициенты. Более того, мы имеем в силу формулы Грина (1) последнего абзаца § 2

$$\operatorname{Re}(\tau f, f) = \frac{1}{2}\{(\tau f, f) + (f, \tau f)\} = \frac{1}{2}((\tau + \tau^*) f, f) = (\hat{\tau} f, f)$$

для любой функции $f \in C_0^\infty(I)$. Таким образом, мы должны доказать неравенство

$$(\hat{\tau} f, f) + K(f, f) \geqslant k\,|f|_{(p)}^2, \quad f \in C_0^\infty(I).$$

Следовательно, без ограничения общности мы можем считать, что $\tau = \hat{\tau}$, т. е. что оператор $\tau = \tau^*$ является формально самосопряженным, и что $\sum_{|J|=2p} a_J(x)\,\xi^J > 0$ для всех $x \in I_0$ и $\xi \neq 0$ из E^n.

Индукцией по $|J_1|$ мы можем проверить выполнение для любой функции C из $C_0^\infty(I_0)$ формального равенства

$$\partial^{J_1} C(x)\,\partial^{J_2} = C(x)\,\partial^{J_1}\partial^{J_2} + \sum_{|J|<|J_1|+|J_2|} C_{J, J_1} a_J(x)\,\partial^J, \tag{1}$$

где C_{J, J_1} — соответствующие коэффициенты. Используя тождества типа (1), мы можем, очевидно, доказать индукцией по порядку оператора τ, что τ представим в виде

$$\tau = \sum_{|J_1|=p,\ |J_2|=p} \partial^{J_1} d_{J_1, J_2}(x)\,\partial^{J_2} + \sum_{|J_1|<p,\ |J_2|\leqslant p} \partial^{J_1} d_{J_1, J_2}(x)\,\partial^{J_2}, \tag{2}$$

где коэффициенты d_{J_1, J_2} принадлежат $C^\infty(I_0)$. Из формального тождества (1) непосредственно вытекает, что

$$\sum_{|J_1|=p,\ |J_2|=p} d_{J_1, J_2}(x)\,\partial^{J_1}\partial^{J_2} = \sum_{|J|=2p} a_J(x)\,\partial^J.$$

Из этого соотношения между формальными дифференциальными операторами вытекает равенство

$$\sum_{|J_1|=p,\ |J_2|=p} d_{J_1, J_2}(x)\,\xi^{J_1}\xi^{J_2} = \sum_{|J|=2p} a_J(x)\,\xi^J, \qquad \xi \in E^n,$$

так что

$$(-1)^p \sum_{|J_1|=|J_2|=p} d_{J_1, J_2}(x)\, \xi^{J_1}\xi^{J_2} > 0, \quad x \in I_0, \qquad \xi \in E^n.$$

Так как

$$\tau = \tau^* = \frac{1}{2}(\tau + \tau^*) = \sum_{|J_1|=|J_2|=p} \partial^{J_1}\, \overline{d_{J_2, J_1}(x)}\, \partial^{J_2} + \tau_1 =$$

$$= \sum_{|J_1|=|J_2|=p} \partial^{J_1}\left(d_{J_1, J_2}(x) + \overline{d_{J_2, J_1}(x)}\right) \partial^{J_2} + \tau_2,$$

где τ_1 и τ_2 — формальные операторы порядка не выше $2p-1$, то мы можем без ограничения общности считать, что $d_{J_1, J_2}(x) = \overline{d_{J_2, J_1}(x)}$ для $x \in I_0$ и $|J_1| = |J_2| = p$. Поэтому если положить

$$\tau_0 = \sum_{|J_1|=|J_2|=p} \partial^{J_1} d_{J_1, J_2}(x)\, \partial^{J_2},$$

то τ_0 — формально симметрический оператор, $\tau_0 = \tau_0^*$. Мы покажем ниже, что существуют постоянные $K_1 < \infty$ и $k_1 > 0$, такие, что

(3) $$(\tau_0 f, f) + K_1 (f, f) \geqslant k_1 (f, f)_{(p)}, \qquad f \in C_0^\infty(I).$$

Из неравенства (2) и формулы Грина вытекает, что

$$(\tau f, f) = (\tau_0 f, f) + \sum_{|J_1|<p,\ |J_2|\leqslant p} \int_I (-1)^{J_1} d_{J_1, J_2}(x)\, \partial^{J_2} f(x)\, \partial^{J_1} f(x)\, dx$$

для любой функции f из $C_0^\infty(I)$. Так как коэффициенты d_{J_1, J_2} равномерно ограничены в I, то в силу неравенства Шварца (см. III.3.2) существует такая постоянная $K_2 < \infty$, что

$$|(\tau f, f) - (\tau_0 f, f)| \leqslant K_2 |f|_{(p)} |f|_{(p-1)}, \qquad f \in C_0^\infty(I).$$

Из леммы 4.12 вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует конечная постоянная $K(\varepsilon)$, такая, что

$$|f|_{(p)} |f|_{(p-1)} \leqslant \varepsilon |f|_{(p)}^2 + K(\varepsilon) |f|_{(0)}^2, \qquad f \in C_0^\infty(I).$$

Поэтому

(4) $$|(\tau f, f) - (\tau_0 f, f)| \leqslant \varepsilon K_2 |f|_{(p)}^2 + K_2 K(\varepsilon) |f|_{(0)}^2.$$

Предположим, что неравенство (3) доказано. Тогда если постоянная ε в (4) выбрана настолько малой, что $|\varepsilon K_2| < k_1/2$, где k_1 — то же, что и в (3), то из неравенства (3) будет вытекать, что

$$(\tau f, f) + K_1 (f, f) + |K_2 K(\varepsilon)|\, (f, f) \geqslant \frac{1}{2} k_1 (f, f)_{(p)},$$

и если положить $K = K_1 + |K_2 K(\varepsilon)|$, $k = \frac{1}{2} k_1$, то лемма будет доказана.

Для завершения доказательства леммы нужно установить неравенство (3). В силу предыдущей леммы и теоремы Гейне — Бореля достаточно показать, что каждая точка x_0 в I_0 имеет окрестность I_1, настолько малую, что для некоторых постоянных $K_1 < \infty$ и $k_1 > 0$

(5) $$(\tau_0 f, f) + K_1 (f, f) \geqslant k_1 (f, f)_{(p)}, \quad f \in C_0^\infty (I_1).$$

Пусть

$$\sigma_0 = \sum_{|J_1| = |J_2| = p} \partial^{J_1} d_{J_1, J_2} (x_0) \partial^{J_2},$$

$$\sigma_1 = \sum_{|J_1| = |J_2| < p} \{ \partial^{J_1} d_{J_1, J_2} (x) \partial^{J_2} - \partial^{J_1} d_{J_1, J_2} (x_0) \partial^{J_2} \}.$$

Тогда $\tau_0 = \sigma_0 + \sigma_1$. Мы покажем ниже, что существует окрестность I_1 точки x_0, настолько малая, что для некоторых $K_2 < \infty$ и $k_2 > 0$ мы имеем

(6) $$(\sigma_0 f, f) + K_2 (f, f)_{(p)} \geqslant k_2 (f, f)_{(p)}, \quad f \in C_0^\infty (I_1).$$

Так как $\tau_0 = \sigma_0 + \sigma_1$, то интегрирование по частям и неравенство Шварца дают

$$|(\tau_0 f, f) - (\sigma_0 f, f)| \leqslant$$

(7) $$\leqslant \sum_{|J_1| = |J_2| = p} \int_{I_1} | d_{J_1, J_2} (x) - d_{J_1, J_2} (x_0) | \, | \partial^{J_1} f (x) | \, | \partial^{J_2} f (x) | \, dx \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\substack{x \in I_1 \\ |J_1| = |J_2| = p}} | d_{J_1, J_2} (x) - d_{J_1, J_2} (x_0) | \sum_{|J_1| = |J_2| = p} | \partial^{J_1} f | \cdot | \partial^{J_2} f | \leqslant n^{2p} \cdot \delta |f|_{(p)}^2$$

для любой функции f из $C_0^\infty (I)$, если I_1 выбрана настолько малой, что

(8) $$\sup_{\substack{x \in I_1 \\ |J_1| = |J_2| = p}} | d_{J_1, J_2} (x) - d_{J_1, J_2} (x_0) | < \delta.$$

Таким образом, если выбрать δ настолько малым, что $n^{2p} \cdot \delta < k_2/2$, а I_1 настолько малой, что выполнено (8), то из неравенства (6) будет вытекать

$$(\tau_0 f, f) + K_2 (f, f) \geqslant \frac{1}{2} k_2 (f, f)_{(p)}, \quad f \in C_0^\infty (I),$$

откуда непосредственно следует неравенство (5). Тем самым достаточно установить лишь неравенство (6).

Сдвигая координаты, мы можем, очевидно, без ограничения общности предполагать, что $x_0=0$, и можем тогда выбрать I_1 настолько малой, чтобы она содержалась в кубе

$$C=\{x\in E^n \mid |x_i|\leqslant\pi,\quad i=1,\ \ldots,\ n\}.$$

Пусть

$$f(x)=\sum_{|L|=n} f_L e^{iL\cdot x},\qquad x\in C$$

— разложение в ряд Фурье функции f в кубе C (см. лемму 3.39). Тогда по лемме 3.40

$$(\sigma_0 f)(x)=\sum_{|L|=n} P(L)\,C_L(f)\,e^{iL\cdot x},\qquad x\in C,$$

где

$$P(\xi)=(-1)^p\sum_{|J_1|=p,\ |J_2|=p} d_{J_1,J_2}(0)\,\xi^{J_1}\xi^{J_2}$$

— ряд Фурье функции $\sigma_0 f$ в кубе C. Таким образом (см. IV.4.13), мы имеем

(9) $$(\sigma_0 f,\ f)+(Kf,\ f)=\sum_{|L|=n}(P(L)+K)\,|C_L(f)|^2,\quad f\in C_0^\infty(I).$$

Точно так же

(10) $$(f,\ f)_{(p)}=\sum_{|L|=n} Q(L)\,|C_L(f)|^2,\quad f\in C_0^\infty(I),$$

где

$$Q(\xi)=\sum_{|J|\leqslant p}(\xi^J)^2.$$

Так как $Q(\xi)$ — многочлен по ξ порядка $2p$, то существует конечная положительная постоянная A, такая, что

(11) $$|Q(\xi)|\leqslant A(|\xi|^{2p}+1),\qquad \xi\in E^n.$$

Так как $P(\xi)$ является по предположению неотрицательным однородным многочленом по ξ порядка $2p$, то существует конечная положительная постоянная B, такая, что

$$\varliminf_{|\xi|\to\infty}(1+|\xi|^{2p})^{-1}P(\xi)>B.$$

Таким образом, для достаточно больших K_2

(12) $$B(1+|\xi|^{2p})\leqslant P(\xi)+K_2,\quad \xi\in E^n,$$

и в силу неравенств (9), (10), (11) и (12) мы имеем

$$BA^{-1}(f,\ f)_{(p)}\leqslant(\sigma_0 f,\ f)+K_2(f,\ f),\quad f\in C_0^\infty(I),$$

так что, полагая $K_2 = BA^{-1}$, мы доказываем неравенство (6), а вместе с ним и нашу лемму.

11. Следствие. *Пусть τ — эллиптический формальный дифференциальный оператор с частными производными четного порядка $2p$, удовлетворяющий условиям леммы 10 и определенный в ограниченной области E^n, такой же, как в лемме 10. Пусть $T = T(\tau)$ — оператор в гильбертовом пространстве $L_2(I)$, определенный соотношениями*

$$\mathfrak{D}(T(\tau)) = \mathfrak{D}(T) = \mathfrak{D}(T_1(\tau)) \cap H_0^p(I),$$
$$Tf = T_1(\tau) f, \quad f \in \mathfrak{D}(T).$$

Тогда спектр $\sigma(T)$ является счетным дискретным множеством точек, не имеющим конечных предельных точек, и для $\lambda \notin \sigma(T)$ резольвента $R(\lambda; T)$ является вполне непрерывным оператором.

Доказательство. Точно так же, как и в доказательстве предыдущей леммы, получаем, что $(T_1(\tau) f, g)$ можно представить в виде

$$(1) \qquad (T_1(\tau) f, g) = \sum_{|J_1| \leqslant p,\ |J_2| \leqslant p} (-1)^{|J_1|} \int_I d_{J_1, J_2}(x)\, \partial^{J_1} f(x)\, \partial^{J_2} \overline{g(x)}\, dx,$$
$$f, g \in C_0^\infty(I),$$

где коэффициенты d_{J_1, J_2} принадлежат $C_0^\infty(I_0)$ и, в частности, равномерно ограничены на I. Таким образом, в силу равенства (1), неравенства Шварца и предыдущей леммы, мы можем найти вещественное число λ, настолько большое, что существуют постоянные K_1 и k_1, такие, что

$$(2) \qquad |(T_1(\tau+\lambda) f, g)| \leqslant K_1 |f|_{(p)} |g|_{(p)}, \qquad f, g \in C_0^\infty(I),$$

и

$$(3) \qquad \operatorname{Re}(T_1(\tau+\lambda) f, f) \geqslant k_1 |f|_{(p)}^2, \qquad f, g \in C_0^\infty(I).$$

В силу (2) выражение $(T_1(\tau+\lambda) f, g)$ можно продолжить до непрерывной билинейной формы $[f, g]$, определенной на замыкании $H_0^{(p)}(I)$ подпространства $C_0^\infty(I)$ в $H_0^{(p)}(I)$ (см. I.6.17). Так как $H_0^{(p)}(I)$ — гильбертово пространство (см. 3.16), то $[f, g] = (Af, g)_{(p)}$ (см. IV.4.5) при некотором векторе $Af \in H_0^{(p)}(I)$ для любых $f \in H_0^{(p)}(I)$ и $g \in H_0^{(p)}(I)$. Поскольку форма $[f, g]$ ограничена и билинейна, то A является ограниченным линейным отображением $H_0^{(p)}(I)$ в себя. В силу (3) и неравенства Шварца

$$(4) \qquad |Af|_{(p)} |f|_{(p)} \geqslant |(Af, f)_{(p)}| \geqslant k_1 |f|_{(p)}^2, \qquad f \in C_0^\infty(I),$$

так что в силу непрерывности эти неравенства выполнены для всех $f \in H_0^{(p)}(I)$. Это показывает, что $|Af|_{(p)} \geqslant k_1 |f|_{(p)}$, и потому оператор A^{-1} определен на $AH_0^{(p)}(I)$, однозначен и ограничен. Если $AH_0^{(p)}(I)$ не плотно в $H_0^{(p)}(I)$, то (см. IV.4.4) существует такой элемент f в $H_0^{(p)}(I)$, что $f \neq 0$ и $(AH_0^{(p)}(I), f)_{(p)} = 0$. Но тогда $(Af, f)_{(p)} = 0$, что противоречит соотношению (4). Это показывает, что $AH_0^{(p)}(I)$ плотно в $H_0^{(p)}(I)$. Пусть f — произвольный элемент из $H_0^{(p)}(I)$ и f_n — такая последовательность в $H_0^{(p)}(I)$, что $|Af_n - f|_{(p)} \to 0$. Так как A^{-1} ограничен, то $\{f_n\}$ — фундаментальная последовательность и, следовательно, сходится к пределу g в $H_0^{(p)}(I)$. Мы имеем $Ag = f$. Это означает, что $AH_0^{(p)}(I) = H_0^{(p)}(I)$, и тем самым A^{-1} — ограниченный всюду определенный оператор в $H_0^{(p)}(I)$.

Пусть f — произвольный элемент из $H_0^{(p)}(I)$ и $g \in C_0^\infty(I)$. Пусть $f_m \in C_0^\infty(I)$ и $|f_m - f|_{(p)} \to 0$ при $m \to \infty$. Тогда $f_m \to f$ в топологии $L_2(I)$, так что по определению 3.26 и лемме 3.27 $f_m \to f$ в топологии $D(I)$ и $(\tau + \lambda) f_m \to (\tau + \lambda) f$ в топологии $D(I)$. Следовательно,

$$(5)\qquad \int_I (\tau + \lambda) f(x) \overline{g(x)}\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_I (\tau + \lambda) f_n(x) \overline{g(x)}\, dx = \lim_{n\to\infty} (Af_n, g)_{(p)} = (Af, g)_{(p)}$$

для любых $f \in H_0^{(p)}(I)$ и $g \in C_0^\infty(I)$, и тем самым

$$(6)\qquad ((T + \lambda I) f, g) = (Af, g)_{(p)}$$

для любых $f \in H_0^{(p)}(I)$ и $g \in C_0^\infty(I)$. Из соображений непрерывности ясно, что (6) выполнено для всех $f \in \mathfrak{D}(T)$ и $g \in H_0^{(p)}(I)$.

Ввиду соотношений (4), (6) и неравенства Шварца

$$|(T + \lambda I) f| |f| \geqslant |((T + \lambda I) f, f)| \geqslant k_1 |f|_{(p)} |f|_{(p)} \geqslant k_1 |f|_{(p)} |f|$$

для $f \in \mathfrak{D}(T)$, и потому

$$(7)\qquad |(T + \lambda I) f| \geqslant k_1 |f|_{(p)}, \qquad f \in \mathfrak{D}(T).$$

Таким образом, оператор $(T + \lambda I)$ взаимно однозначен, а $(T + \lambda I)^{-1}$ определен на $(T + \lambda I)\mathfrak{D}(T)$ и ограничен.

Если g — произвольно выбранный элемент в $L_2(I)$, то $\varphi(f) = (g, f)$, очевидно, является *антилинейным* функционалом, непрерывным на $H_0^{(p)}(I)$. Таким образом, существует элемент $h \in H_0^{(p)}(I)$, такой, что

$$\int_I g(x)\overline{f(x)}\,dx = (g, f) = (h, f)_{(p)} = (AA^{-1}h, f)_{(p)} = \\ = \int_I (\tau+\lambda)(A^{-1}h)(x)\overline{f(x)}\,dx$$

для всех $f \in C_0^\infty(I)$; последнее равенство вытекает из (6). Это показывает, что $(\tau+\lambda)A^{-1}h = g$, и потому $A^{-1}h \in \mathfrak{D}(T)$; тем самым установлено, что оператор $(T+\lambda I)^{-1}$ ограничен и всюду определен.

В силу неравенства (7)

$$|(T+\lambda I)^{-1}f|_{(p)} \leqslant k_1^{-1}|f|, \qquad f \in L_2(I);$$

это неравенство показывает в силу следствия 4.11, что оператор $R(\mu_0; T_0)$ вполне непрерывен при любом отрицательном μ_0, достаточно большом по абсолютной величине. Тогда по лемме VII.9.2 и теореме VII.4.5 спектр $\sigma(T)$ является счетным дискретным множеством точек без конечных предельных точек. Если $\lambda \notin \sigma(T)$, то

$$R(\lambda; T) = R(\mu_0; T_0) + (\mu_0 - \lambda)R(\mu_0; T)R(\lambda; T)$$

(см. определение VII.9.3 и теорему VII.9.5), так что $R(\lambda; T)$ вполне непрерывен по теореме VI.5.4, ч. т. д.

12. Следствие. *Пусть выполнены условия следствия* 11. *Тогда существуют постоянные $K < \infty$ и $k > 0$, такие, что*

$$\operatorname{Re}(Tf, f) + K(f, f) \geqslant k|f|_{(p)}^2, \qquad f \in \mathfrak{D}(T).$$

Доказательство. Это утверждение вытекает непосредственно из формулы (6) предыдущего следствия, если только доказать существование такой постоянной $k > 0$, что

$$\operatorname{Re}(Af, f)_{(p)} \geqslant k(f, f)_{(p)}, \qquad f \in H_0^{(p)}(I).$$

В силу (3) это неравенство выполнено для всех $f \in C_0^\infty(I)$. Но $C_0^\infty(I)$ плотно в $H_0^{(p)}(I)$; таким образом, по непрерывности это неравенство выполнено для всех $f \in H_0^{(p)}(I)$.

13. Лемма. *Пусть A_1 и A_2 — линейные операторы в гильбертовом пространстве, определенные на плотном множестве. Предположим, что существует $\lambda \notin \sigma(A_1)$, такое, что $\bar\lambda \notin \sigma(A_2)$, $A_1 \subseteq A_2^*$ и $A_2 \subseteq A_1^*$. Тогда $A_1 = A_2^*$, $A_2 = A_1^*$.*

Доказательство. Пусть $B_1=(\lambda I-A_1)^{-1}$, $B_2=(\bar{\lambda} I-A_2)^{-1}$. Тогда если x и y — векторы гильбертова пространства, то

$$(B_1x,\ y)=(B_1x,\ (\bar{\lambda} I-A_2)B_2y)=((\lambda I-A_1)B_1x,\ B_2y)=(x,\ B_2y).$$

Следовательно, $B_1=B_2^*$ и $B_2=B_1^*$. Из леммы XII.1.6 вытекает, что $(\lambda I-A_1)=(\bar{\lambda} I-A_2)^*$, $(\bar{\lambda} I-A_2)=(\lambda I-A_1)^*$; тогда, снова в силу леммы XII.1.6, $A_1=A_2^*$, $A_2=A_1^*$, ч. т. д.

14. Следствие. *Пусть τ — эллиптический оператор четного порядка $2p$, определенный в ограниченной области I. Предположим, что выполнены условия леммы* 10. *Пусть T и S — операторы в гильбертовом пространстве $L_2(I)$, определяемые соотношениями*

$$\mathfrak{D}(T)=\mathfrak{D}(T_1(\tau))\cap H_0^{(p)}(I);\ \mathfrak{D}(S)=\mathfrak{D}(T_1(\tau^*))\cap H_0^{(p)}(I),$$
$$Tf=T_1(\tau)f,\ f\in\mathfrak{D}(T);\ Sf=T_1(\tau^*)f,\ f\in\mathfrak{D}(S).$$

Тогда $T=S^*$ и $S=T^*$.

Доказательство. По предыдущей лемме и следствию 11 достаточно показать, что $(Tf,\ g)=(f,\ Sg)$ для $f\in\mathfrak{D}(T)$ и $g\in\mathfrak{D}(S)$. По формуле Грина, доказанной в последнем абзаце § 2, это равенство выполнено, если f и g принадлежат $C_0^\infty(I)$. Как и в доказательстве формулы (6) следствия 11, получаем, что существуют ограниченные операторы A и B, отображающие $H_0^{(p)}(I)$ в себя, такие, что

$$(Tf,\ g)=(Af,\ g)_{(p)},\ (f,\ Sg)=(Bf,\ g)_{(p)},\ f\in\mathfrak{D}(T),\ g\in\mathfrak{D}(S).$$

Мы видели, что $(Af,\ g)=(Bf,\ g)$ для всех f и g из $C_0^\infty(I)$, а $C_0^\infty(I)$ плотно в $H_0^{(p)}(I)$ по определению $H_0^{(p)}(I)$; поэтому из соображений непрерывности отсюда вытекает, что $(Af,\ g)=(Bf,\ g)$ для всех f и g из $H_0^{(p)}(I)$. Таким образом, $(Tf,\ g)=(f,\ Sg)$ для всех $f\in\mathfrak{D}(T)$ и $g\in\mathfrak{D}(S)$, ч. т. д.

Теперь мы рассмотрим вопрос о «дифференцируемости вплоть до границы». Мы докажем аналог теоремы 2, справедливый вплоть до границы области с гладкой границей. Метод доказательства близок к методу доказательства теоремы 2, однако он усложняется наличием границы. Идея преодоления этой трудности состоит в следующем. Если граница предполагается гладкой, то ее можно с таким же успехом считать и плоской. При этом условии доказательство теоремы 2 может быть модифицировано следующим образом. Так же, как и раньше, осуществляется процесс сведения доказательства к тому частному случаю, когда рассматриваемый дифференциальный оператор с частными производными имеет постоянные коэффициенты. Для исследования этого частного случая вместо разложения в ряд Фурье, которое теперь невозможно из-за наличия плоской границы, мы используем процесс сдвига, параллельного границе, неравенство Гординга и важную лемму Ж. Лионса, что позволяет нам разобрать случай постоянных коэффициентов, прибегая к простому индуктивному доказательству.

Следующая лемма носит предварительный характер.

15. Лемма. *Пусть I — куб в E^n, p — натуральное число и $\varphi \in C^p(E^n)$. Предположим, что все частные производные функции φ порядка не выше p обращаются в нуль на границе I. Тогда существует последовательность $\{\psi_n\}$ функций в $C_0^\infty(I)$, такая, что $\psi_n \to \psi$ по норме $C^p(\bar{I})$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. Мы можем, очевидно, без ограничения общности считать, что

$$I = \{x \in E^n \,|\, |x_i| \leqslant 1, \ i = 1, \ldots, n\}.$$

Если положить $\hat{\varphi}(x) = \varphi(x)$, $x \in I$, и $\hat{\varphi}(x) = 0$, $x \notin I$, то функция $\hat{\varphi}$, очевидно, удовлетворяет тем же условиям, что и φ. Поэтому мы можем считать, что $\varphi(x) = 0$ для $x \notin I$. Так как функции φ_ε, определяемые соотношением $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi((1-\varepsilon)x)$, в силу леммы 2.5 сходятся к φ по норме $C^p(\bar{I})$ при $\varepsilon \to 0$, то ясно, что мы можем без ограничения общности считать, что $\varphi \in C_0^p(I)$. Это мы и будем предполагать в дальнейшем.

Пусть K — компактное подмножество внутренности I, вне которого функция φ обращается в нуль. Пусть $\varepsilon_1 > 0$ настолько мало, что всякая точка, отстоящая от K на расстоянии, меньшем $2\varepsilon_1$, является внутренней в I. Для каждого ε, $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$, по лемме 2.1 можно найти функцию $\eta = \eta_2$, такую, что $\eta(x) = 0$ при $|x| > \varepsilon$ и

$$\int_{E^n} \eta(x)\, dx = 1. \tag{1}$$

Положим

$$\psi(x) = \int_{E^n} \eta(x-y)\, \varphi(y)\, dy = \int_{E^n} \varphi(x-y)\, \eta(y)\, dy. \tag{2}$$

Так как $\eta \in C_0^\infty(E^n)$, то первый из этих интегралов можно дифференцировать сколько угодно раз под знаком интеграла, так что $\psi \in C^\infty(E^n)$. Если $\psi(x) \neq 0$, то должна найтись точка y, такая, что $\eta(x-y) \neq 0$ и $\varphi(y) \neq 0$. Поэтому $|x-y| < \varepsilon_1$ и $y \in K$, так что x

является внутренней в I и отстоит на расстоянии не меньше ε_1 от границы I. Тем самым $\psi \in C_0^\infty(I)$. Так как $\varphi \in C_0^{(p)}(E^n)$, то второй интеграл в (2) можно дифференцировать p раз под знаком интеграла; поэтому

$$\partial^J \psi(x) = \int_{E^n} (\partial^J \varphi)(x-y)\,\eta(y)\,dy, \quad |J| \leqslant p.$$

Используя (1), получаем

$$(3) \qquad |\partial^J \psi(x) - \partial^J \varphi(x)| = \left| \int_{E^n} \{(\partial^J \varphi)(x-y) - \partial^J \varphi(x)\}\,\eta(y)\,dy \right| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{|y| \leqslant \varepsilon} |(\partial^J \varphi)(x-y) - \partial^J \varphi(x)|.$$

Так как $\varphi \in C_0^{(p)}(E^n)$, то ясно, что если $\delta > 0$, то, выбирая $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ достаточно малым, можно добиться выполнения неравенства

$$\max_{|y| \leqslant \varepsilon} |(\partial^J \varphi)(x-y) - \partial^J \varphi(x)| < \delta, \quad |J| \leqslant p.$$

Отсюда непосредственно вытекает лемма.

Первый существенный шаг в нашем исследовании — доказательство следующей леммы, принадлежащей Ж. Лионсу.

16. Лемма. *Пусть I обозначает куб $\{x \in E^n \mid 0 < x_j < 1, j = 1, \ldots, n\}$, $F \in D(I)$, а $p > 0$ и q — такие целые числа, что $p + q > 0$. Тогда если $F \in L_2(I)$ и $\partial_j^p F \in H^{(q)}(I)$, $j = 1, \ldots, n$, то F принадлежит $H^{(p+q)}(I)$.*

Доказательство основано на очень простом «принципе отражения», который мы установим в удобной для нас форме. Пусть k — натуральное число (его выбор будет уточнен ниже). Пусть $\alpha_{-k}, \ldots, \alpha_k$ — множество различных положительных чисел, больших, чем единица. Пусть $c_{-k}, \ldots, c_k$ — решение системы линейных уравнений

$$(1) \qquad \sum_{j=-k}^{k} (-1)^j \alpha_j^l c_j - 1 = 0, \qquad l = -k, \ldots, +k.$$

Так как определитель Вандермонда этой системы линейных уравнений не равен нулю, то вещественные числа c_j существуют и единственны. Для всякой функции $\varphi \in C_0^\infty(E^n)$ положим

$$(2) \qquad (R_j^{(l)} \varphi)(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(x_1, \ldots, x_{l-1}, -\alpha_j x_l, x_{l+1}, \ldots, x_n),$$

так что $R_j^{(l)}$ определяет отображение $C_0^\infty(E^n)$ в себя для каждой пары целых чисел, удовлетворяющих неравенствам $1 \leqslant l \leqslant n$

и $-k \leqslant j \leqslant +k$. Все операторы $R_j^{(l)}$, очевидно, коммутируют друг с другом. Положим

(3) $$S_j^{(l)}\varphi = \varphi - \sum_{i=-k}^{k} (-\alpha_i)^j c_i R_i^{(l)}\varphi, \quad 1 \leqslant l \leqslant n, \quad -\infty \leqslant j \leqslant +\infty,$$

так что все операторы $S_j^{(l)}$ коммутируют друг с другом, и

(4) $$\partial_m S_j^{(l)} = S_j^{(l)}\partial_m, \quad l \neq m, \quad 1 \leqslant l, \quad m \leqslant n, \quad -\infty < j < +\infty,$$
$$\partial_l S_j^{(l)} = S_{j+1}^{(l)}\partial_l, \quad 1 \leqslant l \leqslant n, \quad -\infty < j < +\infty.$$

Положим

(5) $$S_L = S_{l_1}^{(1)} \ldots S_{l_n}^{(n)}$$

для каждого индекса L, такого, что $|L| = n$. Из соотношений (4) тогда вытекает, что

(6) $$\partial_m S_L = S_{L'}\partial_m,$$

где $L' = [l_1, \ldots, l_{m-1}, l_m + 1, l_{m+1}, \ldots, l_n]$, а $L = [l_1, \ldots, l_n]$.

В силу (1) и определений (2), (3) и (5) оператора S_L мы имеем

(7) $$(S_L\varphi)(x) = 0, \quad \varphi \in C(E^n), \quad -k \leqslant \min(L) \leqslant \max(L) \leqslant k,$$

если один из $x_1, \ldots, x_n$ *равен нулю*. Пусть I_0 обозначает куб $I_0 = \{x \in E^n \mid |x_i| \leqslant 1, \ i = 1, \ldots, n\}$. Тогда при $-k \leqslant \min(L) \leqslant \max(L) \leqslant k$ S_L является отображением $C_0^\infty(I_0)$ в себя, переводящим все $C_0^\infty(I_0)$ в множество функций, обращающихся в нуль на границе куба I. Заметим далее, что в силу (6) $\partial_m S_L\varphi = S_{L'}\partial_m\varphi$ и в силу (7) $S_L\varphi$ обращается в нуль вместе со всеми своими первыми производными, если один из $x_1, \ldots, x_n$ равен нулю и $-k \leqslant \min(L) \leqslant \max(L) \leqslant k-1$. Точно так же, используя соотношения (6) и (7), мы убеждаемся, что $S_L\varphi$ обращается в нуль вместе со всеми производными порядка не выше j, если один из $x_1, \ldots, x_n$ равен нулю и $-k \leqslant \min(L) \leqslant \max(L) \leqslant k-j$. Поэтому если $T_L\varphi$ определяется соотношением $T_L\varphi = S_L\varphi \mid I$, то T_L отображает $C_0^\infty(I_0)$ в $C^\infty(\overline{I})$ и все первые j производных $T_L\varphi$ обращаются в нуль на границе I при $-k \leqslant \min(L) \leqslant \max(L) \leqslant k-j$. Следовательно, по предыдущей лемме T_L отображает $C_0^\infty(I_0)$ в $H_0^{(j)}(I)$ при $-k \leqslant \min(L) \leqslant \max(L) \leqslant k-j$. Из определения 3.15 ясно, что это отображение непрерывно.

Предположим теперь, что $q \leqslant 0$. Заметим, что так как $F \in L_2(I)$, то формула $F(\varphi) = \int F(x)\varphi(x)\,dx$ определяет продолжение линейного функционала F до непрерывного линейного функционала в $L_2(I)$. Пусть распределение $G \in D(I_0)$ определяется соотношением $G(\varphi) = F(T_0\varphi)$, где 0 означает векторный индекс, все составляющие которого равны нулю, и где (в дальнейшем это предполагается) k выбрано так, что $k \geqslant 2\max(-q, p)$. Тогда в силу (6) и определения T_L

$$(8) \qquad G(\partial_j^p\varphi) = F(T_0\partial_j^p\varphi) = F(\partial_j^p T_{L_j^p}\varphi), \quad \varphi \in C_0^\infty(I_0),$$

где L_j^p есть n-набор, у которого на j-м месте стоит $-p$, а на всех остальных — нули. По предположению и в силу определения 3.17 существует конечная постоянная A, такая, что

$$|F(\partial_j^p\psi)| \leqslant A|\psi|_{(-q)}, \quad \psi \in C_0^\infty(I), \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Из непрерывности функционала $F(\widetilde{\psi})$ ($\widetilde{\psi}$ берется с нормой $|\psi|_0$) и непрерывности отображения $\psi \longrightarrow \partial_j^p\psi$ из $H^{(p)}(I)$ в $H^{(0)}(I)$ вытекает, что это же неравенство выполнено при $\psi \in H_0^{(r)}(I)$ и $r = \max(-q, p)$. Так как $k \geqslant 2\max(-q, p)$, так что $r \leqslant k - p$ и $T_{L_j^p}\varphi \in H_0^{(r)}(I)$, то из соотношения (8) вытекает, что

$$(9) \qquad |(\partial_j^p G)(\varphi)| \leqslant A|T_{L_j^p}\varphi|_{(-q)}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Из определения отображения T_L и определения 3.15 следует существование такой конечной постоянной B, что $|T_L\varphi|_{(-q)} \leqslant B|\varphi|_{(-q)}$ для $\varphi \in C_0^\infty(I_0)$. Таким образом, в силу (9) $\partial_j^p G$ лежит в $H^{(q)}(I_0)$ при $1 \leqslant j \leqslant n$. Поэтому если применить теорему 2 к эллиптическому оператору

$$\tau = \partial_1^{2p} + \ldots + \partial_n^{2p},$$

то мы получим, что $G \in A^{(p+q)}(I_0)$. Если $\varphi \in C_0^\infty(I)$, то ясно, что $T_0\varphi = \varphi$. Следовательно, так как $G(\varphi) = F(T_0\varphi)$, то $G \mid I = F$. Вместе с определениями 3.15 и 3.17 это показывает, что $F \mid I_1 \in H^{(p+q)}(I_1)$ для любого открытого подмножества I_1 из I, замыкание которого не пересекается ни с одной из граней куба, не примыкающих к вершине, находящейся в начале координат. Так как любой из углов куба можно рассмотреть точно таким же способом, то в случае $q \leqslant 0$ наша лемма вытекает из леммы 3.21.

Предположим теперь, что $q \geqslant 0$. Тогда $\partial_j^p\partial^J F \in L_2(I)$ при $1 \leqslant j \leqslant n$ и $|J| = q$. Следовательно, по только что доказанному $\partial^J F \in H^{(p)}(I)$, и тем самым $F \in H^{(p+q)}(I)$ по определению 3.15, ч. т. д.

В нескольких последующих доказательствах мы будем рассматривать куб

$$C = \{x \in E^n \mid 0 \leqslant x_1 \leqslant 2\pi, \ |x_j| \leqslant \pi, \quad j = 2, \ldots, n\}$$

евклидова n-мерного пространства E^n. Мы будем предполагать E^n представленным как прямое произведение E^1 и E^{n-1}, так что $E^n = E^1 \oplus E^{n-1}$, и соответственно расписывать каждый вектор x из E^n в виде $x = [x_1, y]$, где $y = [x_2, \ldots, x_n] \in E^{n-1}$. Тогда C можно представить в виде прямого произведения $C = [0, 2\pi] \times C_1$ куба

$$C_1 = \{y \in E^{n-1} \mid 0 \leqslant y_i \leqslant 2\pi, \quad i = 1, \ldots, n-1\}$$

и интервала $[0, 2\pi]$. Мы хотим теперь сосредоточить наше внимание на двух гранях $F_- = \{[0, y] \mid y \in C_1\}$ и $F_+ = \{[2\pi, y] \mid y \in C_1\}$ куба C_1, игнорируя остальные его грани. Для этого мы будем предполагать, если только не оговорено противное, что все рассматриваемые функции от x являются кратнопериодическими с периодом 2π по переменным $y = [y_1, \ldots, y_{n-1}]$. Соответственно мы будем иметь дело с пространством $F_{\pi_y}(C)$ всех функций от x, кратнопериодических с периодом 2π по переменным $y = [y_1, \ldots, y_{n-1}]$ и с пространствами

$$C^{\infty}_{\pi_y}(C) = \{f \in C^{\infty}(C) \mid f \in F_{\pi_y}(C)\},$$

$$C^{p}_{\pi_y}(C) = \{f \in C^{p}(C) \mid f \in F_{\pi_y}(C)\},$$

$$C^{\infty}_{\pi, 0}(C) = \{f \in C^{\infty}_{\pi_y}(C) \mid f(x_1, y) = 0 \text{ при } x_1, \text{ близком к } 0 \text{ или } 2\pi\}.$$

Из этой последней формулы ясно, что, как и в соответствующем случае пространства $C^{\infty}_{\pi}(C)$, мы можем всякую точку $x = [x_1, y]$, для которой $0 < x_1 < 2\pi$, рассматривать в некотором смысле как внутреннюю точку C. Для этого мы должны лишь воспользоваться кратной периодичностью по переменным $y = [y_1, \ldots, y_{n-1}]$ всех рассматриваемых функций и ввести координаты, сдвинутые таким образом, что точка p становится внутренней в $C = [0, 2\pi] \times C_1$ (см. аналогичные соображения перед определением 3.29).

Мы пишем $f_n \rightrightarrows f$ для $f_n, f \in C^{\infty}_{\pi, 0}(C)$, если $f_n \to f$ в топологии $C^{\infty}_{\pi_y}(C)$ и если все функции f_n обращаются в нуль вне фиксированного множества вида $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon] \times C_1$, $\varepsilon > 0$, и обозначаем через $D_{\pi_y}(C)$ множество всех линейных функционалов G на $C^{\infty}_{\pi_y, 0}(C)$, непрерывных в том смысле, что из соотношения $f_n \rightrightarrows f$ вытекает $G(f_n) \to G(f)$. Все остальные понятия теории распределений, как, например, сумма двух элементов из $D_{\pi_y}(C)$, произведение элемента из $D_{\pi_y}(C)$ на элемент из $C^{\infty}_{\pi_y}(C)$, частные производные элемента из $D_{\pi_y}(C)$, могут быть введены так же, как и в § 3 (см. подобные рассуждения после определения 3.28). Обозначая через J

произвольный индекс в E^n, мы можем теперь ввести гильбертово пространство

$$H^{(p)}_{\pi_y}(C)=\{f\in D_{\pi_y}(C)\mid f\in L_2(C),\quad \partial^J f\in L_2(C),\quad |J|\leqslant p\}$$

со скалярным произведением

$$(f, g)_{(p)}=\sum_{|J|\leqslant p}\int_C \partial^J f(y)\,\overline{\partial^J g(y)}\,dy.$$

Обозначим через $H^{(p)}_{\pi_y,0}(C)$ замыкание пространства $C^\infty_{\pi_y,0}(C)$ в топологии $H^{(p)}_{\pi_y}(C)$. Следует отметить, что поскольку функции в $L_2(C)$, $L_2(C_1)$ и т. д. определены лишь почти всюду, то их можно всегда выбирать кратнопериодическими с периодом 2π по всем их переменным. Поэтому нет смысла вводить пространство $H^{(0)}_{\pi_y}(C)$, ибо как линейное пространство оно совпадало бы с $L_2(C)$.

Для удобства формулировки следующей леммы мы введем в рассмотрение прямоугольный параллелепипед $R=[-\pi, 3\pi]\times C_1$ и пространство $C^\infty_{\pi_y}(R)$ всех кратнопериодических функций из $C^\infty(R)$ с периодом 2π по переменным $y=[y_1, \ldots, y_{n-1}]$.

Для дифференциальных операторов с частными производными в R с коэффициентами из $C^\infty_{\pi_y}(R)$ мы можем сформулировать следующий аналог неравенства Гординга (леммы 10). Для доказательства мы должны лишь заметить, что, как было подчеркнуто выше, следует считать граничными точками куба C только точки $\{0\}\times C_1$ и $\{2\pi\}\times C_1$. После этого замечания доказательство проводится так же, как и в лемме 10; детали мы оставляем читателю.

17. Лемма. *Пусть τ — эллиптический формальный дифференциальный оператор четного порядка $2p$, определенный в R. Предположим, что τ имеет вид*

$$\tau=\sum_{|J|\leqslant 2p} a_J(y)\,\partial^J,$$

где все коэффициенты a_J принадлежат $C^\infty_{\pi_y}(R)$, и что

$$\operatorname{Re}(-1)^p\sum_{|J|=2p} a_J(y)\,\xi^J>0,\qquad \xi\neq 0,\qquad y\in R.$$

Тогда существуют постоянные $K<\infty$ и $k>0$, такие, что

$$\operatorname{Re}((\tau+K)f, f)\geqslant k\,|f|_{(p)},\qquad f\in C^\infty_{\pi_y,0}(C).$$

Кроме того, существует постоянная $A<\infty$, такая, что

$$|(\tau f, g)|\leqslant A\,|f|_{(p)}\,|g|_{(p)},\qquad f, g\in C^\infty_{\pi_y,0}(C).$$

Мы докажем теперь важную лемму об эллиптических дифференциальных операторах с частными производными с постоянными коэффициентами.

18. Лемма. *Пусть σ — формальный дифференциальный оператор с частными производными четного порядка $2p$ с постоянными коэффициентами, имеющий вид*

$$\sigma=\sum_{|J|=2p} a_J\partial^J,$$

где

[*] $$\operatorname{Re}(-1)^p\sum_{|J|=2p} a_J\xi^J>0, \qquad \xi\neq 0.$$

Тогда существует такая постоянная K, что для всех $k\geqslant p$, $\sigma+K$ является взаимно однозначным отображением пространства $H^{(p)}_{\pi_y,0}(C)\cap H^{(k)}_{\pi_y}(C)$ на $H^{(k-2p)}_{\pi_y}(C)$ с ограниченным обратным.

Доказательство. Используя лемму 17, выберем K, A и $a>0$ так, что

(1) $$\operatorname{Re}((\sigma^*+K)f, f)\geqslant a|f|^2_{(p)},\quad f\in C^{\infty}_{\pi_y,0}(C)$$

и

(2) $$|((\sigma^*+K)f, g)|\leqslant A|f|_{(p)}|g|_{(p)};\qquad f,\ g\in C^{\infty}_{\pi_y,0}(C).$$

Из неравенства (2) вытекает, что эрмитова билинейная форма $((\sigma^*+K)f, g)$ может быть единственным образом продолжена с $C^{\infty}_{\pi_y,0}(C)$ до непрерывной эрмитовой билинейной формы, определенной на $H^{(p)}_{\pi_y,0}(C)$, и, следовательно, по лемме X.2.2 существует ограниченное отображение Λ пространства $H^{\infty}_{\pi_y,0}(C)$ в себя, такое, что

(3) $$(\Lambda f, g)_{(p)}=((\sigma^*+K)f, g),\qquad f, g\in C^{\infty}_{\pi_y,0}(C).$$

В силу непрерывности это соотношение выполнено также для $f\in C^{\infty}_{\pi_y,0}(C)$ и $g\in H^{\infty}_{\pi_y,0}(C)$. В силу соотношения (1) $\operatorname{Re}(\Lambda f, f)_{(p)}\geqslant$ $\geqslant a|f|^2_{(p)}$ для $f\in C^{\infty}_{\pi_y,0}(C)$. Это неравенство должно в силу непрерывности выполняться и для всех $f\in H^{(p)}_{\pi_y,0}(C)$. Таким образом, $|\Lambda f|_{(p)}|f|_{(p)}\geqslant a|f|^2_{(p)}$, так что $|\Lambda f|_{(p)}\geqslant a|f|_{(p)}$, и Λ взаимно однозначно. Как и в первом абзаце доказательства следствия 11, мы можем теперь показать, что Λ^{-1} определен всюду на $H^{(p)}_{\pi_y,0}(C)$.

Пусть $g\in H^{(-p)}_{\pi_y}(C)$. Тогда по определению 3.17 отображение $\varphi\to(\varphi, g)$, определенное в $C^{\infty}_{\pi_y,0}(C)$, имеет единственное продолжение до непрерывного линейного функционала на пространстве

$H^{(p)}_{\pi_y,0}(C)$, в котором $C^{\infty}_{\pi_y,0}$ плотно по определению. Поэтому в силу леммы IV.4.5 мы можем записать

$$(4)\qquad (\varphi, g) = (\varphi, h)_{(p)}, \quad \varphi \in C^{\infty}_{\pi_y,0}\ (C),$$

где h — некоторый подходящим образом выбранный элемент из $H^{(p)}_{\pi_y,0}(C)$. Пусть $f = (\Lambda^*)^{-1} h$. Тогда в силу соотношений (4) и (3)

$$(\varphi, g) = (\Lambda\varphi, (\Lambda^*)^{-1} h)_{(p)} = ((\sigma^* + K)\varphi, f), \quad \varphi \in C^{\infty}_{\pi_y,0}\ (C).$$

Таким образом, $(\sigma + K) f = g$, и мы доказали, что $\sigma + K$ отображает $H^{(p)}_{\pi_y,0}(C)$ на $H^{(-p)}_{\pi_y}(C)$. Если $(\sigma + K) f = 0$ и $f \in H^{(p)}_{\pi_y,0}(C)$, то мы имеем в силу соотношения (3)

$$((\sigma^* + K)\varphi, f) = (\Lambda\varphi, f)_{(p)} = (\varphi, \Lambda^* f)_{(p)} = 0, \quad \varphi \in C^{\infty}_{\pi_y,0}\ (C).$$

Тогда в силу непрерывности $(g, \Lambda^* f)_{(p)} = 0$ для всех $g \in H^{(p)}_{\pi_y,0}(C)$, так что $\Lambda^* f = 0$ и, следовательно, $f = 0$. Этим доказано, что $\sigma + K$ является взаимно однозначным отображением пространства $H^{(p)}_{\pi_x,0}(C)$ на $H^{(-p)}_{\pi_x}(C)$. Вместе с теоремой о замкнутом графике (II.2.4) это доказывает нашу лемму в частном случае $k = p$.

Отображение $(\sigma + K) : H^{(k)}_{\pi_y}(C) \longrightarrow H^{(k-2p)}_{\pi_y}(C)$ непрерывно по лемме 3.22. Более того, по лемме 3.22 $(\sigma + K)(H^{(p)}_{\pi_y,0}(C) \cap H^{(k)}_{\pi_y}(C)) \subseteq$ $\subseteq H^{(k-2p)}_{\pi_y}(C)$, а по доказанному выше $(\sigma + K) H^{(p)}_{\pi_y,0}(C) \supseteq H^{(k-2p)}_{\pi_y}(C)$. Следовательно, для установления нашей леммы нужно лишь показать, что $\{(\sigma + K)^{-1} H^{(k-2p)}_{\pi_y}(C)\} \cap H^{(p)}_{\pi_y,0}(C) \subseteq H^{(k)}_{\pi_y}(C)$, поскольку из этого вытекает непрерывность и взаимная однозначность отображения $\sigma + K$ замкнутого подпространства $H^{(k)}_{\pi_y}(C) \cap$ $\cap H^{(p)}_{\pi_y,0}(C)$ пространства $H^{(k)}_{\pi_y}(C)$ на $H^{(k-2p)}_{\pi_y}(C)$. Непрерывность обратного к нему отображения следует непосредственно из теоремы о замкнутом графике (II.2.4).

Итак, достаточно показать, что из соотношений $k \geqslant p$, $f \in H^{(p)}_{0}(C)$ и $(\sigma + K) f \in H^{(k-2p)}_{\pi}(C)$ вытекает, что $f \in H^{(k)}_{\pi_y}(C)$. Это будет показано индукцией по k. Предположим, что это верно для всех $k \leqslant k_0$, где $k_0 \geqslant p$. Пусть $f \in H^{(p)}_{\pi_y,0}(C)$ и $g = (\sigma + K) f \in H^{(k_0+1-2p)}_{\pi_y}(C)$. Мы покажем, что $\partial^J \partial_j f \in H^{(k_0-2p)}_{\pi_y}(C)$ для всех $1 \leqslant j \leqslant n$ и $|J| = 2p$. При этом нужный результат будет вытекать непосредственно из леммы 16, обобщенной с $D(C)$ на $D_{\pi_y}(C)$ (см. абзацы, предшествующие 3.38 и следующие за 3.27). Так как условие [*], в частности, означает, что коэффициент при ∂_1^{2p} в $\sigma+K$ отличен от нуля, то, очевидно, достаточно в силу леммы 3.22 и того факта, что $(\sigma+K)f=g\in H_{\pi_y}^{(k_0+1-2p)}(C)$, показать, что $\partial_j\partial^J f\in$ $\in H_{\pi_y}^{(k_0+1-2p)}(C)$ для всех j и J, таких, что $2\leqslant j\leqslant n$ и $|J|=2p-1$. Для определенности в обозначениях мы будем предполагать, что $j=2$. Таким образом, мы должны показать, что $\partial_2\partial^J f\in$ $\in H^{(k_0+1-2p)}(C)$ для всех J, таких, что $|J|=2p-1$. Итак, по лемме 3.22 наша лемма будет полностью доказана, если мы сможем показать, что $\partial_2 f\in H_{\pi_y}^{k_0}(C)$.

Для каждого $\Delta>0$ обозначим через S_Δ непрерывное отображение C в себя, определяемое соотношениями

$$S_\Delta[x_1, x_2, \ldots, x_n]=\begin{cases}[x_1, x_2+\Delta, x_3, \ldots, x_n], & x\in C,\ x_2+\Delta\leqslant\pi,\\ [x_1, x_2+\Delta-2\pi, x_3, \ldots, x_n], & x\in C,\ x_2+\Delta>\pi.\end{cases}$$

Тогда по лемме 3.50 (обобщенной с $D_\pi(C)$ на $D_{\pi_y}(C)$) для проверки соотношения $\partial_2 f\in H_{\pi_y}^{k_0}(C)$ мы должны лишь показать, что $|\Delta^{-1}(f\circ S_\Delta^{-1}-f)|_{(k_0)}$ равномерно ограничено по Δ. По лемме 3.47 $\Delta^{-1}(f\circ S_\Delta^{-1}-f)$ принадлежит $H_{\pi_y,0}^{(p)}(C)$, а в силу лемм 3.47 и 3.50

$$|(\sigma+K)\Delta^{-1}(f\circ S_\Delta^{-1}-f)|_{(k_0-2p)}=|\Delta^{-1}(g\circ S_\Delta^{-1}-g)|_{(k_0-2p)}$$

равномерно ограничено по Δ.

Так как по предположению индукции $(\sigma+K)^{-1}$ является равномерно ограниченным отображением пространства $H_{\pi_y}^{(k_0-2p)}(C)$ на $H_{\pi_y}^{(k_0)}(C)\cap H_{\pi_y,0}^{(p)}(C)$, то $|\Delta^{-1}(f\circ S_\Delta^{-1}-f)|_{(k_0)}$ равномерно ограничено по Δ, а, как было показано выше, отсюда вытекает наша лемма.

Лемма 18 позволяет нам воспользоваться методом доказательства теоремы 2 в окрестности границы области с гладкой границей. Это осуществляется в следующих двух леммах.

19. Лемма. *Пусть σ — эллиптический формальный дифференциальный оператор четного порядка $2p$, определенный в области I_0 евклидова n-мерного пространства E^n и имеющий вид*

$$\sigma=\sum_{|J|\leqslant 2p} a_J(x)\,\partial^J,$$

где

$$\operatorname{Re}(-1)^p\sum_{|J|=2p} a_J(x)\xi^J>0,\qquad x\in I_0,\qquad \xi\neq 0.$$

Пусть I — подобласть I_0, границей которой является β. Предположим, что β содержит гладкую поверхность Σ, лежащую в I_0 и такую, что ни одна точка Σ не лежит в замыкании $\beta-\Sigma$

или внутри $I \cup \beta$. *Пусть* Σ_0 — *компактное подмножество в* Σ *и* $m \geqslant -p$ *есть целое число. Тогда если* $f \in H_0^{(p)}(I)$ *и* $\sigma f \in H^{(m)}(I)$, *то существует окрестность* V *множества* Σ_0, *такая, что сужение* f *на* VI *принадлежит пространству* $H^{(2p+m)}(VI)$.

Эта лемма будет вытекать из следующей леммы.

20. Лемма. *Пусть выполнены условия леммы 19 и* k — *целое число,* $p \leqslant k < p+2m$. *Тогда если существует окрестность* V_1 *множества* Σ_0, *такая, что* $f \mid V_1 I$ *принадлежит* $H^{(k)}(V_1 I)$, *то существует также окрестность* V_2 *множества* Σ_0, *такая, что* $f \mid V_2 I$ *принадлежит* $H^{(k+1)}(V_2 I)$.

Доказательство того, что из леммы 20 *вытекает лемма* 19. По предположению леммы 19 $f \in H^p(I)$. Тогда в силу леммы 20 существует окрестность V_1 множества Σ_0, такая, что $f \mid V_1 I$ принадлежит $H^{(p+1)}(V_1 I)$, и по индукции существует окрестность V_j множества Σ_0, такая, что $f \mid V_j I \in H^{(p+j)}(V_j I)$ при каждом $j \leqslant p+m$. Полагая $j = p+m$, получаем лемму 19, ч. т. д.

Доказательство (*леммы* 20). В силу леммы 3.24 достаточно показать, что каждая точка $q \in \Sigma_0$ имеет такую окрестность U, что $f \mid UI$ принадлежит $H^{(k+1)}(UI)$. Пусть $U_1 \subseteq I_0$ — ограниченная окрестность точки q, выбранная настолько малой, что $\beta U_1 \subseteq \Sigma$, и так, что существует такое отображение φ окрестности U_1 на единичную шаровую окрестность V начала координат, что

(I) φ взаимно однозначно, бесконечно дифференцируемо, и φ^{-1} бесконечно дифференцируемо;

(II) $\varphi(\Sigma \cap U_1) = V \cap \{x \in E^n \mid x_1 = 0\}$;

(III) $\varphi(q) = 0$.

По предположению ни одна точка из V, кроме точек $\varphi(\Sigma_0 \cap U_1)$, не принадлежит границе $\varphi(I \cap U_1)$ и ни одна точка в Σ_0 не является внутренней в замыкании I. Отсюда вытекает, что $\varphi(IU_1)$ должно совпадать с одним из двух полушаров $V_+ = \{x \in V \mid x_1 > 0\}$ или $V_- = \{x \in V \mid x_1 < 0\}$. Для определенности мы будем предполагать, что $\varphi(IU_1) = V_+$; второй случай эквивалентен этому, поскольку можно произвести замену переменных.

Пусть U — окрестность точки q, замыкание которой содержится в U_1. По лемме 2.1 выберем функцию $\zeta \in C_0^\infty(U_1)$, тождественно равную единице в U. Для проверки того, что $f \mid UI \in H^{(k+1)}(UI)$, — а именно это мы и должны сделать, — достаточно показать, что $\zeta f \mid U_1 I \in H^{(k+1)}(U_1 I)$. В силу лемм 3.22 и 3.23 отображение $g \to \zeta g \mid U_1 I$ является непрерывным отображением $H^{(j)}(I)$ в $H^{(j)}(U_1 I)$ при каждом j. Так как оно переводит $C_0^\infty(I)$ в $C_0^\infty(U_1 I)$, то оно является непрерывным отображением $H_0^{(j)}(I)$

в $H_0^{(j)}(U_1 I)$ при каждом $j \geqslant 0$ в силу определения 3.15. Таким образом, $\zeta f \mid U_1 I \in H_0^{(p)}(U_1 I)$. По предположению и по лемме 3.10 существует окрестность $V_3 \subseteq U$ множества $\Sigma \cap U_1$, такая, что $\zeta f \mid V_3 I U_1$ лежит в $H^{(k)}(V_3 I U_1)$. По правилу Лейбница мы можем записать $\sigma \zeta f = \zeta \sigma f + \sigma_\zeta f$, где σ_ζ — дифференциальный оператор с частными производными порядка не выше $2p-1$. Так как $k < 2p+m$, то по лемме 3.22 $\sigma \zeta f$ принадлежит $H^{(k-2p+1)}(I)$. Следовательно, по лемме 3.23 $\sigma(\zeta f \mid U_1 I)$ лежит в $H^{(k-2p+1)}(U_1 I)$. Мы должны, таким образом, проверить, что элементы $\zeta f \mid U_1 I$, $U_1 I$, $U_1 I_0$ и $m_1 = k - 2p + 1$ удовлетворяют всем условиям, наложенным на элементы f, I, I_0 и m в лемме 20. Так как мы должны лишь показать, что $\zeta f \in H^{(k+1)}(UI)$ для некоторой окрестности $U \subseteq U_1$ точки p, то, очевидно, мы можем без ограничения общности считать, что $U_1 = U_1 I_0 = I_0$. Это и будет предполагаться в дальнейшем. В силу свойств (I) и (II) отображения φ и лемм 3.47 и 3.48 мы можем также без ограничения общности считать, что $I_0 = V$, $I = V_+$ и $q = 0$. В дальнейших рассуждениях все эти условия будут предполагаться выполненными.

Пусть σ_0 — дифференциальный оператор с частными производными

$$\sigma_0 = \sum_{|J|=2p} a_J(0)\, \partial^J,$$

а C — куб

$$C = \{x \in E^n \mid 0 < x_1 < 2\pi, \quad |x_j| < \pi, \quad j = 2, \ldots, n\}$$

в E^n. По лемме 18 существует постоянная K, такая, что $\sigma_0 + K$ является непрерывным взаимно однозначным отображением $H_{\pi_y, 0}^{(p)}(C) \cap H_{\pi_y}^{(k)}(C)$ на $H_{\pi_y}^{(k-2p)}(C)$ и непрерывным взаимно однозначным отображением $H_0^{(p)}(C) \cap H_{\pi_y}^{(k+1)}(C)$ на $H_{\pi_y}^{(k+1-2p)}(C)$, имеющим в обоих случаях непрерывные обратные.

Пусть $\sigma f = g$. Для каждого $\varepsilon > 0$ обозначим через S_ε отображение E^n в себя, определяемое соотношением $S_\varepsilon x = \varepsilon x$. По лемме 3.47 функция $f \circ S_\varepsilon^{-1}$ является решением дифференциального уравнения с частными производными

$$\sigma_\varepsilon (f \circ S_\varepsilon^{-1}) = \sum_{|J| \leqslant 2p} a_J(\varepsilon x)\, \varepsilon^{p-|J|} \partial^J (f \circ S_\varepsilon^{-1}) = \varepsilon^p (g \circ S_\varepsilon^{-1}) \tag{1}$$

в области $\varepsilon^{-1} I$. Кроме того, по лемме 3.48 $f \circ S_\varepsilon^{-1} \in H_0^{(p)}(\varepsilon^{-1} I)$ и $f \circ S_\varepsilon^{-1} \in H^{(k)}(\varepsilon^{-1} I)$, в то время как $g \circ S_\varepsilon^{-1} \in H^{(k-2p+1)}(\varepsilon^{-1} I)$. Пусть ε выбрано настолько малым, что область $\varepsilon^{-1} I$ содержит куб C, и пусть функция $\xi \in C_0^\infty(E^n)$ тождественно равна единице в некоторой окрестности точки $p = 0$ и тождественно равна нулю вне единичного шара в E^n. Пусть функция $\hat{\xi} \in C_0^\infty(E^n)$ тождественно равна единице в некоторой окрестности замкнутого единичного шара в E^n и тождественно равна нулю вне шара радиуса два в E^n.

Мы хотим показать, что $f \mid U \in H^{(k+1)}(UI)$ для некоторой окрестности U начала координат. В силу лемм 3.48 и 3.23 достаточно показать, что $\{\xi(f \circ S_\varepsilon^{-1}) \mid C\} \in H^{(k+1)}(C)$ при некотором малом ε. Пусть τ_ε обозначает формальный дифференциальный оператор с частными производными

$$\tau_\varepsilon = \sum_{|J|=2p} \hat{\xi}(x)\,(a_J(\varepsilon x) - a_J(0))\,\partial^J.$$

Используя правило Лейбница, получаем, что для всех $\varepsilon > 0$ и $h \in D(C)$ мы можем написать

$$\sigma_\varepsilon \xi h = \xi \sigma_\varepsilon h + \hat{\sigma}_{\varepsilon,\xi} h,$$

где $\hat{\sigma}_{\varepsilon,\xi}$ — дифференциальный оператор с частными производными порядка не выше $2p-1$. Функция $f \circ S_\varepsilon^{-1} \mid C$ принадлежит $H^{(k)}(C)$ по предположению. Используя лемму 3.23, соотношение (1) и лемму 3.22, убеждаемся, что функция $f_\varepsilon = \xi(f \circ S_\varepsilon^{-1}) \mid C$ удовлетворяет дифференциальному уравнению с частными производными вида

$$\sum_{|J|=2p} a_J(\varepsilon x)\,\partial^J f_\varepsilon + K f_\varepsilon = g_\varepsilon, \tag{2}$$

где $g_\varepsilon \in H^{(k-2p+1)}(C)$. Из леммы 3.47 и наших предположений вытекает, что функция $f \circ S_\varepsilon^{-1}$ принадлежит $H_0^{(p)}(\varepsilon^{-1}I)$. Отображение $g \longrightarrow \xi g \mid C$ является непрерывным отображением $H^{(p)}(\varepsilon^{-1}I)$ в $H^{(p)}(C)$ в силу лемм 3.22 и 3.23 и, очевидно, отображает $C_0^\infty(I)$ в $C_0^\infty(C)$. Из определения 3.15 вытекает, что оно отображает $H_0^{(p)}(\varepsilon^{-1}I)$ в $H_0^{(p)}(C)$. Таким образом, функция $f_\varepsilon = \xi(f \circ S_\varepsilon^{-1}) \mid C$ принадлежит $H_0^{(p)}(C)$. По лемме 3.13 f_ε обращается в нуль вне единичного шара в E^n. В силу лемм 3.10 и 3.9 уравнение (2) можно переписать в виде

$$(\sigma_0 + K) f_\varepsilon + \tau_\varepsilon f = g_\varepsilon. \tag{3}$$

Поскольку все коэффициенты операторов $\sigma_0 + K$ и τ_ε являются периодическими с периодом 2π по переменным $y = [x_2, \ldots, x_n]$, а носители распределений f_ε и (по лемме 3.13) g_ε содержатся в единичном шаре E^n, то из лемм 3.33 и 3.24 (обобщенных на $D_{\pi_y}(C)$) вытекает, что f_ε и g_ε можно продолжить соответственно до элементов $\hat{f}_\varepsilon$ и $\hat{g}_\varepsilon$ в $H_{\pi_y}^{(k)}(C)$ и $H_{\pi_y}^{(k-2p+1)}(C)$, имеющих носители, равные соответственно носителям f_ε и g_ε, и что

(4) $$(\sigma_0+K)\hat{f}_\varepsilon+\tau_\varepsilon\hat{f}_\varepsilon=\hat{g}_\varepsilon.$$

Более того, по лемме 3.24 (обобщенной на $D_{\pi_y}(C)$) $\hat{f}_\varepsilon \in H^{(p)}_{\pi_y,0}(C)$. Ясно, что все коэффициенты оператора τ_ε сходятся к нулю равномерно в топологии $C^\infty(E^n)$ при $\varepsilon \to 0$. Для каждого $j \geqslant p$ обозначим через ν_j и $\hat{\nu}_j$ соответственно нормы отображения

$$(\sigma_0+K):\{H^{(j)}_{\pi_y}(C)\cap H^{(p)}_{\pi_y,\,0}(C)\} \to H^{(j-2p)}_{\pi_y}(C)$$

и его обратного. Далее, используя лемму 3.28 (обобщенную на $D_{\pi_y}(C)$), выберем ε настолько малым, чтобы норма τ_ε как отображения $H^{(k)}_{\pi_y}(C)$ в $H^{(k-2p)}_{\pi_y}(C)$, так и $H^{(k+1)}_{\pi_y}(C)$ в $H^{(k-2p+1)}_{\pi_y}(C)$ была меньше, чем $\min(\hat{\nu}_k, \hat{\nu}_{k+1})$. Тогда по лемме VII.3.4 отображение

$$I+\tau_\varepsilon(\delta_0+K)^{-1},$$

рассматриваемое и как отображение $H^{(k)}_{\pi_y}(C)$, и как отображение $H^{(k+1)}_{\pi_y}(C)$ в себя, имеет ограниченное всюду определенное обратное. Тогда мы имеем

$$\begin{aligned}((\sigma_0+K)+\tau_\varepsilon)(\sigma_0+K)^{-1}(I+\tau_\varepsilon(\sigma_0+K)^{-1})^{-1}&=\\ =(I+\tau_\varepsilon(\sigma_0+K)^{-1})(I+\tau_\varepsilon(\sigma_0+K)^{-1})^{-1}&=I\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}&(\sigma_0+K)^{-1}(I+\tau_\varepsilon(\sigma_0+K)^{-1})^{-1}(\sigma_0+K+\tau_\varepsilon)=\\ &\quad=(\sigma_0+K)^{-1}(I+\tau_\varepsilon(\sigma_0+K)^{-1})^{-1}(I+\tau_\varepsilon(\sigma_0+K)^{-1})(\sigma_0+K)=\\ &\quad=(\sigma_0+K)^{-1}(\sigma_0+K)=I,\end{aligned}$$

независимо от того, рассматриваем ли мы σ_0+K и τ_ε как отображения $H^{(p)}_{\pi_y,\,0}(C)\cap H^{(k)}_{\pi_y}(C)$ в $H^{(k-2p)}_{\pi_y}(C)$ или как отображения $H^{(p)}_{\pi_y,0}(C)\cap H^{(k+1)}_{\pi_y}(C)$ в $H^{(k-2p+1)}_{\pi_y}(C)$. Таким образом, $\sigma_0+K+\tau_\varepsilon$ является взаимно однозначным отображением как $H^{(p)}_{\pi_y,0}(C)\cap H^{(k)}_{\pi_y}(C)$ на $H^{(k-2p)}_{\pi_y}(C)$, так и $H^{(p)}_{\pi_y,0}(C)\cap H^{(k+1)}_{\pi_y}(C)$ на $H^{(k-2p+1)}_{\pi_y}(C)$. Так как $\hat{g}_\varepsilon \in H^{(k-2p+1)}_{\pi_y}(C)$, то существует элемент $\tilde{f}_\varepsilon \in H^{(p)}_{\pi_y,0}(C)\cap$ $\cap H^{(k+1)}_{\pi_y}(C)$, такой, что

(5) $$((\sigma_0+K)+\tau_\varepsilon)\tilde{f}_\varepsilon=\hat{g}_\varepsilon.$$

Поскольку по лемме 3.18 $\tilde{f}_\varepsilon \in H^{(p)}_{\pi_y,0}(C) \cap H^{(k)}_{\pi_y}(C)$ и поскольку $(\sigma_0+K)+\tau_\varepsilon$ является взаимно однозначным отображением этого пространства, то из (4) и (5) вытекает, что $\hat{f}_\varepsilon=\tilde{f}_\varepsilon$, и тем самым $\hat{f}_\varepsilon \in H^{(k+1)}_{\pi_y}(C)$. Следовательно, по лемме 3.23 $f_\varepsilon \in H^{(k+1)}(C)$, и наша лемма доказана.

В следующей лемме устанавливается одно полезное и интересное свойство пространства $H_0^{(p)}(I)$.

21. Лемма. *Пусть I — область в E^n, граница β которой содержит гладкую поверхность Σ. Предположим, что никакая точка Σ не лежит в замыкании $\beta-\Sigma$ и не является внутренней в $I \cup \beta$. Пусть $f \in C^p(\bar{I}) \cap H_0^p(I)$. Тогда $\{(\partial_\nu(\Sigma))^k f\}(x)=0$ для всех $x \in \Sigma$ и всех k, таких, что $0 \leqslant k \leqslant p-1$.*

Доказательство. По определению 5.1 мы должны лишь показать, что всякая точка p в Σ имеет окрестность U, такую, что $\{(\partial_\nu(\Sigma))^k f \mid UI\}(x)=0$ для $x \in \Sigma U$ и $0 \leqslant k \leqslant p-1$. Пусть U — некоторая окрестность точки p, выбранная настолько малой, что $\beta U \subseteq \Sigma$, и так, что существует ее отображение η на единичную шаровую окрестность V начала координат, обладающее следующими свойствами:

(I) η взаимно однозначно, бесконечно дифференцируемо, и η^{-1} бесконечно дифференцируемо;

(II) $\eta(\Sigma U)=V \cap \{x \in \Sigma^n \mid x_1=0\}$.

Так как по условию никакие точки из V, кроме точек $\eta(\Sigma U)$, не принадлежат границе $\eta(IU)$ и никакие точки из $\eta(\Sigma U)$ не являются внутренними в замыкании $\eta(IU)$, то $\eta(IU)$ должно совпадать с одним из полушаров $V_+=\{x \in V \mid x_1>0\}$ или $V_-=\{x \in V \mid x_1<0\}$. Для определенности предположим, что $\eta(\Sigma U)=V_+$. Тогда в силу лемм 3.22, 3.23 и 5.4 мы можем (и будем) без ограничения общности считать, что

$$I=V_+, \quad \Sigma=V_0=\{x \in V \mid x_1=0\}.$$

Пусть φ — произвольная функция $n-1$ переменных $y=[y_1, \ldots, y_{n-1}]$, принадлежащая $C_0^\infty(E^{n-1})$ и обращающаяся в нуль вне единичного шара V_0 в E^{n-1}, и пусть ζ_φ — любая функция от переменной x_1, такая, что $\zeta_\varphi \in C_0^\infty(E^1)$, а функция ψ_φ, определяемая соотношением $\psi_\varphi(x)=\zeta_\varphi(x_1)\varphi(x_2, \ldots, x_n)$, принадлежит $C_0^\infty(V)$, и $\zeta_\varphi(x_1)=x_1^{p-1}$ для всех достаточно малых x_1. Ясно, что $\psi_\varphi \mid V_+$ принадлежит $C^p(V_+)$.

Интегрируя по частям p раз по переменной x_1, получаем

[*] $$\int\limits_{V_+} h(x)\,\partial_1^p g(x)\,dx = (-1)^p \int\limits_{V_+} \partial_1^p h(x)\,g(x)\,dx$$

для всех $g \in C_0^\infty(V_+)$ и $h \in C^p(\overline{V}_+)$, и так как $C_0^\infty(V_+)$, по определению пространства $H_0^p(V_+)$, плотно в $H_0^p(V_+)$, то в силу непрерывности это тождество должно выполняться и для всех $g \in H_0^{(p)}(V_+)$ и $h \in C^p(\overline{V}_+)$. Таким образом, полагая в равенстве [*] $f = g$ и $h = \psi_\varphi$, мы получаем

$$\int\limits_{V_+} f(x)\,\partial_1^p \psi_\varphi(x)\,dx = (-1)^p \int\limits_{V_+} \partial_1^p f(x)\,\psi_\varphi(x)\,dx, \quad \varphi \in C_0^\infty(V_0).$$

С другой стороны, интегрируя p раз по частям по переменной x_1, получаем

$$\int\limits_{V_+} f(x)\,\partial_1^p \psi_\varphi(x)\,dx = (-1)^p \int\limits_{V_+} \partial_1^p f(x)\,\psi_\varphi(x)\,dx + \\ + (-1)^p (p-1)! \int\limits_{V_0} f(0,\,y)\,\varphi(y)\,dy$$

для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(V_0)$. Таким образом,

$$\int\limits_{V_0} \varphi(y)\,f(0,\,y)\,dy = 0, \quad \varphi \in C_0^\infty(V_0),$$

так что по лемме 2.2 $f(0,\,y) = 0$ для $y \in V_0$.

Пусть теперь функция $\hat{\zeta}_\varphi$ из $C_0^\infty(E^1)$ такова, что функция $\hat{\psi}_\varphi$, определяемая соотношением $\hat{\psi}_\varphi(x) = \hat{\zeta}_\varphi(x_1)\,\varphi(x_2,\,\ldots,\,x_n)$, принадлежит $C_0^\infty(V)$ и $\hat{\zeta}_\varphi(x_1) = x_1^{p-2}$ для достаточно малых x_1. Тогда, интегрируя по частям p раз левую часть следующего равенства по переменной x_1 и используя уже установленное равенство $f(0,\,y) = 0$, мы получаем

$$\int\limits_{V_+} f(x)\,\partial_1^p \hat{\psi}_\varphi(x)\,dx = (-1)^p \int\limits_{V_+} \partial_1^p f(x)\,\hat{\psi}_\varphi(x) + \\ + (-1)^{p-1} (p-2)! \int\limits_{V_0} (\partial_1 f)(0,\,y)\,\varphi(y)\,dy$$

для всех $\varphi \in C_0^\infty(V_0)$. С другой стороны, если в равенстве [*] положить $f = g$ и $h = \hat{\psi}_\varphi$, то мы получим

$$\int\limits_{V_+} f(x)\,\partial_1^p \hat{\psi}_\varphi(x)\,dx = (-1)^p \int\limits_{V_+} \partial_1^p f(x)\,\hat{\psi}_\varphi(x)\,dx,$$

так что

$$\int_{V_0} (\partial_1 f)(0, y)\,\varphi(y)\,dy = 0, \qquad \varphi \in C_0^\infty(V_0).$$

Следовательно, по лемме 2.2 $(\partial_1 f)(0, y) = 0$ для $y \in V_0$. Продолжая по индукции, мы получим $(\partial_1^k f)(0, y) = 0$ для $0 \leqslant k \leqslant p-1$, ч. т. д.

22. Следствие. *Пусть выполнены условия леммы* 19, $j \geqslant 0$ — *целое число*, $f \in H_0^{(p)}(I) \cap H^{(m)}(I)$ *и* $2p + m - [n/2] \geqslant j + 1$. *Тогда существует окрестность* V *множества* Σ_0, *такая, что сужение* f *на* VI *имеет непрерывное продолжение* $\hat{f}$ *на замыкание* $\overline{VI}$ *множества* VI, *причем* $\hat{f} \in C^j(\overline{VI})$ *и*

$$\{(\partial_\nu(\Sigma_0))^k f\}(x) = 0, \quad x \in \Sigma_0, \quad 0 \leqslant k \leqslant \min(j, p).$$

Доказательство. Первое утверждение вытекает из леммы 19 и теоремы Соболева (4.5), а второе утверждение является следствием первого и предыдущей леммы.

При формулировке и доказательстве следующей теоремы мы будем обозначать через $T(\tau)$ оператор в $L_2(I)$, определяемый соотношениями

$$\mathfrak{D}(T(\tau)) = H_0^{(p)}(I) \cap H^{(2p)}(I),$$
$$T(\tau) f = f, \qquad f \in \mathfrak{D}(T(\tau)),$$

где τ — формальный дифференциальный оператор с частными производными, определенный в области $I \subset E^n$.

Лемма 21 теперь позволяет нам дать короткое доказательство следующей теоремы о решениях классической задачи Дирихле в очень общей постановке.

23. Теорема. *Пусть* τ — *эллиптический формальный дифференциальный оператор с частными производными четного порядка* $2p$, *определенный в области* $I_0 \subset E^n$. *Предположим, что* τ *имеет вид*

$$\tau = \sum_{|J| \leqslant 2p} a_J(x)\,\partial^J$$

и что

$$(-1)^p \operatorname{Re} \sum_{|J| = 2p} a_J(x)\,\xi^J > 0, \quad x \in I_0, \quad \xi \in E^n, \quad \xi \neq 0.$$

Пусть I — *ограниченная подобласть, замыкание которой содержится в* I_0. *Предположим, что граница* I *является гладкой поверхностью* S *и что ни одна точка* S *не является внутренней точкой замыкания подобласти* I. *Пусть* T и $\hat{T}$ — *операторы* *в гильбертовом пространстве* $L_2(I)$, *определяемые соотношениями*

$$[*]\qquad \mathfrak{D}(T)=\mathfrak{D}(\hat{T})=\{F\in C^\infty(\bar{I})\,|\,f(x)=\partial_\nu(S)f(x)=\ldots$$
$$\ldots=\partial_\nu^{p-1}(S)f(x)=0,\ x\in S\},$$
$$Tf=\tau f,\qquad \hat{T}f=\tau^*f,\qquad f\in\mathfrak{D}(T)=\mathfrak{D}(\hat{T}).$$

Обозначим через V *и* $\hat{V}$ *операторы, графики которых являются замыканиями графиков операторов* T *и* $\hat{T}$ *соответственно. Тогда*

(I) $V^*=\hat{V}$, $\hat{V}^*=V$;

(II) $\sigma(V)$ *является счетным дискретным множеством точек без конечных предельных точек*;

(III) *если* $\lambda\notin\sigma(V)$, *то* $R(\lambda;V)$ — *вполне непрерывный оператор*;

(IV) *если* $\lambda\notin\sigma(V)$, *то* $R(\lambda;V)$ — *непрерывное отображение* $H^{(m)}(I)$ *в* $H^{(m+2p)}(I)$ *для всех* $m\geqslant 0$;

(V) *если* $Vf\in H^{(m)}I$, *где* $m\geqslant[n/2]-2p$, *то* $f\in C^{p-1}(\bar{I})$ *и* f *удовлетворяет граничным условиям, входящим в формуле* [*] *в определение* $\mathfrak{D}(T)$.

Доказательство. Мы покажем, что $V=T(\tau)$ и $\hat{V}=T(\tau^*)$. Тогда утверждения (I), (II) и (III) будут вытекать из следствий 14 и 11, а утверждение (V) — из следствия 22.

Предположим на время, что $V=T(\tau)$. Тогда для доказательства утверждения (IV) мы можем рассуждать следующим образом. Пусть $m\geqslant 0$ и $\lambda\notin\sigma(V)=\sigma(T(\tau))$. В силу леммы 19, теоремы 2 и леммы 3.24 $R(\lambda;V)$ отображает $H^{(m)}(I)$ в $H^{(m+2p)}(I)$. Пусть $f_n\in H^{(m)}(I)$, $n\geqslant 1$, и $g_n=R(\lambda;V)f_n$. Пусть $|f_n-f|_{(m)}\to 0$ и $|g_n-g|_{(m+2p)}\to 0$ при $n\to\infty$. Так как $|g_n-g|_{(p)}\to 0$ при $n\to\infty$, а $H_0^{(p)}(I)$ является замкнутым подпространством в $H^{(p)}(I)$ (см. определение 3.15 (I) и (II)), то $f\in H_0^{(p)}(I)$. По лемме 3.22 $(\lambda-\tau)f=g$. Таким образом, $f\in\mathfrak{D}(T(\tau))=\mathfrak{D}(V)$ и $(\lambda-T(\tau))f=g$. Поэтому $R(\lambda;V)g=f$; тем самым доказано, что $R(\lambda;V)$ — замкнутое отображение пространства $H^{(m)}(I)$ в $H^{(m+2p)}(I)$. Утверждение (IV) вытекает теперь непосредственно из теоремы о замкнутом графике (II.2.4).

Итак для завершения доказательства теоремы нужно показать, что $V=T(\tau)$ и $\hat{V}=T(\tau^*)$.

Доказательства соотношений $V=T(\tau)$ и $\hat{V}=T(\tau^*)$ совершенно одинаковы, так что мы рассмотрим лишь доказательство первого из них. Мы покажем ниже, что $\mathfrak{D}(T)\subseteq\mathfrak{D}(T(\tau))$, и потому $T\subseteq T(\tau)$. Так как в силу следствия 14 и леммы XII.1.6 (a) оператор $T(\tau)$ замкнут, то отсюда вытекает соотношение $V\subseteq T(\tau)$. (В частности, это означает, что график V, т. е. замыкание графика T, является на самом деле графиком вполне определенного, т. е. однозначного оператора.) Далее, используя следствие 11, выберем $\lambda \notin \sigma(T(\tau))$. Пусть $f \in \mathfrak{D}(T(\tau))$ и $(\lambda I - T(\tau))f = g$. По лемме 2.2 найдем такую последовательность $\{g_n\}$ функций из $C^\infty(\bar{I})$, что $g_n \to g$ в топологии $L_2(I)$ при $n \to \infty$. Тогда если $f_n = (\lambda I - T(\tau))^{-1} g_n$, то $f_n \to f$ в топологии $L_2(I)$ при $n \to \infty$. В силу следствия 22, леммы 19 и теоремы Соболева (4.5) $f_n \in \mathfrak{D}(T)$. Поэтому $f \in \mathfrak{D}(V)$, и тем самым доказано, что $T(\tau) \subseteq V$.

Таким образом, для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что $\mathfrak{D}(T) \subseteq \mathfrak{D}(T(\tau))$. Согласно определению оператора $T(\tau)$, это сводится к доказательству соотношения $\mathfrak{D}(T) \subseteq \subseteq H_0^{(p)}(I)$.

Для каждой точки $p \in S$ выберем окрестность U_p настолько малой, чтобы существовало ее отображение φ_p на открытый единичный шар $\Sigma \subset E^n$, обладающее следующими двумя свойствами:

(a) φ_p взаимно однозначно, бесконечно дифференцируемо, и φ_p^{-1} бесконечно дифференцируемо;

(b) $\varphi_p(p) = 0$ и $\varphi_p(S \cap U_p) = V \cap \{x \in E^n \mid x_1 = 0\}$.

Используя компактность S, выберем конечную систему $\{U_{p_i}\}$, $i = 1, \ldots, s$, окрестностей U_p так, чтобы $\bigcup_{i=1}^{s} U_{p_i} \supseteq S$. Используя лемму 2.3, найдем конечную систему функций $\{\zeta_i\}$, $i = 1, \ldots, s$, принадлежащих $C^\infty(E^n)$, такую, что каждая функция ζ_i обращается в нуль вне некоторого компактного подмножества $\hat{U}_i$ какой-то из окрестностей $U_{p_i} = U_i$, и такую, что $\sum_{i=1}^{s} \zeta_i(x) = 1$ для всех x в некоторой окрестности S. Пусть $f \in \mathfrak{D}(T)$. Так как $f - \sum_{i=1}^{s} \zeta_i f \in C_0^\infty(I)$, и если проверить, что $\zeta_i f \in H_0^{(p)}(I)$ для всех $i = 1, \ldots, s$, то отсюда будет следовать, что $f \in H_0^{(p)}(I)$. Итак, мы должны построить последовательность $\{g_n\}$ элементов из $C_0^\infty(I)$, такую, что $|g_n - \zeta_i f|_{(p)} \to 0$ при $n \to \infty$. Отображение $\varphi_i = \varphi_{p_i}$ переводит множество $U_i I$ в множество $\varphi_i(U_i I)$, граница которого в Σ не содержит точек, отличных от $\Sigma \cap \{x \in E^n \mid x_1 = 0\}$. Так как граница I не содержит внутренних точек замыкания I, то $\varphi_i(U_i I)$ должно совпадать с одним из полушаров $\Sigma_+ = \{x \in \Sigma \mid x_1 > 0\}$ или $\Sigma_- = \{x \in \Sigma \mid x_1 < 0\}$. Для определенности положим $\varphi_i(U_i I) = \Sigma_+$. Тогда в силу лемм 3.22 (II), 3.47 и 3.48 ясно, что для завершения доказательства теоремы мы должны лишь построить последовательность функций $\hat{g}_n \in C_0^\infty(\Sigma_+)$, обращающихся в нуль вне некоторого фиксированного компактного подмножества в Σ, такую, что $|\hat{g}_n(\cdot)-\zeta_i(\varphi_{p_i}^{-1}(\cdot))f(\varphi_{p_i}^{-1}(\cdot))|_{(p)}\to 0$ при $n\to\infty$. По лемме 15 и лемме 5.4 существует такая последовательность функций $\tilde{g}_n\in C_0^\infty(\{x\in E^n \mid x_1>0\})$, что $|\tilde{g}_n(\cdot)-\zeta_i(\varphi_{p_i}^{-1}(\cdot))f(\varphi_{p_i}^{-1}(\cdot))|_{(p)}\to 0$ при $n\to\infty$. Пусть ψ_i — функция из $C^\infty(E^n)$, равная 1 для $x\in\varphi_i(\hat{U}_i)$ и равная нулю для x вне некоторого компактного подмножества Σ_i в Σ_+, и положим $\hat{g}_n=\tilde{g}_n\psi_i$. В силу леммы 3.22 (II) последовательность $\hat{g}_n$ обладает нужными нам свойствами. Теорема доказана.

Замечание. В оставшихся теоремах этого параграфа мы обозначаем через $T(\tau)$ оператор, определяемый соотношениями

$$\mathfrak{D}(T(\tau))=\mathfrak{D}(T_1(\tau))\cap H_0^{(p)}(I);\ T(\tau)f=\tau f,\quad f\in\mathfrak{D}(T(\tau)),$$

где τ — формальный дифференциальный оператор с частными производными порядка $2p$, заданный в области I. Если оператор τ, область I, поверхность S и т. д. удовлетворяют предположениям теоремы 23, то, как показано в проведенном доказательстве, $T(\tau)$ совпадает с оператором V, определенным как замыкание оператора V_0, заданного соотношениями

$$\mathfrak{D}(V_0)=\{f\in C^\infty(\bar{I}) \mid f(x)=\partial_\nu(S)f(x)=\ldots=\partial_\nu^{p-1}(S)f(x)=0,\ x\in S\},$$

$$V_0f=\tau f,\qquad f\in\mathfrak{D}(V_0).$$

Равенство $T(\tau)=V$ будет часто использоваться в дальнейшем.

24. Следствие. *Пусть выполнены условия предыдущей теоремы, k — натуральное число и $2pk\geqslant[n/2]+1$. Тогда если $\lambda\in\sigma(V)$, то оператор $R_k=\{R(\lambda;\ V)\}^k$ является оператором Гильберта — Шмидта. Если $2pk\geqslant[n/2]+s+1$, то R_k является непрерывным отображением L_2I в $C^s(I)$.*

Доказательство. По предыдущей теореме и по теореме Соболева (4.5) R_k — непрерывное отображение $L_2(I)$ в $C^s(\bar{I})$; этим доказано второе утверждение. Для доказательства первого мы можем показать, что всякое непрерывное отображение $L_2(I)$ в $C(\bar{I})$ принадлежит классу Гильберта — Шмидта. По теореме IV.4.5 мы можем записать $(R_kf)(x)=(f,\ \psi_x)$ для всякого $x\in\bar{I}$, где $\psi_x\in L_2(I)$, причем по теореме о равномерной ограниченности (II.3.20) существует конечная постоянная M, такая, что $|\psi_x|\leqslant M$ для всех $x\in\bar{I}$. Таким образом, если $\{\varphi_n\}$ — полная ортонормированная система в $L_2(I)$, то по теореме IV.4.13 мы имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} |R_k \varphi_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \int_I |(\varphi_n, \psi_x)|^2 \, dx = \int_I \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |(\varphi_n, \psi_x)|^2 \right\} dx =$$

$$= \int_I |\psi_x|^2 \, dx \leqslant \int_I M \, dx < \infty,$$

ч. т. д.

Читатель, наверное, заметил, что довольно сложный анализ, приводящий к теореме 23, позволил нам рассмотреть лишь очень специальные граничные условия для формального эллиптического оператора τ. Можно было бы распространить использованные методы для рассмотрения более общих множеств граничных условий. Однако обсуждение этого вопроса выходит за рамки этой книги.

Следует, однако, сформулировать теорему 23 в том частном случае, когда формальный дифференциальный оператор самосопряжен.

25. Теорема. *Пусть τ — эллиптический формальный дифференциальный оператор с частными производными четного порядка $2p$, заданный в области $I_0 \subset E^n$. Предположим, что τ формально самосопряжен, т. е. $\tau = \tau^*$. Пусть τ имеет вид*

$$\tau = \sum_{|J| \leqslant 2p} a_J(x) \, \partial^J,$$

где

$$(-1)^p \sum_{|J| = 2p} a_J(x) \, \xi^J > 0, \quad x \in I_0, \quad \xi \in E^n, \quad \xi \neq 0.$$

Пусть I — ограниченная подобласть, замыкание которой содержится в I_0. Предположим, что граница области I является гладкой поверхностью S и что в S нет внутренних точек замыкания I. Пусть T — оператор в гильбертовом пространстве $L_2(I)$, определенный соотношениями

$$[*] \ \mathfrak{D}(T) = \{f \in C^\infty(I) \mid f(x) = \partial_\nu(S) f(x) = \ldots = \partial_\nu^{p-1}(S) f(x) = 0, \ x \in S\},$$
$$Tf = \tau f, \quad f \in \mathfrak{D}(T).$$

Обозначим через V замыкание оператора T. Тогда

(I) *оператор V самосопряжен;*

(II) *спектр $\sigma(V)$ есть последовательность точек $\{\lambda_n\}$, стремящаяся к ∞, а для λ из резольвентного множества $R(\lambda; V)$ является вполне непрерывным оператором;*

(III) *оператор V имеет полное счетное множество $\{\varphi_n\}$ собственных функций. Каждая собственная функция удовлетворяет* *дифференциальному уравнению с частными производными* $\tau\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$ *в* I, *непрерывно бесконечно дифференцируема в замыкании области* I *и удовлетворяет граничным условиям, определяющим* $\mathfrak{D}(T)$ *в формуле* [*].

Доказательство. Утверждения (I) и (III) вытекают непосредственно из теоремы 23, а (II) — также из теоремы 23, если только показать, что спектр $\sigma(V)$ (о котором мы уже знаем, что он является последовательностью вещественных чисел без конечных предельных точек) ограничен снизу. Это же вытекает непосредственно из следствия 12 (см. XII.7.2).

26. Следствие. *Пусть выполнены предположения предыдущей теоремы,* α — *любой угловой сектор в комплексной плоскости, содержащий положительную полуось и счетное множество вещественных чисел из* $\sigma(V)$. *Тогда*

(I) *существует такое число* K, *что*

$$|R(\lambda;\ V)f|_{(2p)} \leqslant K|f|,\quad f \in L_2(I),\quad \lambda \notin \alpha;$$

(II) *если* $f \in L_2(I)$, *то* $|R(\lambda;\ V)f|_{(2p)} \to 0$ *при* $|\lambda| \to \infty$ *и* $\lambda \notin \alpha$;

(III) *если при* $\lambda \notin \alpha$ *рассматривать* $R(\lambda;\ V)$ *как отображение* $L_2(I)$ *в* $H^{(2p-1)}(I)$, *то его норма стремится к нулю при* $|\lambda| \to \infty$.

Доказательство. Пусть $\lambda_0 \notin \sigma(V)$. Тогда

$$(\lambda_0 I - V)R(\lambda;\ V) = (\lambda_0 - \lambda)R(\lambda;\ V) - I,$$

так что по теореме XII.2.9(a) $|(\lambda_0 I - V)R(\lambda;\ V)f|$ имеет верхнюю границу вида $K|f|$ при $\lambda \notin \alpha$. Тогда по теореме 25 $|R(\lambda;\ V)f|_{(2p)} \leqslant K'|f|$ при некотором $K' < \infty$ и всех $\lambda \notin \alpha$. В силу теоремы XII.2.6(c) и теоремы Лебега $|(\lambda_0 I - V)R(\lambda;\ V)f| \to 0$ при $|\lambda| \to \infty$ и $\lambda \notin \alpha$, так что по теореме 25 $|R(\lambda;\ V)f|_{(2p)} \to 0$ при $|\lambda| \to \infty$ и $\lambda \notin \alpha$, чем доказано (II). Если (III) неверно, то существуют последовательность λ_n в дополнении к α и последовательность $\{f_n\}$ элементов из $L_2(I)$, такие, что $|f_n| = 1$, а $|R(\lambda_n;\ V)f_n|_{(2p-1)}$ не сходится к нулю. Так как $|R(\lambda_n;\ V)f_n|_{(2p)}$ равномерно ограничено в силу (I), то в силу следствия 4.11 мы можем без ограничения общности предположить, что найдется элемент $g \in H^{(2p-1)}(I)$, такой, что $|g_n - g|_{(2p-1)} \to 0$, где $g_n = R(\lambda_n;\ V)f_n$. По теореме XII.2.9(a) $|g_n| \to 0$. Поэтому $g = 0$, и мы получили противоречие, так как $|g_n|_{(2p-1)}$ не сходится к нулю.

27. Следствие. *Пусть* τ — *эллиптический формальный дифференциальный оператор с частными производными четного*

порядка $2p$, определенный в области $I_0 \subset E^n$. Предположим, что

$$\tau = \sum_{|J| \leqslant 2p} a_J(x)\,\partial^J,$$

$a_J(x)$ вещественны, если $|J| = 2p$, и

$$(-1)^p \sum_{|J|=2p} a_J(x)\,\xi^J > 0, \quad x \in I_0, \quad \xi \in E^n, \quad \xi \neq 0.$$

Пусть I — ограниченное открытое множество, замыкание которого содержится в I_0. Пусть, кроме того, I и V — те же, что и в теореме 25. Тогда

(I) *если α — любой открытый угол в комплексной плоскости, содержащий положительную полуось, то все точки спектра $\sigma(V)$, кроме, быть может, конечного числа, принадлежат α;*

(II) *если α — такое же, как в* (I), *и, кроме того, содержит весь спектр $\sigma(V)$, то $|\lambda R(\lambda; V)|$ ограничено для всех $\lambda \notin \alpha$ и $|R(\lambda; V) f| \to 0$ при $|\lambda| \to \infty$ и $\lambda \notin \alpha$.*

Доказательство. По определению τ^* и по формуле Лейбница мы имеем

$$\tau^* = \sum_{|J| \leqslant 2p} a_J^*(x)\,\partial^J,$$

где $a_J^* = a_J$ при $|J| = 2p$. Таким образом, если $\sigma = (\tau + \tau^*)/2$ и $\zeta = (\tau - \tau^*)/2i$, то $\tau = \sigma + i\zeta$, где σ формально самосопряжен и удовлетворяет предположениям предыдущего следствия, а ζ — формальный дифференциальный оператор с частными производными порядка не выше $2p - 1$. Пусть $T(\sigma)$ определяется соотношениями

$$\mathfrak{D}(T(\sigma)) = \mathfrak{D}(T_1(\sigma)) \cap H_0^{(p)}(I); \quad T(\sigma) f = \sigma f, \quad f \in \mathfrak{D}(T(\sigma)),$$

а $T(\tau)$ — соотношениями

$$\mathfrak{D}(T(\tau)) = \mathfrak{D}(T_1(\tau)) \cap H_0^{(p)}(I); \quad T(\tau) f = \tau f, \quad f \in \mathfrak{D}(T(\tau)).$$

Используя предыдущее следствие и замечание, следующее непосредственно после доказательства теоремы 23, выберем $\Lambda > 0$ настолько большим, чтобы $|\zeta R(\lambda; T(\sigma))| < 1/2$ для $\lambda \in \alpha$ и $|\lambda| > \Lambda$. Тогда по лемме VII.3.4 оператор $B_\lambda = (I - i\zeta R(\lambda; T(\sigma)))^{-1}$ существует и является отображением в $L_2(I)$, причем $|B_\lambda| \leqslant 2$ для $\lambda \notin \alpha$ и $|\lambda| > \Lambda$. Для всех $f \in L_2(I)$ мы имеем

$$(\lambda - (\sigma + i\zeta))\,R(\lambda; T(\sigma))\,B_\lambda f = (I - i\zeta R(\lambda; T(\sigma)))\,B_\lambda f = f$$

и $R(\lambda; T(\sigma))\,B_\lambda f \in \mathfrak{D}(T(\sigma)) \subseteq H_0^{(p)}(I)$. Поэтому (см. определение $T(\tau)$, данное выше, и определение $T_1(\tau)$, данное в конце § 3) $R(\lambda; T(\sigma))\,B_\lambda f \in \mathfrak{D}(T(\tau))$ для всех $f \in L_2(I)$ и

$$(\lambda I - T(\tau))\,R(\lambda; T(\sigma))\,B_\lambda f = f, \quad f \in L_2(I), \qquad \lambda \notin \alpha, \quad |\lambda| > \Lambda.$$

Если $f \in \mathfrak{D}(T(\tau))$, то по теореме 23 $f \in H^{(2p)}(I)$. Следовательно, так как f также принадлежит $H_0^{(p)}(I)$ по определению $T(\tau)$, то $f \in \mathfrak{D}(T(\sigma))$ и

$$\begin{aligned} R(\lambda;\, T(\sigma))\, B_\lambda(\lambda I - T(\tau)) f &= R(\lambda;\, T(\sigma))\, B_\lambda(\lambda I - \sigma - i\zeta) f = \\ &= R(\lambda;\, T(\sigma))\, B_\lambda(\lambda - \sigma - i\zeta)(\lambda I - T(\sigma))^{-1}(\lambda I - T(\sigma)) f = \\ &= R(\lambda;\, T(\sigma))\, B_\lambda(I - i\zeta R(\lambda;\, T(\sigma)))(\lambda I - T(\sigma)) f = \\ &= R(\lambda;\, T(\sigma))(\lambda I - T(\sigma)) f = f, \quad \lambda \notin \alpha, \ |\lambda| > \Lambda. \end{aligned}$$

Это показывает, что при $\lambda \notin \alpha$, $|\lambda| > \Lambda$, мы имеем $\lambda \notin \sigma(T(\tau))$ и $R(\lambda;\, T(\tau)) = R(\lambda;\, T(\sigma))\, B_\lambda$. Теперь наше следствие вытекает непосредственно из теоремы 23, сделанного после ее доказательства замечания, теоремы XII.2.9(a) и теоремы 25.

Следующая очень интересная теорема дает общий принцип полноты собственных функций несамосопряженных эллиптических краевых задач.

28. Теорема (*теорема Браудера о полноте*). *Пусть τ — эллиптический формальный дифференциальный оператор с частными производными четного порядка $2p$, заданный в области $I_0 \subset E^n$. Предположим, что*

$$\tau = \sum_{|J| \leq 2p} a_J(x)\, \partial^J,$$

$a_J(x)$ веществен, если $|J| = 2p$, и

$$(-1)^p \sum_{|J|=2p} a_J(x)\, \xi^J > 0, \quad x \in I_0, \quad \xi \in E^n, \quad \xi \neq 0.$$

Пусть I — ограниченное открытое множество, замыкание которого $\bar{I}$ содержится в I_0. Предположим, что I ограничено гладкой поверхностью Σ. Пусть V_0 — расширение $T_0(\tau)$, определяемое соотношениями

$$\mathfrak{D}(V_0) = \{f \in C^{2p}(I) \mid f(x) = \partial_\nu(\Sigma) f(x) = \ldots = \partial_\nu^{p-1}(\Sigma) f(x) = 0,\ x \in \Sigma\},$$
$$V_0 f = T_1(\tau) f, \quad f \in \mathfrak{D}(V_0).$$

Пусть V — замыкание V_0. Тогда $\sigma(V)$ — дискретное множество без конечных предельных точек, $R(\lambda;\, V)$ — вполне непрерывный оператор при λ из резольвентного множества оператора V, а множество функций $f \in L_2(I)$, удовлетворяющих уравнению

$$(V - \mu I)^k f = 0$$

при некотором целом $k \geq 1$, фундаментально в $L_2(I)$. Каждая такая функция принадлежит пересечению $C^\infty(\bar{I})$ и $\mathfrak{D}(V_0)$.

Доказательство. Не теряя в общности, мы можем перейти от τ к $\tau+\lambda$ и считать, что $0 \notin \sigma(V)$. Пусть $V_1 = V^m$, где m выбрано настолько большим, что $2pm \geqslant [n/2]+1$. Тогда в силу следствия 24 V_1^{-1} является оператором Гильберта—Шмидта. Пусть $\omega_1, \ldots, \omega_m$—корни степени m из единицы. Тогда, если $\lambda\omega_i \in \sigma(V)$, $i=1, \ldots, m$, то $\lambda^m \notin \sigma(V_1)$, и по определению VII.9.6 и теореме VII.9.8

$$R(\lambda^m; V_1) = R(\omega_1\lambda, V) \ldots R(\omega_m\lambda, V).$$

Из следствия 27 вытекает, что если $\lambda^n \to \infty$ по лучу $\{\mu = re^{i\theta}, r>0\}$, где $\theta \neq 0$, то λ^n, начиная с некоторого момента, лежит в $\sigma(V_1)$, а $R(\lambda^n; V_1)$ становится и остается ограниченным. Тогда, применяя к оператору V_1 следствие XI.6.31, мы получаем, что множество функций f, удовлетворяющих уравнению вида

$$(V-\mu\omega_1)^k \ldots (V-\mu\omega_m)^k f = 0 \tag{1}$$

при каких-то комплексном μ и целом $k \geqslant 1$, фундаментально в $L_2(I)$. Если f удовлетворяет уравнению (1), то очевидно (по индукции, см. VII.9.6), что $f \in \bigcap_{l>1} \mathfrak{D}(V^l)$. Так как многочлены $p_j(z) = \prod_{i\neq j} (z-\mu\omega_i)^k$, $j=1, \ldots, m$, не имеют общих множителей, то существуют такие многочлены q_j, $j=1, \ldots, m$, что $\sum_{j=1}^m p_j(z)\,q_j(z) = 1$. Тогда

$$f = \sum_{j=1}^m q_j(V)\,p_j(V)\,f.$$

Положим $f_j = q_j(V)\,p_j(V)\,f$. Тогда $f = \sum_{j=1}^m f_j$ и $(V-\mu\omega I)^k f = 0$ для $j=1, \ldots, m$. Поэтому множество функций g, удовлетворяющих уравнению $(V-\mu I)^k g = 0$ при некотором комплексном μ, фундаментально в $L_2(I)$.

Любая такая функция, очевидно (по индукции, см. VII.9.6), принадлежит пересечению $\bigcap_{l\geqslant 1} \mathfrak{D}(V^l)$. Тогда по теореме 23 всякая такая функция принадлежит $C^\infty(I)$, ч. т. д.

7. Линейные гиперболические уравнения и задача Коши

Этот параграф посвящен доказательству (упрощенному П. Лаксом) интересной и важной теоремы К. Фридрихса о *симметрических гиперболических системах*. В качестве примера применения этой теоремы рассмотрим задачу Коши

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)f(x_1,\ x_2)=0, \tag{1}$$

$$f(x_1,\ 0)=g(x_1), \qquad \frac{\partial}{\partial x_2}f(x_1,\ 0)=h(x_1)$$

для (гиперболического) формального дифференциального оператора с частными производными

$$L_1=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}. \tag{2}$$

Если ввести вспомогательную функцию

$$\hat{f}(x_1, x_2)=\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)+\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\right]f(x_1,\ x_2),$$

то задачу Коши (1) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}f(x_1,\ x_2)=-\frac{\partial}{\partial x_2}f(x_1, x_2)+\hat{f}(x_1,\ x_2), \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\hat{f}(x_1,\ x_2)=\frac{\partial}{\partial x_2}\hat{f}(x_1,\ x_2)$$

$$f(x_1,\ 0)=g(x_1), \qquad \hat{f}(x_1,\ 0)=g'(x_1)+h(x_1).$$

Вводя векторы $v=[f,\ \hat{f}]$ и $v_0=[g,\ g'+h]$, вещественную эрмитову матрицу

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \tag{4}$$

и матрицу

$$B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

мы можем переписать систему (3) следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}v(x_1,\ x_2)=A\frac{\partial}{\partial x_2}v(x_1,\ x_2)+Bv(x_1,\ x_2), \tag{5}$$

$$v(x,\ 0)=v_1(x).$$

Таким образом, исходная задача (1) оказывается представленной в виде системы (5), к которой и применяется теорема Фридрихса. Большое число возникающих в физике дифференциальных уравнений с частными производными и систем таких уравнений либо можно представить в виде (5), либо имеет такой вид с самого начала. Замечательна среди них *максвелловская система* уравнений электродинамики

$$(6) \qquad \frac{\partial V}{\partial x_0} = A_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} + A_3 \frac{\partial V}{\partial x_3},$$

$$V(0, x_1, x_2, x_3) = V_0(x_1, x_2, x_3),$$

где $V = [V_1, V_2, V_3]$ — комплексный трехмерный вектор, равный сумме «электрического» вектора и умноженного на мнимую единицу i «магнитного» вектора, и где A_1, A_2, A_3 — матрицы, заданные формулами

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оба приведенных выше примера являются частными случаями задачи Коши для системы первого порядка общего типа, описанной в следующей теореме.

1. Теорема (*Фридрихс*). *Пусть* $n \geqslant 1$, $m \geqslant 1$, *а* $A_i(x; s)$, $i = 1, \ldots, n$, *и* $B(x; s)$ — *семейство* $(m \times m)$-*матриц, определенных в* $(n+1)$-*мерном евклидовом пространстве и бесконечно дифференцируемых в нем (здесь мы используем обозначения* $x \in E^n$, $s \in E^1$, *принятые в* § 2). *Предположим, что* $A_j(x; s)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, *равномерно ограничены и эрмитовы при* $[x, s] \in E^{n+1}$. *Пусть* $V_0(x)$ *есть* m-*векторнозначная функция, определенная в* E^n *и бесконечно дифференцируемая в нем. Тогда существует единственная* m-*векторнозначная функция* $V(x; s)$, *определенная и бесконечно дифференцируемая в* E^{n+1}, *такая, что*

$$(\mathrm{a}) \qquad \frac{\partial}{\partial s} V(x; s) = \sum_{j=1}^{n} A_j(x; s)\, \partial_{x_j} V(x; s) + B(x; s) V(x; s),$$

$$[x, s] \in E^{n+1},$$

$$(\mathrm{b}) \qquad V(x; 0) = V_0(x), \qquad x \in E^n.$$

Замечание 1. По соображениям, развитым в первой части § 1, из теоремы 1 вытекает, что имеет место локальная зависимость решения от начальных данных в смысле, разъясненном в § 1. Мы увидим, однако, что этот факт необходим в ходе доказательства теоремы 1, и когда это будет нужно, докажем его прямым методом.

Замечание 2. Если опустить условие ограниченности, наложенное на коэффициенты-матрицы A_j, то, как показывает простая система

$$\partial_y f(x, y) = -e^{-x}\,\partial_x f(x, y) + g(x, y),$$
$$\partial_y g(x, y) = \partial_x g(x, y),$$

теорема не верна. Любая пара функций f, g вида $f(x, y) = h(y - e^x)$, $g(x, y) = 0$ является решением системы. Предположим, что $h_N(s) = \varphi(Ns)$, где φ — функция из $C^\infty(-\infty, +\infty)$, равная нулю при $|s| > 1$ и не обращающаяся в нуль при $s = 0$. Тогда если $f_N(x, y) = h_N(y - e^x)$ и $g_N(x, y) = 0$, то $f_N(0, 1) = 1$ для всех N, в то время как $h_N(x, 0) = \varphi(-Ne^x) = 0$ при $x > -\log N$. Таким образом, предположение о справедливости теоремы существования и единственности решения в этом случае противоречило бы результату о локальной зависимости, доказанному во введении к настоящей главе (§ 1).

Доказательство (*теоремы* 1) будет проведено в несколько этапов; некоторые из них будут доказательствами вспомогательных утверждений, а другие — проверкой того, что доказательства этих вспомогательных утверждений можно свести к доказательству других вспомогательных утверждений.

Прежде всего, однако, условимся относительно терминологии и обозначений. Говоря о «функции», мы имеем в виду либо функцию с вещественными или комплексными значениями, либо функцию, значениями которой являются m-векторы, т. е. элементы комплексного m-мерного унитарного пространства U^m. Смысл слова «функция» при этом или будет ясен из контекста, или будет уточняться в каждом конкретном случае. Если мы хотим подчеркнуть тот факт, что рассматриваемое пространство функций состоит из векторнозначных функций, то над символом соответствующего пространства числовых функций будет добавляться крышка. Так, если C_1 обозначает куб

$$C_1 = \{y \in E^{n+1} \mid |y_j| \leqslant \pi,\ j = 1, \ldots, n+1\}$$

в E^{n+1}, то через $\hat{C}^\infty(C_1)$ будет обозначаться пространство всех бесконечно дифференцируемых m-векторнозначных функций, определенных в C_1. Аналогично через $\hat{C}^\infty_\pi(C_1)$ и $\hat{C}^\infty_0(C_1)$ обозначаются подпространства $\hat{C}^\infty(C_1)$, состоящие из всех функций, кратнопериодических с периодом 2π, и всех функций, которые обращаются в нуль вне компактного подмножества внутренности C_1 соответственно. Если $\mathring{C}_1$ — внутренность C, то $\hat{D}(\mathring{C}_1)$ и $\hat{D}_\pi(C_1)$ — множества всех линейных функционалов на $\hat{C}^\infty_0(C_1)$ и $\hat{C}^\infty_\pi(C_1)$ соответственно. Эти функционалы предполагаются непрерывными в том смысле, что $F(f_n) \to F(f)$, если $f_n, f \in \hat{C}_0^\infty(C_1)$ и $f_n \rightrightarrows f$ в топологии $\hat{C}^\infty(C_1)$ (и в случае $\hat{D}(\mathring{C}_1)$ все функции f_n и f обращаются в нуль вне одного и того же компактного подмножества в C_1). Топология в $\hat{C}^\infty(C_1)$, о которой упоминается в предыдущем предложении, определяется метрикой, заданной при помощи нормы

$$|f| = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{j \geqslant 0 \\ |J|+j \leqslant k}} \frac{1}{2^k k!} \frac{\mu_{J,j}(f)}{1+\mu_{J,j}(f)},$$

где

$$\mu_{J,j}(f) = \sup_{y \in C_1} |\partial_s^j \partial^J f(y)| \quad \text{и} \quad y = [x_1, \ldots, x_n; s].$$

Зафиксируем в U^m до конца этого доказательства ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_m$. Тогда если $f \in C_\pi^\infty(C_1)$, то $e_j f \in \hat{C}_\pi^\infty(C_1)$. Таким образом, если $F \in \hat{D}_\pi(C_1)$, то соотношение $F_j(f) = F(e_j f)$, очевидно, определяет некоторый элемент из $D_\pi(C_1)$. Легко видеть, что отображение $F \to [F_1, \ldots, F_m]$ является взаимно однозначным линейным и непрерывным в обе стороны отображением $\hat{D}_\pi(C_1)$ на прямую сумму m экземпляров пространства $D_\pi(C_1)$. Если разложить векторную функцию f по ее компонентам f_j, $j = 1, \ldots, n$, так что $f = [f_1, \ldots, f_m]$, то легко видеть, что $F(f) = \sum_{j=1}^{m} F^{(j)}(f_j)$. Элементы $F^{(j)} \in D_\pi(C_1)$ будут называться соответственно компонентами элемента $F \in \hat{D}_\pi(C_1)$. Если все компоненты F принадлежат $H_\pi^{(p)}(C_1)$, то мы будем писать $F \in \hat{H}_\pi^{(p)}(C_1)$ и для двух таких F, G из $\hat{H}_\pi^{(p)}(C_1)$ положим $(F, G)_{(k)} = \sum_{j=1}^{m} (F^{(j)}, G^{(j)})_{(k)}$ и $|F|_{(k)} = ((F, F)_k)^{1/2}$. Таким образом, $\hat{H}_\pi^{(p)}(C_1)$, очевидно, является полным гильбертовым пространством. Используя это построение компонент элемента из $\hat{D}_\pi(C_1)$, можно перенести на «векторнозначный» случай всю теорию распределений, развитую в § 3 и § 4. Мы будем пользоваться «векторнозначными» аналогами результатов и определений § 3 и § 4, не давая специальных доказательств и подробных определений, а лишь просто ссылаясь на соответствующие «числовые» теоремы, леммы и определения. Ссылки на определения иногда будут делаться неявно; в этих случаях мы будем использовать указанный выше прием — добавлять крышки над символом пространства «числовых» функций, распределений и т. п. для обозначения соответствующего пространства «векторнозначных» функций, распределений и т. п. Задачу проведения соответствующих «векторнозначных» модификаций в теоремах, леммах и определениях теории распределений мы оставляем читателю в качестве упражнения.

Наконец, условимся обозначать через τ формальный дифференциальный оператор, определенный на каждой функции $f \in \hat{D}(E^n)$ соотношением

$$\tau f = \partial_s f - \sum_{i=1}^{n} A_i(\cdot)\,\partial_{x_i} f - B(\cdot)\,f(\cdot).$$

После этого небольшого отступления, связанного с обозначениями и терминологией, перейдем к доказательству теоремы 1.

(A) Первый шаг доказательства состоит в установлении следующего утверждения.

(I) Для любого r существует конечная постоянная $K_0(r) > r$, настолько большая, что из справедливости уравнений

$$(\tau f)(x;\, s) = 0, \qquad |[x,\, s]| < K_0(r)$$

и

$$f(x;\, 0) = 0, \qquad |x| < K_0(r)$$

для функции $f \in \hat{C}^1(E^{n+1})$ вытекает, что $f(y) = 0$ при $|y| < r$.

Для доказательства (I) будем рассуждать следующим образом. Пусть функция f удовлетворяет предположениям утверждения (I) и $F(x;\, s) = f(x;\, \varphi(x)s)$, где φ — неотрицательная функция из $C^\infty(E^n)$, которая будет выбрана ниже. Мы предполагаем, однако, что $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$. Тогда $\partial_{x_i} F = \partial_{x_i} f + (\partial_{x_i}\varphi)\,\partial_s f$ и $\partial_s F = \varphi \partial_s f$. Таким образом, F удовлетворяет уравнению (системе уравнений)

$$(1) \qquad \Big(I - \sum_{i=1}^{n} A_i(x;\, \varphi(x)s)\,\partial_{x_i}\varphi(x)\Big)\,\partial_s F(x;\, s) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (\varphi(x)\,A_i(x;\, \varphi(x)s))\,\partial_{x_i} F(x;\, s) + \varphi(x)\,B(x;\, \varphi(x)s)\,F(x;\, s)$$

на множестве точек $[x,\, s]$, таких, что $|[x,\, \varphi(x)s]| < K_0(r)$. Пусть

$$\mu = \sup_{[x,\, s] \in E^n} |A_i(x;\, s)|$$

и ψ — неотрицательная функция в $C^\infty(E^n)$, такая, что $\psi(x) \leqslant 1$ для всех x, $\psi(x) = 1$ для $|x| \leqslant 1$ и $\psi(x) = 0$ для $|x| > 3/2$. Тогда если ε достаточно мало, то $|\mu\varepsilon(\partial_{x_i}\psi)(\varepsilon x)| < 1/2n$ для всех x. Выберем $\varepsilon < r^{-1}$, для которого это неравенство выполнено, и положим $\varphi(x)=\psi(\varepsilon x)$ и $K_0(r)=10n\varepsilon^{-1}$, так что $|r|<K_0(r)/10n$, и потому $\varphi(x)=1$ при $|x|\leqslant r$. Положим

$$H(x;\ s)=\sum_{i=1}^{n} A_i(x,\ \varphi(x)s)\,\partial_{x_i}\varphi(x),$$

$$\widetilde{A}_i(x;\ s)=\varphi(x)\,A_i(x;\ \varphi(x)s),\quad \widetilde{B}(x;\ s)=\varphi(x)\,B(x;\ \varphi(x)s).$$

Тогда ясно, что $H(x;\ s)$ эрмитова и $|H(x;\ s)|<1/2$, в то время как F удовлетворяет уравнению (системе уравнений)

$$(2)\qquad (I-H(y))\,\partial_s F(y)=\sum_{i=1}^{n}\widetilde{A}_i(y)\,\partial_{x_i}F(y)+\widetilde{B}(y)\,F(y),\quad |y|<K_0(r).$$

Кроме того, ясно, что $F(x;\ s)=f(x;\ s)=0$, если $s=0$ и $|x|<K_0(r)$, а также, что $F(x;\ s)=f(x;\ 0)=0$, если $(3/2)\,\varepsilon^{-1}<|x|<K_0(r)$, т. е. если $3K_0(r)/20n<|x|<K_0(r)$. Так как $H(x;\ s)$ эрмитова и $|H(x;\ s)|<1/2$, то из лемм VII.3.4 и VII.3.11, следствия X.2.8 и теоремы X.4.2 вытекает, что матрица $I-H(x;\ s)$ имеет положительный квадратный корень $H_1(x;\ s)$, который также эрмитов, и эрмитовый обратный. Мы хотим показать, что этот квадратный корень $H_1(x;\ s)$ есть бесконечно дифференцируемая функция, зависящая от параметров $x,\ s$. Для этого заметим сначала, что по определению VII.3.9

$$[*]\qquad H_1(x;\ s)=\int_{\Gamma}(\lambda I-I+H(x;\ s))^{-1}\lambda^{1/2}\,d\lambda,$$

где в качестве контура интегрирования Γ можно выбрать любой замкнутый контур, лежащий в правой полуплоскости и обегающий один раз спектр $I-H(x;\ s)$ в положительном направлении (в смысле теории функций комплексного переменного). Так как по леммам VII.3.4 и VII.3.8 спектр матрицы $I-H(x;\ s)$ содержится в круге

$$\{z\,|\,|z-1|\leqslant 1/2\},$$

то в качестве контура Γ можно взять окружность

$$\left\{\lambda\,|\,|\lambda-1|=\frac{3}{4}\right\}.$$

Тогда по лемме VII.3.4

$$(\lambda I-I+H(x;\ s))^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(H(x;\ s))^k}{(\lambda-1)^{k+1}}.$$

Так как $|H(x;\ s)|\leqslant 1/2$ и $|\lambda-1|=3/4$ для $\lambda\in\Gamma$, то этот ряд, как и ряды, полученные из него почленным дифференцированием любое число раз по x, s или λ, сходится равномерно по всем

x, s и $\lambda \in \Gamma$, а следовательно, определяет функцию, бесконечно дифференцируемую по параметрам x, s, λ. Из формулы [*] тогда следует, что $H_1(x; s)$ бесконечно дифференцируемо по параметрам x и s.

Пусть $G(y) = H_1(y) F(y)$. Тогда в силу (2)

$$(3)\qquad \begin{aligned} \partial_s G(y) &= \partial_s H_1(y) F(y) + H_1(y) \partial_s F(y) = \\ &= (\partial_s H_1(y)) F(y) + H_1(y)^{-1} \sum_{i=1}^{n} \widetilde{A}_i(y) \partial_{x_i} (H_1(y)^{-1} G(y)) + \\ &\qquad + H_1(y)^{-1} \widetilde{B}(y) H_1(y)^{-1} G(y) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} H_1(y)^{-1} \widetilde{A}_i(y) H_1(y)^{-1} \partial_{x_i} G(y) + \{(\partial_s H_1(y)) H_1(y)^{-1} + \\ &\quad + H_1(y)^{-1} \sum_{i=1}^{n} \widetilde{A}_i(y) (\partial_{x_i} H_1(y)^{-1}) + H_1(y)^{-1} B(y) H_1(y)^{-1}\} G(y), \end{aligned}$$

так что, полагая,

$$\mathring{A}_i(y) = H_1(y)^{-1} \widetilde{A}_i(y) H_1(y)^{-1}; \quad \mathring{B}(y) = \{(\partial_s H_1(y)) H_1(y)^{-1} + \\ + H_1(y)^{-1} \sum_{i=1}^{n} \widetilde{A}_i(y) (\partial_{x_i} H_1(y)^{-1}) + H_1(y)^{-1} B(y) H_1(y)^{-1}\},$$

а σ равным формальному дифференциальному оператору с частными производными

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} \mathring{A}_i(y) \partial_{x_i} + \mathring{B}(y),$$

мы имеем

$$(4)\qquad \partial_s G(x; s) = \sigma G(x; s), \quad |x| < \tfrac{1}{2} K_0(r), \quad |s| < \tfrac{1}{2} K_0(r).$$

Так как матрицы $\widetilde{A}_i(y)$ и $H_1(y)$ эрмитовы, то и матрицы $H_1(y)^{-1}$ и $\mathring{A}_i(y) = H_1(y)^{-1} \mathring{A}_i(y) H_1(y)^{-1}$ эрмитовы (см. XII.1.6 (a) и (c)).

Далее, если λ — произвольная вещественная постоянная, то функция $G_\lambda(x; s)$, определяемая соотношением $G_\lambda(x; s) = e^{-\lambda s} G(x; s)$, удовлетворяет равенству

$$\partial_s G_\lambda(x; s) = (\sigma - \lambda) G(x; s).$$

Кроме того, поскольку $F(x; s) = 0$, если $s = 0$ и $|x| < K_0(r)$, а также если $K_0(r) > |x| > (3/20\,n) K_0(r)$, то отсюда следует, что $G_\lambda(x; s) = 0$, если $s = 0$, $|x| < K_0(r)$, а также если $K_0(r) > |x| > (3/20\,n) K_0(r)$. Пусть через D_r обозначен куб

$$D_r = \left\{ x \in E^n \,|\, |x_j| \leqslant \frac{1}{2n} K_0(r), \qquad j = 1, \ldots, n \right\}$$

в евклидовом пространстве E^n. Тогда $G_\lambda(x; s)$ обращается в нуль для x из окрестности границы D_r. Поэтому, интегрируя по частям, мы получаем из (4), что

$$(5)\quad \frac{d}{ds}\int\limits_{D_r} |G_\lambda(x; s)|^2\,dx = \int\limits_{D_r}\sum_{j=1}^{n}\{(\mathring{A}_j(x; s)\,\partial_{x_j}G_\lambda(x; s),\ G_\lambda(x; s)\} + \\ + \{(\mathring{A}_j^*(x; s)\,G_\lambda(x; s),\ \partial_{x_j}G_\lambda(x; s))\}\,dx + \\ + \int\limits_{D_r}\{(\mathring{B}(y)\,G_\lambda(y),\ G_\lambda(y)) + (G_\lambda(y),\ \mathring{B}(y)\,G_\lambda(y))\}\,dx - \\ - 2\lambda\int\limits_{D_r}|G_\lambda(x; s)|^2\,dx = \\ = \int\limits_{D_r}(\{\mathring{B}(x; s) + \mathring{B}^*(x; s) + \sum_{j=1}^{n}\partial_{x_j}\mathring{A}_j(x; s)\}\,G_\lambda(x; s),\ G_\lambda(x; s))\,dx - \\ - 2\lambda\int\limits_{D_r}|G_\lambda(x; s)|^2\,dx \leqslant (\mathring{\alpha} - 2\lambda)\int\limits_{D_r}|G_\lambda(x; s)|^2\,dx,\quad |s| < \frac{1}{2}K_0(r),$$

где

$$(6)\qquad \mathring{\alpha} = \sup_{\substack{x\in D_r\\ |s|\leqslant 2r}}\Big|\mathring{B}(x; s) + \mathring{B}^*(x; s) - \sum_{j=1}^{n}\partial_{x_j}\mathring{A}_j(x; s)\Big|.$$

Таким образом, если $2\lambda > \mathring{\alpha}$, то функция $\int\limits_{D_r}|G_\lambda(x; s)|^2\,dx$ является убывающей функцией от s; так как она обращается в нуль при $s = 0$, то она должна обращаться тождественно в нуль при $|s| < K_0(r)/2$. Следовательно, $G_\lambda(y) = G_\lambda(x; s) = 0$ при $x \in D_r$ и $|s| < K_0(r)/2$, так что $G_\lambda(y) = F(y) = 0$ для $x \in D_r$ и $|s| < K_0(r)/2$. Таким образом, $F(y) = 0$ при $x \in D_r$ и $|s| < K_0(r)/2$. Если $|y| = |[x, s]| < r$, то, поскольку $|r| < K_0(r)/10n$, $|x| < r$ и $|s| < K_0(r)/2$, так что $x \in D_r$ и $F(y) = 0$. Кроме того, как отмечено выше, $\varphi(x) = 1$ при $|x| < r$. Поэтому $F(x; s) = f(x; \varphi(x)\,s) = f(x; s)$ при $|[x, s]| < r$. Следовательно, если $|y| < r$, то $f(y) = 0$, и утверждение (I) полностью доказано.

(B) Единственность функции V в теореме является очевидным следствием утверждения (I). Кроме того, утверждение (I) позволяет нам свести доказательство существования функции V к доказательству следующего утверждения.

(II) Для всех $r > 0$ и $p \geqslant 1$ существует функция $V_r^p \in \hat{C}^p(E^n)$, такая, что $\tau V_r^p(x; s) = 0$ для $|[x, s]| < r$ и $V_r^p(x; 0) = V_0(x)$ для $|x| < r$.

Действительно, предполагая (II) выполненным и принимая за $K_0(r)$ функцию от r, введенную в (I), определим функцию $V^p(x; s)$ соотношением

[*] $$V^p(x; s) = V^p_{K_0(r)}(x; s), \quad |[x, s]| < r, \quad p \geqslant 1.$$

Из (I) вытекает, что

[**] $$V^p_{K_0(r)}(x; s) = V^{p'}_{K_0(r)}(x; s) \quad \text{для } p, p' \geqslant 1$$
$$\text{и } |[x, s]| < \min(r, r_1),$$

поэтому функция $V^p(x; s)$ соотношением [*] определена однозначно. В силу [*], очевидно, что $V^p \in \hat{C}^p(E^{n+1})$, $\tau V^p \equiv 0$ и $V^p(x; 0) \equiv V_0(x)$. С другой стороны, из [**] вытекает, что $V^p = V^{p+1}$. Поэтому, полагая $V = V^1$, мы имеем $V \in \hat{C}^\infty(E^{n+1})$. Тем самым показано, что наша теорема является следствием утверждения (II).

Оставшаяся часть доказательства посвящена проверке того, что (II) справедливо для всех r. Меняя масштаб переменных, мы, очевидно, можем и будем далее считать $r = 1$. Пусть C_1 — куб в E^{n+1}, описанный во втором абзаце настоящего доказательства, и пусть $C = \{x \in E^n \mid |x_j| \leqslant \pi, j = 1, \ldots, n\}$. Пусть a_j, b и v_0 — функции из $\hat{C}^\infty_\pi(C_1)$, $\hat{C}^\infty_\pi(C_1)$ и $\hat{C}^\infty_\pi(C)$ соответственно, выбранные так, что $a_j(y) = A_j(y)$ и $b(y) = B(y)$ при $|y| \leqslant 1$, и $v_0(x) = V_0(x)$ при $|x| \leqslant 1$. Мы можем, кроме того, считать, что $a_j(y)$ — эрмитова матрица при каждом $y \in C_1$ и что функции a_j и b являются не только периодическими с периодом 2π по переменным y, но и четными периодическими функциями с периодом π по этим переменным. Действительно, для построения функций a_j и b положим

$$C_2 = \left\{ y \in E^{n+1} \mid |y_j| \leqslant \frac{\pi}{2}, 1 \leqslant j \leqslant n+1 \right\}.$$

По лемме 2.1 выберем такую функцию $w(y) \in C_0^\infty(C_2)$, что $w(y) \equiv 1$ для y из некоторой окрестности множества $\{y \in E^{n+1} \mid |y| \leqslant 1\}$, и положим $a_j(y) = w(y) A_j(y)$ для $y \in C_1$ и $b(y) = w(y) B(y)$ для $y \in C_2$. Так как функции a_j и b обращаются тождественно в нуль в окрестности границы куба C_2, то ясно, что $a_j \in \hat{C}^\infty_\pi(C_2)$ и $b \in \hat{C}^\infty_\pi(C_2)$. Таким образом, мы можем, очевидно, продолжить a_j и b до функций, кратнопериодических с периодом π, определенных на всем E^{n+1}. Мы можем по-прежнему обозначать эти продолженные функции теми же буквами a_j и b. Этим завершается построение функций a_j и b, обладающих нужными свойствами. Таким же способом можно построить функцию v_0.

Построив функции a_j, b и v_0, заметим, что (II) является, очевидно, следствием такого утверждения:

(III) Для любого $p \geqslant 1$ существует функция $v \in \hat{C}^p_{\pi_x}(C_1)$, такая что

$$\partial_s v(x;\, s) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x;\, s)\, \partial_{x_j} v(x;\, s) + b(x;\, s)\, v(x;\, s), \quad [x;\, s] \in C_1,$$
$$v(x;\, 0) = v_0(x), \qquad x \in C.$$

(C) Для доказательства утверждения (III) будем рассуждать следующим образом. Пусть ϱ — формальный дифференциальный оператор

$$\varrho = \partial_s - \sum_{j=1}^{n} a_j(x;\, s)\, \partial_{x_j} - b(x;\, s).$$

Для каждого $k \geqslant 0$ определим неограниченное линейное отображение W_k пространства $\hat{H}^{(k)}_{\pi}(C)$ в $\hat{H}^{(k)}_{\pi_x}(C_1)$ (определение пространства $\hat{H}^{(k)}_{\pi_x}(C_1)$ см. в двух абзацах § 6, следующих за доказательством леммы 6.16), полагая $f \in \mathfrak{D}(W_k)$, если $f \in \hat{C}^{k+1}_{\pi}(C)$ и существует такое $g \in \hat{C}^{k+1}_{\pi}(C_1)$, что $\varrho g = 0$ и $f(x) = g(x;\, 0)$ для $x \in C$, и полагая $W_k f = g$. (Как вытекает из (I), функция g единственна, если она вообще существует.) Мы покажем, что

(IV) W_k является однозначным ограниченным отображением линейного подпространства пространства $\hat{H}^{(k)}_{\pi}(C)$ в $\hat{H}^{(k)}_{\pi_x}(C_1)$ при всех $k \geqslant 0$.

(V) $\mathfrak{D}(W_k)$ плотно в $\hat{H}^{(k)}_{\pi}(C)$ при каждом $k \geqslant 0$.

Как только (IV) и (V) установлены, мы можем рассуждать следующим образом. Пусть $f \in \hat{C}^{\infty}_{\pi}(C)$, а f_n — существующая в силу (V) последовательность элементов из $\mathfrak{D}(W_{p+\nu})$, $\nu = [(n+1/2)]$, такая, что $|f_n - f|_{(p+\nu)} \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда в силу (IV) $W_{p+\nu} f_n$ сходится по норме $\hat{H}^{(p+\nu)}_{\pi_x}(C_1)$ к некоторому элементу $g \in \hat{H}^{(p+\nu)}_{\pi_x}(C_1)$ (см. 3.19). Из теоремы Соболева (4.5) вытекает (см. в § 3 после доказательства леммы 3.28 замечание относительно того, как следует применять теорему Соболева к пространству $\hat{H}^{(k)}_{\pi_x}(C_1)$), что $g \in \hat{C}^{(p)}_{\pi_x}(C_1)$. Из леммы 3.22 ясно, что $\varrho g = 0$, а из следствия 4.6 вытекает, что $\partial^J f_n \to \partial^J f$ в топологии $\hat{C}^{(0)}(C)$ при каждом J, $|J| \leqslant p$, и поэтому $f_n \to f$ в топологии $\hat{C}^{(p)}_{\pi}(C)$. Аналогично $W_{p+\nu} f_n \to g$ в топологии $\hat{C}^{(p)}_{\pi_x}(C_1)$, так что $g(x;\, 0) = f(x)$ для $x \in C$. Таким образом, если утверждения (IV) и (V) доказаны, то из них непосредственно вытекает утверждение (III), а вместе с ним и наша теорема.

(D) Утверждение (IV) доказывается без труда. Пусть $f \in \mathfrak{D}(W_k)$, $g = W_k f$ и

$$A_k(s) = A_k(g;\ s) = \sum_{|J| \leqslant k} \int_C |\partial^J g(x;\ s)|^2\, dx, \qquad -\pi \leqslant s \leqslant \pi.$$

Дифференцируя последнее равенство по s и используя уравнение $\varrho g = 0$, мы получаем

$$\frac{d}{ds} A_k(s) = \sum_{|J| \leqslant k} \int_C \Big(\sum_{j=1}^n a_j(x;\ s)\, \partial_{x_j} \partial^J g(x;\ s) + b(x;\ s)\, \partial^J g(x;\ s),\ \partial^J g(x;\ s) \Big)\, dx +$$
$$+ \sum_{|J| \leqslant k} \int_C \Big(\partial^J g(x;\ s),\ \sum_{j=1}^n a_j(x;\ s)\, \partial_{x_j} \partial^J (x;\ s) + b(x;\ s)\, \partial^J g(x;\ s) \Big)\, dx.$$

Далее, используя эрмитовость $a_j(y)$ и кратную периодичность функций g, a_j и b по переменным x и интегрируя по частям, мы получаем

$$\frac{d}{ds} A_k(s) = \sum_{|J| \leqslant k} \int_C \Big(\partial^J g(x;\ s),\ -\sum_{j=1}^n \partial_{x_j} \{a_j(x;\ s)\, \partial^J g(x;\ s)\} + b^*(x;\ s)\, \partial^J g(x;\ s) \Big)\, dx + \sum_{|J| \leqslant k} \int_C \Big(\partial^J g(x;\ s),\ \sum_{j=1}^n a_j(x;\ s) \times$$
$$\times\, \partial_{x_j} \partial^J g(x;\ s) + b(x;\ s)\, \partial^J g(x;\ s) \Big)\, dx =$$
$$= \sum_{|J| \leqslant k} \int_C \Big(\partial^J g(x;\ s),\ \Big\{ \Big(-\sum_{j=1}^n \partial_{x_j} a_j(x;\ s) \Big) + b^*(x;\ s) + b(x;\ s) \Big\}\, \partial^J g(x;\ s) \Big)\, dx. \tag{7}$$

Из формулы (7) и неравенства Шварца вытекает, что для каждого $k \geqslant 0$ существует такая положительная постоянная $N_k < \infty$, что

$$\left| \frac{d}{ds} A_k(g;\ s) \right| \leqslant N_k A_k(g;\ 0), \qquad -\pi \leqslant s \leqslant \pi. \tag{8}$$

В силу неравенства (8) функция $A_k(g;\ s)\, e^{-N_k s}$ не возрастает при $0 \leqslant s \leqslant \pi$; таким образом, $A_k(g;\ s) \leqslant e^{N_k \pi} A_k(g;\ 0)$ при $0 \leqslant s \leqslant \pi$. Подобными рассуждениями для интервала $-\pi \leqslant s \leqslant 0$ получаем, что

$$A_k(g;\ s) \leqslant e^{N_k \pi} A_k(g;\ 0), \qquad -\pi \leqslant s \leqslant \pi. \tag{9}$$

Так как g удовлетворяет дифференциальному уравнению с частными производными

$$\partial_s g(x; s) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x; s)\,\partial_{x_j} g(x; s) + b(x; s)\,g(x; s), \qquad [x, s] \in C_1,$$

то, ввиду возможности повторного дифференцирования этого уравнения, очевидно, что любая производная $\partial^{J_1} g$ функции g порядка не выше k может быть представлена как линейная комбинация «чистых x-производных» $\partial^J g$ функции g порядка не выше k, т. е. очевидно, что существует такое семейство коэффициентов-матриц $C_{J_1, J}$, что

$$(10) \qquad \partial^{J_1} g(x; s) = \sum_{|J| \leqslant |J_1|} C_{J_1, J}(x; s)\,\partial^J g(x; s), \qquad [x, s] \in C_0.$$

Матрицы $C_{J_1, J}$, являющиеся бесконечно дифференцируемыми по $[x, s]$ функциями при $[x, s] \in C_1$, могут быть с помощью правила Лейбница явно вычислены через функции a_j и b. Эти явные выражения в дальнейшем нам не понадобятся, и мы их не выписываем. Но из формулы (10), неравенства (9) и определения функции $A_k(g; s)$ вытекает, что для каждого $k \leqslant p$ существует такая конечная положительная постоянная $\widetilde{N}_k$, что из соотношения $W_k f = g$ вытекает неравенство

$$(11) \qquad \left\{ \int\limits_{C_1} |\,\partial^{J_1} g(x; s)|^2\,dx\,ds \right\}^{1/2} \leqslant \widetilde{N}_k\,|f|_k, \quad |J_1| \leqslant k.$$

Тем самым получено (IV).

Таким же путем из установленного выше неравенства $A_k(g; s) \leqslant e^{N_k \pi} A_k(g; 0)$ выводится справедливость следующего утверждения:

(VI) Если $g \in \hat{C}^{k+1}_{\pi_x}(C_1)$, $\varrho g(x; s) = 0$, $[x, s] \in C_1$ и $g(x; 0) = f(x)$ для $x \in C$, то для каждого $k > 0$ существует конечная положительная постоянная M_k, такая, что $|g(\cdot, \pi)|_{(k)} \leqslant M_k |f|_{(k)}$.

(E) Так как (IV) уже установлено, то доказательство теоремы 1 сведено теперь нами к доказательству утверждения (V). Для доказательства (V) поступаем следующим образом. Для каждого $k \geqslant 0$ определим линейное отображение S_k: $\hat{H}^{(k)}_{\pi}(C) \to \hat{H}^{(k)}_{\pi}(C)$, полагая $\mathfrak{D}(S_k) = \mathfrak{D}(W_k)$, $(S_k f)(x) = (W_k f)(x; \pi)$ для $x \in C$. Тогда в силу (VI) оператор S_k ограничен и имеет норму не больше M_k. Мы покажем, что

(VII) для каждого $k \geqslant 0$ и всякого достаточно малого положительного $\alpha \leqslant \alpha(k)$ отображение $I - \alpha S_k$ имеет плотную в $\hat{H}^{(k)}_{\pi}(C)$ область значений.

Предположим, что (V) неверно, а (VII) уже установлено. Так как (V) неверно и $\mathfrak{D}(S_k) = \mathfrak{D}(W_k)$, то существуют $k \geqslant 0$,

$k \leqslant p$, и ненулевой элемент $f_0 \in \hat{H}_\pi^{(k)}(C)$, такие, что $(f_0, f)_{(k)} = 0$ для всех $f \in \mathfrak{D}(S_k)$. Выберем постоянную $\alpha < 1/2M_{\bar{k}}$ и, используя (VII), построим последовательность $\{h_n\}$ элементов из $\mathfrak{D}(S_k)$, такую, что $h_n - \alpha S_k h_n \to f_0$ по норме $\hat{H}_\pi^{(k)}(C)$ при $n \to \infty$. Так как в силу (6) $|\alpha S_k h_n|_{(k)} < (1/2)|h_n|_{(k)}$, то мы имеем

$$|h_n - \alpha S_k h_n|_{(k)} \geqslant |h_n|_{(k)} - \frac{1}{2}|h_n|_{(k)} \geqslant \frac{1}{2}|h_n|_{(k)},$$

и поскольку $h_n - \alpha S_k h_n \to f_0$ при $n \to \infty$, то $|h_n|_{(k)}$ остается ограниченным при $n \to \infty$. Таким образом, существует постоянная Λ, такая, что $|h_n|_{(k)} \leqslant \Lambda$ при $n \geqslant 1$. Следовательно,

$$|(h_n - \alpha S_k h_n, h_n)_{(k)} - (f_0, h_n)_{(k)}| \leqslant \Lambda |h_n - \alpha S_k h_n - f_0|_{(k)},$$

так что

$$(h_n - \alpha S_k h_n, h_n)_{(k)} = |h_n|^2_{(k)} - \alpha (S_k h_n, h_n)_{(k)} \to 0$$

при $n \to \infty$. Так как $|\alpha S_k h_n|_{(k)} < (1/2)|h_n|_{(k)}$, то, следовательно, $|h_n|_{(k)} \to 0$ при $n \to \infty$. Но поскольку $h_n - \alpha S_k h_n \to f_0$, то $f_0 = 0$; это противоречие показывает, что из (VII) вытекает (V).

Для доказательства (VII) мы докажем сначала следующее утверждение:

(VIII) Пусть $\lambda \geqslant \lambda(k')$ — вещественное достаточно большое число и $k' \geqslant [(n+1)/2] + 1 = \nu + 1$. Тогда для любой функции $h \in \hat{C}_{\pi_x}^{k'}(C_1)$, все производные которой порядка $\leqslant k'$ являются периодическими с периодом π по переменной s функциями, существует функция g из $\hat{C}_{\pi_x}^{k'-\nu}(C_1)$, все производные которой порядка $\leqslant k' - \nu$ являются периодическими с периодом π по переменной s функциями, причем $((\varrho + \lambda) g)(y) = h(y)$ для $y \in C_1$.

Утверждение (VII) может быть получено из (VIII) следующим образом. Положим в (VII) k' равным $k + \nu + 1$, где $\nu = [(n+1)/2]$, а k — такое же, как в (VII). Пусть λ и α связаны соотношением $\alpha = e^{-\pi\lambda}$, так что если «α достаточно мало», то это эквивалентно тому, что «λ достаточно велико». Пусть $f \in \hat{C}_\pi^\infty(C)$, а через ϱ_0 обозначен формальный дифференциальный оператор с частными производными

$$\varrho_0 = \sum_{j=1}^n a_j(x; s)\, \partial_{x_i} + b(x; s), \tag{12}$$

так что $\varrho = \partial_s - \varrho_0$. Пусть η — функция из $C^\infty(-\infty, +\infty)$, тождественно равная нулю в интервале $(-\infty, 1/4)$ и тождественно равная -1 в интервале $(1/2, \infty)$. Положим $m = k' + 1$ и пусть

$$g(x; s) = \eta(s) \sum_{j=0}^m \frac{(s-\pi)^j ((\varrho_0 - \lambda)^j f)(x)}{j!}, \quad x \in C, \quad 0 \leqslant s \leqslant \pi. \tag{13}$$

Доопределим функцию $g(x;\ s)$ для $x\in C$ и $-\pi\leqslant s\leqslant 0$, потребовав, чтобы она была периодической с периодом π по s. Тогда $((\varrho+\lambda)g)(x;\ s)=0$ для $x\in C$ и $0\leqslant s\leqslant 1/4$, в то время как

$$((\varrho+\lambda)g)(x;\ s)=((\partial_s-(\varrho_0-\lambda))g)(x;\ s)=$$
$$=(m!)^{-1}(s-\pi)^m((\varrho_0-\lambda)^{m+1}f)(x),\quad \frac{1}{2}\leqslant s\leqslant\pi.$$

Эти соотношения показывают, что частные производные функции $(\varrho+\lambda)g$ порядка не выше $k'=m-1$ являются не только кратнопериодическими с периодом 2π по переменным x, но также периодическими с периодом π по переменной s. Поэтому в силу (VIII) существует функция $h\in\hat{C}_{\pi_x}^{k'-\nu}(C_1)$, все производные которой порядка не выше $k'-\nu$ периодичны с периодом π по переменной s, такая, что $((\varrho+\lambda)g)(y)=((\varrho+\lambda)h)(y)$ для $y\in C_1$. Пусть $g_1=g-h$; тогда, очевидно, $((\varrho+\lambda)g_1)(y)=0$ для $y\in C_1$, а в силу (13) ясно, что $g_1(x;\ 0)-g_1(x;\ \pi)=g(x;\ 0)-g_1(x;\ \pi)=f(x)$ для $x\in C$. Так как $(\varrho+\lambda)g_1(y)=(\partial_s-\varrho_0+\lambda)g_1(y)=0$, то, полагая $g_2(x;\ s)=$ $=e^{+\lambda s}g_1(x;\ s)$, мы имеем $(\varrho g_2)(y)=0$. Более того, $g_2(x;\ 0)-$ $-\alpha g_2(x;\ \pi)=g_1(x;\ 0)-g_1(x;\ \pi)=f(x)$. Таким образом, f принадлежит области значений оператора $I-\alpha S_{k'-\nu-1}=I-\alpha S_k$. Тем самым область значений оператора $I-\alpha S_k$ содержит все функции из $\hat{C}_\pi^\infty(C)$. Так как это пространство плотно в $\hat{H}_\pi^{(k)}(C)$ при каждом k в силу леммы 3.4, то отсюда вытекает (VII). Наша теорема будет доказана, как только будет установлено (VIII).

Напомним теперь, что в силу замечаний, сделанных в абзаце, предшествующем утверждению (III), матрицы-коэффициенты a_j и b формального дифференциального оператора ϱ являются кратнопериодическими с периодом π по переменным y. Таким образом, делая замену переменных $x\longrightarrow x$, $s\longrightarrow 2s-\pi$ и используя теорему Соболева (4.5) (см. замечания в § 3, следующие за доказательством леммы 3.28 по поводу того, как применять теорему Соболева к пространству $\hat{H}_{\pi_x}^{(k)}(C_1)$), мы убеждаемся, что (VIII)) является очевидным следствием такого утверждения:

(IX) Пусть $\hat{A}_j(y)$, $j=1,\ \ldots,\ n$, и $\hat{B}(y)$ суть $(m\times m)$-матрицы, бесконечно дифференцируемые по параметру $y\in E^{n+1}$, и пусть матрицы $\hat{A}_j(y)$ эрмитовы при $j=1,\ \ldots,\ n$ и $y\in E^{n+1}$. Предположим также, что $\hat{A}_j(y)$ и $\hat{B}(y)$ кратнопериодичны с периодом 2π по всем переменным y. Обозначим через $\hat{\tau}$ формальный дифференциальный оператор с частными производными

$$\hat{\tau}=\partial_s-\sum_{j=1}^{n}\hat{A}_j(x;\ s)\partial_{x_j}-\hat{B}(x;\ s).$$

Пусть $k \geqslant [(n+1)/2]+1$; тогда для всякого достаточно большого вещественного λ и любой функции $h \in \hat{H}_\pi^{(k)}(C_1)$ существует функция $g \in \hat{H}_\pi^{(k)}(C_1)$, такая, что $(\hat{\tau}-\lambda)g=h$.

Сведя всю нашу задачу к доказательству (IX), мы переходим теперь к этому доказательству. Рассмотрим два неограниченных оператора в $\hat{H}_\pi^{(k)}(C_1)$, определяемые соотношениями

$$\mathfrak{D}(T_k^{(0)}) = \hat{C}_\pi^\infty(C_1),\quad T_k^{(0)}F = \hat{\tau}F,\quad F \in \mathfrak{D}(T_k^{(0)}), \tag{14}$$

$$\mathfrak{D}(T_k^{(1)}) = \{f \in \hat{H}_\pi^{(k)}(C_1) \mid \hat{\tau}f \in \hat{H}_\pi^{(k)}(C_1)\}; \tag{15}$$
$$T_k^{(1)}F = \hat{\tau}F,\quad F \in \mathfrak{D}(T_k^{(1)}).$$

В силу определений 3.2, 3.5 и 3.15 мы имеем

$$(T_k^{(0)}f,\ g)_{(k)} = \sum_{|J_1|,\ |\hat{J}_1| \leqslant k} \int_{C_1} \Big(\partial^{J_1}\Big(\Big(\partial_s - \sum_{j=1}^n \hat{A}_j(x;\ s)\,\partial_{x_j} - \hat{B}(x;\ s)\Big)f\Big)(x;\ s),\ \overline{\partial^{\hat{J}_1}g(x;\ s)}\Big)\,dx\,ds = \tag{16}$$
$$= - \sum_{|J_1|,\ |\hat{J}_1| \leqslant k} \int_{C_1} \Big\{(\partial^{J_1}f)(x;\ s),\ \overline{\Big[\partial^{\hat{J}_1}\Big(\partial_s - \sum_{j=1}^n \hat{A}_j(x;\ s)\,\partial_{x_j} - \hat{B}(x;\ s)\Big)g\Big](x;\ s)}\Big\}\,dx\,ds +$$
$$+ \sum_{|J_1|,\ |\hat{J}_1| \leqslant k} \int_{C_1} [B_{J_1;\ \hat{J}_1}(x;\ s)(\partial^{J_1}f)(x;\ s),\ \overline{(\partial^{\hat{J}_1}g)(x;\ s)}]\,dx\,ds =$$
$$= -(f,\ T_k^{(1)}g)_{(k)} + \sum_{|J_1|,\ |\hat{J}_1| \leqslant k} \int_{C_1} (B_{J_1;\ \hat{J}_1}(x;s)(\partial^{J_1}f)(x;s), \overline{(\partial^{\hat{J}_1}g)(x;s)})\,dx\,ds$$

для всех $f \in \mathfrak{D}(T_k^{(0)})$ и $g \in \mathfrak{D}(T_k^{(1)})$; в этих формулах бесконечно дифференцируемые матрицы $B_{J_1,\ \hat{J}_1}(x;\ s)$ могут быть по правилу Лейбница явно вычислены через матрицы $\hat{A}_j(x;\ s)$ и $\hat{B}(x;\ s)$. Так как в последующих рассуждениях это явное выражение использоваться не будет, то мы его не приводим.

Предположим, что $f \in \hat{C}_\pi^\infty(C_1)$, $g \in \hat{H}_\pi^{(k)}(C_1)$, а через Γ обозначен эллиптический дифференциальный оператор

$$\Gamma = \sum_{|J_1| \leqslant k} (-1)^{J_1}\partial^{J_1}\partial^{J_1}.$$

Тогда в силу определений 3.15, 3.2 и 3.5 мы имеем

$$(f, \Gamma g) = (f, g)_{(k)}.$$

Заметим для дальнейшего, что если функцию g в (16) рассматривать как распределение и воспользоваться обозначениями теории распределений для записи результата (16) в виде соотношения

$$(T_k^{(0)} f, g)_{(k)} = -(\overline{\Gamma\hat{\tau}g})(f) + \sum_{|J_1|, |\hat{J}_1| \leqslant k} \int_{C_1} B_{J_1, \hat{J}_1}(x; s) \times$$
$$\times \partial^{J_1} f(x; s) \overline{\partial^{\hat{J}_1} g(x; s)}\, dx\, ds,$$

то мы получим формулу, справедливую не только для $f \in \mathfrak{D}(T_k^{(0)}) = \hat{C}_0^\infty(C_1)$ и $g \in \mathfrak{D}(T_k^{(1)})$, но также и для $f \in \hat{C}_0^\infty(C_1)$ и $g \in \hat{H}_\pi^{(k)}(C_1)$. Это утверждение вытекает так же, как и соотношение (16), из определений 3.2, 3.5 и 3.15.

Билинейная форма

$$\Phi_k(g, h) = \sum_{|J_1|, |\hat{J}_1| \leqslant k} \int_{C_1} B_{J_1, \hat{J}_1}(x; s) (\partial^{J_1} g)(x; s) \overline{(\partial^{\hat{J}_1} k)(x; s)}\, dx\, ds,$$

очевидно (по неравенству Шварца), ограничена, если ее рассматривать как билинейную форму в $\hat{H}_\pi^{(k)}(C_1)$. Таким образом, по теореме IV.4.5 $\Phi_k(g, h)$ можно записать в виде

$$\Phi_k(g, h) = (B_k g, h)_{(k)}, \qquad g, h \in \hat{H}_\pi^{(k)}(C_1),$$

а отсюда уже вытекает, снова в силу теоремы IV.4.5, что оператор B_k является линейным и ограниченным. Следовательно, формула (16) может быть переписана в виде

$$(T_k^{(0)} f, g)_{(k)} = -(f, T_k^{(1)} g)_{(k)} + (B_k f, g)_{(k)}, \tag{17}$$
$$f \in \mathfrak{D}(T_k^{(0)}), \ g \in \mathfrak{D}(T_k^{(1)}).$$

Предположим далее, что $g \in \mathfrak{D}((T_k^{(0)})^*)$, так что $(T_k^{(0)})^* g = g^*$ является элементом из $\hat{H}_\pi^{(k)}(C_1)$, удовлетворяющим равенству $(T_k^{(0)} f, g)_{(k)} = (f, g^*)_{(k)}$ для всех $f \in \mathfrak{D}(T_k^{(0)}) = \hat{C}_\pi^\infty(C_1)$. Как было замечено выше, третий абзац после формулы (16), мы имеем

$$(T_k^{(0)} f, g)_{(k)} = -(\overline{\Gamma\hat{\tau}g})(f) + (B_k f, g)_{(k)}$$

для всех $f \in \mathfrak{D}(T_k^{(0)})$ и $g \in \hat{H}_\pi^{(k)}(C_1)$. Таким образом,

$$(f, g^*)_{(k)} - (f, B_k g)_{(k)} - (\overline{\Gamma\hat{\tau}g})(f) = 0, \qquad f \in \hat{C}_\pi^\infty(C_1),$$

и в силу тех же замечаний

$$\Gamma(g^* - B_k g - \hat{\tau} g) = 0.$$

Согласно следствию 6.4, $g^* - B_k g - \hat{\tau} g$ принадлежит $\hat{C}_\pi^\infty(C_1)$ (см. замечания в § 3, следующие за доказательством леммы 3.28, относительно применения следствия 6.4 к пространству $\hat{D}_\pi(C_1)$). Так как $g^* - B_k g \in \hat{H}_\pi^{(k)}(C_1)$, то $\hat{\tau} g \in \hat{H}_\pi^{(k)}(C_1)$. Таким образом, в силу (15) $g \in \mathfrak{D}(T_k^{(1)})$. Соотношение (17) показывает, что $(f, (T_k^{(0)})^* g)_{(k)} = -(f, T_k^{(1)} g)_{(k)} + (f, B_k^* g)$ для всех f из подпространства $\hat{C}_\pi^\infty(C_1)$ в $\hat{H}_\pi^{(k)}(C_1)$, которое по лемме 3.41 плотно в $\hat{H}_\pi^{(k)}(C_1)$. Следовательно, последнее равенство по непрерывности выполнено для всех $f \in \hat{H}_\pi^{(k)}(C_1)$. Тем самым мы показали, что из соотношения $g \in \mathfrak{D}((T_k^{(0)})^*)$ вытекает, что $g \in \mathfrak{D}(T_k^{(1)})$ и что в этом случае $T_k^{(0)*} g = -T_k^{(1)} g + B_k^* g$. Из равенства (17) следует, что это же уравнение выполнено для $g \in \mathfrak{D}(T_k^{(1)})$, и мы приходим к выводу, что

$$(T_k^{(0)})^* = -T_k^{(1)} + B_k^*. \tag{18}$$

Тогда по лемме XII.1.6 $(T_k^{(0)} + B_k + \lambda I)^* = -T_k^{(1)} + \lambda I$ для всех вещественных λ.

Поскольку мы предположили, что $k \geqslant \nu + 1 = [(n+1)/2] + 1$, то по теореме Соболева (4.5) каждая функция из $\hat{H}_\pi^{(k)}(C)$ принадлежит $\hat{C}_\pi^1(C_1)$ и даже $\hat{C}_\pi^{k-\nu}(C_1)$. (См. в связи с этим замечания в § 3, следующие за доказательством леммы 3.28, относительно применения теоремы Соболева к пространству $\hat{H}_\pi^{(k)}(C_1)$.) Предположим, что $(T_k^{(0)} + B_k + \lambda I)^* f = (T_k^{(1)} + \lambda I) f = 0$. Тогда $f \in \hat{C}_\pi^1(C_1)$, и, проводя такие же вычисления, как в равенствах (5) и (6) части (A) настоящего доказательства, мы получаем, что при

$$\lambda > \hat{\alpha} = \sup_{y \in C_1} \left| \hat{B}(y) + \hat{B}(y)^* - \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} \hat{A}_j(y) \right|$$

интеграл

$$\int_C |f(x;\ s)|^2 \, dx$$

является невозрастающей функцией при $-\pi \leqslant s \leqslant \pi$; на самом деле она убывает, когда s изменяется от $-\pi$ до $+\pi$, кроме того случая, когда $f(y) = 0$ для $y \in C_1$. Так как $f(y)$ кратнопериодична с периодом 2π, то рассматриваемый интеграл является периодическим по s и, следовательно, не может убывать, когда s

изменяется от $-\pi$ до π. Таким образом, из соотношений $(T_k^{(0)}+B_k+\lambda I)^* f=0$ и $\lambda>\hat{\alpha}$ вытекает, что $f=0$. Поэтому в силу леммы XII.1.6(a), если $\lambda>\hat{\alpha}$, то отображение $T_k^{(0)}+B_k+\lambda I$ имеет плотную область значений.

Пусть g, $f\in\mathfrak{D}(T_k^{(0)})=\hat{C}_\pi^\infty(C_1)$. В силу (18) и того, что по определению $T_k^{(0)}\subseteq T_k^{(1)}$, мы имеем

$$(B_k^* f, g)=((T_k^{(1)}+(T_k^{(0)})^*)f, g)_{(k)}=((T_k^{(0)}+(T_k^{(0)})^*)f, g)_{(k)}=$$
$$=(f, ((T_k^{(0)})^*+T_k^{(0)})g)_{(k)}=(f, B_k^* g)_{(k)}.$$

Это показывает, что ограниченный оператор B_k^* является самосопряженным; отсюда сразу же вытекает, что B_k самосопряжен. Следовательно, если $\lambda>0$ и $f\in\mathfrak{D}(T_k^{(0)})=\hat{C}_\pi^\infty(C_1)$, то снова в силу (18) и того, что $T_k^{(0)}\subseteq T_k^{(1)}$, мы имеем

$$\left|\left(T_k^{(0)}-\frac{1}{2}B_k+\lambda I\right)f\right|_{(k)}^2=$$
$$=\left(\left(T_k^{(0)}-\frac{1}{2}B_k+\lambda I\right)f, \left(T_k^{(0)}-\frac{1}{2}B_k+\lambda I\right)f\right)_{(k)}=$$
$$=\left|\left(T_k^{(0)}-\frac{1}{2}B_k\right)f\right|_{(k)}^2+\lambda\left\{\left(\left(T_k^{(0)}-\frac{1}{2}B_k\right)f, f\right)_{(k)}+\right.$$
$$\left.+\left(f, \left(T_k^{(0)}-\frac{1}{2}B_k\right)f\right)_{(k)}\right\}+\lambda^2(f, f)_{(k)}\geqslant$$
$$\geqslant\lambda^2|f|_{(k)}^2+\lambda((T_k^{(0)}+(T_k^{(0)})^*-B_k)f, f)_{(k)}=\lambda^2|f|_{(k)}^2.$$

Таким образом,

$$\left|\left(T_k^{(0)}-\frac{1}{2}B_k+\lambda I\right)f\right|_{(k)}\geqslant\lambda|f|_{(k)},\ \lambda>0,\ f\in\hat{C}_\pi^\infty(C_1)=\mathfrak{D}(T_k^{(0)}). \tag{19}$$

Далее, оператор $T_k^{(1)}$ замкнут. Действительно, если $\{f_n\}$ — последовательность элементов из $\mathfrak{D}(T_k^{(1)})$, такая, что $f_n\to f$ и $T_k^{(1)}f_n\to g$ в топологии $\hat{H}_\pi^{(k)}(C_1)$, то по лемме 3.22 и определению 3.15 мы имеем $\tau f=g$, так что в силу соотношения (15) $f\in\mathfrak{D}(T_k^{(1)})$ и $T_k^{(1)}f=g$. Поэтому график $\Gamma(T_k^{(1)})$ оператора $T_k^{(1)}$ является замкнутым подпространством гильбертова пространства $\hat{H}_\pi^{(k)}(C_1)\oplus\hat{H}_\pi^{(k)}(C_1)$. Пусть $T_k\subseteq T_k^{(1)}$ — оператор, график которого является замыканием в $\Gamma(T_k^{(1)})$ графика $\Gamma(T_k^{(0)})$ оператора $T_k^{(0)}$. Тогда, очевидно, T_k замкнут, и так как $T_k\supseteq T_k^{(0)}$, то при $\lambda>\hat{\alpha}$ оператор $T_k+B_k+\lambda I$ имеет плотную область значений и по очевидным «соображениям плотности» из (19) вытекает, что

$$\left|\left(T_k-\frac{1}{2}B_k+\lambda I\right)f\right|_{(k)}\geqslant\lambda|f|_{(k)},\quad f\in\mathfrak{D}(T_k),\quad \lambda>0. \tag{20}$$

Пусть $\lambda > \hat{\alpha}$ и $g \in \hat{H}_\pi^{(k)}(C_1)$. Тогда мы можем найти последовательность $\{f_n\}$ элементов в $\mathfrak{D}(T_k)$, такую, что $(T_k - 2^{-1}B_k + \lambda I) f_n \to g$ при $n \to \infty$. В силу неравенства (20) $\{f_n\}$ является фундаментальной последовательностью и, следовательно, сходится к некоторому пределу $f \in \hat{H}_\pi^{(k)}(C_1)$. Таким образом,

$$\{T_k f_n\} = \{(T_k - 2^{-1}B_k + \lambda I) f_n - (-2^{-1}B_k + \lambda I) f_n\}$$

— сходящаяся последовательность, и так как T_k замкнут, то $(T_k - 2^{-1}B_k + \lambda I) f = g$. Таким образом, оператор $T_k - 2^{-1}B_k + \lambda I$ отображает свою область определения *на* $\hat{H}_\pi^{(k)}(C_1)$. В силу (20) $T_k - 2^{-1}B_k + \lambda I$ является взаимно однозначным оператором и имеет ограниченный обратный. Поэтому если $\lambda > \hat{\alpha}$, то $\lambda \notin \sigma(T + B_k)$; в этом случае из (20) вытекает, что $|R(-\lambda;\ T_k + B_k)| \leqslant \lambda^{-1}$.

Пусть теперь $\beta_k = |B_k|$ и $\lambda > 2\beta_k + \hat{\alpha}$. Из только что доказанного следует, что

$$|B_k R(-\lambda;\ T_k - 2^{-1}B_k)| < 1/2,$$

так что по лемме VII.3.4 оператор $(I - 2^{-1}B_k R(-\lambda;\ T_k - 2^{-1}B_k))^{-1}$ существует, всюду определен и ограничен. Мы имеем

$$(T_k + \lambda I) R(-\lambda;\ T_k - 2^{-1}B_k)\left(I - \frac{1}{2} B_k R(-\lambda;\ T_k - 2^{-1}B_k)\right)^{-1} f =$$
$$= \left(-I + \frac{1}{2} B_k R(-\lambda;\ T_k - 2^{-1}B_k)\right) \times$$
$$\times \left(I - \frac{1}{2} B_k R(-\lambda;\ T_k - 2^{-1}B_k)\right)^{-1} f = -f, \quad f \in \hat{H}_\pi^{(k)}(C_1)$$

и аналогично

$$R(-\lambda;\ T_k - 2^{-1}B_k)\left(I - \frac{1}{2} B_k R(-\lambda;\ T_k - 2^{-1}B_k)\right)^{-1} (T_k + \lambda I) f =$$
$$= -f, \qquad f \in \mathfrak{D}(T_k).$$

Таким образом, оператор $(T_k + \lambda I)^{-1}$ существует, ограничен и всюду определен при $\lambda > 2\beta_k + \alpha$. Так как $T_k \subseteq T_k^{(1)}$ и по доказанному оператор $T_k^{(1)} + \lambda I$ является взаимно однозначным при $\lambda > 2\beta_k + \alpha$, то это означает, что для каждого $g \in \hat{H}_\pi^{(k)}(C_1)$ уравнение $(\tau + \lambda) f = g$ имеет единственное решение $f \in \hat{H}_\pi^{(k)}(C_1)$. Таким образом, утверждение (IX) доказано, а тем самым и теорема 1.

8. Параболические уравнения и полугруппы

В этом небольшом параграфе мы рассмотрим граничную задачу, связанную с параболическим уравнением

$$u_t = -\tau u, \qquad t \geqslant 0,$$

где τ — формальный эллиптический дифференциальный оператор, удовлетворяющий условиям неравенства Гординга (лемма 6.10).

Самые существенные результаты этого параграфа сформулированы в следующей теореме.

1. Теорема. *Пусть τ — эллиптический формальный дифференциальный оператор четного порядка $2p$, определенный в области $I_0 \subset E^n$. Предположим, что*

$$\tau = \sum_{|J| \leqslant 2p} a_J(x)\, \partial^J,$$

$a_J(x)$ веществен, если $|J| = 2p$, и

$$(-1)^p \sum_{|J|=2p} a_J(x)\, \xi^J > 0, \quad x \in I_0, \quad \xi \in E^n, \quad \xi \neq 0.$$

Пусть I — ограниченное открытое множество, замыкание которого содержится в I_0, а T — расширение $T_0(\tau)$, определяемое соотношениями

$$\mathfrak{D}(T) = \mathfrak{D}(T_1(\tau)) \cap H_0^{(p)}(I),$$
$$Tf = T_1(\tau) f, \quad f \in \mathfrak{D}(T).$$

Тогда

(I) — *T порождает сильно непрерывную полугруппу $S(t)$, $t \geqslant 0$, в $L_2(I)$. При $t > 0$, $k \geqslant 0$ и $f \in L_2(I)$, $S(t) f \in \mathfrak{D}(T^k)$ функция $T^k S(t) f$ аналитична по t, а $(S(t) f)(x)$ аналитична по t и бесконечно дифференцируема по x при $t > 0$ и $x \in I$.*

(II) *Пусть $f \in L_2(I)$. Тогда существует одна и только одна функция $u(t, x)$, определенная и непрерывно дифференцируемая по t и x при $t > 0$ и $x \in I$, такая, что*

$$u(t, \cdot) \in L_2(I), \quad t \geqslant 0,$$
$$\lim_{t \to s} |u(t, \cdot) - u(s, \cdot)| = 0, \quad s \geqslant 0,$$
$$u(0, \cdot) = f(\cdot),$$
$$u(t, \cdot) \in \mathfrak{D}(T), \quad t > 0,$$
$$\lim_{t \to s} |Tu(t, \cdot) - Tu(s, \cdot)| = 0, \quad s > 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = -\tau u(t, x), \quad t > 0, \quad x \in I.$$

Эта функция определяется уравнением $u(t, x) = (S(t) f)(x)$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon < 10^{-1}\pi$. Пусть

$$A = \{\lambda \mid |\arg \lambda| > \varepsilon\}$$

— угол в комплексной λ-плоскости. В силу следствия 6.27 существует такая конечная постоянная $K > 0$, что $\lambda \notin \sigma(T)$ и $|R(\lambda; T)| \leqslant K|\lambda|^{-1}$, если $\lambda \in A$ и $|\lambda| > K$. Из теоремы Хилле — Иосиды —

Филлипса (VIII.I.13) вытекает, что оператор $-T$ порождает полугруппу. Мы получим представление этой полугруппы, которое сделает очевидными все остальные части утверждения (I). Положим

(1)
$$S(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_C e^{-tz}R(z;\,T)\,dz,$$

где C — контур, составленный лучом $\{z\,|\,\arg z=2\varepsilon,\ |z|\geqslant 2K\}$, пробегаемым от ∞ до $2Ke^{2i\varepsilon}$, дугой окружности от $2Ke^{+2i\varepsilon}$ до $2Ke^{-2i\varepsilon}$, пробегаемой в положительном направлении, и лучом

$$\{z\,|\,\arg z=-2\varepsilon,\quad |z|\geqslant 2K\},$$

пробегаемым от $2Ke^{-2i\varepsilon}$ к ∞. В силу установленной выше ограниченности $|R(\lambda;\,T)|$ интеграл (1), очевидно, сходится абсолютно и равномерно в любом ограниченном замкнутом подмножестве области $\varrho=\{t\,|\,|\arg t|<\pi/2-2\varepsilon,\ t\neq 0\}$ и является, следовательно, аналитическим в ϱ. Так как

$$TR(z;\,T)=zR(z;\,T)-I,$$

то интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C e^{-tz}TR(z;\,T)\,dz$$

также сходится абсолютно и равномерно и равен

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C ze^{-tz}R(z;\,T)\,dz-\frac{1}{2\pi i}I\int_C e^{-tz}\,dz=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C ze^{-tz}R(z;\,T)\,dz=-\frac{d}{dt}S(t).$$

Тогда по теореме III.6.20 $S(t)f\in\mathfrak{D}(T)$ для любой функции $f\in L_2(I)$, и

(2)
$$\frac{d}{dt}S(t)=-TS(t),\quad t\in\varrho.$$

Пусть $t\in\varrho$ и $f\in L_2(I)$; тогда в силу равенства (2) функция $f_{\Delta t}$, определяемая соотношением $f_{\Delta t}=(\Delta t)^{-1}(S(t-\Delta t)-S(t))f$, принадлежит $\mathfrak{D}(T)$, и $Tf_{\Delta t}=(\Delta t)^{-1}(d/dt)(S(t+\Delta t)f-S(t)f)$. Полагая $\Delta t\to 0$ и используя замкнутость оператора T (в силу следствия 6.11 и леммы XII.1.6), находим, что $S(t)f\in\mathfrak{D}(T^2)$ и

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^2 S(t)=(-T)^2S(t),\quad t\in\varrho.$$

Тогда по индукции мы получаем, что $S(t)f\in\mathfrak{D}(T^k)$ для всех $k\geqslant 1$ и $f\in L_2(I)$ и что

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^k S(t)=(-T)^kS(t),\quad t\in\varrho.$$

Таким образом, функция $T^k S(t) f$ аналитична при $t \in \varrho$ и $f \in L_2(I)$. Из теоремы 6.23 и следствия 6.24 непосредственно вытекает, что $T^k S(t) f(x)$ аналитична по t и бесконечно дифференцируема по x при $t \in \varrho$ и $x \in I$.

Предположим теперь, что $f \in \mathfrak{D}(T)$. Тогда

$$R(z; T) Tf + f = zR(z; T) f,$$

так что

$$S(t) f = \frac{1}{2\pi i} \int_C z^{-1} e^{-zt} R(z; T) Tf \, dz + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f}{z} dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_C z^{-1} e^{-zt} R(z; T) Tf \, dz + f.$$

Так как $|R(z; T)| = O(|z|^{-1})$ при $|z| \to \infty$ и $z \in A$, то из теоремы Лебега (III.6.16) и интегральной теоремы Коши мы получаем

$$\lim_{t \to 0} |S(t) f - f| = 0.$$

Таким образом, если $f \in \mathfrak{D}(T)$, то функция $u(t, x) = (S(t) f)(x)$ удовлетворяет всем предположениям утверждения (II). Мы покажем, что если $S_1(t)$ — полугруппа, порожденная оператором $-T$, то всякая функция $u(t, x)$, удовлетворяющая всем предположениям утверждения (II), может быть представлена в виде $S_1(t) f$. Таким образом, отсюда будет следовать, что $S(t) = S_1(t)$ при $t > 0$, так что оба утверждения (I) и (II) будут доказаны.

Пусть u — такая же функция, как в (II), $f \in L_2(I)$ и $s > 0$. Рассмотрим функцию

$$\varphi(s, t, \cdot) = S_1(s - t) u(\cdot, t).$$

Если $t \to 0$, то $\varphi(s, t, \cdot) \to (S_1(s) f)(\cdot)$ по норме $L_2(I)$ в силу сильной непрерывности S_1 и наших предположений. Аналогично $\varphi(s, t, \cdot) \to$ $\to u(\cdot, s)$ при $t \to s$. Мы докажем, что $(\partial/\partial t) \varphi(s, t, \cdot) = 0$, откуда будет вытекать утверждение (II).

Очевидно, что

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_I u(t, x) f(x) \, dx = \int_I \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) f(x) \, dx =$$

$$= -\int_I (Tu)(t, x) f(x) \, dx, \quad t > 0,$$

для всех функций $f \in L_2(I)$, непрерывных и обращающихся в нуль вне компактного подмножества в I. Таким образом,

$$\int_I u(t, x) f(x) \, dx - \int_I u(s, x) f(x) \, dx = -\int_s^t \int_I (Tu)(t, x) f(x) \, dx \, dt$$

для $0 < s < t < \infty$ и любой функции f из $L_2(I)$, равной нулю вне компактного подмножества в I. В силу теоремы Фубини (III.11.9), теоремы III.11.17 и теоремы III.2.20 из плотности подпространства $C_0^\infty(I)$ в $L_2(I)$ вытекает, что

$$u(t, \cdot) - u(s, \cdot) = -\int_s^t (Tu)(t, \cdot)\, dt, \quad 0 < s < t < \infty.$$

Так как функция $(Tu)(t, \cdot)$ непрерывна по t, то

$$\frac{d}{dt} u(t, \cdot) = -(Tu)(t, \cdot), \quad t > 0.$$

Таким образом, в силу леммы VIII.1.7(b)

$$\frac{\partial}{\partial t} S_1(s-t)\, u(t, \cdot) = S_1(s-t)\, Tu(t, \cdot) - S_1(s-t)\, Tu(t, \cdot) = 0,$$

и наше доказательство закончено.

Следствие. *Предположим, что выполнены предположения теоремы* 1, *а область I ограничена гладкой поверхностью Σ, не содержащей внутренних точек ее замыкания $\bar{I}$.*

(I) *Тогда функция $(S(t)f)(x)$ аналитична по t, бесконечно дифференцируема по x при $t > 0$ и $x \in I$ и удовлетворяет уравнению*

$$S(t) f(x) = (\partial_\nu(\Sigma)\, S(t) f)(x) = \ldots = (\partial_\nu^{p-1}(\Sigma)\, S(t) f)(x) = 0,$$
$$t > 0 \quad x \in \Sigma.$$

(II) *Для $f \in L_2(I)$ существует одна и только одна функция $u(t, x)$, определенная при $t > 0$ и $x \in \bar{I}$, непрерывно дифференцируемая по t и $2p$ раз непрерывно дифференцируемая по x при $t > 0$ и $x \in \bar{I}$, такая, что*

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = -\tau u(t, x), \quad t > 0, \quad x \in I,$$

и

$$u(t, x) = \partial_\nu(\Sigma)\, u(t, x) = \ldots = \partial_\nu^{p-1}(\Sigma)\, u(t, x) = 0, \ t > 0, \ x \in \Sigma,$$

и такая, что

$$\lim_{t \to 0} |u(t, \cdot) - f(\cdot)| = 0.$$

Доказательство. Утверждение (I) вытекает из предыдущей теоремы и теоремы 6.23, а (II) — из утверждения (II) предыдущей теоремы, так как функция, удовлетворяющая предположениям утверждения (II) этого следствия, очевидно (см. теорему 6.23), удовлетворяет предположениям утверждения (II) предыдущей теоремы, ч. т. д.

Приложение

Гильбертово пространство есть линейное векторное пространство $\mathfrak{H}$ над полем Φ комплексных чисел вместе с комплексной функцией $(\cdot, \cdot)$, определенной на $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ и обладающей следующими свойствами:

(I) $(x, x) = 0$ в том и только в том случае, если $x = 0$;

(II) $(x, x) \geqslant 0$, $x \in \mathfrak{H}$;

(III) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$, $x, y, z \in \mathfrak{H}$;

(IV) $(\alpha x, y) = \alpha (x, y)$, $\alpha \in \Phi$, $x, y \in \mathfrak{H}$;

(V) $(x, y) = \overline{(y, x)}$;

(VI) если $x_n \in \mathfrak{H}$, $n = 1, 2, \ldots$, и если $\lim\limits_{n, m \to \infty} (x_n - x_m, x_n - x_m) = 0$, то существует такое $x \in \mathfrak{H}$, что $\lim\limits_{n} (x_n - x, x_n - x) = 0$.

Функция $(\cdot, \cdot)$ называется *скалярным* или *внутренним произведением* в $\mathfrak{H}$, причем (x, y) называется *скалярным* или *внутренним произведением элементов x и y*. *Норма* в пространстве $\mathfrak{H}$ определяется равенством $|x| = (x, x)^{1/2}$.

Замечание. Гильбертово пространство было определено некоторой системой абстрактных аксиом. Интересно отметить, что некоторые из определенных выше конкретных пространств удовлетворяют этим аксиомам и являются, следовательно, частными случаями абстрактного гильбертова пространства. Так, например, n-мерное унитарное пространство E^n будет гильбертовым пространством, если скалярное произведение двух элементов $x = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ и $y = [\beta_1, \ldots, \beta_n]$ из E^n определить формулой

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta}_i.$$

Точно так же комплексное l_2 становится гильбертовым пространством, если скалярное произведение (x, y) векторов $x=\{\alpha_n\}$, $y=\{\beta_n\}$ определить формулой

$$(x, y)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\overline{\beta}_n.$$

Аналогично комплексное пространство $L_2(S, \Sigma, \mu)$ со скалярным произведением

$$(f, g)=\int_S f(s)\overline{g(s)}\,\mu(ds), \quad f, g\in L_2(S, \Sigma, \mu)$$

является гильбертовым пространством.

Среди бесконечномерных B-пространств гильбертово пространство ближе всех стоит, особенно по своим элементарно геометрическим свойствам, к евклидовым и конечномерным унитарным пространствам. Из определения 2.26 непосредственно не видно, что гильбертово пространство является B-пространством, но это устанавливается нижеследующей теоремой. При исследовании гильбертова пространства условия (I)—(VI) определения 2.26 будут использоваться без ссылок на них и через $\mathfrak{H}$ всегда будет обозначаться гильбертово пространство.

1. Теорема. *Гильбертово пространство $\mathfrak{H}$ есть комплексное B-пространство, в котором*

$$|(x, y)|\leqslant|x|\,|y|, \quad x, y\in\mathfrak{H}.$$

Доказательство. Прежде всего будет доказано это последнее неравенство, известное под названием *неравенства Шварца*. Из постулатов для $\mathfrak{H}$ вытекает, что если либо x, либо y равны нулю, то неравенство Шварца справедливо. Предположим поэтому, что $x\neq 0\neq y$. Для произвольного комплексного числа α

$$0\leqslant(x+\alpha y, x+\alpha y)=|x|^2+|\alpha|^2|y|^2+\alpha(y, x)+\overline{\alpha}(x, y)=$$
$$=|x|^2+|\alpha|^2|y|^2+2\mathrm{Re}(\alpha(y, x)),$$

где $\mathrm{Re}(\lambda)$ есть вещественная часть λ. Если $\alpha=re^{i\theta}$ и θ выбрано соответствующим образом, то из последнего неравенства вытекает, что

$$|x|^2+r^2|y|^2\geqslant 2r|(x, y)|$$

для каждого положительного r. Отсюда, полагая $r=|x|/|y|$, мы получим неравенство Шварца.

Чтобы завершить доказательство теоремы, достаточно показать, что $|x+y|\leqslant|x|+|y|$. Заметим прежде всего, что

$$(x, y)+(y, x)=2\mathrm{Re}(x, y)\leqslant 2|x|\,|y|$$

и, следовательно,

$$|x+y|^2=|x|^2+|y|^2+(x, y)+(y, x)\leqslant$$
$$\leqslant|x|^2+|y|^2+2|x||y|=(|x|+|y|)^2, \text{ ч. т. д.}$$

Замечание. Необходимо отметить, что в этом доказательстве неравенства Шварца и неравенства треугольника $|x+y|\leqslant|x|+|y|$ не предполагается, что $\mathfrak{H}$ полно или что $(x, x)=0$ только при $x=0$.

2. Лемма. *Пусть x — некоторый элемент из $\mathfrak{H}$, а K — такое подмножество $\mathfrak{H}$, что $\frac{1}{2}(K+K)\subseteq K$. Предположим, что $\{k_i\}$ — такая последовательность из K, для которой*

$$\lim_i |x-k_i|=\inf_{k\in K}|x-k|.$$

Тогда последовательность $\{k_i\}$ сходится.

Доказательство. Тождество

$$|x+y|^2+|x-y|^2=2|x|^2+2|y|^2, \quad x, y\in\mathfrak{H},$$

называемое *тождеством параллелограмма*, непосредственно вытекает из аксиом. Если $\delta=\inf_{k\in K}|x-k|$, то из этого тождества следует, что

$$|k_i-k_j|^2=2|x-k_i|^2+2|x-k_j|^2-4\left|x-\frac{k_i+k_j}{2}\right|^2\leqslant$$
$$\leqslant 2|x-k_i|^2+2|x-k_j|^2-4\delta\to 0, \text{ ч. т. д.}$$

3. Определение. Два вектора x, y из $\mathfrak{H}$ называются *ортогональными*, если $(x, y)=0$. Два многообразия $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ из $\mathfrak{H}$ называются *ортогональными*, если $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})=0$. Запись $x\perp y$ означает, что векторы x и y взаимно ортогональны, а запись $\mathfrak{M}\perp\mathfrak{N}$, — что ортогональны многообразия $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$. *Ортогональным дополнением* множества $A\subseteq\mathfrak{H}$ называется множество $\{x\,|\,(x, A)=0\}$. Оно иногда обозначается через $\mathfrak{H}\ominus A$ или, если $\mathfrak{H}$ подразумевается, через $A^\perp$.

$\to$ 4. Лемма. *Ортогональное дополнение $\mathfrak{N}$ замкнутого линейного многообразия $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{H}$ есть замкнутое линейное многообразие, дополнительное к $\mathfrak{M}$ в том смысле, что $\mathfrak{H}=\mathfrak{M}\oplus\mathfrak{N}$.*

Доказательство. Из линейности и непрерывности скалярного произведения (теорема 1) вытекает, что ортогональное дополнение произвольного множества $\mathfrak{M}$ есть замкнутое линейное многообразие. Если $\mathfrak{M}$ — замкнутое линейное многообразие и x — произвольная точка из $\mathfrak{H}$, то по лемме 2, существует такое $m\in\mathfrak{M}$, что $|x-m|=\delta=\inf\limits_{m_1\in\mathfrak{M}}|x-m_1|$. Теперь мы покажем, что элемент $n=x-m$ принадлежит $\mathfrak{N}$. Для произвольного комплексного числа α и произвольного $m_1\in\mathfrak{M}$ вектор $m+\alpha m_1\in\mathfrak{M}$ и, следовательно, $|x-(m+\alpha m_1)|\geqslant\delta$. Таким образом,

$$0\leqslant|x-(m+\alpha m_1)|^2-|n|^2=|n-\alpha m_1|^2-|n|^2=$$
$$=-\alpha(m_1,\ n)-\bar{\alpha}(n,\ m_1)+|\alpha|^2\,|m_1|^2.$$

Положим $\alpha=\lambda(n,\ m_1)$, где λ — произвольное вещественное число. Тогда

$$0\leqslant-2\lambda|(n,\ m_1)|^2+\lambda^2|(n,\ m_1)|^2\,|m_1|^2,$$

что возможно лишь при $(n,\ m_1)=0$. Таким образом, $n\in\mathfrak{N}$. Чтобы завершить доказательство, заметим, что если $x\in\mathfrak{M}\cap\mathfrak{N}$, то $|x|^2=(x,\ x)=0$. Следовательно, $\mathfrak{M}\cap\mathfrak{N}=0$ и $\mathfrak{H}=\mathfrak{M}\oplus\mathfrak{N}$, ч. т. д.

$\longrightarrow$ 5. Теорема. *Для каждого y^* из $\mathfrak{H}^*$ существует и притом только один такой $y\in\mathfrak{H}$, что*

$$y^*x=(x,\ y),\quad x\in\mathfrak{H}.$$

Отображение σ: $y^*\longrightarrow y$ является взаимно однозначным изометрическим отображением $\mathfrak{H}^*$ на все $\mathfrak{H}$, при этом $\sigma(y^*+z^*)=\sigma(y^*)+\sigma(z^*)$, $\sigma(\alpha y^*)=\bar{\alpha}\sigma(y^*)$.

Доказательство. Если $y^*=0$, положим $y=0$. Если $y^*\neq0$, то множество $\mathfrak{M}=\{x\,|\,y^*x=0\}$ является в $\mathfrak{H}$ собственным замкнутым линейным многообразием, и его ортогональное дополнение $\mathfrak{N}$ содержит, по лемме 4, некоторый вектор $y_1\neq0$. Пусть $y=\alpha y_1$, где $\bar{\alpha}=\frac{y^*(y_1)}{|y_1|^2}$. Для произвольного вектора x из $\mathfrak{H}$ вектор $x-\frac{y^*x}{(y^*y_1)}y_1$ принадлежит $\mathfrak{M}$, так что $(x,\ y)=\frac{y^*x\,(y_1,\ y)}{y^*y_1}=y^*x$, т. е. мы доказали существование вектора y. Для того чтобы убедиться в единственности такого y, предположим, что y' — такой элемент из $\mathfrak{H}$, что $y^*x=(x,\ y')$ для всех $x\in\mathfrak{H}$. Тогда $(x,\ y-y')=0$ для каждого $x\in\mathfrak{H}$ и, в частности, $(y-y',\ y-y')=0$, откуда $y=y'$. Таким образом, отображение σ вполне определено. Так как $|(x,\ y)|\leqslant|x|\,|y|$, то $|y^*|\leqslant|\sigma(y^*)|$, а так как $(y,\ y)=|y|^2$, то $|y^*|\geqslant|\sigma(y^*)|$. Следовательно, σ является изометрией. Остальные доказываемые свойства σ непосредственно вытекают из постулированных нами свойств скалярного произведения, ч. т. д.

6. Следствие. *Пространство $\mathfrak{H}^*$ также является гильбертовым пространством, и пространство $\mathfrak{H}$ рефлексивно.*

Доказательство. Если скалярное произведение в $\mathfrak{H}^*$ определить равенством

$$(x^*,\ y^*)_1=(\sigma(y^*),\ \sigma(x^*)),$$

то ясно, что $\mathfrak{H}^*$ будет гильбертовым пространством. Согласно теореме, если $y^{**} \in \mathfrak{H}^{**}$, то в $\mathfrak{H}^*$ найдется такой элемент y^*, что

$$y^{**}x^* = (x^*, y^*)_1 = (\sigma(y^*), \sigma(x^*)) = x^*y, \qquad x^* \in \mathfrak{H}^*,$$

где $y = \sigma(y^*)$, ч. т. д.

7. Следствие. *Гильбертово пространство слабо полно; для того чтобы подмножество его было слабо секвенциально компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограниченным.*

Доказательство. Это утверждение непосредственно вытекает из следствия 6, II.3.28 и II.3.29, ч. т. д.

8. Определение. Множество $A \subseteq \mathfrak{H}$ называется *ортонормированным*, если норма каждого вектора из A равна единице и если каждые два несовпадающих вектора из A взаимно ортогональны. Ортонормированное множество называется *полным*, если не существует ненулевого вектора, ортогонального ко всем векторам этого множества, т. е. множество A полно, если $\{0\} = \mathfrak{H} \ominus A$. Напомним, что *проектором* (проекционным оператором, оператором проектирования) называется линейный оператор E, для которого $E^2 = E$. Проектор E в пространстве $\mathfrak{H}$ называется *ортогональным*, если многообразия $E\mathfrak{H}$ и $(I - E)\mathfrak{H}$ взаимно ортогональны.

Как было показано в лемме 4,

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{M} \oplus (\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M}),$$

где $\mathfrak{M}$ — произвольное замкнутое линейное многообразие в $\mathfrak{H}$. Пусть $x = y + z$, где $y \in \mathfrak{M}$ и $z \in \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M}$; рассмотрим преобразование E пространства $\mathfrak{H}$, при котором $Ex = y$. Ясно, что оператор E является проектором, так что $E^2 = E$, и притом ортогональным. Заметим, что ортогональный проектор E однозначно определяется условием $E\mathfrak{H} = \mathfrak{M}$. В самом деле, если D тоже является ортогональным проектором, для которого $D\mathfrak{H} = \mathfrak{M}$, то $ED = D$, а так как $(I - D)\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M}$, то $E(I - D) = 0$. Таким образом,

$$D = ED + E(I - D) = E.$$

Этот однозначно определенный ортогональный проектор E, для которого $E\mathfrak{H} = \mathfrak{M}$, называется оператором *ортогонального проектирования на* $\mathfrak{M}$, или иногда просто *проектированием на* $\mathfrak{M}$.

9. Лемма. *Если $\{y_i\}$ — ортонормированная последовательность, а $\{\alpha_i\}$ — последовательность скаляров, то ряд $\Sigma\alpha_i y_i$ сходится в том и только в том случае, если $\Sigma|\alpha_i|^2 < \infty$; при этом*

$$|\Sigma\alpha_i y_i| = (\Sigma|\alpha_i|^2)^{1/2}.$$

В случае сходимости этого ряда его сумма не зависит от порядка его членов.

Доказательство. Если $m > n$, то

$$\Big|\sum_{i=n}^{m} \alpha_i y_i\Big|^2 = \Big(\sum_{i=n}^{m} \alpha_i y_i,\ \sum_{j=n}^{m} \alpha_j y_j\Big) = \sum_{i=n}^{m}\sum_{j=n}^{m} \alpha_i \bar{\alpha}_j (y_i, y_j) = \sum_{i=n}^{m} |\alpha_i|^2,$$

и, значит, если один ряд сходится, то сходится и другой. Если в последних равенствах, положив $n=1$, устремить m к бесконечности, то мы получим второе утверждение леммы. Наконец, пусть $z = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{i_n} y_{i_n}$ — ряд, полученный из $x = \sum \alpha_i y_i$ некоторой перестановкой его членов. Тогда

$$|x-z|^2 = (x, x) - (x, z) - (z, x) + (z, z),$$

и непосредственный подсчет, аналогичный проделанному выше, показывает, что каждое из этих скалярных произведений равно $\sum |\alpha_i|^2$. Таким образом $z = x$, ч. т. д.

$\to$ 10. Теорема. *Пусть A — ортонормированное множество в $\mathfrak{H}$, а x — произвольный вектор из $\mathfrak{H}$. Тогда $(x, y) = 0$ для всех, за исключением, быть может, счетного множества y из A. Ряд*

$$Ex = \sum_{y \in A} (x, y)\, y, \quad x \in \mathfrak{H},$$

сходится, и его сумма не зависит от порядка, в котором расположены его ненулевые члены. Оператор E является оператором ортогонального проектирования на замкнутое линейное многообразие, порождаемое множеством A.

Доказательство. Пусть $y_1, \ldots, y_n$ — несовпадающие элементы из A и $y = \sum_{i=1}^{n} (x, y_i)\, y_i$, так что (по лемме 9) $|y|^2 = \sum_{i=1}^{n} |(x, y_i)|^2$ и

$$0 \leqslant |x-y|^2 = |x|^2 - (x, y) - (y, x) + |y|^2,$$

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \overline{(x, y_i)}\,(x, y_i) = |y|^2,$$

$$(y, x) = \sum_{i=1}^{n} (x, y_i)\,\overline{(x, y_i)} = |y|^2.$$

Таким образом, $|y|^2 \leqslant |x|^2$, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} |(x, y_i)|^2 \leqslant |x|^2.$$

Отсюда вытекает, что лишь для конечного числа векторов $y_1, \ldots$ $\ldots, y_n \in A$, $|(x, y_j)|$ может превышать наперед заданное положительное число и, следовательно, самое большее счетное множество скалярных произведений (x, y), где $y \in A$, отлично от нуля. Так как

$$\sum_{y \in A} |(x, y)|^2 \leqslant |x|^2,$$

то в силу предшествующей леммы ряд, определяющий Ex, сходится, причем его сумма не зависит от порядка его членов.

Теперь ясно, что E есть линейный оператор, причем $Ex = x$, если $x \in A$. Поэтому $Ex = x$, если x принадлежит замкнутому линейному многообразию $\mathfrak{A}_1$, натянутому на A. Кроме того, $Ex = 0$, если x ортогонален к A. Следовательно, E есть оператор ортогонального проектирования на $\mathfrak{A}_1$, ч. т. д.

11. Определение. Множество A называется *ортонормированным базисом* линейного многообразия $\mathfrak{N}$ из $\mathfrak{H}$, если A есть содержащееся в $\mathfrak{N}$ ортонормированное множество и если

$$x = \sum_{y \in A} (x, y)\, y, \quad x \in \mathfrak{N}.$$

12. Теорема. *Каждое замкнутое линейное многообразие в $\mathfrak{H}$ имеет ортонормированный базис.*

Доказательство. Если ортонормированные множества, принадлежащие замкнутому линейному многообразию $\mathfrak{M}$, упорядочить по включению, то, как видно из леммы Цорна (I.2.7), существует максимальное ортонормированное множество A, определяющее замкнутое линейное многообразие $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{M}$. Ввиду максимальности A $\mathfrak{M} \ominus \mathfrak{A}_1 = 0$. Но, по лемме 4, $\mathfrak{M} = \mathfrak{A}_1 \oplus (\mathfrak{M} \ominus \mathfrak{A}_1)$ и, следовательно, $\mathfrak{M} = \mathfrak{A}_1$. Наше утверждение вытекает теперь из теоремы 10, ч. т. д.

13. Теорема. *Для ортонормированного множества $A \subset \mathfrak{H}$ следующие утверждения эквивалентны:*

(I) *множество A полно;*

(II) *множество A служит ортонормированным базисом для $\mathfrak{H}$;*

(III) $|x|^2 = \sum_{y \in A} |(x, y)|^2, \ x \in \mathfrak{H}$.

Доказательство. Эквивалентность условий (I) и (II), очевидно, следует из теоремы 10. То, что из каждого из них вытекает условие (III), следует из теоремы 10 и леммы 9. Предположим теперь, что выполнено условие (III), и пусть x — произвольный вектор из $\mathfrak{H}$. По лемме 4, $x = u + v$, где $u \in \overline{\mathrm{sp}}(A)$ и $v \in \mathfrak{H} \ominus \overline{\mathrm{sp}}(A)$. Таким образом, $|x|^2 = |u|^2 + |v|^2$. Но, по теореме 10 и лемме 9, $|u|^2 = \sum_{y \in A} |(u, y)|^2$. Следовательно, $|x|^2 = |u|^2$ и $v = 0$. Это означает, что $\overline{\mathrm{sp}}(A) = \mathfrak{H}$, откуда и вытекает условие (I), ч. т. д.

Следующий результат дает нам возможность ввести понятие *размерности* гильбертова пространства.

14. Теорема. *Все ортонормированные базисы данного гильбертова пространства $\mathfrak{H}$ имеют одну и ту же мощность.*

Доказательство. Если $\mathfrak{H}$ конечномерно, этот результат хорошо известен из алгебры. Предположим, что $\mathfrak{H}$ бесконечномерно, и пусть $\{u_\alpha\}$ и $\{v_\beta\}$ — два ортонормальных базиса для $\mathfrak{H}$. Мы будем говорить, что векторы u_α и $u_{\alpha'}$ базиса $\{u_\alpha\}$ эквивалентны, если существует конечная цепочка векторов

[*] $$u_\alpha,\ v_{\beta_1},\ u_{\alpha_1},\ \ldots,\ u_{\alpha_k},\ v_{\beta_{k+1}},\ u_{\alpha'},$$

в которой скалярное произведение любых двух соседних векторов отлично от нуля и члены которой берутся попеременно то из $\{u_\alpha\}$, то из $\{v_\beta\}$. Эквивалентность двух векторов v_β и $v_{\beta'}$ из $\{v_\beta\}$ определяется аналогично. Из теоремы 10 непосредственно вытекает, что каждый класс эквивалентных между собой векторов будет либо конечным, либо счетным. Класс U эквивалентных между собой векторов u_α назовем соответствующим классу V эквивалентных между собой векторов v_β, если существует пара векторов, один из U, другой из V, с ненулевым скалярным произведением. Предположим, что U и V — соответствующие классы эквивалентных между собой векторов и что $u_\alpha \in U$. Рассмотрим произвольный элемент v_β из базиса $\{v_\beta\}$, такой, для которого $(u_\alpha, v_\beta) \neq 0$. Покажем, что $v_\beta \in V$. Так как U и V — соответствующие классы, то существуют такие элементы $u_{\alpha'} \in U$ и $v_{\beta'} \in V$, для которых $(u_{\alpha'}, v_{\beta'}) \neq 0$. Но так как $u_{\alpha'} \in U$, то существует такая конечная цепочка вида [*], в которой скалярное произведение соседних векторов отлично от нуля. Таким образом, из строения цепочки $v_\beta, u_\alpha, \ldots, u_{\alpha'}, v_{\beta'}$ видно, что v_β эквивалентно $v_{\beta'}$ и что, следовательно, $v_\beta \in V$. Так как $\{v_\beta\}$ есть базис, то вектор u_α имеет разложение вида $u_\alpha = \sum\limits_\beta (u_\alpha, v_\beta) v_\beta$, так что u_α принадлежит замкнутому линейному многообразию, порожденному такими векторами v_β, для которых $(u_\alpha, v_\beta) \neq 0$. Но так как такие векторы v_β принадлежат V, то $u_\alpha \in \overline{\text{sp}}\,[V]$ и, следовательно, $\overline{\text{sp}}\,[U] \subseteq \overline{\text{sp}}\,[V]$. Аналогично $\overline{\text{sp}}\,[V] \subseteq \overline{\text{sp}}\,[U]$. Отсюда ясно, что соответствующие классы эквивалентных между собой векторов U и V порождают одно и то же замкнутое линейное многообразие $\mathfrak{M}$. Таким образом, если один из классов U или V конечен, то $\mathfrak{M}$ конечномерно и, значит, другой класс тоже конечен и состоит из такого же числа элементов. Если U и V бесконечны, то оба они счетны. Таким образом, $\{u_\alpha\}$ и $\{v_\beta\}$ распадаются на суммы попарно непересекающихся соответствующих пар U, V классов эквивалентности, причем каждое U имеет точно такую же мощность, что и соответствующее ему V. Поэтому $\{u_\alpha\}$ и $\{v_\beta\}$ имеют одну и ту же мощность, ч. т. д.

15. Определение. Мощность произвольного ортонормального базиса гильбертова пространства $\mathfrak{H}$ называется его *размерностью*.

16. Теорема. *Два гильбертовых пространства изометрически изоморфны в том и только в том случае, если они имеют одну и ту же размерность.*

Доказательство. Пусть U — изометрический изоморфизм между $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$. Тогда если x и y — взаимно ортогональные элементы из $\mathfrak{H}_1$, то

$$|U(x+\lambda y)|^2=|x+\lambda y|^2=|x|^2+\lambda^2|y|^2=|Ux+\lambda Uy|^2=$$
$$=|Ux|^2+|\lambda|^2|Uy|^2+(Ux,\lambda Uy)+\overline{(Ux,\lambda Uy)}=$$
$$=|x^2|+|\lambda|^2|y|^2+(Ux,\lambda Uy)+\overline{(Ux,\lambda Uy)}.$$

Отсюда видно, что для произвольного λ

$$0=(Ux,\lambda Uy)+\overline{(Ux,\lambda Uy)};$$

подставляя в это равенство $\lambda=(Ux, Uy)$, мы получаем, что $(Ux, Uy)=0$. Таким образом, U отображает ортонормированный базис пространства $\mathfrak{H}_1$ на ортонормированный базис пространства $\mathfrak{H}_2$, и, значит, $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ имеют одну и ту же размерность.

Обратно, предположим, что пространства $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ имеют одну и ту же размерность, и пусть $\{u_\alpha, \alpha\in A\}$ и $\{v_\alpha, \alpha\in A\}$ — ортонормированные базисы соответственно для $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$. Для каждой определенной на A скалярной функции C, такой, что $C(\alpha)=0$ для всех, за исключением счетного множества индексов α, и что $\sum|C(\alpha)|^2<\infty$, положим

$$U\left(\sum C(\alpha)u_\alpha\right)=\sum C(\alpha)v_\alpha.$$

По теореме 13, U является изометрическим изоморфизмом между $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$, ч. т. д.

Прямые суммы гильбертовых пространств

Напомним (см. I.11), что прямая сумма

$$\mathfrak{X}=\mathfrak{X}_1\oplus\ldots\oplus\mathfrak{X}_n$$

векторных пространств $\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_n$ есть множество $\mathfrak{X}_1\times\mathfrak{X}_2\times\ldots\times\mathfrak{X}_n$, для элементов которого сложение и умножение на скаляр определяются по формулам

$$[x_1, \ldots, x_n]+[y_1, \ldots, y_n]=[x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n],$$
$$\alpha[x_1, \ldots, x_n]=[\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n].$$

Пространство $\mathfrak{X}_i$ алгебраически эквивалентно подпространству $\mathfrak{M}_i$ пространства $\mathfrak{X}$, состоящему из всех таких векторов $[x_1, \ldots, x_n]\in\mathfrak{X}$, у которых $x_j=0$ при $j\neq i$. Иногда бывает удобно само пространство $\mathfrak{X}_i$ рассматривать как подпространство $\mathfrak{X}$, при этом имеется в виду, что оно эквивалентно пространству $\mathfrak{M}_i$. Отображение

$$[x_1, \ldots, x_n]\to[0, \ldots, x_i, \ldots, 0]$$

пространства $\mathfrak{X}$ на $\mathfrak{M}_i$ является проектированием и иногда называется *проектированием* $\mathfrak{X}$ *на* $\mathfrak{M}_i$, Равносильно этому, отображение $[x_1, \ldots, x_n]\to x_i$ называется *проектированием* $\mathfrak{X}$ *на* $\mathfrak{X}_i$. Если каждое из пространств $\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_n$ является линейным топологическим пространством, то их прямая сумма $\mathfrak{X}$, соответствующим образом топологизированная (см. I.8), также будет линейным топологическим пространством, в котором подпространство $\mathfrak{M}_i$ не только алгебраически, но и топологически эквивалентно $\mathfrak{X}_i$. Если топология в каждом из слагаемых $\mathfrak{X}_i, i=1, \ldots, n$, определяется нормой $|\cdot|_i$, т. е. если каждое из пространств $\mathfrak{X}_i$ является линейным нормированным пространством, то и пространство $\mathfrak{X}$ будет линейным нормированным пространством. Норму в пространстве $\mathfrak{X}$ можно ввести различными способами; в частности, каждая из нижеследующих норм будет определять в $\mathfrak{X}$ произведение топологий:

$$\text{(I)}\ |[x_1, \ldots, x_n]|=|x_1|_1+|x_2|_2+\ldots+|x_n|_n;$$
$$\text{(II)}\ |[x_1, \ldots, x_n]|=\sup_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|_i;$$
$$\text{(III)}\ |[x_1, \ldots, x_n]|=(|x_1|_1^2+\ldots+|x_n|_n^2)^{\frac{1}{2}}.$$

В дальнейшем, если прямая сумма линейных нормированных пространств будет выступать в качестве нормированного пространства, всегда будет указываться, какая именно норма имеется в виду. В том случае, однако, если каждое из пространств $\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_n$ является гильбертовым пространством, всегда будет предполагаться, хотя иногда и без напоминания об этом, что $\mathfrak{X}$ есть однозначно определенное гильбертово пространство со скалярным произведением

$$\text{(IV)}\quad ([x_1, \ldots, x_n], [y_1, \ldots, y_n])=\sum_{i=1}^{n}(x_i, y_i)_i,$$

где $(\cdot, \cdot)_i$ есть скалярное произведение в $\mathfrak{X}_i$. Таким образом, норма в прямой сумме гильбертовых пространств всегда будет определяться равенством (III). Окончательно все это можно сформулировать в виде следующего определения.

17. Определение. Пусть для каждого $i=1, \ldots, n$ $\mathfrak{H}_i$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_i$. *Прямой суммой гильбертовых пространств* $\mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_n$ называется линейное пространство $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{H}_n$, в котором скалярное произведение определяется равенством (IV).

Рассмотрим прямую сумму $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{H}_n$ гильбертовых пространств $\mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_n$. Тогда при $i \neq j$ многообразия $\mathfrak{H}_i$ и $\mathfrak{H}_j$ взаимно ортогональны в $\mathfrak{H}$ и проектирование $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{H}_i$ совпадает с ортогональным проектированием $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{H}_i$. Таким образом, подпространство $\mathfrak{H}_2 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{H}_n$, например, служит в $\mathfrak{H}$ ортогональным дополнением к $\mathfrak{H}_1$.

Следующее определение обобщает определение 17, включая случай и бесконечного множества прямых слагаемых.

18. Определение. Пусть для каждого ν из некоторого множества индексов A $\mathfrak{H}_\nu$ является некоторым гильбертовым пространством. *Прямой суммой* $\Sigma \mathfrak{H}_\nu$ гильбертовых пространств $\mathfrak{H}_\nu$ называется, по определению, совокупность всех определенных на A функций $\{x_\nu\}$, таких, что $x_\nu \in \mathfrak{H}_\nu$ для каждого ν и что $\sum\limits_{\nu \in A} |x_\nu|^2 < \infty$.

Ясно, что $\Sigma \mathfrak{H}_\nu$ становится векторным пространством, если сложение и умножение на число определить формулами

$$a\{x_\nu\}=\{ax_\nu\}, \quad \{x_\nu\}+\{y_\nu\}=\{x_\nu+y_\nu\}.$$

Кроме того, можно определить в $\Sigma \mathfrak{H}_\nu$ и скалярное произведение, полагая

$$(\{x_\nu\}, \{y_\nu\})=\sum_\nu (x_\nu, y_\nu);$$

этот ряд абсолютно сходится, так как

$$\sum_\nu |(x_\nu, y_\nu)| \leqslant \sum_\nu |x_\nu|\,|y_\nu| \leqslant \Big(\sum_\nu |x_\nu|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_\nu |y_\nu|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Можно легко проверить, что свойства (I)—(V) определения 2.26 при этом выполнены.

19. Лемма. *Если* $\{\mathfrak{H}_\nu\}$, $\nu \in A$, *— семейство гильбертовых пространств, то и их прямая сумма* $\Sigma \mathfrak{H}_\nu$ *тоже является гильбертовым пространством.*

Доказательство. Как отмечено выше, нам осталось доказать лишь полноту $\Sigma \mathfrak{H}_\nu$. Если $\{x_\nu^n\}$, $n=1, 2, \ldots,$ — фундаментальная последовательность в $\Sigma \mathfrak{H}_\nu$, то ясно, что для каждого фиксированного ν, $\{x_\nu^n\}$ будет фундаментальной последовательностью в $\mathfrak{H}_\nu$, сходящейся к некоторому элементу x_ν^0. Для произвольного конечного подмножества $\pi \subset A$ и произвольного натурального n

$$\sum_{\nu\in\pi} |x_\nu^n - x_\nu^0|^2 = \lim_{m\to\infty} \sum_{\nu\in\pi} |x_\nu^n - x_\nu^m|^2 \leqslant \overline{\lim_{m\to\infty}} |\{x_\nu^n\} - \{x_\nu^m\}|^2.$$

Отсюда вытекает, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{\nu} |x_\nu^n - x_\nu^0|^2 \leqslant \overline{\lim_{m,\, n\to\infty}} |\{x_\nu^n\} - \{x_\nu^m\}| = 0,$$

т. е. что $\{x_\nu^0\}$ принадлежит $\Sigma \mathfrak{H}_\nu$ и что последовательность $\{x_\nu^n\}$ сходится к $\{x_\nu^0\}$, ч. т. д.

В заключение этого параграфа мы перечислим в нижеследующей лемме несколько полезных свойств ортогонального дополнения.

$\longrightarrow$20. Лемма. *Пусть B — некоторое подмножество $\mathfrak{H}$, а $\mathfrak{M}$ — замкнутое линейное многообразие в $\mathfrak{H}$. Тогда*

$$\text{(I)} \qquad \mathfrak{H} = \mathfrak{M} \oplus (\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M});$$

$$\text{(II)} \qquad \mathfrak{M} = \mathfrak{H} \ominus (\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M});$$

$$\text{(III)} \quad \overline{\mathrm{sp}}\,(B) = \mathfrak{H} \ominus (\mathfrak{H} \ominus B).$$

Доказательство. Равенство (I) — это просто лемма 4. Равенство (II) можно доказать, заменяя $\mathfrak{M}$ в равенстве (I) на $\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M}$. При этом мы получим, что $\mathfrak{H} \ominus (\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M})$ является не только замкнутым подпространством $\mathfrak{M}$, но и дополнительным многообразием для $\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M}$. Таким образом, $\mathfrak{M} = \mathfrak{H} \ominus (\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M})$. Для того чтобы доказать равенство (III), заметим, что для произвольного множества $B \subseteq \mathfrak{H}$ условие, что $(B, x) = 0$ для некоторого элемента x из $\mathfrak{H}$, эквивалентно условию, что $(\overline{\mathrm{sp}}\,(B), x) = 0$. Таким образом, $\mathfrak{H} \ominus B = \mathfrak{H} \ominus \overline{\mathrm{sp}}\,(B)$, и равенство (III) получается из (II) заменой $\mathfrak{M}$ на $\overline{\mathrm{sp}}\,(B)$, ч. т. д.

Библиография

В этот список входит литература, цитированная в обоих томах настоящей книги. [Звездочкой отмечены работы, добавленные редакторами русского издания. Для монографий, переведенных на русский язык, указан также год издания оригинала (на который ссылаются авторы).— Ред.]

Абдельгай (Abdelhay J.)

1. Caractérisation de l'espace de Banach de toutes les suites de nombres réels tendant vers zéro, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **229**(1949), 1111—1112.
2. On a theorem of representation, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **55** (1949), 408—417.

Абель (Abel N. H.)

1. Untersuchungen über die Reihe:

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\ldots \text{ u. s. w.},$$

J. Reine Angew. Math., **1** (1826), 311—339.

Абрамов Л. М.

1*. Об энтропии автоморфизма соленоидальной группы, *Теория вероятностей и ее применения*, **4**, вып. 3 (1958), 249—254.

Агмон (Agmon S.), см. Мандельбройт

Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л.

1*. Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы, ИЛ, М., 1962.

Адамар (Hadamard J.)

1. Sur les opérations fonctionnelles, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **136** (1903), 351—354.

Адамс (Adams C. R.)

1. The space of functions of bounded variation and certain general spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **40** (1936), 421—438.

Адамс и Кларксон (Adams C. R., Clarkson J. A.)

1. On definitions of bounded variation for functions of two variables, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **35** (1933), 824—854.
2. Properties of functions $f(x, y)$ of bounded variation, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **36** (1934), 711—730. Исправлено там же, **46** (1939), 468.
3. On convergence in variation, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **40** (1934), 413—417.
4. The type of certain Borel sets in several Banach spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **45** (1939), 322—334.

Адамс и Морс (Adams C. R., Morse A. P.)

1. On the space (BV), *Trans. Amer. Math. Soc.*, **42** (1937), 194—205.
2. Continuous additive functionals on the space (BV) and certain subspaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **48** (1940), 82—100.

Акилов Г. П.

1. О распространении линейных операций, *ДАН СССР* **57** (1947), 643—646.

2. Необходимые условия распространимости линейных операций, *ДАН СССР*, **59** (1948), 417—418.

Алаоглу (Alaoglu L.)

1. Weak topologies of normed linear spaces, *Ann. of Math.* (2), **41** (1940), 252—267.
2. Weak convergence of linear functionals (abstract), *Bull. Amer. Math. Soc.*, **44** (1938), 196.

Алаоглу и Биркгоф (Alaoglu L., Birkhoff G.)

1. General ergodic theorem, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **25** (1939), 628—630.
2. General ergodic theorems, *Ann. of Math.* (2), **41** (1940), 293—309.

Александров А. Д.

1. Additive set functions in abstract spaces, I—III.
   I. *Матем. сб.*, **8** (50), (1940), 307—348.
   II. Там же, **9** (51), (1941), 563—628.
   III. Там же, **13** (55), (1943), 169—238.

Александров П. С.

1*. Введение в общую теорию множеств и функций, М., Гостехиздат, 1948.

Александров П. С. и Хопф (Alexandroff P., Hopf H.)

1. Topologie, I. J. Springer, Berlin, 1935.

Алексевич (Alexiewicz A.)

1. On sequences of operations, I—IV.
   I. *Studia Math.*, **11** (1950), 1—30.
   II. Там же, **11** (1950), 200—236.
   III. Там же, **12** (1951), 84—92.
   IV. Там же, **12** (1951), 93—101.
2. Linear operations among bounded measurable functions, I, II.
   I. *Ann. Soc. Polon. Math.*, **19** (1946), 140—161.
   II. Там же, **19** (1946), 161—164.
3. On differentiation of vector-valued functions, *Studia Math.*, **11** (1950), 185—196.
4. Continuity of vector-valued functions of bounded variation, *Studia Math.*, **12** (1951), 133—142.
5. On some theorems of S. Saks, *Studia Math.*, **13** (1953), 18—29.
6. A theorem on the structure of linear operations, *Studia Math.*, **14** (1953), 1—12 (1954).

Алексевич и Орлич (Alexiewicz A., Orlicz W.)

1. Remarks on Riemann-integration of vector-valued functions, *Studia Math.*, **12** (1951), 125—132.
2. On analytic vector-valued functions of a real variable, *Studia Math.*, **12** (1951), 108—111.
3. On the differentials in Banach spaces, *Ann. Soc. Polon. Math.*, **25** (1952), 95—99.
4. Analytic operations in real Banach spaces, *Studia Math.*, **14** (1953), 57—78.

Альбрехт (Albrycht J.)

1. On a theorem of Saks for abstract polynomials, *Studia Math.*, **14** (1953), 79—81.

Альтман М. Ш. (Al'tman M. Š.)

1. О базисах в пространстве Гильберта, *ДАН СССР*, **69** (1949), 483—485.
2. О биортогональных системах, *ДАН СССР*, **67** (1949), 413—416.
3. On linear functional equations in locally convex spaces, *Studia Math.*, **13** (1953), 194—207.
4. Mean ergodic theorem in locally convex linear topological spaces, *Studia Math.*, **13** (1953), 190—193.
5. The Fredholm theory of linear equations in locally convex topological spaces, *Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III.*, **2** (1954), 267—269.

Альфорс (Ahlfors L. V.)

1. Complex analysis, McGraw-Hill, New York (1953).

Амброз (Ambrose W.)

1. Structure theorems for a special class of Banach algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **57** (1945), 364—386.
2. Measures on locally compact topological groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **61** (1947), 106—121.
3. Direct sum theorem for Haar measures, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **61** (1947), 122—127.
4. Spectral resolution of groups of unitary operators, *Duke Math. J.*, **11** (1944), 589—595.

Андзаи и Какутани (Anzai H., Kakutani S.)

1. Bohr compactifications of a locally compact abelian group, I, II.
   I. *Proc. Imp. Acad. Tokyo.*, **19** (1943), 476—480.
   II. Там же, **19** (1943), 533—539.

Аренс (Arens R. F.)

1. Duality on linear spaces, *Duke Math. J.*, **14** (1947), 787—794.
2. The space L^{ω} and convex topological rings, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **52** (1946), 931—935.
3. Representation of functionals by integrals, *Duke Math. J.*, **17** (1950), 499—506.
4. Approximation in, and representation of, certain Banach algebras, *Amer. J. Math.*, **71** (1949), 763—790.
5. A topology for spaces of transformations, *Ann. of Math.* (2), **47** (1946), 480—495.
6. On a theorem of Gelfand and Neumark, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **32** (1946), 237—239.
7. Representation of Banach *-algebras, *Duke Math. J.*, **14** (1947), 269—282.
8. Linear topological division algebras, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **53** (1947), 623—630.
9. A generalization of normed rings, *Pacific J. Math.*, **2** (1952), 455—471.

Аренс и Капланский (Arens R. F., Kaplansky I.)

1. Topological representation of algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **63** (1948), 457—481.

Аренс и Келли (Arens R. F., Kelley J. L.)

1. Characterizations of the space of continuous functions over a compact Hausdorff space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **62** (1947), 499—508.

Арну (Arnous E.)

1. Sur les groupes continus de transformations unitaires de l'espace de Hilbert, *Comment. Math. Helv.*, **19** (1946), 50—60.

Ароншайн (Aronszajn N.)

1. Caractérisation métrique de l'espace de Hilbert, des espaces vectoriels et de certains groupes métriques, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **201** (1935), 811—813, 873—875.
2. Le correspondant topologique de l'unicité dans la théorie des équations différentielles, *Ann. of Math.* (2), **43** (1942), 730—738.
3. Approximation methods for eigenvalues of completely continuous symmetric operators. Proceedings of the Symposium on Spectral Theory and Differential Problems (1951), 179—202. Oklahoma Agricultural and Mechanical College, Stillwater, Oklahoma.
4. The Rayleigh — Ritz and A. Weinstein methods for approximation of eigenvalues, I, II, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **34** (1948), 474—480, 594—601.
5. Sur quelques problèmes concernant les espaces de Minkowski et les espaces vectoriels généraux, *Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* (6), **26** (1937), 374—376.

Ароншайн и Смит (Aronszajn N., Smith K. T.)
1. Invariant subspaces of completely continuous operators, *Ann. of Math* (2), **60** (1954), 345—350. [Есть русский перевод: сб. *Математика*, **2 : 1** (1958), 97—102.]

Артеменко А. П.
1. Общий вид линейного функционала в пространстве функций ограниченной вариации, *Матем. сб.*, **6** (48), (1939), 215—220.
2. О позитивных линейных функционалах в пространстве почти периодических функций H. Bohr'а, Харьков, *Зап. матем. о-ва.*, (4) **16**, (1940), 111—114.

Арцела (Arzelà C.)
1. Intorno alla continuità della somma di infinite funzioni continue, *Rend. dell'Accad. R. delle Sci. dell'Istituto di Bologna* (1883—1884), 79—84.
2. Funzioni di linee, *Atti della R. Accad. dei Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* (4), 5_I (1889), 342—348.
3. Sulle funzioni di linee, *Mem. Accad. Sci. Ist. Bologna Cl. Sci. Fis. Mat.* (5), **5**(1895), 55—74.
4. Sulle serie di funzioni, I, II.
   I. *Memorie della R. Accad. delle Sci. dell'Istituto di Bologna. Sci. Fis. e Mat.* (5), **8** (1899), 3—58.
   II. Там же (5), **8** (1899), 91—134.
5. Un'osservazione intorno alle serie di funzioni, *Rend. dell'Accad. R. delle Sci. dell'Istituto di Bologna* (1882—1883), 142—159.

Асколи (Ascoli G.)
1. Sugli spazi lineari metrici e le loro varietà lineari, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), **10** (1932), 33—81, 203—232.
2. Le curve limiti di una varietà data di curve, *Atti della R. Accad. dei Lincei. Memorie della Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* (3), **18** (1883—1884), 521—586.

Аткинсон (Atkinson F. V.)
1. Symmetric linear operators on a Banach space, *Monatsh. Math.*, **53** (1949), 278—297.
2. Нормальная разрешимость линейных уравнений в нормированных пространствах, *Матем. сб.*, **28** (70), (1951), 3—14.
3. A spectral problem for completely continuous operators, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **3** (1952), 53—60.
4. On relatively regular operators, *Acta Sci. Math. Szeged*, **15** (1953), 38—56.
5. On the second-order linear oscillator, *Univ. Nac. Tucumán. Revista A.*, **8** (1951), 71—87.

Ахиезер Н. И.
1. Бесконечные матрицы Якоби и проблема моментов, *УМН*, **9** (стар. сер.), (1941), 126—156.

Ахиезер Н. И. и Глазман И. М.
1. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, Гостехиздат, М.—Л., 1950.

Бабенко К. И.
1. О сопряженных функциях, *ДАН СССР*, **62** (1948), 157—160.

Банах (Banach S.)
1. Théorie des opérations linéaires, Monografje Matematyczne, Warsaw, 1932. (На украинском языке: «Курс функціонального аналізу», Київ, 1948.)
2. Über die Baire'sche Kategorie gewisser Funktionenmengen, *Studia Math.*, **3** (1931), 174—179.
3. Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales, *Fund. Math.*, **3** (1922), 133—181.

4. Sur les fonctionnelles linéaires, I, II.
   I. *Studia Math.*, **1** (1929), 211—216.
   II. Там же, **1** (1929), 223—239.
5. Über homogene Polynome in (L^2), *Studia Math.*, **7** (1938), 36—44.
6. Teorja operacyj, Warsaw, 1931.
7. Über metrische Gruppen, *Studia Math.*, **3** (1931), 101—113.
8. Sur la convergence presque partout de fonctionnelles linéaires, *Bull. Sci. Math.* (2), **50** (1926), 27—32, 36—43.

Банах и Мазур (Banach S., Mazur S.)
1. Zur Theorie der linearen Dimension, *Studia Math.*, **4** (1933), 100—112.

Банах и Сакс (Banach S., Saks S.)
1. Sur la convergence forte dans les champs L^p, *Studia Math.*, **2** (1930), 51—57.

Банах и Штейнгауз (Banach S., Steinhaus H.)
1. Sur le principe de la condensation de singularités, *Fund. Math.*, **9** (1927), 50—61.

Баранкин (Barankin E. W.)
1. Bounds on characteristic values, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **54** (1948), 728—735.
2. Bounds for characteristic roots of a matrix, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **51** (1945), 767—770.

Баргман (Bargman V.)
1. Remarks on the determination of a central field of force from the elastic scattering phase shifts, *Phys. Rev.*, **75** (1949), 301—303.

Баренблатт Г. И.
1. Об одном методе решения уравнения теплопроводности, *ДАН СССР*, **72** (1950), 667—670.

Бари Н. К.
1. Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве, *Учен. Зап. МГУ*, 148; Математика, **4** (1951), 69—107.
2. Об устойчивости свойства полноты системы функций, *ДАН СССР*, **37** (1942), 99—103.

Барри (Barry J. Y.)
1. On the convergence of ordered sets of projections, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **5** (1954), 313—314.

Бартл (Bartle R. G.)
1. Singular points of functional equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **75** (1953), 366—384.
2. On compactness in functional analysis, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **79** (1955), 35—57.
3. A general bilinear vector integral, *Studia Math.*, **15** (1956), 337—352.
4. Implicit functions and solutions of equations in groups, *Math. Zeit.*, **62** (1955), 335—346.
5. Newton's method in Banach spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **6** (1955), 827—831.

Бартл и Грейвс (Bartle R. G., Graves L. M.)
1. Mappings between function spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **72** (1952), 400—413.

Бартл, Данфорд и Шварц (Bartle R. G., Dunford N., Schwartz J.)
1. Weak compactness and vector measures, *Canadian J. Math.*, **7** (1955), 289—305.

Бассали (Bassali W. A.), см. Стивенсон

Батлер (Butler J. B.)
1. Perturbation series for eigenvalues of regular non-symmetric operators, Technical Report No. 8 to the Office of Ordinance Research, Univ. of California, Berkeley (1955).

Безикович (Besicovitch A. S.)
1. Almost periodic functions, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1932.

Бейд (Bade W. G.)
1. An operational calculus for operators with spectrum in a strip, *Pacific J. Math.*, **3** (1953), 257—290.
2. Unbounded spectral operators, *Pacific J. Math.*, **4** (1954), 373—392.
3. Weak and strong limits of spectral operators, *Pacific J. Math.*, **4** (1954), 393—413.
4. On Boolean algebras of projections and algebras of operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **80** (1955), 345—360.

Бейд и Шварц (Bade W. G., Schwartz J.)
1. On abstract eigenfunction expansions, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **42** (1956), 519—525.

Бейкер (Baker H. F.)
1. On the integration of linear differential equations, *Proc. London Math. Soc.* (1), **35** (1903), 333—378.

Белл (Bell R. P.)
1. Eigenvalues and eigenfunctions for the operator $\frac{d^2}{dx^2} - |x|$, *Philos. Mag.*, **35** (1944), 385—588.

Беллман (Bellman R.)
1. A survey of the theory of the boundedness, stability and asymptotic behavior of solutions of linear and non-linear differential and difference equations, Office of Naval Res., Washington, D. C., 1949.
2. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений, М., ИЛ, 1954 (1953).

Беннет (Bennett A. A.)
1. Newton's method in general analysis, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **2** (1916), 592—598.

Березанский Ю. М.
1. Об однозначности определения уравнения Шредингера по его спектральной функции, *ДАН СССР*, **93** (1953), 591—594.
2. О гиперкомплексных системах, построенных по уравнению Штурма — Лиувилля на полуоси, *ДАН СССР*, **91** (1953), 1245—1248.
3*. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, *Матем. сб.*, **43** (85), (1957), 75—126.
4*. Разложения по собственным функциям, Киев, 1965.
5*. Представление положительно определенных ядер через собственные функции дифференциальных уравнений, *Матем. сб.*, **47**, 2 (1959), 145—176.

Берковиц (Berkowitz J.)
1. On the discreteness of the spectra of Sturm-Liouville operators, Dissertation, New York University, 1951.

Берлинг (Beurling A.)
1. Sur les intégrales de Fourier absolument convergentes et leur application à une transformation fonctionnelle. Proc. IX Congrès de Math. Scandinaves, Helsingfors (1938), 345—366.
2. Un théorème sur les fonctions bornées et uniformément continues sur l'axe réel, *Acta Math.*, **77** (1945), 127—136.
3. On the spectral synthesis of bounded functions, *Acta Math.*, **81** (1949), 225—238.
4. On two problems concerning linear transformations in Hilbert space, *Acta Math.*, **81** (1949), 239—255.

Бернет (Burnett D.)
1. The distribution of velocities in a slightly non-uniform gas, *Proc. London Math. Soc.* (2), **39** (1935), 385—430.

Берри Р. Я.
1. Исследование конуса положительных элементов в полуупорядоченном пространстве, *Матем. сб.*, **23** (65), (1948), 419—440.
Бертон (Burton L. P.)
1. Oscillation theorems for the solutions of linear, non-homogeneous, second order differential systems, *Pacific J. Math.*, **2** (1952), 281—289.
Бете (Bethe H. A.)
1. Theory of effective image in nuclear scattering, *Phys. Rev.*, **76** (1949), 38—50.
Бибербах (Bieberbach L.)
1. Lehrbuch der Funktionentheorie, vol. I, Fourth Ed., 1934; vol. II, Second ed., 1931, Teubner, Leipzig.
Биркгоф Г. (Birkhoff G.), см. также Алаоглу
1. Orthogonality in linear metric spaces, *Duke Math. J.*, **1** (1935), 169—172.
2. Dependent probabilities and the space (*L*), *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **24** (1938), 154—159.
3. Теория структур, М., ИЛ, 1952 (1940).
4. Integration of functions with values in a Banach space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **38** (1935), 357—378.
5. A note on topological groups, *Compositio Math.*, **3** (1936), 427—430.
6. On product integration, *J. Math. and Phys. Mass. Inst. Tech.*, **16** (1937), 104—132.
7. The mean ergodic theorem, *Duke Math. J.*, **5** (1939), 19—20.
8. An ergodic theorem for general semi-groups, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **25** (1939), 625—627.
Биркгоф Г. и Мак-Лейн (Birkhoff G., MacLane S.)
1. A survey of modern algebra, Macmillan Co., New York, 1941.
Биркгоф Дж. (Birkhoff G. D.)
1. Proof of the ergodic theorem, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **17** (1931), 656—660.
2. On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential operations containing a parameter, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **9** (1908), 219—231.
3. Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **9** (1908), 373—395.
4. Existence and oscillation theorems for a certain boundary value problem, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **10** (1909), 259—270.
5. Quantum mechanics and asymptotic series, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **39** (1933), 681—700.
6. Note on the expansion of the Green's function, *Math. Ann.*, **72** (1912), 292—294.
7. Note on the expansion problems of ordinary linear differential equations, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **36** (1913), 115—126.
8*. Collected Mathematical Papers, Vol. I—III, Princeton, 1950.
Биркгоф Дж. и Келлог (Birkhoff G. D., Kellogg O. D.)
1. Invariant points in function space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **23** (1922), 96—115.
Биркгоф Дж. и Лангер (Birkhoff G. D., Langer R. E.)
1. The boundary problems and developments associated with a system of ordinary differential equations of the first order, *Proc. Amer. Acad. Arts. Sci.* (2), **58** (1923), 51—128.
Бирман М. Ш.
1. К теории самосопряженных расширений положительно определенных операторов, *ДАН СССР*, **91** (1953), 189—191.

Бирнбаум и Орлич (Birnbaum Z. W., Orlicz W.)
1. Über die Verallgemeinerung des Begriffes der zueinander Konjugierten Potenzen, *Studia Math.*, **3** (1931), 1—67.

Блисс (Bliss G. A.)
1. A boundary value problem for a system of ordinary linear differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **28** (1926), 561—589.

Блок (Block H. D.)
1. Linear transformations on or onto a Banach space, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **3** (1952), 126—128.

Блюменталь (Blumenthal L. M.)
1. Generalized Euclidean space in terms of a quasi-inner product, *Amer. J. Math.*, **72** (1950), 686—698.

Боас М., Боас Р. и Левинсон (Boas M. L., Boas R. P., Jr., Levinson N.)
1. The growth of solutions of a differential equation, *Duke Math. J.*, **9** (1942), 847—853.

Боас Р. (Boas R. P., Jr.), см. также Боас М.
1. Some uniformly convex spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **46** (1940), 304—311.
2. Expansions of analytic functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **48** (1940), 467—487.

Боненблуст (Bohnenblust H. F.)
1. An axiomatic characterization of L_p-spaces, *Duke Math. J.*, **6** (1940), 627—640.
2. A characterization of complex Hilbert spaces, *Portugaliae Math.*, **3** (1942), 103—109.
3. Subspaces of $l_{p,n}$ spaces, *Amer. J. Math.*, **63** (1941), 64—72.
4. Convex regions and projections in Minkowski spaces, *Ann. of Math.* (2), **39** (1938), 301—308.

Боненблуст и Какутани (Bohnenblust H. F., Kakutani S.)
1. Concrete representations of (M)-spaces, *Ann. of Math.* (2), **42** (1941), 1025—1028.

Боненблуст и Собчик (Bohnenblust H. F., Sobczyk A.)
1. Extensions of functionals on complex linear spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **44** (1938), 91—93.

Боннезен и Фенхель (Bonnesen T., Fenchel W.)
1. Theorie der konvexen Körper, Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete, III, 1, J. Springer, Berlin, 1934.

Бонсол (Bonsall F. F.)
1. A note on subadditive functionals, *J. London Math. Soc.*, **29** (1954), 125—126.

Бор (Bohr H.)
1. Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen, I—III.
   I. *Acta Math.*, **45** (1925), 29—127.
   II. Там же, **46** (1925), 101—214.
   III. Там же, **47** (1926), 237—281.
2. Почти-периодические функции, М.—Л., 1934 (1932).
3. On almost periodic functions and the theory of groups, *Amer. Math. Monthly*, **56** (1949), 595—609.
4. A survey of the different proofs of the main theorems in the theory of almost periodic functions, Proc. International Cong. Math., Cambridge, **1** (1950), 339—348.

Бор и Фёльнер (Bohr H., Følner E.)
1. On some types of functional spaces. A contribution to the theory of almost periodic functions, *Acta Math.*, **76** (1944), 31—155.

Борг (Borg G.)
1. Über die Stabilität gewisser Klassen von linearen Differentialgleichungen, *Ark. Mat. Astr. Fys.*, **31A**, No. 1 (1944).
2. Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe Bestimmung der Differentialgleichung durch die Eigenwerte, *Acta Math.*, **78** (1946), 1—96.
3. Inverse problems in the theory of characteristic values of differential systems, C. R. Dixième Congrès Math. Scandinaves, Copenhagen, 1946.
4. On the completeness of some sets of functions, *Acta Math.*, **81** (1949), 266—283.
5. On a Liapounoff criterion of stability, *Amer. J. Math.*, **71** (1949), 67—70.
6. Über die Ableitung der S-Funktion, *Math. Ann.*, **122** (1950—1951), 326—331.
7. On the point spectra of $y''+(\lambda-q(x))y=0$, *Amer. J. Math.*, **73** (1951), 122—126.

Борель (Borel E.)
1. Sur l'équation adjointe et sur certains systèmes d'équations différentielles, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (3), **9** (1892), 63—90.

Ботс (Botts, Truman)
1. On convex sets in linear normed spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **48** (1942), 150—152.
2. Convex sets, *Amer. Math. Monthly*, **49** (1942), 527—531.

Бохер (Bôcher M.)
1. On regular singular points of linear differential equations of the second order whose coefficients are not necessarily analytic, *Trans. Amer. Math Soc.*, **1** (1900), 40—52.
2. Green's functions in spaces of one dimension, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **7** (1901), 297—299.
3. Boundary problems and Green's functions for linear differential and difference equations, *Ann. of Math.* (2), **13** (1911), 71—88.
4. Applications and generalisations of the concept of adjoint system, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **14** (1913), 403—420.
5. Leçons sur les méthodes de Sturm, Gauthier-Villars, Paris, 1917.

Бохнер (Bochner S.)
1. Completely monotone functions in partially ordered space, *Duke Math. J.*, **9** (1942), 519—526.
2. Integration von Funktionen, deren Werte die Elemente eines Vectorraumes sind, *Fund. Math.*, **20** (1933), 262—276.
3. Additive set functions on groups, *Ann. Math.* (2), **40** (1939), 769—799.
4. Beiträge zur Theorie der fastperiodischen Funktionen, *Math. Ann.*, **96** (1927), 119—147.
5. Absolut-additive abstrakte Mengenfunktionen, *Fund. Math.*, **21** (1933), 211—213.
6. Vorlesungen über Fouriersche Integrale, Akad. Verlag., Leipzig, 1932.
7. Spektraldarstellung linearer Scharen unitärer Operatoren, S.-B. Preuss. Akad. Wiss. (1933), 371—376.
8. Inversion formulae and unitary transformations, *Ann. of Math.* (2), **35** (1934), 111—115.

Бохнер и Дж. фон Нейман (Bochner S., von Neumann J.)
1. Almost periodic functions in groups, II, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **37** (1935), 21—50.

Бохнер и Тейлор (Bochner S., Taylor A. E.)
1. Linear functionals on certain spaces of abstractly-valued functions, *Ann. of Math.* (2), **39** (1938), 913—944.

Бохнер и Фань Ку (Bochner S., Fan K.)
1. Distributive order-preserving operations in partially ordered vector sets, *Ann. of Math.* (2), **48** (1947), 168—179.

Бохнер и Филлипс (Bochner S., Phillips R. S.)
1. Additive set functions and vector lattices, *Ann. of Math.* (2), **42** (1941), 316—324.
2. Absolutely convergent Fourier expansions for non-commutative normed rings, *Ann. of Math.* (2), **43** (1942), 409—418.

Браудер (Browder F. E.)
1. The Dirichlet problem for linear elliptic equations of arbitrary even order with variable coefficients, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **38** (1952), 230—235.
2. The Dirichlet and vibration problems for linear elliptic differential equations of arbitrary order, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **38** (1952), 741—747.
3. Assumption of boundary values and the Creen's function in the Dirichlet problem for the general linear elliptic equation, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **39** (1953), 179—184.
4. Linear parabolic differential equations of arbitrary order; general boundary-value problems for elliptic equations, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **39** (1953), 185—190.
5. Strongly elliptic systems of differential equations. Contributions to the theory of partial differential equations, 15—51, *Ann. of Math. Studies*, No. 33, Princeton, 1954.
6. On the eigenfunctions and eigenvalues of the general linear elliptic differential operator, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **39** (1953), 433—439.
7. The eigenfunction expansion theorem for the general self-adjoint singular elliptic partial differential operator. I. The analytical foundation, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **40** (1954), 454—459.
8. Eigenfunction expansions for singular elliptic operators. II. The Hilbert space argument; parabolic equations on open manifolds, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **40** (1954), 459—463.

9*. Functional analysis and partial differential equations I, *Math. Ann.*, **138** (1959), 55—79. [Есть русский перевод: сб. *Математика*, **4** : **3** (1960), 79—106.]

Браун (Brown A.)
1. On a class of operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **4** (1953), 723—728.
2. The unitary equivalence of binormal operators, *Amer. J. Math.*, **76**, (1954) 414—434.

Брауэр (Brauer A.)
1. Limits for the characteristic roots of a matrix, *Duke Math. J.*, **13** (1946), 387—394.

Брауэр и Вейль (Brauer R., Weyl H.)
1. Spinors in *n* dimensions, *Amer. J. Math.*, **57** (1935), 425—449.

Брей (Bray H. E.)
1. Elementary properties of the Stieltjes integral, *Ann. of Math.* (2), **20** (1918—1919), 177—186.

Брейс (Brace J. W.)
1. Transformations on Banach spaces, Dissertation, Cornell University (1953).
2. Compactness in the weak topology, *Math. Mag.*, **28** (1955), 125—134.

Брело (Brélot M.)
1. Sur l'approximation et la convergence dans la théorie des fonctions harmoniques ou holomorphes, *Bull. Soc. Math. France*, **73** (1945), 71—73.

Б р е м (B r a m J.)
1. Subnormal operators, *Duke Math. J.*, **22** (1955), 75—94.
Б р и л л ю э н (B r i l l o u i n L.)
1. La mécanique ondulatoire de Schrödinger; une méthode générale de résolution par approximations successives, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **183**, (1926), 24—26.
Б р о д с к и й М. С. и Л и в ш и ц М. С.
1. Спектральный анализ несамосопряженных операторов и промежуточные системы, *УМН*, **13**, вып. 1 (79), (1958), 1—85.
Б р о д с к и й М. С. и М и л ь м а н Д. П.
1. О центре выпуклого множества, *ДАН СССР*, **59** (1948), 837—840.
Б р о у н (B r o w n e E. T.)
1. Limits to the characteristic roots of a matrix, *Amer. Math. Monthly*, **46** (1939), 252—265.
Б р о у э р (B r o u w e r L. E. J.)
1. Über eineindeutige, stetige Transformationen von Flächen in sich, *Math. Ann.*, **69** (1910), 176—180.
Б у н я к о в с к и й В. Я.
1. Sur quelques inégalités concernant les intégrales ordinaires et les intégrales aux différences finies, *Mém. Acad. St. Petersburg* (7) **1**, No.9 (1859).
Б у р б а к и (B o u r b a k i N.)
1. Sur les espaces de Banach, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **206** (1938), 1701—1704.
2. Элементы математики, т. 5. Топологические векторные пространства, ИЛ, М., 1959 (1953, 1955).
3. Sur certains espaces vectoriels topologiques, *Ann. Inst. Fourier Grenoble*, **2** (1950), 5—16.
4. Éléments de mathématique, Livre VI, Intégration. Hermann et Cie, Act. Sci. et Ind., 1175, Paris, 1952.
5. Éléments de mathématique, Livre III, Topologie générale. Hermann et Cie, Act. Sci. et Ind., 858, 916, 1029, 1045, 1084, Paris, 1940—1949. (В русском переводе вышли главы I—III и IV—VIII:
Общая топология. Основные структуры, М., Физматгиз, 1958.
Общая топология. Числа и связанные с ними группы и пространства, М., Физматгиз, 1959.)
Б у р г а (B u r g a t P.)
1. Résolutions de problèmes aux limites au moyen de transformations fonctionnelles, Dissertation, Université de Neuchâtel, Lausanne, 1950.
2. Résolution de problèmes aux limites au moyen de transformations fonctionnelles, *Z. Angew. Math. Physik.*, **4** (1953), 146—152.
Б у р ж е н (B o u r g i n D. G.)
1. Some properties of Banach spaces, *Amer. J. Math.*, **64** (1942), 597—612.
2. Linear topological spaces, *Amer. J. Math.*, **65** (1943), 637—649.
Б у р к х а р д т (B u r k h a r d t H.)
1. Sur les fonctions de Green rélatives à une domaine d'une dimension, *Bull. Soc. Math. France*, **22** (1894), 71—75.
Б у х г е й м (B u c h h e i m A.)
1. An extension of a theorem of Professor Sylvester's relating to matrices, *Phil. Mag.* (5), **22** (1886), 173—174.
В а ж е в с к и й (W a ż e w s k y T.)
1. Sur l'évaluation du domaine d'existence des fonctions implicites dans le cas des espaces abstraits, *Fund. Math.*, **37** (1950), 5—24.
В а й н б е р г е р (W e i n b e r g e r H. F.)
1. An optimum problem in the Weinstein method for eigenvalues, *Pacific J. Math.*, **2** (1952), 413—418.
2. Error estimation in the Weinstein method for eigenvalues, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **3** (1952), 643—646.

3. An extension of the classical Sturm-Liouville theory, *Duke Math. J.*, **22** (1955), 1—14.

Вайнштейн (Weinstein A.)

1. Quantitative methods in Sturm-Liouville theory. Proc. Symposium on Spectral Theory and Differential Problems (1951), Oklahoma Agricultural and Mechanical College, Stillwater, Oklahoma.

Ван дер Варден (van der Waerden B. L.)

1. Современная алгебра, Гостехиздат, М.— Л., 1947 (1930, 1931).

Ван Данциг (van Dantzig D.), см. Данциг

Ван Кампен (van Kampen E. R.), см. Кампен

Варшавский (Warschawski S. E.), см. Галбрайт

Васильков Д. А.

1. Частично упорядоченные линейные системы банахова пространства и системы функций, *ДАН СССР*, **35** (1942), 148—151.
2. Классификация упорядочений линейных систем, *ДАН СССР*, **39** (1943), 175—178.
3. On the theory of partially ordered linear systems and linear spaces, *Ann. of Math.*, **44** (1943), 580—609.
4. Упорядочения абстрактных множеств и линейных систем, *Изв. АН СССР, сер. матем.*, **7** (1943), 203—236.

Веблен (Veblen O.)

1. Invariants of quadratic differential forms, Cambridge Univ. Press, London, 1933.

Веддерберн (Wedderburn J. H. M.)

1. Lectures on matrices, Amer. Math. Soc. Colloq. Pub. 17, New York, 1934.

Вейерштрасс (Weierstrass K.)

1. Mathematische Werke, Band 1, Mayer und Müller, Berlin, 1894.
2. Mathematische Werke, Band 3, Mayer und Müller, Berlin, 1903.

Вейль А. (Weil A.)

1. Интегрирование в топологических группах и его применения, М., ИЛ, 1950 (1940).
2. Sur les fonctions presque périodiques de von Neumann, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **200** (1935), 38—40.
3. Sur les groupes topologiques et les groupes mesures, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **202** (1936), 1147—1149.

Вейль Г. (Weyl H.), см. также Петер, Брауэр.

1. Inequalities between the two kinds of eigenvalues of a linear transformation, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **35** (1949), 408—411.
2. Über beschränkte quadratische Formen, deren Differenz vollstetig ist, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **27** (1909), 373—392.
3. Raum, Zeit, Materie. Vierte Aufl., J. Springer, Berlin, 1921.
4. Ramifications, old and new, of the eigenvalue problem, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **56** (1950), 115—139.
5. Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen, *Math. Ann.*, **68** (1910), 220—269.
6. Almost periodic invariant vector sets in a metric vector space, *Amer. J. Math.*, **71** (1949), 178—205.
7. Über gewöhnliche lineare Differentialgleichungen mit singulären Stellen und ihre Eigenfunktionen, *Nachr. Acad. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl.* (1909), 37—64.
8. Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit singulären Stellen und ihre Eigenfunktionen, *Nachr. Acad. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl.* (1910), 442—467.
9. The method of orthogonal projection in potential theory, *Duke Math. J.*, **7** (1940), 411—444.

61 Заказ № 134

10. Классические группы, их инварианты и представления, Гостехиздат, М., 1947 (1939).
11. Theorie der Darstellungen kontinuierlicher Halb-einfachen Gruppen durch lineare Transformationen III, *Math. Z.*, **24** (1926), 377—395.

Вейр (Weyr E.)
1. Note sur la théorie des quantités complexes formées avec n unités principales, *Bull. Sci. Math.* (2), **11** (1887), 205—215.

Веккен (Wecken F. J.)
1. Zur Theorie linearer Operatoren, *Math. Ann.*, **110** (1935), 722—725.
2. Unitärinvarianten selbstadjugierter Operatoren, *Math. Ann.*, **116** (1939), 422—455.

Вентцель (Wentzel G.)
1. Eine Verallgemeinerung der Quantenbedingungen für die Zwecke der Wellenmechanik, *Zeit. für Physik.*, **38** (1926), 518—529.

Вестфаль (Westfall J.)
1. Zur Theorie der Integralgleichungen, Dissertation, Göttingen, 1905.

Вехаузен (Wehausen J. V.)
1. Transformations in linear topological spaces, *Duke Math. J.*, **4** (1938), 157—169.
2. Transformations in metric spaces and ordinary differential equations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **51** (1945), 113—119.

Вигман (Wiegmann N. A.)
1. A note on infinite normal matrices, *Duke Math. J.*, **16** (1949), 535—538.

Видав (Vidav I.)
1. Über eine Vermutung von Kaplansky, *Math. Z.*, **62** (1955), 330.

Виландт (Wielandt H.)
1. Eigenwerttheorie. Naturforschung und Medizin in Deutschland 1939—1946, Band 2, 85—98. Dieterich'sche Verlagsbuchhandlung, Wiesbaden, 1948.
2. Über die unbeschränktheit der Operatoren der Quantenmechanik, *Math. Ann.*, **121** (1949), 21.

Виланский (Wilansky A.)
1. The basis in Banach space, *Duke Math. J.*, **18** (1951), 795—798.
2. An application of Banach linear functionals to summability, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **67** (1949), 59—68.

Вильямсон (Williamson J. H.)
1. Spectral representation of linear transformations in ω, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **47** (1951), 461—472.
2. Linear transformations in arbitrary linear spaces, *J. Lond. Math. Soc.*, **28** (1953), 203—210.
3. Compact linear operators in linear topological spaces, *J. Lond. Math. Soc.*, **29** (1954), 149—156. (Есть русский перевод: сб. *Математика*, **4 : 5** (1960), 85—91.)
4. On topologising the field $C(t)$, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **5** (1954), 729—734.

Виндау (Windau W.)
1. Über lineare Differentialgleichungen vierter Ordnung mit singuläritaten und die dazugehörigen Darstellungen willkürlicher Funktionen, *Math. Ann.*, **83** (1921), 256—279.

Винер (Wiener N.), см. также Пэли
1. Limit in terms of continuous transformation, *Bull. de la Soc. Math. de France*, **50** (1922), 119—134.
2. Note on a paper of M. Banach, *Fund. Math.*, **4** (1923), 136—143.
3. The ergodic theorem, *Duke Math. J.*, **5** (1939), 1—18.
4. Интеграл Фурье и некоторые его приложения, Физматгиз, М., 1963.
5. Tauberian theorems, *Ann. of Math.* (2), **33** (1932), 1—100.

6. Generalized harmonic analysis, *Acta Math.*, **55** (1930), 117—285.
7. The average value of a functional, *Proc. London Math. Soc.* (2), **22** (1924), 454—467.
8. Differential space, *J. Math. Phys. Mass. Inst. Tech.*, **2** (1923), 131—174.

Винер и Уинтнер (Wiener N., Wintner A.)
1. Harmonic analysis and ergodic theory, *Amer. J. Math.*, **63** (1941), 415—426.

Виноградов А. А., см. Крачковский С. Н.

Винокуров В. Г.
1. О биортогональных системах, проходящих через заданные подпространства, *ДАН СССР*, **85** (1952), 685—687.

Виртингер (Wirtinger W.)
1. Beiträge zu Riemann's Integrationsmethode für hyperbolische Differentialgleichungen, und deren Anwendungen auf Schwingungsprobleme, *Math. Ann.*, **48** (1897), 365—389.

Виссер (Visser C.)
1. On the iteration of linear operations in a Hilbert space, *Neder. Akad. Wetensch. Proc.*, **41** (1938), 487—495.
2. Note on linear operators, *Neder. Akad. Wetensch. Proc.*, **40** (1937), 270—272.

Виссер и Заанен (Visser C., Zaanen A. C.)
1. On the eigenvalues of compact linear transformations, *Neder. Akad. Wetensch. Proc.*, *Ser.* A, **55** (1952), 71—78.

Витали (Vitali G.)
1. Sulle funzioni integrali, *Atti R. Accad. delle Sci. di Torino*, **40** (1905), 753—766.
2. Sull'integrazione per serie, *Rend. del. Circolo Mat. di Palermo*, **23** (1907), 137—155.

Виттих (Wittich H.)
1. Über das Anwachsen der Lösungen linearer Differentialgleichungen, *Math. Ann.*, **124** (1952), 277—288.

Вишик М. И.
1. Линейные расширения операторов и краевые условия, *ДАН СССР*, **65** (1949), 433—436.
2. О линейных краевых задачах для дифференциальных уравнений, *ДАН СССР*, **65** (1949), 785—788.
3. Об общем виде разрешимых краевых задач для однородного и неоднородного эллиптического уравнения, *ДАН СССР*, **82** (1952), 181—184.
4. Метод ортогональных и прямых разложений в теории эллиптических дифференциальных уравнений, *Матем. сб.*, **25** (67), (1949), 189—234.
5. О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений, *Матем. сб.*, **29** (71), (1951), 615—676.

Волмэн (Wallman H.), см. Гуревич У.

Вольтерра (Volterra V.)
1. Theory of functionals. Blackie and Sons, London and Glasgow, 1930.

Вот (Vaught R. L.), см. Келли

Вулих Б. З., см. также Канторович Л. В.
1. Определение произведения в линейном полуупорядоченном пространстве, *ДАН СССР*, **26** (1940), 847—851.
2. Свойства произведения и обратного элемента в линейных полуупорядоченных пространствах, *ДАН СССР*, **26** (1940), 852—856.
3. О линейных пространствах с заданной сходимостью, *Учен. зап. ЛГУ*, **10** (1940), 40—63.
4. Интеграл Стильтьеса для функций со значениями в полуупорядоченных пространствах, *Учен. зап. ЛГУ*, сер. матем., **12** (1941), 3—29.

5. О линейных функционалах и линейных полуупорядоченных пространствах, *ДАН СССР*, **52** (1946), 95—98.
6. О линейных мультипликативных операциях, *ДАН СССР*, **52** (1946), 387—390.
7. О некоторых нелинейных операциях в линейных полуупорядоченных пространствах, *ДАН СССР*, **52** (1946), 479—482.
8. Конкретное представление линейных полуупорядоченных пространств, *ДАН СССР*, **58** (1947), 733—736.
9. Произведение в линейных полуупорядоченных пространствах и его применение к теории операций, ч. 1, *Матем. сб.*, **22** (64), (1948), 27—78.
10. Произведение в линейных полуупорядоченных пространствах и его применение к теории операций, ч. 2, *Матем. сб.*, **22** (64), (1948), 267—317.
11. О конкретном представлении полуупорядоченных линеалов, *ДАН СССР*, **78** (1951), 189—192.
12. Sur les formes générales de certaines opérations linéaires, *Матем. сб.*, **2** (44), (1937), 275—305.
13. Sur les opérations linéaires dans l'espace des fonctions sommables, *Mathematica, Cluj.*, **13** (1937), 40—54.
14. On a generalized notion of convergence in a Banach space, *Ann. of Math.* (2), **38** (1937), 156—174.
15. Некоторые вопросы теории линейных полуупорядоченных множеств, *Изв. АН СССР*, сер. матем., **17** (1953), 365—388.

Вульф (Wolf F.)
1. Analytic perturbation of operators in Banach spaces, *Math. Ann.*, **124** (1952), 317—333.
2. Simplicity of spectra in general operators (abstract), *Bul. Amer. Math. Soc.*, **60** (1954), 345.

Вульфсон (Wolfson K.)
1. On the spectrum of a boundary value problem with two singular endpoints, *Amer. J. Math.*, **72** (1950), 713—719.
2. On the separation of spectra, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **4** (1953), 408—409.

Гавурин М. К.
1. Об оценках собственных чисел и векторов возмущенного оператора, *ДАН СССР*, **76** (1951), 769—770.
2. Об оценках для собственных чисел и векторов возмущенного оператора, *ДАН СССР*, **96** (1954), 1093—1095.
3. О точности приближенных методов разыскания собственных чисел интегральных операторов, *ДАН СССР*, **97** (1954), 13—15.
4. Über die Stieltjessche Integration abstrakter Funktionen, *Fund. Math.*, **27** (1936), 255—268.

Гагаев Б. М.
1. О сходимости в банаховских пространствах, *УМН*, **3**, вып. 5 (27), (1948), 171—173.

Гайнц (Heinz E.)
1. Beiträge zur Störungstheorie der Spektralzerlegung, *Math. Ann.*, **123** (1951), 415—438.
2. Ein v. Neumannscher Satz über beschränkte Operatoren im Hilbertschen Raum, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl.*, (1952), 5—6.
3. Zur Theorie der Hermiteschen Operatoren des Hilbertschen Raumes, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl.*, № 2 (1951), 4.
4. On an inequality for linear operators in a Hilbert space. Report on Operator Theory and Group Representations, Pub. № 387, *Nat. Acad. Sci. USA*, (1955), 27—29.

5. Zur Frage der Differenzierbarkeit der S-Funktion, *Math. Ann.*, **122** (1950), 332—333.

Гал (Gál I. S.)

1. Sur la méthode de résonance et sur un théorème concernant des espaces de type (B), *Ann. Inst. Fourier Grenoble*, **3** (1951), 23—30.
2. The principle of condensation of singularities, *Duke Math. J.*, **20** (1953), 27—35.
3. On sequences of operations in complete vector spaces, *Amer. Math. Monthly*, **60** (1953), 527—538.

Галбрайт и Варшавский (Galbraith A. S., Warschawski S. E.)

1. The convergence of expansions resulting from a self-adjoint boundary problem, *Duke Math. J.*, **6** (1940), 318—340.

Гальперин (Halperin I.), см. также Эллис

1. Function spaces, *Canadian J. Math.*, **5** (1953), 273—288.
2. Convex sets in linear topological spaces, *Trans. Roy. Soc. Canada*, Sec. III, **47** (1953), 1—6.
3. Uniform convexity in function spaces, *Duke Math. J.*, **21** (1954), 195—204.
4. Reflexivity in the L^{λ} function spaces, *Duke Math. J.*, **21** (1954), 205—208.
5. Closures and adjoints of linear differential operators, *Ann. of Math.* (2), **38** (1937), 880—919.

Гамбургер (Hamburger H. L.)

1. Five notes on a generalization of quasi-nilpotent transformations in Hilbert space, *Proc. London Math. Soc.* (3), **1** (1951), 494—512.
2. On a new characterization of self-adjoint differential operators in the Hilbert space L_2, Proc. Symposium on Spectral Theory and Differential Problems, 229—247 (1951). Oklahoma A. and M. College, Stillwater, Oklahoma.
3. Remarks on self-adjoint differential operators, *Proc. London Math. Soc.* (3), **3** (1953), 446—463.
4. Über die Zerlegung des Hilbertschen Raumes durch vollstetige lineare Transformationen, *Math. Nachr.*, **4** (1951), 56—69.
5. Contributions to the theory of closed Hermitian transformations of deficiency index (m, m), *Ann. of Math.* (2), **45** (1944), 59—99.
6. Contributions to the theory of closed Hermitian transformations of deficiency index (m, m), *Quart. J. Math. Oxford*, **13** (1942), 117—128.
7. Hermitian transformations of deficiency index (1, 1), Jacobi matrices and undetermined moment problems, *Amer. J. Math.*, **66** (1944), 489—522.
8. On a class of Hermitian transformations containing self-adjoint differential operators, *Ann. of Math.* (2), **47** (1946), 667—687.

Гамбургер и Гримшоу (Hamburger H. L., Grimshaw M. E.)

1. Linear transformations in n-dimensional vector space, Cambridge Univ. Press, 1951.

Гамель (Hamel G.)

1. Über lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit periodischen Koeffizienten, *Math. Ann.*, **73** (1913), 371—412.

Гантмахер В. Р.

1. Über schwache totalstetige Operatoren., *Матем. сб.*, **7** (49), (1940), 301—308.

Гантмахер В. Р. и Шмульян В. Л.

1. О линейных пространствах, единичная сфера которых слабо компактна, *ДАН СССР*, **17** (1937), 91—94.
2. О слабой компактности в пространстве Банаха, *Матем. сб.*, **8** (50), (1940), 489—492.

Гантмахер Ф. Р.
1*. Теория матриц, М., Гостехиздат, 1953.
Гантмахер Ф. Р. и Крейн М. Г.
1*. Осцилляционные матрицы и малые колебания механических систем, М., Гостехиздат, 1950.
Гарабедян (Garabedian P. R.)
1. The classes L_p and conformal mapping, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **69** (1950), 392—415.
Гарабедян и Шифман (Garabedian P. R., Shiffman M.)
1. On solution of partial differential equations by the Hahn-Banach theorem, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **76**, (1954), 288—299.
Гартогс и Розенталь (Hartogs F., Rosenthal A.)
1. Über Folgen analytischer Funktionen, *Math. Ann.*, **104** (1931), 606—610.
Гасымов М. Г., см. Левитан Б. М.
Гаупт (Haupt O.)
1. Über lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit periodischen Koeffizienten, *Math. Ann.*, **79** (1918), 278—285.
Гёдель (Gödel K.)
1. The consistency of the continuum hypothesis, *Ann. of Math. Studies*, № 3, Princeton Univ. Press, Princeton, 1940.
2. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, I, *Monatsh. für Math. u. Physik*, **38** (1931), 173—198.
Гейл (Gale D.)
1. Compact sets of functions and function rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **1** (1950), 303—308.
Гельбаум (Gelbaum B. R.)
1. Expansions in Banach spaces, *Duke Math. J.*, **17** (1950), 187—196.
2. A nonabsolute basis for Hilbert space, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **2** (1951), 720—721.
Гёльдер (Hölder E.)
1. Über die Vielfachheiten gestörter Eigenwerte, *Math. Ann.*, **113** (1936), 620—628.
2. Über einen Mittelwertsatz, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl.*, (1889), 38—47.
Гельфанд И. М.
1. Normierte Ringe, *Матем. сб.*, **9** (51), (1941), 3—24.
2. Abstrakte Funktionen und lineare Operatoren, *Матем. сб.*, **4** (46), (1938), 235—286.
3. Ideale und primäre Ideale in normierten Ringen, *Матем. сб.*, **9** (51), (1941), 41—48.
4. Zur Theorie der Charaktere der Abelschen topologischen Gruppen, *Матем. сб.*, **9** (51), (1941), 49—50.
5. Über absolut konvergente trigonometrische Reihen und Integrale, *Матем, сб.*, **9** (51), (1941), 51—66.
6. Замечание к работе Н. К. Бари «Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве», *Учен. зап. МГУ*, **148**; Математика, **4** (1951), 224—225.
7*. Разложение по собственным функциям уравнения с периодическими коэффициентами, *ДАН СССР*, **73** (1950), 1117—1120.
Гельфанд И. М. и Колмогоров А. Н.
1. О кольцах непрерывных функций на топологических пространствах, *ДАН СССР*, **22** (1939), 11—15.
Гельфанд И. М. и Костюченко А. Г.
1. Разложение по собственным функциям дифференциальных и других операторов, *ДАН СССР*, **103** (1955), 349—352.

Гельфанд И. М. и Левитан Б. М.
1. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции, *Изв. АН СССР*, сер. матем., **15** (1951), 309—360.
2. Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка, *ДАН СССР*, **88** (1953), 593—596.

Гельфанд И. М. и Наймарк М. А.
1. On the imbedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space, *Матем. сб.*, **12** (54), (1943), 197—213.
2. Нормированные кольца с инволюцией и их представления, *Изв. АН СССР*, сер. матем., **12** (1948), 445—480.
3. Унитарные представления классических групп, *Труды МИАН*, **36** (1950), 1—288.

Гельфанд И. М. и Райков Д. А.
1. К теории характеров коммутативных топологических групп, *ДАН СССР*, **28** (1940), 195—198.
2. Неприводимые унитарные представления локально бикомпактных групп, *Матем. сб.*, **13** (55), (1943), 301—316.

Гельфанд И. М., Райков Д. А. и Шилов Г. Е.
1*. Коммутативные нормированные кольца, *УМН*, **1** : **2** (12), (1946), 48—146.
2*. Коммутативные нормированные кольца, Физматгиз, М., 1960.

Гельфанд И. М. и Шилов Г. Е.
1. Über verschiedene Methoden der Einführung der Topologie in die Menge der maximalen Ideale eines normierten Ringes, *Матем. сб.*, **9** (51), (1941), 25—40.
2*. Обобщенные функции. Вып. 1. Обобщенные функции и действия над ними. Вып. 2. Пространства основных и обобщенных функций. Вып. 3. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. М., Физматгиз, 1958.

Гельфанд И. М. и Яглом А. М.
1. Интегрирование в функциональных пространствах и его применения в квантовой физике, *УМН*, **11**, вып. 1 (67), (1956), 77—114.

Герглотц (Herglotz G.)
1. Über Potenzreihen mit positivem, reellem Teil im Einheitskreis, *S.-B. Sächs. Akad. Wiss.*, **63** (1911), 501—511.
2. Über die Integration linearer, partieller Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, I—IV.
I. *S.-B. Sächs. Akad. Wiss.*, **78** (1926), 93—126.
II. Там же, **78** (1926), 287—318.
III. Там же, **80** (1928), 69—114.
IV. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **6** (1928), 189—197.

Гершгорин С. А.
1*. Über die Abgrenzung der Eigenwerte einer Matrix, *Изв. АН СССР, отд. физ.-мат. наук*, 1931, 749—754.

Гильб (Hilb E.)
1. Über die Auflösung von Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, *S.-B. Phys. Med. Soz. Erlangen*, (1908), 84—89.
2. Über Integraldarstellung willkürlicher Funktionen, *Math. Ann.*, **66** (1909), 1—66.
3. Über Reihenentwickelung nach den Eigenfunktionen linearer Differentialgleichungen 2ter Ordnung, *Math. Ann.*, **71** (1911), 76—87.
4. Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die dazugehörigen Entwickelungen willkürlicher Funktionen, *Math. Ann.*, **76** (1915), 333—339.

Гильб и Сас (Hilb E., Szász O.)
1. Allgemeine Reihenentwicklungen, Encycklopädie der Math. Wiss., II C 11 (1922), 1229—1276.

Гильберт (Hilbert D.), см. также Курант

1. Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. I. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl.* (1904), 49—91. II. Там же (1905), 213—259. III. Там же (1905), 307—338. IV. Там же (1906), 157—227. V. Там же (1906), 439—480. VI. Там же (1910), 355—417.

Гильдебрандт (Hildebrandt T. H.)

1. On unconditional convergence in normed vector spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **46** (1940), 959—962.
2. On uniform limitedness of sets of functional operations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **29** (1923), 309—315.
3. On bounded functional operations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **36** (1934), 868—875.
4. Integration in abstract spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **59** (1953), 111—139.
5. Lebesgue integration in general analysis (Abstract), *Bull. Amer. Math. Soc.*, **33** (1927), 646.
6. Über vollstetige lineare Transformationen, *Acta Math.*, **51** (1928), 311—318.
7. Linear operations on functions of bounded variation, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **44** (1938), 75.
8. On the moment problem for a finite interval, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **38** (1932), 269—270.
9. Convergence of sequences of linear operations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **28** (1922), 53—58.

Гильдебрандт и Грейвс (Hildebrandt T. H., Graves L. M.)

1. Implicit functions and their differentials in general analysis, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **29** (1927), 127—153.

Гильдебрандт и Шёнберг (Hildebrandt T. H., Schoenberg I. J.)

1. On linear functional operations and the moment problem for a finite interval in one or several dimensions, *Ann. of Math.* (2), **34** (1933), 317—328.

Глазман И. М., см. также Ахиезер Н. И.

1. К теории сингулярных дифференциальных операторов, *УМН*, **5**, вып. 6 (40), (1950), 102—135.
2. Об индексе дефекта дифференциальных операторов, *ДАН СССР*, **64** (1949), 151—154.
3. О спектре линейных дифференциальных операторов, *ДАН СССР*, **80** (1951), 153—156.
4. О характере спектра одномерных сингулярных краевых задач, *ДАН СССР*, **87** (1952), 5—8.

5*. О характере спектра многомерных сингулярных краевых задач, *ДАН СССР*, **87** (1952), 171—174.

6*. Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов, «Наука», М., 1963.

Гливенко В. И.

1. Интеграл Стильтьеса, М.— Л., Гостехиздат, 1936.

Гликсберг (Glicksberg I.)

1. The representation of functionals by integrals, *Duke Math. J.*, **19** (1952), 253—261.

Гобсон (Hobson E. W.)

1. The theory of functions of a real variable. (Two volumes.) Second edition, Cambridge Univ. Press, 1921, 1926.
2. On a general convergence theorem, and the theory of the representation

of a function by a series of normal functions, *Proc. Lond. Math. Soc.* (2), **6** (1908), 349—395.

Годман (Godement R.), см. также Картан А.

1. Théorèmes taubériens et théorie spectrale, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (3), **64** (1947), 119—138.
2. Les fonctions de type positif et la théorie des groupes, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **63** (1948), 1—84.
3. Sur la théorie des représentations unitaires, *Ann. of Math.* (2), **53** (1951), 68—124.
4. Mémoire sur la théorie des caractères dans les groupes localement compacts unimodulaires, *J. Math. Pures Appl.*, **30** (1951), 1—110.
5. Sur une généralisation d'un théorème de Stone, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **218** (1944), 901—903.

Голдстайн (Goldstine H. H.)

1. Weakly complete Banach spaces, *Duke Math. J.*, **4** (1938), 125—131.
2. The theorem of Hildebrandt, *Studia Math.*, **7** (1938), 157—158.

Гольдман М. А., см. Крачковский С. Н.

Гольдман М. А. и Крачковский С. Н.

1. О нуль-элементах линейного оператора в его области Фредгольма, *ДАН СССР*, **86** (1952), 15—17.

Гомес (Gomes A. P.), см. Дьёдонне

Гординг (Gårding L.)

1. Linear hyperbolic partial differential equations with constant coefficients, *Acta. Math.*, **85** (1950), 2—62.
2. Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations, *Math. Scand.*, **1** (1953), 55—72.
3. Le problème de Dirichlet pour les équations aux dérivées partielles élliptiques linéaires dans des domaines bornés, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **233** (1951), 1554—1556.
4. Dirichlet's problem and the vibration problem for linear elliptic partial differential equations with constant coefficients, Proc. Symposium Spectral Theory and Differential Problems, 291—301. Oklahoma Agricultural and Mechanical College, Stillwater, Oklahoma, 1951.
5. L'inégalité de Friedrichs et Lewy pour les équations hyperboliques linéaires d'ordre supérieur, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **239** (1954), 849—850.
6. Applications of the theory of direct integrals of Hilbert spaces to some integral and differential operators, Inst. Fluid Dynamics, Univ. of Maryland, College Park, 1954.

7*. Задача Коши для гиперболических уравнений, М., ИЛ, 1961.

Горн (Horn A.)

1. On the singular values of a product of completely continuous operators, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **36** (1950), 374—375.

Гохберг И. Ц.

1. О линейных уравнениях в пространстве Гильберта, *ДАН СССР*, **76** (1951), 9—12.
2. О линейных уравнениях в нормированных пространствах, *ДАН СССР*, **76** (1951), 477—480.
3. О линейных операторах, аналитически зависящих от параметра, *ДАН СССР*, **78** (1951), 629—632.
4. Об индексе неограниченного оператора, *Матем. сб.*, **33** (75), (1953), 193—198.

Гохберг И. Ц. и Крейн М. Г.

1. О вполне непрерывных операторах со спектром, сосредоточенным в нуле, *ДАН СССР*, **128**, № 2 (1959), 227—230.

2*. Несамосопряженные операторы, «Наука», М., 1966.
Графф А. А.
1. К теории линейных дифференциальных систем в области одного измерения, I, II.
I. *Матем. сб.*, **18** (60), (1946), 305—328.
II. Там же, **21** (63), (1947), 143—159.
Грейвс Л. (Graves L. M.), см. также Бартл, Гильдебрандт
1. Topics in the functional calculus, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **41** (1935), 641—662. Исправл. там же, **42** (1936), 381—382.
2. The theory of functions of real variables, McGraw-Hill Co., New York, 1946.
3. Riemann integration and Taylor's theorem in general analysis, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **29** (1927), 163—177.
4. Some general approximation theorems, *Ann. of Math.* (2), **42** (1941), 281—292.
5. Some mapping theorems, *Duke Math. J.*, **17** (1950), 111—114.
6. A generalization of the Riesz theory of completely continuous transformations, *Trans. Amer. Math. Soc*, **79** (1955), 141—149.
7. Remarks on singular points of functional equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **79** (1955), 150—157.
Грейвс Р. Е. (Graves R. E.), см. Камерон
Грейвс Р. Л. (Graves R. L.).
1. The Fredholm theory in Banach spaces. (Abstract.) Dissertation, Harvard University (1951), *Bull. Amer. Math. Soc.*, **58** (1952), 479.
Греко (Greco D.)
1. Sulla convergenza degli sviluppi in serie di autosoluziani associati ad un problema ai limite relativo ad un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine, *Rend. Acc. Sci. Fis. Mat. Napoli* (4), **17** (1950), 171—189.
Гримшоу (Grimshaw M. E.), см. Гамбургер
Гринблюм М. М.
1. Некоторые теоремы о базисе в пространстве типа (*B*), *ДАН СССР*, **31** (1941), 428—432.
2. Биортогональные системы в пространстве Банаха, *ДАН СССР*, **47** (1945), 79—82.
3. К теории биортогональных систем, *ДАН СССР*, **55** (1947), 291—295.
4. Об одном признаке базиса, *ДАН СССР*, **59** (1948), 9—11.
5. Спектральная мера, *DAH СССР*, **81** (1951), 345—348.
6. Операторный интеграл в пространстве Банаха, *ДАН СССР*, **71** (1950), 5—8.
Гросберг Ю. И.
1. Про лінійні функціонали на просторі функцій обмеженоі вариаціі, Киев, *Учен. зап. пед. ин-та*, **2** (1939), 17—23.
Гросберг Ю. И. и Крейн М. Г.
1. О разложении линейного функционала на положительные составляющие, *ДАН СССР*, **25** (1939), 721—724.
Гротендик (Grothendieck A.)
1. Critères généraux de compacité dans les espaces vectoriels localement convexes. Pathologie des espaces (*LF*), *C. R. Acad. Sci. Paris*, **231** (1950), 940—941.
2. Critères de compacité dans les espaces fonctionnels généraux, *Amer. J. Math.*, **74** (1952), 168—186.
3. Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Memoirs Amer. Math. Soc., №. 16, 1955.

4. Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type *C* (*K*), *Canadian J. Math.*, **5** (1953), 129—173.
5. Sur certains espaces de fonctions holomorphes, I, II.
I. *J. Reine Angew. Math.*, **192** (1953), 35—64.
II. Там же, **192** (1953), 77—95.
6*. Sur les espaces (*F*) et (*DF*), *Summa Bras. Math.*, **3** (1954), 57—123. (Есть русский перевод: сб. *Математика*, **2** : **3** (1958), 81—127.)
7*. La theorie de Fredholm, *Bull. Soc. Math. France*, **84** (1958), 319—384. (Есть русский перевод: сб. *Математика*, **2** : **5** (1958), 51—103.)

Гуднер (Goodner D. B.)
1. Projections in normed linear spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **69** (1950), 89—108.

Гурвиц (Hurwitz W. A.), см. Джиллеспи

Гуревич Л. А.
1. О базисе безусловной сходимости, *УМН*, **8** : **5** (57), (1953), 153—156.

Гуревич У. (Hurewicz W.)
1. Ergodic theorems without invariant measure, *Ann. of Math.* (2), **45** (1944), 192—206.

Гуревич и Волмэн (Hurewicz W., Wallman H.)
1. Теория размерности, М., ИЛ, 1948 (1941).

Дайнс (Dines L. L.), см. Московиц

Далецкий Ю. Л.
1*. Фундаментальные решения операторного уравнения и континуальные интегралы, *Изв. выс. уч. зав.*, № 3 (1961), 27—48.

Данем (Dunham J. L.)
1. The Wentzel — Brillouin — Kramers method of solving the wave equation, *Phys. Rev.*, **41** (1932), 713—720.
2. The energy levels of a rotating vibrator, *Phys. Rev.*, **41** (1932), 721—731.

Даниель (Daniell P. J.)
1. A general form of integral, *Ann. of Math.* (2), **19** (1917—1918), 279—294.

Данфорд (Dunford N.), см. также Бартл и Коэн Л.
1. Uniformity in linear spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **44** (1938), 305—356.
2. Direct decompositions of Banach spaces, *Bol. Soc. Mat. Mexicana*, **3** (1946), 1—12.
3. An individual ergodic theorem for non-commutative transformations, *Acta Sci. Math. Szeged*, **14** (1951), 1—4.
4. Integration in general analysis, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **37** (1935), 441—453.
5. On continuous mappings, *Ann. of Math.* (2), **41** (1940), 639—661.
6. Spectral theory, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **49** (1943), 637—651.
7. Spectral theory I, Convergence to projections, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **54** (1943), 185—217.
8. Integration and linear operations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **40** (1936), 474—494.
9. A mean ergodic theorem, *Duke Math. J.*, **5** (1939), 635—646.
10. On a theorem of Plessner, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **41** (1935), 356—358.
11. An ergodic theorem for *n*-parameter groups, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **25** (1939), 195—196.
12. On one parameter groups of linear transformations, *Ann. of Math.* (2), **39** (1938), 569—573.
13. Resolution of the identity for commutative B^*-algebras of operators, *Acta Sci. Math. Szeged*, 12 Pars B (1950), 51—56.
14. Spectral theory in abstract spaces and Banach algebras, Proc. Symposium on Spectral Theory and Differential Problems (1951), 1—65. Oklahoma Agricultural and Mechanical College, Stillwater, Oklahoma.

15. Spectral theory, Proc. Symposium on Spectral Theory etc. (1951), 203—208.
16. The reduction problem in spectral theory, Proc. International Congress Math., Cambridge, Mass., 1950, Vol. 2, 115—122.
17. Spectral theory. II. Resolutions of the identity, *Pacific J. Math.*, **2** (1952), 559—614.
18. Spectral operators, *Pacific J. Math.*, **4** (1954), 321—354.
19*. A survey of the theory of spectral operators, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **64**, No. 5 (1958), 217—274. (Есть русский перевод: сб. *Математика*, **4 : 1** (1960), 53—100.)

Данфорд и Миллер (Dunford N., Miller D. S.)
1. On the ergodic theorem, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **60** (1946), 538—549.

Данфорд и Морс (Dunford N., Morse A. P.)
1. Remarks on the preceding paper of James A. Clarkson, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **40** (1936), 415—420.

Данфорд и Петтис (Dunford N., Pettis B. J.)
1. Linear operations on summable functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **47** (1940), 323—392.

Данфорд и Сигал (Dunford N., Segal I. E.)
1. Semi-groups of operators and the Weierstrass theorem, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **52** (1946), 911—914.

Данфорд и Стоун (Dunford N., Stone M. H.)
1. On the representation theorem for Boolean algebras, *Revista Ci.*, *Lima*, **43** (1941), 447—453.

Данфорд и Тамаркин (Dunford N., Tamarkin J. D.)
1. A principle of Jessen and general Fubini theorems, *Duke Math. J.*, **8** (1941), 743—749.

Данфорд и Шварц (Dunford N., Schwartz J.)
1. Convergence almost everywhere of operator averages, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **41** (1955), 229—231.
2. Convergence almost everywhere of operator averages, *J. Rational Mech. and Anal.*, **5** (1956), 129—178.

Данциг (van Dantzig D.)
1. Zur topologischen Algebra, I. *Math. Ann.*, **107** (1932), 587—626.
2. Einige Sätze über topologische Gruppen, *Jber Deutsch. Math. Verein.*, **41** (1932), 42—44.

Дарбу (Darboux G.)
1. Leçons sur la théorie générale des surfaces (2 ed.), Paris, Gauthier-Villars, 1914.

Даукер (Dowker Y. N.)
1. Finite and σ-finite invariant measures, *Ann. of Math.* (2), **54** (1951), 595—608.
2. A new proof of the general ergodic theorem, *Acta Sci. Math. Szeged*, 12 Pars B (1950), 162—166.
3. A note on the ergodic theorem, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **55** (1949), 379—383.

Дворецкий и Роджерс (Dvoretzky A., Rogers C. A.)
1. Absolute and unconditional convergence in normed linear spaces, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **36** (1950), 192—197.

Девинац, Нусбаум и Дж. Нейман (Devinatz A., Nussbaum A. E., von Neumann J.)
1. On the permutability of self-adjoint operators, *Ann. of Math.* (2), **62** (1955), 199—203.

Дейвис Г. (Davis H. T.)
1. The theory of linear operators, Principia Press, Bloomington, Indiana, 1936.

Дейвис Р. (Davies R.)

1. Expansions in series of non-orthogonal eigenfunctions, *Industr. Math.*, **4** (1953), 9—16.

Джеймс (James R. C.)

1. Orthogonality in normed linear spaces, *Duke Math. J.*, **12** (1945), 291—302.
2. Orthogonality and linear functionals in normed linear spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **61** (1947), 265—292.
3. Inner products in normed linear spaces, *Bull. Amer. Math. Soc..*, **53** (1947), 559—566.
4. Bases and reflexivity of Banach spaces, *Ann. of Math.* (2), **52** (1950), 518—527.
5. A non-reflexive Banach space isometric with its second conjugate space, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **37** (1951), 174—177.

Джекобсон (Jacobson N.)

1. Lectures in abstract algebra. I. Basic Concepts. II. Linear algebras. D. van Nostrand, New York, 1951, 1953.

Джексон (Jackson D.)

1. Algebraic properties of self-adjoint systems, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **17** (1916), 418—424.

Джемисон (Jamison S. L.)

1. Perturbation of normal operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **5** (1954), 103—110.
2. On analytic normal operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **5** (1954), 288—290.

Джерисон (Jerison M.)

1. Characterizations of certain spaces of continuous functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **70** (1951), 103—113.
2. A property of extreme points of compact convex sets, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **5** (1954), 782—783.

Джиллеспи и Гурвиц (Gillespie D. C., Hurwitz W. A.)

1. On sequences of continuous functions having continuous limits, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **32** (1930), 527—543.

Джон (John F.)

1. The fundamental solution of linear elliptic differential equations with analytic coefficients, *Comm. Pure Appl. Math.*, **3** (1950), 273—304.
2. General properties of solutions of linear elliptic partial differential equations, Proc. Symposium Spectral Theory and Differential Problems, 113—175. Oklahoma Agricultural and Mechanical College, Stillwater, Oklahoma, 1951.

Джорджи (Giorgi G.)

1. Nuove osservazioni sulle funzioni delle matrici, *Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* (6), **8** (1928), 3—8.

Диксмье (Dixmier J.)

1. Les moyennes invariantes dans les semi-groupes et leurs applications, *Acta Sci. Math. Szeged* 12 Pars A (1950), 213—227.
2. Les fonctionnelles linéaires sur l'ensemble des opérateurs bornés d'un espace de Hilbert, *Ann. of Math.* (2), **51** (1950), 387—408.
3. Sur certains espaces considérés par M. H. Stone, *Summa Brasil. Math.*, **2** (1951), 151—182.
4. Sur un théorème de Banach, *Duke Math. J.*, **15** (1948), 1057—1071.
5. Les algébres d'opérateurs dans l'espace hilbertien, Gauthiers-Villars, Paris, 1957.
6. Sur une inégalité de E. Heinz, *Math. Ann.*, **126** (1953), 75—78.
7. Sur les bases orthonormales dans les espaces préhilbertiens, *Acta Sci. Math. Szeged,* **15** (1953), 29—30.

Диксон (Dixon A. C.)
1. On a class of expansions in oscillating functions, *Proc. London Math. Soc.* (2), **3** (1905), 83—103.
Дини (Dini U.)
1. Fonamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali, Pisa (1878).
Дирак (Dirac P. A. M.)
1. Основы квантовой механики, М., Гостехиздат, 1960 (1935).
Диткин В. А.
1. Исследование строения идеалов в некоторых нормированных кольцах, *Учен. Зап. МГУ*, **30** (1939), 83—130.
Дойль (Doyle T. C.)
1. Invariant theory of general ordinary, linear, homogenous, second order differential boundary problems, *Duke Math. J.*, **17** (1950), 249—261.
Доногю и Смит (Donoghue W. F., Smith K. T.)
1. On the symmetry and bounded closure of locally convex spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **73** (1952), 321—344.
Дородницын А. А.
1. Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка, *УМН*, **7**, вып. 6 (52), (1952), 3—96.
Дрезден (Dresden A.)
1. Solid analytical geometry and determinants, H. Holt Co., New York, 1930.
Дуб (Doob J. L.), см. также Купмен
1. The law of large numbers for continuous stochastic processes, *Duke Math. J.*, **6** (1940), 290—306.
2. Stochastic processes with an integral-valued parameter, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **44** (1938), 87—150.
3. Asymptotic properties of Markoff transition probabilities, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **63** (1948), 393—421.
4. Вероятностные процессы, М., ИЛ, 1956 (1953).
Дубровский В. М.
1. О некоторых свойствах вполне аддитивных функций множества и их применении к обобщению одной теоремы Лебега, *Матем. сб.*, **20** (62), (1947), 317—330.
2. О базисе семейства вполне аддитивных функций множества и о свойствах равномерной аддитивности и равностепенной непрерывности, *ДАН СССР*, **58** (1947), 737—740.
3. О свойствах абсолютной непрерывности и равностепенной непрерывности, *ДАН СССР*, **63** (1948), 483—486.
4. О равностепенно суммируемых функциях и о свойствах равномерной аддитивности и равностепенной непрерывности семейства вполне аддитивных функций множества, *Изв. АН СССР*, сер. матем., **13** (1949), 341—356.
5. О свойстве равностепенной непрерывности семейства вполне аддитивных функций множества относительно собственного и несобственного базисов, *ДАН СССР*, **76** (1951), 333—336.
6. Об одном свойстве формулы Никодима, *ДАН СССР*, **85** (1952), 693—696.
7. О некоторых условиях компактности, *Изв. АН СССР*, сер. матем., **12** (1948), 397—410.
Дугунджи (Dugundji J.)
1. An extension of Tietze's theorem, *Pacific J. Math.*, **1** (1951), 353—367.
Дьёдонне (Dieudonné J.)
1. Sur le théorème de Hahn — Banach, *Rev. Sci.*, **79** (1941), 642—643.

2. Sur la séparation des ensembles convexes dans un espace de Banach, *Rev. Sci.*, **81** (1943), 277—278.
3. La dualité dans les espaces vectoriels topologiques, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (3), **59** (1942), 107—139.
4. Sur le théorème de Lebesgue — Nikodým, *Ann. of Math.* (2), **42** (1941), 547—555.
5. Sur le théorème de Lebesgue — Nikodym, II, *Bull. Soc. Math. France*, **72** (1944), 193—239; исправ. там же, **74** (1946), 66—68.
6. Complex structures on real Banach spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **3** (1952), 162—164.
7. Sur les espaces de Köthe, *J. Analyse Math.*, **1** (1951), 81—115.
8. Natural homomorphisms in Banach spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **1** (1950), 54—59.
9. Sur le théorème de Lebesgue — Nikodým, IV, *J. Indian Math. Soc.* (*N.S.*), **15** (1951), 77—86.
10. Sur le théorème de Lebesgue — Nikodým, V, *Canadian J. Math.*, **3** (1951), 129—139.
11. Sur la convergence des suites de mesures de Radon, *Anais Acad. Brasil. Ci.*, **23** (1951), 21—38, 277—282.
12. Sur un théorème de Jessen, *Fund. Math.*, **37** (1950), 242—248.
13. Recent developments in the theory of locally convex vector spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **59** (1953), 495—512.
14. Sur le théorème de Lebesgue — Nikodým, III, *Ann. Inst. Fourier Grenoble*, **23** (1947—1948), 25—53.
15. Sur un théorème de Šmulian, *Arch. Math.*, **3** (1952), 436—440.
16. On biorthogonal systems, *Michigan Math. J.*, **2** (1954), 7—20. [Есть русский перевод: сб. *Математика*, **3 : 4** (1959), 133—145.]
17. Sur le produit de composition, *Compositio Math.*, **12** (1954), 17—34.
18. Bounded sets in (*F*)-spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **6** (1955), 729—731.
19. Sur la bicommutante d'une algèbre d'opérateurs, *Portugaliae Math.*, **14** (1955), 35—38.
20. Sur la théorie spectrale, *J. Math. Pures Appl.* (9) **35**, (1956), 175—187.
21. Champs de vecteurs non localement triviaux, *Archiv des Math.*, **7** (1956), 6—10.

Дьёдонне и Гомес (Dieudonné J., Gomes A. P.)

1. Sur certains espaces vectoriels topologiques, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **230** (1950), 1129—1130.

Дьёдонне и Шварц (Dieudonné J., Schwartz L.)

1. La dualité dans les espaces (*F*) et (*LF*), *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, **1** (1950), 61—101. [Есть русский перевод: сб. *Математика*, **2 : 2** (1958), 77—117.]

Дынкин Е. Б.

1*. Марковские процессы и связанные с ними задачи анализа, *УМН*, 15 : 2 (1960), 3—24.

Дэй (Day M. M.)

1. The space L^p with $0 < p < 1$, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **46** (1940), 816—823.
2. A property of Banach spaces, *Duke Math. J.*, **8** (1941), 763—770.
3. Reflexive Banach spaces not isomorphic to uniformly convex spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **47** (1941), 313—317.
4. Some more uniformly convex spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **47** (1941), 504—517.
5. Uniform convexity, III, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **49** (1943), 745—750.
6. Uniform convexity in factor and conjugate spaces, *Ann. of Math.*, **45** (1944), 375—385.
7. Some characterizations of inner-product spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **62** (1947), 320—337.

8. Means for the bounded functions and ergodicity of the bounded representations of semi-groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **69** (1950), 276—291.
9. Operations in Banach spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **51** (1942), 583—608.
10. Ergodic theorems for abelian semi-groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **51** (1942), 399—412.
11. Strict convexity and smoothness of normed spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **78** (1955), 516—528.
12*. Линейные нормированные пространства, М., ИЛ., 1961.

Жордан (Jordan G.)
1. Sur la série de Fourier, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **92** (1881), 228—230.

Жюлиа (Julia G.)
1. Sur les racines carrées hermitiennes d'un opérateur hermitien positif donné, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **222** (1946), 707—709.
2. Remarques sur les racines carrées hermitiennes d'un opérateur hermitien positif borné, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **222** (1946), 829—832.
3. Sur la representation spectrale des racines hermitiennes d'un opérateur hermitien positif donné, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **222** (1946), 1019—1022.
4. Sur les racines carrées self-adjoint d'un opérateur self-adjoint positif non borné, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **222** (1946), 1061—1063.
5. Sur les racines $n^{\text{ièmes}}$ hermitiennes d'un opérateur hermitien donné, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **222** (1946), 1465—1468.
6. Détermination de toutes les racines carrées d'un opérateur hermitien borné quelconque, I, II.
   I. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **227** (1948), 792—794.
   II. Там же, **227** (1948), 931—933.
7. Introduction mathématique aux théories quantiques, Paris, 1938.

Заанен (Zaanen A. C.), см. также Виссер
1. On a certain class of Banach spaces, *Ann. of Math.* (2), **47** (1946), 654—666.
2. Integral transformations and their resolvents in Orlicz and Lebesgue spaces, *Compositio Math.*, **10** (1952), 56—94.
3. Nomalisable transformations in Hilbert space and systems of linear integral equations, *Acta Math.*, **83** (1950), 197—248.
4. Note on a certain class of Banach spaces, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.*, **52** (1949), 488—499.
5. Linear analysis, P. Noordhoff, Groningen, and Interscience Pub., New York, 1953.
6. Characterization of a certain class of linear transformations in an arbitrary Banach space, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.*, Ser. A, **54** (1951), 87—93.
7. Über vollstetige symmetrische und symmetrisierbare Operatoren, *Nieuw Arch. Wiskunde* (2), **22** (1943), 57—80.
8. On the theory of linear integral equations, I, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.*, **49** (1946), 194—204.
9. On linear functional equations, *Nieuw Arch. Wiskudne* (2), **22** (1948), 269—282.

Зальцвассер (Zalcwasser Z.)
1. Sur une propriété du champ des fonctions continues, *Studia Math.*, **2** (1930), 63—67.

Зейдель (Seidel Ph. L.)
1. Note über eine Eigenschaft der Reihen, welche discontinuierliche Functionen darstellen, *Abhandlungen der Bayerischen Akad. der Wiss. München*, **5** (1847—1848), 379—393.

З е й ф е р т (S e i f e r t G.)
1. A third order boundary value problem arising in aeroelastic wing theory, *Quart. Appl. Math.*, **9** (1951), 210—218.
2. A third order irregular boundary value problem and the associated series, *Pacific J. Math.*, **2** (1952), 395—406.
З е й ц (S e i t z F.)
1. The modern theory of solids, New York, 1940.
З и г м у н д (Z y g m u n d A.), см. также К а л ь д е р о н, П э л и, С а л е м и Т а м а р к и н
1. Тригонометрические ряды, 2 изд., «Мир», М., 1965, (1959).
2. An individual ergodic theorem for non-commutative transformations, *Acta Sci. Math. Szeged*, **14** (1951), 103—110.
3. On a theorem of Paley, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **34** (1938), 125—133.
4. On the convergence and summability of power series on the circle of convergence (I), *Fund. Math.*, **30** (1938), 171—196.
З и л ь б е р ш т е й н (S i l b e r s t e i n J. P. O.)
1. On eigenvalues and singular values of compact linear operators in Hilbert space, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **49** (1953), 201—212.
И в а т а (I w a t a G.)
1. Non-hermitian operator and eigenfunction expansions, *Progress Theoret. Phys.*, **6** (1951), 216—226.
И д з у м и (I z u m i S.)
1. On the bilinear functionals, *Tôhoku Math. J.*, **42** (1936), 195—209.
2. On the compactness of a class of functions, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **15** (1939), 111—113.
3. Lebesgue integral in the abstract space, *Jap. J. Math.*, **13** (1936), 501—513.
4. Notes on Banach space, I. Differentiation of abstract functions, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **18** (1942), 127—130.
И д з у м и и С у н о у т и (I z u m i S., S u n o u c h i G.)
1. Notes on Banach space (VI): Abstract integrals and linear operations, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **19** (1943), 169—173.
И й е р (I y e r V. G.)
1. On the space of integral functions, I—III.
I. *J. Indian Math. Soc.* (2), **12** (1948), 13—30.
II. *Quart. J. Math. (Oxford)* (2), **1** (1950), 86—96.
III. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **3** (1952), 874—883.
И н а б а (I n a b a M.)
1. A theorem on fixed points and its application to the theory of differential equations, *Kumamoto J. Sci.*, Ser. A, **1**, № 1 (1952), 13—16.
И н г л т о н (I n g l e t o n A. W.)
1. The Hahn — Banach theorem for non-Archimedean valued fields, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **48** (1952), 41—45.
И н ф е л ь д (I n f e l d L.)
1. On a new treatment of some eigenvalue problems, *Phys. Rev.* (2), **59** (1941), 737—747.
И н ф е л ь д и Х а л (I n f e l d L., H u l l T. E.)
1. The factorization method, *Rev. Mod. Phys.*, **23** (1951), 21—68.
И о н е с к у (I o n e s c u T u l c e a C. T.)
1. Spatii Hilberti, Editura Acad. Rep. Populare Romane, 1956.
И о н е с к у и М а р и н е с к у (I o n e s c u T u l c e a C. T., M a r i n e s c u G.)
1. Théorie ergodique pour des classes d'opérations non complètement continues, *Ann. of Math.* (2), **52** (1950), 140—147.
И о с и д а (Y o s i d a K.)
1. On vector lattices with a unit, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **17** (1941), 121—124.

2. Vector lattices and additive set functions, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **17** (1941), 228—232.
3. On the unitary equivalence in general Euclidean space, *Proc. Japan Acad.*, **22** (1946), 242—245.
4. Mean ergodic theorem in Banach spaces, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **14** (1938), 292—294.
5. Ergodic theorems of Birkhoff — Khintchine's type, *Jap. J. Math.*, **17** (1940), 31—36.
6. An abstract treatment of the individual ergodic theorem, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **16** (1940), 280—284.
7. On the group embedded in the metrical complete ring, *Jap. J. Math.*, **13** (1936), 7—26.
8. On the differentiability and the representation of one-parameter semi-groups of linear operators, *J. Math. Soc. Japan*, **1** (1948), 15—21.
9. The Markoff process with a stable distribution, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **16** (1940), 43—48.
10. On Titchmarsh — Kodaira's formula concerning Weyl — Stone's eigenfunction expansion, *Nagoya Math. J.*, **1** (1950), 49—58. Исправ. там же, **6** (1953), 187—188.
11. On the theory of spectra, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **16** (1940), 378—383.
12. Normed rings and spectral theorems, I—VI.
    I. *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **19** (1943), 356—359.
    II. Там же, **19** (1943), 466—470.
    III. Там же, **20** (1944), 71—73.
    IV. Там же, **20** (1944), 183—185.
    V. Там же, **20** (1944), 269—273.
    VI. Там же, **20**, (1944), 451—453.

Иосида и Какутани (Yosida K., Kakutani S.)
1. Birkhoff's ergodic theorem and the maximal ergodic theorem, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **15** (1939), 165—168.
2. Operator-theoretical treatment of Markoff process and mean ergodic theorem, *Ann. of Math.* (2), **42** (1941), 188—228.

Иосида, Мимура и Какутани (Yosida K., Mimura Y., Kakutani S.)
1. Integral operator with bounded kernel, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **14** (1938), 359—362.

Иосида и Накаяма (Yosida K., Nakayama T.)
1. On the semi-ordered ring and its application to the spectral theorem, I, II.
   I. *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **18** (1942), 555—560.
   II. Там же, **19** (1943), 144—147.

Иосида и Фукамия (Yosida K., Fukamiya M.)
1. On regularly convex sets, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **17** (1941), 49—52.

Иосида и Хьюит (Yosida K., Hewitt E.)
1. Finitely additive measures, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **72** (1952), 46—66.

Исмагилов Р. С.
1*. Самосопряженные расширения системы коммутирующих операторов, *ДАН СССР*, **133**, 3 (1960), 511—514.

Йессен (Jessen B.). См. также Спарре Андерсен
1. The theory of integration in a space of an infinite number of dimensions, *Acta Math.*, **63** (1934), 249—323.
2. Bidrag til Integralteorien for Funktioner af unendlig mange Variable, Copenhagen, 1930.

Йордан и Дж. Нейман (Jordan P., von Neumann J.)
1. On inner products in linear, metric spaces, *Ann. of Math.* (2), **36** (1935), 719—723.

Й о с т (J o s t R.), см. также Н ь ю т о н
1. Bemerkungen zur mathematischen Theorie der Zähler, *Helvetica Phys. Acta*, **20** (1947), 173—182.
Й о с т и К о н (J o s t R., K o h n W.)
1. Construction of a potential from a phase shift, *Phys. Rev.*, **87** (1952), 977—992.
Й о с т и П е й с (J o s t R., P a i s A.)
1. On the scattering of a particle by a static potential, *Phys. Rev.*, **82** (1951), 840—851.
К а д е ц М. И.
1*. Точное значение постоянной Палея—Винера, *ДАН СССР*, **155** (6), (1964), 1253—1254.
К а к у т а н и (K a k u t a n i S.), см. также А н д з а и, Б о н е н б л у с т и И о с и д а
1. Ein Beweis des Satzes von M. Eidelheit über konvexe Mengen, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **13** (1937), 93—94.
2. Weak topology and regularity of Banach spaces, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **15** (1939), 169—173.
3. Weak topology, bicompact set and the principle of duality, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **16** (1940), 63—67.
4. Two fixed-point theorems concerning bicompact convex sets, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **14** (1938), 242—245.
5. Topological properties of the unit sphere of a Hilbert space, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **19** (1943), 269—271.
6. Some characterizations of Euclidean spaces, *Jap. J. Math.*, **16** (1939), 93—97.
7. Mean ergodic theorems in abstract (L)-spaces, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **15** (1939), 121—123.
8. Concrete representation of abstract (L)-spaces and the mean ergodic theorem, *Ann. of Math.* (2), **42** (1941), 523—537.
9. Concrete representation of abstract (M)-spaces. (A characterization of the space of continuous functions), *Ann. of Math.* (2), **42** (1941), 994—1024.
10. Ergodic theory, Proc. International Congress Math., Cambridge, Mass., **2** (1950), 128—142.
11. A proof of Schauder's theorem, *J. Math. Soc. Japan*, **3** (1951), 228—231.
12. Über die Metrisation der topologischen Gruppen, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **12** (1936), 82—84.
13. Iteration of linear operations in complex Banach spaces, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **14** (1938), 295—300.
14. Notes on infinite product measure spaces, I, II.
I. *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **19** (1943), 148—151.
II. Там же, **19** (1943), 184—188.
15. An example concerning uniform boundedness of spectral measures, *Pacific J. Math.*, **4** (1954), 363—372.
16. Ergodic theorems and the Markoff process with a stable distribution, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **16** (1940), 49—54.
17. On the uniqueness of Haar's measure, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **14** (1938), 27—31.
18. A proof of the uniqueness of Haar's measure, *Ann. of Math.* (2), **49** (1948), 225—226.
19. On the uniform ergodic theorem concerning real linear operations, *Jap. J. Math.*, **17** (1940), 5—12.
20. Some results in the operator-theoretical treatment of the Markoff process, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **15** (1939), 260—264.

21. Simultaneous extension of continuous functions considered as a positive linear operation, *Jap. J. Math.*, **17** (1940), 1—4.
22. Weak convergence in uniformly convex spaces, *Tôhoku Math. J.*, **45** (1938), 188—193.
23. Rings of analytic functions. Lectures on functions of a complex variable, pp. 71—83, Ann Arbor, 1955.

Какатуни и Кодаира (Kakutani S., Kodaira K.)
1. Über das Haarsche Mass in der lokal bikompakten Gruppe, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **20** (1944), 444—450.

Какутани и Макки (Kakutani S., Mackey G. W.)
1. Two characterizations of real Hilbert space, *Ann. of Math.* (2), **45** (1944), 50—58.

Калкин (Calkin J. W.)
1. Abstract symmetric boundary conditions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **45** (1939), 369—442.
2. Two sided ideals and congruences in the ring of bounded operators in Hilbert space, *Ann. of Math.* (2), **42** (1941), 839—873.
3. Symmetric transformations in Hilbert space, *Duke J. Math.*, **7** (1940), 504—508.

Каллер (Kuller R. G.)
1. Locally convex topological vector lattices and their representations, Dissertation, Univ. of Michigan, 1955.

Кальдерон (Calderón A. P.)
1. A general ergodic theorem, *Ann. of Math.* (2), **58** (1953), 182—191.

Кальдерон и Зигмунд (Calderón A. P., Zygmund A.)
1. A note on the interpolation of linear operations, *Studia Math.*, **12** (1951), 194—204.
2. On the theorem of Hausdorff — Young and its applications. Contributions to Fourier Analysis, 166—188. Ann. of Math. Studies, № 25, Princeton Univ. Press (1950).
3. A note on the interpolation of sublinear operations, *Amer. J. Math.*, **78** (1956), 282—288.
4. On the existence of certain singular integrals, *Acta Math.*, **88** (1952), 85—139.
5. On singular integrals, *Amer. J. Math.*, **78** (1956), 289—309.
6. Algebras of certain singular operators, *Amer. J. Math.*, **78** (1956), 310—320.

Камерон (Cameron R. H.)
1. A «Simpson's Rule» for the numerical evaluation of Wiener's integrals in function space, *Duke Math. J.*, **18** (1951), 111—130.
2. The first variation of an indefinite Wiener integral, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **2** (1951), 914—924.
3. The generalized heat flow equation and a corresponding Poisson formula, *Ann. of Math.* (2), **59** (1954), 434—462. [Есть русский перевод: сб. *Математика*, **2 : 1** (1958), 101—130.]
4. Some examples of Fourier — Wiener transforms of analytic functionals, *Duke Math. J.*, **12** (1945), 485—488.
5. The translation pathology of Wiener space, *Duke Math. J.*, **21** (1954), 623—627.

Камерон и Грейвс (Cameron R. H., Graves R. E.)
1. Additive functionals on a space of continuous functions. I, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **70** (1951), 160—176.

Камерон, Линдгрен и Мартин (Cameron R. H., Lindgren B. W., Martin W. T.)
1. Linearization of certain non-linear functional equations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **3** (1952), 138—143.

Камерон и Мартин (Cameron R. H., Martin W. T.)
1. An expression for the solution of a class of non-linear integral equations, *Amer. J. Math.*, **66** (1944), 281—298.
2. The orthogonal development of non-linear functionals in series of Fourier — Hermite functionals, *Ann. of Math.* (2), **48** (1947), 385—392.
3. The transformation of Wiener integrals by non-linear transformations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **66** (1949), 253—283.
4. Non-linear integral equations, *Ann. of Math.* (2), **51** (1950), 629—642.
5. Transformations of Wiener integrals under a general class of linear transformations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **58** (1945), 184—219.
6. Evaluation of various Wiener integrals by use of Sturm — Liouville differential equations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **51** (1945), 73—90.
7. Transformations of Wiener integrals under translations, *Ann. of Math.* (2), **45** (1944), 386—396.
8. The Wiener measure of Hilbert neighborhoods in the space of real continuous functions, *J. Math. Phys. Mass. Inst. Tech.*, **23** (1944), 195—209.
9. Fourier-Wiener transforms of analytic functionals, *Duke Math. J.*, **12** (1945), 489—507.

Камерон и Фейган (Cameron R. H., Fagan R. E.)
1. Non-linear transformations of Volterra type in Wiener space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **75** (1953), 552—575.

Камерон и Хетфилд (Cameron R. H., Hatfield C.)
1. Summability of certain orthogonal developments of non-linear functionals, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **55** (1949), 130—145.
2. Summability of certain series for unbounded non-linear functionals, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **4** (1953), 375—387.

Камерон и Шапиро (Cameron R. H., Shapiro J. M.)
1. Non-linear integral equations, *Ann of Math.* (2), **62** (1955), 472—497.

Камке (Kamke E.)
1. Mengenlehre, W. de Gruyter, Berlin and Leipzig, 1928.
2. Neue Herleitung der Oszillationssätze für die linearen selbstadjugierten Randwertaufgaben zweiter Ordnung, *Math. Zeit.*, **44** (1938), 635—658.

Кампен (van Kampen E. R.)
1. Locally bicompact groups and their character groups, *Ann. of Math.* (2), **36** (1935), 448—463.

Канторович Л. В., см. также Фихтенгольц Г. М.
1. Lineare halbgeordnete Räume, *Матем. сб.*, **2** (44), (1937), 121—168.
2. The method of successive approximations for functional equations, *Acta Math.*, **71** (1939), 63—97.
3. Linear operations in semi-ordered spaces, I, *Матем. сб.*, **7** (49), (1940), 209—284.
4. Общие формы некоторых классов линейных операций, *ДАН СССР*, **12** (1936), 101—106.

Канторович Л. В. и Вулих Б. З.
1. Sur la représentation des opérations linéaires, *Compositio Math.*, **5** (1938), 119—165.
2. Sur un théorzème de M. N. Dunford, *Compositio Math.*, **5** (1938), 430—432.

Канторович Л. В., Вулих Б. З. и Пинскер А. Г.
1. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, Гостехиздат, М.—Л., 1950.
2. Полуупорядоченные группы и линейные полуупорядоченные пространства, *УМН*, **6** : **3** (43), (1951), 31—98.

Капланский (Kaplansky I.), см. также Аренс
1. The structure of certain operator algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **70** (1951), 219—255.

2. Weierstrass theorem in fields with valuations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **1** (1950), 356—357.
3. Lattices of continuous functions, I, II.
I. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **53** (1947), 617—623.
II. *Amer. J. Math.*, **70** (1948), 626—634.
4. Topological rings, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **54** (1948), 809—826.
5. Primary ideals in group algebras, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **35** (1949), 133—136.
6. Products of normal operators, *Duke Math. J.*, **20** (1953), 257—260.
7. A theorem on rings of operators, *Pacific J. Math.*, **1** (1951), 227—232.

Карасева Т. М.
1. Об обратной задаче Штурма — Лиувилля для неэрмитова оператора, *Матем. сб.*, **32** (74), (1953), 477—484.

Каратеодори (Carathéodory C.)
1. Vorlesungen über reelle Funktionen. 2-е изд., Teubner, Leipzig, 1927. 1-е изд., Teubner, Berlin und Leipzig, 1918.
2. Bemerkungen zur Riesz — Fischerschen Satz und zur Ergodentheorie, *Abh. Math. Sem. Hansischen Univ.*, **14** (1941), 351—389.

Карлеман (Carleman T.)
1. Sur les équations intégrales singulières à noyau réel et symétrique, Almquist and Wiksells, Uppsala, 1923.
2. Zur Theorie der linearen Integralgleichungen, *Math. Zeit.*, **9** (1921), 196—217.
3. Über die asymptotische Verteilung der Eigenwerte partiellen Differentialgleichungen, *Ber. Verh. Sachs. Akad. Wiss. Leipzig*, *Math.-Nat. Kl.*, 88 (1936), 119—132.

Карлин (Karlin S.)
1. Unconditional convergence in Banach spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **54** (1948), 148—152.
2. Bases in Banach spaces, *Duke Math. J.*, **15** (1948), 971—985.

Картан А. (Cartan H.)
1. Sur la mesure de Haar, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **211** (1940), 759—762.

Картан А. и Годман (Cartan H., Godement R.)
1. Théorie de la dualité et analyse harmonique dans les groupes abéliens localement compacts, *Ann. École Norm. Sup.*, **64** (1947), 79—99.

Картан Э. (Cartan É.)
1. Les groups réels simples finis et continus, *Ann. École Norm. Sup.*, Sér. 3, **31** (1914), 263—355.

Като (Kato T.)
1. On the convergence of the perturbation method, I, II.
I. *Progress Theoret. Physics*, **4** (1949), 514—523.
II. Там же, **5** (1950), 96—101, 207—212.
2. On the convergence of the perturbation method, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect.* I, **6** (1951), 145—226.
3. Perturbation theory of semi-bounded operators, *Math. Ann.*, **125** (1953), 435—447.
4. On the perturbation theory of closed linear operators, *J. Math. Soc. Japan*, **4** (1952), 323—337.
5. Notes on some inequalities for linear operators, *Math. Ann.*, **125** (1952), 208—212.
6. On some approximate methods concerning the operators T^*T, *Math. Ann.*, **126** (1953), 253—262.
7. On the semi-groups generated by Kolmogoroff's differential equations, *J. Math. Soc. Japan*, **6** (1954), 1—15.
8. On the upper and lower bounds of eigenvalues, *J. Phys. Soc. Japan*, **4** (1949), 334—339.

9*. Integration of the equation of evolution in a Banach space, *J. Math. Soc. Japan*, **5** (1953), 208—234. (Есть русский перевод: сб. *Математика*, **2** : **4** (1958), 117—135.)

Кафиеро (Cafiero F.)

1. Criteri di compattezza per le successioni di funzioni generalmente a variazione limitata, I, II.
   I. *Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Math. Nat.* (8), (1950), 305—311.
   II. Там же (8), **8** (1950), 450—457.
2. Sugli insiemi compatti di funzioni misurabili negli spazi astratti, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **20** (1951), 48—58.
3. Sulle famiglie di funzioni additive d'insieme, uniformemente continue, *Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* (8), **12** (1952), 155—162.
4. Sul passaggio al limite sotto il segno d'integrale di Stieltjes — Lebesgue negli spazi astratti, con masse variabili con gli integrandi, I, II.
   I. *Atti. Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* (8), **14** (1953), 488—494.
   II. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **22** (1953), 223—245.
5. Sulle famiglie compatte di funzioni additive di insieme astratto, Atti del Quarto Congresso dell'Unione Mat. Italiana, Taormin, 1951, vol. II, pp. 30—40, Casa Editrice Perrella, Rome, 1953.

Кахан (Kahane J. P.), см. также Хельсон

1. Sur un théorème de Paul Malliavin, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **248** (1959), 2943—2944.
2. Sur un théorème de Wiener — Lévy, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **246** (1958), 1949—1951.

Кац И. С.

1. О гильбертовых пространствах, порождаемых монотонными эрмитовыми матрицами-функциями, Харьков, *Зап. мат. об-ва* (4), **22** (1950), 95—113.

Кац М. (Кас М.), см. также Эрдёш

1. On distributions of certain Wiener functionals, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **65** (1949), 1—13.
2. On the average of a certain Wiener functional and a related limit theorem in the calculus of probability, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **59** (1946), 401—414.
3. On some connections between probability theory and differential and integral equations, Proc. Second Berkeley Symposium Math. Statistics and Prob., (1951), 189—215. (Есть русский перевод: сб. *Математика*, **1** : **2** (1957), 95—124.)

Кацнельсон (Katznelson Y.)

1. Sur les fonctions opérant sur l'algèbre des séries de Fourier absolument convergentes, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **247** (1958), 404.

Качмаж и Штейнгауз (Kaczmarz S., Steinhaus H.)

1. Теория ортогональных рядов, М., Физматгиз, 1958 (1935).

Квигли (Quigley F. D.), см. Хельсон

Кей (Kay I.)

1. The inverse scattering problem, Div. Electromag. Res., Inst. Math. Sci., New York Univ., 1955.

Кей и Мозес (Kay I., Moses H. E.)

1. The determination of the scattering potential from the spectral measure function, I, *Nuovo Cimento* (10), **2** (1955), 917—961.
2. The determination of the scattering potential from the spectral measure function, I—III, Div. of Electromag. Res., Inst. Math. Sci., New York Univ., 1955.

Кейдисон (Kadison R. V.)
1. A representation theory for commutative topological algebra, Memoirs Amer. Math. Soc., № 7, 1951.
2. Isometries of operator algebras, *Ann. of Math.* (2), **54** (1951), 325—338.
Келдыш М. В.
1. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений, *ДАН СССР*, 77 (1951), 11—14.
Келли (Kelley J. L.), см. также Аренс и Фелл
1. Note on a theorem of Krein and Milman, *J. Osaka Inst. Sci. Tech.*, Part I, **3** (1951), 1—2.
2. Banach spaces with the extension property, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **72** (1952), 323—326.
3. The Tychonoff product theorem implies the axiom of choice, *Fund. Math.*, **37** (1950), 75—76.
4. Convergence in topology, *Duke Math. J.*, **17** (1950), 277—283.
5. General topology, D. van Nostrand, New York, 1955.
6. Commutative operator algebras, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **38** (1952), 598—605.
Келли и Вот (Kelley J. L., Vaught R. L.)
1. The positive cone in Banach algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **74** (1953), 44—55.
Келлог (Kellogg O. D.), см. Биркгоф Дж.
Кембл (Kemble E. C.)
1. A contribution to the theory of the B.W.K. method, *Phys. Rev.*, **48** (1935), 549—561.
2. Note on the Sturm — Liouville eigenvalue-eigenfunction problem with singular endpoints, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **19** (1933), 710—714.
3. The fundamental principles of quantum mechanics, New York, 1937.
Кемп (Camp B. H.)
1. Singular multiple integrals, with applications to series, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **14** (1913), 42—64.
Кернер (Kerner M.)
1. Abstract differential geometry, *Compositio Math.*, **4** (1937), 308—341.
2. Die Differentiale in der allgemeinen Analysis, *Ann. of Math.* (2), **34** (1933), 564—572.
Кёте (Köthe G.)
1. Die Teilräume eines linearen Koordinatenraumes, *Math. Ann.*, **114** (1937), 99—125.
2. Lösbarkeitsbedingungen für Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, *J. Reine Angew. Math.*, **178** (1938), 193—213.
3. Erweiterung von Linearfunktionen in linearen Räumen, *Math. Ann.*, **116** (1939), 719—732.
4. Die Quotienträume eines linearen vollkommenen Räumes, *Math. Z.*, **51** (1947), 17—55.
5. Die Stufenräume, eine einfache Klasse linearer vollkommenen Räume, *Math. Z.*, **51** (1948), 317—345.
6. Eine axiomatische Kennzeichnung der linearen Räume von Typus ω, *Math. Ann.*, **120** (1949), 634—649.
7. Über die Vollständigkeit einer Klasse lokalkonvexer Räume, *Math. Z.*, **52** (1950), 627—630.
8. Über zwei Sätze von Banach, *Math. Z.*, **53** (1950), 203—209.
9. Neubegründung der Theorie der vollkommenen Räume, *Math. Nachr.*, **4** (1951), 70—80.
10. Funktionalanalysis, Integraltransformationen. Naturforschung und Medizin in Deutschland, 1939—1946, Band 2, 85—98. Dieterich'sche Verlagsbuchhandlung, Wiesbaden, 1948.

Кёте и Теплиц (Köthe G., Toeplitz O.)

1. Lineare Räume mit unendlichvielen Koordinaten, *J. Reine Angew. Math.*, **171** (1934), 193—226.

Килпи (Kilpi Y.)

1. Über lineare normale Transformationen im Hilbertschen Raum, *Ann. Acad. Sci. Fennicae*, Ser. A 1, №. 154 (1953), 38.

Киносита (Kinoshita S.)

1. On essential components of the set of fixed points, *Osaka Math. J.*, **4** (1952), 19—22.

Кларксон (Clarkson J. A.), см. также Адамс

1. Uniformly convex spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **40** (1936), 396—414.
2. A characterization of *C*-spaces, *Ann. of Math.* (2), **48** (1947), 845—850.

Кларксон и Эрдёш (Clarkson J. A., Erdös P.)

1. Approximation by polynomials, *Duke Math. J.*, **10** (1943), 5—11.

Клейнекке (Kleinecke D. C.)

1. A generalization of complete continuity. Technical Report No. 3 to the Office of Ordinance Research, University of California, Berkeley (1954).
2. Degenerate perturbations. Technical Report No. 1 to the Office of Ordinance Research, University of California, Berkeley (1953).
3. Finite perturbations and the essential spectrum. Technical Report No. 4 to the Office of Ordinance Research, University of California, Berkeley (1954).

Кли (Klee V. L., Jr.)

1. The support property of a convex set in a linear normed space, *Duke Math. J.*, **15** (1948), 767—772.
2. Dense convex sets, *Duke Math. J.*, **16** (1949), 351—354.
3. Convex sets in linear spaces, *Duke Math. J.*, **18** (1951), 443—466.
4. Convex sets in linear spaces, II, *Duke Math. J.*, **18** (1951), 875—883.
5. Invariant extensions of linear functionals, *Pacific J. Math.*, **4** (1954), 37—46.
6. Invariant metrics in groups (Solution of a problem of Banach), *Proc. Amer. Math. Soc.*, **3** (1952), 484—487.
7. Some characterizations of reflexivity, *Revista Ci., Lima*, **52** (1950), 15—23.
8. Convex bodies and periodic homeomorphisms in Hilbert space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **74** (1953), 10—43.

Клиффорд (Clifford A. H.), см. Майкал

Кнезер (Kneser A.)

1. Untersuchungen über die reellen Nullstellen der Integrale linearer Differentialgleichungen, *Math. Ann.*, **42** (1893), 409—435.
2. Untersuchungen über die Darstellung willkürlicher Funktionen in der mathematischen Physik, *Math. Ann.*, **58** (1904), 81—147.
3. Beiträge zur Theorie der Sturm — Liouvilleschen Darstellung willkürlicher Funktionen, *Math. Ann.*, **60** (1905), 402—423.
4. Die Theorie der Integralgleichungen und die Darstellung willkürlicher Funktionen in der mathematischen Physik, II, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl.* (1906), 213—252.

Кнопп (Knopp K.)

1. Theory of functions, I, II. Dover Publications, New York, 1945, 1947.

Кобер (Kober H. A.)

1. A theorem on Banach spaces, *Compositio Math.*, **7** (1939), 135—140.

Ковалевский (Kowalewski G.)

1. Einführung in die Determinantentheorie. Second ed., W. de Gruyter, Berlin and Leipzig, 1925.

Кодаира (Kodaira K.), см. также Какутани
1. On ordinary differential equations of any even order and the corresponding eigenfunction expansions, *Amer. J. Math.*, **72** (1950), 502—544.
2. On some fundamental theorems in the theory of operators in Hilbert space, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **15** (1939), 207—210.
3. Über die Beziehung zwischen den Massen und den Topologien in einer Gruppe, *Proc. Phys.-Mat. Soc. Japan* (3), **23** (1941), 67—119.
4. The eigenvalue problem for ordinary differential equations of the second order and Heisenberg's theory of S-matrices, *Amer. J. Math.*, **71** (1949), 921—945.
5. On singular solutions of second order differential operators, I. II.
I. *Sūgaku*, **7** (1948), 177—191.
II. Там же, **2** (1948), 113—139.

Коддингтон (Coddington E. A.)
1. On the spectral representation of ordinary self-adjoint differential operators, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **38** (1952), 732—737.
2. The spectral representation of ordinary self-adjoint differential operators, *Ann. of Math.* (2), **60** (1954), 192—211.
3. A characterization of ordinary self-adjoint differential systems (abstract), *Bull. Amer. Math. Soc.*, **58** (1952), 42.
4. The spectral matrix and Green's function for singular self-adjoint boundary value problems, *Canadian J. Math.*, **6** (1954), 169—185.

Коддингтон и Левинсон (Coddington E. A., Levinson N.)
1. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, М., ИЛ, 1958 (1955).
2. On the nature of the spectrum of singular second order linear differential operators, *Canadian J. Math.*, **3** (1951), 335—338.
3. Perturbations of linear systems with constant coefficients possesing periodic solutions. Contribution to the theory of non-linear oscillations II, 19—35, Princeton, 1952.

Козлов В. Я.
1. О базисах в пространстве L_2 (0,1), *Матем. сб.*, **26** (68) (1950), 85—102.
2. О одном обобщении понятия базиса, *ДАН СССР*, **73** (1950), 643—646.

Коллац (Collatz L.)
1. Eigenwertprobleme und ihre numerische Behandlung, Akademischer Verlag, Leipzig, 1945.

Коллинз (Collins H. S.)
1. Completeness and compactness in linear topological spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **79** (1955), 256—280.

Колмогоров А. Н., см. также Гельфанд
1. Zur Normierbarkeit eines allgemeinen topologischen linearen Raumes, *Studia Math.*, **5** (1934), 29—33.
2. Über Kompaktheit der Funktionenmengen bei der Konvergenz im Mittel, *Nachr. Ges. Göttingen, Math.-Phys. Kl.* (1931), 60—63.
3*. О линейной размерности топологических векторных пространств, *ДАН СССР*, **120** (1958), 239—241.
4*. Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизмов пространств Лебега, *ДАН СССР*, **119** (1958), 861—864.
5*. Об энтропии на единицу времени как метрическом инварианте автоморфизмов, *ДАН СССР*, **124** (1959), 754—755.

Колмогоров А. Н. и Фомин С. В.
1*. Элементы функционального анализа, изд. МГУ, вып. 1, 1954; вып. 2, 1960.

Коматудзаки (Komatuzaki H.)
1. Sur les projections dans certains espaces du type (B), *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **16** (1940), 274—279.

2. Une remarque sur les projections dans certains espaces du type (*B*), *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **17** (1941), 238—240.

Кон (Kohn W.), см. Йост

Коосис (Koosis P.)

1. Sur un théorème remarquable de M. Malliavin, *C. R. Acad. Sci., Paris*, **249** (1959), 352—354.

Кордес (Cordes H. O.)

1. Separation des Variablen in Hilbertschen Räumen, *Math. Ann.*, **125** (1953), 401—434.
2. Der Entwicklungssatz nach Produkten bei singulären Eigenwertproblemen partieller Differentialgleichungen, die durch Separation zerfallen, *Nachr. Akad. Cöttingen, Math.-Phys. Kl.* (1954), 51—69.

Костюченко А. Г., см. также Гельфанд И. М.

1*. Асимптотическое распределение собственных значений эллиптических операторов, *ДАН СССР*, **158**, 1 (1964), 42—45.

2*. Асимптотика спектральной функции для сингулярного дифференциального оператора $2m$-порядка, *ДАН СССР*, **168** (1966), 276—279.

Костюченко А. Г. и Митягин Б. С.

1*. Многомерная проблема моментов, *ДАН СССР*, **131**, 6 (1960), 1249—1259

2*. Положительно определенные функционалы на ядерных пространствах, *Труды Моск. матем. об-ва*, **9** (1960), 29—88.

Костюченко А. Г. и Скороход А. В.

1. Об одной теореме Н. К. Бари, *УМН*, **8 : 5** (57), (1953), 165—166.

Котляр (Cotlar M.).

1. On a theorem of Beurling and Kaplansky, *Pacific J. Math.*, **4** (1954), 459—465.

Котляр и Рикабарра (Cotlar M., Ricabarra R. A.)

1. On transformations of sets and Koopman's operators, *Revista Unión Mat. Argentina*, **14** (1950), 232—254.

Коши (Cauchy A.)

1. Oeuvres, sér. I, t. 12, Gauthier-Villars, Paris, 1900.
2. Oeuvres, sér. II, t. 3, Gauthier-Villars, Paris, 1900.

Коэн И. (Cohen I. S.)

1. On non-Archimedean normed spaces, *Nederl. Akad. Wetensch., Proc.*, **51** (1948), 693—698.

Коэн Л. (Cohen L. W.)

1. Transformations on spaces of infinitely many dimensions, *Ann. of Math.* (2), **37** (1936), 326—335.
2. On the mean ergodic theorem, *Ann. of Math.* (2), **41** (1940), 505—509.

Коэн Л. и Данфорд (Cohen L. W., Dunford N.)

1. Transformations on sequence spaces, *Duke Math. J.*, **3** (1937), 689—701.

Крамер В. (Kramer V. A.)

1. Investigations in asymptotic perturbation series. Dissertation, Univ. of California at Berkeley, 1954.
2. Asymptotic inverse series, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **7** (1956), 429—437.

Крамер Г. (Kramer H. P.)

1. Perturbation of differential operators. Dissertation, Univ. of California at Berkeley, 1954.

Крамерс (Kramers H. A.)

1. Wellenmechanic und halbzahlige Quantisierung, *Zeitschrift für Phys.*, **39** (1926), 828—846.
2. Das Eigenwertproblem in eindimensional periodischen Kraftfelde, *Physica*, **2** (1935), 483—490.

Красносельский М. А., см. также Крейн М. Г.

1. О некоторых типах расширений эрмитовых операторов, *Укр. матем. ж.*, **2** (1950), 74—83.

2. О самосопряженных расширениях эрмитовых операторов, *Укр. матем. ж.*, **1** (1949), 21—38.
3. О дефектных числах замкнутых операторов, *ДАН СССР*, **56** (1947), 559—562.
4. О расширении эрмитовых операторов с неплотной областью определения, *ДАН СССР*, **59** (1948), 13—16.
5*. Положительные решения операторных уравнений, Физматгиз, М., 1962.

Красносельский М. А. и Рутицкий Я. Б.
1. К теории пространств Орлича, *ДАН СССР*, **81** (1951), 497—500.
2. Линейные интегральные операторы в пространствах Орлича, *ДАН СССР*, **85** (1952), 33—36.
3. Дифференцируемость нелинейных интегральных операторов в пространствах Орлича, *ДАН СССР*, **89** (1953), 601—604.

Крачковский С. Н., см. также Гольдман М. А.
1. Каноническое представление нуль-элементов линейного оператора в его области Фредгольма, *ДАН СССР*, **88** (1953), 201—204.
2. О свойствах линейного оператора, связанных с его обобщенной областью Фредгольма, *ДАН СССР*, **91** (1953), 1011—1013.
3. О расширенной области сингулярности оператора $T_\lambda = E - \lambda A$, *ДАН СССР*, **96** (1954), 1101—1104.

Крачковский С. Н. и Виноградов А. А.
1. Об одном критерии равномерной выпуклости пространства типа (B), *УМН*, **7 : 3** (49), (1952), 131—134.

Крачковский С. Н. и Гольдман М. А.
1. О главной части вполне непрерывного оператора, *ДАН СССР*, **70** (1950), 945—948.
2. Нуль-элементы и нуль-функционалы вполне непрерывного оператора, *Изв. Латв. ССР*, **6** (1950), 87—100.
3. Некоторые свойства вполне непрерывного оператора в пространстве Гильберта, *Изв. Латв. ССР*, **10** (1950), 93—106.

Крейн М. Г., см. также Гантмахер Ф. Р., Гросберг Ю. Ц., Гохберг И. Ц.
1. О некоторых вопросах геометрии выпуклых ансамблей, принадлежащих линейному нормированному и полному пространству, *ДАН СССР*, **14** (1937), 5—8.
2. О линейных операторах, оставляющих инвариантным некоторое коническое множество, *ДАН СССР*, **23** (1939), 749—752.
3. Основные свойства нормальных конических множеств в пространстве Банаха, *ДАН СССР*, **28** (1940), 13—17.
4. О минимальном разложении линейного функционала на положительные составляющие, *ДАН СССР*, **28** (1940), 18—22.
5. О положительных функционалах на почти периодических функциях, *ДАН СССР*, **30** (1941), 9—12.
6. Об одном обобщении теоремы Планшереля на случай интегралов Фурье на коммутативной топологической группе, *ДАН СССР*, **30** (1941), 482—486.
7. Бесконечные J-матрицы и матричная проблема моментов, *ДАН СССР*, **69** (1949), 125—128.
8. О формуле следов в теории возмущений, *Матем. сб.*, **33** (75), (1953), 597—626.
9. Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения, I, II.
   I. *Матем. сб.*, **20** (62), (1947), 431—498.
   II. Там же, **21** (63), (1947), 365—404.
10. О несимметрических осцилляционных функциях Грина обыкновенных дифференциальных операторов, *ДАН СССР*, **25** (1939), 643—646.

11. Об одном общем методе разложения положительно определенных ядер на элементарные произведения, *ДАН СССР*, **53** (1946), 3—6.
12. Про ермитові операторі з напрямними функціоналами, *Сб. трудов ин-та матем. АН Укр. ССР*, **10** (1948), 83—106.
13. Об одномерной сингулярной краевой задаче четного порядка в интервале (0, ∞), *ДАН СССР*, **74** (1950), 9—12.
14. Решение обратной задачи Штурма — Лиувилля, *ДАН СССР*, **76** (1951), 21—24.
15. О некоторых задачах на максимум и минимум для характеристических чисел и о ляпуновских зонах устойчивости, *ПММ*, **15** (1951), 323—348.
16. О неопределенном случае краевой задачи Штурма — Лиувилля в интервале (0, ∞), *Изв. АН СССР*, **16** (1952), 293—324.
17. О некоторых случаях эффективного определения плотности неоднородной струны по ее спектральной функции, *ДАН СССР*, **93** (1953), 617—620.
18. Об одном методе эффективного решения обратной краевой задачи, *ДАН СССР*, **94** (1954), 987—990.
19. Определение плотности неоднородной симметрической струны по спектру ее частот, *ДАН СССР*, **76** (1951), 345—348.
20. К теории линейных несамосопряженных операторов, *ДАН СССР*, **130**, № 2 (1960), 254—256.
21. О признаках полноты системы корневых векторов диссипативного оператора, *УМН*, **14**, вып. 3 (87), (1959), 145—152.

Крейн М. Г. и Красносельский М. А.
1. Устойчивость индекса неограниченного оператора, *Матем. сб.*, **30** (72), (1952), 219—224.
2. Основные теоремы о расширении эрмитовых операторов и некоторые их применения к теории ортогональных полиномов и проблеме моментов, *УМН*, **2 : 3** (19), (1947), 60—106.

Крейн М. Г., Красносельский М. А. и Мильман Д. П.
1. О дефектных числах линейных операторов в банаховом пространстве и о некоторых геометрических вопросах, *Сб. трудов Ин-та матем. АН Укр. ССР*, **11** (1948), 97—112.

Крейн М. Г. и Крейн С. Г.
1. Об одной внутренней характеристике пространства всех непрерывных функций, определенных на хаусдорфовом бикомпактном пространстве, *ДАН СССР*, **27** (1940), 427—431.
2. Sur l'espace des fonctions continues définies sur un bicompact de Hausdorff et ses sousespaces semiordonnés, *Матем. сб.*, **13** (55), (1943), 1—38.

Крейн М. Г. и Мильман Д. П.
1. On extreme points of regularly convex sets, *Studia Math.*, **9** (1940), 133—138.

Крейн М. Г., Мильман Д. П. и Рутман М. А.
1. Об одном свойстве базиса в пространстве Банаха, Харьков, *Зап. матем. об-ва*, (4), **16** (1940), 106—110.

Крейн М. Г. и Рутман М. А.
1. Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха, *УМН*, **3**, вып. 1 (23), (1948), 3—95.

Крейн М. Г. и Шмульян В. Л. (Krein M., Šmulian V.)
1. On regularly convex sets in the space conjugate to a Banach space, *Ann. of Math.*, **41** (1940), 556—583.

Крейн С. Г., см. Крейн М. Г.

Кристиан (Christian R. R.)
1. On integration with respect to a finitely additive measure whose values lie in a Dedekind complete partially ordered vector space, Dissert., Yale Univ. (1954).

Кронин (Cronin J.)
1. Branch points of solutions of equations in Banach space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **69** (1950), 105—131.
2. Branch points of solutions of equations in Banach space, II, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **76** (1954), 207—222.
3. A definition of degree for certain mappings in Hilbert space. *Amer. J. Math.*, **73** (1951), 763—772.
4. Analytic functional mappings, *Ann. of Math.* (2), **58** (1953), 175—181.

Кук (Cooke R. G.)
1. Linear operators, Macmillan, London, 1953.

Кунисава (Kunisawa K.)
1. Some theorems on abstractly-valued functions in an abstract space, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **16** (1940), 68—72.

Купер (Cooper J. L. B.)
1. The spectral analysis of self-adjoint operators, *Quart. J. Math.* (*Oxford*), **16** (1945), 31—48.
2. Symmetric operators in Hilbert space, *Proc. London Math. Soc.* (2), **50** (1948), 11—55.
3. One-parameter semi-groups of isometric operators in Hilbert space, *Ann. of Math.* (2), **48** (1947), 827—842.

Купмен (Koopman B. O.)
1. Hamiltonian systems and transformations in Hilbert space, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **17** (1931), 315—318.

Купмен и Дуб (Koopman B. O., Doob J. L.)
1. On analytic functions with positive imaginary parts, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **40** (1934), 601—605.

Курант и Гильберт (Courant R., Hilbert D.)
1. Методы математической физики, М.— Л., Гостехиздат, 1951 (1924, 1937).
2*. Курант Р., Уравнения с частными производными, «Мир», М., 1964.

Курант и Лакс (Courant R., Lax A.)
1. Remarks on Cauchy's problem for hyperbolic partial differential equations with constant coefficients in several independent variables, *Comm. Pure Appl. Math.*, **8** (1955), 497—502.

Куратовский (Kuratowski C.)
1. Sur la propriété de Baire dans les groupes métriques, *Studia Math.*, **4** (1933), 38—40.

Курош А. Г.
1*. Курс высшей алгебры, Физматгиз, М., 1962.
2*. Теория групп, М.—Л. Гостехиздат, 1953.
3*. Лекции по общей алгебре, Физматгиз, М., 1962.

Кюршак (Kürschák J.)
1. Über Limesbildung und allgemeine Körpertheorie, *J. Reine Angew. Math.*, **142** (1912), 211—253.

Лаасонен (Laasonen P.)
1. Über die Näherungslösungen der Sturm — Liouvilleschen Eigenwertaufgabe, Proc. XII Scand. Math. Congress Lund, 1953 (1954), 176—182.

Лаврентьев М. А.
1. Sur les fonctions d'une variable complexe représentables par des séries de polynomes, *Act. Sci. Ind.*, **441**, *Paris*, 1936.

Лагерр (Laguerre E. N.)
1. Sur le calcul des systèmes linéaires, Oeuvres, t. I (1898), 221—267.

Лагранж (Lagrange J. L.)
1. Oeuvres, t. 3, Gauthier — Villars, Paris, 1869.
2. Oeuvres, t. 1, Gauthier — Villars, Paris, 1867.

Лакс А. (Lax A.), см. Курант

Лакс П. (Lax P. D.)

1. On the existence of Green's function, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **3** (1952), 526—531. Исправл. там же, **3** (1952), 993.
2. Symmetrizable linear transformations, *Comm. Pure Appl. Math.*, **7** (1954), 633—647.
3. Reciprocal extremal problems in function theory, *Comm. Pure Appl. Math.*, **8** (1955), 437—453.
4*. On Cauchy's problem for hyperbolic equations and the differentiability of solutions of elliptic equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, **8** (1955), 615—633. [Есть русский перевод: сб. *Математика*, **1 : 1** (1957), 43—59.]
5*. A Phragmen — Lindelöf theorem in harmonic analysis and its application to some questions in the theory of elliptic equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, **10** (1957), 361—389. [Есть русский перевод: сб. *Математика*, **3 : 4** (1959), 107—132.]

Лакс П. и Мильграм (Lax P. D., Milgram A. N.)

1. Parabolic equations. Contributions to the theory of partial differential equations, 167—190, *Ann. of Math. Studies*, № 33, Princeton, 1954.

Ламсон (Lamson K. W.)

1. A general implicit function theorem with an application to problems of relative minima, *Amer. J. Math.*, **42** (1920), 243—256.

Лангер (Langer R. E.), см. также Биркгоф Дж.

1. On the connection formulas and the solutions of the wave equation, *Phys. Rev.*, **51** (1937), 669—676.
2. On the wave equation with small quantum numbers, *Phys. Rev.*, **75** (1949), 1573—1578.
3. The expansion problem in the theory of ordinary differential systems of the second order, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **31** (1929), 868—906.

Ландау (Landau E.)

1. Über einen Konvergensatz, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen*, *Math.-Phys. Kl.* IIa 1907 (1907), 25—27.
2. Über einen Satz von Herrn Esclangon, *Math. Ann.*, **102** (1929), 177—178.

Ласаль (LaSalle J. P.)

1. Pseudo-normed linear spaces, *Duke Math. J.*, **8** (1941), 131—135.
2. Application of the pseudo-norm to the study of linear topological spaces, *Revista Ci.*, *Lima*, **47** (1945), 545—563.
3. Singular measurable sets and linear functions, *Math. Mag.*, **22** (1948), 67—72.

Латшоу (Latshaw V. V.)

1. The algebra of self-adjoint boundary-value problems, *Bull. Amer. Math Soc.*, **39** (1933), 969—978.

Лаурикайнен (Laurikainen K. V.)

1. Asymptotic eigensolutions of the radical deuteron equations, *Ann. Acad. Sci. Fennicae*, Ser. A I, № 130 (1952), 10.

Лебег (Lebesgue H.)

1. Sur les intégrales singulièrs, *Ann. de Toulouse* (3), **1**(1909), 25—117.
2. Интегрирование и отыскание примитивных функций, М., 1934(1904).

Леви Б. (Levi B.)

1. Sul principio di Dirichlet, *Rend. del Circolo Matem. di Palermo*, **22** (1906), 293—360.

Леви П. (Lévy P.)

1. Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle. Avec un complément sur les fonctionnelles analytiques par F. Pellegrino, Gauthier — Villars, Paris, Second edition 484, 1951.
2. Leçons d'analyse fonctionnelle, Gauthier — Villars, Paris, 1922.

Лёвиг (Löwig H.)
1. Komplexe euklidische Räume von beliebiger endlicher oder unendlicher Dimensionszahl, *Acta Sci. Math. Szeged.*, **7** (1934), 1—33.

Левинсон (Levinson N.), см. также Боас М. и Коддингтон
1. Gap and density theorems, *Amer. Math. Soc. Colloquium. Pub.*, vol. 26, New York, 1940.
2. Criteria for the limit-point case for second order linear differential operators, *Časopis Pešt. Mat. Fys.*, **74** (1949), 17—20.
3. On the uniqueness of potential in a Schrödinger equation for a given asymptotic phase, *Danske Vid. Selsk. Mat.-Fys. Medd.*, **25**, 9 (1949), 25.
4. The inverse Sturm — Liouville problem, *Mat. Tidsskr. B.* (1949), 25—30.
5. A simplified proof of the expansion theorem for singular second order linear differential equations, *Duke Math. J.*, **18** (1951), 57—71.
6. Addendum to «A simplified proof of the expansion theorem for singular second order differential equations», *Duke Math. J.*, **18** (1951), 719—722.
7. The *L*-closure of eigenfunctions associated with self-adjoint boundary value problems, *Duke Math. J.*, **19** (1952), 23—26.
8. Certain relationships between phase shifts and scattering potential, *Phys. Rev.*, **89** (1953), 755—757.
9. The expansion theorem for singular self-adjoint linear differential operators, *Ann. of Math.* (2), **59** (1954), 300—315.

Левитан Б. М., см. также Гельфанд И. М.
1. Применения операторов обобщенного сдвига к линейным дифференциальным уравнениям второго порядка, *УМН*, **4 : 1**, 29 (1949), 3—112.
2. Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка, М.— Л., Гостехиздат, 1950.
3. К теореме разложения по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка, *ДАН СССР*, **71** (1950), 605—608.
4. Доказательство теоремы разложения по собственным функциям самосопряженных дифференциальных уравнений, *ДАН СССР*, **73** (1950), 651—654.
5. Об одной теореме Г. Вейля, *ДАН СССР*, **82** (1952), 673—676.
6. О полноте квадратов собственных функций, *ДАН СССР*, **83** (1952), 349—352.
7. Об асимптотическом поведении спектральной функции и о разложении по собственным функциям самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка, I, II.
I. *Изв. АН СССР*, сер. матем., **17** (1953), 331—364.
II. Там же, **19** (1955), 33—58.
8*. Почти периодические функции, Гостехиздат, М., 1953.
9*. Об асимптотическом поведении функции Грина и разложении по собственным функциям уравнения Шредингера, *Матем. сб.*, **41** (4), (1957), 439—458.

Левитан Б. М. и Гасымов М. Г.
1*. Определение дифференциального уравнения по двум спектрам, *УМН*, **19** (2), (1964), 3—63.

Лёвнер (Löwner K.)
1. Grundzüge einer Inhaltslehre im Hilbertschen Räume, *Ann. of Math.* (2), **40** (1939), 816—833.

Лежанский (Lezański T.)
1. The Fredholm theory of linear equations in Banach spaces, *Studia Math.*, **13** (1953), 244—276.
2. Sur les fonctionnelles multiplicatives, *Studia Math.*, **14** (1953), 13—23.

Лейтон (Leighton W.)
1. Bounds for the solutions of a second order linear differential equation, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **35** (1949), 190—193.

2. On self-adjoint differential equations of the second order, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **35** (1949), 656—657.
3. On the detection of the oscillation of a second order linear differential equation, *Duke Math. J.*, **17** (1950), 57—62.
4. On self-adjoint differential equations of second order, *J. London Math. Soc.*, **27** (1952), 33—47.

Лейя (Leja F.)
1. Sur la notion du groupe abstrait topologique, *Fund. Math.*, **9** (1927), 37—44.

Леньель (Lengyel B. A.)
1. On the spectral theorem of self-adjoint operators, *Acta Sci. Math. Szeged*, **9** (1939), 174—186.
2. Bounded self-adjoint operators and the problem of moments, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **45** (1939), 303—306.

Леньель и Стоун (Lengyel B. A., Stone M. H.)
1. Elementary proof of the spectral theorem, *Ann. of Math.* (2), **37** (1936), 853—864.

Лере (Leray J.)
1. La théorie des points fixes et ses applications en analyse, Proc. International Congress Math., Cambridge, Mass., 2 (1950), 202—208.
2. Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme complètement continu d'un espace vectoriel à voisinages convexes, *Acta Sci. Math. Szeged*, 12 Pars B (1950), 177—186. [Есть русский перевод: сб. *Математика*, **4 : 5** (1960), 73—83.]
3. Topologie des espaces abstraits de M. Banach, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **200** (1935), 1082—1084.
4. Lectures on hyperbolic equations with variable coefficients, Inst. Adv. Studies, Princeton, 1952.

Лефшец (Lefschetz S.)
1. Алгебраическая топология, М., ИЛ, 1949 (1942).
2. Introduction to topology, Princeton University Press, Princeton, 1949.

Ливингстон (Livingston A. E.)
1. The space H^p, $0 < p < 1$, is not normable, *Pacific J. Math.*, **3** (1953), 613—616.

Лившиц М. С., см. также Бродский М. С.
1. Изометрические операторы с равными дефектными числами, квазиунитарные операторы, *Матем. сб.*, **26** (68), (1950), 247—264.
2. О приведении линейных неэрмитовых операторов к треугольному виду, *ДАН СССР*, **84** (1952), 873—876.
3. О резольвенте линейного несимметрического оператора, *ДАН СССР*, **84** (1952), 1131—1134.
4. О спектральном разложении линейных несамосопряженных операторов, *Матем. сб.*, **34** (76), (1954), 144—199.
5. К теории самосопряженных систем дифференциальных уравнений. *ДАН СССР*, **72** (1950), 1013—1016.
6*. Об одном применении теории эрмитовых операторов к обобщенной проблеме моментов, *ДАН СССР*, **44**, 1 (1944), 3—7.

Лившиц М. С. и Потапов В. П.
1. Теорема умножения характеристических матриц-функций, *ДАН СССР*, **72** (1950), 625—628.

Лидер (Leader S.)
1. The theory of L^p-spaces for finitely additive set functions, *Ann. Math* (2), **58** (1953), 528—543.

Лидский В. Б.
1. О числе решений с интегрируемым квадратом системы дифференциальных уравнений $y''+P(t)y=\lambda y$, *ДАН СССР*, **95** (1954), 217—220.
2*. Условие полноты системы корневых подпространств у несамосопря-

женных операторов с дискретным спектром, *Труды моск. матем. о-ва.* **8** (1958), 83—120.

Линдгрен (Lindgren B. W.), см. Камерон

Литлвуд (Littlewood J.), см. также Харди

1. The theory of group characters and matrix representations of groups, Oxford, Clarendon Press, 1950.

Литлвуд и Пэли (Littlewood J., Paley R.E.A.C.)

1. Theorems on Fourier series and power series, I, II.
   I. *J. London Math. Soc.*, **6** (1931), 230—233.
   II. *Proc. London Math. Soc.* (2), **42** (1937), 52—89.

Лиувилль (Liouville J.)

1. Sur le développement des fonctions en séries dont les divers termes sont assujeties à satisfaire à une même équation différentielle du sécond ordre contenant un paramètre variable, I—III.
   I. *J. Math. Pures Appl.* (1), **1** (1836), 253—265.
   II. Там же (1), **2** (1837), 16—37.
   III. Там же (1), **2** (1837), 418—436.
2. D'un théorème dû à M. Sturm et relatif a une classe de fonctions transcendantes, *J. Math. Pures Appl.* (1), **1** (1836), 269—277.

Лифшиц И. М.

1. К теории регулярных возмущений, *ДАН СССР*, **48** (1945), 83—86.
2. О вырожденных регулярных возмущениях, I, II.
   I. *Журн. экспер. и теоретич. физ.*, **17** (1947), 1017—1025.
   II. Там же, **17** (1947), 1076—1089.
3. Об одной задаче теории возмущений, связанной с квантовой статистикой, *УМН*, **7 : 1** (52) (1952), 171—180.
4. О регулярных возмущениях оператора с квазинепрерывным спектром *Хрк., Зап. мат. об-ва* (4), **20** (1950), 77—82.

Лихтенштейн (Lichtenstein L.)

1. Zur Analysis der unendlichvielen Variablen. I. Entwicklungssätze der Theorie gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **38** (1914), 113—166.

Ловалья (Lovaglia A. R.)

1. Locally uniformly convex Banach spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **78** (1955), 225—238.

Лоренц (Lorentz G. G.)

1. On the theory of spaces Λ, *Pacific J. Math.*, **1** (1951), 411—429.
2. Some new functional spaces, *Ann. of Math.* (2), **51** (1950), 37—55.
3. Operations in linear metric spaces, *Duke Math. J.*, **15** (1948), 755—761.
4. Funktionale und Operationen in den Räumen der Zahlenfolgen, *ДАН СССР*, **1** (1935), 81—85.

Лорх (Lorch E. R.) см. также Рисс Ф.

1. Bicontinuous linear transformations in certain vector spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **45** (1939), 564—569.
2. On a calculus of operators in reflexive vector spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **45** (1939), 217—234.
3. The Cauchy — Schwarz inequality and self-adjoint spaces, *Ann. of Math.* (2), **46** (1945), 468—473.
4. On certain implications which characterize Hilbert space, *Ann. of Math.* (2), **49** (1948), 523—532.
5. Return to the self-adjoint transformation, *Acta Sci. Math. Szeged*, **12**, Pars B (1950), 137—144.
6. The spectrum of linear transformation, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **52** (1942), 238—248.
7. The integral representation of weakly almost-periodic transformations in reflexive vector spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **49** (1941), 18—40.

8. Means of iterated transformations in reflexive vector spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **45** (1939), 945—957.
9. The structure of normed abelian rings, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **50** (1944), 447—463.
10. The theory of analytic functions in normed abelian vector rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **54** (1943), 414—425.
11. Functions of self-adjoint transformations in Hilbert space, *Acta Sci. Math. Szeged*, **7** (1934), 136—146.
12. Differentiable inequalities and the theory of convex bodies, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **71** (1951), 243—266.
13. Su certe estensioni del concetto di volume, *Rend. Acc. Naz. Lincei* (8), **16** (1954), 25—29.
14. On the volume of smooth convex bodies in Hilbert space, *Math. Zeit.*, **61** (1955), 391—407.

Лукомский Т. И.
1. К теории матричных представлений неограниченных самосопряженных операторов, *ДАН СССР*, **70** (1950), 377—379.

Люмер (Lumer G.), см. Халмош

Люмис (Loomis L. H.)
1. Введение в абстрактный гармонический анализ, М., ИЛ, 1956 (1953).
2. Linear functionals and content, *Amer. J. Math.*, **76** (1954), 168—182.
3. Abstract congruence and the uniqueness of Haar measure, *Ann. of Math.* (2), **46** (1945), 348—355.
4. Haar measure in uniform structures, *Duke Math. J.*, **16** (1949), 193—208.
5. On the representation of σ-complete Boolean algebras, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **53** (1947), 757—760.

Ма (Ma S. T.)
1. On a general condition of Heisenberg for the *S*-matrix, *Phys. Rev.*, **71** (1947), 195—200.

Маак (Maak W.)
1. Fastperiodische Funktionen. Springer, Berlin, 1950.

Маеда (Maeda F.), см. также Огасавара
1. Unitary equivalence of self-adjoint operators and constants of motion, *J. Sci. Hiroshima Univ.*, A, **6** (1936), 283—290.

Мазани (Masani P. R.)
1. Multiplicative Riemann integration in normed rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **61** (1947), 147—192.

Мазур (Mazur S.), см. также Банах и Эйдельгайт
1. Über konvexe Mengen in linearen normierte Räumen, *Studia Math.*, **4** (1933), 70—84.
2. Über die kleinste konvexe Menge, die eine gegebene kompakte Menge enthält, *Studia Math.*, **2** (1930), 7—9.
3. Über schwache Konvergenz in den Räumen (L^p), *Studia Math.*, **4** (1933), 128—133.
4. Une remarque sur l'homéomorphie des champs fonctionnels, *Studia Math.*, **1** (1929), 83—85.
5. Sur les anneaux linéaires, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **207** (1938), 1025—1027.

Мазур и Орлич (Mazur S., Orlicz W.)
1. Über Folgen linearer Operationen, *Studia Math.*, **4** (1933), 152—157.
2. Grundlegende Eigenschaften der polynomischen Operationen, I, II.
   I. *Studia Math.*, **5** (1934), 50—68.
   II. Там же, **5** (1934), 179—189.
3. Sur les espaces métriques linéaires, I, II.
   I. *Studia Math.*, **10** (1948), 184—208.
   II. Там же, **13** (1953), 137—179.

Мазур и Улам (Mazur S., Ulam S.)
1. Sur les transformations isométriques d'espace vectoriels normés, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **194** (1932), 946—948.

Майерс (Myers S. B.)
1. Equicontinuous sets of mappings, *Ann. of Math.* (2), **47** (1946), 496—502.
2. Banach spaces of continuous functions, *Ann. of Math.* (2), **49** (1948), 132—148.
3. Spaces of continuous functions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **55** (1949), 402—407.
4. Normed linear spaces of continuous functions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **56** (1950), 233—241.

Майкал (Michal A. D.)
1. General differential geometries and related topics, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **45** (1939), 529—563.

Майкал и Клиффорд (Michal A. D., Clifford A. H.)
1. Fonctions analytiques implicites dans des espaces vectoriels abstracts, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **197** (1933), 735—737.

Майкал и Мартин (Michal A. D., Martin R. S.).
1. Some expansions in vector space, *J. Math. Pures et Appl.* (9), **13** (1934), 69—91.

Майкал и Элконин (Michal A. D., Elconin V.)
1. Completely integrable differential equations in abstract spaces, *Acta Math.*, **68** (1937), 71—107.

Майкл (Michael E.)
1. Transformations from a linear space with weak topology, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **3** (1952), 671—676.
2. Locally multiplicatively-convex topological algebras, *Memoirs Amer. Math. Soc.*, № 11, 1952.

Макаи (Makai E.)
1. Asymptotische Abschätzung der Eigenwerte gewisser Differentialgleichungen zweiter Ordnung, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* (2), **10** (1941), 123—126.

Мак-Даффи (MacDuffee C. C.)
1. The theory of matrices, Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete, vol. 2, Berlin, 1933.

Макинтайр и Рогозинский (Macintyre A. J., Rogosinski W. W.)
1. Extremum problems in the theory of analytic functions, *Acta Math.*, **82** (1950), 275—325.

Макки (Mackey G. W.), см. также Какутани
1. On convex topological linear spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **60** (1946), 519—537.
2. On infinite dimensional linear spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **57** (1945), 155—207.
3. Note on a theorem of Murray, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **52** (1946), 322—325.
4. Commutative Banach algebras. Mimeographed lecture notes, Harvard University, 1952.
5. Functions on locally compact groups, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **56** (1950), 385—412.

Мак-Лейн (MacLane S.), см. Биркгоф Г.

Мак-Фейл (MacPhail M. S.)
1. Absolute and unconditional convergence, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **53** (1947), 121—123.

Мак-Шейн (McShane E. J.)
1. Linear functionals on certain Banach spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **1** (1950), 402—408.

2. Integration. Princeton University Press, Princeton, 1944.
3. Order-preserving maps and integration processes, *Ann. of Math. Studies*, № 31, Princeton Univ. Press, 1953.
4. Images of sets satisfying the condition of Baire, *Ann. of Math.* (2), **51** (1950), 380—386.

Мак-Эвен (McEwen W. H.)
1. Spectral theory and its application to differential eigenvalue problems, *Amer. Math. Monthly*, **60** (1953), 223—233.

Малявен (Malliavin P. M.)
1. Sur l'impossibilité de la synthèse spectrale sur la droite, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **248** (1959), 2155—2157.
2. Sur l'impossibilité de la synthèse spectrale dans un algèbre de fonctions presque périodiques, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **248** (1959), 1756—1759.

Мандельбройт (Mandelbrojt S.)
1. Un théorème de fermeture, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **231** (1950), 16—18.
2. Théorèmes généraux de fermeture, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **232** (1951), 284—286.
3. Théorèmes d'approximation et problèmes des moments, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **232** (1951), 1054—1056.
4. General theorems of closure, *Rice Inst. Pamphlet*, Houston, 1951.
5. Quelques théorèmes d'unicité, Proc. International Cong. Math., Cambridge, Mass., **1** (1950), 349—355.
6. Théorèmes généraux de fermeture, *J. Analyse Math.*, **1** (1951), 180—208.
7. Quelques nouveaux théorèmes de fermeture, *Ann. Soc. Polon. Math.*, **25** (1952), 241—251 (1953).

Мандельбройт и Агмон (Mandelbrojt S., Agmon S.)
1. Une généralisation du théorème tauberien de Wiener, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **228** (1949), 1394—1396.
2. Une généralisation du théorème tauberien de Wiener, *Acta Sci. Math. Szeged.*, **12**, Pars B (1950), 167—176.

Манроу (Munroe M. E.)
1. Absolute and unconditional convergence in Banach spaces, *Duke Math. J.*, **13** (1946), 351—365.
2. Introduction to measure and integration. Addison Wesley, Cambridge, Mass., 1953.
3. A note on weak differentiability of Pettis integrals, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **52** (1946), 167—174.
4. A second note on weak differentiability of Pettis integrals, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **52** (1946), 668—670.

Маринеску (Marinescu G.), см. также Ионеску
1. Opérations relativement complètement continues, *Acad. Republ. Pop. Române, Stud. Cerc. Mat.*, **2** (1951), 107—194.

Марков А. А.
1. Некоторые теоремы об абелевых множествах, *ДАН СССР*, **1** (1936), 299—302.
2. On mean values and exterior densities, *Матем. сб.*, **4** (46), (1938), 165—191.

Маркушевич А. И.
1. О базисе (в широком смысле слова), *ДАН СССР*, **41** (1943), 241—243.
2. О наилучшем приближении, *ДАН СССР*, **44** (1944), 290—292.
3. Обобщение одной теоремы Д. Е. Меньшова, *Матем. сб.*, **15** (57), (1944), 433—436.
4*. Теория аналитических функций, Гостехиздат, М., 1950.

Мартин Р. (Martin R. S.), см. Майкал

Мартин У. (Martin W. T.), см. Камерон

Маруяма (Maruyma G.)
1. Notes on Wiener integrals, *Kōdai Math. Sem. Rep.* (1950), 41—44.
Марцинкевич (Marcinkiewicz J.)
1. Sur les multiplicateurs des séries de Fourier, *Studia Math.*, **8** (1939), 78—91.
Марчевский, см. Хартман С.
Марченко В. А.
1. Некоторые вопросы теории дифференциального оператора второго порядка, *ДАН СССР*, **72** (1950), 457—460.
2. О формулах обращения, порождаемых линейным дифференциальным уравнением второго порядка, *ДАН СССР*, **74** (1950), 657—660.
3*. Теоремы тауберова типа в спектральном анализе дифференциальных операторов, *Изв. АН СССР*, сер. мат., **19** (1955), 381—422.
4*. Восстановление потенциальной энергии по фазам рассеянных волн, *ДАН СССР*, **104** (5), (1955), 695—698.
Маслов А. С.
1. К вопросу о product-интеграле Birkhoff'a, *Ученые Зап. ЛГУ*, матем. сер. 12, **83** (1941), 42—56.
Маслов В. П.
1*. Теория возмущений и асимптотические методы, изд-во МГУ, 1965.
Маутнер (Mautner F. I.)
1. On eigenfunction expansions, *Proc. Nat. Acad. U.S.A.*, **39** (1953), 49—53. [Есть русский перевод: *УМН*, **10**: **4** (1955), 127—132.]
Махарам (Maharam D.)
1. The representation of abstract measure functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **65** (1949), 279—330.
2. The representation of abstract integrals, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **75** (1953), 154—184.
3. On kernel representation of linear operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **79** (1955), 229—255.
Медведев Ю. Т.
1. Два признака компактности семейств функций, *ДАН СССР*, **90** (1953), 337—340.
Меддаус (Maddaus I., Jr.)
1. On types of «weak» convergence in linear normed spaces, *Ann. of Math.* (2), **42** (1941), 229—246.
2. On completely continuous linear transformations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **44** (1938), 279—282.
Мергелян С. Н.
1. О представлении функций рядами полиномов на замкнутых множествах, *ДАН СССР*, **78** (1951), 405—408.
2. Равномерное приближение функций комплексного переменного, *УМН*, **7** : **2** (48), (1952), 31—122.
Меркил (Mirkil H.)
1. The work of Šilov on commutative semi-simple Banach algebras. Technical Report, Contract 218 (00). Office of Naval Research.
Меррей (Murray F. J.)
1. On complementary manifolds and projections in spaces L_p and l_p, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **41** (1937), 138—152.
2. Quasi-complements and closed projections in reflexive Banach spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **58** (1945), 77—95.
3. The analysis of linear transformations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **48** (1942), 76—93.
4. Linear transformations between Hilbert spaces and the application of this theory to linear partial differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **37** (1935), 301—338.

5. Linear transformations in L_p, $p > 1$, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **39** (1936), 83—100.
6. Bilinear transformations in Hilbert space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **45** (1939), 474—507.
7. An introduction to linear transformations in Hilbert space, Ann. of Math. Studies, № 4, Princeton, 1941.

Меррей и Дж. Нейман (Murray F. J., von Neumann J.)
1. On rings of operators, I, II, IV.
I. *Ann. of Math.* (2), **37** (1936), 116—229.
II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **41** (1937), 208—248.
IV. *Ann. of Math.* (2), **44** (1943), 716—808.

Микусинский (Mikusinski J. G.)
1. Sur certains espaces abstraits, *Fund. Math.*, **36** (1949), 125—130.

Миллер Д. (Miller D. S.), см. Данфорд

Миллер К. (Miller K. S.)
1. A Sturm — Liouville problem associated with iterative methods, *Ann. of Math.* (2), **53** (1951), 520—530.
2. Construction of the Green's function of a linear differential system, *Math. Mag.*, **26** (1952), 1—8.
3. Self-adjoint differential systems, *Quart. J. Math., Oxford* (2), **3** (1952), 175—178.

Миллер К. и Шиффер (Miller K. S., Schiffer M. M.)
1. On the Green's function of ordinary differential systems, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **3** (1952), 433—441.
2. Monotonic properties of the Green's function, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **3** (1952), 948—956.

Милн (Milne W. E.)
1. The behavior of a boundary value problem as the interval becomes infinite, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **30** (1928), 797—802.
2. On the degree of convergence of expansions in an infinite interval, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **31** (1929), 906—918.
3. The numerical determination of characteristic numbers, *Phys. Rev.*, **35** (1930), 863—867.

Мильграм (Milgram A. N.), см. П. Лакс

Мильман Д. П., см. также Бродский М. С. и Крейн М. Г.
1. О некоторых признаках регулярности пространств типа (*B*), *ДАН СССР*, **20** (1938), 243—246.
2. Характеристика экстремальных точек регулярно-выпуклого множества, *ДАН СССР*, **57** (1947), 119—122.
3. Достижимые точки функционального компакта, *ДАН СССР*, **59** (1948), 1045—1048.
4. Изометрия и экстремальные точки, *ДАН СССР*, **59** (1948), 1241—1244.
5. Многометрические пространства. Анализ инвариантных подмножеств многонормированного бикомпакта относительно полугруппы нерасширяющих операторов в нем, *ДАН СССР*, **67** (1949), 27—30.
6. Экстремальные точки и центры выпуклых бикомпактов, *УМН*, **4 : 5** (33), (1949), 179—181.
7. Граневая структура выпуклого бикомпакта и интегральные разложения средних, *ДАН СССР*, **83** (1952), 357—360.
8. Об одной классификации точек спектра линейного оператора, *ДАН СССР*, **33** (1941), 279—281.

Мильман Д. П. и Рутман М. А.
1. Об одном уточнении теоремы о полноте системы экстремальных точек регулярно-выпуклого множества, *ДАН СССР*, **60** (1948), 25—27.

Мимура (Mimura Y.), см. также Иосида
1. Über Funktionen von Funktionaloperatoren in einem Hilbertschen Raum, *Jap. J. Math.*, **13** (1936), 119—128.
Минковский (Minkowski H.)
1. Gesammelte Abhandlungen, Vol. II. Teubner, Berlin, 1911.
Минлос Р. А.
1*. Обобщенные случайные процессы и их продолжение до меры, *Труды моск. мат. о-ва*, **8** (1958), 497—518.
Миранда (Miranda C.)
1. Próblemi di esistenza in analisi funzionale. Litografia Tacchi, Pisa, 1949.
2. Sul principio di Dirichlet per le funzioni armoniche, *Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* (8), **3** (1947), 55—59.
Митягин Б. С., см. Костюченко А. Г.
Михлин С. Г.
1. О сходимости рядов Фредгольма, *ДАН СССР*, **42** (1944), 387—390.
2*. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, Физматгиз, М., 1962.
Мишоу (Mishoe L. I.), см. также **Фридман** Б.
1. On the expansion of an arbitrary function in terms of the eigenfunctions of a non-self-adjoint differential system. Dissert., New York University, 1953.
Мишоу и Форд (Mishoe L. I., Ford G. C.)
1. Studies in the eigenfunction series associated with a non-self-adjoint differential system, Tech. Report Nat. Sci. Foundation, 1955.
2. On the uniform convergence of a certain eigenfunction series, *Pacific J. Math.*, **6** (1956), 271—278.
Миядера (Miyadera I.)
1. Generation of a strongly continuous semi-group of operators, *Tôhoku Math. J.*, **4** (2), (1952), 109—114.
Мозер (Moser J.)
1. Störungstheorie des kontinuierlichen Spektrums für gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung, *Math. Ann.*, **125** (1953), 366—393.
Мозес (Moses H. E.), см. Кей
Молчанов А. М.
1. Об условиях дискретности спектра самосопряженных дифференциальных уравнений второго порядка, *Труды моск. мат. о-ва*, **2** (1953), 169—199.
Монна (Monna A. F.)
1. On a linear *P*-adic space, *Nederl. Akad. Wetensch. Verslagen, Afd. Natuurkunde*, **52** (1943), 74—82.
2. On weak and strong convergence in a *P*-adic Banach space, *Nederl. Akad. Wetensch. Verslagen, Afd. Natuurkunde*, **52** (1943), 207—211.
3. On non-Archimedean linear space, *Nederl. Akad. Wetensch. Verslagen, Afd. Natuurkunde*, **52** (1943), 308—321.
4. Linear functional equations in non-Archimedean Banach spaces, *Nederl. Akad. Wetensch. Verslagen, Afd. Natuurkunde*, **52** (1943), 654—661.
5. On ordered groups and linear spaces, *Nederl. Akad. Wetensch. Verslagen, Afd. Natuurkunde*, **53** (1944), 178—182.
6. On the integral of a function whose values are elements of a non-Archimedean valued field, *Nederl. Akad. Wetensch. Verslagen, Afd. Natuurkunde*, **53** (1944), 385—399.
7. Sur les espaces linéaires normés, I—VI.
I. *Nederl. Akad. Wetensch., Proc.*, **49** (1946), 1045—1055.
II. Там же, **49** (1946), 1056—1062.
III. Там же, **49** (1946), 1134—1141.

IV. Там же, **49** (1946), 1142—1152.
V. Там же, **51** (1948), 197—210.
VI. Там же, **52** (1949), 151—160.
8. Espaces linéaires à une infinité dénombrable de coordonnée, *Nederl. Akad. Wetensch., Proc.*, **53** (1950), 1548—1559.
9. Sur une classe d'espaces linéaires normés, *Nederl. Akad. Wetensch., Proc.*, **55** (1952), 513—525.

Монтролль (Montroll E. W.)
1. Markoff chains, Wiener integrals, and quantum theory, *Comm. Pure Appl. Math.*, **5** (1952), 415—453.

Мор (Mohr E.)
1. Die Konstruktion der Greenschen Funktion im erweiterten Sinne, *J. Reine Angew. Math.*, **189** (1951), 129—140.

Морс А. (Morse A. P.), см. также Адамс, Данфорд, Эгнью
1. A theory of covering and differentiation, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **55** (1944), 205—235.

Морс М. (Morse M.)
1. Bilinear functionals over $C \times C$, *Acta Sci. Math. Szeged*, **12**, Pars B (1950), 41—48.

Морс и Трансю (Morse M., Transue W.)
1. Functionals of bounded Fréchet variation, *Canadian J. Math.*, **1** (1949), 153—165.
2. Functionals F bilinear over the product $A \times B$ of two pseudo-normed vector spaces, I, II.
I. *Ann. of Math.* (2), **50** (1949), 777—815.
II. Там же (2), **51** (1950), 576—614.
3. Integral representations of bilinear functionals, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **35** (1949), 136—143.
4. The generalized Fréchet variation and Riesz — Young — Hausdorff type theorems, *Rend. Circ. Mat. Palermo* (2), **2** (1953), 5—35.

Московиц и Дайнс (Moskovitz D., Dines L. L.)
1. Convexity in a linear space with an inner product, *Duke Math. J.*, 5 (1939), 520—534.
2. On the supporting-plane property of a convex body, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **46** (1940), 482—489.

Мур Р. (Moore R. L.)
1. Foundations of point set theory. Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, vol. 13, New York, 1932.

Мур Э. (Moore E. H.)
1. Introduction to a form of general analysis. The New Haven Math. Colloquium of the Amer. Math. Soc., 1906.
2. General analysis, I, II. Mem. Amer. Philos. Soc., Philadelphia, 1935, 1939.

Мюнц (Müntz Ch. H.)
1. Über den Approximationssatz von Weierstrass. Math. Abhandlungen H. A. Schwarz gewidmet, Berlin (1914), 303—312.

Нагата (Nagata J.)
1. On lattices of functions on topological spaces and of functions on uniform spaces, *Osaka Math. J.*, **1** (1949), 166—181.

Нагумо (Nagumo M.)
1. Einige analytische Untersuchungen in linearen metrischen Ringen, *Jap. J. Math.*, **13** (1936), 61—80.
2. Degree of mapping in convex linear topological spaces, *Amer. J. Math.*, **73** (1951), 497—511.
3. Characterisierung der allgemeinen euklidischen Räume durch eine Postulate für Schwerpunkte, *Jap. J. Math.*, **12** (1936), 123—128.

Наймарк М. А., см. также Гельфанд И. М.
1. Положительно определенные операторные функции на коммутативной группе, *Изв. АН СССР*, сер. матем., 7 (1943), 237—244.
2. Кольца операторов в гильбертовом пространстве, *УМН*, **4 : 4** (32), (1949), 83—147.
3. Об одном представлении аддитивных операторных функций множеств, *ДАН СССР*, **41** (1943), 373—375.
4. Об индексе дефекта линейных дифференциальных операторов, *ДАН СССР*, **82** (1952), 517—520.
5. Линейные дифференциальные операторы, М., Гостехиздат, 1954.
6. О квадрате замкнутого симметрического оператора, *ДАН СССР*, **26** (1940), 863—867.
7. О самосопряженных расширениях второго рода симметрического оператора, *Изв. АН СССР*, сер. матем., **4** (1940), 53—104.
8. Спектральные функции симметрического оператора, *Изв. АН СССР*, сер. матем., **4** (1940), 277—318.
9. О спектре сингулярных несамосопряженных дифференциальных операторов второго порядка, *ДАН СССР*, **85** (1952), 41—44.
10. Исследование спектра и разложение по собственным функциям несамосопряженных сингулярных дифференциальных операторов второго порядка, *УМН*, **8 : 4** (56), (1953), 174—175.
11. О разложении по собственным функциям несамосопряженных дифференциальных операторов второго порядка, *ДАН СССР*, **89** (1953), 213—216.
12. Исследование спектра и разложение по собственным функциям несамосопряженного дифференциального оператора второго порядка на полуоси, *Труды моск. мат. об-ва*, **3** (1954), 181—270.
13. Нормированные кольца, М., Гостехиздат, 1956.
14. Линейные представления группы Лоренца, *УМН*, **9**, 4 (1954), 19—93.

Накамура (Nakamura M.)
1. Notes on Banach space, X. Vitali-Hahn-Saks' theorem and K-spaces, *Tôhoku Math. J.* (2), **1** (1949), 101—108.
2. Notes on Banach space, XI. Banach lattices with positive bases, *Tôhoku Math. J.* (2), **2** (1950), 135—141.
3. Complete continuities of linear operators, *Proc. Japan Acad.*, **27** (1951), 544—547.

Накамура и Суноути (Nakamura M., Sunouchi S.)
1. Note on Banach spaces (IV). On a decomposition of additive set functions, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **18** (1942), 333—335.

Накамура и Умегаки (Nakamura M., Umegaki H.)
1. A remark on theorems of Stone and Bochner, *Proc. Japan Acad.*, **27** (1951), 506—507.

Накано (Nakano H.)
1. Topology and linear topological spaces, Maruzen Co., Tokyo, 1951.
2. Modulared semi-ordered linear spaces, Maruzen Co., Tokyo, 1950.
3. Riesz-Fischerscher Satz im normierten teilweise geordneten Modul, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **18** (1942), 350—353.
4. Über Erweiterungen von allgemein teilweise geordneten Moduln, I, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **18** (1942), 626—630.
5. Über Erweiterungen von allgemein teilweise geordneten Moduln, II, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **19** (1943), 138—143.
6. Modulared linear spaces, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect.* I, **6** (1950), 85—131.
7. Zur Eigenwerttheorie normaler Operatoren, *Proc. Phys.-Math. Soc. Japan* (3), **21** (1939), 315—339.

8. Über Abelsche Ringe von Projektionsoperatoren, *Proc. Phys.-Math. Soc. Japan* (3), **21** (1939), 357—375.
9. Unitärinvariante hypermaximale normale Operatoren, *Ann. of Math.* (2), **42** (1941), 657—664.
10. Unitärinvarianten in allgemeinen Euklidischen Raum, *Math. Ann.*, **118** (1941), 112—133.
11. Funktionen mehrerer hypermaximaler normaler Operatoren, *Proc. Phys.-Math. Soc. Japan* (3), **21** (1939), 713—728.
12. Modern spectral theory, Maruzen Co., Tokyo, 1950.
13. Spectral theory in the Hilbert space, *Japan Soc. for Promotion of Sci.*, Tokyo, 1953.
14. Über normierte teilweise geordnete Moduln, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **17** (1941), 311—317.
15. Stetige lineare Funktionale auf dem teilweise geordnete Modul, *J. Fac. Sci. Imp. Univ. Tokyo*, **4** (1942), 201—382.
16. Über ein lineare Funktional auf dem teilweise geordneten Modul, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **18** (1942), 548—552.
17. Über den Beweis des Stoneschen Satzes, *Ann. of Math.* (2), **42** (1941), 665—667.
18. Reduction of Bochner's theorem to Stone's theorem, *Ann. of Math.* (2), **49** (1948), 279—280.

Накаяма (Nakayama T.,) см. Иосида

Натан (Nathan D. S.)

1. One-parameter groups of transformations in abstract vector spaces, *Duke Math. J.*, **1** (1935), 518—526.

Натансон И. П.

1*. Теория функций вещественной переменной, М., Гостехиздат, 1950.

Нахбин (Nachbin L.)

1. On the axiom of the nonconvergent sequences in some linear topological space, *Revista Unión Mat. Argentina*, **12** (1947), 129—150.
2. A characterization of the normed vector ordered spaces of continuous functions over a compact space, *Amer. J. Math.*, **71** (1949), 701—705.
3. A theorem of the Hahn-Banach type for linear transformations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **68** (1950), 28—46.

Нейгауз М. Г.

1. Об определении асимптотики функции $q(x)$ по свойствам спектральной функции оператора $-y'' + q(x)y$, *ДАН СССР*, **102** (1955), 25—28.

Нейман Дж. (von Neumann J.), см. также Бохнер, Девинац, Йордан, Меррей и Халмош

1. On complete topological spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **37** (1935), 1—20.
2. Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der Normalen Operatoren, *Math. Ann.*, **102** (1929—1930), 370—427.
3. Eine Spektraltheorie für allgemeine Operatoren eines unitären Raumes, *Math. Nachr.*, **4** (1951), 258—281.
4. Functional operators, I. Annals of Math. Studies, № 21, Princeton University Press, Princeton, 1950.
5. On a certain topology for rings of operators, *Ann. of Math.* (2), **37** (1936), 111—115.
6. Charakterisierung des Spektrums eines Integraloperators, *Act. Sci. et Ind.*, 229, Paris, 1935.
7. Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren, *Math. Ann.*, **102** (1929—1930), 49—131.
8. Математические основы квантовой механики, М., 1964 (1927).
9. Almost periodic functions in a group, I, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **36** (1934), 445—492.

10. Über einen Satz von Herrn M. H. Stone, *Ann. of Math.* (2), **33** (1932), 567—573.
11. Proof of the quasi-ergodic hypothesis, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **18** (1932), 70—82.
12. Zum Haarschen Mass in topologischen Gruppen, *Comp. Math.*, **1** (1934), 106—114.
13. On rings of operators, III. *Ann. of Math.* (2), **41** (1940), 94—161.
14. On some algebraical properties of operator rings, *Ann. of Math.* (2), **44** (1943), 709—715.
15. On rings of operators. Reduction theory, *Ann. of Math.* (2), **50** (1949), 401—485.
16. Über adjungierte Funktionaloperatoren, *Ann. of Math.* (2), **33** (1932), 294—310.
17. The uniqueness of Haar's measure, *Матем. сб.*, **1** (43) (1936), 721—734.
18. Über Funktionen von Funktionaloperatoren, *Ann. of Math.* (2), **32** (1931), 191—226.
19. Einige Sätze über messbare Abbildungen, *Ann. of Math.* (2), **33** (1932), 574—586.
20. Zur Operatorenmethode in der klassischen Mechanik, *Ann. of Math.* (2), **33** (1932), 587—642, 789—791.
21. Algebraische Repräsentanten der Funktionen «bis auf eine Menge vom Masse Null», *J. Reine Angew. Math.*, **165** (1931), 109—115.
22. On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism, I, *Матем. сб.*, **1** (43) (1936), 415—482.
23. Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, J. Springer, Berlin, 1932.
24. Approximative properties of matrices of high finite order, *Port. Math.*, **3** (1942), 1—62.

Нейман Дж. и Шаттен (von Neumann J., Schatten R.)
1. The cross-space of linear transformations, I, II, III, *Ann. of Math.* (2), **47** (1946), 73—84; **47** (1946), 608—630; **49** (1948), 557—582.

Нейман К. (Neumann C.)
1. Untersuchungen über das logarithmische und Newtonsche Potential, Teubner, Leipzig, 1877.

Неймарк Ф. А.
1. О расширении эрмитова оператора до перестановочного с данным эрмитовым оператором, *ДАН СССР*, **66** (1949), 9—12.

Немыцкий В. В.
1. Метод неподвижных точек в анализе, *УМН*, **1** (1936), 141—175.
2. Проблемы качественной теории дифференциальных уравнений, М., *Вест. Ун-та*, **8** (1952), 19—39.

Никович И. А.
1. О рядах Фредгольма, *ДАН СССР*, **59** (1948), 423—425.

Никодим (Nikodým O. M.)
1. Remarques sur les intégrales de Stieltjes en connexion avec celles de MM. Radon et Fréchet, *Ann. Soc. Polon. Math.*, **18** (1945), 12—24.
2. Sur les fonctionnelles linéaires, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **229** (1949), 16—18, 169—171, 288—289.
3. Remarques sur la pseudo-topologie et sur les fonctionnelles linéaires, *C. R. Acad. Sci. Paris.*, **229** (1949), 863—865.
4. Un nouvel appareil mathématique pour la théorie des quanta, *Ann. Inst. H. Poincaré*, **11** (1949), 49—112.
5. Sur les familles bornées de fonctions parfaitement additives d'ensemble abstrait, *Monatsh. für Math. u. Phys.*, **40** (1933), 418—426.
6. Sur les suites convergentes de fonctions parfaitement additives d'ensemble abstrait, *Monatsh. für Math. u. Phys.*, **40** (1933), 427—432.

7. Sur les fonctions d'ensembles. Comptes Rendus du I Congrès des Math. des Pays Slaves, Warsaw (1929), 304—313.
8. Sur une généralisation des intégrales de M. J. Radon, *Fund. Math.*, **15** (1930), 131—179.
9. Contribution à la théorie des fonctionnelles linéaires en connexion avec la théorie de la mesure des ensembles abstraits, *Mathematica, Cluj*, **5** (1931), 130—141.
10. Sur les opérateurs normaux maximaux dans l'espace hilbertien séparable et complet, I, II.
    I. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **238** (1954), 1373—1375.
    II. Там же, **238** (1954), 1467—1469.

Николеску (Nicolescu M.)
1. On the criterion of compactness of A. Kolmogorov, *Acad. Republ. Pop. Române, Bul. Sti. Ser. Mat. Fiz. Chim.*, **2** (1950), 407—415.

Никольский В. Н.
1. Наилучшее приближение и базис в пространстве Фреше, *ДАН СССР*, **59** (1948), 639—642.

Никольский С. М.
1. Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах, *Изв. АН СССР*, сер. матем., **7** (1943), 147—166.

Ниман (Nyman B.)
1. On the one-dimensional translation group and semi-group in certain function spaces. Dissertation. University of Uppsala (1950), *Math. Rev.*, **12** (1951), 108.

Ниренберг (Nirenberg L.), см. также Агмон
1. Remarks on strongly elliptic partial differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, **8** (1955), 648—674.
2*. On nonlinear elliptic partial differential equations and Hölder continuty, *Comm. Pure Appl. Math.*, **6** (1953), 103—157. (Есть русский перевод: сб. *Математика*, **3 : 3** (1959), 9—55.)

Нусбаум (Nussbaum A. E.), см. Девинац

Ньюбург (Newburgh J. D.)
1. The variation of spectra, *Duke Math. J.*, **18** (1951), 165—176.
2. A topology for closed operators, *Ann. of Math.* (2), **53** (1951), 250—255.

Ньютон и Йост (Newton R. G., Jost R.)
1. The construction of potentials from the *S*-matrix for systems of differential equations, *Nuovo Cimento* (10), **1** (1955), 590—622.

Огасавара (Ogasawara T.)
1. Compact metric Boolean algebras and vector lattices, *J. Sci. Hiroshima Univ.*, Ser. A, **11** (1942), 125—128.
2. On Fréchet lattices, I. *J. Sci. Hiroshima Univ.*, Ser. A, **12** (1943), 235—248.
3. Remarks on a vector lattice with a metric function, *J. Sci. Hiroshima Univ.*, Ser. A, **13** (1944), 317—325.
4. Commutativity of Archimedean semi-ordered groups, *J. Sci. Hiroshima Univ.*, Ser. A, **12** (1943), 249—254.
5. Theory of vector lattices, I, II.
    I. *J. Sci. Hiroshima Univ.*, Ser. A, **12** (1942), 17—35.
    II. Там же, **12** (1943), 217—234.
6. Some general theorems and convergence theorems in vector lattices, *J. Sci. Hiroshima Univ.*, Ser. A, **14** (1949), 14—25.
7. On the integral representation of unbounded self-adjoint transformations, *J. Sci. Hiroshima Univ.*, Ser. A, **6** (1936), 279—281.

Огасавара и Маеда (Ogasawara T., Maeda F.)
1. Representation of vector lattices, *J. Sci. Hiroshima Univ.*, Ser. A, **12** (1942), 17—35.

2. Remarks on representation of vector lattices, *J. Sci. Hiroshima Univ.*, Ser. A, **12** (1934), 217—234.

Одэн (Audin M.)

1. Sur certaines singularités des transformations linéaires bornées, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **238** (1954), 2221—2222.

Окстоби (Oxtoby J. C.)

1. Ergodic sets, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **58** (1952), 116—136. (Есть русский перевод: *УМН*, **8**, вып. 5 (1953).)
2. On the ergodic theorem of Hurewicz, *Ann. of Math.* (2), **49** (1948), 872.
3. Invariant measures in groups which are not locally compact, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **60** (1946), 215—237.
4. The category and Borel class of certain subsets of L_p, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **43** (1937), 245—248.

Окстоби и Улам (Oxtoby J. C., Ulam S.)

1. On the existence of a measure invariant under a transformation, *Ann. of Math.* (2), **40** (1939), 560—566.

О'Нилл (O'Neill B.)

1. Essential sets and fixed points, *Amer. J. Math.*, **75** (1953), 497—509.

Оно (Ono T.)

1. A generalization of the Hahn-Banach theorem, *Nagoya Math. J.*, **6** (1953), 171—176.
2. Local theory of rings of operators, I, II, *J. Math. Soc. Japan*, **10** (1958), 184—216, 438—458.

Орихара (Orihara M.)

1. On the regular vector lattice, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **18** (1942), 525.

Орлич (Orlicz W.), см. также Алексевич, Бирнбаум и Мазур

1. Über unbedingte Konvergenz in Funktionräumen, I, II.
   I. *Studia Math.*, **4** (1933), 33—37.
   II. Там же, **4** (1933), 41—47.
2. Über konjugierte Exponentenfolgen, *Studia Math.*, **3** (1931), 200—211.
3. Über eine gewisse Klasse von Räumen von Typus *B*, *Bull. Int. Acad. Polon. Sci.*, Sér. A (1932), 207—220.
4. Ein Satz über die Erweiterung von linearen Operationen, *Studia. Math.*, **5** (1934), 127—140.
5. Sur les opérations linéaires dans l'espace des fonctions bornées, *Studia Math.*, **10** (1948), 60—89.
6. Linear operations in Saks spaces (I), *Studia Math.*, **11** (1950), 237—272.
7. Über Folgen linearer Operationen, die von einem Parameter abhängen, *Studia Math.*, **5** (1934), 160—170.
8. Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen, I—VI.
   I. *Studia Math.*, **1** (1929), 1—39.
   II. Там же, **1** (1929), 241—255.
   III. *Bull. Int. Acad. Polon. Sci.*, Sér. A, **8—9** (1932), 229—238.
   IV. *Studia Math.*, **5** (1934), 1—14.
   V. Там же, **6** (1936), 20—38.
   VI. Там же, **8** (1939), 141—147.

Орлов С. А.

1. Об индексе дефекта линейных дифференциальных операторов, *ДАН СССР*, **92** (1953), 483—486.

Оухар (Owchar M.)

1. Wiener integrals of multiple variations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **3** (1952), 459—470.

Охира (Ōhira K.)

1. On a certain complete, separable and metric space, *Mem. Fac. Sci. Kyūsyū Univ.*, A, **6** (1951), 9—15.

2. On some characterizations of abstract Euclidean spaces by properties of orthogonality, *Kumamoto J. Sci.*, Ser. A, **1**, № 1 (1952), 23—26.
Паркер (Parker W. V.)
1. Limits to the characteristic roots of a matrix, *Duke Math. J.*, **10** (1943), 479—482.
Пароди М.
1*. Локализация характеристических чисел матриц и ее применения, ИЛ, М., 1960 (1959).
Паули (Pauli W.)
1. Мезонная теория ядерных сил, М., 1947 (1946).
Пеано (Peano G.)
1. Integrazione per serie delle equazioni differenziali lineari, *Atti R. Acc. Sci. Torino*, **22** (1887), 293—302. Немецкий перевод: *Math. Ann.*, **32** (1888), 450—456.
Пейс (Pais A.), см. Йост
Пек (Peck J. E. L.)
1. An ergodic theorem for a noncommutative semi-group of linear operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **2** (1951), 414—421.
Петер и Вейль (Peter F., Weyl H.)
1. Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe, *Math. Ann.*, **97** (1927), 737—755.
Петтис (Pettis B. J.), см. также Данфорд
1. A note on regular Banach spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **44** (1938), 420—428.
2. A proof that every uniformly convex space is reflexive, *Duke Math. J.*, **5** (1939), 249—253.
3. Remarks on a theorem of E. J. McShane, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **2** (1951), 166—171.
4. On integration in vector spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **44** (1938), 277—304.
5. On continuity and openness of homomorphisms in topological groups, *Ann. of Math.* (2), **52** (1950), 293—308.
6. Absolutely continuous functions in vector spaces (abstract), *Bull. Amer. Math. Soc.*, **45** (1939), 677.
7. Differentiation in Banach spaces, *Duke Math. J.*, **5** (1939), 254—269.
8. Linear functionals and completely additive set functions, *Duke Math. J.*, **4** (1938), 552—565.
Пиконе (Picone M.)
1. Sui valori eccezionali di un parametro da cui dipende un'equazione differenziale del secondo ordine, *Ann. R. Scuola Norm. Sup. Pisa* (1), **11** (1910), 1—141.
Пинкерле (Pincherle S.)
1. Funktionaloperationen und -Gleichungen, *Encyklopädie der Math. Wiss.* II, A, **11** (1905), 761—817. Французский перевод: Équations et opérations fonctionnelles, *Enc. des sciences math.*, II, Vol. 5, fasc. 1, № 26, 1—86.
Пинскер А. Г., см. также Канторович Л. В.
1. Об одном классе операций в *К*-пространствах, *ДАН СССР*, **36** (1942), 243—246
2. О нормированных *К*-пространствах, *ДАН СССР*, **33** (1941), 12—15.
3. Универсальные *К*-пространства, *ДАН СССР*, **49** (1945), 8—11.
4. Разложение *К*-пространств на элементарные пространства, *ДАН СССР*, **49** (1945), 168—171.
5. О сепарабельных *К*-пространствах, *ДАН СССР*, **49** (1945), 327—328.
6. Вполне линейные функционалы в *К*-пространствах, *ДАН СССР*, **55** (1947), 303—306.

7. О конкретных представлениях линейных полуупорядоченных пространств, *ДАН СССР*, **55** (1947), 383—386.
Пирс (Pierce R.)
1. Cones and the decomposition of functionals, *Math. Mag.*, **24** (1951), 117—122.
Питт (Pitt H. R.)
1. Some generalizations of the ergodic theorem, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **38** (1942), 325—343.
Планшерель (Plancherel M.)
1. Integraldarstellungen willkürlicher Funktionen, *Math. Ann.*, **67** (1909), 519—534.
Плеснер А. И.
1. О полуунитарных операторах, *ДАН СССР*, **25** (1939), 708—710.
2. Спектральная теория линейных операторов, *УМН*, **9** (1941), 3—125.
3.*Спектральная теория линейных операторов, «Наука», М., 1965.
Плеснер А. И. и Рохлин В. А.
1. Спектральная теория линейных операторов, *УМН*, **1 : 1** (11), (1946), 171—191.
Повзнер А. Я.
1. О некоторых приложениях одного класса гильбертовых пространств функций, *ДАН СССР*, **74** (1950), 13—16.
2. О спектре ограниченных функций, *ДАН СССР*, **57** (1947), 755—758.
3. О спектре ограниченных функций и преобразовании Лапласа, *ДАН СССР*, **57** (1947), 871—874.
4. Об одной общей формуле обращения типа Планшереля, *ДАН СССР*, **57** (1947), 123—125.
5. Об уравнениях типа Штурма — Лиувилля и позитивных функциях, *ДАН СССР*, **43** (1944), 387—391.
6. О дифференциальных уравнениях типа Штурма — Лиувилля на полуоси, *Матем. сб.*, **23** (65), (1948), 3—52.
7. О методе направляющих функционалов М. Г. Крейна, Хрк., *Зап. матем. о-ва* (4), **20** (1950), 43—52.
8. О дифференцировании спектральной функции уравнения Шредингера, *ДАН СССР*, **79** (1951), 193—196.
9*.О разложении произвольной функции по собственным функциям оператора $-\Delta u + cu$, *Матем. сб.*, **32**, 1 (1953).
Пойа (Pólya G.), см. также Харди
1. Remark on Weyl's note «Inequalities between the two kinds of eigenvalues of a linear transformation», *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, **36** (1950), 49—51.
Поллард (Pollard H.)
1. Integral transforms, *Duke Math. J.*, **13** (1946), 307—330.
2. The harmonic analysis of bounded functions, *Duke Math. J.*, **20** (1953), 499—511.
Понтрягин Л. С.
1. Топологические группы, изд. 2-е, М., Гостехиздат, 1954.
Потапов В. П., см. Лившиц М. С.
Поттер (Potter R. L.)
1. On self-adjoint differential equations of the second order, *Pacific J. Math.*, **3** (1953), 467—491.
Прайс (Price G. B.)
1. The theory of integration, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **47** (1940), 1—50.
Прюфер (Prüfer H.)
1. Neue Herleitung der Sturm-Liouvilleschen Reihenentwickelung stetiger Funktionen, *Math. Ann.*, **95** (1926), 499—518.

П т а к (P t á k V.)

1. О полных топологических линейных пространствах, *Чехосл. Матем. журн.*, **3** (78), (1953), 301—364.
2. On a theorem of W. F. Eberlein, *Studia Math.*, **14** (1954), 276—284.
3. Weak compactness in convex topological linear spaces, *Čehoslovack. Mat. Ž.*, **4** (79), (1954), 175—186.
4*. Completness and the open mapping theorem, *Bull. Soc. Math. France*, **86** (1958), 41—74. [Есть русский перевод: сб. *Математика*, **4 : 6** (1960), 39—67.]
5*. On the closed graph theorem, *Чехосл. Матем. ж.*, **9** (84), (1959), 523—527. [Есть русский перевод: сб. *Математика*, **4 : 6** (1960), 69—72.]

П у а н к а р е (P o i n c a r é H.)

1. Sur les groupes continus, *Cambridge Phil. Trans.*, **18** (1899), 220—255. Перепечатано в *Oeuvres*, **3**, 173—212.
2. Sur les équations de la physique mathématique, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **8** (1894), 57—156.

П у л (P o o l e E. G. C.)

1. Introduction to the theory of linear differential equations, Oxford Univ. Press, 1936.

П у т н а м (P u t n a m C. R.), см. также Х а р т м а н П.

1. On normal operators in Hilbert space, *Amer. J. Math.*, **73** (1951), 357—362.
2. On commutators of bounded matrices, *Amer. J. Math.*, **73** (1951), 127—131.
3. On the spectra of commutators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **5** (1954), 929—931.
4. An application of spectral theory to a singular calculus of variations problem, *Amer. J. Math.*, **70** (1948), 780—803.
5. The cluster spectra of bounded potentials, *Amer. J. Math.*, **71** (1949), 612—620.
6. An oscillation criterion involving a minimum principle, *Duke Math. J.*, **16** (1949), 633—636.
7. On the spectra of certain boundary value problems, *Amer. J. Math.*, **71** (1949), 109—111.
8. On isolated eigenfunctions associated with bounded potentials, *Amer. J. Math.*, **72** (1950), 135—147.
9. The comparison of spectra belonging to potentials with a bounded difference, *Duke Math. J.*, **18** (1951), 267—273.
10. On the least eigenvalue of Hill's equation, *Quart. Appl. Math.*, **9** (1951), 310—314.
11. The spectra of quantum-mechanical operators, *Amer. J. Math.*, **74** (1952), 377—388.
12. On the unboundness of the essential spectrum, *Amer. J. Math.*, **74** (1952), 578—585.
13. A sufficient condition for an infinite discrete spectrum, *Quart. Appl. Math.*, **11** (1953), 484—486.
14. On the gap in the spectrum of the Hill equation, *Quart. Appl. Math.*, **11** (1953), 496—498.
15. Integrable potentials and half-line spectra, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **6** (1955), 243—246.
16. On the continuous spectra of singular boundary value problems, *Canadian J. Math.*, **6** (1954), 420—426.
17. Note on a limit-point criterion, *J. London Math. Soc.*, **29** (1954), 125—128.
18. Necessary and sufficient conditions for the existence of negative spectra, *Quart. Appl. Math.*, **13** (1955), 335—337.

Пэли (Paley R. E. A. C.), см. также Литлвуд
1. A proof of a theorem on bilinear forms, *J. London Math. Soc.*, **6** (1931), 226—230.
2. A note on bilinear forms, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **39** (1933), 259—260.
3. Some theorems on orthogonal functions, *Studia Math.*, **3** (1931), 226—238.

Пэли и Винер (Paley R. E. A. C., Wiener N.)
1. Преобразование Фурье в комплексной области, М., 1964 (1934).

Пэли, Винер и Зигмунд (Paley R. E. A. C., Wiener N., Zygmund A.)
1. Notes on random functions, *Math. Zeit.*, **37** (1933), 647—668.

Рабинович Ю. Л.
1. О непрерывной зависимости от параметра спектра симметрического линейного интегрального оператора, *Учен. зап. МГУ*, **148**; Математика, **4** (1951), 181—191.

Радон (Radon J.)
1. Über lineare Funktionaltransformationen und Funktionalgleichungen, *S.-B. Akad. Wiss. Wien*, **128** (1919), 1083—1121. [Есть русский перевод: *УМН*, **1** (1936), 200—227.]
2. Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen, *S.-B. Akad. Wiss. Wien*, **122** (1913), 1295—1438.

Райков Д. А., см. также Гельфанд И. М.
1. Гармонический анализ на коммутативных группах с мерой Хаара и теория характеров, *Труды Матем. ин-та АН СССР*, **14** (1945), 5—86.
2. Новое доказательство единственности меры Хаара, *ДАН СССР*, **34** (1942), 231—233.
3. Положительно определенные функции на коммутативных группах с инвариантной мерой, *ДАН СССР*, **28** (1940), 296—300.

Райнхарт (Rinehart R. F.)
1. The equivalence of definitions of a metric function, *Amer. Math. Monthly*, **62** (1955), 395—414.

Райт (Wright F. B.)
1. Absolute valued algebras, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **39** (1953), 330—332.

Рамасвами (Ramaswami V.)
1. Normed algebras, isomorphism and the associative postulate, *J. Indian Math. Soc.*, **14** (1950), 47—64.

Рапопорт И. М.
1. О сингулярной краевой задаче для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, *ДАН СССР*, **79** (1951), 21—24.
2. Об оценке собственных значений эрмитовых операторов, *ДАН СССР*, **103** (1955), 199—202.

Растон (Ruston A. F.)
1. A note on convexity in Banach spaces, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **45** (1949), 157—159.
2. On the Fredholm theory of integral equations for operators belonging to the trace class of a general Banach space, *Proc. London Math. Soc.* (2), **53** (1951), 109—124.
3. Direct products of Banach spaces and linear functional equations, *Proc. London Math. Soc.* (3), **1** (1951), 327—384.
4. A short proof of a theorem on reflexive spaces, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **45** (1949), 674.
5. Formulae of Fredholm type for compact linear operations on a general Banach space, *Proc. London Math. Soc.* (3), **3** (1953), 368—377.
6. Operators with a Fredholm theory, *J. London Math. Soc.*, **29** (1954), 318—326.

7*. Conjugate Banach spaces, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **53** (1957), 576—580. [Русский перевод: сб. *Математика*, **3**:**6** (1959), 91—96.]

Рашевский П. К.

1. Теория спиноров, *УМН*, **10**, вып. 2 (64), (1955), 3—110.

Рейтер (Reiter H. J.)

1. Investigations in harmonic analysis, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **73** (1952), 401—427.
2. On a certain class of ideals in the L^1-algebra of a locally compact abelian group, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **75** (1953), 505—509.

Рей Пастор (Rey Pastor J.)

1. Functional analysis and the general theory of functions, *Reale Accademia d'Italia, Fondezione Allesandro Volta. Atti dei Convegni.*, **9** (1939), 339—372, Rome, 1943.

Реллих (Rellich F.)

1. Störungstheorie der Spektralzerlegung, *Proc. Internat. Congress of Math. Cambridge, Mass.*, **1** (1950), 606—613.
2. Störungstheorie der Spektralzerlegung, I — V.
   I. *Math. Ann.*, **113** (1936), 600—619.
   II. Там же, **113** (1936), 677—685.
   III. Там же, **116** (1939), 555—570.
   IV. Там же, **117** (1940—1941), 356—382.
   V. Там же, **118** (1941—1943), 462—484.
3. Spektraltheorie in nichtseparabeln Räumen, *Math. Ann.*, **110** (1935), 342—356.
4. Die zulässigen Randbedingungen bei den singulären Eigenwertproblemen der mathematischen Physik, *Math. Zeit.*, **49** (1944), 702—723.
5. Die Eindeutigkeitssatz für die Lösungen quantenmechanische Vertauschungsrelationen, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl.*, (1946), 107—115.
6. Halbbeschränkte gewöhnliche Differentialoperatoren zweiter Ordnung, *Math. Ann.*, **122** (1951), 243—368.
7. Spectral theory of a second order ordinary differential equation, Inst. Math. Sci., New York University, 1951.

Рид (Reid W. T.)

1. Symmetrizable completely continuous linear transformations in Hilbert space, *Duke Math. J.*, **18** (1951), 41—56.
2. Expansion problems associated with a system of linear integral equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **33** (1931), 475—485.
3. A new class of self-adjoint boundary value problems, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **52** (1942), 381—425.

Рикабарра (Ricabarra R. A.), см. Котляр

Риккарт (Rickart C. E.)

1. Integration in a convex linear topological space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **52** (1942), 498—521.
2. An abstract Radon-Nikodým theorem, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **56** (1944), 50—66.
3. Decomposition of additive set functions, *Duke Math. J.*, **10** (1943), 653—665.
4. The singular elements of a Banach algebra, *Duke Math. J.*, **14** (1947), 1063—1077.
5. Isomorphic groups of linear transformations, *Amer. J. Math.*, **72** (1950), 451—464.
6. Banach algebras with an adjoint operation, *Ann. of Math.* (2), **47** (1946), 528—550.
7. The uniqueness of norm problem in Banach algebras, *Ann. of Math.* (2), **51** (1950), 615—628.

8. Representation of certain Banach algebras on Hilbert space, *Duke Math. J.*, **18** (1951), 27—39.
9. On spectral permanence for certain Banach algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **4** (1953), 191—196.
10. General theory of Banach algebras. The university series in highes mathematics, Princeton, 1960.

Рис (Riss J.)
1. Transformation de Fourier des distributions, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **229** (1949), 12—14.

Рисс М. (Riesz M.)
1. Sur les maxima des formes bilinéaires et sur les fonctionnelles linéaires, *Acta Math.*, **49** (1926), 465—497.
2. Sur les ensembles compacts de fonctions sommables, *Acta Sci. Math. Szeged*, **6** (1933), 136—142.
3. Sur les fonctions conjugées, *Math. Zeit.*, **27** (1927), 218—244.
4. L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy, *Acta Math.*, **81** (1949), 1—223.

Рисс Ф. (Riesz F.)
1. Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre, *Atti det IV Congresso Intern. dei Matem., Bologna*, **2** (1908), 18—24.
2. Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen, *Math. Ann.*, **69** (1910), 449—497.
3. Sur certains systèmes singuliers d'équations integrales, *Ann. École Norm. Sup.* (3), **28** (1911), 33—62.
4. Über lineare Funktionalgleichungen, *Acta Math.*, **41** (1918), 71—98. [Есть русский перевод: *УМН*, **1** (1936), 175—199.]
5. Sur les systèmes orthogonaux de fonctions, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **144** (1907), 615—619.
6. Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues, Paris, 1913.
7. Sur les opérations fonctionnelles linéaires, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **149** (1909), 974—977.
8. Sur Theorie des Hilbertschen Raumes, *Acta Sci. Math. Szeged*, **7** (1934), 34—38.
9. Sur une espèce de géométrie analytiques des systèmes de fonctions sommables, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **144** (1907), 1409—1411.
10. Démonstration nouvelle d'un théorème concernant les opérations fonctionnelles linéaires, *Ann. École Norm. Sup.* (3), **31** (1914), 9—14.
11. Sur la répresentation des opérations fonctionnelles linéaires par des intégrales de Stieltjes, *Proc. Roy. Physiog. Soc. Lund*, **21**, № 16 (1952), 145—151.
12. Sur les suites de fonctions mesurables, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **148** (1909), 1303—1305.
13. Sur la convergence en moyenne, I, II.
    I. *Acta Sci. Math. Szeged*, **4** (1928—1929), 58—64.
    II. Там же, **4** (1928—1929), 182—185.
14. Über die linearen Transformationen des komplexen Hilbertschen Raumes, *Acta Sci. Math. Szeged*, **5** (1930—1932), 23—54.
15. Some mean ergodic theorems, *J. London Math. Soc.*, **13** (1938), 274—278.
16. Another proof of the mean ergodic theorem, *Acta Sci. Math. Szeged*, **10** (1941—1943), 75—76.
17. Sur la théorie ergodique des espaces abstraits, *Acta Sci. Math. Szeged*, **10** (1941—1943), 1—20.
18. Sur la théorie ergodique, *Comment. Math. Helv.*, **17** (1945), 221—239.
19. On a recent generalization of G. D. Birkhoff's ergodic theorem, *Acta Sci. Math. Szeged*, **11** (1946—1948), 193—200.

20. Über quadratische Formen von unendlich vielen Veränderlichen, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl.* (1910), 190—195.
21. Sur les fonctions des transformations hermitiennes dans l'espace de Hilbert, *Acta Sci. Math. Szeged*, **7** (1935), 147—159.
22. Über Sätze von Stone und Bochner, *Acta Sci. Math. Szeged*, **6** (1933), 184—198.
23. Sur quelques notions fondamentales dans la théorie générale des opérations linéaries, *Ann. of Math.* (2), **41** (1940), 174—206. [Есть русский перевод: *УМН*, **1 : 2** (2), (1946), 147—178.]

Рисс Ф. и Лорх (Riesz F., Lorch E. R.)
1. The integral representation of unbounded self-adjoint transformations in Hilbert space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **39** (1936), 331—340.

Рисс Ф. и Секефальви-Надь (Riesz F., Sz.-Nagy B.)
1. Лекции по функциональному анализу, ИЛ, М., 1954 (1952).
2. Über Kontraktionen des Hilbertschen Raumes, *Acta Sci. Math. Szeged*, **10** (1941—1943), 202—205.

Робертс (Roberts B. D.)
1. On the geometry of abstract vector spaces, *Tôhoku Math. J.*, **39** (1934), 42—59.

Робертсон А. и Робертсон У. (Robertson A. and W.)
1*. On the closed graph theorem, *Proc. Glas. Math. Ass.*, **3** (1956), Part I, 9—12. [Русский перевод: сб. *Математика*, **4 : 6** (1960), 73—77.]

Робисон (Robison G. B.)
1. Invariant integrals over a class of Banach spaces, *Pacific J. Math.*, **4** (1954), 123—150.

Рогозинский (Rogosinski W. W.), см. Макинтайр

Рогозинский и Шапиро (Rogosinski W. W., Shapiro H. S.)
1. On certain extremum problems for analytic functions, *Acta Math.*, **90** (1953), 287—318.

Роджерс (Rogers C. A.), см. Дворецкий

Розенблат (Rosenblatt M.)
1. On a class of Markoff processes, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **71** (1951), 120—135.

Розенблюм (Rosenbloom P. C.)
1. Elements of mathematical logic. Dover Publications, New York, 1950.
2. Perturbations of linear operators in Banach spaces, *Arch. Math.*, **6** (1955), 89—101.

Розенталь (Rosenthal A.), см. Гартогс и Хан

Розенфельд (Rosenfeld N. S.)
1. The eigenvalues of a class of singular differential operators, *Comm. Pure Appl. Math.*, **13** (1960), 395—405.

Россер (Rosser J. B.)
1. Logic for mathematicians, McGraw-Hill Co., New York, 1953.

Рота (Rota G. C.)
1. Extension theory of ordinary linear differential operators. Dissertation, Yale University, 1956.

Роте (Rothe E. H.)
1. Zur Theorie der topologischen Ordnung und der Vektorfelder in Banachschen Räumen, *Compositio Math.*, **5** (1937—1938), 177—196.
2. Topological proofs of uniqueness theorems in the theory of differential and integral equations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **45** (1939), 606—613.
3. Critical points and gradient fields of scalars in Hilbert space, *Acta Math.*, **85** (1951), 73—98.
4. Gradient mappings, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **59** (1953), 5—19.

5. Completely continuous scalars and variational methods, *Ann. of Math.* (2), **47** (1946), 580—592.
6. Gradient mappings and extrema in Banach spaces, *Duke Math. J.*, **15** (1948), 421—431.
7. Mapping degree in Banach spaces and spectral theory, *Math. Z.*, **63** (1955), 195—218.

Рохлин В. А., см. также Плеснер А. И.
1. Об эндоморфизмах компактных коммутативных групп, *Изв. АН СССР*, сер. матем., **13** (1949), 329—340.
2. Избранные вопросы метрической теории динамических систем, *УМН*, **4 : 2** (30), (1949), 57—128.
3. О разложении динамической системы на транзитивные компоненты, *Матем. сб.*, **25** (67), (1949), 235—249.
4*. Об энтропии метрического автоморфизма, *ДАН СССР*, **124** (1959), 980—983.
5*. Об основных понятиях теории меры, *Матем. сб.*, **25** (67), (1949), 107—150.
6*. Новый прогресс в теории преобразований с инвариантной мерой, *УМН*, **15 : 4** (1960), 3—26.

Рубин и Стоун (Rubin H., Stone M. H.)
1. Postulates for generalizations of Hilbert space, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **4** (1953), 611—616.

Рудин (Rudin W.)
1. Analyticity and the maximum modulus principle, *Duke Math. J.*, **20** (1953), 449—457.

Рутицкий Я. Б., см. Красносельский М. А.

Рутман М. А., см. Крейн М. Г. и Мильман Д. П.

Рутовиц (Rutovitz D.)
1. On the L_p-convergence of eigenfunction expansions, *Quart. J. Math. Oxford* (2), **7** (1956), 24—38.

Рыль-Нарджевский (Ryll-Nardzewski C.), см. также Хартман С.
1. On the ergodic theorems, I, II.
   I. Generalized ergodic theorems, *Studia Math.*, **12** (1951), 65—73.
   II. Ergodic theory of continued fractions, там же, **12** (1951), 74—79.

Сакс (Saks S.), см. также Банах
1. Теория интеграла, ИЛ, М., 1949 (1937).
2. On some functionals, I, II.
   I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **35** (1933), 549—556.
   II. Там же, **41** (1937), 160—170.
3. Addition to the note on some functionals, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **35** (1933), 967—974.
4. Integration in abstract metric spaces, *Duke Math. J.*, **4** (1938), 408—411.
5. Sur les fonctionnelles de M. Banach et leurs applications aux développements de fonctions, *Fund. Math.*, **10** (1928), 189—196.

Сакс и Тамаркин (Saks S., Tamarkin J. D.)
1. On a theorem of Hahn-Steinhaus, *Ann. of Math.* (2), **34** (1933), 595—601.

Салем (Salem R.)
1. Sur une extension du théorème de convexité de M. Marcel Riesz, *Colloq. Math.*, **1** (1947), 6—8.

Салем и Зигмунд (Salem R., Zygmund A.)
1. A convexity theorem, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **34** (1948), 443—447.

Сан Хуан (San Juan R.)
1. Generalization of a theorem of Steinhaus on linear functionals, *Las Ciencias. Madrid*, **17**, № 2 (1952), 205—208.

Сарджент (Sargent W. L. C.)
1. On linear functionals in spaces of conditionally integrable functions, *Quart. J. Math.*, Oxford, Ser. (2), **1** (1950), 288—298.
2. On some theorems of Hahn, Banach and Steinhaus, *J. London Math. Soc.*, **28** (1953), 438—451.

Сас (Szász O.), см. также Гильб
1. Über die Approximation stetiger Funktionen durch lineare Aggregate von Potenzen, *Math. Ann.*, 77 (1915—1916), 482—496.

Себаштьян-и-Сильва (Sebastião e Silva J.)
1. Integration and derivation in Banach spaces, *Univ. Lisboa. Revista Fac. Ci. A. Ci. Mat.* (2), **1** (1950), 117—166. Исправ. (1951), 401—402.
2. Analytic functions and functional analysis, *Portugaliae Math.*, **9** (1950), 1—130.
3. Sui fondamenti della teoria dei funzionali analitici, *Portugaliae Math.*, **12** (1953), 1—47.
4*. Su certe classi di spazi locamente convessi importanti per le applicazioni, *Rendiconti di matematica e della sue applicazioni*, *Roma* (5), **14** (1955), 388—410. Русский перев.: сб. *Математика*, **1:1** (1957), 60—77.

Секефальви-Надь (Sz.-Nagy B. von), см. также Рисс Ф.
1. Sur les lattis linéaires de dimension finie, *Comm. Math. Helv.*, **17** (1945), 209—213.
2. Perturbations des transformations linéaires fermées, *Acta Sci. Math. Szeged*, **14** (1951), 125—137.
3. Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes. Ergebnisse der Math., V. 5, J. Springer, Berlin, 1942.
4. Perturbations des transformations autoadjointes dans l'espace de Hilbert, *Comment. Math. Helv.*, **19** (1946—1947), 347—366.
5. On the set of positive functions in L_2, *Ann. of Math.* (2), **39** (1938), 1—13.
6. On semi-groups of self-adjoint transformations in Hilbert space, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **24** (1938), 559—560.
7. On uniformly bounded linear transformations in Hilbert space, *Acta Sci. Math. Szeged*, **11** (1947), 152—157.
8. Sur les contractions de l'espace de Hilbert, *Acta Sci. Math. Szeged*, **15** (1953), 87—92; ч. II, там же, **18** (1957), 1—14. [Есть русский перевод: сб. *Математика*, **3 : 6** (1959), 73—77 и 79—89.]
9. A moment problem for self-adjoint operators, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **3** (1952), 285—293.
10. Transformations de l'espace de Hilbert, fonctions de type positif sur un groupe, *Acta Sci. Math. Szeged*, **15** (1954), 104—114.
11. Prolongements des transformations de l'espace de Hilbert qui sortent de cet espace. Akad. Kiadó, Budapest, 1955 (приложение к Рисс и Секефальви-Надь [1]). [Есть русский перевод: сб. *Математика*, **9:6** (1965), 109—144.]
12. On a spectral problem of Atkinson, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **3** (1952), 61—66.
13. On the stability of the index of unbounded linear transformations, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **3** (1952), 49—52.
14. Über messbare Darstellungen Liescher Gruppen, *Math. Ann.*, **112** (1936), 286—296.
15. Expansion theorems of Paley — Wiener type, *Duke Math. J.*, **14** (1947), 975—978.

Сигал (Segal I. E.), см. также Данфорд
1. Postulates for general quantum mechanics, *Ann. of Math.* (2), **48** (1947), 930—948.
2. The group algebra of a locally compact group, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **61** (1947), 69—105.

3. The span of the translations of a function in a Lebesgue space, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **30** (1944), 165—169.
4. An extension of Plancherel's formula to separable unimodular groups, *Ann. of Math.* (2), **52** (1950), 272—292.
5. Decompositions of operator algebras, I, II. *Memoirs Amer.Math Soc.*, № 9 (1951).
6. Invariant measures on locally compact spaces, *J. Indian Math. Soc.*, **13** (1949), 105—130.

Сикорский (Sikorski R.)
1. On multiplication of determinants in Banach spaces, *Bull. Acad. Polon. Sci. Cl.* III, **1** (1953), 219—221.
2. On Leżański's determinants of linear equations in Banach spaces, *Studia Math.*, **14** (1953), 24—48.

Сильва Диас (da Silvas Dias C. L.).
1. Topological vector spaces and their application in analytic functional spaces, *Bol. Soc. Mat. São Paulo*, **5** (1950), 1—58.

Сильверман (Silverman R. J.)
1. Invariant linear functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **81** (1956), 411—424.

Сильвестер (Sylvester J. J.)
1. On the equation to the secular inequalities in the planetary theory, *Phil. Mag.*, **16** (1883), 267—269.
2. Sur les puissances et les racines de substitutions linéaires, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **94** (1882), 55—59.

Синай Я. Г.
1*. О понятии энтропии динамической системы, *ДАН СССР*, **124** (1959), 768—771.
2*. О потоках с конечной энтропией, *ДАН СССР*, **125** (1959), 1200—1202.

Сингер и Уэрмер (Singer I. M., Wermer J.)
1. Derivations on commutative normed algebras, *Math. Ann.*, **129** (1955), 260—264.

Сирвинт Ю. Ф.
1. Об интегральных преобразованиях пространства L, *ДАН СССР*, **18** (1938), 255—257.
2. Слабая компактность в банаховых пространствах, *ДАН СССР*, **28** (1940), 199—201.
3. Weak compactness in Banach spaces, *Studia Math.*, **11** (1950), 71—94.

Сирота (Shirota T.)
1. A generalization of a theorem of I. Kaplansky, *Osaka Math. J.*, **4** (1952), 121—132.

Сирс (Sears D. B.)
1. On the solutions of a linear second order differential equation which are of integrable square, *J. London Math. Soc.*, **24** (1949), 207—215.
2. Note on the uniqueness of Green's functions associated with certain differential equations, *Canadian J. Math.*, **2** (1950), 314—325.
3. On the spectrum of a certain differential equation, *J. London Math. Soc.*, **26** (1951), 205—210.
4. An expansion in eigenfunctions, *Proc. London Math. Soc.* (2), **53** (1951), 396—421.
5. Some properties of a differential equation, *J. London Math. Soc.*, **27** (1952), 180—188.
6. Integral transforms and eigenfunction theory, *Quart. J. Math. Oxford* (2), **5** (1954), 47—58.
7. Some properties of a differential equation, *J. London Math. Soc.*, **29** (1954), 354—366.

Сирс и Титчмарш (Sears D. B., Titchmarsh E. C.)
1. Some eigenfunction formulae, *Quart. J. Math. Oxford* (2), **1** (1950), 165—175.
Скороход А. В., см. Костюченко
Слободянский М. Г.
1. Об оценке для собственных значений оператора, *ПММ*, **19** (1955), 295—314.
Смайли (Smiley M. F.)
1. A remark on S. Kakutani's characterization of (L)-spaces, *Ann. of Math.* (2), **43** (1942), 528—529.
Смит (Smith K. T.), см. также Аронштайн и Доногю
1. Sur le théorème spectral, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **234** (1952), 1024—1025.
Смитис (Smithies F.)
1. The Fredholm theory of integral equations, *Duke Math. J.*, **8** (1941), 107—130.
2. A note on completely continuous transformations, *Ann. of Math.* (2), **38** (1937), 626—630.
Соболев С. Л.
1. Уравнения математической физики, Гостехиздат, М.—Л., 1950.
2. Об одной теореме функционального анализа, *Матем. сб.*, **4** (46), (1938), 471—498.
3*. Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Л., 1950.
Собчик (Sobczyk A.), см. также Боненблуст
1. Projections in Minkowski and Banach spaces, *Duke Math. J.*, **8** (1941), 78—106.
2. Projection of the space (m) on its subspace (c_0), *Bull. Amer. Math. Soc.*, **47** (1941), 938—947.
3. On the extension of linear transformations, *Trans.. Amer. Math. Soc.*, **55** (1944), 153—169.
Соломяк М. З.
1. О собственных числах и собственных векторах возмущенного оператора, *ДАН СССР*, **90** (1953), 29—32.
Сонин Н. Я.
1. Recherches sur les fonctions cylindriques et le developpement des fonctions continues en séries, *Math. Ann.*, **16** (1880), 1—80.
Спарре Андерсен и Йессен (Sparre Andersen E., Jessen B.)
1. Some limit theorems on integrals in an abstract set, *Danske Vid. Selsk. Math.-Fys. Medd.*, **22**, № 14 (1946).
2. On the introduction of measures in infinite product sets, *Danske Vid. Selsk. Math.-Fys. Medd.*, **25**, № 4 (1948).
Спрагенс (Spragens W. H.)
1. On series of Walsh eigenfunctions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **2** (1951), 202—204.
Сташевская В. В.
1. Об обратных задачах спектрального анализа для одного класса дифференциальных уравнений, *ДАН СССР*, **93** (1953), 409—411.
Стейнберг (Steinberg H.)
1. Diffusion processes with absorption. Thesis, Yale Univ., 1954.
Стеклов В. А.
1. Sur les expressions asymptotiques de certaines fonctions définies par des équations différentielles linéaires du deuxième ordre, et leurs applications au problème du développement d'une fonction arbitraire en séries procédant suivant les dites fonctions, Харьков, *Сообщения матем. об-ва* (2), **10** (2—6), (1907—1909), 97—199.

Степанов В. В.
1. Sur une extension du théorème ergodique, *Compositio Math.*, **3** (1936), 239—253.
Стивенсон и Бассали (Stevenson A. F., Bassali W. A.)
1. On the possible forms of differential equation which can be factorized by the Schrödinger-Infeld method, *Canad. J. Math.*, **4** (1952), 385—395.
Стильтьес (Stieltjes T. J.)
1. Recherches sur les fractions continues, *Ann. Fac. Sci. Toulouse* (1), **8**, J. (1894), 1—22.
Стокс (Stokes G. G.)
1. On the critical values of the sums of periodic series, *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, **8** (1849), 533—583.
Стоун (Stone M. H.), см. также Рубин, Леньель, Данфорд
1. Applications of the theory of Boolean rings to general topology, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **41** (1937), 375—481.
2. Convexity. Mimeographed lecture notes, The University of Chicago, 1946.
3. Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis, *Amer. Math. Soc. Colloquium Pub.*, vol. 15, New York, 1932.
4. The generalized Weierstrass approximation theorem, *Math. Mag.*, **21** (1947—1948), 167—184, 237—254.
5. On the compactification of topological spaces, *Ann. de la Soc. Polon. de Math.*, **21** (1948), 153—160.
6. Notes on integration, I—IV.
I. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **34** (1948), 336—342.
II. Там же, **34** (1948), 447—455.
III. Там же, **34** (1948), 483—490.
IV. Там же, **35** (1949), 50—58.
7. A general theory of spectra, I, II.
I. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **26** (1940), 280—283.
II. Там же, **27** (1941), 83—87.
8. Boundedness properties in function-lattices, *Canad. J. Math.*, **1** (1949), 176—186.
9. The theory of representations for Boolean algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **40** (1936), 37—111.
10. Linear transformations in Hilbert space, I—III.
I. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **15** (1929), 198—200.
II. Там же, **15** (1929), 423—425.
III. Там же, **16** (1930), 172—175.
11. On the theorem of Gelfand-Mazur, *Ann. Soc. Polon. Math.*, **25** (1952), 238—240 (1953).
12. On the foundations of harmonic analysis, *Proc. Roy. Physiog. Soc. Lund*, **21**, № 17 (1952), 152—172.
13. On unbounded operators in Hilbert space, *J. Indian Math. Soc.*, **15** (1951), 155—192 (1952).
14. On a theorem of Pólya, *J. Indian Math. Soc.*, **12** (1948), 1—7.
15. The algebraization of harmonic analysis, *Math. Student*, **17** (1949), 81—92.
16. On one-parameter unitary groups in Hilbert space, *Ann. of Math.* (2), **33** (1932), 643—648.
17. Certain integrals analogous to Fourier integrals, *Math. Zeit.*, **28** (1928), 654—676.
18. An unusual type of expansion problem, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **26** (1924), 335—355.
19. A comparison of the series of Fourier and Birkhoff, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **28** (1926), 695—761.

20. Irregular differential systems of order two and the related expansion problem, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **29** (1927), 23—53.
21. The expansion problems associated with regular differential systems of the second order, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **29** (1927), 826—844.

Стюарт (Stewart F. M.)
1. Integration in noncommutative systems, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **68** (1950), 76—104.

Суноути Г. (Sunouchi G.), см. также Идзуми
1. On the sequence of additive set functions, *J. Math. Soc. Japan*, **3** (1951), 290—295.

Суноути С. (Sunouchi S.), см. Накамура

Суноути Х. (Sunouchi H.)
1. On the integral representations of bilinear functionals, *Proc. Japan Acad.*, **27** (1951), 159—161.

Сухомлинов Г. А.
1. О продолжении линейных функционалов в комплексном и кватернионном линейном пространстве, *Матем. сб.*, **3** (45), (1938), 353—358.

Тагамлицкий (Tagamlitzki Y.)
1. Sur quelques applications de la théorie générale des espaces vectoriels partiellement ordonnés, *Annuaire* (*Godišnik*) *Fac. Sci. Phys. Math., Univ. Sofia*, Livre 1, Partie II, **45** (1949), 263—286.
2. Zur Geometrie des Kegels in den Hilbertschen Räumen, *Annuaire* (*Godišnik*) *Fac. Sci. Phys. Math., Univ. Sofia*, Livre 1, Partie II, **47** (1952), 85—107.

Такахаси (Takahashi T.)
1. On the compactness of the function-set by the convergence in mean of general type, *Studia Math.*, **5** (1934), 141—150.

Талдыкин А. Т.
1. О линейных уравнениях в гильбертовом пространстве, *Матем. сб.*, **29** (71), (1951), 529—550. Исправ. там же, **30** (72), (1952), 463.

Тамаркин (Tamarkin J. D.), см. также Данфорд, Сакс, Хилле, Шохат
1. On the compactness of the space L_p, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **38** (1932), 79—84.
2. Sur quelques points de la théorie des équations différentielles linéaires ordinaires et sur la généralisation de la série de Fourier, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **24** (1912), 345—382.
3. Some general problems of the theory of ordinary linear differential equations and expansions of an arbitrary function in a series of fundamental functions, *Math. Zeit.*, **27** (1927), 1—54.

Тамаркин и Зигмунд (Tamarkin J. D., Zygmund A.)
1. Proof of a theorem of Thorin, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **50** (1944), 279—282.

Тейлор (Taylor A. E.), см. также Бохнер.
1. The extension of linear functionals, *Duke Math. J.*, **5** (1939), 538—547.
2. The weak topologies of Banach spaces, *Revista Ci., Lima*, **42** (1940), 355—366; **43** (1941), 465—474; **44** (1942), 45—63.
3. The weak topologies of Banach spaces, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **25** (1939), 438—440.
4. On certain Banach spaces whose elements are analytic functions, *Actas Acad. Ci. Lima*, **12** (1949), 31—43.
5. Weak convergence in the space H^p, *Duke Math. J.*, **17** (1950), 409—418.
6. New proofs of some theorems of Hardy by Banach space methods, *Math. Mag.*, **23** (1950), 115—124.
7. Banach spaces of functions analytic in the unit circle, I, II.
   I. *Studia Math.*, **11** (1950), 145—170.
   II. Там же, **12** (1951), 25—50.

8. Conjugations of complex linear spaces, *Univ. California Publ. Math.*, 2 (1944), 85—102.
9. Spectral theory of unbounded closed operators. Proc. Symposium on Spectral Theory and Differential Problems (1951), 267—275. Oklahoma Agricultural and Mechanical College, Stillwater, Oklahoma.
10. Analysis in complex Banach spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **49** (1943), 652—669.
11. Spectral theory of closed distributive operators, *Acta Math.*, **84** (1951), 189—224.
12. The resolvent of a closed transformation, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **44** (1938), 70—74.
13. Linear operations which depend analytically upon a parameter, *Ann. of Math.* (2), **39** (1938), 574—593.
14. A note on unconditional convergence, *Studia Math.*, **8** (1939), 148—153.

Тейлор и Халбери (Taylor A. E., Halbury C. J. A.)

1*. General theorems about a bounded linear operator and its conjugate, *J. Reine Angew. Math.*, **198** (1957), 93—111. [Есть русский перевод: сб. *Математика*, **3 : 1** (1959), 69—89.]

Тейхмюллер (Teichmüller O.)

1. Braucht der Algebraiker das Auswahlaxiom? *Deutsche Math.*, **4** (1939), 567—577.
2. Operatoren im Wachsschen Raum, *J. Reine Angew. Math.*, **174** (1935), 73—124.

Темпль (Temple G.)

1. The computation of characteristic numbers and characteristic functions, *Proc. London Math. Soc.* (2), **29** (1929), 257—280.

Теплиц (Toeplitz O.), см. также Кёте и Хеллингер

1. Die linearen vollkommenen Räume der Funktiontheorie, *Comment. Math. Helv.*, **23** (1949), 222—242.
2. Über allgemeine lineare Mittelbildungen, *Prace Math.-Fiz.*, **22** (1911), 113—119.

Тингли (Tingley A. J.)

1. A generalization of the Poisson formula for the solution of the heat flow equation. Dissertation, Univ. of Minnesota, 1952.

Титов Н. С.

1. Различные виды сходимости элементов и линейных операторов в банаховских пространствах, *ДАН СССР*, **52** (1946), 573—576.
2. К вопросу о различных видах сходимости элементов и линейных операторов в банаховских пространствах, *УМН*, **1**, вып. 5—6 (1946), 15—16.

Титчмарш (Titchmarsh E. C.), см. также Сирс

1. Теория функций, М., Гостехиздат, 1951 (1932).
2. Some theorems of perturbation theory, I—IV.
   I. *Proc. Roy. Soc. London*, Ser. A, **200** (1949), 34—46.
   II. Там же, **201** (1950), 473—479.
   III. Там же, **207** (1951), 321—328.
   IV. Там же, **210** (1951), 30—47.
3. Введение в теорию интегралов Фурье, М.— Л., Гостехиздат, 1948 (1937).
4. Weber's integral theorem, *Proc. Lond. Math. Soc.* (2), **22** (1923), 15—28.
5. On expansion in eigenvalues, I — VIII.
   I. *Proc. Lond. Math. Soc.*, **14** (1939), 274—278.
   II. *Quart. J. Math. Oxford*, **11** (1940), 129—140.
   III. Там же, **11** (1940), 141—145.
   IV. Там же, **12** (1941), 33—50.
   V. Там же, **12** (1941), 89—107.

VI. Там же, **12** (1941), 154—166.
VII. Там же, **16** (1945), 103—114.
VIII. Там же, **16** (1945), 115—128.
6. An eigenfunction problem occuring in quantum mechanics, *Quart. J. Math. Oxford*, **13** (1942), 1—10.
7. On the eigenvalues of differential equations, *J. London Math. Soc.*, **19** (1944), 66—68.
8. On the discreteness of the spectrum associated with certain differential equations, *Ann. Math. Pura Appl.* (4), **28** (1949), 141—147.
9. On the uniqueness of Green's function associated with a second order differential operator, *Canadian J. Math.*, **1** (1949), 191—198.
10. Eigenfunction problems with periodic potentials, *Proc. Roy. Soc. London*, Ser. A, **203** (1950), 501—514.
11. On the discreteness of spectra of differential equations, *Acta Sci. Math. Szeged*, **12**, Pars B (1950), 16—18.
12. On the summability of eigenfunction expansions, *Quart. J. Math. Oxford* (2), **2** (1951), 250—268.
13. Travaux récents sur la théorie des fonctions charactéristiques, *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège*, **20** (1951), 543—561.
14. On the convergence of eigenfunction expansions, *Quart. J. Math. Oxford* (2), **3** (1952), 139—144.
15. Some properties of eigenfunction expansions, *Quart. J. Math. Oxford* (2), **5** (1954), 59—70.
16. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями 2-го порядка, ч. I, ИЛ, М., 1960; ч. II, ИЛ, М., 1961 (1946).

Тихонов А. Н.
1. Ein Fixpunktsatz, *Math. Ann.*, **111** (1935), 767—776.

Томас (Thomas J.)
1. Untersuchungen über das Eigenwertproblem

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)\frac{dy}{dx}\right)+\lambda g(x)\,y=0,\quad \int_a^b A(x)\,y(x)dx=\int_a^b B(x)\,y(x)dx=0,$$

Math. Nachr., **6** (1951), 229—261.

Томита (Tomita M.)
1. On the regularly convex hull of a set in a conjugate Banach space, *Math. J. Okayama Univ.*, **3** (1954), 143—145.

Торин (Thorin G. O.)
1. Convexity theorems, *Comm. Sém. Math. Univ. Lund*, № 9, 1948.
2. An extension of convexity theorem due to M. Riesz, *Comm. Sém. Math. Univ. Lund*, № 4, 1939.
3*. Convexity theorems, These University of Lund, 1948. [Есть русский перевод: сб. *Математика*, **1 : 3** (1957), 41—78.]

Торнхейм (Tornheim L.)
1. Normed fields over the real and complex fields, *Michigan Math. J.*, **1** (1952), 61—68.

Трансю (Transue W.), см. Морс М.

Тулайков (Tulajkov A.)
1. Zur Kompaktheit im Raum L_p für $p=1$, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl.* (1933), 167—170.

Тьюки (Tukey J. W.)
1. Some notes on the separation of convex sets, *Portugaliae Math.*, **3** (1942), 95—102.

Уайберн Дж. (Whyburn G. T.)
1. Analytic topology, Amer. Math. Soc. Colloq. Pub., v. 28, New York, 1942.

2. Open mappings on locally compact spaces, *Mem. Amer. Math. Soc.*, № 1, New York, 1950.

Уайберн У. (Whyburn W. M.)

1. Differential equations with general boundary conditions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **48** (1942), 692—704.

Уайлдер Р. (Wilder R. L.)

1. Introduction to the foundations of mathematics. Wiley, New York, 1952.

Уайлдер С. (Wilder C. E.)

1. Expansion problems of ordinary linear differential equations with auxiliary conditions at more than two points, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **18** (1917), 415—442.
2. Problems in the theory of ordinary linear differential equations with auxiliary conditions at more than two points, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **19** (1918), 157—186.

Уиддер (Widder D. V.), см. также Хиршман

1. The Laplace transform. Princeton Univ. Press, Princeton, 1941.
2. Inversion formulas for convolution transforms, *Duke Math. J.*, **14** (1947), 217—249.
3. The convolution transform, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **60** (1954), 444—456.

Уиддер и Хиршман (Widder D. V., Hirschman I. I.)

1. The inversion of a general class of convolution transforms, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **66** (1949), 135—201.
2. A representation theory for a general class of convolution transforms, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **67** (1949), 69—97.
3. Convolution transforms with complex kernels, *Pacific J. Math.*, **1** (1951), 211—225.

Уилкинз (Wilkins J. E., Jr.)

1. Definitely self-conjugate adjoint integral equations, *Duke Math. J.*, **11** (1944), 155—166.

Уинтнер (Wintner A.), см. также Винер и Хартман П.

1. Spectraltheorie der unendlichen Matrizen. Hirzel, Leipzig, 1929.
2. Zur Theorie der beschränkten Bilinearformen, *Math. Z.*, **30** (1929), 228—289.
3. The unboundedness of quantum-mechanical matrices, *Physical Rev.*, **71** (1947), 738—739.
4. (L_2)-connections between the kinetic and potential energies of linear systems, *Amer. J. Math.*, **69** (1947), 5—13.
5. On the Laplace-Fourier transcendents occurring in mathematical physics, *Amer. J. Math.*, **69** (1947), 87—98.
6. Asymptotic integrations of the adiabatic oscillator, *Amer. J. Math.*, **69** (1947), 251—272.
7. Stability and high frequency, *J. Appl. Physics*, **18** (1947), 941—942.
8. Stability and spectrum in the wave mechanics of lattices, *Phys. Rev.*, **72** (1947), 81—82.
9. On the normalization of charateristic differentials in continuous spectra, *Phys. Rev.*, **72** (1947), 516—517.
10. On the location of continuous spectra, *Amer. J. Math.*, **70** (1948), 22—30.
11. Asymptotic integrations of the adiabatic oscillator in its hyperbolic range, *Duke Math. J.*, **15** (1948), 55—67.
12. On Dirac's theory of continuous spectra, *Phys. Rev.*, **73** (1948), 781—785.
13. A new criterion for non-oscillatory differential equations, *Quart. Appl. Math.*, **6** (1948), 183—185.
14. A criterion of oscillatory stability, *Quart. Appl. Math.*, **7** (1949), 115—117.

15. A priori Laplace transformation of linear differential equations, *Amer. J. Math.*, **71** (1949), 587—594.
16. On almost free linear motions, *Amer. J. Math.*, **71** (1949), 595—602.
17. On the smallness of isolated eigenfunctions, *Amer. J. Math.*, **71** (1949), 603—611.
18. A criterion for the non-existence of L_2-solutions of a non-oscillatory differential equation, *J. London Math. Soc.*, **25** (1950), 347—351.
19. On the non-existence of conjugate points, *Amer. J. Math.*, **73** (1951), 368—380.
20. On linear instability, *Quart. Appl. Math.*, **13** (1955), 192—195.

Уитни (Whitney H.)
1. On ideals of differentiable functions, *Amer. J. Math.*, **70** (1948), 635—658.

Улам (Ulam S.), см. Мазур и Окстоби

Умегаки (Umegaki), см. Накамура

Уоллах (Wallach S.)
1. On the location of spectra of differential equations, *Amer. J. Math.*, **70** (1948), 833—841.
2. The spectra of periodic potentials, *Amer. J. Math.*, **70** (1948), 842—848.

Уолтерс (Walters S. S.)
1. The space H^p with $0<p<1$, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **1** (1950), 800—805.
2. Remarks on the space H^p, *Pacific J. Math.*, **1** (1951), 455—471.

Уолш (Walsh J. L.)
1. On the convergence of the Sturm-Liouville series, *Ann. of Math.* (2), **24** (1923), 109—120.
2. Über die Entwicklung einer analytischen Funktion nach Polynomen, *Math. Ann.*, **96** (1926), 430—436.
3. Über die Entwicklung einer Funktion einer komplexen Veränderlichen nach Polynomen, *Math. Ann.*, **96** (1926), 437—450.
4. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области, ИЛ, М., 1961 (1935).

Уорд (Ward L. E.)
1. A third order irregular boundary value problem and the associated series, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **34** (1932), 417—434.

Уэрмер (Wermer J.), см. также Сингер
1. The existence of invariant subspaces, *Duke Math. J.*, **19** (1952), 615—622.
2. Invariant subspaces of bounded operators. Proc. XII Scand. Math. Congress, Lund (1953).
3. Commuting spectral measures on Hilbert space, *Pacific J. Math.*, **4** (1954), 355—361.
4. On invariant subspaces of normal operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **3** (1952), 270—277.
5. On restrictions of operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **4** (1953), 860—865.
6. On algebras of continuous functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **4** (1953), 866—869.
7. On a class of normed rings, *Arkiv. för Mat.*, **2** (1953), 537—551.
8. Ideals in a class of commutative Banach algebras, *Duke Math. J.*, **20** (1953), 273—278.
9. Algebras with two generators, *Amer. J. Math.*, **76** (1954), 853—859.
10. Subalgebras of the algebra of all continuous complex-valued functions on the circle, *Amer. J. Math.*, **78** (1956), 225—242.
11. Некоторые вопросы теории приближений, ИЛ, М., 1963 (1955).

Фаге М. К.
1. О симметричности и симметризуемости функции влияния, *Матем. сб.*, **32** (74), (1953), 345—352.
2. Характеристическая функция одноточечной краевой задачи для обык-

новенного линейного дифференциального уравнения второго порядка, *ДАН СССР*, **96** (1954), 929—932.

Фадеев Л. Д.

1.*Единственность решения обратной задачи рассеяния, *Вестник ЛГУ*, 7 (2), (1956), 123—130.

Фантапье (Fantappiè L.)

1. La teoria dei funzionali analitici, le sue applicazioni e i suoi possibili indirizzi, *Reale Accademia d'Italia, Fondazion Alessandro Volta, Atti dei Convegni.*, **9** '(1939), 223—279, Rome, 1943.
2. L'analisi funzionale nel campo complesso e i nuovi metodi d'integrazione delle equazioni a derivate parziali, *Rivista Mat. Univ. Parma*, **1** (1950), 117—120.
3. Le calcul des matrices, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **186** (1928), 619—621.

Фань Ку (Fan K.), см. также Бохнер

1. Le prolongement des fonctionnelles continues sur un espace semi-ordonné, *Rev. Sci.*, **52** (1944), 131—139.
2. Partially ordered additive groups of continuous functions, *Ann. of Math.* (2), **51** (1950), 409—427.
3. Maximum properties and inequalities for the eigenvalues of completely continuous operators, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **37** (1951), 760—766.
4. Les fonctions définies-positives et les fonctions complètement monotones. Gauthier-Villars, Paris, 1950.
5. On a theorem of Weyl concerning eigenvalues of linear transformations. I, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **35** (1949), 652—655; II, там же, **36** (1950), 31—35.

Фарнель (Farnell A. B.)

1. Limits for the characteristic roots of a matrix, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **50** (1944), 789—794.

Фейган (Fagan R. E.), см. Камерон

Фейнман (Feynman R. P.)

1. Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics, *Rev. Mod. Phys.*, **20**, № 2 (1948), 367—387. [Есть русский перевод в сборнике «Вопросы причинности в квантовой механике», М., 1955.]

Фелл и Келли (Fell J. M. G., Kelly J. L.)

1. An algebra of unbounded operators, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **38** (1952), 592—598.

Феллер (Feller W.)

1. Semi-groups of transformations in general weak topologies, *Ann. of Math.* (2), **57** (1953), 287—308.
2. On the generation of unbounded semi-groups of bounded linear operators, *Ann. of Math.* (2), **58** (1953), 166—174.
3. On positivity preserving semi-groups of transformations on $C[r_1, r_2]$, *Ann. Soc. Polon. Math.*, **25** (1952), 85—94 (1953).
4. Diffusion processes in one dimension, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **77** (1954), 1—31. [Есть русский перевод: сб. *Математика*, **2 : 2** (1958), 119—146.]
5. The parabolic differential equation and the associated semi-group of transformations, *Ann. of Math.* (2), **55** (1952), 468—519. [Есть русский перевод: сб. *Математика*, **1 : 4** (1957), 105—153.]
6. On second order differential operators, *Ann. of Math.* (2), **61** (1955), 90—105.
7. On differential operators and boundary conditions, *Comm. Pure Appl. Math.*, **8** (1955), 203—216.

8*. On equation of the vibrating string, *J. Math. and Mech.*, **8**, № 3 (1959), 339—348.

Фёльнер (Følner E.), см. Бор

Фенхель (Fenchel W.), см. Боннезен

Ферес (Veress P.)

1. Über kompakte Funktionenmengen und Bairesche Klassen, *Fund. Math.*, **7** (1925), 244—249.
2. Über Funktionenmengen, *Acta Math. Sci. Szeged*, **3** (1927), 177—192.

Фиккен (Ficken F. A.)

1. Note on the existence of scalar products in normed linear spaces, *Ann. of Math.* (2), **45** (1944), 362—366.

Филлипс (Phillips R. S.), см. также Бохнер, Хилле.

1. On weakly compact subsets of a Banach space, *Amer. J. Math.*, **65** (1943), 108—136.
2. A characterization of Euclidean spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **46** (1940), 930—933.
3. On linear transformations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **48** (1940), 516—541.
4. A note on ergodic theory, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **2** (1951), 662—669.
5. Spectral theory for semi-groups of linear operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **71** (1951), 393—415.
6. Perturbation theory for semi-groups of linear operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **74** (1953), 199—221.
7. Integration in a convex linear topological space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **47** (1940), 114—145.
8. On one parameter semi-groups of linear transformations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **2** (1951), 234—237.
9. Semi-groups of operators, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **61** (1955), 16—33.
10. An inversion formula for Laplace transforms and semi-groups of linear operators, *Ann. of Math.* (2), **59** (1954), 325—356.
11. The adjoint semi-group, *Pacific. J. Math.*, **5** (1955), 269—283.
12. A decomposition of additive set functions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **46** (1940), 274—277.
13. Linear ordinary differential operators of the second order, Div. Electromag. Res., Inst. Math. Sci., New York Univ., 1952.

Фихтенгольц Г. М.

1. Sur les fonctionnelles linéaires, continues au sens généralisé, *Матем. сб.*, **4** (46), (1938), 193—214.
2. Sur une classe d'opérations fonctionnelles linéaires, *Матем. сб.*, **4** (46), (1938), 215—226.
3. Sur les opérations linéaires dans l'espace des fonctions continues, *Bull. Acad. Sci. Roy. Belg.* **22** (1936), 26—33.

Фихтенгольц Г. М. и Канторович Л. В.

1. Sur les opérations linéaires dans l'espace des fonctions bornées, *Studia Math.*, **5** (1934), 69—98.
2. Некоторые теоремы о линейных функционалах, *ДАН СССР*, **3** (1934), 307—312.

Фишел (Fishel B.)

1. The continuous spectra of certain differential equations, *J. London Math. Soc.*, **27** (1952), 175—180.

Фишер К. (Fischer C. A.)

1. Necessary and sufficient conditions that a linear transformation be completely continuous, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **27** (1920), 10—17.
2. Linear functionals of N-spreads, *Ann. of Math.* (2), **19** (1917—1918), 37—43.

Фишер Э. (Fischer E.)

1. Sur la convergence en moyenne, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **144** (1907), 1022—1024.

2. Applications d'un théorème sur la convergence en moyenne, *C. R. Acad. Sci. Paris.*, **144** (1907), 1148—1151.

Флейшер (Fleischer I.)

1. Sur les espaces normés non-archimédiens, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.*, Ser. A., **57** (1954), 165—168.

Фойаш (Foias C.)

1. La mesure harmonique-spectrale et la théorie spectrale des opérateurs généraux d'un espace de Hilbert, *Bull. Soc. Math. France*, **85** (1957), 263—282.

Фомин С. В., см. Колмогоров А. Н.

Форд (Ford G. C.), см. Мишоу

Форт (Fort M. K., Jr.)

1. Essential and nonessential fixed points, *Amer. J. Math.*, **72** (1950), 315—322.

Форте (Fortet R.)

1. Remarques sur les espaces uniformément convexes, *C. R. Acad. Sci., Paris*, **210** (1940), 497—499.
2. Remarques sur les espaces uniformément convexes, *Bull. Soc. Math. France*, **69** (1941), 23—46.
3. Les systèmes d'équations linéaires dans les espaces uniformément convexes, *C. R. Acad. Sci. Paris.*, **211** (1940), 422—423.
4. Les fonctions aleatoires du type Markoff associées à certaines équations linéaires aux derivées partielles du type parabolique, *J. Math. Pures Appl.*, **22** (1943), 177—243.

Фредгольм (Fredholm I.)

1. Sur une classe d'équations fonctionnelles, *Acta Math.*, **27** (1903), 365—390.

Фрейденталь (Freudenthal H.)

1. Teilweise geordnete Moduln, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.*, **39** (1936), 641—651.
2. Einige Sätze über topologische Gruppen, *Ann. of Math.* (2), **37** (1936), 46—56.
3. Über die Friedrichssche Fortsetzung halbbeschränkter Hermitescher Operatoren, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.*, **39** (1936), 832—833.

Фреше (Fréchet M.)

1. Sur quelques points du calcul fonctionnel, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **22** (1906), 1—74.
2. Les espaces abstraits topologiquement affines, *Acta Math.*, **47** (1926), 25—52.
3. Les espaces abstraits. Gauthier-Villars, Paris, 1928.
4. Sur les ensembles de fonctions et les opérations linéaires, *C. R. Acad. Sci. Paris.*, **144** (1907), 1414—1416.
5. Sur les opérations linéaires, I—III.
   I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **5** (1904), 493—499.
   II. Там же, **6** (1905), 134—140.
   III. Там же, **8** (1907), 433—446.
6. Sur les ensembles compacts de fonctions mesurables, *Fund. Math.*, **9** (1927), **25—32**.
7. Sur les ensembles compacts de fonctions de carrés sommables, *Acta Sci. Math. Szeged*, **8** (1937), 116—126.
8. Sur divers modes de convergence d'une suite de fonctions d'une variable, *Bull. Calcutta Math. Soc.*, **11** (1919—1920), 187—206.
9. Essai de géométrie analytique à une infinité de coordonnées, *Nouvelles Ann. de Math.* (4), **8** (1908), 97—116, 289—317.
10. Sur les fonctionnelles bilinéaires, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **16** (1915), 215—234.

Фридман Б. и Мишоу (Friedman B., Mishoe L. I.)
1. Eigenfunction expansions associated with a non-self adjoint differential equation, *Pacific J. Math.*, **6** (1956), 249—270.

Фридман М. (Friedman M. D.)
1. Determination of eigenvalues using a generalized Laplace transform, *J. Appl. Phys.*, **21** (1950), 1333—1337.

Фридрихс (Friedrichs K. O.)
1. Über die Spektralzerlegung eines Integraloperators, *Math. Ann.*, **115** (1938), 249—272.
2. On the perturbation of continuous spectra, *Comm. Pure Appl. Math.*, **1** (1948), 361—406.
3. Spectraltheorie halbbeschränkter Operatoren, I—III.
   I. *Math. Ann.*, **109** (1934), 465—487.
   II. Там же, **109** (1934), 685—713.
   III. Там же, **110** (1935), 777—779.
4. Beiträge zur Theorie der Spektralschar, *Math. Ann.*, **110** (1935), 54—62.
5. Über die ausgezeichnete Randbedingung in der Spektraltheorie der halbbeschränkten gewöhnlichen Differentialoperatoren zweiter Ordnung, *Math. Ann.*, **112** (1935), 1—23.
6. On differential operators in Hilbert space, *Amer. J. Math.*, **61** (1939), 523—544.
7. Spektraltheorie linearer Differentialoperatoren, *Jber. Deutsch. Math. Verein.*, **45** (1935), 181—193.
8. Die unitären Invarianten selbstadjugierter Operatoren im Hilbertschen Raum, *Jber. Deutsch. Math. Verein.*, **45** (1935), 79—82.
9. The identity of weak and strong extensions of differential operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **55** (1944), 132—151.
10. Criteria for discrete spectra, *Comm. Pure Appl. Math.*, **3** (1950), 439—449.
11. Functional analysis and applications. Inst. Math. Sci., New York Univ., New York, 1956.
12. Criteria for the discrete character of the spectra of ordinary differential operators. Courant Anniversary Volume, 145—160, Interscience Pub., 1948.
13. Spectral representation of linear operators. Inst. Math. Sci., New York Univ., 1953.
14. Symmetric hyperbolic linear differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, **7** (1954), 345—392.
15. Differentiability of solutions of linear elliptic differential operators, *Comm. Pure Appl. Math.*, 6 (1953), 299—326.
16. Mathematical aspects of the quantum theory of fields. Interscience Pub., New Vork and London, 1953.

Фринк (Frink O., Jr)
1. Series expansions in linear vector spaces, *Amer. J. Math.*, **63** (1941), 87—100.

Фробениус (Frobenius G.)
1. Über lineare Substitutionen und bilineare Formen, *J. Reine Angew. Math.*, **84** (1878), 1—63.
2. Über die schiefe Invariante einer bilinearen oder quadratischen Formen, *J. Reine Angew. Math.*, **86**, (1879), 44—71.
3. Über die cogredienten Transformationen der bilinearen Formen, *Sitzungsberichte der K. Preuss. Akad. der Wiss. zu Berlin* (1896), 7—16.
4. Über die Charaktere der alternierenden Gruppe, *Sitzungsber. Akad. Berlin* (1901), 303—315.

Фуглид (Fuglede B.)
1. A commutativity theorem for normal operators, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **36** (1950), 35—40.

Фукамия (Fukamiya M.), см. также Иосида
1. On dominated ergodic theorem in L_p $(p \geqslant 1)$, *Tôhoku Math. J.*, **46** (1939), 150—153.
2. On B^*-algebras, *Proc. Japan Acad.*, **27** (1951), 321—327.
3. On a theorem of Gelfand and Neumark and the B^*-algebra, *Kumamoto J. Sci.*, Ser. A, **1**, № 1 (1952), 17—22.

Фукс (Fuchs L.)
1. Über Relationen, welche für die zwischen je zwei singulären Punkten erstreckten Integrale der Lösungen linearer Differentialgleichungen stattfinden, *J. Reine Angew. Math.*, **76** (1873), 177—213.

Фукухара (Hukuhara M.)
1. Sur l'existence des points invariants d'une transformation dans l'espace fonctionnel, *Jap. J. Math.*, **20** (1950), 1—4.

Фуллертон (Fullerton R. E.)
1. On a semi-group of subsets of a linear space, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **1** (1950), 440—442.
2. Linear operators with range in a space of differentiable functions, *Duke Math. J.*, **13** (1946), 269—280.
3. The representation of linear operators from L^p to L, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **5** (1954), 689—696.
4. An inequality for linear operators between L^p spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **6** (1955), 186—190.
5. A characterization of L spaces, *Fund. Math.*, **38** (1951), 127—136.

Хаар (Haar A.)
1. Der Massbegriff in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen, *Ann. of Math.* (2), **34** (1933), 147—169.
2. Über die Multiplikationstabelle der orthogonalen Funktionensysteme, *Math. Zeit.*, **41** (1930), 769—798.
3. Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme, I, II.
I. *Math. Ann.*, **69** (1910), 331—371.
II. Там же, **71** (1911), 38—53.

Хажинский (Charzyński Z.)
1. Sur les transformations isométriques des espaces du type (F), *Studia Math.*, **13** (1953), 94—121.

Хайерс (Hyers D. H.)
1. Pseudo-normed linear spaces and abelian groups, *Duke Math. J.*, **5** (1939), 628—634.
2. Locally bounded linear topological spaces, *Revista Ci., Lima*, **41** (1939), 555—574.
3. Linear topological spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **51** (1945), 1—21.
4. A note on linear topological spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **44** (1938), 76—80.

Хал (Hull T. E.), см. Инфельд

Халбери (Halbury C. J. A.), см. Тейлор

Халмош (Halmos P. R.)
1. Normal dilations and extensions of operators, *Summa. Brazil. Math.*, **2** (1950), 125—134.
2. A nonhomogeneous ergodic theorem, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **66** (1949), 284—288.
3. Commutativity and spectral properties of normal operators, *Acta Sci. Math. Szeged*, **12**, Pars B (1950), 153—156.
4. Measurable transformations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **55** (1949), 1015—1034.
5. Теория меры, ИЛ, М., 1953 (1950).
6. Introduction to Hilbert space and the theory of spectral multiplicity. Chelsea, New York, 1951.

7. Конечномерные векторные пространства, Физматгиз, М., 1963 (1942).
8. An ergodic theorem, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **32** (1946), 156—161.
9. Spectra and spectral manifolds, *Ann. Soc. Polon. Math.*, **25** (1952), 43—49.
10. Commutators of operators, I, II.
I. *Amer. J. Math.*, **74** (1952), 237—240.
II. Там же, **76** (1954), 191—198.
11*. Лекции по эргодической теории, ИЛ, М., 1960.

Халмош и Люмер (Halmos P. R., Lumer G.)
1. Square roots of operators, II, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **5** (1954), 589—595.

Халмош, Люмер и Шеффер (Halmos P. R., Lumer G., Schäffer J. J.)
1. Square roots of operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **4** (1953), 142—149.

Халмош и Дж. Нейман (Halmos P. R., von Neumann J.)
1. Operator methods in classical mechanics, II, *Ann. of Math.* (2), **43** (1942), 332—350.

Хан (Hahn H.)
1. Über die Darstellung gegebener Funktionen durch singuläre Integrale, II, *Denkschriften der K. Akad. Wien. Math.-Naturwiss. Kl.*, **93** (1916), 657—692.
2. Über Folgen linearer Operationen, *Monatsh. für Math. und Physik*, **32** (1922), 3—88.
3. Über lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen, *J. Reine Angew. Math.*, **157** (1927), 214—229.
4. Reele Funktionen. Akad. Verlag., Leipzig, 1932.
5. Über die Integrale des Herrn Hellinger und die Orthogonalinvarianten der quadratischen Formen von unendlich vielen Veränderlichen, *Monatsh. für Math. und Physik*, **23** (1912), 161—224.

Хан и Розенталь (Hahn H., Rosenthal A.)
1. Set functions. Univ. of New Mexico Press, Albuquerque, 1948.

Харазов Д. Ф.
1. Об одном классе линейных уравнений в гильбертовых пространствах, *Сообщ. АН Груз. ССР*, **13** (1952), 65—72.
2. Об одном классе линейных уравнений с симметризуемыми операторами, *ДАН СССР*, **91** (1953), 1023—1026.
3. К теории симметризуемых операторов, полиномиально зависящих от параметра, *ДАН СССР*, **91** (1953), 1285—1287.

Харди и Литлвуд (Hardy G. H., Littlewood J.)
1. Some properties of fractional integrals, I, II.
I. *Math. Zeit.*, **27** (1928), 565—606.
II. Там же, **34** (1932), 403—439.

Харди, Литлвуд и Полиа (Пойя)
1. Неравенства, ИЛ, М., 1948 (1934).

Хартман П. (Hartman P.)
1. On the ergodic theorems, *Amer. J. Math.*, **69** (1947), 193—199.
2. On the essential spectra of symmetric operators in Hilbert space, *Amer. J. Math.*, **75** (1953), 229—240.
3. The L_2-solutions of linear differential equations of second order, *Duke Math. J.*, **14** (1947), 323—326.
4. Unrestricted solution fields of almost separable differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **63** (1948), 560—580.
5. On differential equations with non-oscillatory eigenfunctions, *Duke Math. J.*, **15** (1948), 697—709.
6. On the linear logarithmico-exponential differential equation of the second order, *Amer. J. Math.*, **70** (1948), 764—779.

7. On the spectra of slightly disturbed linear oscillators, *Amer. J. Math.*, **71** (1949), 71—79.
8. A characterization of the spectra of the one-dimensional wave equation, *Amer. J. Math.*, **71** (1949), 915—920.
9. The number of L_2-solutions of $x''+q(t)x=0$, *Amer. J. Math.*, **73** (1951), 635—645.
10. On bounded Green's kernels for second order linear differential equations, *Amer. J. Math.*, **73** (1951), 646—656.
11. On the eigenvalues of differential equations, *Amer. J. Math.*, **73** (1951), 657—662.
12. On linear second order differential equations with small coefficients, *Amer. J. Math.*, **73** (1951), 955—962.
13. Some examples in the theory of singular boundary value problems, *Amer. J. Math.*, **74** (1952), 107—126.
14. On non-oscillatory linear differential equations of second order, *Amer. J. Math.*, **74** (1952), 389—400.
15. On the derivatives of solutions of linear second order differential equations, *Amer. J. Math.*, **75** (1953), 173—177.
16. On the essential spectra of ordinary differential equations, *Amer. J. Math.*, **76** (1954), 831—838.
17. On the zeros of solutions of second order linear differential equations, *J. London Math. Soc.*, **27** (1952), 492—496.

Хартман П. и Путнам (Hartman P., Putnam C.)
1. The least cluster point of the spectrum of boundary value problems, *Amer. J. Math.*, **70** (1948), 847—855.
2. The gaps in the essential spectra of wave equations, *Amer. J. Math.*, **72** (1950), 849—862.

Хартман П. и Уинтнер (Hartman P., Wintner A.)
1. The (L^2)-space of relative measure, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **33** (1947), 128—132.
2. An oscillation theorem for continuous spectra, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **33** (1947), 376—379.
3. The asymptotic arcus variation of solutions of real linear differential equations of second order, *Amer. J. Math..*, **70** (1948), 1—10.
4. Criteria for the non-degeneracy of the wave equation, *Amer. J. Math.*, **70** (1948), 295—308.
5. On the orientation of unilateral spectra, *Amer. J. Math.*, **70** (1948), 309—316.
6. On non-conservative linear oscillators of low frequency, *Amer. J. Math.*, **70** (1948), 529—539.
7. A criterion for the non-degeneracy of the wave equation, *Amer. J. Math.*, **71** (1949), 206—213.
8. On the location of spectra of wave equations, *Amer. J. Math.*, **71** (1949), 214—217.
9. On the Laplace-Fourier transcendents, *Amer. J. Math.*, **71** (1949), 367—372.
10. Oscillatory and non-oscillatory linear differential equations, *Amer. J. Math.*, **71** (1949), 627—648.
11. A separation theorem for continuous spectra, *Amer. J. Math.*, **71** (1949), 650—662.
12. On the derivatives of the solutions of the one-dimensional wave equation, *Amer. J. Math.*, **72** (1950), 148—155.
13. On the essential spectra of singular eigenvalue problems, *Amer. J. Math.*, **72** (1950), 545—552.
14. On an oscillation criterion of Liapounoff, *Amer. J. Math.*, **73** (1951), 885—890.

15. On perturbations of the continuous spectrum of the harmonic oscillators, *Amer. J. Math.*, **74** (1952), 79—85.
16. An inequality for the amplitudes and arcus in vibration diagrams of time-dependent frequency, *Quart. Appl. Math.*, **10** (1952), 175—176.
17. On non-oscillatory linear differential equations, *Amer. J. Math.*, **75** (1953), 717—730.
18. On curves defined by binary non-conservative differential systems, *Amer. J. Math.*, **76** (1954), 497—501.
19. On the assignment of asymptotic values for the solution of linear differential equations of second order, *Amer. J. Math.*, **77** (1955), 475—483.
20. On linear second order differential equations in the unit circle, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 78 (1955), 492—500.
21. On non-oscillatory linear differential equations with monotone coefficients, *Amer. J. Math.*, **76** (1954), 207—219.
22. On the asymptotic problems of the zeros in wave mechanics, *Amer. J. Math.*, **70** (1948), 461—480.

Хартман С. (Hartman S.)
1. Quelques propriétées ergodiques des fractions continues, *Studia Math.*, **12** (1951), 271—278.

Хартман С., Марчевский и Рыль-Нарджевский (Hartman S., Marczewski E., Ryll-Nardzewski C.)
1. Théorèmes ergodiques et leurs applications, *Colloq. Math.*, **2** (1951), 109—123.

Хаусдорф (Hausdorff F.)
1. Grundzüge der Mengenlehre. Verlag von Veit, Leipzig, 1914.
2. Теория множеств, М., Гостехиздат, 1937 (1935).
3. Zur Theorie der linearen metrischen Räume, *J. Reine Angew. Math.*, **167** (1932), 294—311.

Хейвуд (Heywood P.)
1. On the asymptotic distribution of eigenvalues, *Proc. London Math. Soc.* (3), **4** (1954), 456—470.

Хелли (Helly E.)
1. Über lineare Funktionaloperationen, *S.-B. K. Akad. Wiss. Wien Math.-Naturwiss. Kl.* **121**, IIa (1912), 265—297.
2. Über Systeme linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, *Monatsh. für Math. u. Phys.*, **31** (1921), 60—91.

Хеллингер (Hellinger E.)
1. Neue Begründung der Theorie quadratischer Formen von unendlichvielen Veränderlichen, *J. Reine Angew. Math.*, **136** (1909), 210—271.

Хеллингер и Теплиц (Hellinger E., Toeplitz O.)
1. Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen, *Math. Ann.*, **69** (1910), 289—330.
2. Grundlagen für eine Theorie der endlichen Matrizen, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl.* 1906, 351—355 (1906).
3. Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten. Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften II, C13 (1928), 1335—1616.

Хельсон (Helson H.)
1. Spectral synthesis of bounded functions, *Ark. för Mat.*, **1** (1951), 497—502.

Хельсон и Кахан (Helson H., Kahane J. P.)
1. Sur les fonctions opérant dans les algèbres de transformées de Fourier de suites ou de fonctions sommables, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **247** (1958), 626.

Хельсон и Квигли (Helson H., Quigley F. D.)
1. Maximal algebras of continuous functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **8** (1957), 111—114.

2. Existence of maximal ideals in algebras of continuous functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 8 (1957), 115—119.
Х е н з е л ь (H e n s e l K.)
1. Über Potenzreihen von Matrizen, *J. Reine Angew. Math.*, **155** (1926), 107—110.
Х е н с о н (H a n s o n E. H.)
1. A note on compactness, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **39** (1933), 397—400.
Х ё р м а н д е р (H ö r m a n d e r L.)
1. Оценки для операторов, инвариантных относительно сдвига, ИЛ, М., 1962 (1960).
Х е т ф и л д (H a t f i e l d C.), см. К а м е р о н
Х и л л е (H i l l e E.) (Х и л л)
1. Функциональный анализ и полугруппы, ИЛ, М., 1951 (1948).
2. Notes on linear transformations, II. Analyticity of semi-groups, *Ann. of Math.* (2), **40** (1939), 1—47.
3. On the generation of semi-groups and the theory of conjugate functions, *Proc. Roy. Physiog. Soc. Lund*, **21** (1951), 1—13.
4. Non-oscillation theorems, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **64** (1948), 234—252.
5. The abstract Cauchy problem and Cauchy's problem for parabolic differential equations, *J. d'Analyse Math.*, **3** (1953), 81—196.
Х и л л е и Т а м а р к и н (H i l l e E., T a m a r k i n J. D.)
1. On the characteristic values of linear integral equations, *Acta Math.*, **57** (1931), 1—76.
2. On the theory of linear integral equations, II, *Ann. of Math.*, (2), **35** (1934), 445—455.
Х и л л е Э. и Ф и л л и п с Р. (H i l l e E., P h i l l i p s R. S.)
1. Функциональный анализ и полугруппы, ИЛ, М., 1962 (1957).
Х и л ь д и н г (H i l d i n g S.)
1. On completeness theorems of Paley-Wiener type, *Ann. of Math.* (2), **49** (1948), 953—954.
2. On the closure of disturbed orthonormal sets in Hilbert space, *Ark. Mat. Astr. Fys.*, 32B, № 7 (1946), 3.
Х и н ч и н А. Я.
1. Zu Birkhoffs Lösung des Ergodenproblems, *Math. Ann.*, **107** (1933), 485—488.
2. Fourierkoeffizienten längs einer Bahn in Phasenraum, *Матем. сб.*, **41** (1934), 14—16.
Х и р ш м а н (H i r s c h m a n I. I.)
1. The decomposition of Walsh and Fourier series, *Amer. Math. Soc. Memoirs*, **15** (1956).
Х и р ш м а н и У и д д е р (H i r s c h m a n I. I., W i d d e r D. V.), см. также У и д д е р и Х и р ш м а н
1. Преобразования типа свертки, ИЛ, М., 1958 (1955).
Х о л ь м г р е н (H o l m g r e n E.)
1. Über Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen, *Öfvers. Kongl. Vetens.-Akad. Förk.*, **58** (1901), 91—103.
Х о п ф Г. (H o p f H.), см. А л е к с а н д р о в П. С.
Х о п ф Э. (H o p f E.)
1. Ergodentheorie. Ergebnisse der Math. V. 2, J. Springer, Berlin, 1937. [Есть русский перевод: Эргодическая теория, *УМН*, **4**, вып. 1 (1949).]
2. The general temporally discrete Markov process, *J. Rational Mech. and Anal.*, **3** (1954), 13—45.
3. Über eine Ungleichung der Ergodentheorie, *S.-B. Math.-Nat. Kl. Bayer. Akad. Wiss.* (1944), 171—176.
Х о т т а (H o t t a J.)
1. A remark on regularly convex sets, Kōdai Math. Sem. Rep. (1951), 37—40.

Хьюит (Hewitt E.), см. также Иосида
1. Linear functionals on spaces of continuous functions, *Fund. Math.*, **37** (1950), 161—189.
2. Integral representation of certain linear functionals, *Ark. för Mat.*, **2** (1952), 269—282.
3. Integration on locally compact spaces, I, *Univ. of Washington Pub. in Math.*, **3** (1952), 71—75.
4. Certain generalizations of the Weierstrass approximation theorem, *Duke Math. J.*, **14** (1947), 419—427.
5. Rings of real-valued continuous functions, I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **64** (1948), 45—99.
6. Linear functionals on almost periodic functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **74** (1953), 303—322.
7. A problem concerning finitely additive measures, *Mat. Tidsskr.*, B, (1951), 81—94.
8*. A survey of abstract harmonic analysis. Some aspects of analysis and probability, New York, 1958, pp. 107—168. [Есть русский перевод: сб. *Математика*, **4 : 4** (1960), 75—133.]

Хюльтен (Hulthén L.)
1. On the Sturm-Liouville Problem connected with a continuous spectrum, *Ark. Mat. Astr. Fys.*, 35A, № 25 (1949), 25.

Цвален (Zwahlen R.)
1. Ein «neues» Eigenwertproblem, *Actes Soc. Helv. Sci. Nat.*, **133** (1954), 60—65.

Цермело (Zermelo E.)
1. Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann, *Math. Ann.*, **59** (1904), 514—516.
2. Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung, *Math. Ann.*, **65** (1908), 107—128.

Цзен (Tseng Y. Y.)
1. On generalized biorthogonal expansions in metric and unitary spaces, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **28** (1942), 170—175.
2. Обобщенные обратные к неограниченным операторам между двумя унитарными пространствами, *ДАН СССР*, **67** (1949), 431—434.
3. Свойства и классификация обобщенных обратных к замкнутым операторам, *ДАН СССР*, **67** (1949), 607—610.

Цзян (Chiang T. P.)
1. A theorem on the normalcy of completely continuous operators, *Acta Sci. Math. Szeged.*, **14** (1952), 188—196.

Циммерберг (Zimmerberg H. J.)
1. On normalizable transformations in Hilbert space, *Acta Math.*, **86** (1951), 85—88.
2. Definite integral systems, *Duke Math. J.*, **15** (1948), 371—388.

Цорн (Zorn M.)
1. A remark on method in transfinite algebra, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **41** (1935), 667—670.

Цудзи (Tsuji M.)
1. On the integral representation of unitary and self-adjoint operators in Hilbert space, *Jap. J. Math.*, **19** (1948), 287—297.
2. On the compactness of space L^p $(p > 0)$ and its application to integral equations, Kōdai Math. Sem. Rep. (1951), 33—36.

Чан (Chang S. H.)
1. On the distribution of the characteristic values and singular values of linear integral equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **67** (1949), 351—367.
2. Generalization of a theorem of Lalesco, *J. London Math. Soc.*, **22** (1947), 185—189.

Ч е х (Čech E.)
1. On bicompact spaces, *Ann. of Math.* (2), **38** (1937), 823—844.

Ш а п и р о Г. (S h a p i r o H. S.), см. также Р о г о з и н с к и й
1. Extremal problems for polynomials and power series. Dissertation, Mass. Inst. Tech., 1952.
2. Applications of normed linear spaces to function-theoretic extremal problems. Lectures of functions of a complex variable, 399—404, Univ. of Michigan Press, Ann Arbor, 1955.

Ш а п и р о Дж. (S h a p i r o J. M.), см. К а м е р о н

Ш а т т е н (S c h a t t e n R.), см. также Н е й м а н Дж.
1. A theory of cross-spaces, *Ann. of Math. Studies*, No. 26, Princeton University Press, Princeton, 1950.

Ш а т у н о в с к и й С. О.
1*. Введение в анализ, Одесса, 1932.

Ш а у д е р (S c h a u d e r J.)
1. Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen, *Math. Z.*, **26** (1927), 47—65, 417—431.
2. Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen, *Studia Math.*, **2** (1930), 171—180.
3. Eine Eigenschaft des Haarschen Orthogonalsystemes, *Math. Z.*, **28** (1928), 317—320.
4. Invarianz des Gebietes in Funktionalräumen, *Studia Math.*, **1** (1929), 123—139.
5. Über den Zusammenhang zwischen der Eindeutigkeit und Lösbarkeit partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus, *Math. Ann.*, **106** (1932), 661—721.
6. Über lineare, vollstetige Funktionaloperationen, *Studia Math.*, **2** (1930), 183—196.
7. Über die Umkehrung linearer, stetiger Funktionaloperationen, *Studia Math.*, **2** (1930), 1—6.

Ш а х (S h a h S. M.)
1. Note on eigenfunction expansions, *J. London Math. Soc.*, **27** (1952), 58—64.

Ш в а р ц Г. А. (S c h w a r z H. A.)
1. Gesammelte Mathematische Abhandlungen, Band I, J. Springer, Berlin, 1890.

Ш в а р ц Г. М. (S c h w a r t z H. M.)
1. Sequences of Stieltjes integrals, I—III.
   I. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **47** (1941), 947—955.
   II. *Duke Math. J.*, **10** (1943), 13—22.
   III. Там же, **10** (1943), 595—610.

Ш в а р ц Дж. (S c h w a r t z J.), см. также Б а р т л, Б е й д, Д а н ф о р д
1. A note on the space L_p^*, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **2** (1951), 270—275.
2. Perturbations of spectral operators, and applications, I, *Pacific J. Math.*, **4** (1954), 415—458.
3. Two perturbation formulae, *Comm. Pure Appl. Math.*, 8 (1955), 371—376.

Ш в а р ц Л. (S c h w a r t z L.), см. также Д ь ё д о н н е
1. Analyse et synthèse harmoniques dans les espaces de distributions, *Canadian J. Math.*, **3** (1951), 503—512.
2. Sur une propriété de synthèse spectrale dans les groupes non compacts, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **227** (1948), 424—426.
3. Théorie générale des fonctions moyennepériodiques, *Ann. of Math.* (2), **48** (1947), 857—929.
4. Homomorphismes et applications complètement continues, *C. R. Acad Sci. Paris*, **236** (1953), 2472—2473.

5. Théorie des distributions, I, II, Act. Sci. Ind., 1091, 1122, Hermann et Cie., Paris (1951).
6*. Théorie des noyaux, *Proc. Int. Cong. Math.*, v. I (1952), 220—230. [Есть русский перевод: сб. *Математика*, **3** : **3** (1959), 69—79.]

Швердтфегер (Schwerdtfeger H.)
1. Les fonctions de matrices, *Act. Sci. et Ind.*, 649, Hermann et Cie., Paris, 1938.

Шевалле (Chevalley C.)
1. Теория групп Ли, ИЛ, М., т. 1—1948 (1946), т. 2,3—1958 (1951).

Шёнберг (Schoenberg I. J.), см. также Гильдебрандт
1. A remark on M. M. Day's characterization of innerproduct spaces and a conjecture of L. M. Blumenthal, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **3** (1952), 961—964.
2. On local convexity in Hilbert space, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **48** (1942), 432—436.
3. On smoothing operations and their generating functions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **59** (1953), 199—230.

Шерф (Schaerf H. M.)
1. Sur l'unicité des mesures invariantes, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **229** (1949), 1053—1055. Испр. **230** (1950), 795.
2. Sur l'unicité de la mesure de Haar, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **229** (1949), 1112—1113.

Шефке (Schäfke F. W.)
1. Über einige unendliche lineare Gleichungssysteme, *Math. Nachr.*, **3** (1949), 40—58.
2. Das Kriterium von Paley und Wiener in Banachschen Raum, *Math. Nachr.*, **3** (1949), 59—61.
3. Über Eigenwertprobleme mit zwei Parametern, *Math. Nachr.*, **6** (1951), 109—124.

Шеффер (Schäffer J. J.), см. также Халмош
1. On unitary dilations of contractions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **6** (1955), 322.
2. On some problems concerning operators in Hilbert space, *Anais Acad. Brasil. Ci.*, **25** (1953), 87—90.

Шилов Г. Е., см. также Гельфанд И. М.
1. Идеалы и подкольца кольца непрерывных функций, *ДАН СССР*, **22** (1939), 7—10.
2. К теории идеалов в нормированных кольцах функций, *ДАН СССР*, **27** (1940), 900—903.
3. О нормированных кольцах с одной образующей, *Матем сб.*, **21** (63), (1947), 25—37.
4. О регулярных нормированных кольцах, *Труды Матем. ин-та АН СССР*, **21** (1947), 118.
5. О расширении максимальных идеалов, *ДАН СССР*, **29** (1940), 83—85.
6*. Математический анализ (специальный курс), Физматгиз, М., 1960.
7*. Критерий компактности в однородном пространстве функций, *ДАН СССР*, **92** (1953), 11—12.

Шин Ден Юн
1. О квазидифференциальных операторах в гильбертовом пространстве, *ДАН СССР*, **18** (1938), 523—526.
2. О решениях линейного квазидифференциального уравнения *n*-го порядка, *Матем. сб.*, **7** (49), (1940), 479—532.
3. О квазидифференциальных операторах в гильбертовом пространстве, *Матем. сб.*, **13** (55), (1943), 39—70.

Ш и р о х о в М. Ф.
1. Функции от элементов полуупорядоченных пространств, *ДАН СССР*, **74** (1950), 1057—1060.

Ш и ф м а н (S h i f f m a n M.), см. Г а р а б е д я н

Ш и ф ф е р (S c h i f f e r M. M.), см. М и л л е р К.

Ш м е й д л е р (S c h m e i d l e r W.)
1. Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1950.

Ш м и д т (S c h m i d t E.)
1. Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, *Rend. del Circolo Matematico di Palermo*, **25** (1908), 53—77.
2. Auflösung der allgemeinen linearen Integralgleichung, *Math. Ann.*, **64** (1907), 161—174.

Ш м у л ь я н В. Л., см. также Г а н т м а х е р В. Р. и К р е й н М. Г.
1. О регулярно замкнутых и слабо компактных множествах в пространствах типа (*B*), *ДАН СССР*, **18** (1938), 403—406.
2. Линейные топологические пространства и их связь с пространствами типа (*B*), *ДАН СССР*, **22** (1939), 475—477.
3. О различных топологиях в пространствах Банаха, *ДАН СССР*, **23** (1939), 331—334.
4. О некоторых геометрических свойствах сферы в пространстве типа (*B*), *ДАН СССР*, **24** (1939), 647—651.
5. О принципе вкладок в пространстве типа (*B*), *Матем. сб.*, **5** (47), (1939), 317—328.
6. О некоторых геометрических свойствах единичной сферы пространства типа (*B*), *Матем. сб.*, **6** (48), (1939), 77—94.
7. О дифференцируемости нормы в пространстве Банаха, *ДАН СССР*, **27** (1940), 643—648.
8. Über lineare topologische Räume, *Матем. сб.*, **7** (49), (1940), 425—448.
9. Sur la structure de la sphère unitaire dans l'espace de Banach, *Матем. сб.*, **9** (51), (1941), 545—572.
10. О линейных топологических пространствах, *Матем. сб.*, **9** (51), (1941), 727—730.
11. О некоторых геометрических свойствах сферы в линейных полуупорядоченных пространствах Банаха, *ДАН СССР*, **30** (1941), 392—396.
12. О некоторых вопросах функционального анализа, *ДАН СССР*, **38** (1943), 170—173.
13. Sur les ensembles compacts et faiblement compacts dans l'espace du type (*B*), *Матем. сб.*, **12** (54), (1943), 91—98.
14. О компактных множествах в пространстве измеримых функций, *Матем. сб.*, **15** (57), (1944), 343—346.

Ш м у л ь я н Ю. Л.
1. Изометрические операторы с бесконечными индексами дефекта и их ортогональные расширения, *ДАН СССР*, 87 (1952), 11—14.
2. Операторы с вырожденной характеристической функцией, *ДАН СССР*, **93** (1953), 985—988.
3. Вполне непрерывные возмущения операторов, *ДАН СССР*, **101** (1955), 35—38.

Ш н о л ь Э. Э.
1. Поведение собственных функций и спектр операторов Штурма — Лиувилля, *УМН*, **9 : 4** (62), (1954), 113—132.
2*. О поведении собственных функций уравнения Шредингера. Диссертация, МГУ, 1955.

Ш о х а т и Т а м а р к и н (S h o h a t J. A., T a m a r k i n J. D.)
1. The problem of moments. Math. Surveys, № 1, Amer. Math. Soc., New York, 1943.

Шрёдер (Schröder J.)
1. Fehlerabschätzungen zur Störungsrechnung bei linearen Eigenwertproblemen mit Operatoren eines Hilbertschen Raumes, *Math. Nachr.*, **10** (1953), 113—128.

Шрёдингер (Schrödinger E.)
1. Quantisierung als Eigenwertproblem, *Annalen der Physik* (4), **80** (1926), 437—490.
2. Verwasschene Eigenwertspectra, *S.-B. Preussischen Akad. Wiss.*, (1929), 668—682.

Шрейбер (Schreiber M.)
1. Generalized spectral resolution for operators in Hilbert space. Dissertation, University of Chicago, 1955.

Шрейдер Ю. А.
1. Строение максимальных идеалов в кольце мер со сверткой, *Матем. сб.*, **27** (69), (1950), 297—318.

Шрейер О. (Schreier O.)
1. Abstrakte kontinuierliche Gruppen, *Abhand. Math. Sem. Hamburgischen Univ.*, **4** (1926), 15—32.

Шрейер Я. (Schreier J.)
1. Ein Gegenbeispiel zur Theorie der schwachen Konvergenz, *Studia Math.*, **2** (1930), 58—62.

Штейнгауз (Steinhaus H.), см. также Банах и Качмаж
1. Sur les développements orthogonaux, *Bull. Int. Acad. Polon. Sci.*, Sér. A (1926), 11—39.
2. Additive und stetige Funktionaloperationen, *Math. Z.*, **5** (1919), 186—221.

Штраус А. В.
1. К теории обобщенных резольвент симметрического оператора, *ДАН СССР*, **78** (1951), 217—220.
2. О характеристических свойствах обобщенных резольвент, *ДАН СССР*, **82** (1952), 209—212.
3. К теории эрмитовых операторов, *ДАН СССР*, **67** (1949), 611—614.
4. Об обобщенных резольвентах симметрического оператора, *ДАН СССР*, **71** (1950), 241—244.
5. Обобщенные резольвенты симметрических операторов, *Изв. АН СССР*, сер. матем., **18** (1954), 51—86.

Штрут (Strutt M. J. O.)
1. Lamésche, Mathieusche und verwandte Funktionen in Physik und Technik. Ergebnisse der Math., I 3, J. Springer, Berlin, 1932.
2. Reelle Eigenwerte verallgemeinerter Hillscher Eigenwertaufgaben 2. Ordnung, *Math. Zeit.*, **49** (1943—1944), 593—643.

Штурм (Sturm C.)
1. Sur les équations différentielles du second ordre, *J. Math. Pures Appl.* (1), **1** (1836), 106—136.
2. Sur une classe d'équations à différences partielles, *J. Math. Pures Appl.* (1), **1** (1836), 373—444.

Шур А. (Schur A.)
1. Zur Entwickelung willkürlicher Funktionen nach Lösungen von Systemen linearer Differentialgleichungen, *Math. Ann.*, **82** (1921), 213—239.

Шур И. (Schur I.)
1. Über die charakteristischen Wurzeln einer linearen Substitution mit einer Anwendung auf die Theorie der Integralgleichungen, *Math. Ann.*, **66** (1909), 488—510.

Шур Я. (Schur J.)
1. Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen, *J. Reine Angew. Math.*, **151** (1920), 79—111.

Эберлейн (Eberlein W. F.)
1. Weak compactness in Banach spaces, I, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **33** (1947), 51—53.
2. Closure, convexity, and linearity in Banach spaces, *Ann. of Math.* (2), **47** (1946), 688—703.
3. Abstract ergodic theorems and weak almost periodic functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **67** (1949), 217—240.
4. Abstract ergodic theorems, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **34** (1948), 43—47.
5. A note on the spectral theorem, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **52** (1946) 328—331.

Эгнью (Agnew R. P.)
1. Linear functionals satisfying prescribed conditions, *Duke Math. J.*, **4** (1938), 55—77.

Эгнью и Морс (Agnew R. P., Morse A. P.)
1. Extensions of linear functionals with applications to limits, integrals, measures, and densities, *Ann. of Math.* (2), **39** (1938), 20—30.

Эдвардс (Edwards R. E.)
1. A theory of Radon measures on locally compact spaces, *Acta Math.*, **89** (1953), 133—164.
2. Multiplicative norms on Banach algebras, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **47** (1951), 473—474.

Эзрохи И. А.
1. Общие формы линейных операций в пространствах со счетным базисом, *ДАН СССР*, **59** (1948), 1537—1540.

Эйдельгайт (Eidelheit M.)
1. Zur Theorie der Konvexen Mengen in linearen normierten Räumen, *Studia Math.*, **6** (1936), 104—111.

Эйдельгайт и Мазур (Eidelheit M., Mazur S).
1. Eine Bemerkung über die Räume von Typus (*F*), *Studia Math.*, **7** (1938), 159—161.

Эйленберг (Eilenberg S.)
1. Banach space methods in topology, *Ann. of Math.* (2), **43** (1942), 568—579.

Эккарт (Eçkart C.)
1. The penetration of a potential barrier by electrons, *Phys. Rev.*, **35** (1930), 1303—1309.

Элконин (Elconin V.), см. Майкал

Эллиот (Elliott J.)
1. The boundary value problems and semi-groups associated with certain integro-differential operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **76** (1954), 300.
2. Eigenfunction expansions associated with singular differential operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 78 (1955), 406—425.

Эллис Г. и Гальперин (Ellis H. W., Halperin I.)
1. Function spaces determined by a levelling length function, *Canadian J. Math.*, **5** (1953), 576—592.

Эллис Д. (Ellis D.)
1. A modification of the parallelogram law characterization of Hilbert spaces, *Math. Zeit.*, **59** (1953), 94—96.

Эрдёш (Erdös P.), см. Кларксон

Эрдёш и Кац М. (Erdös P., Kac M.)
1. On certain limit theorems of the theory of probability, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **52** (1946), 292—302.

Эскин Г. И.
1*. Достаточное условие разрешимости многомерной проблемы моментов, *ДАН СССР*, **133**, 3 (1960), 540—543.

Э с к л а н г о н (E s c l a n g o n E.)

1. Nouvelles recherches sur les fonctions quasi-périodiques, *Ann. Obs. Bordeaux*, **16** (1917), 51—226.

Э с с е р (E s s e r M.)

1. Analyticity in Hilbert space and self-adjoint transformations, *Amer. J. Math.*, **69** (1947), 825—835.

Ю д (Y o o d B.)

1. Banach algebras of continuous functions, *Amer. J. Math.*, **73** (1951), 30—42.
2. Properties of linear transformations preserved under addition of a completely continuous transformation, *Duke Math. J.*, 18 (1951), 599—612.
3. On fixed points for semi-groups of linear operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **2** (1951), 225—233.
4. Transformations between Banach spaces in the uniforn topology, *Ann. of Math.* (2), **50** (1949), 486—503.
5. Additive groups and linear manifolds of transformations between Banach spaces, *Amer. J. Math.*, **71** (1949), 663—677.
6. Difference algebras of linear transformations on a Banach space, *Pacific J. Math.*, **4** (1954), 615—636.

Ю д и н А. И.

1. Некоторые геометрические вопросы теории полуупорядоченных пространств, Л., *Учен. Зап. Ун-та*, сер. матем., **10** (1940), 64—83.

Ю н г (Y o u n g L. C.)

1. On an inequality of Marcel Riesz, *Ann. of Math.* (2), **40** (1939), 567—574.

Я г л о м А. М., см. Г е л ь ф а н д И. М.

Я м а б е (Y a m a b e H.)

1. On an extension of Helly's theorem, *Osaka Math. J.*, **2** (1950), 15—17.

Указатель обозначений

Именной указатель

Предметный указатель

Исправления к I тому

1. Стр. 14, строка 13 сверху. Перед последней фразой § 1 добавить: «Если f — вещественная функция, заданная на открытом интервале, содержащем нуль, то равенствами

$$\overline{\lim_{x\to 0}}\, f(x) = \inf_{a>0} \sup f((-a, a)),$$

$$\underline{\lim_{x\to 0}}\, f(x) = \sup_{a>0} \inf f((-a, a)),$$

$$\overline{\lim_{x\to 0+}}\, f(x) = \inf_{a>0} \sup f((0, a)),$$

$$\underline{\lim_{x\to 0+}}\, f(x) = \sup_{a>0} \inf f((0, a))$$

определяются символы, стоящие слева. Аналогично определяются $\overline{\lim\limits_{x\to 0-}}\, f(x)$ и $\underline{\lim\limits_{x\to 0-}}\, f(x)$».
2. Стр. 46, строка 2 сверху. Исправить слово «ограниченных» на «периодических».
3. Стр. 56, строка 12 снизу. После «конечномерное» добавить «линейное».
4. Стр. 82, строка 7 снизу. Заменить x_n на x_m.
5. Стр. 83, строка 5 снизу. Заменть $z^*f(y)$ на z^*f.
6. Стр. 85, строка 12 сверху. Добавить перед (a): «Пусть $\mathfrak{X}$ — нормированное пространство или F-пространство».
7. Стр. 85, строка 18 сверху. Заменить «Если $\mathfrak{X}$ является B-пространством то» словом «Функция».
8. Стр. 85, строка 21 сверху. После «15» добавить «(Банах)».
9. Стр. 85, строка 22 сверху. Вместо второго предложения упражнения 15 следует читать: «Показать, что существует такое число $N > 0$, что для каждой последовательности $y_n \to y_0$ найдется такая последовательность $x_n \to x_0$, что $|x_n| \leqslant N|y_n|$ и $Tx_n = y_n$, $n = 0, 1, \ldots$».
10. Стр. 85, строка 7 снизу. Заменить «в» словами «на все».
11. Стр. 85, строка 2 снизу. Заменить $\mathfrak{Z}^{\perp\perp} = \mathfrak{Z}$ на $\mathfrak{Z}^{\perp\perp} = \varkappa\mathfrak{Z}$.
12. Стр. 89, строка 12 сверху. Заменить $\operatorname{Re}(\alpha) \geqslant 0$ на $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$.
13. Стр. 90, строка 12 сверху. Во второй слева сумме суммирование проводится по m, а в третьей по n.
14. Стр. 92, строки 10 и 13 сверху. Зачеркнуть «равномерно»
15. Стр. 105, строка 18 снизу. Заменить $|F(x)| = |x|$ на $|F(x) - F(y)| = |x - y|$.
16. Стр. 110, строка 7 сверху. Вместо «если $\mu(\varnothing) = 0$ и» следует читать: «если τ содержит пустое множество $\varnothing$, если $\mu(\varnothing) = 0$ и если».
17. Стр. 111, строка 11 сверху. После слов «если ограничена» добавить «и аддитивна».

18. Стр. 112, строка 16 сверху. После слов «функции множества» добавить μ.
19. Стр. 119, строка 15 сверху. Заменить «$F(S)$ в $F(S)$» на «$F(S)\times F(S)$ в $F(S)$».
20. Стр. 121, строка 2 сверху. Вместо «$TM(S)$ *в себя*» следует читать: «*пространства вполне измеримых скалярных функций в себя*».
21. Стр. 121, строка 3 снизу. Добавить после слов «положительное число» слова «меньшее единицы».
22. Стр. 121, строка 2 снизу. Заменить M на $M+1$.
23. Стр. 125, строка 2 сверху. Перед словом «подмножества» добавить «непересекающиеся».
24. Стр. 126, строка 13 сверху. Заменить $f_n^2\,d\mu$ на $\int\limits_E f_n^2\,d\mu$.
25. Стр. 126, строка 9 снизу. Заменить $\dfrac{\varepsilon}{v(A)}$ на $\dfrac{\varepsilon}{v(A)+1}$.
26. Стр. 127, строка 9 снизу. Вместо «и $\{|f_n(\cdot)-f(\cdot)|\}$ определяет нуль» следует читать «и для фиксированного m $\{|f_n(\cdot)-f_m(\cdot)|\}$ определяет $|f(\cdot)-f_m(\cdot)|$».
27. Стр. 128, строка 7 снизу. Заменить g на f.
28. Стр. 129, строка 9 снизу. Заменить слово «теореме» словом «лемме».
29. Стр. 130, строка 7 сверху. Вместо «по лемме 15 и теореме 18» следует читать: «по леммам 15 и 18».
30. Стр. 131, строка 7 сверху. Заменить $>$ на $\geqslant$.
31. Стр. 132, строка 3 сверху. Заменить слово «теоремы» словом «леммы».
32. Стр. 132, строка 5 снизу. Вместо предложения, начинающегося со слова «Тогда», должно быть: «Так как $2|g|\geqslant|f|$, то на E мы имеем $|g(s)|\geqslant$ $\geqslant|x|/2$. Рассуждения предыдущей леммы показывают тогда, что $v(\mu, E)<\infty$».
33. Стр. 134, строка 5 снизу. После слова ДОКАЗАТЕЛЬСТВО добавить: «В случае $|f|_p=0$ или $|g|_q=0$ лемма вытекает из лемм 2.12, 2.21 и теоремы 2.20 (d), поэтому мы предположим, что ни одна из этих норм не равна нулю».
34. Стр. 135, строка 1 сверху. Заменить $f(s)$ и $g(s)$ на $|f(s)|$ и $|g(s)|$.
35. Стр. 135, строка 4 снизу. Вместо второго интеграла должно быть:

$$\int\limits_S \{|f_1(s)|+|f_2(s)|\}\,|f_1(s)+f_2(s)|^{p-1}\,v(\mu, ds).$$

36. Стр. 135, строка 3 снизу. Должно быть:

$$=\int\limits_S |f_1(s)|\,|f_1(s)+f_2(s)|^{p-1}\,v(\mu, ds)+$$

37. Стр. 135, строка 2 снизу. Должно быть:

$$+\int\limits_S |f_2(s)|\,|f_1(s)+f_2(s)|^{p-1}\,v(\mu, ds)\leqslant$$

38. Стр. 137, строка 8 снизу. Заменить ds на E.
39. Стр. 143, строка 10 сверху. Заменить слово «мерой» словами «функцией множества».
40. Стр. 144, строка 10 снизу. Заменить 7 на 8.
41. Стр. 146, строка 9 сверху. Убрать слова «однозначно определенные».

42. Стр. 153, строка 3 снизу. Вместо «из определения 11» должно быть: «из замечания, следующего за определением 11».
43. Стр. 153, строка 3 снизу. Вместо «Пусть значения μ принадлежат расширенной области вещественных чисел» должно быть: «Пусть функция μ ограничена и принимает вещественные значения».
44. Стр. 155, строка 11 сверху. Заменить «согласно теореме 4» на «согласно теоремам 4, 8».
45. Стр. 155, строка 11 снизу. Заменить Σ на Σ_1.
46. Стр. 158, строка 15 сверху. Заменить $[a, b]$ на $[a, b_1]$.
47. Стр. 159, строка 18 сверху. Перед словом «функция» добавить «счетно аддитивная».
48. Стр. 163, строка 6 снизу. Заменить E на F.
49. Стр. 164, строка 4 сверху. Заменить $\bigcap$ на $\bigcup$.
50. Стр. 164, строка 5 снизу. После E добавить $\in \Sigma$.
51. Стр. 164, строка 4 снизу. Исправить «принадлежат» на «принадлежит».
52. Стр. 165, строка 5 сверху. Исправить $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}$ на $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}$.
53. Стр. 166, строка 17 снизу. После $\mathfrak{X}$ добавить «(если $G=\varnothing$, то $f^{-1}(G)=$ $=\varnothing \in \Sigma^*$; если $G \neq \varnothing$, обозначим через $\{y_n\}$ подмножество множества $\{x_n\}$, содержащееся в G)».
54. Стр. 166, строка 16 снизу. Заменить первое x_n на y_n.
55. Стр. 166, строка 14 снизу. Исправить $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}$ на $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}$.
56. Стр. 166, строка 6 снизу. Исправить $f_n(s)$ на $f_m(s)$.
57. Стр. 169, строка 5 сверху. Заменить $n \geqslant N$ на $n=1, 2, \ldots$.
58. Стр. 169, строка 8 сверху. Заменить «относительно $n \geqslant N$» на «по n».
59. Стр. 169, строка 8 сверху. Заменить слово «разумеется» словами «в силу произвольной малости ε».
60. Стр. 172, строка 1 сверху. Исправить δ_1 на δ.
61. Стр. 172, строка 9 снизу. Исправить второе $\leqslant$ на $<$.
62. Стр. 172, строка 8 снизу. Исправить второе $\leqslant$ на $<$.
63. Стр. 177, строка 10 сверху. Исправить $<$ на $\leqslant$.
64. Стр. 177, строка 11 снизу. После слов «Пусть, далее» добавить «$\lambda_n=0$, если $\mu_n=0$, а в противном случае пусть».
65. Стр. 186, строка 12 снизу. Исправить $(-\infty, \infty]$ на $(a, b]$.
66. Стр. 188, строка 3 сверху. Заменить упражнение 20 следующим:
    20. (Ленглендс.) Регулярная комплекснозначная аддитивная функция множества, определенная на алгебре множеств в бикомпактном пространстве, счетно аддитивна.
67. Стр. 188, строка 6 сверху. После слова «пространства» добавить «и S_1 хаусдорфово».
68. Стр. 188, строка 9 сверху. Вместо слов «множеств из» должно быть «содержащей открытые подмножества пространства».
69. Стр. 189, строка 12 снизу. После слов «порождающая Σ» добавить «и пусть μ σ-конечна на Σ_1».
70. Стр. 189, строка 2 снизу. Убрать все это предложение, заменив его следующим: «Найти последовательность $\{f_n\}$ положительных функций из $L_1(S, \Sigma, \mu)$, для которой эти неравенства не все выполняются».
71. Стр. 191, строка 13 снизу. Вместо слов «вместе с ε» должно быть «когда ε убывает».
72. Стр. 198, строка 3 сверху. Заменить «измеримая» на «интегрируемая».
73. Стр. 201, строка 14 сверху. Исправить S на S_2.
74. Стр. 210, строка 11 снизу. Исправить $g(r)$ на $f(r)$.
75. Стр. 235, строка 12 снизу. Убрать эту и следующие за ней три строки, заменив их на: «$C(p, \alpha)$ — замкнутый куб с центром p и стороной длины α.

Положим

$$\mu_m(p, \alpha) = 2m \int\limits_{\alpha+\frac{1}{2m}}^{\alpha+\frac{1}{m}} \mu(C(p, \beta))\, d\beta,$$

$$\lambda_m(p, \alpha) = 2m \int\limits_{\alpha+\frac{1}{2m}}^{\alpha+\frac{1}{m}} \lambda(C(p, \beta))\, d\beta.$$

Тогда $\lambda_m(p, \alpha)/\mu_m(p, \alpha)$ для каждого $\alpha > 0$ есть непрерывная функция от p, и потому функция

$$\frac{\lambda(C(\rho, \alpha))}{\mu(C(p, \alpha))} = \lim_{m\to\infty} \frac{\lambda_m(p, \alpha)}{\mu_m(p, \alpha)}».$$

76. Стр. 262, строка 14 снизу. После μ добавить «μ-измеримых».
77. Стр. 298, строка 8 сверху. Исправить s на S.
78. Стр. 300, строка 17 сверху. После слова «если» добавить «всякое его одноточечное множество замкнуто и».
79. Стр. 315, строка 16 сверху. После S_α добавить «и $\mu(K)=0$ для каждого $K \in \Sigma$, для которого $\mu(KS_\alpha)=0$ для всех α».
80. Стр. 376, строка 19 сверху. Убрать «равномерно».
81. Стр. 393, строка 5 снизу. Вместо «непрерывна» должно быть «эквивалентна непрерывной».
82. Стр. 602, строка 7 снизу. После $j \geqslant \nu(\lambda)$ добавить «или $j=0$».

Оглавление

ЧАСТЬ II. СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ. САМОСОПРЯЖЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

ЧАСТЬ III. **СПЕКТРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ**

Н. Данфорд и Дж. Т. Шварц

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ.
СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ

Редакторы *Д. Ф. Борисова*, *Э. Э. Пейсахович*,
Н. И. Плужникова, *Л. Б. Штейнпресс*
Художник *В. В. Ашмаров*
Художественный редактор *В. И. Шаповалов*
Технический редактор *Ю. И. Экке*

Сдано в производство 22/II 1966 г.
Подписано к печати 30/VIII 1966 г.
Бумага $60\times90^{1}/_{16}$=33,25 бум. л. 66,5 печ. л.,
Уч.-изд. л. 64,09. Изд. № 1/3459
Цена 4 р. 71 к. Зак. 134

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Московская типография № 16
Главполиграфпрома Комитета по печати
при Совете Министров СССР
Москва, Трехпрудный пер., 9